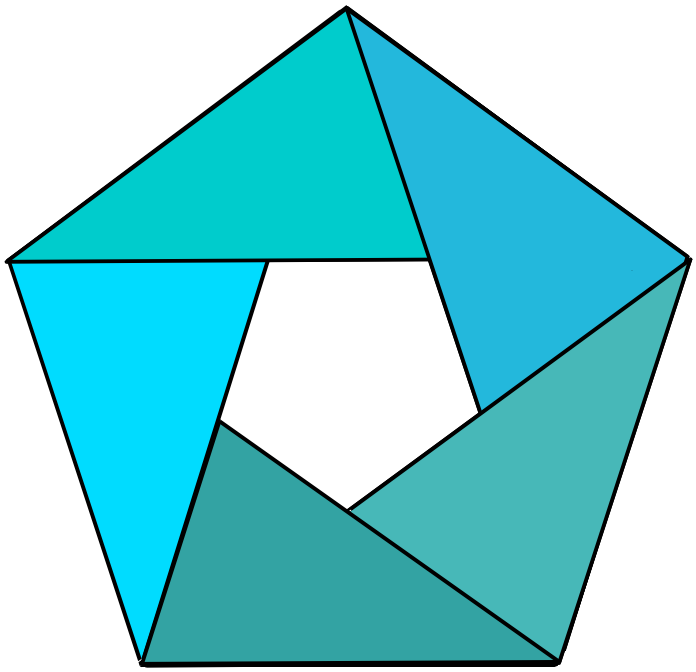
I.R.E.M. de Basse-Normandie Université de Caen



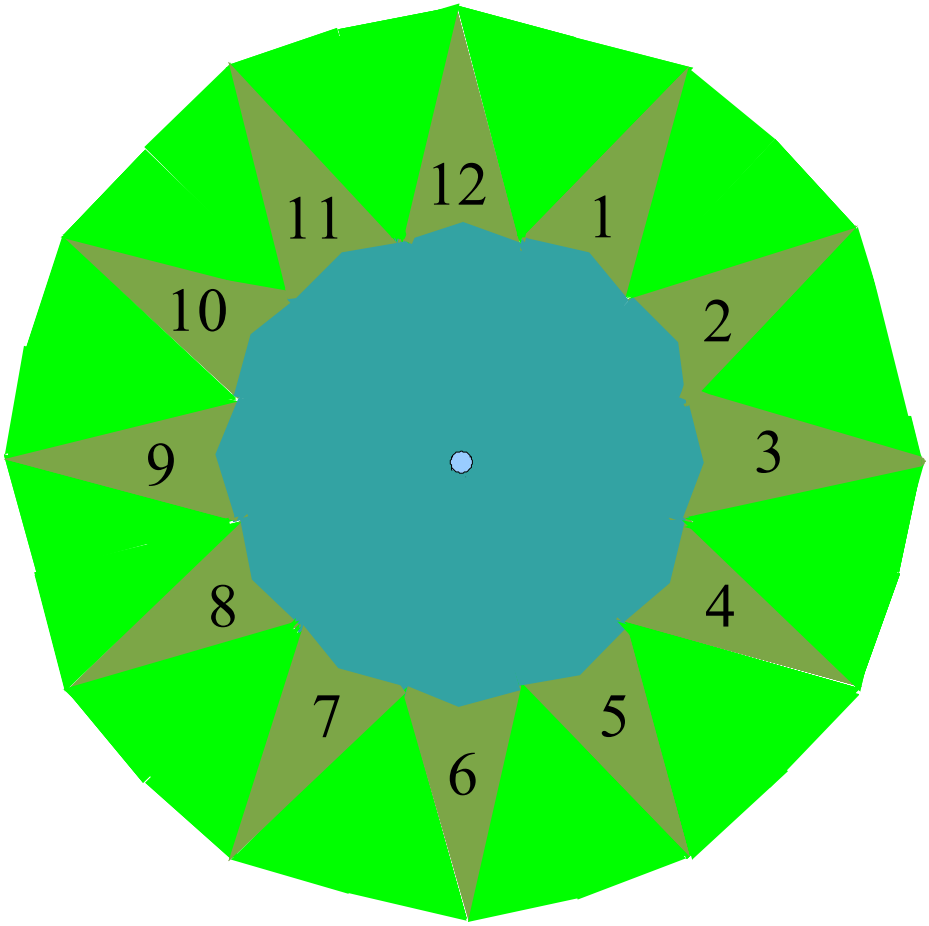
# Découvrir et démontrer en géométrie avec des pièces de puzzle

les propriétés des triangles et quadrilatères usuels

## Pour le collège et la classe de seconde avec les patrons pour le professeur

**Danielle SALLES-LEGAC**
**et l'Équipe Géométrie de l'I.R.E.M.**

**Novembre 2011**




# Le cadran étoilé

**construit « à la main »**

# Découvrir et démontrer avec des pièces de puzzle

**Activités de calcul de la mesure des angles et de reconnaissance de figures géométriques**

**Introduction** : L'idée de ces activités nous est venue à la lecture d'articles de conférenciers du Colloque d'Histoire des Mathématiques (*) qui s'est tenu à l'IREM de l'Université de Caen les 28 et 29 mai 2010, notamment celui d'Isabelle Martinez-Labrousse qui décrivait des méthodes de démonstrations de théorèmes par les savants chinois, elle y évoque la possibilité d'utilisation de pièces de puzzle colorées (**), nous ajouterons au terme colorées, le terme très important « calibrées » car les dimensions des pièces sont soigneusement choisies. Ces méthodes nous ont parues particulièrement intéressantes dans l'optique des techniques de « l'apprentissage par les mains » qui nous sont chères (voir la bibliographie RODRIGUEZ Ruben, SALLES Danielle). En effet, celles-ci profitent tout autant aux élèves ayant des problèmes de représentation des objets géométriques et des raisonnements abstraits sur ces objets qu'à ceux qui n'en ont pas !

Les activités qui vous sont présentées ici peuvent être proposées dès que les notions géométriques de polygones classiques doivent être abordées : triangles isocèles, triangles rectangles, triangles équilatéraux, carrés, trapèzes isocèles, rectangles, losanges, cerfs-volants, deltoïdes. Elles peuvent être pratiquées en introduction ou en consolidation de ces notions, certaines d'entre elles sont plus difficiles et sont signalées « pour les plus grands » c'est-à-dire à partir de la classe de quatrième, parfois, lorsqu'elles exigent des calculs algébriques ou trigonométriques, à partir de la classe de seconde. Elles sont généralement traitées de façon indépendante et le professeur peut puiser selon ses besoins dès que les définitions et propriétés ont été abordées par le biais de la construction et de la manipulation des pièces de puzzle. Nous conseillons fortement au professeur de laisser ses pièces à l'élève afin qu'il puisse les manipuler à loisir tant à l'école qu'à l'extérieur et les conserver « en souvenir ».

## I- Construction de l'univers des pièces de puzzle

Nous expliquons aux élèves que nous allons travailler sur **les mesures d'angles et les figures,** sans utiliser le rapporteur mais avec des pliages. Pour ce faire nous allons construire des **pièces de puzzle** particulières à partir d'un carré.

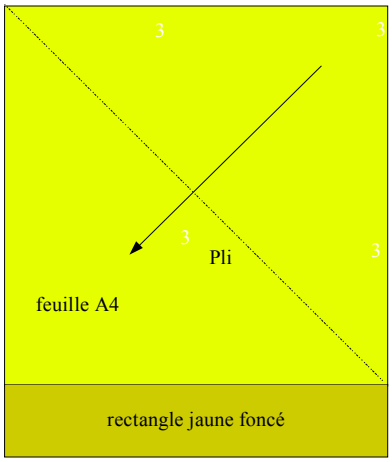
Nous essayerons de donner à chacune des pièces au **moins un côté de même mesure que celui du carré.** Nous appellerons cette mesure la mesure **unité de longueur**. En quelque sorte **les pièces seront calibrées** afin de pouvoir les juxtaposer en puzzle. On peut suggérer de donner un nom à cette mesure : le boulga, le chouïa... Ensuite nous utiliserons les pièces de puzzle pour « faire des démonstrations »**.**

**Connaissances requises** : L'angle plat, l'angle droit, égalité des angles par superposition (les professeurs hispanisants pourront consulter l'ouvrage de Ruben Rodriguez et Danielle Salles : « Practicar la geometría » pages 14 et suivantes, voir la bibliographie), égalité des figures géométriques par superposition. Les notions de carré, triangle (isocèle, rectangle, équilatéral) seront nécessaires et les élèves devront les intégrer au fur et à mesure des découpages et des études de figures, la notion de symétrie orthogonale dès le premier pliage. Pour cette dernière notion on pourra consulter utilement (en ligne sur le site de l'IREM de Basse-Normandie) l'article de R. Rodriguez : « Les symétriseurs » dans « Le Miroir des Maths » N° 6.

.(*) « Circulation transmission héritage » Actes du colloque édités par l'IREM de Basse-Normandie Août 2011, (**) I. Martinez-Labrousse écrit (page 54) : « peut-être aussi avaient-ils des pièces (colorées) de puzzle pour expliquer le texte ».

**Matériel :** feuilles A4 de papier fort (160 g) de différentes couleurs, ciseaux, règle plate graduée ; calculatrice et rapporteur pour les comparaisons de résultats.

**Première phase : découpage des pièces**

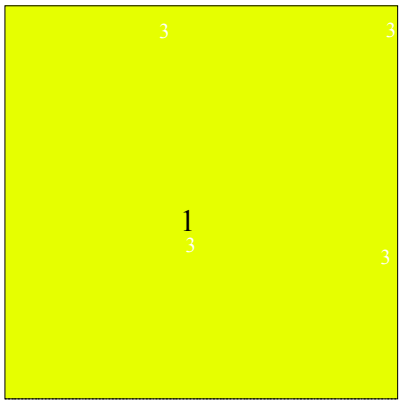



Nous distribuons aux élèves des feuilles A4 de la même couleur, par exemple jaune et nous leur demandons de construire par pliage du papier un carré. Les élèves trouvent qu'il suffit de rabattre un coin de la feuille de telle sorte qu'un petit côté de la feuille vienne le long du grand côté. On coupe alors aux ciseaux la partie qui reste, représentée en jaune plus foncé.

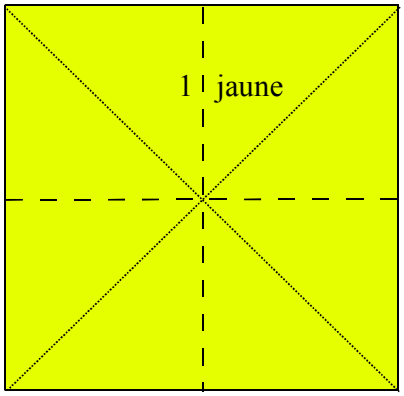
On peut alors demander aux élèves de noter sur leur cahier les propriétés du carré et de la feuille qui ont été utilisées pour découper le carré.

Par exemple : La feuille A4 est un rectangle, donc comporte quatre angles droits, pour obtenir un carré, il faut construire un rectangle dont les quatre côtés sont de même longueur.

Il suffit donc de reporter la mesure du petit côté du rectangle le long du grand côté, on peut le faire par pliage. On découpe le rectangle qui dépasse du pliage et on obtient un carré (noté pièce n°1).




Le carré jaune noté 1

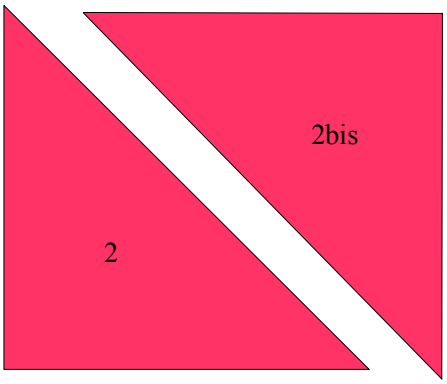



Les quatre axes de symétrie du carré

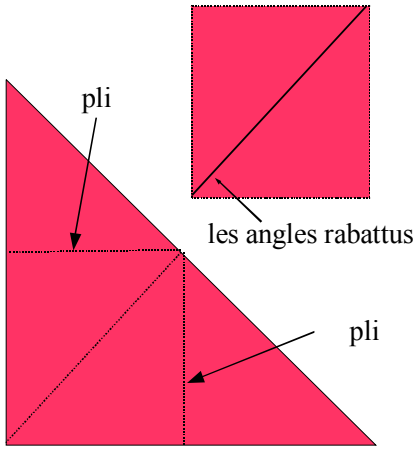
Nous demandons ensuite aux élèves de plier leur carré jaune en quatre parties égales de toutes les façons possibles afin d'en vérifier les axes de symétries puis de les noter sur leur cahier. Ceci sera un réinvestissement utile de ces propriétés si elles ont été déjà étudiées (voir Rodriguez R. « Autour des systèmes... » opus cit.). On pourra aussi traiter dès maintenant, avec les plus jeunes, une partie de l'activité : VII - Une question classique de géométrie au collège p. 26 à 28.

Nous distribuons une deuxième feuille A4 de couleur par exemple rouge, nous découpons un carré de la même façon que précédemment, le pli diagonal qui nous sert à construire le carré est découpé afin d'obtenir deux triangles rectangles isocèles notés 2 et 2bis).

Nous demandons aux élèves de noter sur leur cahier une définition d'un triangle rectangle isocèle, il pourra être intéressant de discuter au tableau les différentes définitions proposées par les élèves. En pliant, sans marquer le pli, les deux petits angles de la pièce 2 l'un sur l'autre, nous vérifions que les deux petits angles sont égaux car superposables. D'autre part, nous leur demandons de rabattre les angles non droits d'un des deux triangles sur son angle droit comme sur la figure ci-dessous à droite.




Deux triangles rectangles isocèles rouges




Nous leur demandons alors quelle est la mesure des deux angles égaux aigus et quelle est la somme des mesures des angles du triangle.

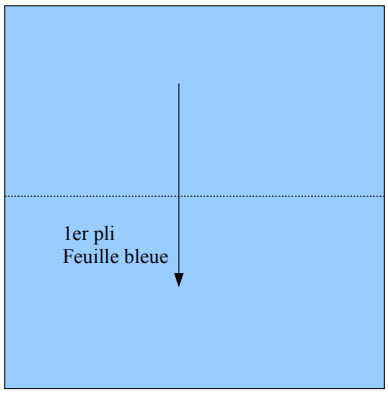
Par pliage, les élèves constatent que la somme des deux angles égaux aigus recouvre exactement l'angle droit, donc que la mesure de chacun d'eux est 45° et que la somme des angles du triangle est 180°. Nous soulignons qu'il s'agit d'une **conjecture** (il peut être nécessaire d'expliquer ce mot : c'est une propriété observée qui « a des chances d'être vraie » mais qu'il faudra démontrer chaque fois que c'est possible, selon le niveau des élèves (*)).

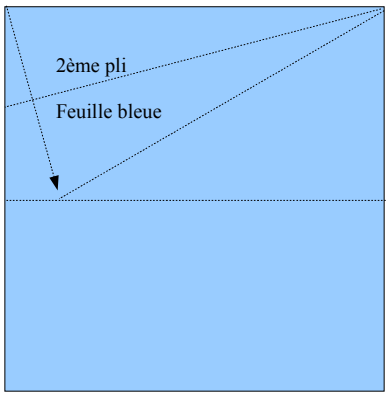
Nous distribuons ensuite une feuille A4 d'une autre couleur, par exemple bleue, nous découpons de nouveau un carré, égal au précédent, nous demandons aux élèves de le vérifier en superposant les deux carrés. Nous demandons alors aux élèves de construire, par pliage de la feuille bleue, un triangle équilatéral. Nous leur demandons de noter sur leur cahier une définition du triangle équilatéral par exemple « égalité des mesures des trois côtés ».

