# Le problème des quatre-vingt un palmiers.

Pierre Ageron

*Un père meurt en laissant quatre-vingt un palmiers à ses neuf fils. Le premier palmier produit une livre de dattes par an, le deuxième produit deux livres, et ainsi de suite jusqu'au quatre-vingt unième. Comment répartir les palmiers entre les héritiers de sorte que tous bénéficient du même nombre d'arbres et de la même récolte annuelle de dattes ?*

Contrairement aux problèmes des dix-sept chameaux et des huit galettes, objets d'un précédent article (*le Miroir des maths, n°6*), celui des des quatre-vingt un palmiers semble à peu près inconnu en France, en tout cas invisible sur l'Internet. On le trouve en revanche sur de très nombreuses pages de l'Internet arabophone, notamment au sein de sites scolaires ou universitaires sur les mathématiques, et dans un contexte de glorification des succès scientifiques des Arabes dans les sciences. Bien qu'il se présente encore comme un problème de partage d'héritage, sa nature mathématique et son histoire diffèrent profondément de celles du problème des dix-sept chameaux. Voici le résultat de mes investigations historiques, qui m'ont cette fois conduit jusqu'à Istanbul !

Première remarque : le problème revient à construire un tableau à 9 lignes et 9 colonnes, où apparaissent tous les entiers de 1 à 81 et dont toutes les colonnes ont la même somme. Un tel tableau étant construit, il suffit en effet d'attribuer au $i^{\text{e}}$ héritier les palmiers dont les productions de dattes annuelles apparaissent sur la $i^{\text{e}}$ colonne. En particulier, tout carré magique d'ordre 9 répond à la question : dans un carré magique, les colonnes, mais aussi les lignes et les diagonales doivent, toutes, avoir la même somme. Si je parle ici de carrés magiques, c'est parce qu'ils sont l'objet d'une très ancienne tradition mathématique arabe. Ainsi, Abû l-Wafâ' al-Buzjânî (940-977) et Ibn al-Haytham (965-1039) donnent les carrés magiques d'ordre 9 suivants, construits l'un par une succession de carrés magiques concentriques autour du coefficient médian et l'autre par un placement diagonal un peu particulier des nombres consécutifs de 1 à 81 [1] :

$$\begin{pmatrix} 8 & 80 & 78 & 76 & 75 & 12 & 14 & 16 & 10 \\ 67 & 22 & 64 & 62 & 61 & 26 & 28 & 24 & 15 \\ 69 & 55 & 32 & 52 & 51 & 36 & 34 & 27 & 13 \\ 71 & 57 & 47 & 38 & 45 & 40 & 35 & 25 & 11 \\ 73 & 59 & 49 & 43 & \mathbf{41} & 39 & 33 & 23 & 9 \\ 5 & 19 & 29 & 42 & 37 & 44 & 53 & 63 & 77 \\ 3 & 17 & 48 & 30 & 31 & 46 & 50 & 65 & 79 \\ 1 & 58 & 18 & 20 & 21 & 56 & 54 & 60 & 81 \\ 72 & 2 & 4 & 6 & 7 & 70 & 68 & 66 & 74 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 37 & 78 & 29 & 70 & 21 & 62 & 13 & 54 & 5 \\ 6 & 38 & 79 & 30 & 71 & 22 & 63 & 14 & 46 \\ 47 & 7 & 39 & 80 & 31 & 72 & 23 & 55 & 15 \\ 16 & 48 & 8 & 40 & 81 & 32 & 64 & 24 & 56 \\ 57 & 17 & 49 & 9 & \mathbf{41} & 73 & 33 & 65 & 25 \\ 26 & 58 & 18 & 50 & 1 & 42 & 74 & 34 & 66 \\ 67 & 27 & 59 & 10 & 51 & 2 & 43 & 75 & 35 \\ 36 & 68 & 19 & 60 & 11 & 52 & 3 & 44 & 76 \\ 77 & 28 & 69 & 20 & 61 & 12 & 53 & 4 & 45 \end{pmatrix}$$

