

Le jeu de la baguette de Buffon

Dans le quatrième tome du *Supplément* à son *Histoire naturelle, générale et particulière*¹, Buffon examine la science des probabilités ; il y remarque que, jusqu'à présent, elle ne s'est servie que de l'Analyse pour résoudre les problèmes liés au hasard, puisque, ajoutait-il, ces problèmes ont ordinairement portés sur des si-

tuations, jeux ou conjectures, relatives à des quantités discrètes. Il se propose donc d'y introduire l'usage de la géométrie en inventant des situations de hasard portant sur l'étendue, faisant ainsi intervenir des quantités continues.

Le premier exemple qu'il expose porte sur le jeu de *franc-carreau* qu'il décrit ainsi :

Dans une chambre parquetée ou pavée de carreaux égaux, d'une figure quelconque, on jette en l'air un écu ; l'un des joueurs parie que cet écu après sa chute se trouvera à franc-carreau, c'est-à-dire, sur un seul carreau ; le second parie que cet écu se trouvera sur deux carreaux, c'est-à-dire, qu'il couvrira un des joints qui les séparent ; un troisième joueur parie que l'écu se trouvera sur deux joints ; un quatrième parie que l'écu se trouvera sur trois, quatre ou six joints : on demande les sorts de chacun de ces joueurs.

Cette définition souffre cependant de plusieurs ambiguïtés, qui apparaissent au cours de l'étude du texte. D'une part les carreaux ne sont pas vraiment quelconques : Buffon examine seulement les cas du carré, du triangle équilatère, d'un losange formé de deux triangles équilatères accolés par un côté et de l'hexagone régulier ; en outre, les pavages envisagés sont les plus réguliers possible. Mais surtout, d'autre part, les éventualités sur lesquelles les joueurs parient, telles qu'elles sont décrites dans le paragraphe cité plus haut, ne correspondent pas exactement à la manière dont elles seront prises en compte dans la suite de l'étude ; ainsi, dans le premier cas où un joueur parie sur franc-carreau tandis que le second parie sur la rencontre de l'écu avec un

joint, il faut comprendre, pour être en adéquation avec les résultats donnés par Buffon, que ce second joueur parie sur la rencontre avec *au moins* un joint. Cependant une fois ces ambiguïtés levées, l'étude des divers cas s'effectue aisément dès lors que sont connus les résultats sur les aires du carré, du triangle équilatère et du disque².

Dans une seconde partie, Buffon propose un jeu qui consiste à lancer une baguette, qui deviendra vers la fin de l'étude une aiguille, dans une chambre pourvue d'abord d'un parquet de lames à bords parallèles, puis d'un pavage ordinaire à carreaux carrés. Il l'énonce ainsi :

Je suppose que dans une chambre, dont le parquet est simplement divisé par des joints parallèles, on jette en l'air une baguette, & que l'un des joueurs parie que la baguette ne croisera aucune des parallèles du parquet, & que l'autre au contraire parie que la baguette croisera quelques-unes de ces parallèles ; on demande le sort de ces deux joueurs. On peut jouer ce jeu sur un damier avec une aiguille à coudre ou une épingle sans tête.

Cette seconde partie fait intervenir des notions et résultats de géométrie plus complexes que ceux utilisés dans la première partie et comporte plus encore de confusions et d'obscurités que la partie sur le jeu de

franc-carreau. Pour toutes ces raisons elle mérite d'être étudiée en détail pour parvenir à une élucidation complète des méthodes employées et des résultats finalement obtenus.

I. – Baguette sur parquet

La figure 1, reprise de l'ouvrage même de Buffon, donne une représentation de la situation qui va être étudiée. Le rectangle ABCD représente une lame du parquet, dont les joints avec les lames voisines sont AB et CD ; les droites ab et cd sont fictives, situées à l'intérieur de la lame à une distance des joints égale à la

demi-longueur de la baguette. Cette baguette est représentée dans la partie gauche par les lignes EF et ef, figurant trois positions de cette baguette quand son milieu occupe un point déterminé de la bande limitée par ab et cd ; dans la partie droite, elle est représentée plus succinctement, par ses moitiés en eH et eφ.

¹ Voir [B, 1777] dans la bibliographie de fin d'article.

² Cf note précédente.

Le résultat suivant est obtenu à partir de la génération cinématique de la cycloïde : étant donnés une cycloïde et son cercle générateur en position médiane de son parcours (Fig. 3), [AB] étant la base de la cycloïde, E le milieu de cette base, φ le sommet, la droite pa-

rallèle à (AB) menée par un point P quelconque de la cycloïde coupant, du même côté de (E) que P, le cercle en G, alors la longueur y de l'arc φG est égale à celle du segment [PG] ⁵.

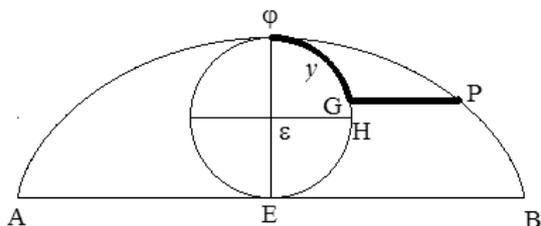


Fig. 3.

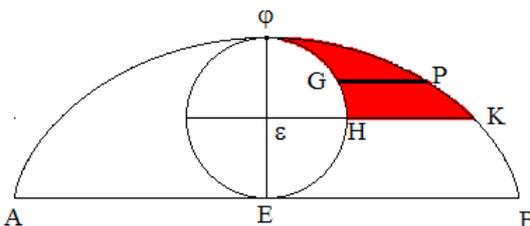


Fig. 4.