Pour les aider, nous leur demandons de plier le carré bleu en deux pour obtenir deux rectangles égaux (superposables), (figure à gauche page suivante) puis d'ouvrir la feuille. Nous leur demandons d'utiliser le bord supérieur de la feuille pour reporter, par un deuxième pliage, le sommet du rectangle qui se trouve en haut et à gauche sur ce 1$^{er}$ pli.

(*) Pour les plus grands nous en demanderons une démonstration dans le cas des triangles scalènes dans le paragraphe : II - 3 - Utilisation des pièces de puzzle pour constater « visu et tactu » (avec la vue et le toucher) quelques grandes propriétés géométriques des angles et des polygones.

**Remarque** : ce travail s'inscrit dans la « Géométrie des pliages » (voir notre article bibliographie SALLES)



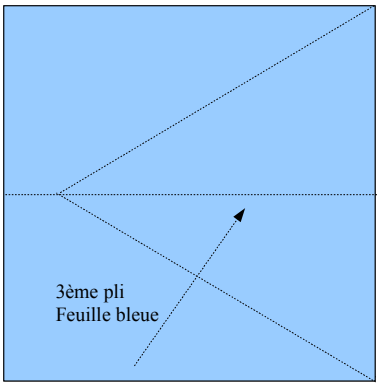



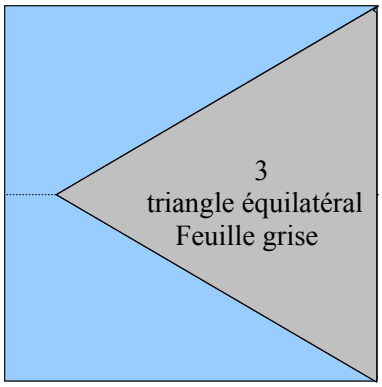

Pour ce faire, nous rabattons le côté supérieur du carré parallèle au 1er pli de telle sorte que son extrémité gauche rencontre la trace du 1er pli.

Nous effectuons le même travail, avec un 3ème pli, sur le côté opposé du carré, de telle sorte que les deux extrémités des deux côtés pliés soient confondues sur le 1er pli. Nous obtenons ainsi, avec le côté droit du carré perpendiculaire au premier pli, un triangle équilatéral, c'est-à-dire un triangle dont les trois côtés ont la même mesure. Par les pliages successifs les trois côtés du triangle équilatéral ont même mesure que celle du carré.

Nous groupons les élèves par trois, nous leur demandons de superposer trois triangles équilatéraux puis de les faire tourner et les superposer de nouveau afin de comparer les angles.

Ils vérifient que les trois angles de ces triangles sont égaux et ils le notent dans leur cahier.



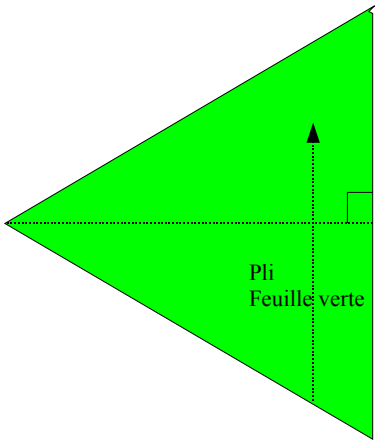

Nous leur demandons alors de découper le triangle équilatéral et de garder les deux morceaux de papier bleu restants pour une activité ultérieure.

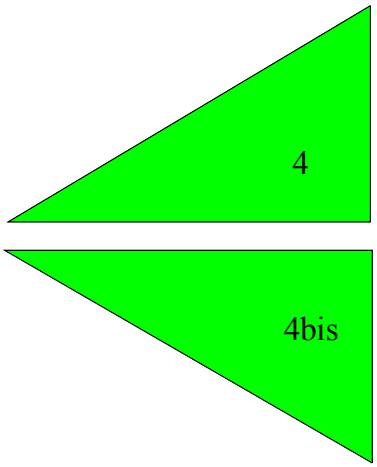
Le triangle équilatéral bleu sert de patron pour en découper deux identiques avec du papier gris (noté pièce n°3) et du papier vert. (Figure page précédente à droite.)

Le triangle gris est conservé intact. Nous leur demandons s'il est possible par pliage du triangle équilatéral gris, sans marquer les plis, mais en s'aidant de la pièce 3 de vérifier, comme pour le triangle rectangle isocèle, que la somme des trois angles du triangle équilatéral est 180°.

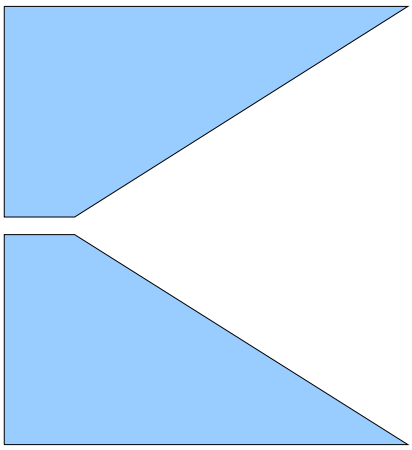
La réponse est « oui » à condition d'utiliser la propriété des droites : un angle défini par deux demi-droites portées par une droite est un angle plat de mesure 180° (voir figure page suivante).

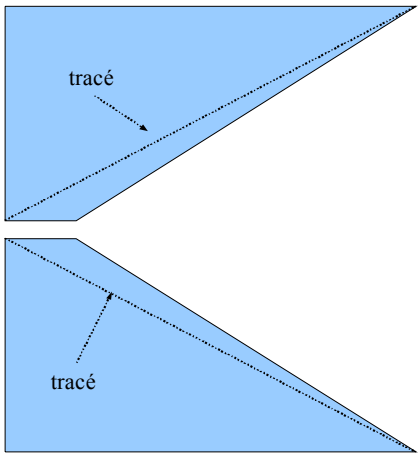
Le triangle vert est plié en deux suivant une de ses médiatrices (ou un de ses axes de symétrie) et coupé en deux parties égales selon celle-ci. On obtient deux triangles rectangles superposables (notés 4 et 4bis) donc égaux, nous remarquons qu'ils ne sont pas isocèles.



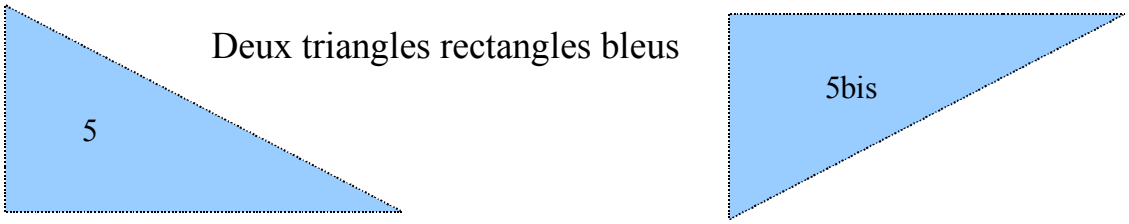

Nous reprenons les pièces bleues inutilisées lors du découpage du triangle équilatéral qui ont la forme de la figure suivante et demandons aux élèves de tracer sur chaque pièce, avec la règle plate, l'hypoténuse de deux triangles rectangles dont le grand côté de l'angle droit est de même mesure que le côté du carré jaune (pièce 1) :



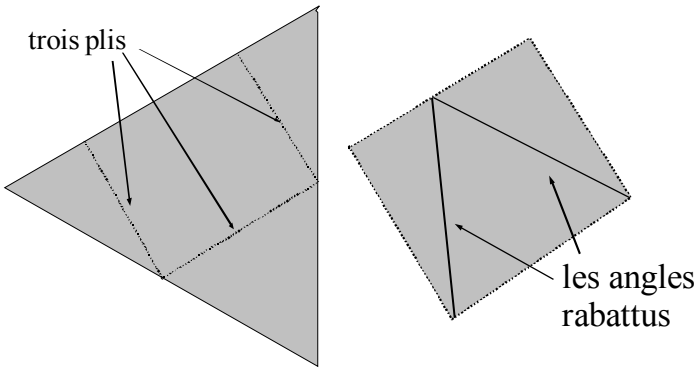



Restes de découpe feuille bleue

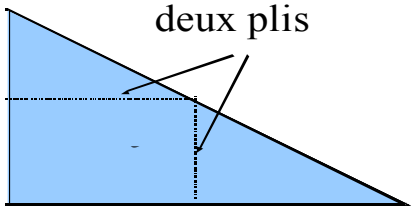
Ensuite de découper ces deux triangles rectangles, on note ces pièces 5 et 5bis :



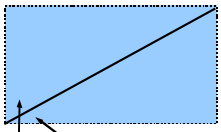

Nous posons la même question que pour le triangle gris : ainsi nous leur demandons s'il est possible par pliage du triangle rectangle bleu, sans marquer les plis, de vérifier, comme pour le triangle rectangle isocèle, que la somme des trois angles du triangle rectangle est 180°. La réponse est encore « oui » comme nous le montrons ci-dessous à droite :



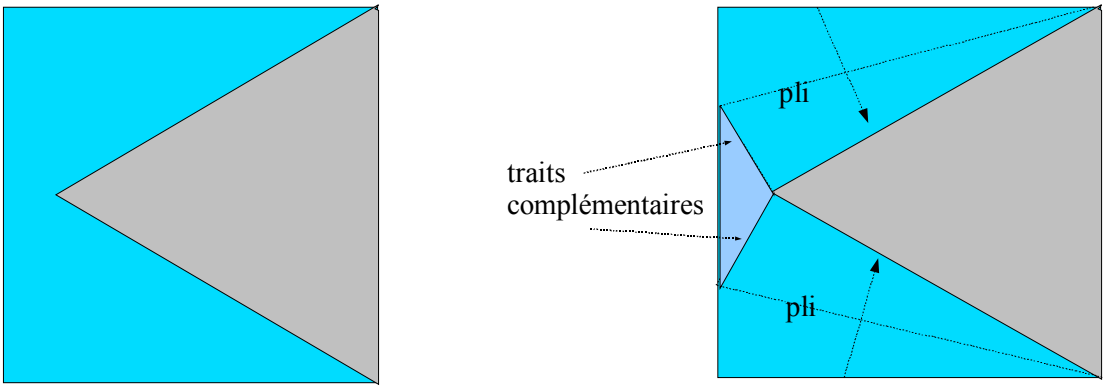

Triangle équilatéral gris dont on rabat les trois angles




Triangle rectangle bleu dont on rabat deux angles




Nous reprenons un carré égal au précédent d'une autre couleur, par exemple turquoise et nous posons dessus le triangle équilatéral pour qu'il serve de patron, nous découpons les parties turquoise non couvertes par le triangle gris. Nous plions les parties de feuille turquoise sur elles-mêmes comme sur la figure suivante (c'est le même type de pli que celui qui a servi à construire le triangle équilatéral mais sans glissement puisque le triangle existe déjà). Ensuite nous découpons les deux pièces turquoise selon les deux traits ajoutés afin de réaliser deux cerfs-volants turquoise (la partie à enlever est indiquée en gris bleu) :



Nous demandons aux élèves de noter sur leur cahier une définition d'un cerf-volant (ce n'est pas la plus rigoureuse mais c'est la plus simple) :

Un cerf-volant est la figure géométrique constituée de deux triangles isocèles accolés par leur base (sans qu'il y ait chevauchement des deux pièces). Si les deux triangles sont égaux le cerf-volant est un losange.

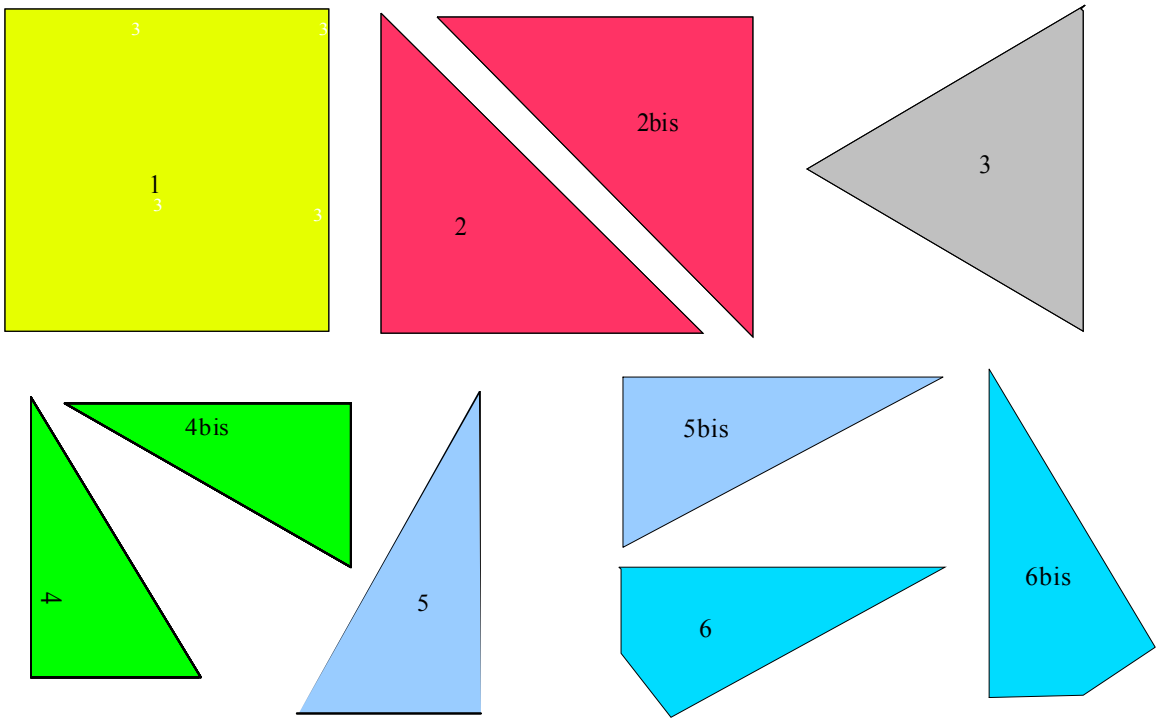
Une définition plus rigoureuse pour les plus grands connaissant la notion de médiatrice ou d'axe de symétrie est :

Un cerf-volant est un quadrilatère dont l'une des diagonales est la médiatrice ou axe de symétrie de l'autre diagonale.

**Commentaire pédagogique et activité complémentaire**

Cette activité étant « de découverte d'une situation » nous pouvons faire une pose pour observer nos pièces, éventuellement améliorer leur découpage.

