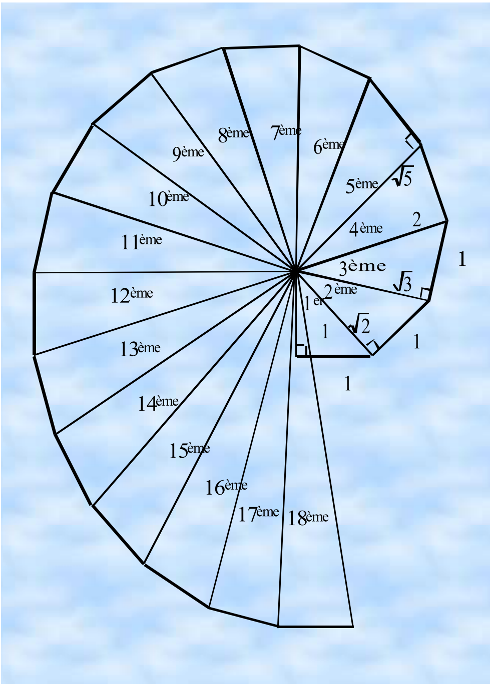
Construire par pliage un carré dont l'aire est le tiers de celle d'un carré donné

Nous vous présentons une solution accessible dès la classe de seconde à un problème posé dès le début de notre ère par les géomètres des Indes[1] .

Rappel : utilisation de l'Escargot de Pythagore

Rappelons que la figure dite “Escargot de Pythagore” permet de construire successivement les racines carrées des nombres entiers $\sqrt{n}$ (où $n \geqslant 2$) comme hypoténuse d'un triangle rectangle de petits côtés de l'angle droit de mesures $\sqrt{n-1}$ et 1.

Nous vous rappelons ci-dessous une partie de l'activité proposée dans notre ouvrage : Nouvelles pratiques de la géométrie (voir la bibliographie).



Traçons un triangle rectangle isocèle de petits côtés de longueurs 1. L'hypoténuse a pour longueur $\sqrt{2}$. Traçons ensuite, le long de l'hypoténuse, un triangle rectangle de petits côtés de longueurs $\sqrt{2}$ et 1, son hypoténuse a pour longueur $\sqrt{3}$.

En itérant le processus, on obtient successivement des triangles rectangles dont les hypoténuses mesurent les racines carrées des nombres entiers.

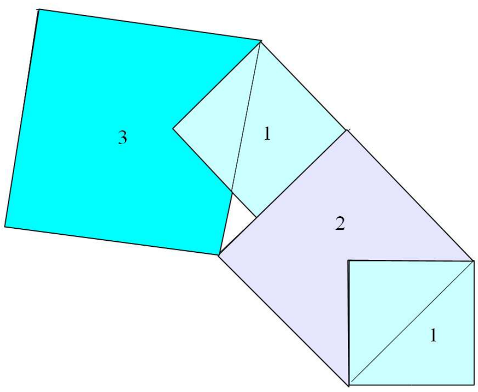
Les côtés extérieurs des triangles forment une spirale par morceaux de longueur 1. On observe que les angles au centre de la spirale sont de plus en plus petits et il se pose une question naturelle :

« Combien faut-il tracer de triangles pour que la somme des angles au centre soit au moins 360° ? »

La réponse est lisible sur la figure mais il est conseillé d'en vérifier la validité.

Application de la méthode de Pythagore à la construction d'un carré dont l'aire est triple de celle d'un carré donné, sans calcul et sans règle graduée

Nous avons vu (dans notre brochure « Découvrir et démontrer[1] ») qu'il est possible, connaissant un carré, de construire un carré de mesure d'aire moité et un carré de mesure d'aire double de celle du premier carré. Utilisons l'escargot de Pythagore pour construire un carré de mesure d'aire triple de celle du premier carré :



Cette activité peut être présentée aux grands élèves ayant la notion de racine carrée et connaissant bien le théorème de Pythagore, sous la forme d'une devinette (énoncé 1) :
« Dans la figure ci-dessus le carré numéro 3 a une aire triple de celle du carré numéro 1, savez-vous pourquoi ? »

[1]Ce travail est une suite naturelle à une activité de notre brochure « Découvrir et démontrer en géométrie avec des pièces de puzzle » mais peut-être lu indépendamment, voir bibliographie.

