

Symétrie axial d'un point et déplacement d'un segment par pliage

Ce petit texte nous est suggéré par l'intéressant article de Michel Lafond paru dans la *Feuille de vigne* n° 122 décembre 2011 (IREM de Dijon). Celui-ci présente une solution au problème posé dans le titre par cinq pliages, ce qui nous a semblé un peu long (on a toujours l'impression que l'on va faire « mieux que les autres » !). Il traite ensuite du problème du déplacement d'un segment $[AB]$ sur une droite donnée (D) distincte de (AB) , à partir d'un point C de cette droite. Nous aborderons aussi cette construction.

Dans cet article Michel Lafond parle de transparence interdite, ce qui ne nous semble pas indispensable et n'est pas signalé par les « origamistes » de notre connaissance. Quand on fait un pli avec glissement d'une droite sur elle-même pour construire une perpendiculaire passant par un point, on est parfois bien content que la feuille soit « un peu transparente » et il ne nous semble pas que cela soit grave.

Remarquons qu'il est souvent commode, lorsque l'on fait deux plis successifs, par exemple pour tracer la

perpendiculaire à une droite passant par un point, de ne pas déplier le premier pour faire le second, on fait alors ce que les origamistes appellent un « pli montagne » et les points et droites restent visibles. D'autre part, nous supposons que ce qu'il entend par « décalque » consiste par exemple à transpercer la feuille avec une pointe pour copier un point, ce qui est interdit effectivement.

En ce qui concerne les différents types de pliages et ce qu'ils font ou pas, nous vous recommandons notre article paru dans le *Miroir des maths* n°5 par l'équipe de géométrie de l'IREM de Caen (téléchargeable en ligne). Pour notre part, lors de la construction par « pli de couturière » que nous avons déjà utilisé par ailleurs pour construire le rectangle d'or, nous avons signalé l'importance, dans les constructions par pliage, de ne pas tordre la feuille, ce qui explique par exemple qu'il soit parfois impossible de reporter un segment sur un autre segment directement et qu'il faille recourir à des constructions intermédiaires (voyez l'article de M. Lafond, déjà cité et les pages suivantes de cet article).

Construire le symétrique d'un point A par rapport à un point B fixé par un « pli de couturière »

En langage « origamiste » ce pli double est appelé repli.

On suppose deux points A et B tracés sur la feuille de travail. La technique de ce pli double consiste à construire deux plis parallèles passant par deux points A et B fixés du plan, ceci en s'aidant du pli défini par les points A et B que nous noterons (AB) . Le pli orthogonal à (AB) passant par A, est en relief (on dit aussi « en avant » ou « pli montagne »), le pli orthogonal à (AB) passant par B est en creux (ou « en arrière » ou « pli vallée ») pour éviter les problèmes d'absence de transparence de la feuille.

À l'ouverture des trois plis on vérifie que les deux derniers plis sont parallèles et perpendiculaires au pli (AB) (voir la photo n°3 page suivante). Dans notre construction c'est le bord du pli en relief qui simulera une règle qui représente une droite. Ce pli double est celui que l'on fait pour faire un pli plat dans une jupe plissée (ou un kilt !) d'où le nom que nous employons : pli de couturière.

Voilà donc le défi : **construire en moins de cinq plis le symétrique axial d'un point.**

Construction

I - On trace la droite (AB) grâce à un pli (axiome 1 d'Huzita-Justin, voir la bibliographie : H. Huzita et J. Justin et notre article du *Miroir* n°5)

II - On trace la droite perpendiculaire à (AB) en B par un pli en creux (axiome 4 d'H-J)

III - On trace la droite perpendiculaire à (AB) en A par un pli en relief

IV - On rabat la feuille afin que le pliage respecte les deux plis parallèles formant le pli de couturière (photo 1), on aplatit celui-ci, l'intersection du pli en A avec le pli (AB) délivre le point A' (photo 2).

Ceci est autorisé puisque les droites sont assimilées aux plis et réciproquement (axiome 1). Ce qui fait à notre connaissance trois plis.