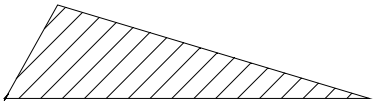
Voici une récapitulation des différentes pièces à échelle réduite :



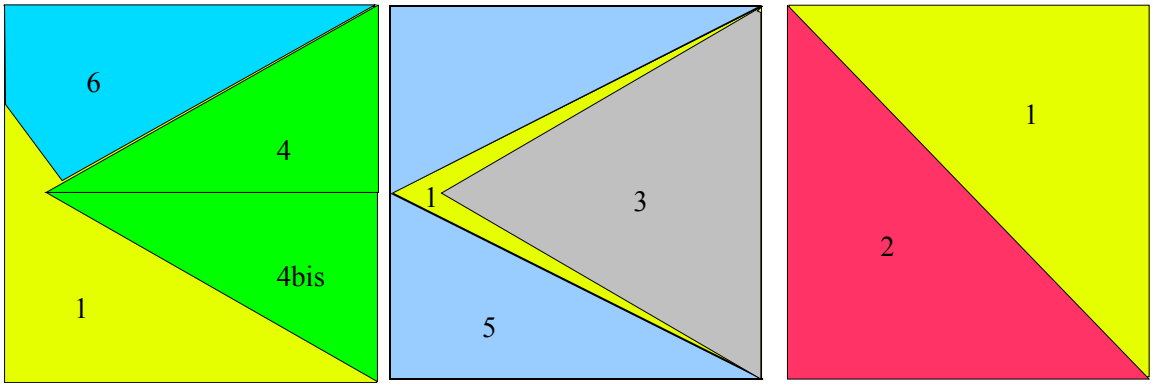

Nous pouvons aussi, puisque nous avons envisagé, a priori, tous les triangles remarquables, présenter le terme **« scalène »** utilisé pour désigner les triangles non isocèles. Il est intéressant de découvrir qu'il n'est pas si évident de tracer un triangle qui soit, non seulement non isocèle mais de plus non rectangle. Notre culture nous ayant donné un goût prononcé pour la symétrie, nous avons tendance à tracer ce que nous appelons « de belles figures » c'est-à-dire, pour la plupart d'entre nous, des figures symétriques (on pourra à ce sujet consulter MØLLER Anders Pape voir la bibliographie).

Nous demandons donc aux élèves de construire un triangle qui ne soit ni isocèle, ni rectangle. Pour cadrer le travail nous leur demandons que le plus grand côté du triangle ait pour mesure 1 c'est-à-dire le côté du carré jaune.

Ce triangle, accompagné de deux copies sera utilisé dans le paragraphe suivant (deuxième phase (3)). Voici un triangle scalène non rectangle :

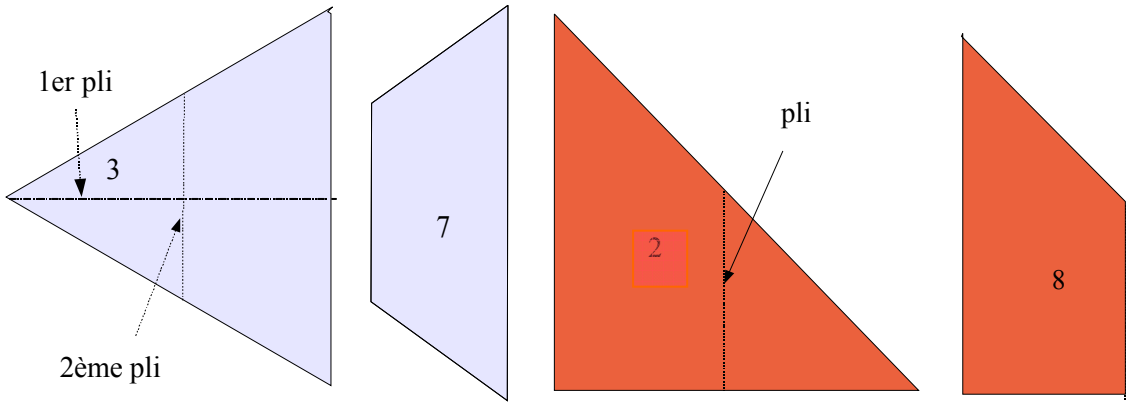


Nous demandons maintenant aux élèves de vérifier par superposition des pièces que leurs reproductions sont bonnes à **au plus un millimètre près**, puis éventuellement améliorer, voire de refaire les pièces inexactes, le fond est chaque fois constitué du carré jaune de mesure de côté l'unité (pièce 1 voir paragraphe II).




Pour terminer cette activité de construction de triangles et quadrilatères « usuels » nous demandons aux élèves, s'ils ne l'ont pas découvert seuls, si **nos pièces représentent la totalité des triangles et quadrilatères qu'ils connaissent**. La réponse est : « il manque le trapèze rectangle et le trapèze isocèle ainsi que le losange et le deltoïde ».

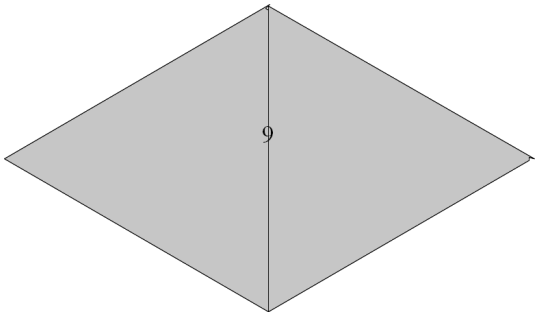
Nous leur demandons alors de construire un trapèze isocèle (pièce 7) avec une copie gris clair du triangle équilatéral (3) et un trapèze rectangle (pièce 8) avec une copie rouge foncé du triangle rectangle rouge (pièce 2). Nous indiquons sur les figures les plis utiles à ces constructions. Nous demandons ensuite aux élèves d'indiquer les mesures d'angles et de longueurs qu'ils peuvent calculer.



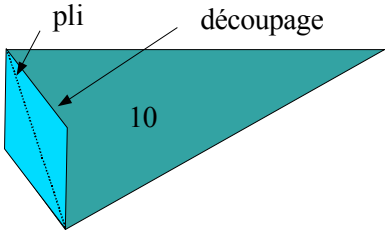

Une copie gris clair du triangle équilatéral gris foncé ; une copie rouge foncé du triangle rectangle isocèle rouge

Un losange peut être construit aisément avec deux triangles équilatéraux joints par un de leurs côtés, il sera noté pièce 9, remarquons qu'il est particulier puisqu'une de ses diagonales a même mesure que ses quatre côtés.

Nous effectuons une copie du cerf-volant (pièce 6) en papier vert foncé. Le cerf-volant étant constitué de deux triangles isocèles ayant une base commune, nous replions le plus petit des deux triangles le long de cette base. Nous découpons la pièce le long des deux côtés égaux du petit triangle. Nous obtenons un deltoïde noté pièce 10. Remarquons de plus que la partie du cerf-volant découpée pour obtenir un deltoïde est aussi un losange.




Un losange avec deux triangles équilatéraux gris




Un cerf-volant vert foncé découpé en deltoïde

**Remarque** à propos de la notion de deltoïde

Certains manuels considèrent que la notion de deltoïde s'insère dans celle de cerf-volant et disent : un deltoïde est un cerf-volant concave. Il nous semble préférable de conserver les deux termes : cerf-volant pour le quadrilatère convexe et deltoïde pour le quadrilatère concave. Les élèves sont plus habitués à manipuler les quadrilatères convexes et ainsi il sera aisé d'introduire les deux notions séparément : le cerf-volant qui est la plus facile pour eux en premier, le deltoïde ensuite.

Il sera pratique au cours des activités de demander aux élèves de **noter toutes les mesures qu'ils connaissent au crayon à papier sur chacune des pièces**.

## II - Observation des pièces et étude de leurs propriétés

Nous décidons que la **mesure du côté du carré jaune : pièce n°1 est la mesure unité**.

## II - Reconnaissance des figures et étude des mesures caractéristiques

Nous leur demandons alors de, successivement :

- Observer les pièces dans l'ordre de leur numérotation
- Nommer chaque pièce (triangle ou carré ou autre...)
- Donner pour chaque pièce la mesure de ses côtés et de ses angles ainsi que ses propriétés éventuelles (pour les plus grands)
- Donner la mesure de la diagonale du carré, la hauteur du triangle équilatéral et l'hypoténuse des triangles rectangles bleus
- Plus tard, éventuellement, calculer les aires des différentes pièces.

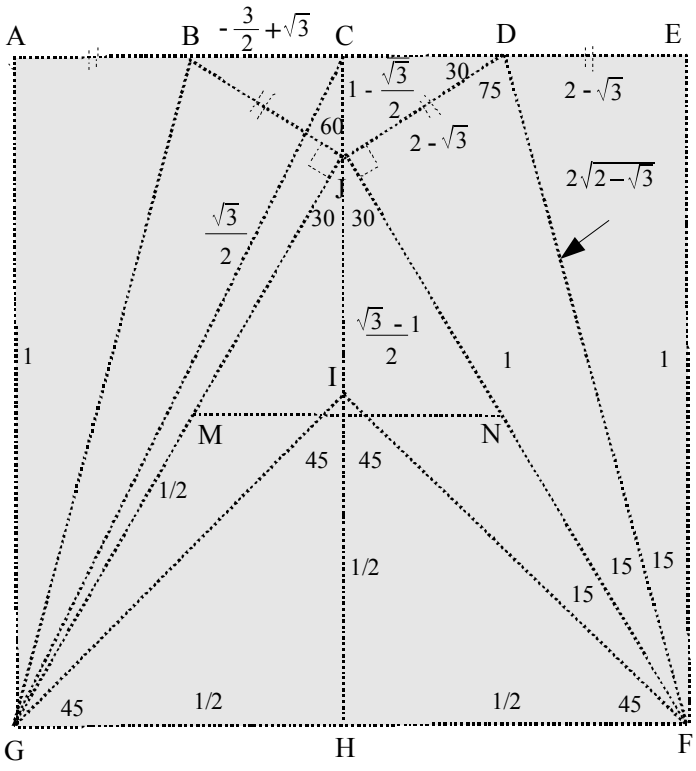
## II - 1 - Calcul des angles (pour les plus grands)

Toujours dans l'ordre de numérotation des pièces, indiquer et/ou calculer la mesure des angles de chaque pièce, l'écrire au crayon mine sur chaque pièce.

**Remarque** : le triangle rectangle bleu n'est pas un triangle remarquable, en effet ses angles non droits ont pour tangentes (touche tan de la calculatrice) respectives ½ et 2, il faut recourir à la fonction ArcTan (ou $\tan^{-1}$) de la calculatrice pour calculer leurs mesures, c'est l'occasion de (re)voir les fonctions trigonométriques et leurs réciproques et de montrer aux élèves l'utilité de ces fonctions.

On pourra partir de cette pièce pour construire un « vrai » triangle scalène (voir le paragraphe suivant).

Afin de faciliter les notations nous allons coder les sommets des différentes pièces puis donner quelques indications de calculs pour les calculs algébriques destinés aux plus grands.




Trapèze isocèle GMNF (gris clair)

Le losange (gris foncé) n'est pas représenté il est constitué de deux triangles équilatéraux gris.

Nous indiquons ci-contre la mesure des angles des pièces de puzzle que nous récapitulerons dans un tableau.

Carré AEFG (jaune)

Triangles rectangles isocèles AGF et AEF (rouge)

Triangle équilatéral GJF (gris)

Petits triangles rectangles non isocèles GHJ et FHJ (vert)

Grands triangles rectangles non isocèles GAC et FEC (bleu)

Cerfs-volants ABJG et EDJF (turquoise)

Trapèze rectangle AGHI et EFHI (rouge foncé)

Deltoïde JFEL (vert foncé)

Pour le professeur voici page suivante le tableau des mesures calculables, le tableau pourra être construit en classe en grand format, chaque élève venant remplir une ou plusieurs cases selon ses découvertes.

Indication pour le calcul de la mesure du petit côté du cerf-volant : les deux cerfs-volants sont obtenus de façon naturelle lors de la construction du triangle équilatéral en rabattant les sommets A et E du carré sur la médiatrice (CH) commune des côtés [AE] et [GF] du carré. L'angle $\widehat{DEF}$ étant droit il en est de même de l'angle $\widehat{DJF}$. L'angle $\widehat{HJC}$ est plat, l'angle $\widehat{HJF}$ mesure 30° car c'est la moitié de l'angle au sommet $\widehat{GJF}$ du triangle équilatéral GJF, donc la mesure de l'angle $\widehat{CJD}$ est 60°. Le triangle JCD est un demi triangle équilatéral de hauteur CD, de côté JD = 2CJ. Or $CJ = CH - JH = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$ donc :

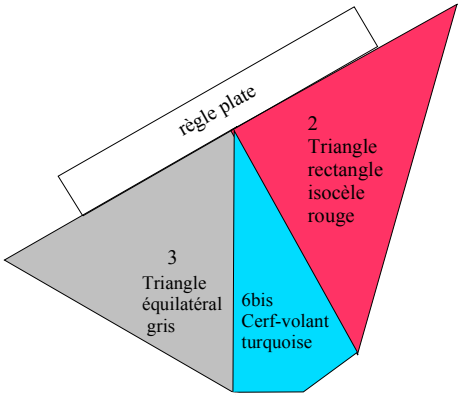
$AB = BJ = JD = DE = 2 - \sqrt{3}$.

| **Nom de la figure** | **Couleur** | **Numéro de la pièce** | **Mesures de ses côtés** | **Mesures de ses angles en degrés** |
|---|---|---|---|---|
| Carré | Jaune | 1 | 1 | 90 |
| Triangle rectangle isocèle | Rouge | 2 | $1 ; 1 ; \sqrt{2}$ | 45 ; 45 ; 90 |
| Triangle équilatéral | Gris | 3 | 1 | 60 |
| Triangle rectangle non isocèle | Vert | 4 | $1 ; \frac{1}{2} ; \frac{\sqrt{3}}{2}$ | 30 ; 60 ; 90 |
| Triangle rectangle non isocèle | Bleu | 5 | $1 ; \frac{\sqrt{5}}{2} ; \frac{1}{2}$ | 26,7 ; 63,3 ; 90 |
| Cerf-volant | Turquoise | 6 | $1 ; 1 ; 2-\sqrt{3} ; 2-\sqrt{3}$ | 30 ; 90 ; 90 ; 150 |
| Trapèze isocèle | Gris clair | 7 | $1 ; \frac{1}{2} ; \frac{1}{2} ; \frac{1}{2}$ | 60 ; 60 ; 120 ; 120 |
| Trapèze rectangle | Rouge foncé | 8 | $1 ; \frac{1}{2} ; \frac{\sqrt{2}}{2}$ | 60 ; 90 ; 90 ; 120 |
| Losange | Gris foncé | 9 | 1 ; 1 ; 1 ; 1 | 60 ; 120 ; 60 ; 120 |
| Deltoïde | Vert foncé | 10 | $1 ; 1 ; 2-\sqrt{3} ; 2-\sqrt{3}$ | 30 ; 60 ; 60 ; 210 |

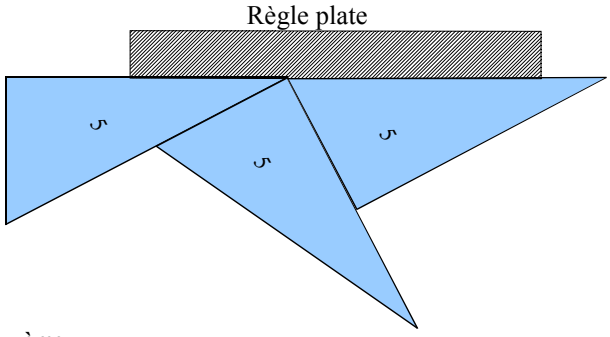
**II - 3 - Utilisation des pièces de puzzle pour constater « visu et tactu » (avec la vue et le toucher) quelques grandes propriétés géométriques des angles et des polygones.**

On pourra ensuite utiliser les pièces, en les posant côte à côte, en utilisant les mesures notées dans le tableau précédent, pour redécouvrir (ou découvrir) des propriétés géométriques élémentaires, par exemple (on pourra regrouper plusieurs élèves pour avoir plus de pièces mais, à la fin de l'activité chaque élève conservera ses propres pièces) :

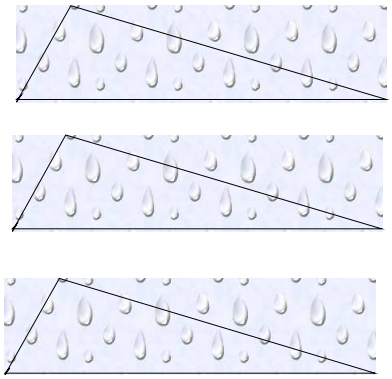
- L'angle plat a pour mesure 180°
- La somme des angles d'un triangle est 180°
- La somme des angles d'un quadrilatère convexe est 360°.



