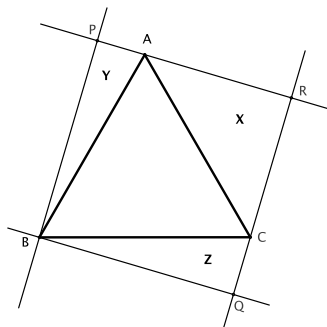


Un problème d'aire autour d'un triangle équilatéral.

Énoncé : ABC est un triangle équilatéral inscrit dans un rectangle dont B est un sommet et fait apparaître trois triangles rectangles en chacun des trois sommets du rectangle, distincts de B . Montrer que les aires Y et Z des triangles rectangles de sommet B ont une somme égale à l'aire X du troisième triangle d'hypoténuse AC , c.-à-d. $X = Y + Z$



L'étude de ce problème peut retenir notre attention à plusieurs titres :

- Au collège et au lycée, pour la fabrication d'un puzzle, pour les raisonnements, les constructions géométriques élémentaires et l'emploi non artificiel d'isométries du plan.
- En didactique, par une réflexion sur différentes méthodes et leurs fondements théoriques
- Comme terrain d'action pour l'usage des logiciels de géométrie dynamique, ici mis en oeuvre dans la réalisation des figures illustrant l'article
- Sur le plan historique, par l'ouverture à des problèmes d'équidécoupage, qui jalonnent l'histoire des mathématiques depuis l'antiquité.

Cet exercice a été récemment proposé dans le journal² de la Régionale APMEP de Basse-Normandie, puis aussi repris dans le bulletin vert national de l'association. C'est par ce premier biais que je m'y suis intéressé en proposant des solutions géométriques. Les voies analytiques ou trigonométriques conduisent à des solutions simples et brèves mais sont moins accessibles au niveau des connaissances d'un collégien.

Par la suite, j'ai aussi recherché via l'internet des références sur ce résultat qui est répertorié sur l'encyclopédie *MathWorld* d'Éric Wiesstein³ : elle renvoie à un ouvrage américain "*Mathematical Gems III*" de Ross Honsberger. J'y ai trouvé cette solution présentée dans un contexte plaisant, dont je vais pour commencer vous présenter une traduction⁴.

Mme Dijkstra⁵

Au cours de mes échanges épistolaires avec le professeur Edsger Dijkstra⁶ je lui adressai un article de géométrie dans lequel le problème suivant était présenté sans solution, comme un simple exercice : On circonscrit un rectangle $PBQR$ autour d'un triangle équilatéral ABC , dans une direction arbitraire. Dans le cas général, chaque côté du triangle ABC crée un triangle rectangle inclus dans le rectangle. Prouver que les aires des deux plus petits triangles ont toujours une somme égale à l'aire du plus grand ($X = Y + Z$).

M. le Professeur Dijkstra savait que sa mère adorait la géométrie et pensa qu'elle pouvait s'amuser avec ce problème. Donc, il le lui adressa (Mme Dijkstra-Kluyver, Zutphen, The Netherlands⁷) et, en retour de courrier, il récupéra la solution suivante.

Puisque $AB = AC$ (ABC équilatéral), pivotons le triangle PAB autour de A jusqu'à ce que AB coïncide avec AC . De même pour le triangle QCB que nous pivotons autour de C jusqu'à ce que BC

² Voir <http://www.apmep.asso.fr/Les-Maths-I-Omega-numero-9-fevrier>

³ Voir <http://mathworld.wolfram.com/EquilateralTriangle.html>

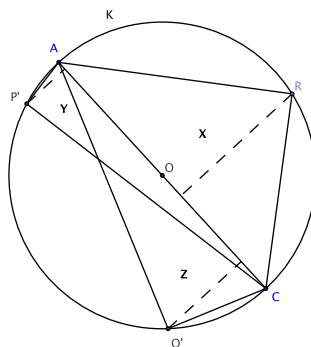
⁴ Honsberger, R. *Mathematical Gems III*. Washington, DC : Math. Assoc. Amer. , Chap. 2 Gleanings from geometry, pp. 19-21, Dolciani Mathematical expositions n°9 M.A.A. 1985