Remarquons qu'il est inutile d'imposer une unité de mesure de longueur ou d'aire, ce qui compliquerait les calculs. Comme précédemment, nous décidons que c'est la mesure du côté du premier carré qui sert d'unité de longueur, que l'on appellera si l'on veut, le “boulga” ou tout autre nom choisi par les élèves.

Si les élèves ont déjà réalisé l'activité de doublement de l'aire en construisant la surface associée, il est probable qu'ils trouveront facilement, sinon on pourra leur énoncer le problème de façon plus traditionnelle, par exemple avec l'exercice suivant :

▷ On considère un carré de côté 1, quelle est la mesure de ses diagonales ?
▷ Quelle est l'aire d'un carré de côté de mesure $\sqrt{2}$?
▷ Construisez, à l'aide d'une diagonale du carré de côté 1, un carré d'aire double de celle du premier carré (avec la règle et l'équerre).
▷ Quelle est la mesure de l'hypoténuse d'un triangle rectangle de petits côtés de l'angle droit 1 et $\sqrt{2}$?
▷ En utilisant la propriété de la question précédente, construisez un triangle rectangle d'hypoténuse de mesure $\sqrt{3}$. Construisez ensuite un carré d'aire de mesure 3. (énoncé 2)

Remarque : comparez l'énoncé 1 à l'énoncé 2 ou “**un bon dessin vaut mieux qu'un long discours**”, ce qu'avaient bien compris les anciens géomètres mais n'est pas pédagogique si l'on n'a pas pris la précaution de “préparer le terrain”. En effet, « le bon dessin est dans la tête du professeur mais pas toujours dans celle de l'élève ».

Comme nous l'avons remarqué plus haut, nous avons choisi une unité de mesure de longueur simplificatrice le “boulga” comme nous l'avons fait dans d'autres activités. On pourra leur faire remarquer à la fin de l'activité que “le boulga ne sert à rien” (ici, mais dans d'autres cas, peut-être pas).

Une question intéressante peut alors se poser : supposons que l'on choisisse comme unité de longueur la moitié d'un boulga soit un “miboulga”, la construction donne-t-elle le même résultat ?

Reprenons l'exercice :

Le carré de départ a pour côté deux miboulgas, son aire est donc 4 miboulgas carrés, ses diagonales de mesures d vérifient le théorème de Pythagore : $2^2+2^2=d^2$ en miboulgas carrés ; $d^2=8$ et $d=2\sqrt{2}$ miboulgas. L'aire du carré de côté d est $d^2=8$ qui est le double de celle du carré de départ.

Le triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit mesurent respectivement 2 et $2\sqrt{2}$ a pour hypoténuse h. Celle-ci vérifie : $2^2+(2\sqrt{2})^2=h^2$ soit $h^2=12$ et $h=2\sqrt{3}$ miboulgas. L'aire du carré de mesure de côté h est 12 miboulgas carrés soit le triple de celle du premier carré.

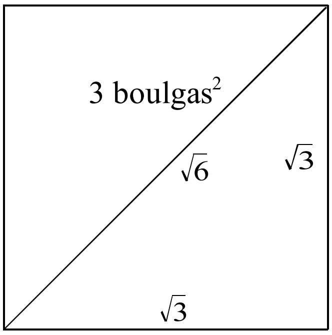
Étude du problème réciproque : connaissant un carré de mesure d'aire 3, construire par pliage un carré de mesure d'aire 1

Nous avons vu précédemment que la construction d'un carré de surface moitié de celle d'un carré donné n'est pas un problème élémentaire et qu'il peut donner lieu à une **réflexion intéressante sur la différence entre la division des longueurs et la division des aires**.

Le problème que nous vous proposons maintenant est plus difficile puisqu'il va nous faire manipuler le nombre réel $\sqrt{3}$ et que ce nombre n'apparaît pas de façon naturelle dans les calculs d'aires de carrés.

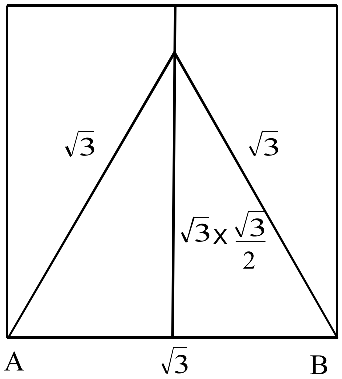
Nous proposons donc aux élèves d'observer un carré dont, par hypothèse, l'aire est 3 (boulgas^2). En effet il nous semble plus simple de construire un carré d'aire 1, plutôt qu'un carré d'aire 1/3, bien que, mathématiquement, cela soit la même chose.