La “sommation” des longueurs y de tous les arcs φG contenus dans l'arc φH est alors équivalente, selon la méthode des indivisibles, à l'empilement des segments [PG] au-dessus de la droite (HK) (Fig. 4). Donc l'intégrale $\int y dx$ est égale à l'aire de la “corne” $\varphi GHKP$ limitée par l'arc de cercle φH , le segment [HK] et l'arc de cycloïde $K\varphi$. Cette “corne” est la

« partie de cycloïde » mentionnée par Buffon. Comment a-t-il obtenu que « cette aire de cycloïde est égale au carré du rayon » ? Ce résultat est connu depuis le milieu du XVIIe siècle ; John Wallis (1616-1703) a indiqué dans la préface de son *De Cycloïde* (1659) qu'il a été précédemment produit par Christiaan Huygens et Christopher Wren :

Non diffitetur interim Hugenium Batavum, & Wrennium nostrum prodidisse, Portionem Cycloidis quam abscindit recta ad axim ordinatim applicata, ejusdem axis partem quartam vertici proximam absindens, æqualem esse spatio rectilineo : (quod quidem verum est ; æquat utique $\frac{3}{8} R^2 \sqrt{3}$: ut ex calculo §23 liquet ; uti & trilineum CbB fig. i. vel 7, æquare R^2 quadratum radii ; [...]) ⁶

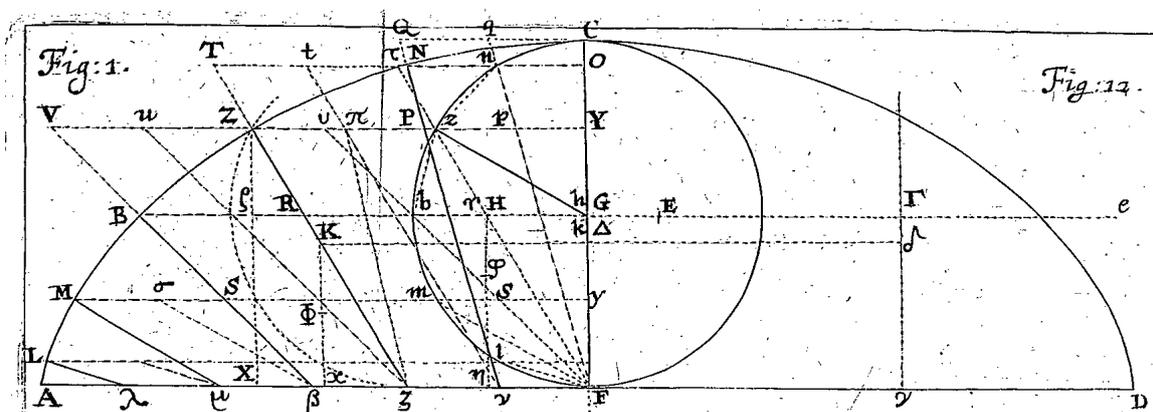


Fig. 5. John Wallis, *De Cycloïde* (1659), figure 1.

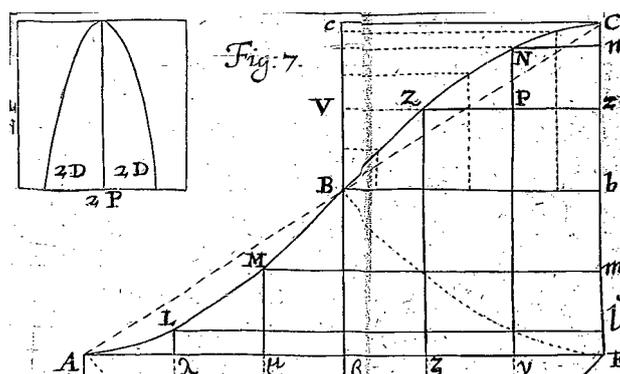
⁵Cette propriété a été démontrée par Christiaan Huygens dans une note manuscrite datée de juillet 1658, publiée dans : Christiaan Huygens, *œuvres complètes. Tome XIV. Probabilités. Travaux de mathématiques pures 1655 – 1666.* (ed. D.J. Korteweg). La Haye : Martinus Nijhoff, 1920, p. 347.

Consultable sur http://www.dbnl.org/tekst/huyg003oeuv14_01.

Huygens l'a publiée par la suite dans son traité sur les horloges à pendule : *Christiani Hugenii Zulichemii, Const. F. Horologium oscillatorium sive De Motu pendulorum ad horologia aptato demonstrationes geometricæ.* Paris, 1673. Deuxième partie, proposition xiv, p. 38. Consultable sur Gallica et sur le site précédemment mentionné.

⁶John Wallis, *Johannis Wallisii SS. Th. D. Geometriæ Professoris Saviliani Oxoniæ, Tractatus duo. Prior, De Cycloïde et corporibus inde genitis.* ...Oxford, 1659. Septième page de la préface (non paginée) :

Il n'est pas nié que dans l'intervalle le Hollandais Huygens et notre Wren ont montré, Que la portion de cycloïde que découpe une droite appliquée sur l'axe de manière ordonnée, découpant la quatrième partie de ce même axe la plus proche du sommet, est égale à une surface rectiligne : (ce qui est assurément vrai : elle est égale à $\frac{3}{8} R^2 \sqrt{3}$, comme il apparait du calcul du §23 ; de même que le trilineum CbB fig. i. ou 7, est égal à R^2 carré du rayon ; [...])

Fig. 6. John Wallis, *De Cycloide* (1659), figure 7 (détail).

Wallis a plus tard repris ces résultats dans son traité de mécanique⁷ puis dans une lettre du 22 août 1695 (calendrier julien) à Richard Waller, Secrétaire de la Royal Society⁸.