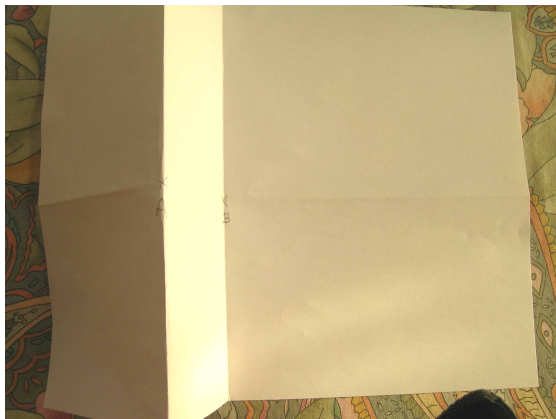


Photo n°1 - Pliage de la feuille perpendiculairement au pli (AB) en relief au point A, pliage de la feuille perpendiculairement au pli (AB) en creux en B.

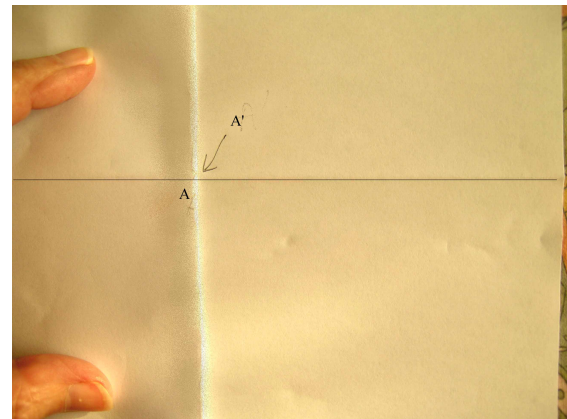


Photo n°2 - On rabat le double pli sur lui-même, le segment [AB] se trouve à l'intérieur du pli de couturière. L'intersection du pli orthogonal à la droite (AB) en A avec cette droite définit sur (AB) le point A' image de A par la symétrie de centre B.

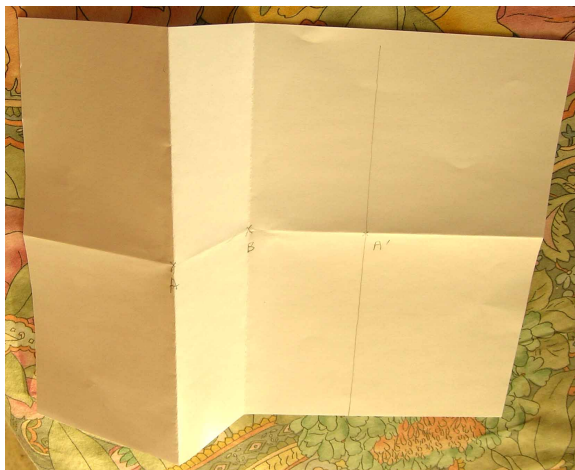
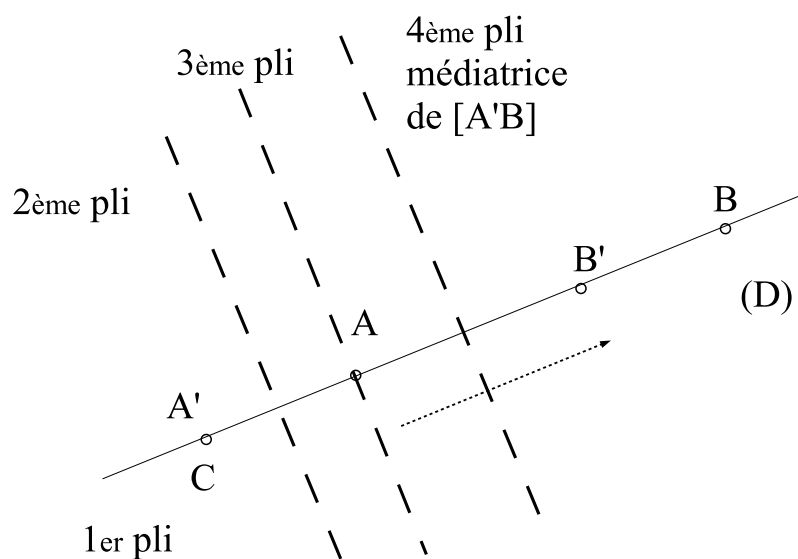
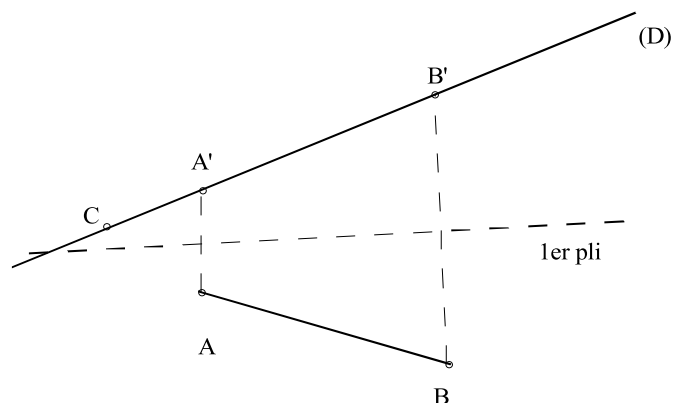


