Le problème du *ludimagister* dans un manuscrit normand.

Pierre Ageron

Le manuscrit in-4°143 de la bibliothèque de Caen est un recueil anonyme de problèmes d'arithmétique à usage pédagogique, rédigé vers 1700. Il est formé de sept cahiers indépendants écrits de la même main, rassemblés sans y être cousus dans une reliure en veau dont les caractéristiques (fleurons, filets) montrent qu'elle est nettement plus ancienne [1].

Bibl. de Caen, ms. in-f°143, dos et plat (photo A. Prigent)

Les problèmes qu'il contient sont dans l'ensemble assez faciles et classiques. Deux sources seulement sont mentionnées ; il s'agit de :

– *Nouveaux elemens de Mathématiques (tome II)* de l'oratorien Jean Prestet (Paris, 1689) ;

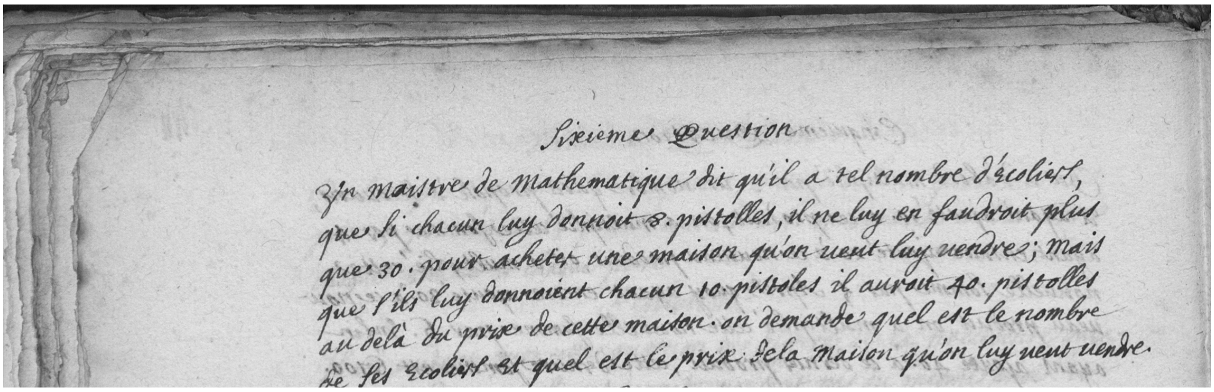
– *Epitome arithmeticae practicae* (Abrégé d'arithmétique pratique) du jésuite Christoff Clavius (Rome, 1583 ; très nombreuses éditions ultérieures).

1. Ce manuscrit a été étudié par Amandine Prigent dans son mémoire de master 2, préparé sous ma direction et soutenu à l'université de Nantes (Centre François Viète) le 14 juin 2011. La présente note est à la fois une introduction et un complément à ce très intéressant mémoire.

L'aspect le plus curieux de ce document anonyme est la vive hostilité affichée par l'auteur envers l'algèbre : selon lui, la méthode algébrique est « dommageable », car elle « laisse l'esprit dans une étrange confusion » et « ne donne pas lieu de découvrir de belles propriétés » ; quant aux algébristes, ce sont « gens oisifs » dont le passe-temps consiste « à embrouiller » les problèmes !

Lorsque j'ai découvert le manuscrit à la bibliothèque de Caen, un des problèmes qu'il contient a immédiatement attiré mon attention, tout simplement parce qu'il met en scène, chose rare, un enseignant de mathématiques !

Comme les autres, ce problème est aussitôt suivi de sa « résolution ». Le voici :