Cela dit, il n'est peut-être pas judicieux de rapprocher notre problème de la tradition des carrés magiques. Des problèmes voisins de celui des quatre-vingt un palmiers existaient dans les mathématiques européennes médiévales, qui ignoraient presque totalement les carrés magiques. Le plus proche semble être celui des neuf tonneaux de vin, issu du livre de calcul d'une abbaye bénédictine allemande au milieu du XV$^{\text{e}}$ siècle [2] : neuf tonneaux, dont les contenances sont de une urne, deux urnes,..., jusqu'à neuf urnes, doivent être répartis entre trois personnes de sorte que toutes bénéficient du même nombre de tonneaux et du même nombre d'urnes de vin. La solution, donnée sous forme de tableau carré, non magique, ne laisse pas deviner un mode de construction généralisable [3] :

$$\begin{pmatrix} 2 & 8 & 9 \\ 6 & 3 & 5 \\ 7 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

[1] Jacques Sesiano, *Les carrés magiques dans les pays islamiques* (Lausanne, 2004) p. 24 et 121

[2] *Practica des Algorismus Ratisbonensis* (Kurt Vogel éd.) (Munich, 1954) p. 182.

[3] Comparer aussi avec ce problème posé par Tartaglia, repris notamment par Bachet de Méziriac, puis Émile Fourrey : « Trois hommes ont à partager 21 tonneaux, dont il y en a sept pleins de vin, sept vides, et sept pleins à demi. Je demande comment peut se faire le partage, en sorte que tous trois aient un égal nombre de tonneaux, et égale quantité de vin. » Claude Gaspard Bachet de Méziriac, *Problèmes plaisants et délectables* (1614) p. 161-164.

En Orient, l'histoire du problème des quatre-vingt un palmiers est celle-ci. Il avait été posé et cherché en vain par des savants vivant en Inde quand l'un d'eux, qu'on appelait le mollah (*mulâ*) Muhammad, le soumit, à l'occasion du grand pèlerinage à la Mecque de l'année 998 après l'Hégire (1590 après J.-C.), à un fameux mathématicien qui vivait alors dans cette ville : Ibn Hamza, originaire d'Alger et qui avait longtemps vécu à Istanbul. L'un et l'autre ignoraient apparemment tout des carrés magiques, bien que la tradition en fût toujours vivace à leur époque dans le monde islamique (vers 1600, l'Égyptien Muhammad Shabrâmallisî y consacra encore un traité). Le problème posé par le mollah indien était à la vérité plus facile qu'une construction de carré magique, et Ibn Hamza ne fut pas long à en trouver une solution. Il l'intégra alors sous le nom de « problème de la Mecque » à la fin du gros traité d'arithmétique auquel il mettait la dernière main. Il avait choisi d'écrire ce traité en langue turque ottomane, mais de lui laisser un titre arabe : *tuhfat al-a'dâd li al-dhawî al-rushd wa al-sadâd*, c'est-à-dire : Le trésor des nombres pour qui est doté de raison et de bon sens. Achevé en 1591, l'ouvrage semble avoir connu un certain succès et circulé jusqu'en Égypte (deux copies en sont aujourd'hui au Caire). Cependant, il resta inconnu des historiens des mathématiques jusqu'à ce que Sâlih Zekî, jeune ingénieur turc formé en France et passionné d'histoire des sciences, en découvrît une autre en 1888 au Grand bazar d'Istanbul : il en décrivit le contenu dans son histoire des mathématiques *Âsâr-ı Bâkiye* (Les vestiges qui restent, Istanbul, 1913), insistant notamment sur le problème des quatre-vingt un palmiers et la solution fournie par Ibn Hamza. Voici quelle est, selon Sâlih Zekî, cette solution, donnée sous forme de tableau :

$$\begin{pmatrix}
9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\
17 & 16 & 15 & 14 & 13 & 12 & 11 & 10 & 18 \\
25 & 24 & 23 & 22 & 21 & 20 & 19 & 27 & 26 \\
33 & 32 & 31 & 30 & 29 & 28 & 36 & 35 & 34 \\
41 & 40 & 39 & 38 & 37 & 45 & 44 & 43 & 42 \\
49 & 48 & 47 & 46 & 54 & 53 & 52 & 51 & 50 \\
57 & 56 & 55 & 63 & 62 & 61 & 60 & 59 & 58 \\
65 & 64 & 72 & 71 & 70 & 69 & 68 & 67 & 66 \\
73 & 81 & 80 & 79 & 78 & 77 & 76 & 75 & 74
\end{pmatrix}$$

Le lecteur observera facilement la logique de construction de ce tableau ; elle est astucieuse, mais simple et généralisable à $n^2$ palmiers.