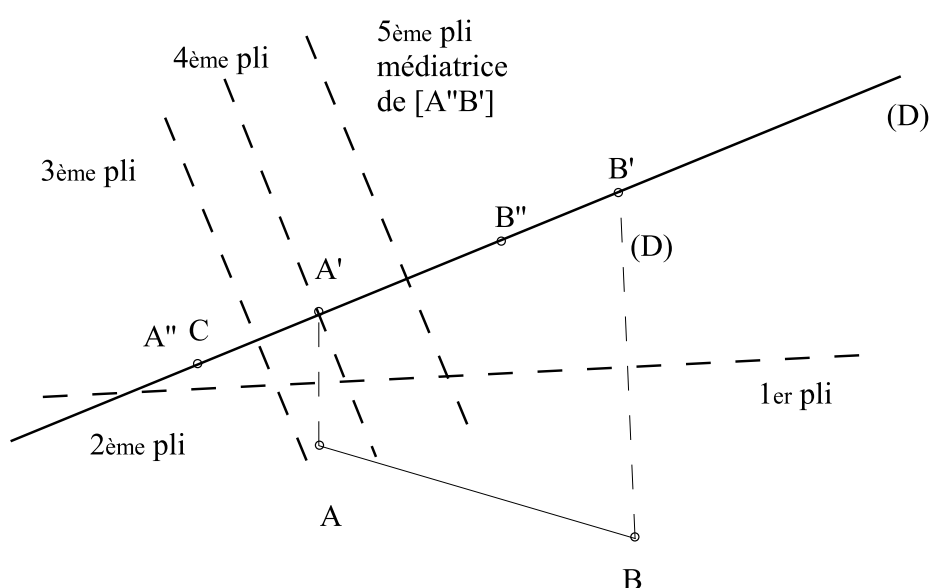
Photo n°3 - Nous avons matérialisé l'image du pli déterminant le symétrique A' de A par rapport à B par son intersection avec la droite (AB) par une ligne au crayon à papier.

Application du « pli de couturière » au glissement d'un segment [AB] le long de son axe jusqu'à un point fixé C





Notons que le pli ne passe pas nécessairement par le point C. Il reste à déplacer le segment $[A'B']$ le long de la droite (D) avec la méthode précédente. Nous avons effectué cinq plis.



Question subsidiaire : n'avons-nous pas fait un pli inutile ? Peut-on se passer, par des considérations de symétrie, du troisième pli ? (voir l'annexe)

Remarquons que les deux solutions proposées sont différentes de celle de Michel Lafond qui consiste à effectuer tout d'abord une translation de $[AB]$ en $[A'B'']$, (A' étant le point fixe imposé que nous avons appelé C) puis une rotation de $[A'B'']$ autour de A' amenant B'' sur la droite imposée.