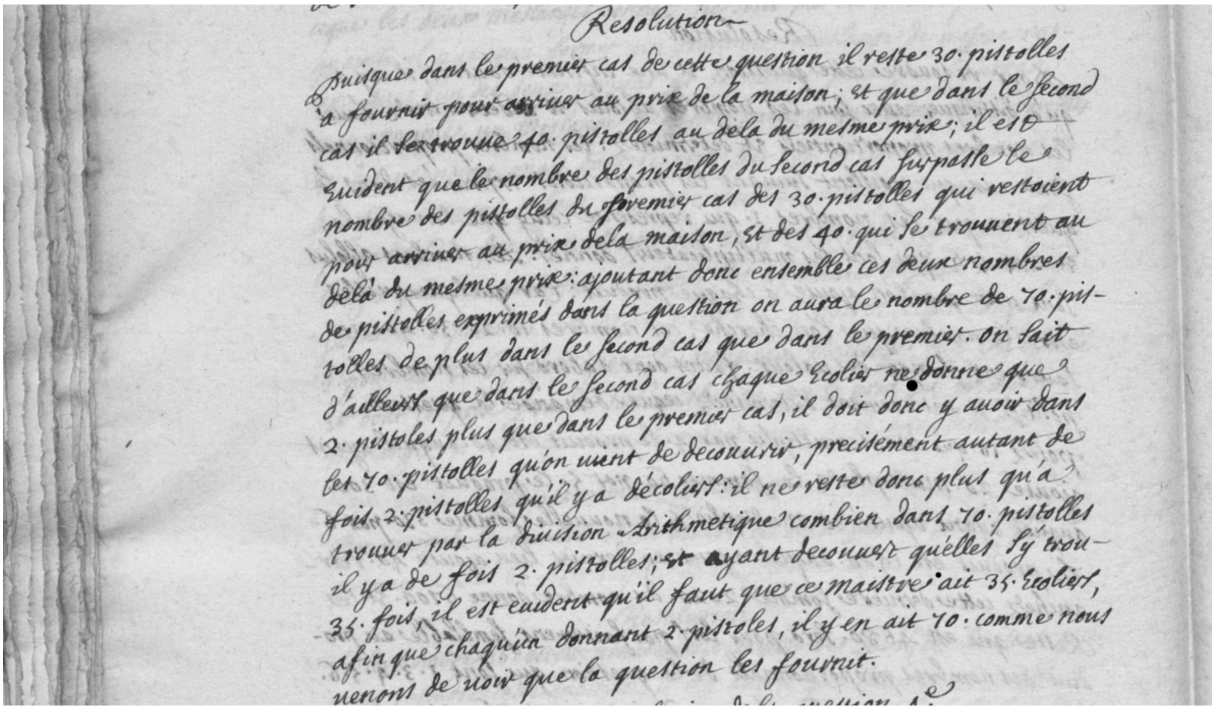


Sixieme Question

Un maistre de mathematique dit qu'il a tel nombre d'ecoliers, que si chacun luy donnoit 8. pistolles, il ne luy en faudroit plus que 30. pour acheter une maison qu'on veut luy vendre; mais que s'ils luy donnoient chacun 10. pistoles il auroit 40. pistolles au delà du prix de cette maison. on demande quel est le nombre de ses ecoliers et quel est le prix dela maison qu'on luy veut vendre.

Bibl. de Caen, ms. in-f°143, haut du f. 44 v. (photo Bibl. de Caen)

Sixieme Question. *Un maistre de mathematique dit qu'il a tel nombre d'ecoliers, que si chacun luy donnoit 8. pistolles, il ne luy en faudroit plus que 30. pour acheter une maison qu'on veut luy vendre ; mais que s'ils luy donnoient chacun 10. pistoles il auroit 40. pistolles au delà du prix de cette maison. On demande quel est le nombre de ses ecoliers et quel est le prix de la maison qu'on luy veut vendre.*



Resolution

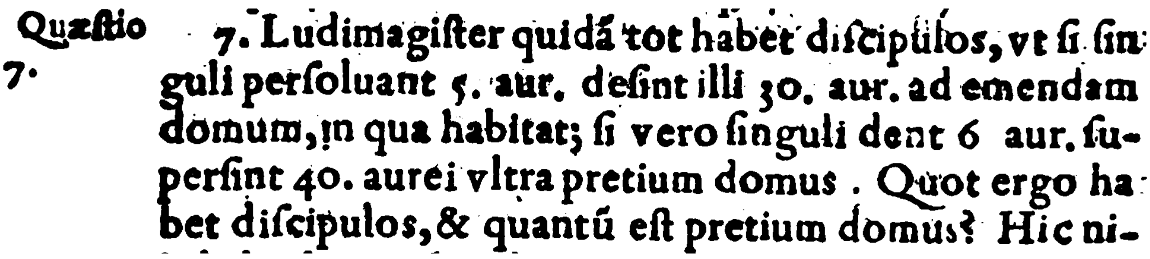
Puisque dans le premier cas de cette question il reste 30. pistolles a fournir pour arriver au prix de la maison; et que dans le second cas il se trouve 40. pistolles au dela du mesme prix; il est evident que le nombre des pistolles du second cas surpasse le nombre des pistolles du premier cas des 30. pistolles qui restoient pour arriver au prix dela maison, et des 40. qui se trouvent au delà du mesme prix: ajoutant donc ensemble ces deux nombres de pistolles exprimés dans la question on aura le nombre de 70. pistolles de plus dans le second cas que dans le premier. on sait d'ailleurs que dans le second cas chaque ecolier ne donne que 2. pistoles plus que dans le premier cas, il doit donc y avoir dans ces 70. pistolles qu'on vient de decouvrir, precisément autant de fois 2. pistolles qu'il y a d'ecoliers: il ne reste donc plus qu'a trouver par la division Arithmetique combien dans 70. pistolles il y a de fois 2. pistolles; et ayant decouvert quelles s'y trou- 35. fois, il est evident qu'il faut que ce maistre ait 35. Ecoliers, afin que chaquun donnant 2. pistoles, il y en ait 70. comme nous venons de voir que la question les fournit.