Comme Ibn Hamza lui-même, Sâlih Zekî écrivait en turc ottoman. Aussi ses recherches n'acquirent-elles la notoriété dans le monde arabe que lorsque Qadrî Hâfidh Tûqân, professeur de mathématiques et homme politique palestinien, en parla en 1941 dans un livre en langue arabe [4]. Cependant, son information sur Ibn Hamza et le problème de la Mecque venait exclusivement de Sâlih Zekî. Depuis, les nombreux auteurs arabes qui ont célébré, avec une certaine exagération, le génie de Ibn Hamza se sont appuyés sur Qadrî Hâfidh Tûqân, et donc, indirectement, sur Sâlih Zekî ; aucun n'a jamais revu le manuscrit de Ibn Hamza [5]. C'est pourquoi j'eus en 2009 la curiosité de me rendre à Istanbul pour consulter le manuscrit du traité de Ibn Hamza que conserve la fabuleuse bibliothèque Süleymaniye Kütüphanesi – j'en connaissais l'existence grâce à mon collègue tunisien Mahdi Abdeljaouad [6]. Première surprise : il ne s'agissait pas de celui qu'avait acheté et décrit Sâlih Zekî (dont je n'ai pas pu retrouver la trace), mais d'une copie postérieure (1605 après J.-C.) dont les diverses parties ont été copiées dans le désordre ! Cependant, et bien que que je ne lise pas le turc, la forte densité de mots arabes m'a permis de localiser l'énoncé des quatre-vingt un palmiers, la mention du nom et de la nationalité de celui qui l'a posé et la date correspondante, puis la solution sous forme de tableau... Mais seconde surprise : la solution proposée n'est pas celle décrite plus haut !

À sa place, un autre tableau, rempli en chiffres arabes orientaux. À la première ligne se trouvent, de droite à gauche, les nombres de 1 à 9 ; à la seconde, de gauche à droite, les nombres de 10 à 18 ; à la troisième, de droite à gauche, les nombres de 19 à 27, et ainsi jusqu'au nombre 63 sur la septième ligne. Les deux dernières lignes sont particulières : d'une part elles sont reliées entre elles par des traits entrecroisés qui apparient leurs termes de façon bijective, d'autre part elles sont suivies d'une dixième ligne où figurent les indices 1 à 9 dans l'ordre suivant : $6, 7, 8, 9, 1, 2, 3, 4, 5$ (en lisant de droite à gauche). Il y a là une forme d'indexation indirecte, dont mon interprétation est la suivante : l'héritier

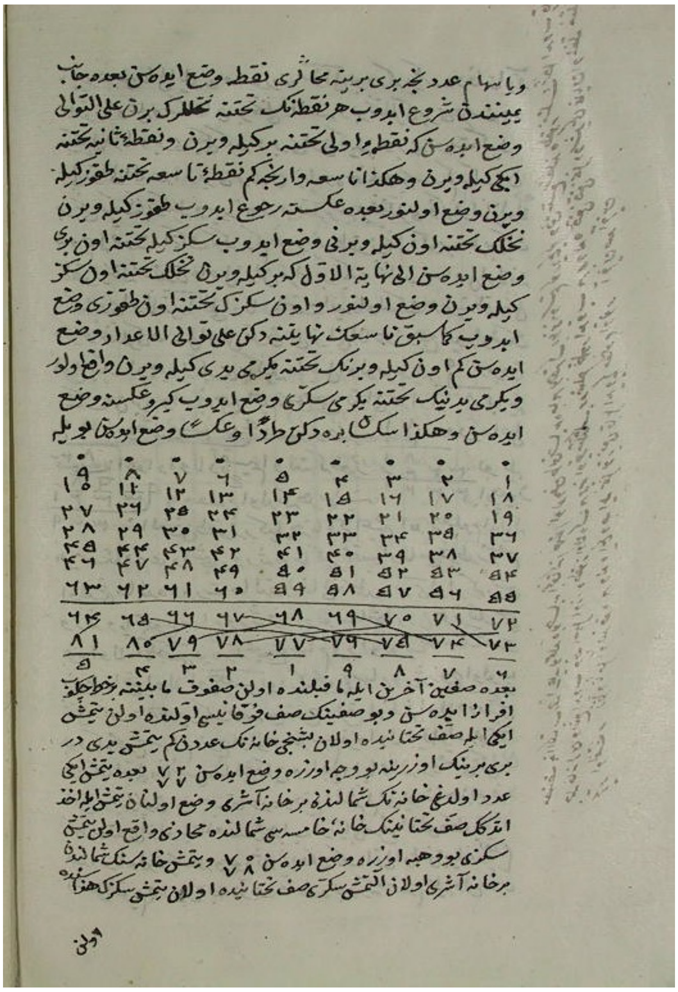
[4] Qadrî Hâfidh Tûqân, *turâth al-'arab al-'ilmî fî al-riyâdiyyât wa al-falak* (Le patrimoine scientifique des Arabes en mathématiques et en astronomie) (Beyrouth et le Caire, 1941). Plusieurs rééditions.