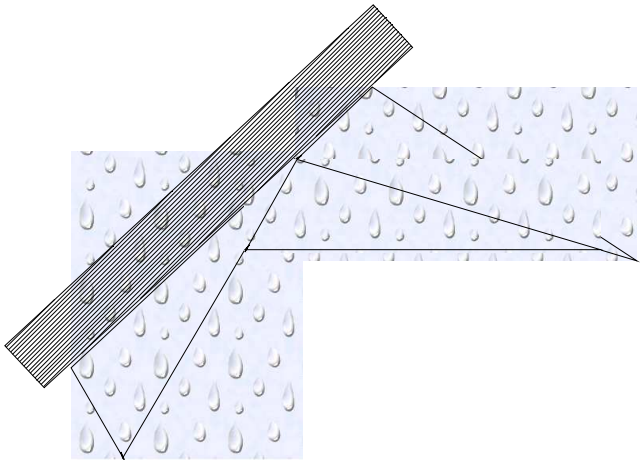

**1er exemple : vérification avec la règle plate : l'angle plat à pour mesure 180°.**




**2ème exemple : vérification avec la règle plate : la somme des angles d'un triangle est 180°**. (Avec un triangle rectangle bleu, on pourra aussi construire un « vrai » triangle scalène et vérifier la même propriété, voir la construction suivante.)

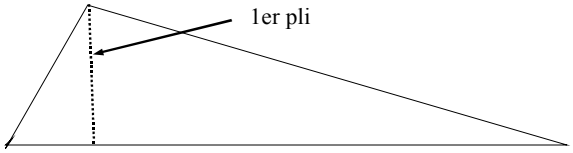


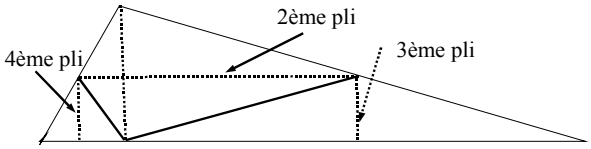
**3ème exemple : trois triangles scalènes égaux,** gris perlé



Vérification avec une règle : **la somme des trois angles d'un triangle scalène mesure 180°**

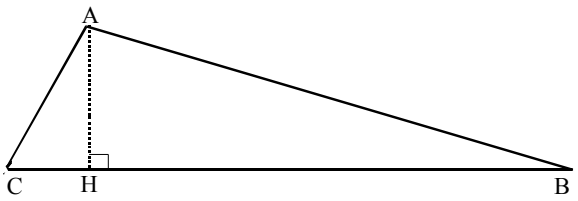
On peut, comme dans l'activité précédente, constater par pliage que la somme des angles d'un triangle scalène est aussi 180°, voyez les figures suivantes.



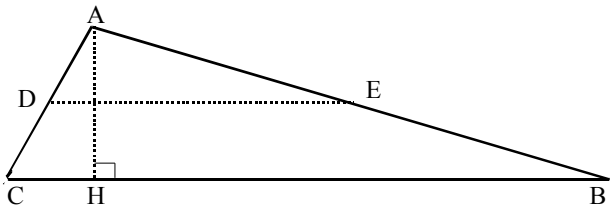




Remarquons que nous obtenons un rectangle dont l'aire est la moitié de celle du triangle.

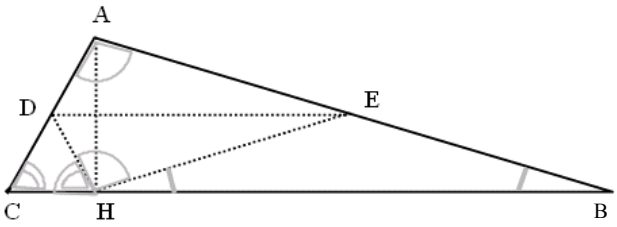
**Démonstration pour les plus grands de la propriété :**
*« La somme des angles d'un triangle a pour mesure 180° »*




Les élèves codent les sommets du triangle, le premier pli, passant par A et rabattant le côté [BC] sur lui-même a permis de tracer la hauteur [AH] (celle-ci servira de guide pour rabattre A sur [CB].




Le deuxième pli, rabattant en H le sommet A sur le côté [CB] a permis de tracer la droite (DE) des milieux des segments [AC] et [AB]



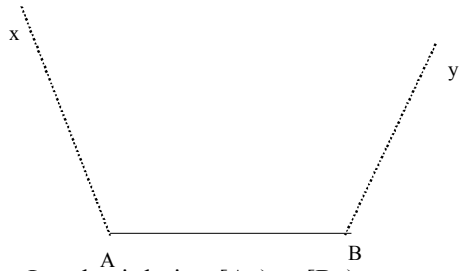

Les triangles CDH et HEB, par la symétrie orthogonale définie par le deuxième pliage sont isocèles donc ont leurs angles à la base égaux. Également par la symétrie définie par le deuxième pliage, le triangle ADE est égal au triangle HDE.

Les angles $\widehat{DHC}$ et $\widehat{DCH}$ ; $\widehat{EHB}$ et $\widehat{EBH}$ ; $\widehat{DHE}$ et $\widehat{DAE}$ sont égaux deux à deux. La somme des angles du triangle ABC est égale à la somme des angles $\widehat{DHC}$, $\widehat{DHE}$ et $\widehat{EHB}$ qui est l'angle plat $\widehat{CHB}$. Nous avons le résultat recherché.

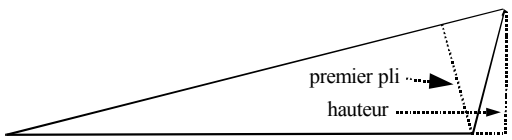
**Cas où une des hauteur est extérieure au triangle**

Remarquons tout d'abord qu'un triangle ne peut avoir plus d'un angle obtus car dans ce cas ses côtés ne se rejoindraient pas.

Il suffit alors de remarquer que si la hauteur est extérieure à l'un des côtés c'est que l'angle correspondant à ce côté et au pied de la hauteur est obtus. En conséquence, les autres angles sont aigus et le pliage peut-être effectué à partir d'un des deux angles aigus.



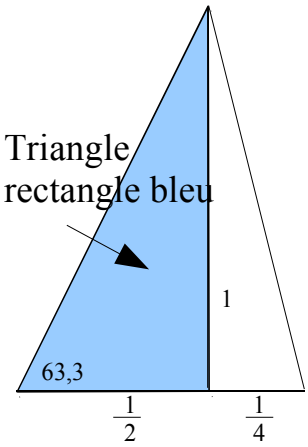

Les demi-droites [Ax) et [By) ne peuvent se rencontrer pour former un triangle.

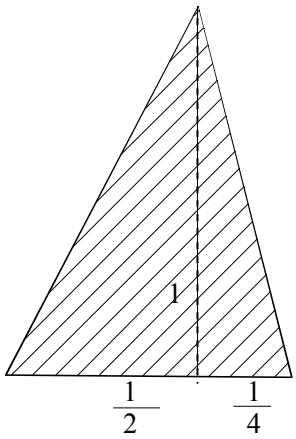


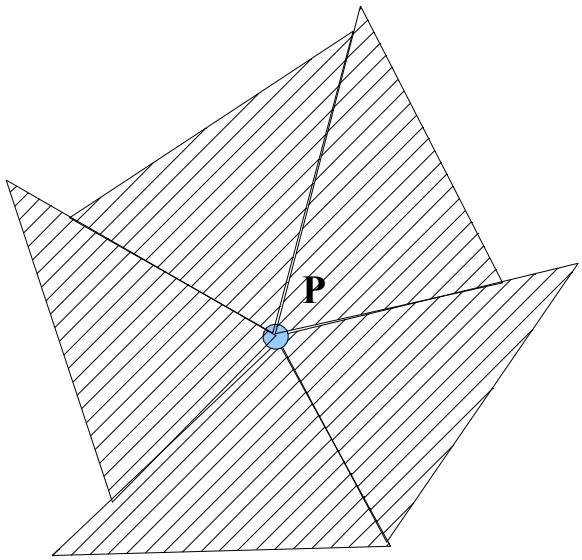
On pourra aussi, comme nous l'avons suggéré plus haut construire un triangle scalène à partir du triangle bleu qui est le quart de l'aire du carré jaune. La calculatrice nous indique que les angles de tangentes respectives ½ et 2 sont les angles respectivement 26,7° et 63,3° au dixième de degré près.

Nous remarquons, comme durant la construction des pièces que ces mesures sont très proches de celles des triangles rectangles verts : 30° et 60° et il sera amusant de demander aux élèves de construire, par exemple, un faux pavage (voir RODRIGUEZ R. et SALLES D. « Du dessin perçu... ») afin de leur faire bien prendre conscience que **« voir » n'est pas « démontrer ».**

Nous montrons page suivante un exemple de triangle scalène construit à partir d'un triangle bleu, ayant un côté de mesure ¾ et une hauteur de mesure 1.




Par exemple ce « pavage » du plan autour d'un point P réalisé avec le triangle scalène précédent en 5 exemplaires, de côté de mesure ¾ et de hauteur, correspondante à ce côté, de mesure 1 est-il un « **vrai pavage du plan** », c'est-à-dire **sans chevauchement des pièces ni espacement de celles-ci ?**

Cet exercice qui sera proposé aux plus grands, ne peut être vérifié que par le calcul que nous donnons ci-dessous.

Comme nous l'avons dit plus haut, l'angle de tangente 2 mesure 63,3°. De même la calculatrice nous indique pour l'angle de tangente 4, un angle de mesure 76°. Le troisième angle mesure donc : 180 - 63,3 - 76 = 39,3 au degré près.

Pour construire le « pavage » du plan autour du point P nous avons posé successivement côte à côte quatre angles de 76° puis un angle de 63,3° soit un total de :

$(76 \times 4) + 63,3 = 367,3$ ce qui représente une erreur de 7,3 degrés environ.

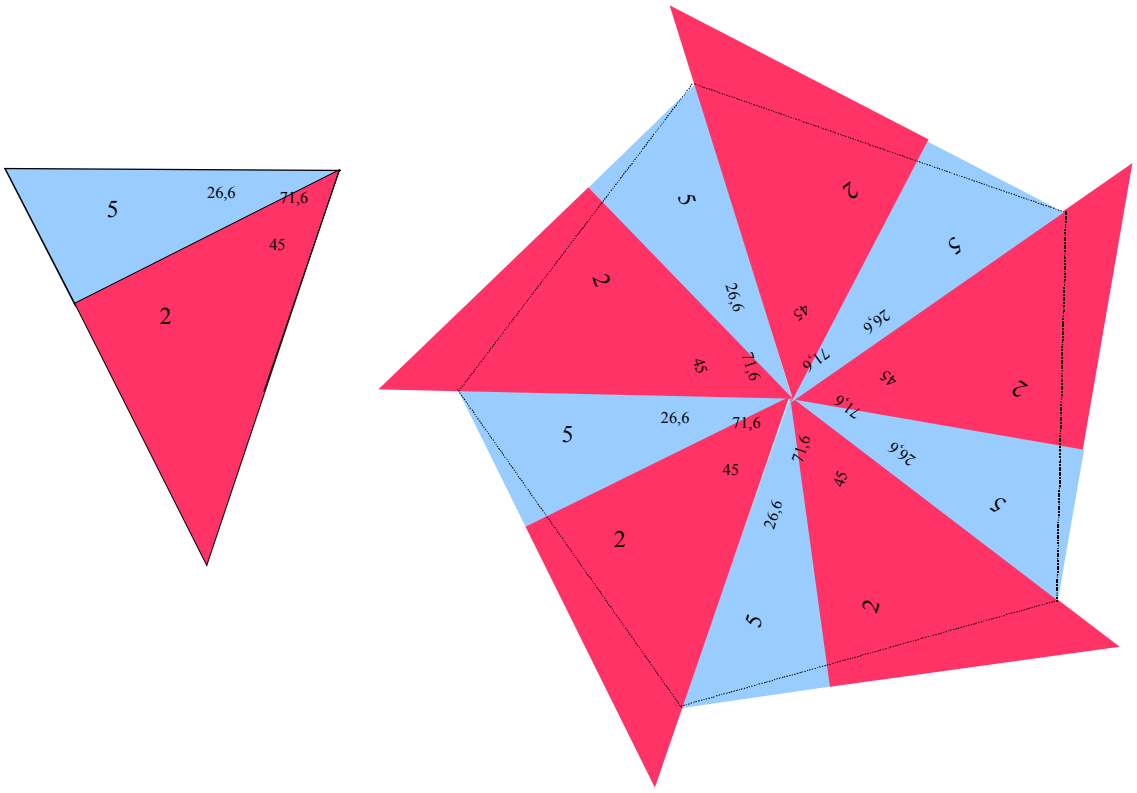
**Question subsidiaire** : peut-on construire un vrai pavage du plan autour d'un point avec ces triangles scalènes ? Combien faut-il de triangles ?

**Réponse** : puisque la somme des mesures des angles d'un triangle est 180°, en effectuant des rotations du triangle scalène, on obtient facilement l'angle plat, il suffit donc d'utiliser six triangles identiques pour entourer le point P en effectuant les rotations convenables.

Nous invitons alors les élèves à construire eux-mêmes des figures trompeuses en procédant comme nous : il suffit bien entendu d'introduire de légères différences dans les mesures d'angles ou de longueur. Voir aussi le chapitre « Où est passé le petit carré » de notre ouvrage « Du dessin perçu... » chapitres 1.6 et 2.6.

**Remarque** : cette activité nous remet en mémoire celle qui est proposée par Didier BOURSIN et Valérie LAROSE dans leur jolie brochure « Pliages et mathématiques ». Ils proposent de construire un angle de tangente ½ c'est-à-dire de mesure 26,6°, par pliage, puis un angle de 45° et obtiennent ainsi un angle de 71,6° qui est « presque » l'angle de 72° requis pour construire le pentagone.

Nous disposons déjà des pièces nécessaires donc, nous allons pouvoir, en regroupant les élèves par cinq, construire un pentagone « presque régulier ». Nous obtenons une figure qui ressemble aux « moulins à vent » des enfants, Pour obtenir un « presque vrai » pentagone, il suffit de couper les pointes rouges et un peu de triangles bleus suivant les pointillés comme sur la figure suivante.