Bibl. de Caen, ms. in-f°143, f. 44 v. (photo Bibl. de Caen)

Resolution. *Puisque dans le premier cas de cette question il reste 30. pistolles a fournir pour arriver au prix de la maison ; et que dans le second cas il se trouve 40. pistolles au dela du mesme prix ; il est evident que le nombre des pistolles du second cas surpasse le nombre des pistolles du premier cas des 30. pistolles qui restoient pour arriver au prix de la maison, et des 40. qui se trouvent au delà du mesme prix. Ajoutant donc ensemble ces deux nombres de pistolles exprimés dans la question on* *aura le nombre de 70. pistolles de plus dans le second cas que dans le premier. On sait d'ailleurs que dans le second cas chaque ecolier ne donne que 2. pistoles plus que dans le premier cas, il doit donc y avoir dans les 70. pistolles qu'on vient de decouvrir, precisement autant de fois 2. pistolles qu'il y a d'ecoliers : il ne reste donc plus qu'a trouver par la division Arithmetique combien dans 70. pistolles il y a de fois deux pistolles ; et ayant decouvert qu'elles s'y trou[vent] 35 fois, il est evident qu'il faut que ce maistre ait 35 ecoliers, afin que chaqu'un donnant 2. pistoles , il en ait 70. comme nous venons de voir que la question les fournit.*

Des positions anti-algébristes de l'auteur, on pouvait augurer une résolution purement arithmétique. En apparence, c'est bien le cas. Il n'y a pas de désignation d'une inconnue (le nombre d'écoliers, notamment, n'est pas pris comme ''chose" et n'apparaît qu'au stade ultime de la résolution). Pas non plus de mise en équation, fût-ce en mots. L'auteur propose un raisonnement *ad hoc*, mais simple, et met fortement en valeur les opérations arithmétiques qui sont la clef de l'affaire : l'addition $30 + 40 = 70$ et la division $70 \div 2 = 35$ – en omettant d'expliciter la soustraction $10 - 8 = 2$. On peut néanmoins se demander si des manipulations algébriques (certes non littérales) ne sont pas sous-jacentes à ce raisonnement, qui, au fond, vise bien à ramener la question initiale à une forme normale ou canonique (en somme : ramener l'équation du premier degré $8x + 30 = 10x - 40$ à l'équation $2x = 70$). N'est-ce pas là l'essence de l'algèbre ?

L'auteur du manuscrit n'indique pas la source à laquelle il a puisé ce problème. Il est extrêmement probable qu'il s'agisse de l'*Epitome arithmeticae practicae* de Clavius, même si c'est à propos d'une autre question (sur laquelle je reviendrai plus tard) qu'il fait mention de cet ouvrage. En effet, dès la première édition de l'*Epitome*, on trouve un problème très proche, que j'appellerai le problème du *ludimagister*, et qui demeure inchangé dans les éditions suivantes. Voici comment il est libellé :


Quæſtio 7.
7. Ludimagiſter quidã tot habet diſcipulos, vt ſi ſinguli perſoluant 5. aur. deſint illi 30. aur. ad emendam domum, in qua habitat; ſi vero ſinguli dent 6 aur. ſuperſint 40. aurei vltra pretium domus. Quot ergo habet diſcipulos, & quantũ eſt pretium domus? Hic ni-

Ch. Clavius, *Epitome arithmeticae practicae*, 1e éd., Rome, 1583, p. 174

Ludimagister quidam tot habet discipulos, ut si singuli persolvant 5. aur[eos], desint illi 30. aur[ei] ad emendam domum, in qua habitat ; si vero singuli dent 6. aur[eos] supersint 40. aurei ultra pretium domus. Quot ergo habet discipulos, et quantum est pretium domus ?