[5] Deux exemples récents : Muhammad 'Âdil Sawdân et Sâmî Chalhoub, « Ibn Hamza al-Maghribî », *al-mawsû'a al-'arabiyya* (Encyclopédie arabe) (Damas, 2005) 5 p. en ligne (en arabe) ; Abû Bakr Khalid Saàdallâh, « Ibn Hamza al-Jazâ'irî (q. 10 H / 16 G) muddaris al-riyâdiyyât fî makka al-mukarama », *majallat al-dâra* 3, p. 105-116 (en arabe).

[6] Il s'agit du manuscrit Esad Efendi 3151-1. Voir aussi : Pierre Ageron, « Ibn Hamza a-t-il découvert les logarithmes ? », *Actes du XVIII^e colloque inter-IREM d'histoire et épistémologie des mathématiques*, IREM de Basse-Normandie, à paraître.

$i$ reçoit, outre les sept arbres dont les numéros sont sur les sept premières lignes de la colonne $i$, l'arbre dont le numéro est sur la neuvième ligne au dessus de l'indice $i$ et celui dont le numéro est sur la huitième ligne et relié par un trait au précédent. Ce mode de lecture semble d'ailleurs confirmé par le peu que je comprends des explications qui suivent le tableau. Il l'est surtout lorsqu'on écrit ce qu'on obtient en rétablissant les deux dernières lignes, car c'est bien là une (autre) solution du problème !

$$\begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 \\ 27 & 26 & 25 & 24 & 23 & 22 & 21 & 20 & 19 \\ 28 & 29 & 30 & 31 & 32 & 33 & 34 & 35 & 36 \\ 45 & 44 & 43 & 42 & 41 & 40 & 39 & 38 & 37 \\ 46 & 47 & 48 & 49 & 50 & 51 & 52 & 53 & 54 \\ 63 & 62 & 61 & 60 & 59 & 58 & 57 & 56 & 55 \\ 65 & 67 & 69 & 71 & 64 & 66 & 68 & 70 & 72 \\ 76 & 75 & 74 & 73 & 81 & 80 & 79 & 78 & 77 \end{pmatrix}$$



la solution du manuscrit Süleymaniye Ktp., Esad Efendi 3151/1.

Comment expliquer la différence entre les solutions données dans « mon » manuscrit et dans celui qu'examina Sâlih Zeky ? On peut penser que pour Ibn Hamza, la résolution de ce problème soumis par des savants étrangers avait constitué une sorte de titre de gloire : il a pu prendre plaisir à repenser à la question et en trouver ainsi une deuxième solution, en un sens plus simple, qu'il a fait le choix d'enseigner à la place de la première [7].

Quoi qu'il en soit, je laisse au lecteur le plaisir et la gloire d'en trouver d'autres encore !

[7] Dans la copie que j'ai consultée, un feuillet adventice, collé face écrite sur un des feuillets du livre, laisse voir par transparence une autre grille de 81 cases garnies de nombres : elle est malheureusement peu lisible, mais il pourrait bien s'agir d'une troisième solution !