Nous demandons tout d'abord quelle est la mesure du côté du carré d'aire 3. C'est $\sqrt{3}$. Si les élèves sont gênés par l'absence d'unité nous reprendrons par exemple le boulga. Nous demandons ensuite la mesure de la diagonale du carré, c'est $\sqrt{6}$. Nous allons écrire ces mesures sur la figure représentant le carré.



Comme nous l'avons fait pour le pliage du carré pour obtenir un carré d'aire moitié, nous laissons les élèvés réfléchir afin de savoir comment gérer les pliages pour diminuer progressivement l'aire du carré. Si l'on cherche comme il est naturel à plier les côtés en trois, nous nous heurtons à deux difficultés : diviser une longueur en trois parties égales par pliage n'est pas chose aisée, de plus il est facile de vérifier que l'on obtiendra pas le résultat escompté.

Nous suggérons donc aux élèves d'observer le triangle équilatéral construit par pliage (avec glissement) sur un des côtés du carré. (Voyez la construction de la « pièce 3 » dans notre brochure « Découvrir et démontrer en géométrie avec des pièces de puzzle » voir bibliographie.)



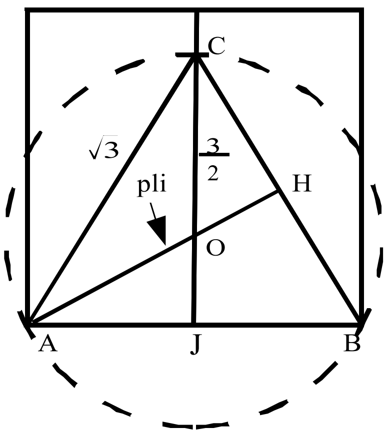
La hauteur d'un triangle équilatéral de côté de mesure a étant de mesure $a\frac{\sqrt{3}}{2}$, la hauteur du triangle équilatéral ainsi construit a pour mesure $\frac{3}{2}$: N'oublions pas que nous cherchons à construire un carré d'aire 1 donc de côté 1. La hauteur du triangle équilatéral est de mesure $\frac{3}{2}$, il ne nous reste plus qu'à construire la longueur 1 à partir de la longueur 1,5.

Ceci consiste à construire les deux tiers d'une longueur, ce qui est plus simple que le tiers d'une aire. On peut procéder comme dans notre brochure « Nouvelles pratiques de la géométrie » (voir bibliographie), avec un système de droites parallèles, mais nous allons vous proposer une solution plus rapide.

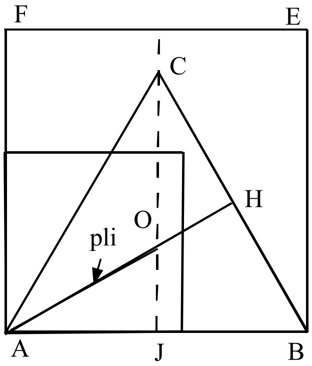
Pour cela, nous demandons aux élèves quelle est la propriété du centre du cercle circonscrit à un triangle équilatéral.

Réponse : il se trouve au tiers des hauteurs (qui sont aussi bissectrices, médianes et médiatrices) par rapport à leur pied.

Il nous suffit donc de déterminer ce centre par pliage du triangle, en amenant par exemple le sommet B sur le sommet C et en gardant le sommet A fixe.



La trace [AH] du pli qui amène le sommet C sur le sommet B en gardant A fixe est la hauteur du triangle équilatéral relative au côté [BC]. Son intersection O avec la hauteur [CJ] relative au côté [AB] est le centre du triangle. Donc AO = CO = $\frac{2}{3} \times \frac{3}{2} = 1$



Il suffit maintenant de reporter le segment [AO] sur le côté du carré [AF] et sur le côté [AB] pour obtenir deux côtés consécutifs du carré recherché d'aire 1.

Nous demandons alors aux élèves de mesurer les côtés du premier carré, puis les côtés du carré que nous venons de construire afin de vérifier la validité de notre construction.