⁵ mathématicienne néerlandaise (1900-1994)

⁶ Edsger Wybe Dijkstra, né à Rotterdam le 11 mai 1930, et mort à Nuenen le 6 août 2002 était un mathématicien et informaticien néerlandais du XXe siècle. Après des études de physique théorique, il s'engage dès 1955 dans le domaine de l'informatique alors naissante, dont il est l'un des pionniers les plus éclairés. Parmi ses contributions se trouve un algorithme de calcul du plus court chemin dans les graphes, connu sous le nom d'algorithme de Dijkstra. Il reçut le prestigieux prix ACM Turing Award en 1972

⁷ Son fils, Edsger Wybe Dijkstra écrivit au sujet de son influence mathématique maternelle " ... she had a great agility in manipulating formulae and a wonderful gift for finding very elegant solutions..."

coïncide avec AC . Désignons par P' et Q' les points associés à P et Q dans ces rotations. Puisque X, Y , et Z ont maintenant une base commune AC , la somme des aires $Y + Z$ donnera X si et seulement si la somme des hauteurs relatives à AC issues de P' et Q' est égale à la hauteur issue de R .

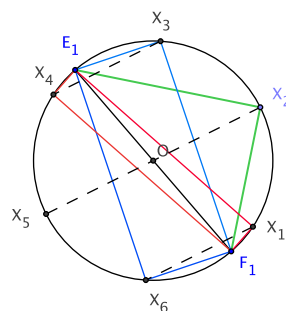
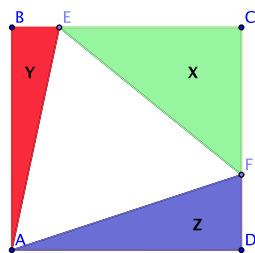


Comme AC est intercepté par des côtés d'angles droits en P', Q' , et R' le cercle K de diamètre AC contient chacun de ces points. Maintenant dans la figure initiale, l'angle $\widehat{RAP}$ mesure 180° . Cependant, il a été diminué de 60° par la rotation de centre A ($\widehat{BAC} = 60^\circ$ dans un triangle équilatéral). Donc dans la figure finale, ($\widehat{P'AR} = 120^\circ$) et cela signifie que l'arc $P'AR$ est le tiers de la circonférence de K . De même l'arc $Q'CR$ est aussi égal au tiers de la circonférence, laissant au plus petit arc d'extrémités $P'Q'$ le tiers final. La conclusion tirée de ces arguments est que $P'Q'R$ forment un triangle équilatéral inscrit dans K . Dès lors, Mme Dijkstra propose de suspendre des masses égales en chaque point P', Q' , et R . Puisque $P'Q'R$ est équilatéral, le centre de gravité de ce système de masses coïncidera avec le centre O du cercle K . Ainsi, si l'on devait soutenir le point O , on y tiendrait la masse totale du système. Une lame de couteau placée sous AC , donc supportant le point "critique" O garderait le système en équilibre. Par conséquent, il n'y aurait aucune tendance pour le cercle ainsi chargé à pencher d'un côté ou de l'autre de l'arête AC . C'est pourquoi les moments par rapport à AC calculés pour les masses placées en P' et Q' doivent être exactement contrebalancés par le moment calculé pour la masse placée en R et la relation entre les hauteurs en découle immédiatement.

Quelle merveilleuse solution ! (D'autant plus remarquable, compte tenu du fait que Mme Dijkstra est une octogénaire.)