Nous demandons alors aux plus grands quelle est la mesure des côtés des 5 triangles bleu et rouge, d'angle au sommet (au centre du pentagone) de mesures 71,6 degrés. Ces côtés sont les hypoténuses des triangles bleus de petits côtés de mesure ½ et 1. Le théorème de Pythagore nous donne cette nouvelle mesure : $\sqrt{\frac{1}{4}+1}=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

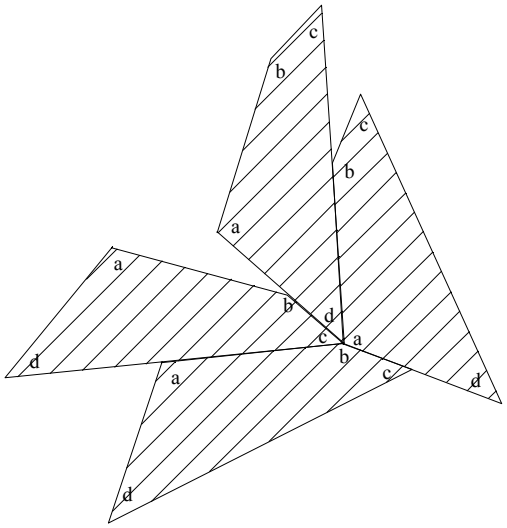
Il faut remarquer que le pentagone approché que nous venons de construire n'a pas ses côtés de mesure 1 et de ce fait ne vérifie pas la propriété des pentagones de côté de mesure 1 dont les diagonales ont pour mesure le Nombre d'Or : $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

**4ème exemple : Vérification de la propriété :** la **somme des angles d'un quadrilatère convexe est de mesure 360°.**

Nous observons tout d'abord les quadrilatères que nous avons construits : le carré, les deux trapèzes, le losange et le cerf-volant. Nous constatons ensemble qu'en pliant ces quadrilatères le long d'une de leurs diagonales, on obtient deux triangles accolés dont la somme des mesures des angles est 180°, nous pouvons conclure que la somme des mesures des angles de ces quadrilatères est 360°.

Dans le cas d'un quadrilatère convexe n'ayant pas de propriété particulière (nous dirons qu'il est « scalène » nous demandons aux élèves d'accoler deux triangles, pièces de puzzle, différents ayant un côté de même mesure, selon ce côté. Nous remarquons alors que, par construction du quadrilatère par deux triangles ayant un côté de même mesure, la somme des angles du quadrilatère a pour mesure 360°. Nous leur demandons alors s'il est nécessaire de construire un « vrai » quadrilatère scalène pour se convaincre que la somme de ses angles a pour mesure 360°. La réponse est « non », bien sur, puisque l'on pourra toujours plier le quadrilatère selon une de ses diagonales et ainsi obtenir deux triangles dont la somme des angles a pour mesure 180°.

Tout de même, nous demandons, pour bien se convaincre, de construire un quadrilatère convexe scalène et de le plier suivant une de ses diagonales. Ensuite de découper, par groupe de quatre élèves, le même quadrilatère scalène et de constater par superposition des quatre angles distincts sur un point du plan que la somme de ces quatre angles mesure bien 360°.

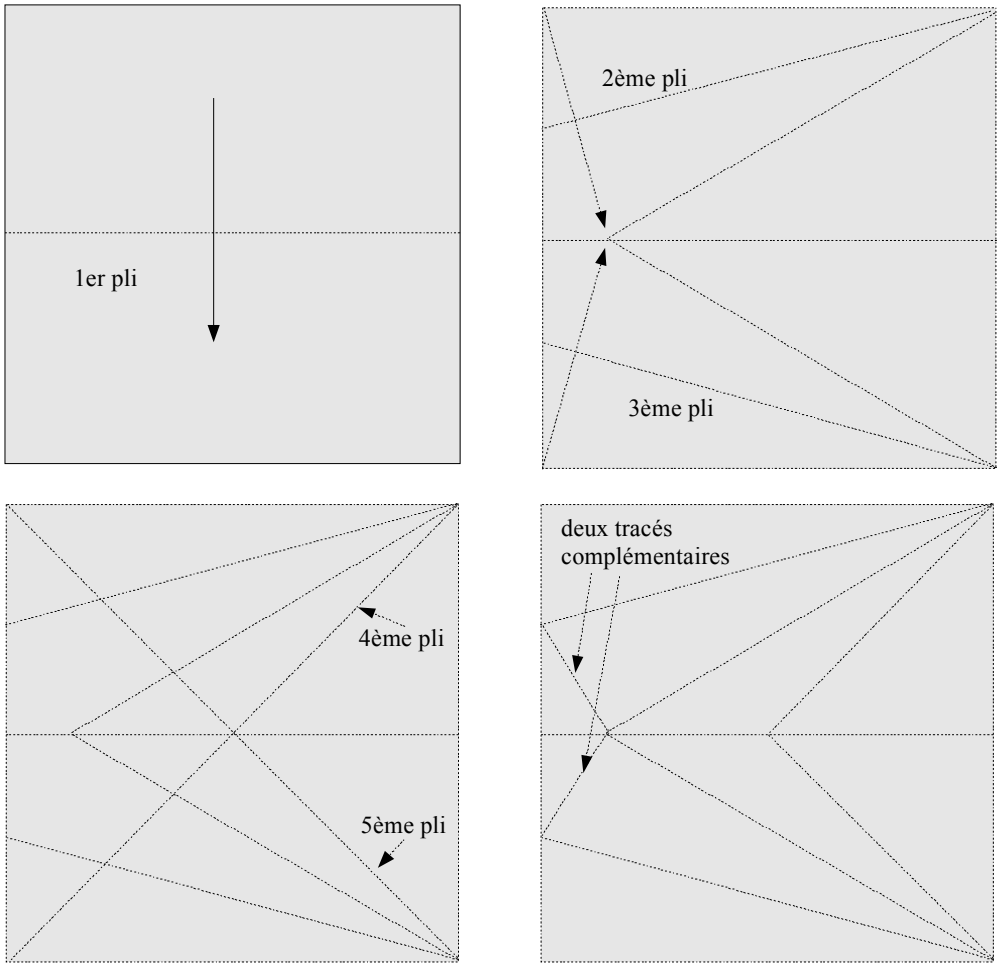


Enfin, nous demandons aux élèves d'utiliser le rapporteur pour vérifier la **conjecture** : « la propriété précédente est vraie pour le deltoïde ».

### III - Le même type d'activités sans couleur

Si l'on ne dispose pas de papier couleur, ou si l'on dispose de moins de temps avec des élèves plus grands, on peut réaliser une variante économique des activités précédentes avec un papier fort, blanc ce qui éventuellement peut déboucher sur d'autres activités tout aussi intéressantes. Cependant nous insistons, comme toujours, sur **l'intérêt d'une « mise dans les mains » des objets géométriques par le biais de « l 'intelligence haptique »** (intelligence sensorielle tactile).

Nous distribuons une feuille A4 de papier fort de couleur claire à chaque élève et leur demandons de faire successivement des plis sur cette feuille, en ouvrant le pli entre chaque opération et en passant un trait léger au crayon à papier et à la règle sur chacun des plis :




Nous demandons alors, sachant que nous avons décidé de donner au côté du carré la mesure unité, de coder la figure, d'indiquer toutes les mesures égales et les angles égaux puis leurs mesures si elles sont facilement calculables.

Ensuite, pour les plus grands, de calculer les lignes trigonométriques de ces angles sous forme algébrique, c'est-à-dire avec des radicaux.
Nous donnons ci-dessous quelques résultats et mesures. Pour calculer les mesures égales AB, BJ, JD et DE il est commode de remarquer que les triangles égaux BCJ et CDJ sont des demi triangles équilatéraux donc :

AB=BJ=JD=DE= $2\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2-\sqrt{3}$. (Voyez les calculs pages 11 et 12).

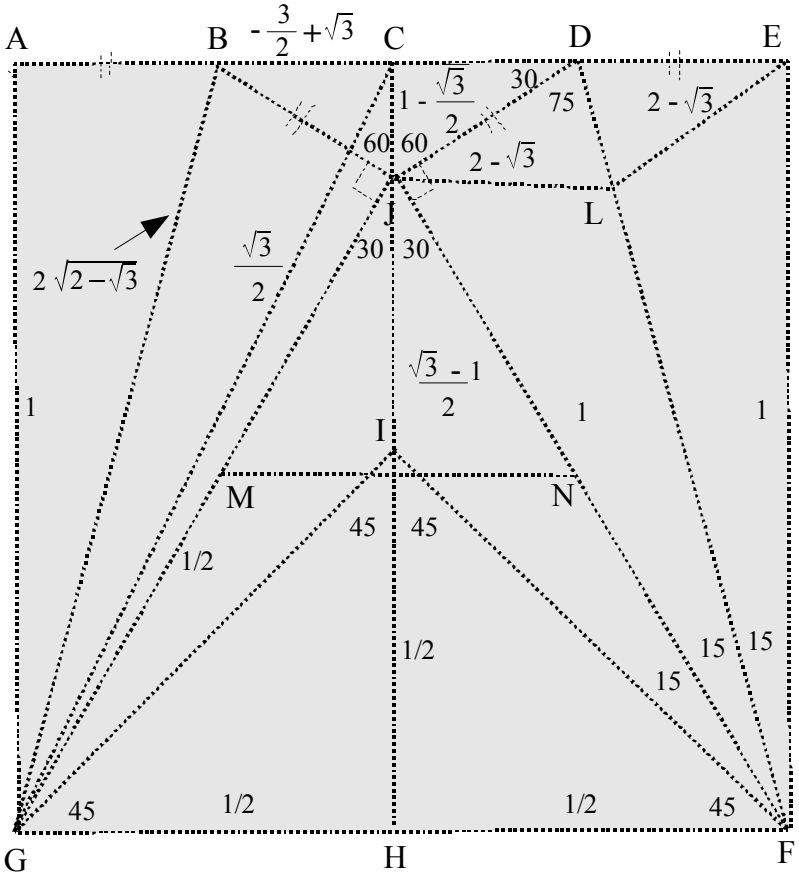



Tableau des valeurs exactes des lignes trigonométriques

| angles en degrés | sinus | cosinus | tangente |
|---|---|---|---|
| 15 | $\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$ | $2-\sqrt{3}$ |
| 30 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ |
| 45 | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | 1 |
| 60 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{4}$ |
| 75 | $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$ | $\frac{2+\sqrt{3}}{2}$ |

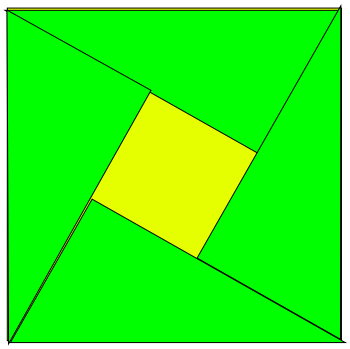
Pour terminer nous demandons aux élèves de regrouper dans un tableau les valeurs exactes des lignes trigonométriques des angles indiqués sur la figure précédente. Nous demandons aux élèves de vérifier que les valeurs approchées délivrées par la calculatrice correspondent bien à ces valeurs exactes.

## IV - Le théorème de Pythagore avec des pièces de puzzle

Il existe de nombreuses démonstrations géométriques du théorème de Pythagore : vous pourrez consulter par exemple le site de notre ami Patrice Debart, très bien documenté : ***debart**.pagesperso-orange.fr/.*

Celle que nous vous proposons ci dessous s'inscrit tout à fait dans notre démarche de démonstration de propriétés géométriques avec des puzzles. Elle est connue sous le nom de « Construction de Bhaskara » (Indes XIIème siècle).

Nous demandons aux élèves de se regrouper par deux afin de disposer de quatre triangles rectangles verts (pièce notée n°4) qui sont des demi-triangles équilatéraux. Ensuite de les disposer de telle sorte qu'ils soient adjacents et sans recouvrement selon la figure suivante sur la carré jaune.



Nous demandons alors aux élèves pourquoi ce «pavage» partiel du carré jaune par les quatre triangles rectangles verts (sans chevauchement et sans vide entre les triangles, sauf le petit espace central ) « fonctionne », c'est-à-dire suit bien les bords du carré jaune ?

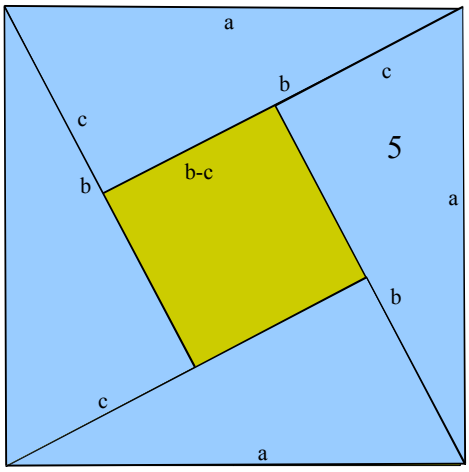
**Indication** : rappelons que les triangles rectangles verts que nous avons construits sont des demi-triangles équilatéraux de côté de mesure 1, donc l'hypoténuse de ces triangles mesure aussi 1. D'autre part, les angles non droits de ces triangles mesurent respectivement 30 et 60 degrés. Le petit côté de mesure $\frac{1}{2}$ d'un triangle peut donc s'appliquer sur le petit côté de mesure $\frac{\sqrt{3}}{2}$ du triangle précédent (dans le sens trigonométrique).

Nous demandons alors quelle est la nature du quadrilatère central et quelle est la mesure de ses côtés.

Par la position respective des quatre triangles, les quatre angles de l'espace jaune sont droits, le quadrilatère est un carré. La mesure de son côté est $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}$.

Nous demandons alors si l'on peut faire une construction similaire avec d'autres triangles rectangles, par exemple les triangles bleus (ils sont un peu particuliers puisque la mesure de leurs petits côtés sont $\frac{1}{2}$ et 1).

Les élèves essayent et remarquent qu'il « faudrait un carré plus grand » (en jaune foncé) :




Nous leur demandons alors de désigner les mesures des triangles rectangles par a (l'hypoténuse), b le grand côté de l'angle droit et c le petit côté restant, on a donc $a > b > c > 0$.

Le côté du carré a donc pour mesure (b-c) son aire est donc $(b-c)^2$. L'aire du grand carré jaune est $a^2$, celle des quatre triangles est : $\frac{bc}{2} \times 4 = 2bc$.

Donc $\mathbf{a^2 = (b-c)^2 + 2bc = b^2 + c^2}$**. (1)**

Nous demandons alors : **ce résultat est-il valide pour un triangle rectangle quelconque d'hypoténuse a et de côtés de l'angle droit b et c ?**

La réponse est « **oui** » puisqu'il est toujours possible de positionner quatre triangles rectangles identiques comme sur la figure précédente car **les angles non droits de ces triangles sont complémentaires**, donc, si l'on place les triangles comme sur la figure précédente le grand quadrilatère obtenu est un carré de côté a et le petit carré central a pour côté (b-c). La formule (1) est applicable et **nous avons démontré le théorème de Pythagore**.