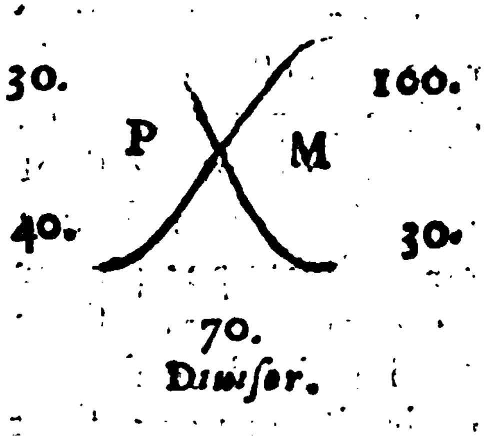
Traduction : un certain maître d'école a un tel nombre d'élèves que si tous payaient 5 deniers d'or, 30 deniers lui feraient défaut pour acheter la maison dans laquelle il habite ; mais si tous donnaient 6 deniers d'or, il y aurait 40 deniers au-delà du prix de la maison. Combien a-t-il donc d'élèves, et quel est le prix de la maison ?

On remarque cependant que les données numériques divergent entre la version de Clavius et celle du manuscrit caennais. Les modes de résolution sont aussi très différents. Clavius résout le problème par la *règle de double fausse position.* Cette très ancienne méthode, bien connue des auteurs de langue arabe [2], consiste à déduire la solution exacte d'un problème que nous dirions aujourd'hui "affine " à partir de deux "solutions" ou plutôt "suppositions" *fausses*. Ainsi Clavius suppose d'abord le nombre des élèves égal à 30. En considérant le cas où tous paient 5 deniers, on voit que la maison coûte $5 \times 30 + 30 = 180$ deniers. Mais si tous donnent 6 deniers, on rassemble $6 \times 30 = 180$ deniers, exactement le prix de la maison, alors que l'énoncé veut qu'on rassemble ainsi 40 deniers *de plus*. Clavius suppose ensuite le nombre des élèves égal à 100. En considérant le cas où tous paient 5 deniers, on voit que la maison coûte $5 \times 100 + 30 = 530$ deniers. Si tous donnent 6 deniers, on rassemble $6 \times 100 = 600$ deniers, soit 70 deniers au-delà du prix de la maison, alors que l'énoncé

2. Elle a notamment été popularisée par Qustâ Ibn Lûqâ (de Baalbek, mort en 912) et Ibn al-Bannâ' (de Marrakech, mort en 1321) qui l'appelaient respectivement *hisâb al-khata'ayn* (calcul des deux erreurs) et *tarîqat al-kaffât* (méthode des plateaux de la balance).

veut qu'on ne rassemble ainsi que 40 deniers au-delà de ce prix, donc 30 deniers *de moins*. Il reste à appliquer la règle de la double fausse position. Dans le cas d'une position par défaut et d'une autre par excès, elle s'écrit : (première position * deuxième erreur + deuxième position * première erreur) / (première erreur + deuxième erreur). Le nombre d'élèves est donc (30 * 30 + 100 * 40) / (40 + 30), soit 70 élèves. Clavius n'omet pas la figure mnémotechnique en croix traditionnellement attachée à cette méthode (la lettre P est pour plus, la lettre M pour moins) .

Il termine en estimant, par l'un ou l'autre des calculs, le prix de la maison : on trouve 380 deniers.