J'ai retrouvé cet exercice posé sur deux autres sites du web (www.diophante.fr et centraledes-maths.uregina.ca selon lequel ce problème provient du journal hollandais *Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde*, problème 1580 – solution géométrique due à D. Kruyswijk⁸ –). Comme celle-ci, la solution géométrique proposée par Paul Voyer (site *diophante*) reprend l'approche précédente dans sa première partie et établit en-

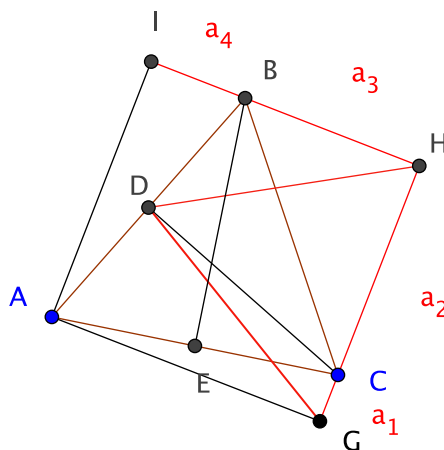
suite la relation entre les hauteurs des triangles introduites par Mme Dijkstra, selon une démarche géométrique introduisant un hexagone régulier dont les côtés sont proportionnels à la somme des "petites hauteurs" et à la grande avec des coefficients *ad hoc* (voir figure ci-dessous). Tout ceci sans référence à "la statique du solide".



⁸ *Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde* 55, 1967–1968, page 125.

J'en viens maintenant aux autres preuves que j'ai déjà présentées sur le site web de l'APMEP. Dans la suite de l'article, j'adopte des notations différentes de celles du livre de Honsberger : Un triangle équilatéral ABC est inscrit dans le rectangle $AIHG$. Alors, la somme des aires des triangles AIB et AGC est égale à l'aire du triangle BCH .

Preuve n°1 par le théorème de Pythagore



$[CD]$ est la hauteur de ABC issue de C . Posons $AB = BC = CA = a$ et $CD = h$ ($h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$).

Le quadrilatère $AGCD$ est inscriptible (angles droits en D et G) dans le cercle de diamètre AC . On en déduit vu l'orientation, que $\widehat{DGC} = \widehat{DAC} = \frac{\pi}{3}$. De même avec $DBHC$ on a $\widehat{DHC} = \widehat{DBC} = \frac{\pi}{3}$. Donc le triangle DHG est aussi équilatéral. Signalons au passage que cela donne une condition nécessaire et suffisante d'existence

de ABC pour un rectangle $(L \times l)$ donné – $\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \frac{L}{l} \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$ – et fournit un procédé de construction de ABC .

En notant h_1 la hauteur du triangle DHG , nous déduisons par le théorème de Pythagore que

$$h_1^2 = (a_1 + a_2)^2 - \left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2 = h^2 - \left(\frac{a_1 + a_2}{2} - a_1\right)^2 \text{ d'où il résulte par la deuxième égalité que}$$

$$a_1^2 + a_2^2 + a_1 a_2 = h^2 \quad (1)$$

De même,

$$a_3^2 + a_4^2 + a_3 a_4 = h^2 \quad (2)$$

Enfin, BCH étant rectangle en H , toujours par le théorème de Pythagore,

$$a_2^2 + a_3^2 = a^2 = \frac{4}{3}h^2 \quad (3)$$

Dès lors (1) et (3) entraînent $a_2^2 + 4a_1^2 + 4a_1 a_2 = 3a_3^2$, soit

$$(a_2 + 2a_1)^2 = 3a_3^2 \quad (4)$$

De même, (2) et (3) entraînent

$$(a_3 + 2a_4)^2 = 3a_2^2 \quad (5)$$

Par produit de (4) et (5) on obtient $9(a_2 a_3)^2 = [(a_2 + 2a_1)(a_3 + 2a_4)]^2$ et puisque tous les a_i sont positifs, l'égalité se simplifie en