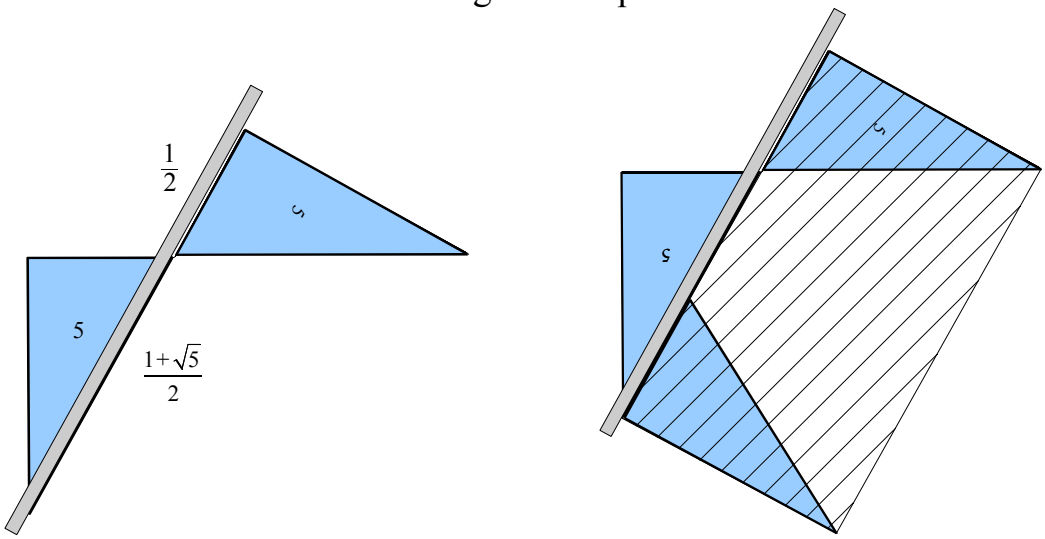
## V – Une construction facile du Rectangle d'Or

Nous rappelons que le **Nombre d'Or**, ainsi appelé par les mathématiciens grecs à cause de ses relations avec l'esthétique des constructions (la façade rectangulaire à colonnes de l'Acropole à Athènes est un Rectangle d'Or, c'est-à-dire que le rapport de la largeur de la colonnade à sa hauteur est le Nombre d'Or) est le nombre : $\mathbf{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$**.**

**Réalisation de l'activité** : Nous demandons aux élèves si ce nombre apparaît dans le tableau de la page 9 ou la figure de la page 16. Nous remarquons que $\frac{\sqrt{5}}{2}$ est la mesure de l'hypoténuse du triangle bleu (pièce 5) de petits côtés de mesure

1 et ½. Il nous manque la longueur ½ pour faire apparaître le Nombre d'Or : $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Nous suggérons de placer les deux longueurs bout-à-bout, de la façon la plus « jolie » possible.

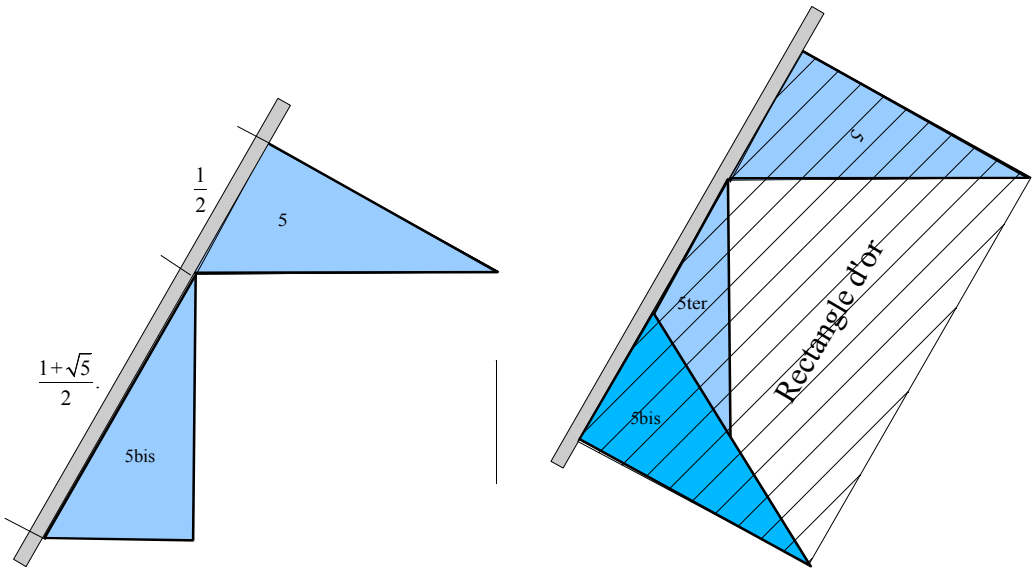
Les élèves peuvent ainsi s'apercevoir que si l'on place **deux triangles bleus alignés** (nous avons utilisé la règle) comme sur la figure suivante, non seulement on obtient le Nombre d'Or mais aussi, puisque les triangles bleus sont rectangles, un Rectangle d'Or. Nous avons utilisé un troisième rectangle bleu pour mieux matérialiser le Rectangle d'Or que nous avons hachuré.




Si l'on craint que les élèves peinent un peu à chercher sans aide, on peut leur proposer la construction du Nombre d'Or avec une devinette :

« Si l'on dispose de **trois triangles rectangles bleus (pièce 5)** peut-on, en utilisant seulement la règle non graduée, définir un Rectangle d'Or, c'est-à-dire un rectangle dont le rapport du grand côté au petit est le Nombre d'Or ? »

Les élèves peuvent aussi proposer la solution suivante qui permet ensuite avec une superposition de deux des trois triangles d'obtenir le contour d'un Rectangle d'Or (nous avons représenté les **deux triangles qui se chevauchent avec deux tons de bleu différents afin de bien distinguer leurs rôles respectifs**) :



**Exercice facultatif pour les plus grands** : Expliquer à un camarade comment construire un Rectangle d'Or avec une règle et trois triangles rectangles bleus.

Nous demandons à chaque élève de rédiger un petit texte pour envoyer à un camarade lui expliquant comment construire les rectangles bleus puis comment les positionner afin que leur contour extérieur dessine un Rectangle d'Or.

Rappelons que ce type d'exercice est appelé « émetteur-récepteur » et qu'il est particulièrement profitable pour la mise en forme de l'expression -écrite ou orale- d'une activité mathématique.

Voici un **exemple de rédaction :**

Il te faut trois triangles rectangles bleus : ceux dont un petit côté de l'angle droit est de longueur moitié de l'autre côté de l'angle droit.

Tu poses la règle sur le bureau, tu mets deux triangles bleus bout à bout du même côté de la règle, le premier triangle à gauche de la règle avec son hypoténuse le long de la règle et son petit côté à gauche de la règle, le deuxième avec son petit côté de l'angle droit le long de la règle et son grand côté à droite de la règle, il servira de bord au Rectangle d'Or. Les deux sommets des deux triangles doivent se toucher. Tu places le troisième triangle bleu avec son petit côté le long de la règle au dessus du premier triangle, le sommet de son angle droit confondu avec le sommet le plus à gauche du premier triangle. Son grand côté à gauche de la règle va former le deuxième petit côté du Rectangle d'Or.

Tu joins les sommets des triangles bleus qui ne sont pas sur la règle par un segment de droite. Tu joins par un segment de droite les sommets des trois triangles bleus qui se trouvent le long de la règle. Tu obtiens ainsi les deux grands côtés du Rectangle d'Or. Les petits côtés du Rectangle d'Or sont obtenus avec les côtés des triangles bleus qui sont orthogonaux à la règle.

**Ce texte étant assez compliqué, on pourra le corriger tous ensemble pour obtenir un bon « mode d'emploi ».**

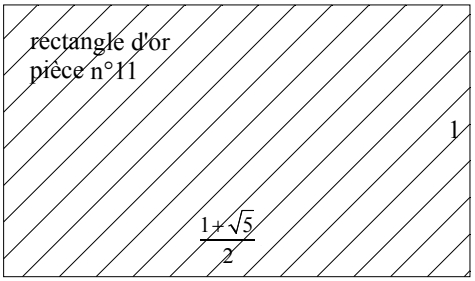
**Prolongation de cette activité pour les plus grands**

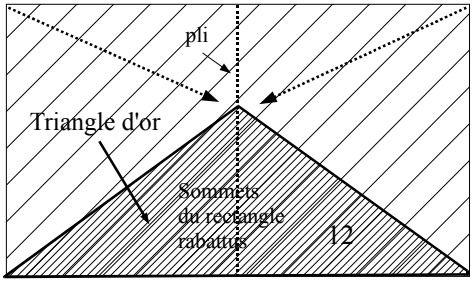
Les plus grands peuvent découper le Rectangle d'Or ainsi obtenu et le considérer comme une nouvelle pièce de puzzle que nous noterons pièce 11.

Nous proposons alors aux élèves d'utiliser la méthode de construction du triangle équilatéral pour construire le **Triangle d'Or**. Ce dernier triangle a ses deux côtés égaux de mesure 1 et sa base de mesure le Nombre d'Or : $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Il suffit alors de marquer le milieu des deux grands côtés du rectangle grâce à un pliage puis de rabattre successivement chacun des petits côtés de telle sorte que leurs extrémités se rencontrent au même point de la droite des milieux.

Nous obtenons ainsi le **Triangle d'Or noté pièce 12.**




Toujours **pour les plus grands**, il pourra être intéressant de compléter cette construction par un calcul algébrique des lignes trigonométriques intervenant dans la construction du Triangle d'Or. Nous avons développé ce thème dans notre brochure : « Nouvelles pratiques de la géométrie » Chapitre VII : les polygones.

En effet nos calculs nous indiquent que les angles du Triangle d'Or sont 108° et deux fois 36°. Si l'on suppose que ses deux côtés égaux sont de mesure 1, sa hauteur est $\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$. Il s'en suit que les lignes trigonométriques exprimées algébriquement des angles de mesure 36° et 54° (qui sont complémentaires) sont : $\cos 36 = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ ; $\sin 36 = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$ ; $\tan 36 = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{1+\sqrt{5}}$.

La troisième expression se simplifie en : $\tan 36 = \sqrt{5-2\sqrt{5}}$.

$\cos 54 = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$ ; $\sin 54 = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ ; $\tan 54 = \frac{1}{\sqrt{5-2\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{5}$.

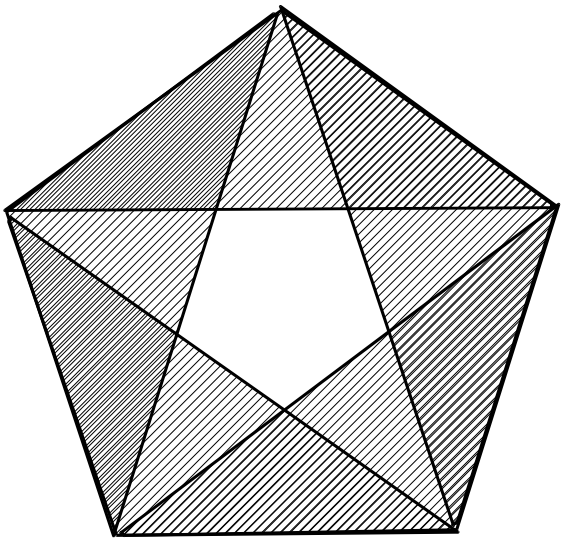
Nous pouvons compléter le tableau proposé en page 16 :

| mesure | sinus | cosinus | tangente |
|---|---|---|---|
| 15<br>valeur approchée au centième | $\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$ ; (0,26) | $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$<br>(0, 96) | $2-\sqrt{3}$<br>(0,27) |
| 30 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ |
| 36<br>valeur approchée | $\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$<br>(0,59) | $\frac{1+\sqrt{5}}{4}$<br>(0,81) | $\sqrt{5-2\sqrt{5}}$<br>(0,73) |
| 45 | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | 1 |
| 54 | $\frac{1+\sqrt{5}}{4}$ | $\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$ | $\frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{5}$ |
| 60 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{4}$ |
| 75<br>valeur approchée | $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$<br>(0,97) | $\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$<br>(0,26) | $\frac{2+\sqrt{3}}{2}$<br>(3,73) |

Comme d'habitude nous demandons aux élèves de vérifier que la calculatrice donne bien les valeurs approchées de ces résultats exacts. Nous avons indiqué entre parenthèses quelques résultats avec les deux calculs : la valeur de la fonction trigonométrique directe délivrée par la calculatrice (qui est approchée) et la valeur algébrique (avec des radicaux) calculée avec la même calculatrice, le tout au centième près.

**Application à la construction du pentagone (pour tous)** (voir aussi le site de Thérèse Éveilleau dans la bibliographie)

Nous découpons alors le Triangle d'Or représenté par la partie hachurée sombre que nous nommons pièce numéro 12. Nous demandons alors aux élèves de mesurer l'angle au sommet du Triangle d'Or découpé avec le rapporteur. Nous trouvons 106° alors que l'angle au sommet du Triangle d'Or doit mesurer 108° (nous faisons les calculs explicites dans notre brochure « Nouvelles pratiques... » loc. cit.) soit une erreur de moins de 2% ce qui nous paraît acceptable. Nous regroupons les élèves par cinq et leur demandons de poser leurs 5 pièces partiellement chevauchées comme sur la figure ci-dessous afin de construire un pentagone :



Les imperfections dans les ajustements, qui induisent des inexactitudes dans les bords du pentagone ainsi construit sont dues, bien entendu, aux erreurs de découpage des pièces et à l'erreur qui en résulte sur la valeur de l'angle au somment du Triangle d'Or mais l'ensemble nous paraît assez satisfaisant.

## VII- Une question classique de géométrie au collège

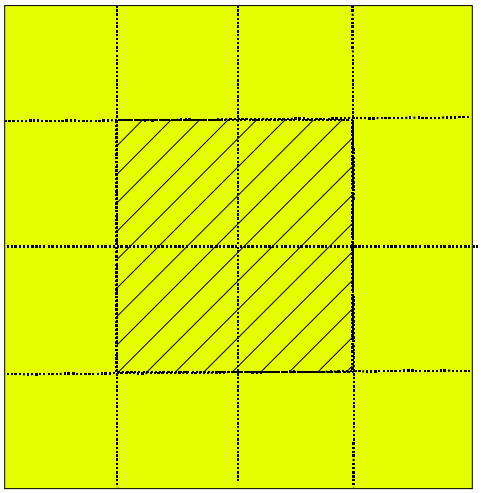
Une question classique et fondamentale de géométrie au collège est celle du rapport entre l'agrandissement (ou la réduction) des mesures de longueur et des mesures d'aires (R. RODRIGUEZ « Une autre gestion ... » voir la bibliographie).

Nous allons évoquer cette question dans le cadre de nos pièces de puzzle.

Considérons de nouveau la première pièce : le carré jaune. Nous demandons aux élèves d'en faire une copie qui peut être jaune elle aussi. Nous leur demandons : Pouvez-vous construire, en pliant le carré jaune, un carré de surface deux fois plus petite ?

**1ère Proposition**

Les élèves peuvent avoir l'idée de plier le carré parallèlement à ses côtés pour enlever des bandes :



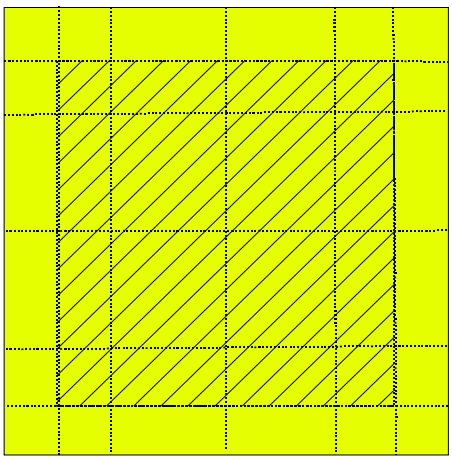
Un carré jaune de côté unité (pièce 1)

Ils obtiennent par pliages successifs le carré hachuré : deux premiers pliages joignent les points milieux des côtés du carré, ensuite quatre pliages joignent les points qui indiquent le quart de chaque côté. Nous leur demandons de justifier le fait que c'est un carré et de l'écrire sur leur cahier.

Remarque : pour que les pliages soient bien nets les élèves peuvent s'aider d'une règle et d'un crayon.

Nous leur demandons de comparer les aires du grand carré et du petit en comptant les petits carrés qui apparaissent par pliages qui sont repérés sur la figure par des traits pointillés.

