Autour des systèmes articulés I : les symétriseurs

Utiliser des objets géométriques inhabituels pour
Observer, comprendre, reproduire, formaliser et démontrer.
Le cas de la symétrie orthogonale, de la trisection, des trois-barres.

Activités présentées par l'équipe « Géométrie » Evelyne Adam, Anne-Marie Bock,
Danielle Salles, Olivier Longuet, Ruben Rodriguez

Introduction

Vous trouverez dans ce « Miroir des maths n° 6 » et dans les deux qui suivront trois ensembles d'activités dans l'univers de la géométrie, qui s'adressent à des niveaux scolaires différents, ceci afin de vous faire toucher du doigt **l'intérêt**, **de l'enseignement primaire à l'université, de la manipulation des instruments conçus pour résoudre des problèmes mathématiques,** dans l'acquisition des connaissances géométriques et l'apprentissage du raisonnement.

Ainsi, nous vous présenterons successivement :
– Une activité autour de la notion de symétrie orthogonale ;
– Une activité autour de la trisection des angles ;
– Une activité autour des systèmes à « trois barres » plus généralement appelés « bielles ».

Pour chaque activité, nous vous détaillerons la construction des objets géométriques, leur utilisation, la justification mathématique de cette dernière ainsi qu'un commentaire didactique mettant en évidence l'intérêt de ce type d'activités qui pourront être utilement complétées par une simulation sur ordinateur par un logiciel de géométrie dynamique.

Nous nous intéressons ici aux interactions entre l'univers de la « **Géométrie articulée** » et celui des « **Figures sur une feuille blanche et instruments géométriques classiques** »**.** Ces interactions permettent d'effectuer des aller et retour entre le monde physique d'instruments géométriques peu courants et le monde des figures tracées avec les instruments traditionnels : règle, équerre, compas.

Les élèves, au cours des manipulations de ces instruments géométriques, s'approprient progressivement leur structure et leur fonctionnement. Ils résolvent alors les problèmes de constructions proposés, les formalisent par le dessin de figures codées avec les instruments usuels et les justifient par les démonstrations.

I – Symétrie orthogonale par losange ou cerf-volant

Activités pour les élèves du collège présentées par Ruben Rodriguez

Objectif

Résoudre des constructions de figures symétriques à l'aide de systèmes articulés simples afin de mettre en évidence des propriétés du losange, du cerf-volant, du deltoïde et de la symétrie orthogonale.

Matériel par groupe de deux ou trois élèves :

– Quatre barrettes en plastique perforé identiques[1] ou en carton fort ou rhodoïd adhésif souple (pour réaliser des abat jour en magasin de loisir et création), notons que le rhodoïd sera doublé car il est très souple, il présente l'avantage pour les manipulations d'être transparent,
– vis ou rivets, attaches parisiennes,
– crayons à grosse mine, crayons feutres à tête conique,
– colle repositionnable.

Matériel pour le professeur :

– Perforatrice de bureau,
– feuilles de carton fort (« carton bois 250 g » ou « carton plume », ces objets sont disponibles en magasins d'activités de loisir).

Ces feuilles sont destinées à être découpées en format A3 ou légèrement plus petit suivant une fente parallèle au grand côté de la feuille et située à peu près au milieu du petit côté. Cette fente doit être découpée au cutter, de préférence par le professeur pour des raisons de sécurité, soigneusement, car elle servira de glissière. Elle s'arrête avant le bord de la feuille de carton afin d'en préserver la solidité.

Séquence n° 1

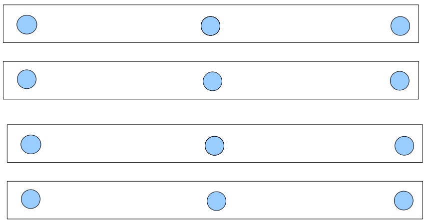
Une feuille de carton est distribuée à chaque groupe de deux ou trois élèves.

Nous faisons construire aux élèves un losange constitué de quatre barres de plastique perforées[1] à la même distance à leurs extrémités (ou carton ou rhodoïd perforé avec une perforatrice de bureau).

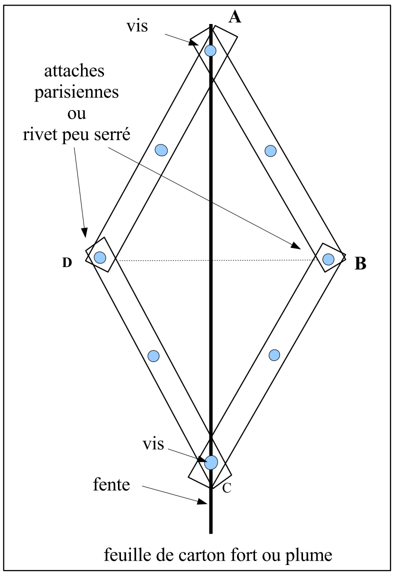
[1] Par exemple les « georègles » de Celda spécialiste en matériel pédagogique, en ligne : www.celda.fr

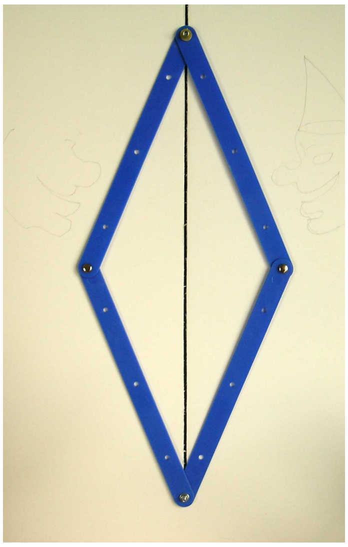
Deux des sommets opposés sont reliés par des vis et écrous, les deux autres sommets sont reliés pour l'instant par deux attaches parisiennes.