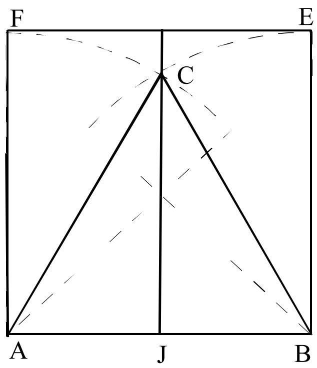
Réalisation

Nous avons réalisé cette activité avec une feuille A4 de papier fort (160g). Le carré a donc pour mesure de côté 21 cm soit une surface de 441 cm^2. Nous avons construit le triangle équilatéral de côté 21 cm par pliage, puis recherché les deux tiers de sa hauteur avec un nouveau pliage déterminant son centre O. Nous avons mesuré le carré construit comme il est dit plus haut, la mesure de son côté est : 12,2 cm ce qui nous donne une aire de 148,84 cm^2. Or 148,84 $\times$ 3 = 446,52 en cm^2, ce qui nous donne une approximation de l'ordre de 1% qui paraît acceptable aux élèves et au professeur.

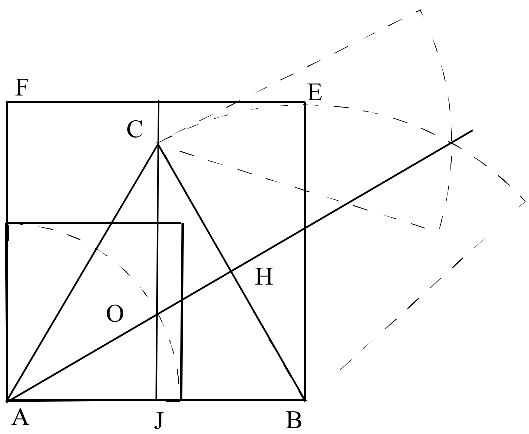
Remarque (qui pourra être traitée en exercice avec les plus grands) Lorsque nous plaçons le carré de côté 1 sur le carré de côté $\sqrt{3}$, il reste un « gnomon »[2] qui par construction a pour aire 2. Nous prolongeons les côtés du petit carré à l'intérieur du grand, nous obtenons d'une part deux rectangles égaux et d'autre part un petit carré dont on peut calculer l'aire. Les rectangles, par construction, ont pour côtés 1 et $\sqrt{3}-1$, donc pour aire $2 \times (\sqrt{3}-1)$

Le petit carré restant a donc pour aire : $2-2\sqrt{3}+2 = 4-2\sqrt{3}$

Construction à la règle et au compas : Un segment donné étant par hypothèse de longueur $\sqrt{3}$ construire à la règle et au compas un segment de longueur 1.



Construction au compas du triangle équilatéral ABC de côté de longueur $\sqrt{3}$



Construction au compas de la médiatrice (AH) du segment [CB] qui croise la médiatrice (JC) du segment [AB] en O. Puis report au compas de la longueur AO sur [AF] et [AB] pour construire le carré de côté de longueur 1.

Commentaire historique

Comme le montre l'article d'Olivier Keller : « *La géométrie des Sulbasutras* » Exemple de géométrie rituelle de l'Inde Védique (voir la bibliographie) le problème de la construction d'un carré d'aire égale au tiers de celle d'un carré donné n'est pas récent. La géométrie des Sulbasutras est probablement antérieure aux éléments d'Euclide.

[2]Le terme de gnomon, qui à l'origine désignait une tige de cadran solaire, est employé en géométrie pour désigner la figure en forme de **L** obtenue lorsqu'on l'on ôte d'un carré un carré plus petit ayant un de ses angles droits commun avec l'un de ceux du grand carré. Le gnomon est très utile pour effectuer des démonstrations algébriques à l'aide de la géométrie élémentaire, par exemple des identités remarquables.

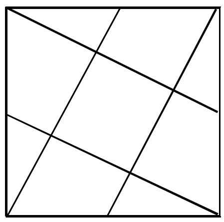
On y présente une autre solution que la nôtre qui se heurte tout de même à la division d'un segment en trois segments égaux, problème qui, à l'époque était du ressort des « tendeurs de corde » (les Sulbasutras), experts géomètres, il était résolu par le pliage en trois d'une corde, pliage qui recourt aux glissements ou ajustements.

Nous avons vu dans un précédent article du « Miroir des maths n°5 » que la géométrie avec glissement autorise des constructions intéressantes mais peut paraître manquer un peu de rigueur. Notons toutefois que l'ajustement de l'espacement entre les deux pointes d'un compas est une action du même type de rigueur expérimentale et que si elle paraît plus rigoureuse c'est que nous y sommes plus habitués.