$$3(a_2 a_3) = (a_2 + 2a_1)(a_3 + 2a_4) \quad (6)$$

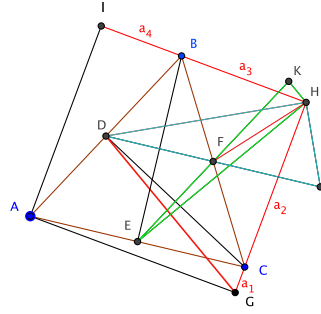
(6) équivaut à $3(a_2 a_3) = a_2 a_3 + 2a_4 a_2 + 2a_3 a_1 + 4a_1 a_4$ ou encore à $a_2 a_3 = a_4 a_2 + a_3 a_1 + 2a_1 a_4$ qui s'écrit aussi

$$a_2 a_3 = a_4(a_2 + a_1) + a_1(a_4 + a_3)$$

Enfin, en multipliant les deux membres par $\frac{1}{2}$

$\text{aire}BHC = \text{aire}AIB + \text{aire}AGC \quad \text{C.Q.F.D.}$

Preuves géométriques à base d'isométries planes

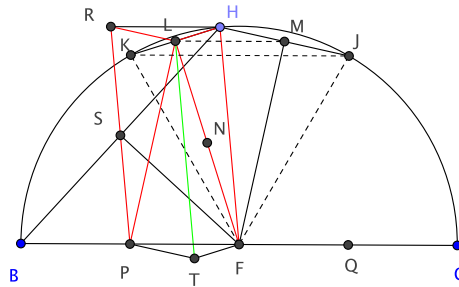


Preuve n°2 par rotations – $[CD]$ est la hauteur du triangle ABC issue de C . On introduit les milieux F et E de $[BC]$ et $[AC]$. Le quadrilatère $AGCD$ est inscriptible (Angles droits en D et G) dans le cercle de diamètre AC . On en déduit vu l'orientation, que $\widehat{DGC} = \widehat{DAC} = \frac{\pi}{3}$. De même avec $DBHC$, on a $\widehat{DHC} = \widehat{DBC} = \frac{\pi}{3}$. Donc, le triangle DHG est équilatéral de même orientation que ABC . Dans la rotation de centre D et d'angle $(\vec{BA}, \vec{BC})$ G a pour image H , A a pour image E et E a pour image F . Notons K et J les symétriques de E et D par rapport à F . Nous pouvons alors conclure que C a pour image K dans la rotation de centre D précédente. Finalement cette rotation transforme le triangle AGC en EHK . Un raisonnement analogue peut être fait avec la rotation de centre E et d'angle $(\vec{AB}, \vec{AC})$ qui transforme AIB en DHJ . F est le milieu des hypoténuses des triangles rectangles

DHJ et EHK . Les points K, J, H sont situés sur le cercle de diamètre $[BC]$ et les triangles isocèles FHJ et FHK ont une aire égale à la moitié de celles des triangles rectangles DHJ et EHK . La somme des distances du point H aux segments $[FK]$ et $[FJ]$ est égale à la distance de H à $[BC]$ d'après une propriété classique du triangle équilatéral (Pour tout point situé sur un côté, la somme des distances de ce point aux deux autres côtés est égale à la hauteur du triangle – ici le triangle, non tracé sur la figure, est constitué par (FK) , (FJ) et la droite passant par H et parallèle à (BC)). De cela, nous concluons que la somme des aires des triangles isocèles FHJ et FHK est égale à celle du triangle FHB puisque ils ont tous une même « base » égale à $\frac{1}{2}BC$. Comme le triangle FHB a une aire égale à la moitié de CHB (F milieu de $[BC]$), nous pouvons conclure en multipliant par deux que :

$$\text{aire}BHC = \text{aire}AIB + \text{aire}AGC \quad \text{C.Q.F.D.}$$

Preuve n°3 par découpages – Cette égalité d'aire s'établit aussi par un découpage des triangles FHK et FHJ , reconstituant BFH . En effet AGC et AIB ont des aires doubles des triangles FHK et FHJ .