Bibliographie

Justin Jacques *Résolution par pliage de l'équation du 3ème degré* - Publications de l'I.R.E.M. de Strasbourg, en ligne : [42_Justin.pdf](#)

Huzita H. *Démarches de la première réunion internationale de la Science et de la technologie d'Origami*, H. Huzita E-D. (1989), pp. 251–261. En ligne : [Mathématiques_des_origamis](#)

Lafond Michel *Origami : construction d'un heptagone régulier* in Feuille de vigne n°122, Décembre 2011, Publications de l'I.R.E.M. de Dijon.

Salles-Legac Danielle, Rodriguez Herrera Ruben *Nouvelles pratiques de la géométrie*. Caen, I.R.E.M. de Basse-Normandie 2006.

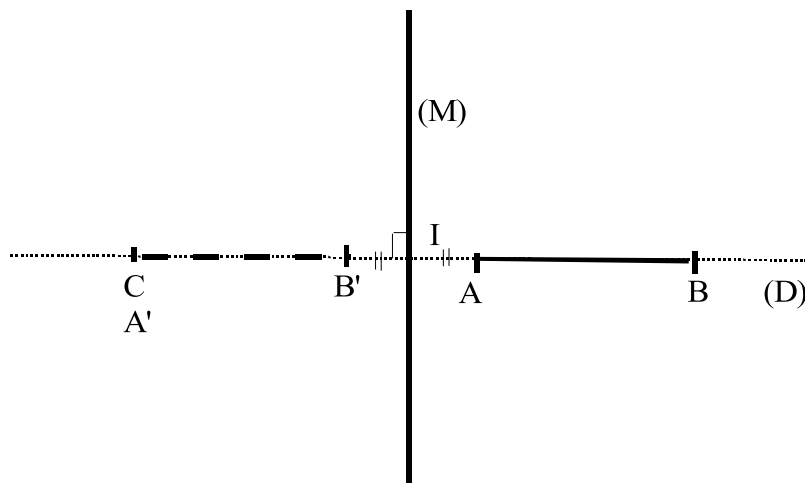
Salles-Legac Danielle et l'équipe de géométrie de l'I.R.E.M. de Basse-Normandie *Géométrie des pliages* in Le miroir des mathématiques (n°5) Décembre 2009. Caen I.R.E.M. de Basse-Normandie, en ligne : [I.R.E.M. de Basse-Normandie](#).

Annexe

Les nombreuses solutions au problème des déplacements d'un segment dans le plan par pliage sont très intéressantes dans la mesure où elles font « toucher du doigt » comme nous aimons le dire, de quelles opérations mathématiques élémentaires celles-ci sont constituées.

Dans la question subsidiaire nous abordons une propriété intéressante de la translation :

Soit un segment $[AB]$ porté par une droite (D) , on souhaite translater ce segment en $[A'B']$ d'origine C fixé :



En géométrie à la règle et au compas cette translation est immédiate par report au compas de la mesure AB à partir de C , on obtient $[A'B']$.

Nous avons vu qu'en géométrie des pliages, ce n'est pas simple puisque nous avons eu recours à quatre plis. Cela étant, observons la figure ci-dessus en supposant le problème résolu, elle nous fait apparaître une symétrie axiale que nous avons utilisé à la fin de la construction : la figure est symétrique par rapport à la médiatrice (M) de $[CB]$ qui rencontre (D) en I .

Démontrons-le : on a $AA' = BB'$ et $AB = A'B'$ par définition de la translation. I étant le milieu de $[CB]$ on a $CI = IB$ donc $B'I = CI - CB'$ et $IA = IB - AB$ d'où, $B'I = IA$. Pour trouver l'image B' de B il suffit donc de tracer par un pli la médiatrice (M) de $[CB]$, puis un pli orthogonal à (D) en A , ces deux plis définissent par un pli de couturière l'image B' de B . Nous pouvons construire cette médiatrice en deuxième pli puisque nous connaissons A , B et C . Le troisième pli amenant A sur C était donc inutile.