Ils comptent 12 carrés non hachurés et 4 carrés hachurés, le carré entier compte donc 16 carrés. Nous leur demandons : Quel est le rapport des aires du grand carré et du carré hachuré ? C'est quatre. Nous n'avons pas répondu à la question. Ils peuvent alors suggérer : on va « plier moins » par exemple on va « diminuer la bande non hachurée de moitié ». Ce qui donne :



Le même carré plié différemment

C'est un peu difficile à compter et nous donne l'occasion de revoir l'addition des fractions pour les plus grands. Pour les plus jeunes nous allons détailler les différents morceaux de la bande que nous allons ôter pour obtenir un carré plus petit. Nous allons compter avec les petits carrés que nous avons construits dans l'activité de la page précédente. Dans la bande non hachurée, il y a :

- 8 rectangles qui sont des **moitiés de petits carrés,**
- 12 tout petits carrés qui sont des **quarts de petits carrés.**

Nous demandons : Combien cela représente de « petits carrés ?

Il faut deux rectangles pour faire un petit carré, cela fait 4 petits carrés. Il faut quatre tout petits carrés pour faire un petit carré, cela fait 1 petit carré. Ce qui fait en tout 9 petits carrés. Nous n'obtenons pas la moitié de 16 petits carrés mais 14.

**Pour les plus grands** nous demandons, puisque nous avons décidé précédemment que le grand carré jaune (pièce 1) représente l'unité d'aire, quelle est l'aire du carré hachuré ?

- L'aire de chaque petit carré mesure $1/16^{ème}$ de l'aire unité.
- L'aire de chaque rectangle mesure la moitié d'un petit carré soit $1/32^{ème}$ de l'aire unité.
- L'aire de chaque tout petit carré mesure le quart d'un petit carré donc :

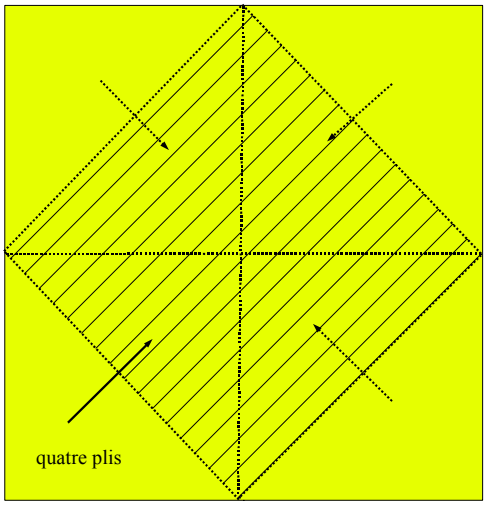
$(1/16) : 4 = 1/64^{ème}$ de l'aire unité.

La somme des rectangles et des carrés hachurés est donc :

$4\times\frac{1}{16}+8\times\frac{1}{32}+4\times\frac{1}{64}=\frac{9}{16}>\frac{1}{2}$. Nous approchons de la réponse mais chacun sent bien que si l'on procède « par approximation successive » sur les plis, le résultat va être peu précis.

**2ème proposition**

Quelqu'un peut proposer de « rabattre les coins » du carré jaune comme ci-dessous, en s'aidant des plis joignant les milieux des côtés (on peut aussi s'aider, comme précédemment d'une règle et d'un crayon) :




Quatre autres plis sur le carré jaune

Nous demandons alors « Quelle est l'aire du carré hachuré ? »

Les élèves observent que les côtés rabattus recouvrent exactement ce qui reste du carré jaune et le justifient par le fait que les quatre plis sont des diagonales des petits carrés jaunes. La conclusion est :

**L'aire du carré hachuré est la moitié de celle du carré jaune.**

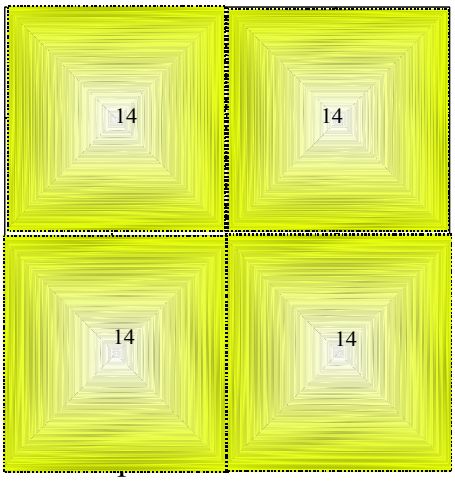
On pourra demander aux élèves de découper la pièce hachurée et l'appeler « pièce 13 ».

Nous demandons alors **aux plus grands** de calculer la mesure du côté du triangle hachuré. Les quatre carrés jaunes ont des côtés de mesure 1/2, d'après le théorème de Pythagore la mesure de leur diagonale est $\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

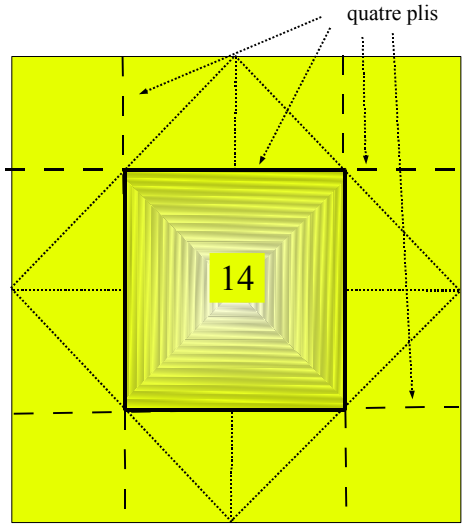
L'aire du carré hachuré est donc : $\left[\sqrt{\frac{1}{2}}\right]^2 = \frac{1}{2}$. **Ce qui était demandé.**

**Activité de renforcement pour tous**

Nous avons observé lors du premier pliage que nous avions obtenons un carré d'aire ¼ au lieu de ½. Le dernier carré jaune hachuré a bien une aire de ½ comme cela était demandé. Nous l'avons appelé pièce n°13. Il est donc facile, avec le même procédé, en pliant les coins de cette pièce, d'obtenir une pièce d'aire moitié c'est-à-dire ¼ que nous nommerons pièce n°14. Nous demanderons donc aux élèves de se regrouper par 4 et de vérifier que quatre des pièces 14 recouvrent bien le premier carré jaune d'aire unité.




Quatre pièces 14 recouvrent le carré jaune pièce 1




Si l'on construit par pliages le carré d'aire ¼ à partir du carré jaune initial d'aire unité on « voit » bien que l'on retrouve notre première construction. Ces activités de renforcement sont très utiles pour installer chez l'élève le concept de **différence entre les rapports de longueurs et les rapports d'aires.** Plus tard on pourra poursuivre ce type d'activité avec les rapports de volumes.

Pour une **seconde activité de renforcement**, nous pouvons demander aux élèves, connaissant un carré, sans connaître la mesure de ses côtés, de construire un deuxième carré d'aire double. Ensuite d'expliquer leur raisonnement. Ils pourront utiliser les pliages et la règle non graduée.

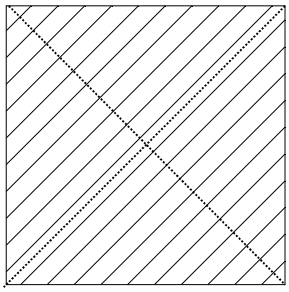
**Par exemple :** Nous avons obtenu un carré de mesure d'aire moitié en rabattant les sommets du carré en son centre. Maintenant il faut faire l'inverse.

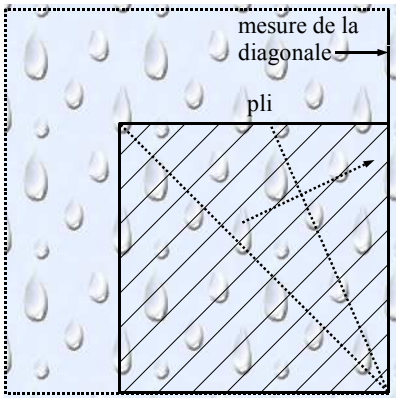
Nous faisons deux plis pour déterminer les diagonales du carré, celles-ci ont pour mesure, d'après notre activité précédente, la mesure du côté à construire.

Il suffit donc de reporter, grâce au pli représenté sur la figure de droite, le long d'un côté du carré d'origine, cette mesure.

On le fait une deuxième fois, le long du côté opposé et on obtient deux points qui déterminent un côté du carré recherché. On trace ce côté avec la règle. Il suffit de renouveler l'opération pour obtenir un deuxième côté du carré représenté avec des gouttes.

Nous vérifions, en mesurant les côtés à la règle graduée et avec la calculatrice que l'aire du grand carré est bien double de celle du petit carré.

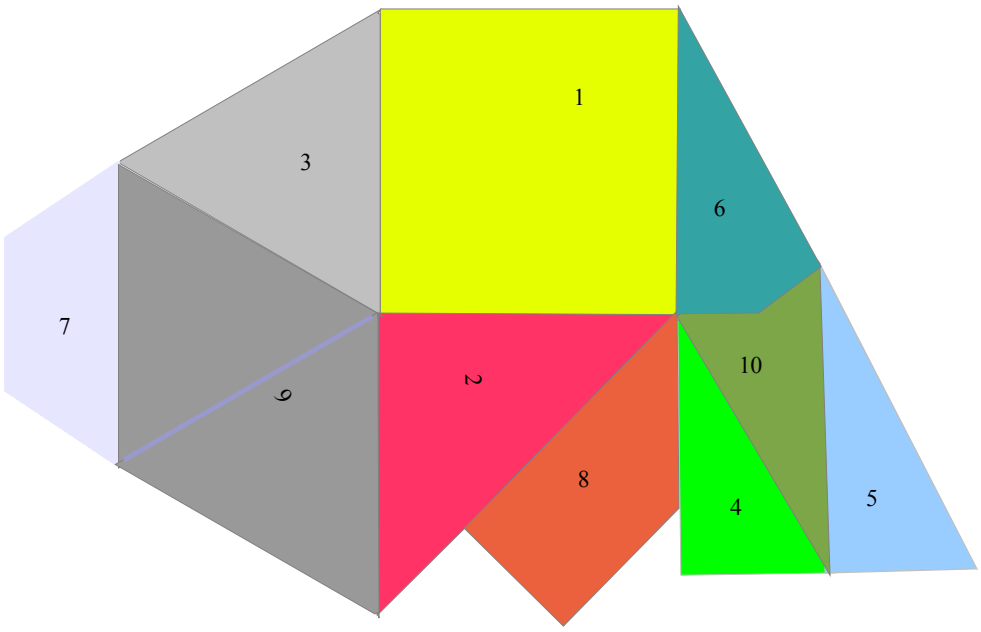





**VIII – Une expérience de pavage d'une partie du plan avec toutes les pièces (pour tous en révision des mesures d'angle) suivie de la construction du « Cadran étoilé »**

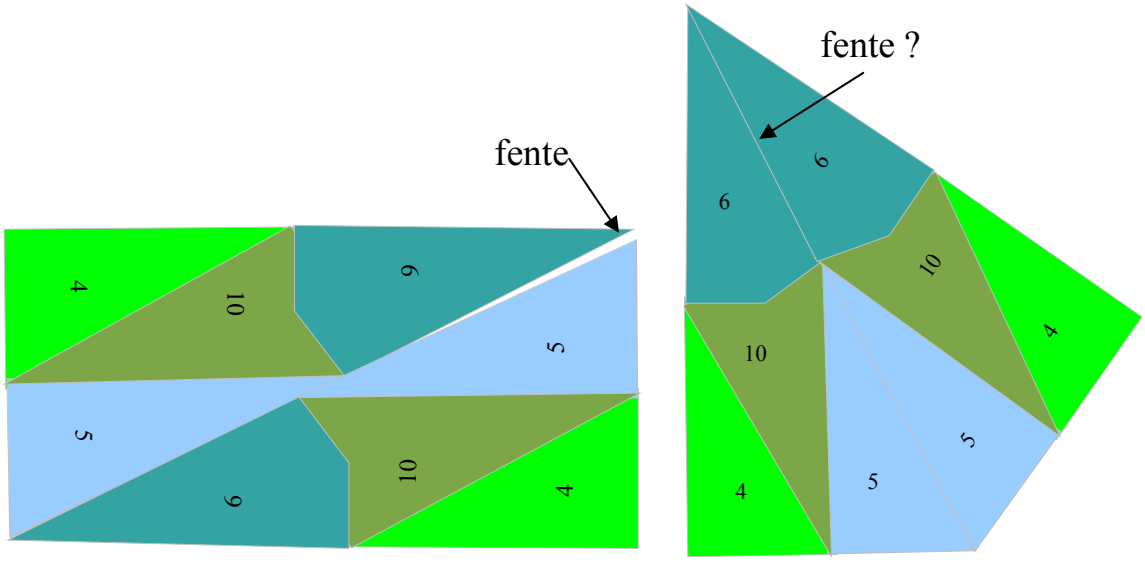
Ce travail distrayant de consolidation peut être proposé dès que toutes les pièces sont découpées. Nous pouvons donc demander aux élèves de placer côte à côte leurs pièces pour réaliser un pavage du plan le plus joli possible. Nous leur demandons de bien vérifier que le pavage est correct c'est-à-dire que les mesures des angles et les longueurs des côtés adjacents coïncident bien, qu'il n'y a **ni chevauchement des pièces, ni espace entre elles**.

En voici un exemple.



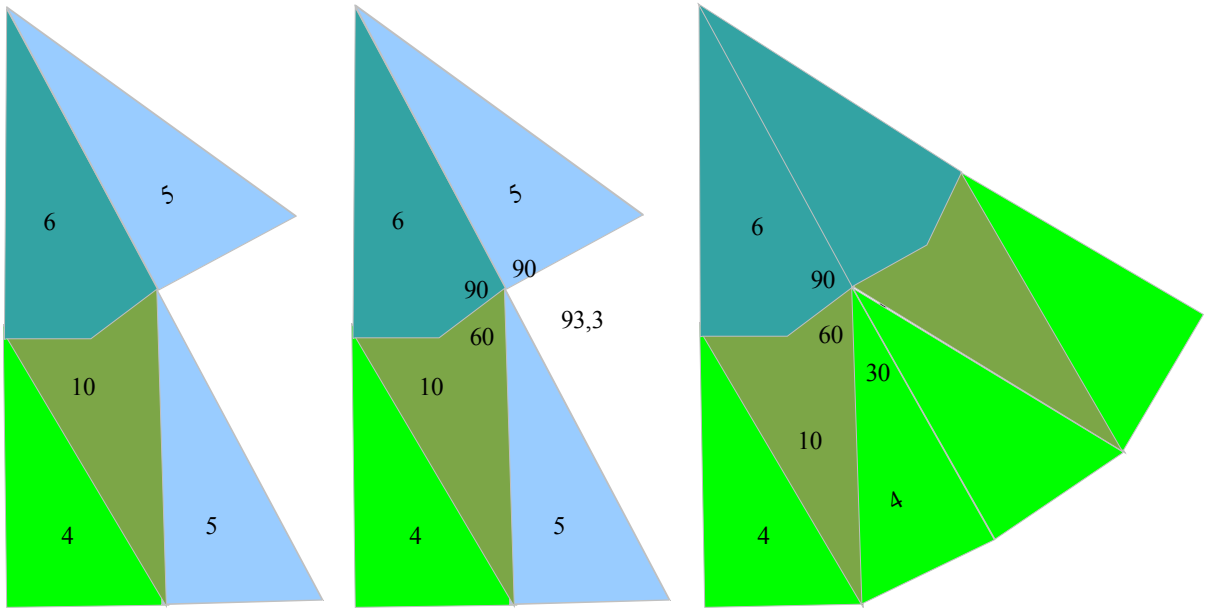
Nous remarquons que les sommets du triangle bleu (5) et du cerf-volant turquoise (6) (à droite de la figure) « ont l'air » d'être alignés. Nous demandons aux élèves de le vérifier par le calcul. Les trois angles concernés appartenant au triangle bleu (5), au deltoïde vert foncé (10) et au cerf-volant turquoise (6) mesurent respectivement 26,7 ; 30 et 90 en degrés, leur somme n'est pas 180 donc le trait suivant le bord des pièces n'est pas un segment de droite malgré les apparences.