Nous avons extrait une partie de la première figure pour la compléter en introduisant l'arc du demi-cercle de diamètre $[BC]$ contenant H , les milieux M, L, S des cordes $[HJ]$, $[HK]$ et $[BH]$ ainsi que P et N ceux de $[BF]$ et $[LF]$. On construit alors le symétrique T de H par rapport à N et le symétrique R de P par rapport à S . Par construction de K et J (voir la première partie) $BFJK$ est un parallélogramme ainsi que $RHPB$ et $RHFP$. Comme $[LM]$ est le segment des milieux du

triangle HKJ nous en déduisons que $\vec{LM} = \vec{PF}$. Le triangle RLP est donc le translaté du triangle HMF par le vecteur $\vec{FP}$. $LHFT$ et $RLTP$ sont aussi par construction des parallélogrammes et constitués chacun de la réunion de deux triangles symétriques isométriques à FHL et FHM dont les aires valent le quart de celles de AGC et AIB . Puisque le triangle RLH est le translaté du triangle PTF par le vecteur $\vec{FH}$, la

réunion de $LHFT$ et $RLTP$ a même aire que le parallélogramme $RHFP$ dont l'aire correspond à celle de BFH (RHS symétrique de PBS). La figure fournit un moyen de découper deux quarts de AGC et de AIB

pour reconstituer BSF et FSH . Réciproquement, on peut partir de BSF et FSH pour reconstituer AGC et AIB .

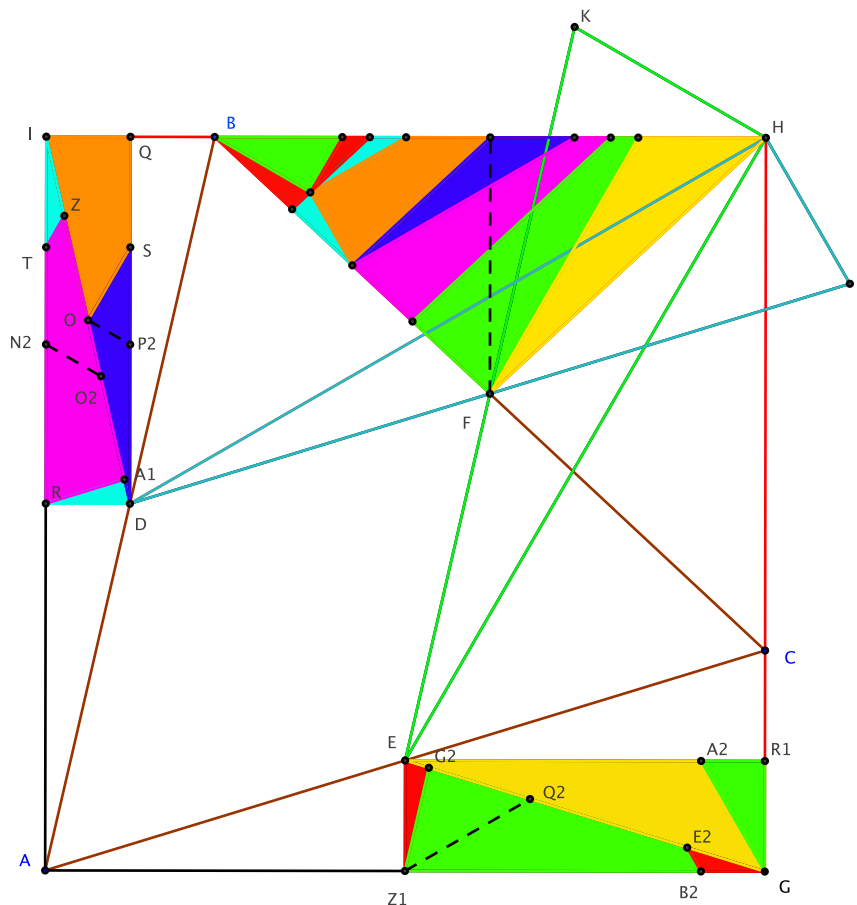
Réalisation du puzzle (découpage des triangles AGC et AIB pour reconstituer BCH).