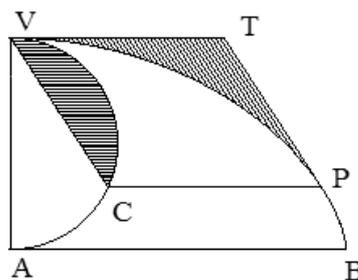
Dans l'intervalle séparant les deux précédents écrits de Wallis, Philippe de La Hire (1640 – 1718) a publié un court traité intitulé aussi *De Cycloide*, daté du 5 sep-

tembre 1676⁹. Ce traité est composé d'un lemme, de cinq propositions et d'un corollaire.

Le lemme donne une construction de la tangente en un point quelconque de la cycloïde. En reprenant les notations de la figure 3, la tangente en P est parallèle à la corde φG du cercle générateur à mi-parcours¹⁰.

La première proposition¹¹ est ainsi énoncée :

Une semicycloïde étant mise en place comme ci-dessus, TV étant menée tangente au sommet V et parallèle à la base, on trace la droite PT tangente à la cycloïde en un point quelconque P, et la droite PC parallèle à la base, et on joint CV : je dis que le triline mixtiligne PTV est égal au segment de cercle correspondant VC.

Fig. 7. Ph. de la Hire, *De Cycloide* (1676), figure 1 restituée.

La démonstration est effectuée par double réduction à l'absurde : une des deux surfaces étant supposée supérieure à l'autre, cette hypothèse conduit à une absurdité.

La troisième proposition¹² donne le résultat que Buffon a utilisé :

Soit une semicycloïde VEB de base BA, d'axe VA et de cercle générateur VDA dont le centre est C. Que soit menée CE parallèle à la base AB : je dis que le triline VHEDI est égal au carré du rayon VC du cercle générateur.

⁷John Wallis, *Mechanica, sive De Motu, tractatus geometricus. Pars secunda*. Londres, 1670. Chap. V, p. 367-389

⁸John Wallis, *An Extract from the Reverend Dr. John Wallis to Richard Waller, Esq; Secretary to the Royal Society, concerning the Spaces in the Cycloid, which are perfectly Quadrable*. Oxford, August 22. 1695.

⁹Philippe de La Hire, *De Cycloide* suivi de *De Sectionibus Conicis*. Paris, 1676.

¹⁰Descartes a donné, dans une lettre au père Mersenne du 23 août 1638, une construction équivalente de la tangente à la cycloïde ; il construit d'abord la normale au point considéré de la cycloïde (P dans la figure 3) comme étant la parallèle en P à la corde GE. La tangente s'en déduit immédiatement. Voir *Œuvres de Descartes*, par les soins de Charles Adam et Paul Tannery, comprenant la *Correspondance*. XI volumes. Paris, 1897-1907. Réédition par les éditions du CNRS et les éditions Vrin. Paris, 1974-1991. La lettre mentionnée se trouve dans le tome II de la Correspondance, sous le n° CXXXVIII, p. 307-313. Consultable sur Gallica.

Un extrait de cette lettre, se rapportant à la tangente à la cycloïde a été publié et commenté dans *Aux origines du calcul infinitésimal*. Paris : éditions Ellipses, 1999, p. 112-114.

¹¹Philippe de La Hire, *De Cycloide*, 1676, p. 1 :

Propositio I^a. Exposita semicycloide ut supra, ducta contingente TV in vertice V & parallela basi, agatur recta PT contingens Cycloidem in aliquo puncto P, & PC parallela basi, & connectatur CV : Dico triangulum mixtilineum PTV esse æquale Circuli segmento correspondenti VC.

¹²*Id.* p. 2 :

Propositio III^a. Esto semicyclois VEB cujus basis BA, Axis VA & circulus genitor VDA cujus centrum C. ducta CE parallela basi AB : dico trilineum VHEDI esse æquale quadrato Radij VC circuli genitoris.

Ducta recta DV & ejus parallela EF contingente Cycloidem in E : per descriptionem Cycloidis manifestum est parallelogrammum VDEF esse æquale dimidio circuli genitoris. Sed per primum propositionem Trilineum EFVH æquale est segmento circuli DVI, si auferamus igitur æqualia ab æqualibus scilicet à parallelogrammo VDEF & à semicirculo VDA bis segmentum Circuli VDI, remanebunt trilineum VHEDI & triangulum VDA æqualia, quod erat propositum.

La démonstration donnée par La Hire commence par la construction des tangentes à la cycloïde en V et E ; la première est parallèle à la base AB, la seconde à la corde VD. Ces deux tangentes se coupent en F ; VDEF est donc un parallélogramme dont il est *manifeste* pour La Hire que son aire \mathcal{P} est égale à celle du demi disque générateur VDA, notée \mathcal{D}_1 . Cette égalité demande aujourd'hui quelque justification ; d'une part, il est connu, et il était connu de La Hire, grâce à *La Mesure du cercle* d'Archimède¹³, que l'aire \mathcal{D} d'un disque est la même que celle du triangle rectangle ayant pour côtés de l'angle droit la circonférence du disque d'une

part et son rayon d'autre part, donc que celle, notée \mathcal{R} , d'un rectangle ayant pour côtés la demi circonférence et le rayon du disque. D'autre part, l'aire \mathcal{P} du parallélogramme VDEF est égale à celle, notée \mathcal{P}_1 , du rectangle de côtés DE et VC¹⁴ ; or le côté DE a même longueur que l'arc VD, à savoir le quart de la circonférence du cercle générateur, donc l'aire \mathcal{P}_1 du rectangle sur DE et VC vaut la moitié de celle, \mathcal{R} , du rectangle ayant pour côtés la demi circonférence et le rayon du disque, donc \mathcal{P}_1 vaut la moitié de l'aire \mathcal{D} du disque, à savoir \mathcal{D}_1 , aire du demi disque VDA.