Cela étant, dans les pliages avec glissement il y a, en général ajustement d'au moins deux points (sur deux droites) avec **interaction entre les deux ajustements**, ce qui apparaît bien dans l'énoncé du sixième axiome des pliages de Justin-Huzita :
« Soient deux droites l_1 et l_2 et deux points p_1 et p_2 ; un pli amène p_1 sur l_1 et p_2 sur l_2. »

Soulignons que ce pliage n'est pas toujours possible et qu'il accumule de toute façon deux sources d'erreur.

Voici donc **une partie du texte des Sulbasutras** à propos de la recherche du tiers d'un carré : « *… par là on explique le côté du carré égal au tiers d'un carré donné : c'est le côté du carré neuvième du carré…* » . **Et le commentaire d'Olivier Keller** : « Pour construire un carré dont l'aire est le tiers d'un carré donné, on construit d'abord le triple de celui-ci, comme expliqué en 1-10 (c'est la méthode de Pythagore), puis on en prend le neuvième ; il suffit pour cela de partager chaque côté du carré triple en trois parties. On suppose (d'après un témoignage visuel Seidenberg 1978) que le partage d'un segment en n parties égales se faisait en pliant une corde de même longueur n-1 fois sur elle-même. »



Et le cinquième ?

Enfin, nous vous proposons une construction, rappelée par Olivier Longuet, du carré d'aire le cinquième de celle d'un carré donné et vous laissons le plaisir d'en chercher la justification.

L'approche du tiers par le triple est très intéressante puisqu'elle permet une généralisation à toutes les racines carrées de nombres premiers, par exemple pour construire un carré qui soit le septième d'un carré donné. On pourra construire un carré sept fois plus grand en utilisant notre extension de l'Escargot de Pythagore puis construire, grâce à un système de droites parallèles la septième partie du côté du carré obtenu. Notre solution de construction du tiers ne se généralise pas a priori aux autres fractions de carré, par contre elle utilise **une géométrie des pliages sans glissement**, ce qui n'est pas le cas des Sulbasustras. Le lecteur intéressé par les divisions rigoureuses de segments par pliage pourra consulter le très intéressant article de Kazuo Haga : « Origamics » comme suggéré par notre collègue D. Trotoux (voir la bibliographie).

Bibliographie

HAGA Kazuo *Origamics, Mathematical explorations through paper foldings*
en ligne *www.northwestmathconf.org/.../Hagas_First_Theorem.pdf*

JUSTIN Jacques *Résolution par pliage de l'équation du 3ème degré* - Publications de l'I.R.E.M. de Strasbourg, en ligne : *42_Justin.pdf*

KELLER Olivier *La géométrie des Sulbasutras Exemple de géométrie rituelle de l'Inde Védique*, Repères IREM n°40, 2000, en ligne : *Keller_ Sulbasutras.pdf*

HUZITA H. *Démarches de la première réunion internationale de la Science et de la technologie d'Origami*, H. Huzita E-D. (1989), pp. 251–261. En ligne : *Mathématiques_des_origamis*

SEIDENBERG Abraham « *The origin of Mathematics* » *Archiv for the history of exact sciences*
Ref : 18 (4) 1978 p. 301–342.

SALLES-LEGAC Danielle, RODRIGUEZ HERRERA Ruben *Nouvelles pratiques de la géométrie* IREM de Basse-Normandie éditeur 2006 & *Practicar la geometría : de las acciones …a sus formalizaciones matemáticas*. IREM de Basse-Normandie éditeur 2010

SALLES-LEGAC Danielle et l'équipe de géométrie de l'I.R.E.M. *Découvrir et démontrer en géométrie avec des pièces de puzzle.* I.R.E.M. de Basse-Normandie 2011

SALLES-LEGAC Danielle et l'équipe de géométrie de l'I.R.E.M. *Histoires de cerfs-volants et autres quadrilatères, Historias de cometas y otros cuadriláteros (français et espagnol)* I.R.E.M. de Basse-Normandie 2008

SALLES-LEGAC Danielle et l'équipe de géométrie de l'I.R.E.M. « *Géométrie des pliages* » *in Le miroir des mathématiques (n°5) Décembre 2009* I.R.E.M. de Basse-Normandie - En ligne : *www.math.unicaen.fr/irem/*