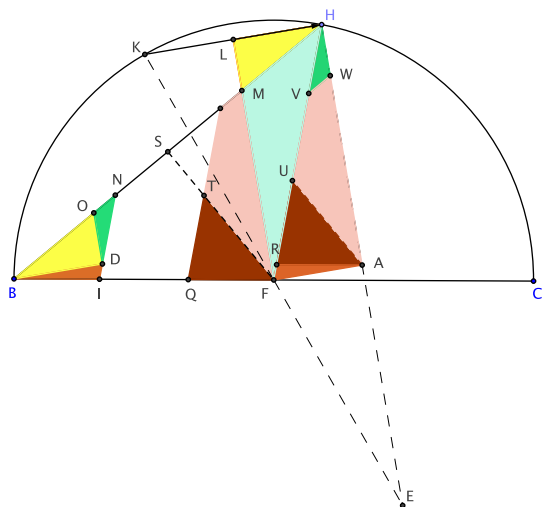
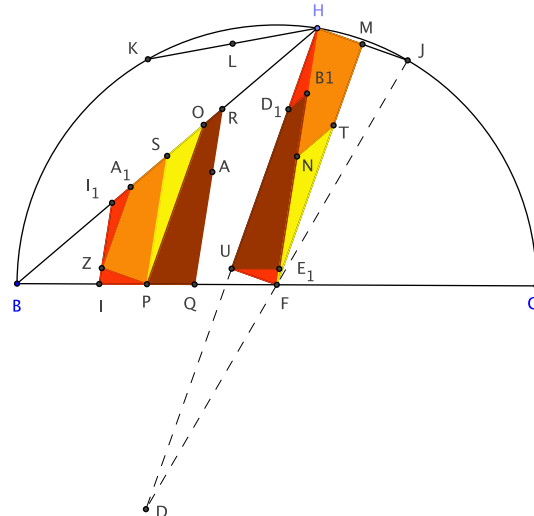
On se limite d'abord aux "demi-triangles" constitués par les rectangles inscrits ayant pour diagonales les médianes issues de G et I . On achève ensuite à l'aide de symétries axiales orthogonales par rapport aux côtés de ces rectangles non "portés" par ces deux triangles rectangles.

Triangle AGC Voir figure ci-dessous. R_1 étant le milieu de $[GC]$, on construit $A_2 = [FG] \cap [ER_1]$ puis B_2 tel que $\overrightarrow{B_2G} = \overrightarrow{A_2R_1}$. En notant α le quatrième sommet (non représenté sur la figure) du parallélogramme $A_2GB_2\alpha$, on construit $E_2 = [EG] \cap [B_2\alpha]$. De même, Z_1 étant le milieu de $[AG]$, en notant β le quatrième sommet (non représenté sur la figure) du parallélogramme $FEZ_1\beta$, on construit $G_2 = [EG] \cap [Z_1\beta]$. Pour le segment $[Z_1Q_2]$ en pointillé, on considère la droite Δ contenant Z_1 et orthogonale à $[FG]$, et on construit $Q_2 = [EG] \cap \Delta$. Nous avons obtenu cinq parties dont un quadrilatère sécable selon le pointillé (six morceaux).