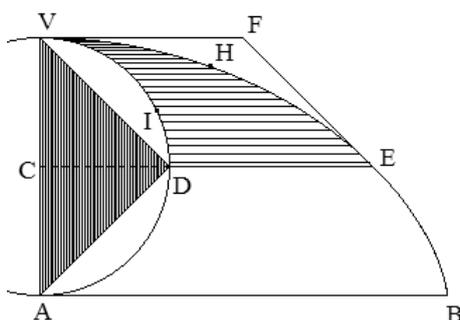


Fig. 8. Ph. de la Hire, *De Cycloïde* (1676), figure 3 restituée.

La "corne" VHEDI est obtenue en retranchant du parallélogramme VDEF le segment de cercle VID et le triligne VHEF qui a la même aire que le segment VID ; donc son aire est obtenue en diminuant celle du parallélogramme du double de l'aire du segment VID. Cette aire est donc égale à celle du demi disque diminuée des aires égales des deux segments de disque VID et AD. L'aire de la "corne" VHEDI est donc égale à celle du triangle VDA, et donc à celle du carré sur CD, rayon du cercle générateur. CQFD.

De quels de ses prédécesseurs Buffon a-t-il connu ces résultats : Huygens, Wren, Wallis, La Hire ou autre ? Difficile de répondre à cette question sans une connaissance de la bibliothèque de Buffon, connaissance qui ne

serait même peut-être pas suffisante pour assurer une réponse. Il n'est cependant pas invraisemblable que Buffon, membre de l'Académie Royale des Sciences à partir de 1733, ait pu connaître le traité de La Hire qui fut membre de la même académie jusqu'à sa mort en 1718.

En utilisant la formule $a = \frac{\int y dx}{\frac{1}{2}C}$ exprimant le fait que le jeu est égal entre les deux joueurs, et $C = \frac{\pi}{2}b$, il vient $a = \frac{b^2}{\frac{\pi}{4}b} = \frac{4b}{\pi}$ ou encore $b = \frac{\pi}{4}a$, ce que Buffon exprime par « la longueur de la baguette doit faire à peu-près les trois quarts de la distance des joints du parquet ».

II. – Baguette sur carrelage

Buffon aborde alors un cas semblable bien qu'un peu plus difficile, celui où le parquet à lames est remplacé par un pavage standard à carreaux carrés. Les notations restent les mêmes que précédemment :

a désigne le demi côté du carreau, b la demi longueur de la baguette, C le quart de la circonférence du

cercle de rayon b et y la longueur d'un arc variable du quart de cercle de rayon b .

Comme ne le fait pas Buffon, il convient de remarquer que si la longueur de la baguette excède celle de la diagonale du carreau, la baguette rencontre toujours un joint. Donc il est supposé ici le contraire, à savoir

¹³ Archimède, *La Mesure du cercle*. Paris : Les Belles Lettres, 1970. Tome I. Traduit du grec par Charles Mugler, p. 138g :

I. Tout cercle est équivalent à un triangle rectangle dans lequel l'un des côtés de l'angle droit est égal au rayon du cercle et la base (c'est-à-dire l'autre côté de l'angle droit) égale au périmètre du cercle.

¹⁴ Euclide, *Les Éléments*. Volume I. Traduit du grec par Bernard Vitrac. Paris : Presses Universitaires de France, 1990. Livre I, proposition 35, p. 262 :

Les parallélogrammes qui sont sur la même base et dans les mêmes parallèles sont égaux entre eux.

$$2b < 2\sqrt{2}a \quad \text{ce qui équivaut à} \quad \frac{a}{b} > \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Buffon inscrit dans le carreau un carré homothétique distant de b des côtés du carreau et par souci de simplification et raison de symétries, il mène l'étude sur un quart de carreau, ABCD (Fig. 9).

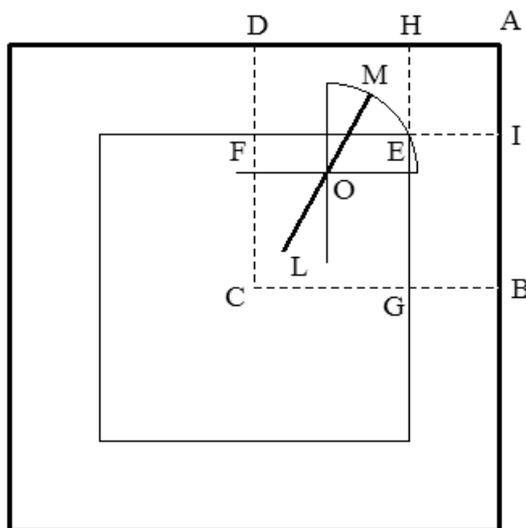


Fig. 9. Carreau et baguette : premier cas.

Buffon, dans un premier temps, donne $C(a - b)^2$ pour “mesure” de la “quantité” d’une partie des cas où la baguette ne rencontre aucun joint. Il est aisé ici de reconnaître dans ces cas ceux où le milieu O de la baguette tombe dans le carré CFEG ; conformément à la méthode employée précédemment par Buffon, la “quantité” de telles positions de la baguette est “mesurée” par le produit de l’aire du carré CFEG par le quart de la circonférence du cercle de diamètre b , donc par $C(a - b)^2$.

Buffon annonce ensuite, sans explication ni *a fortiori* de démonstration, $(2a - b) \int y dx$ pour “mesure” de la “quantité” des cas où la baguette rencontre un joint. Il ne semble pas outrancier de proposer ici une tentative de reconstitution d’un chemin vraisemblablement suivi par la pensée de Buffon pour atteindre le résultat annoncé.

La baguette ne peut rencontrer un joint que si son milieu tombe dans le gnomon ABGEFD. Ce polygone est alors partagé en trois parties, deux rectangles, DHEF et EIBG, et un carré, le coin AIEH (Fig. 9).