Ch. Clavius, *Epitome arithmeticae practicae*, 1^{e} éd., Rome, 1583, p. 174

De l'auteur anti-algébriste du manuscrit de Caen, on aurait pu s'attendre à ce qu'il mette en valeur cette méthode de double fausse position, purement arithmétique. Paradoxalement, elle n'apparaît à aucun endroit du texte. Peut-être l'a-t-il jugée trop complexe, comme nombre de ses contemporains : « assez difficile pour la pratique, & encore plus pour la démonstration », écrit Rivard dans ses *Élémens de mathématiques* (Paris, 1732). Dans le cas du problème du *ludimagister*, on a vu qu'il propose une solution beaucoup plus courte que celle de Clavius. Pourquoi au fait en avoir modifié les données numériques ? Deux réponses sont possibles :

– pour rapprocher l'effectif des conditions d'enseignement que l'auteur et ses élèves connaissent : la classe du maître de mathématiques normand (35 élèves) est moins chargée que celle du *ludimagister* romain (70 élèves) [3] ;

– pour que le calcul donne lieu à une ''vraie'' division, la méthode du manuscrit caennais appliquée aux données de Clavius faisant résulter le nombre d'élèves du calcul "trop simple" suivant : (40 + 30) / (6 - 5).

Il est d'ailleurs à remarquer que notre auteur, même s'il puise parmi les "classiques", n'hésite pas à jouer de ces ''variables didactiques'' que sont les données numériques d'un problème. Ainsi le problème pour lequel il fait explicitement référence à Clavius, qui consiste à « trouver deux nombres dont la somme soit 100 en sorte que le tiers du premier avec la cinquième partie du second fasse 30 » [4], ne se trouve pas tel quel chez le célèbre jésuite : l'auteur du manuscrit semble avoir substitué 30 à 50 dans une question de l'*Epitome* afin que la solution en soit entière. Il entendait visiblement, dans ce cas, ne pas cumuler des difficultés d'ordres différents.

Au cours du XVIII^{e} siècle, le problème du *ludimagister* réapparut souvent dans la littérature mathématique scolaire, posé presque exactement dans les mêmes termes et avec les mêmes données numériques que chez Clavius. Cependant, la résolution par double fausse position tomba peu en peu en désuétude au profit de l'algèbre littérale. L'exemple le plus tardif de la résolution de ce problème par double fausse position se trouve dans le *Tirocinium arithmeticum* du jésuite Philipp Steinmeyer (Vienne & Fribourg-en-Brisgau, 1763) : contrairement à ce que faisait Clavius, les fausses positions proposées, 20 et 30, sont toutes deux par défaut (inférieures à la valeur réelle 70). L'exemple le plus précoce de résolution algébrique du problème du *ludimagister* figure dans la *Mathesis Pollingana* d'Herculano Vogl, chanoine augustin de l'abbaye bavaroise de Polling (Venise, 1740). Elle est organisée en trois temps : la *denominatio*, dans laquelle on donne le nom x au nombre des élèves ; l'*aequatio* où l'on traduit les hypothèses par

3. Mais un autre problème de Clavius (p. 159 de l'édition de 1583), d'habillage similaire, conduit à un nombre d'élèves égal à 36. Il est résolu par *simple* fausse position (méthode également absente du manuscrit de Caen).

4. En marge de ce problème, au f. 39 r., se lit la mention : « Clavius Reg. falsi Dup. quaest. 9 » (question 9 du chapitre de la double fausse position). La numérotation des questions a varié au fil des éditions de l'*Epitome.*

l'équation $5x + 30 = 6x - 40$; la *resolutio* où l'on restaure d'abord le 40 pour obtenir $5x + 70 = 6x$ avant de soustraire $5x$ de $6x$ pour conclure $x = 70$. Il y a fort à parier que c'est ainsi qu'élèves et professeurs d'aujourd'hui procéderont très spontanément.

Si le problème du *ludimagister* a connu une fortune importante depuis Clavius, la solution qui en est proposée dans le manuscrit conservé à Caen apparaît finalement comme exceptionnelle : l'auteur, dont la virulente opposition à l'algèbre et aux algébristes paraît d'abord mettre en lumière le conservatisme, a néanmoins jeté aux orties la vénérable méthode de fausse position, encore très enseignée et pratiquée de son temps. Opposé au caractère mécanique, non réfléchi, de l'application des règles de l'algèbre, il a développé une pédagogie spécifique dont on peut penser qu'elle constitue, paradoxalement, une propédeutique adéquate à l'apprentissage de la pensée algébrique.


CHRISTOPHORI
CLAVII
BAMBERGENSIS
E SOCIETATE
IESV
EPITOME ARITHMETICÆ PRACTICÆ.
IESVM VOCABIS NOMEN EIVS
IHS
PERMISSV SVPERIORVM.
ROMAE Ex Typographia Dominici Basæ. 1583.

Ch. Clavius, *Epitome arithmeticae practicae*, 1e éd., Rome, 1583, frontispice