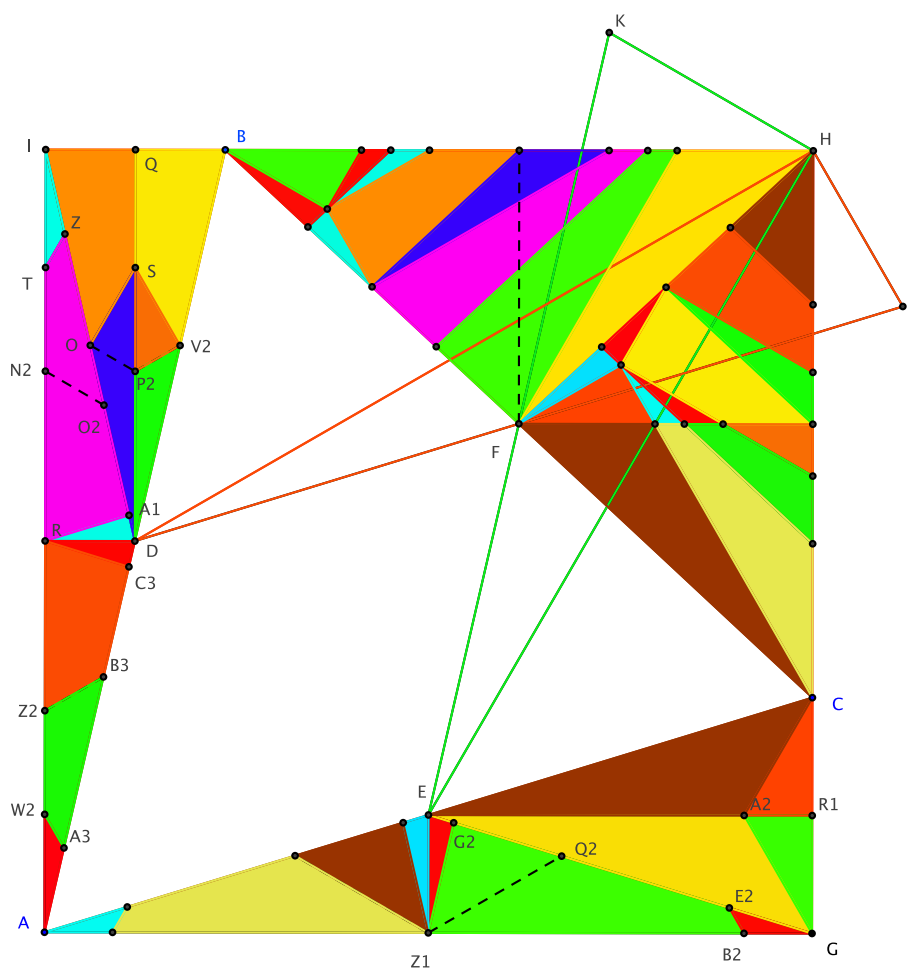
Triangle AIB O est le milieu de $[ID]$, Q est le milieu de $[IB]$. La droite passant par O et perpendiculaire à $[IF]$ recoupe $[QD]$ en S . T est le quatrième sommet du rectangle $IQST$. La droite passant par T et perpendiculaire à $[IF]$ recoupe $[QD]$ en Z . Enfin en notant γ le quatrième sommet (non représenté sur la figure) du parallélogramme $RDF\gamma$, on construit $A_1 = [ID] \cap [R\gamma]$. Les segments pointillés s'obtiennent, comme pour S , T , Z en partant de O mais en menant des sécantes à $[IR]$ et $[QD]$ parallèles à $[IF]$. Nous avons obtenu cinq parties dont un quadrilatère et un triangle sécables selon le pointillé (sept morceaux).

Nous pouvons alors reconstituer BFH avec les dix parties (treize morceaux pour utiliser ensuite les symétries axiales).