1.- Dans le cas où le milieu O de la baguette tombe

dans le rectangle DHEF (Fig. 10), il est naturel de reprendre la procédure suivie par Buffon dans le cas d’une lame de parquet. Le milieu O de la baguette tombant en un point fixé de DHEF, le quart de cercle de centre O et de rayon b coupant le joint AD en M , la “quantité” de positions où la baguette rencontre ce joint est “mesurée” par y , longueur de l’arc NM . Lorsque O occupe toutes les positions sur le segment $[PR]$, la “quantité” de positions de rencontre est “mesurée” par l’intégrale sur $[PR]$ des arcs NM , donc par $\int_0^b y dx$, où x désigne la longueur PO (ou RO). Cette intégrale est notée, comme précédemment, $\int y dx$. En conséquence la “quantité” de positions de rencontre du joint quand le milieu de la baguette tombe dans le rectangle DHEF est “mesurée” par le produit de cette intégrale par la longueur DH du rectangle donc par $(a - b) \int y dx$. Par symétrie, ce nombre “mesure” aussi la “quantité” de positions de rencontre de la baguette avec le joint quand le milieu de la baguette tombe dans le rectangle EIBG.

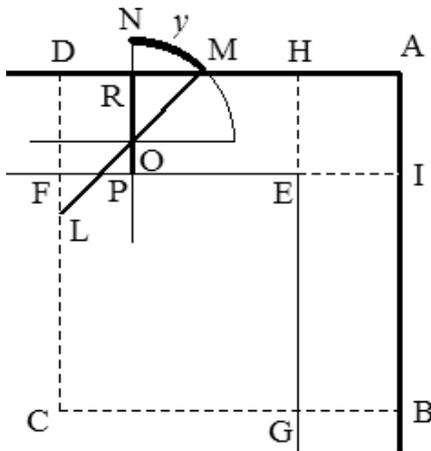


Fig. 10. Carreau et baguette. Cas 1

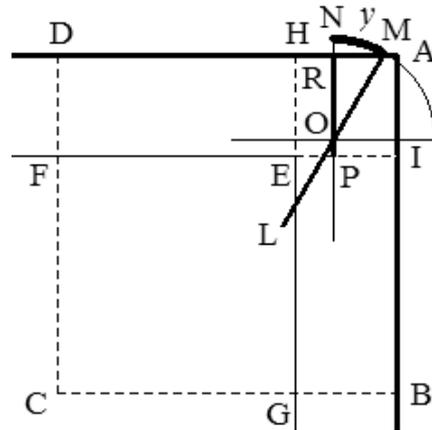


Fig. 11. Carreau et baguette. Cas 2

2.- Pour le cas où le milieu de la baguette tombe dans le carré de coin AIEH (Fig. 11), il semble que Buffon procède de la même façon et obtient pour la “quantité” de positions de rencontre $b \int y dx$. Mais la procédure utilisée dans ce cas est, dès l’abord, problématique et en

fait erronée ; en effet, le quart de cercle sur lequel se situe l’extrémité de la baguette coupe les deux joints du coin (Fig. 11).¹⁵

Cependant, en suivant la probable démarche de Buffon, la “quantité” de positions de rencontre de la baguette avec un joint est “mesurée” par :

$$2(a-b) \int y dx + b \int y dx \quad \text{soit} \quad (2a-b) \int y dx$$

Pour déterminer la “quantité” de positions où la baguette ne rencontre pas un joint, toujours dans le cas où son milieu tombe dans le gnomon ABGEFD, Buffon calcule la différence entre la “quantité” de toutes les positions pour lesquelles le milieu O tombe dans le gnomon et celle des positions de rencontre avec un joint, $(2a-b) \int y dx$. Buffon, une fois encore, n’explicite pas le calcul de la première de ces “quantités”, mais il est fa-

cile de comprendre qu’elle est “mesurée” par le produit de l’aire du gnomon par le quart de la circonférence du cercle de rayon b , donc par

$$[a^2 - (a-b)^2] \cdot C = Cb(2a-b).$$

Ainsi la “quantité” de positions où la baguette ne rencontre pas un joint, toujours dans le cas où son milieu tombe dans le gnomon, est “mesurée” par :

$$C = Cb(2a-b) - (2a-b) \int y dx.$$

Bilan

Au total, la “quantité” des positions où la baguette ne rencontre aucun joint est “mesurée” par : $C(a-b)^2 + Cb(2a-b) - (2a-b) \int y dx$ tandis que la “quantité” des positions où la baguette rencontre un joint est “mesurée” par : $(2a-b) \int y dx$.

Le jeu est donc égal à la condition

$$\begin{aligned} C(a-b)^2 + Cb(2a-b) - (2a-b) \int y dx &= (2a-b) \int y dx \\ \text{Soit} \quad C(a-b)^2 + Cb(2a-b) &= 2(2a-b) \int y dx^{16} \\ \Leftrightarrow C(a^2 - 2ab + b^2 + 2ab - b^2) &= 2(2a-b) \int y dx \\ \Leftrightarrow Ca^2 &= 2(2a-b) \int y dx \\ \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{2}Ca^2}{2a-b} &= \int y dx \end{aligned}$$

En reprenant le résultat précédemment utilisé, à savoir $\int y dx = b^2$, Buffon obtient $\frac{\frac{1}{2}Ca^2}{2a-b} = b^2$ dont il déduit, sans indiquer comment, que le rapport du côté du carreau à la longueur de la baguette est voisin de $\frac{41}{22}$.

¹⁵Une étude de la méthode suivie par Laplace pour résoudre correctement ce problème fait l’objet de l’appendice 1.

¹⁶Et non $C(a-b)^2 + Cb(2a-b) = (2a-b)^2 \int y dx$ comme le mentionne le texte.