De même l'autre côté extérieur du triangle bleu (5) et le côté extérieur du triangle vert clair (4) semblent former un segment de droite, vérifions-le. La somme des angles concernés est 60 + 30 + 90 = 180 en degrés : les côtés forment un segment de droite. Les pièces 4, 5, 6 et 10 peuvent donc être utilisées pour construire un faux rectangle comme nous le proposons ci-dessous afin de renforcer l'esprit critique des élèves. Nous faisons ainsi mieux apparaître l'écart entre le triangle bleu et le cerf-volant turquoise.




Nous demandons alors aux élèves s'il est possible de construire une « vraie » figure géométrique, sans chevauchement ni espace entre les pièces. Ceux-ci peuvent proposer la construction de droite et dire : Nous avons construit un « vrai » cerf-volant. Nous les laissons réfléchir et trouver qu'ici encore il y a un problème de fente entre le côté commun aux deux triangles bleus et le sommet commun aux deltoïdes vert foncé.

Nous proposons alors l'arrangement page suivante puis une activité un peu différente : la construction du « **cadran étoilé** ».




Sur la première figure ci-dessus nous vérifions que les pièces 6 et 5 du haut du puzzle s'ajustent bien car les deux côtés jointifs mesurent 1. Nous observons que « le creux » entre les deux pièces 5 « a l'air » de définir un angle droit. Nous demandons donc aux élèves de le vérifier en reprenant éventuellement le tableau de la page 10. Nous trouvons 93,3 sur la deuxième figure ce qui ne convient pas et demandons aux élèves de chercher si l'on peut placer une autre pièce afin que le « creux » définisse un angle droit. Sur la troisième figure, nous avons abandonné le triangle bleu et utilisé 4 triangles verts. Nous demandons aux élèves de vérifier que, cette fois, nous avons un vrai pavage d'une partie du plan (la figure obtenue est constituée de deux nouveaux cerfs-volants) qui peut donner lieu à un développement intéressant dans le style du « joli diamant » étudié dans notre ouvrage « Du dessin perçu... » paragraphes 1.14 et 2.14 (voir bibliographie). Nous pouvons ainsi demander aux élèves de se regrouper afin de **construire le polygone régulier présenté page 2** et de l'afficher dans la classe. Puisqu'il contient un polygone étoilé qui comporte douze sommets, nous l'appellerons le « **Cadran Étoilé** ».

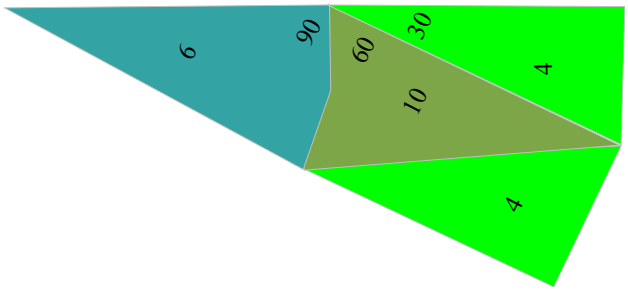
Remarquons que la figure de la page 2 n'est pas parfaite car elle a été construite « à la main » en déplaçant les pièces avec les fonctions déplacement et rotation de l'ordinateur.

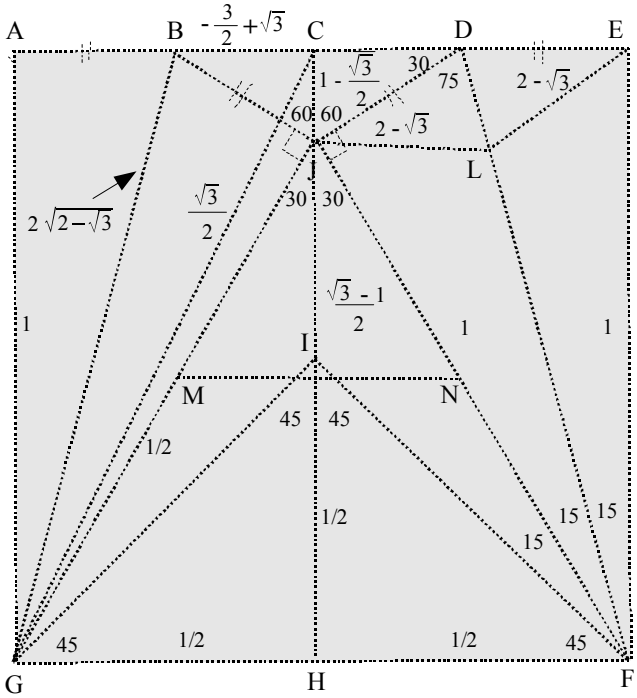
Voici à titre d'exemple quelques propriétés du Cadran Étoilé qui peuvent être étudiées :

- Compter les sommets du polygone étoilé.
- Justifier, en utilisant les mesures d'angles précédemment calculées, que le polygone couvre bien le plan autour du centre indiqué par un petit cercle.
- Calculer le nombre d'axes de symétrie du polygone.
- Calculer la surface du polygone étoilé et celle du polygone convexe extérieur et celle du polygone convexe intérieur. Cette dernière activité, plus délicate sera proposée aux plus grands, à partir de la seconde. Nous allons donner quelques indications sur les calculs algébriques nécessaires.

Reprenons le motif de base servant à la construction du cadran étoilé. Il est constitué de deux pièces numéro 4 (le triangle rectangle moitié du triangle équilatéral), d'une pièce 6 (le cerf-volant) et d'une pièce 10 (le deltoïde).

Calculer l'aire du triangle rectangle est facile, ses côtés étant de mesures respectives 1, $\frac{1}{2}$ et $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Calculer celle du cerf-volant est plus difficile car nous ne connaissons pas encore la mesure de ses deux diagonales. Nous allons donc reprendre les caractéristiques de cette pièce sur le dessin récapitulatif de la page 18. (Les échelles des deux figures sont différentes pour des raisons de lisibilité.)




Le calcul de l'aire du cerf-volant JDEF est facile puisque celui-ci est constitué de deux triangles rectangles DEF et DJF égaux dont les côtés de l'angle droit mesurent 1 et $2-\sqrt{3}$. L'aire du cerf-volant est donc $2-\sqrt{3}$.

Pour calculer l'aire du deltoïde JLEF nous devons calculer l'aire du triangle JDE.

Nous appelons K l'intersection des deux diagonales [JE] et [DF] du cerf-volant JDEF.

Nous allons tout d'abord calculer l'aire du triangle JDK en utilisant les calculs des mesures algébriques des longueurs (i.e. avec des radicaux) ainsi que les mesures d'angles indiquées sur la figure.

Nous avons calculé précédemment le cosinus de l'angle de 75° soit $\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$.

Dans le triangle DKJ, nous avons :

$\cos 75 = \frac{DK}{2-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$. Donc : $DK = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \times 2 - \sqrt{3}$.

De même : $\sin 75 = \frac{1}{2\sqrt{2-\sqrt{3}}} = \frac{JK}{2-\sqrt{3}}$. Donc : $JK = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$.

L'aire du triangle DJE est donc : $DK \times JK = \frac{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}{4}$. Pour obtenir celle du deltoïde il suffit de soustraire deux fois celle du triangle DJE à celle du cerf-volant JDEF, nous obtenons :

Aire du deltoïde :

$$(2-\sqrt{3}) - \frac{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}{2} = (2-\sqrt{3})\left(\frac{2-\left(2-\sqrt{3}\right)}{2}\right)$$

$$= (2-\sqrt{3})\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3} - \frac{3}{2}.$$

**Conclusion didactique :** Rappelons que pour installer chez l'élève une notion, qu'elle soit géométrique ou plus généralement mathématique, il faut la traiter de différentes manières. Nous disons, selon la terminologie introduite par Ruben Rodriguez dans sa thèse de doctorat : « La pédagogie des mathématiques est-elle moderne ? » (Caen 1978) que nous faisons un psychomorphisme de l'univers des actions directement expérimentables (les actions scientifiques que nous pouvons matérialiser avec des instruments, des logiciels...) dans celui des êtres mathématiques (notions de géométrie par exemple).

L'utilisation d'objets physiques comme les puzzles permet à l'élève de « se mettre dans les mains » ces objets en les manipulant et surtout « sentir » avec son intelligence haptique (c'est-à-dire la structuration de son univers tactile), leurs propriétés mathématiques. L'élève pourra, comme nous l'avons conseillé en début de brochure, conserver ses pièces à la maison et les manipuler chaque fois qu'il a oublié les propriétés de la pièce ou même sa forme. Ainsi il peut avoir une sensation de familiarité qui fait que l'objet ne lui est plus étranger, ce qui peut le rassurer dans sa relation avec les objets mathématiques et, de ce fait, l'intéresser.

Un commentaire : « Je pense que c'est une méthode concrète qui permet de mieux comprendre les différences et les propriétés des figures géométriques. »

Raoul B. élève de troisième, stagiaire à l'IREM de BN, décembre 2011

## Bibliographie

**BOURSIN Didier, LAROSE Valérie,** *Pliages et mathématiques*. Paris, ACL/Les éditions du kangourou, 1997.

**DEBART Patrice** : « Descartes et les mathématiques » en ligne :
http://www.debart.fr/

**EVEILLEAU Thérèse** : « Construction du pentagone par une méthode des Compagnons » en ligne :
http://therese.eveilleau.pagesperso-orange.fr/pages/truc_mat/textes/compagnons.htm

**MARTINEZ-LABROUSSE Isabelle** « Un essai de synthèse entre le théorème de Pythagore et la **procédure gou-gu** » in Colloque « *Circulation transmission héritage* » Compte-rendu édité par l'IREM de Basse-Normandie à paraître courant 2011.

**MØLLER Anders Pape,** « La nature préfère la symétrie » en ligne:
http://www.larecherche.fr/content/recherche/article?id=19025

**RODRIGUEZ HERRERA Ruben** *La pédagogie des mathématiques est-elle moderne ?* Thèse de Doctorat en Sciences de l'Éducation. Université de Caen 1978.

**RODRIGUEZ HERRERA Ruben «** Une autre gestion du puzzle de Guy Brousseau », en ligne sur le site de l'I.R.E.M. de Basse-Normandie :
*http://www.math.unicaen.fr/irem/spip.php?article23*

**RODRIGUEZ HERRERA Ruben, SALLES-LEGAC Danielle** *Du dessin perçu à la figure construite.* Paris Ellipses 2006.

**RODRIGUEZ HERRERA Ruben, SALLES-LEGAC Danielle** « Les symétriseurs » in *Le miroir des mathématiques* (n°6) Décembre 2010.Caen, I.R.E.M. de Basse-Normandie et en ligne :
http://www.math.unicaen.fr/irem/

**RODRIGUEZ HERRERA Ruben, SALLES-LEGAC Danielle** *Practicar la geometría. De las acciones directamente experimentables a sus formalizaciones matemáticas.* Caen, I.R.E.M. de Basse-Normandie 2010.

**SALLES-LEGAC Danielle, RODRIGUEZ HERRERA Ruben** *Nouvelles pratiques de la géométrie*. Caen, I.R.E.M. de Basse-Normandie 2006.

**SALLES-LEGAC Danielle et l'équipe de géométrie de l'I.R.E.M. de Basse-Normandie** *Histoires de cerfs-volants et autres quadrilatères, Historias de cometas y otros cuadriláteros* (en espagnol et en français). Caen, I.R.E.M. de Basse-Normandie 2008.

**SALLES-LEGAC Danielle et l'équipe de géométrie de l'I.R.E.M. de Basse-Normandie** « Géométrie des pliages » in *Le miroir des mathématiques* (n°5) Décembre 2009. Caen I.R.E.M. de Basse-Normandie et en ligne :
http://www.math.unicaen.fr/irem/

**I.R.E.M. de Basse-Normandie Équipe de Géométrie**
**Université de Caen France**
**avec le soutien des I.R.E.M. du Pérou, Universités de Ica, Lima, Tumbes**

# Découvrir et démontrer en géométrie avec des pièces de puzzle

les propriétés des triangles et quadrilatères usuels

Nous présentons aux Professeurs de collège et de classe de seconde en formation initiale et/ou continue, des activités géométriques réalisées à l'aide de matériel simple et peu coûteux : pliages, découpages, constructions de pièces de puzzle afin de découvrir et se « mettre dans les mains » les figures **géométriques fondamentales que sont : les angles, les triangles et les quadrilatères remarquables ainsi que leurs propriétés.**

L'aspect manuel et ludique de ces activités permet de les proposer dès la classe de sixième ou cinquième en initiation puis dans les classes supérieures en consolidation de connaissances.

Cette brochure est **aussi disponible en Espagnol**, le lecteur intéressé par la version espagnole la recevra sur demande. Elle peut donc être utile aux Professeurs de **classes européennes hispanisantes** ainsi qu'aux **professeurs des pays de langue espagnole**, en particulier d'Amérique Latine avec lesquels nous collaborons dans le cadre du réseau international des I.R.E.M.

**Mots clés :** aire double, aire moitié, activité géométrique, arc tangente, calcul algébrique, angle plat, angle droit, angle aigu, angle obtus, cerf-volant, cosinus, découpage, deltoïde, équilatéral, formalisation, isocèle, ligne trigonométrique, losange, Nombre d'Or, pavage du plan, pentagone, pliage, pliage avec glissement, polygone, psychomorphismes, puzzle, radical, rectangle, Rectangle d'Or, sinus, somme des angles d'un triangle, somme des angles d'un quadrilatère, superposable, symétrie orthogonale, tangente, théorème de Pythagore, trapèze, trapèze isocèle, trapèze rectangle, triangle équilatéral, triangle rectangle, triangle rectangle isocèle, triangle scalène.

**Membres de l'équipe « Géométrie » de l'I.R.E.M. de Basse-Normandie**
**Anne-Marie Bock**, Professeur Certifié retraité
**Olivier Longuet**, Professeur Certifié
**Ruben Rodriguez Herrera**, Professeur Agrégé, Docteur en Didactique des Mathématiques
**Danielle Salles-Legac**, Maître de Conférence honoraire, Docteur es-Sciences.
**Professeurs relecteurs**
Au Pérou : **Carlos Aparcana Aquije, Carlos Sabino Escobar, Eladio Ocaña, Silvia Sanchez d'Arigo.**
En France **: Evelyne Adam, Éric Lehman.**
salles@math.unicaen.fr ruben.rodriguez@unicaen.fr



| | | | |
|---|---|---|---|
| Format A4 | Nombre de pages : Exemplaire en français : 36 + patrons Exemplaire en espagnol : 36 + patrons | N°ISBN 978-2-902498-07-9 Juin 2011 | Prix : 4,5 € chaque brochure **en couleurs** 8 € les deux |