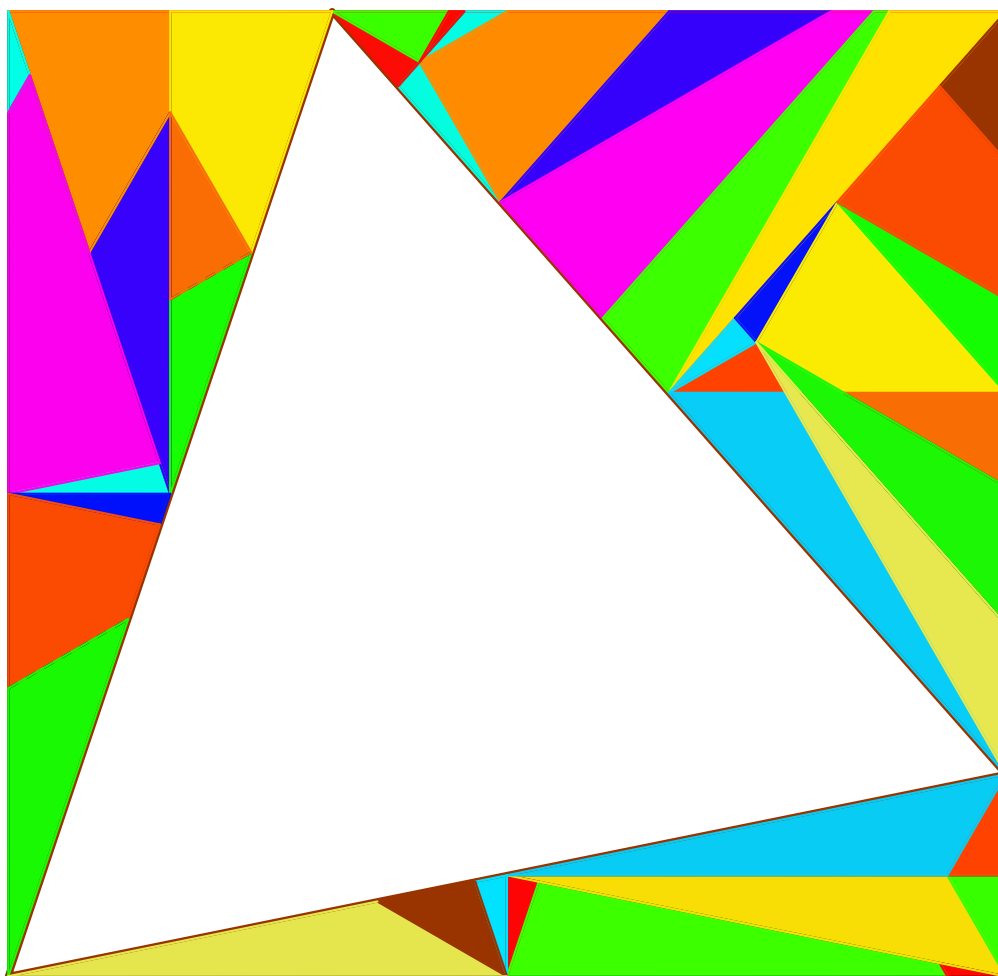


Rectangle $FLHA$ découpé dans BFH Rectangle $FUHM$ découpé dans BFH 

Achèvement du pavage de BHC en utilisant les symétries axiales orthogonales
(On obtient ainsi 23 morceaux dont certains recombinaibles. Finalement 20 morceaux suffisent !)



L'équidécomposition



Puzzle sur une trilogie à dualité latérale - ÉRIC TROTOUX

Bibliographie et Sites web consultés

<http://www.apmep.asso.fr/Les-Maths-l-Omega-numero-9-fevrier> – On peut y télécharger le fichier de géométrie dynamique qui permet d'obtenir le puzzle pour une configuration quelconque du triangle dans le rectangle.

MathWorld d'Éric Wiesstein (<http://mathworld.wolfram.com/EquilateralTriangle.html>)

<http://www.diophante.fr/D1.Triangles-et-cercles/D139.-Le-triangle-equilateral-sous-tous-les-angles.html>

<http://centraledesmaths.uregina.ca/mp/previous2000/jan01sol.html> – Référence à *Nieuw Tijdschrift voor Wetkunde*

Friedelmeyer Jean-Pierre, *l'Ouvert*. Num. 117. p. 15-30. *Equidécomposabilité des polygones plans*. IREM de Strasbourg, 2008

Honsberger Ross, *Mathematical Gems III*. Washington, DC : Math. Assoc. Amer., pp. 19-21, 1985