Il est aisé d'obtenir la valeur du rapport a/b par la résolution d'une équation polynomiale du second degré. En effet

$$\begin{aligned} \frac{\frac{1}{2}Ca^2}{2a-b} = b^2 &\Leftrightarrow \frac{\pi}{4}ba^2 = (2a-b)b^2 \quad \text{car} \quad C = \frac{\pi}{2}b \\ &\Leftrightarrow \frac{\pi}{4}a^2 - 2ab + b^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{\pi}{4}\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 2\frac{a}{b} + 1 = 0 \end{aligned}$$

Cette équation a pour discriminant $4 - \pi > 0$; elle a donc deux solutions réelles :

$$s_1 = \frac{2 + \sqrt{4 - \pi}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{4 + 2\sqrt{4 - \pi}}{\pi} \quad \text{et} \quad s_2 = \frac{4 - 2\sqrt{4 - \pi}}{\pi}$$

qui ont respectivement pour valeurs approchées 1,86 et 0,68 à 10^{-2} près. Or le rapport du côté du carreau à la longueur de la baguette est soumis à la condition $\frac{a}{b} > \frac{\sqrt{2}}{2}$. Donc la solution s_2 ne convient pas. Buffon utilisant

$$\frac{22}{7} \text{ pour valeur approchée de } \pi, s_1 \text{ est voisine de } \frac{4 + 2\sqrt{4 - \frac{22}{7}}}{\frac{22}{7}} = \frac{28 + 14\sqrt{\frac{6}{7}}}{22} \text{ et } 28 + 14\sqrt{\frac{6}{7}} \approx 40,96.$$

Donc le jeu est égal lorsque le rapport du côté du carreau à la longueur de la baguette est voisin de Buffon ajoute que, ce rapport étant légèrement inférieur à 2, il y aurait intérêt, si la longueur de la baguette¹⁷ est moitié du côté des carreaux, « à parier que l'aiguille croisera les joints. »

Dans un bref paragraphe, Buffon aborde enfin le cas où le jeu consiste à lancer une pièce carrée, de demi diagonale b , sur pavage à pavés carrés de côté a . Il donne sans explication le résultat suivant : le rapport du total des sorts au sort du joueur qui parie pour le joint est

$$\frac{a^2 C}{4ab^2\sqrt{\frac{1}{2}} - b^3 - \frac{1}{2}Ab}$$

où A désigne l'excès du cercle circonscrit à la pièce carrée sur ce carré. Sachant que $C = \frac{\pi}{2}$ et que $A = (\pi - 2)b^2$, ce rapport se simplifie en $\frac{\pi a^2}{4\sqrt{2}ab - \pi b^2}$.

En dépit de ses imprécisions et d'une erreur dans la dernière partie, l'essai de Buffon a le grand mérite d'avoir abordé des problèmes de probabilités continues pour la première fois, semble-t-il. Buffon y utilise avec bonheur, les résultats de la géométrie du XVII^e siècle, en particulier sur la cycloïde, ce dont témoigne Fontenelle dans l'*Histoire de l'Académie Royale des Sciences en 1733* : « Il y a donc une certaine largeur de la planche qui rendrait le pari ou le jeu égal, & c'est ce que M. le Clerc a déterminé par une aire de Cycloïde avec beaucoup d'élégance au jugement de l'Académie. ». Une lecture attentive du texte montre que son objet ne concerne pas le calcul d'une approximation du nombre π auquel il a été maintes fois réduit par la suite.

Bibliographie.

- [A & Z, 2006] **M. AIGNER & G. M. ZIEGLER**, *Raisonnements Divins*, 2^{ème} éd., Berlin, Springer, 2006. Chap. 21, Le problème de l'aiguille de Buffon, p. 153-156.
- [B, 1777] **G.-L. LECLERC**, Comte de **BUFFON**, l'*Histoire naturelle, générale et particulière. Servant de suite à l'Histoire Naturelle de l'Homme* (1777). Supplément, Tome Quatrième. XXIII, p. 95-105.
- [H, 1981] **P. HOLGATE**, Buffon's Cycloid in *Studies in the history of probability and statistics* XXXIX, *Biometrika*, 68, 3, p. 712-716.
- [K, 2009] **A. KALOUSOVA**, Solutions of Buffon's problems in the 19th century, in WDS'09 Proceedings of contributed Papers, Part I, Matfyzpress, 198-203, 2009.
- [L, 1812] **P.-S. de LAPLACE**, *Théorie analytique des Probabilités*, 1^{ère} éd., Paris : Veuve Courcier, 1812, p. 359-362.

¹⁷En fait Buffon utilise ici le terme *aiguille* au lieu du mot *baguette* employé jusqu'à présent.

Appendices

1. Solution du problème de Buffon par Laplace

À la fin du chapitre V du Livre II de son monumental traité, *Théorie analytique des probabilités*, publié en 1812, Pierre-Simon de Laplace propose de « faire usage du Calcul des Probabilités pour rectifier les courbes et quarrer les surfaces. » Il mentionne ensuite le problème de Buffon, sans faire aucune référence à son auteur, dans les termes suivants : « Imaginons un plan divisé par des lignes parallèles équidistantes de la quantité a ; concevons de plus un cylindre très étroit, dont $2r$ soit la longueur, supposée égale ou moindre que a . On demande la probabilité qu'en le projetant, il rencontrera une des divisions du plan. »¹⁸. La résolution qu'il propose est plus simple que celle de Buffon pour deux raisons principales. La première est sa façon de modéliser le problème : il étudie l'intersection d'un cylindre

d'épaisseur négligeable, espace balayé par la baguette quand elle tourne autour de son centre, et d'un réseau de lignes parallèles équidistantes. La seconde est l'utilisation du calcul intégral pour le traitement mathématique du problème. Il imagine que le centre du cylindre est placé sur une perpendiculaire à deux divisions parallèles successives, à la hauteur y au-dessus de la première de ces divisions et note φ l'angle que fait le cylindre avec la perpendiculaire, au moment où il rencontre cette division (Fig. 12). L'ensemble des cas favorables à cette rencontre correspond à toutes les positions obtenues en faisant tourner le cylindre autour de son centre pour lesquelles une des extrémités d'un diamètre est sur la partie de circonférence de longueur 2φ . Il somme tous ces arcs pour y variant de 0 à r et, comme un diamètre a deux extrémités, doit calculer $4 \int_0^r \varphi dy$.

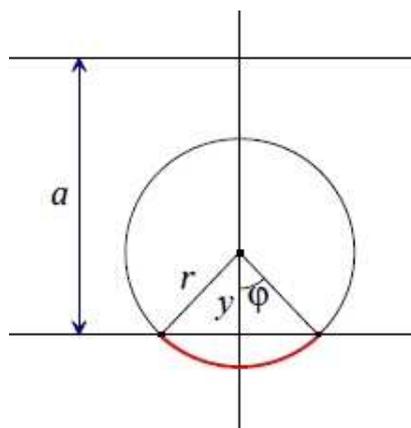


Fig. 12.

À l'aide d'une intégration par parties, il obtient :

$$4 \int_0^r \varphi dy = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} y d\varphi = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} r \cos \varphi d\varphi.$$

En remarquant que le cylindre peut rencontrer la division suivante quand y varie de $a - r$ à a , il obtient de même une somme des arcs favorables à une rencontre

avec la deuxième division égale à $4r$ et obtient finalement la somme de tous les arcs favorables à une rencontre égale à $8r$. La somme de tous les arcs (ensemble des cas possibles) quand le centre du cylindre décrit le segment perpendiculaire aux deux divisions entre celles-ci vaut $a2\pi$. Il en déduit :

« la probabilité de rencontre d'une des divisions du plan par le cylindre est donc $\frac{4r}{a\pi}$. »

Ensuite, il imagine un système de lignes perpendiculaires aux précédentes et équidistantes d'une distance b supérieure ou égale à la longueur $2r$ du cylindre formant avec les précédentes un réseau rectangulaire. C'est une généralisation du problème de Buffon (qui avait envisagé le cas $a = b$) et Laplace le résout correctement. Il considère un rectangle de hauteur a et de longueur b et construit à l'intérieur de ce dernier des droites parallèles

aux côtés du premier, à une distance r . Le rectangle initial est ainsi constitué d'un rectangle de longueur $b - 2r$ et de hauteur $a - 2r$, de deux rectangles de hauteur r et de longueur $b - 2r$, de deux rectangles de hauteur $a - 2r$ et de longueur r et de 4 carrés de côté r .

Lorsque le centre du cylindre se trouve à l'intérieur du premier rectangle, le cylindre ne peut rencontrer les côtés du grand rectangle.

¹⁸Voir [L, 1812], p. 359 dans la bibliographie de fin d'article

Lorsque le centre du cylindre se trouve à l'intérieur d'un des deux rectangles de hauteur r et de longueur $b - 2r$, le nombre de combinaisons où le cylindre rencontre les côtés du grand rectangle s'obtient comme précédemment et vaut $8r(b - 2r)$.

De même, lorsque le centre du cylindre se trouve à l'intérieur d'un des deux rectangles de hauteur $a - 2r$ et de longueur r , le nombre de combinaisons où le cylindre rencontre les côtés du grand rectangle vaut $8r(a - 2r)$.

Il considère enfin le cas des quatre petits carrés. Soit $ABCD$ le carré situé en haut à droite (A étant le sommet du grand rectangle) et trace dans ce carré le quart de cercle \widehat{BD} de centre A et de rayon r .

Lorsque le centre du cylindre se trouve dans le quart de disque limité par \widehat{BD} , le cylindre, quelle que soit sa position, rencontre les côtés du grand rectangle : le nombre de combinaisons correspondant à ce cas est égal

au produit de 2π par l'aire du quart de disque, c'est-à-dire $\frac{\pi^2 r^2}{2}$.

Lorsque le centre du cylindre se trouve dans la partie du carré à l'extérieur du quart de disque limité par \widehat{BD} , le cylindre en tournant peut rencontrer l'un ou l'autre des côtés AB et AD prolongés, mais pas les deux simultanément. Pour déterminer le nombre de combinaisons relatives à cette rencontre, il considère les projections du centre sur les côtés AB et AD , place les quatre points à distance r du centre sur les côtés AB et AD éventuellement prolongés (Fig. 13). En notant x et y les distances du centre aux côtés AB et AD , 2φ et $2\varphi'$, les angles interceptés par les arcs extérieurs au grand rectangle, il trouve un nombre de combinaisons dans lesquelles le cylindre rencontre l'un des côtés du grand rectangle égal à $4 \int \varphi + \varphi' dx dy$ où $x = r \cos \varphi'$ et $y = r \cos \varphi$.

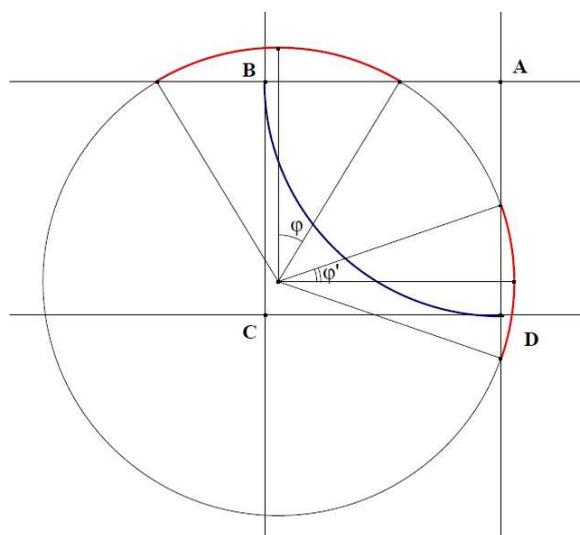


Fig. 13.

Cette intégrale vaut $4r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}-\varphi} (\varphi + \varphi') \sin \varphi' d\varphi' d\varphi$ soit $\frac{1}{2}r^2(12 - \pi^2)$.

D'où pour l'ensemble des quatre carrés, $4 \left(\frac{1}{2}r^2(12 - \pi^2) + \frac{\pi^2 r^2}{2} \right)$ et pour les quatre rectangles périphériques, $8ar - 16r^2 + 8br - 16r^2 = 8(a + b)r - 32r^2$.

Le nombre total de combinaisons relatives à la rencontre du grand rectangle par le cylindre est donc égal à $8(a + b)r - 8r^2$. Comme la somme de tous les arcs (ensemble des cas possibles) quand le centre du cylindre parcourt le rectangle vaut $ab2\pi$, Laplace en déduit :

« la probabilité de la rencontre des divisions du plan par le cylindre est donc $\frac{4(a + b)r - 4r^2}{ab\pi}$. »

Remarque :

Si on utilise le résultat obtenu par Laplace au cas où $a = b$ (celui qu'avait envisagé Buffon), on a donc une probabilité de rencontre égale à $\frac{8ar - 4r^2}{a^2\pi}$.

Le jeu sera égal si $\frac{8ar - 4r^2}{a^2\pi} = \frac{1}{2}$, soit $\frac{16a'r - 4r^2}{4a'^2\pi} = \frac{1}{2}$, en notant a' le demi-côté du carré.

Cette équation équivaut à : $\frac{\pi}{2} \left(\frac{a'}{r} \right)^2 - 4 \frac{a'}{r} + 1 = 0$, équation polynomiale du second degré dont l'unique solution vérifiant $\frac{a'}{r} \geq 1$, vaut $\frac{4 + \sqrt{16 - 2\pi}}{\pi}$.

Cette valeur voisine de $\frac{4 + \sqrt{16 - 2 \cdot \frac{22}{7}}}{\frac{22}{7}} = \frac{28 + 2\sqrt{119}}{22} \approx \frac{50}{22}$ est différente de celle trouvée par Buffon.

2. Sur l'évaluation de π

En revenant au cas de la baguette jetée sur un parquet, il a été montré que la "quantité" des positions de la baguette coupant (AB) est "mesurée" par $f \cdot \int y dx$ tandis que la "quantité" totale des positions de la baguette est "mesurée" par $f \cdot aC$, si bien que la probabilité p pour que la baguette rencontre le joint est

$$p = \frac{f \cdot \int y dx}{f \cdot aC} = \frac{b^2}{a \frac{\pi}{2} b} = \frac{2b}{\pi a}$$

soit, en posant $r = \frac{a}{b}$ qui est la véritable variable du problème,

$$p = \frac{2}{\pi r} \quad (1)$$

Si la longueur de la baguette est égale à la largeur de la lame de parquet, donc si $r = 1$, alors $p = \frac{2}{\pi}$

Soit $\pi = \frac{2}{p}$ ou, en remplaçant p par la fréquence f de rencontre de la baguette avec le joint pour un grand nombre de jets, $\pi \approx \frac{2}{f}$. Toutefois, si $b > \frac{\pi}{2}a$, il vient $r < \frac{2}{\pi}$. La formule (1) semble alors induire un résultat aberrant, à savoir : $p > 1$

Ce serait oublier que la démarche adoptée par Buffon n'est valide que pour $b \leq a$.

Au sujet de cette méthode du type *Monte-Carlo*, nous pouvons lire dans l'ouvrage de **Jean-Paul Delahaye**, *Le fascinant nombre π* , que son efficacité est très mauvaise et se distraire, pour finir, des faits rapportés.

« Des expériences ont prétendument été réalisées pour mesurer π par la méthode de Buffon :

- en 1850, **Wolf** lance 5000 aiguilles avec un rapport $\frac{b}{a} = 0,8$ et trouve 2532 intersections ; il en déduit l'approximation $\pi \approx 3,1596$
- en 1855, **Smith d'Aberdeen** lance 3204 aiguilles avec un rapport $\frac{b}{a} = 0,6$ et trouve 1218,5 intersections (les demi-intersections correspondent aux cas ambigus) ; il en déduit l'approximation $\pi \approx 3,1553$
- en 1860, **Augustus De Morgan** lance 600 aiguilles avec un rapport $\frac{b}{a} = 1$ et trouve 382,5 intersections ; il en déduit l'approximation $\pi \approx 3,137$
- en 1864, le capitaine **Fox** lance 1030 aiguilles avec un rapport $\frac{b}{a} = 0,75$ et trouve 489 intersections ; il en déduit l'approximation $\pi \approx 3,1595$
- en 1901, **Lozzerini** lance 3404 aiguilles avec un rapport $\frac{b}{a} = 0,83$ et trouve 1808 intersections ; il en déduit l'approximation $\pi \approx 3,1415929$
- enfin en 1925, **Reina** lance 2520 aiguilles avec un rapport $\frac{b}{a} = 0,5419$ et trouve 859 intersections ; il en déduit l'approximation $\pi \approx 3,1795$.

Pour railler ceux qui prétendent déterminer π avec ce type d'expérience, et qui arrangent parfois leurs résultats (le résultat de Lozzerini est trop beau pour être vrai), **N. Gridgeman** proposa d'utiliser des aiguilles de taille adaptée. En prenant par exemple $b = 78,5398$ centimètres et $a = 1$ mètre, la probabilité est $\frac{2 \times 0,785398}{\pi}$; en lançant seulement deux aiguilles, si l'une coupe le bord de la lame et pas l'autre, on obtient un score de $\frac{1}{2}$, d'où l'on tire l'approximation de $\pi = 4 \times 0,785398 = 3,141592$ ce qui n'est pas mal ! »