Les deux sommets du losange constitués par les vis et écrous sont positionnés dans la fente découpée dans la feuille de carton. Les attaches parisiennes pourront être ôtées facilement et remplacées par des pointes de gros crayons mine ou grosse pointe sèche (genre aiguille à tricoter). Nous nommons **l'ensemble du losange et de la feuille découpée un « symétriseur ».**



Le « symétriseur » comporte un losange dont deux sommets opposés sont matérialisés par deux vis qui peuvent glisser dans la fente du carton. Les deux autres sommets sont matérialisés par deux attaches parisiennes ou rivets peu serrés, ils recevront ensuite des crayons mines.





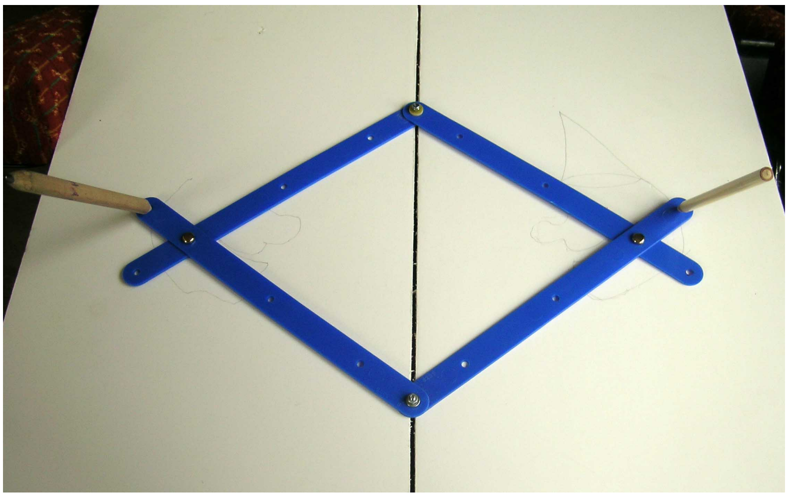


Figure n°3 : symétriseur en losange vu de face **Figure n°4 : variante du symétriseur vue en perspective**

(La figure n°4 présente une variante du symétriseur qui sera étudiée en fin d'activité pour les plus grands à partir de la classe de quatrième.)

Nous demandons aux élèves de tracer sur le carton, **d'un seul côté de la fente,** au crayon mine, à main levée ou avec des instruments (compas et/ou règle), une figure géométrique ou artistique assez simple de leur choix. Ils peuvent tracer un triangle, un cercle, une feuille d'arbre, un chat etc.

Nous leur demandons de remplacer une des attaches parisiennes par une extrémité de gros crayon (afin de remplir le trou de la barrette et ainsi éviter « d'avoir du jeu ») et l'autre par une grosse pointe sèche ou un crayon mine qui suivra le contour du modèle. Ensuite, en se mettant à deux élèves par symétriseur, de tracer, grâce à ce dernier, un dessin « symétrique » du premier. Nous disons « **dessin** » car les premiers essais sont difficiles, **il faut apprendre à utiliser le symétriseur** et il faut plusieurs essais pour obtenir une figure soignée que l'on puisse qualifier de « symétrique » de la première.

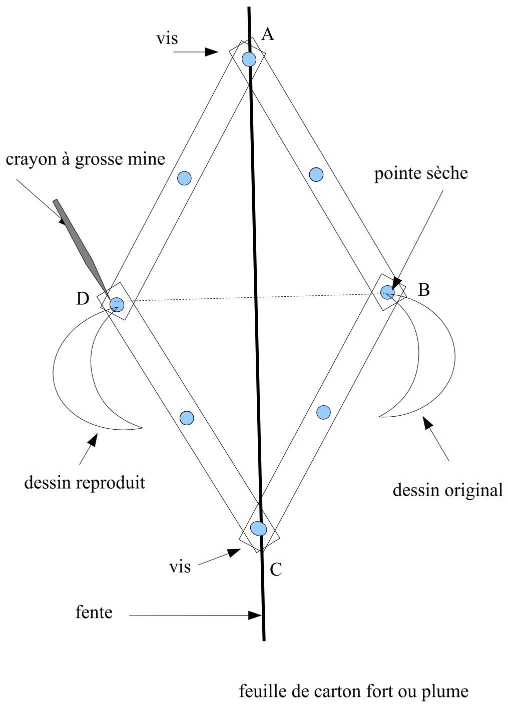
Chaque élève doit manipuler le symétriseur dans au moins un cas de figure.

Remarque : la difficulté principale de ce travail est l'absence de transparence des barrettes, on peut contourner cette difficulté de la façon suivante :

On place les extrémités des barrettes à droite de la figure ensemble sur un point du dessin d'origine (point B sur la figure n°5) en faisant glisser les vis (points A et C) dans la fente, alors un des élèves maintient ces extrémités jointes.

Le deuxième élève amène les deux trous des deux autres barrettes l'un sur l'autre et obtient ainsi l'image D du premier point.

Figure n°5

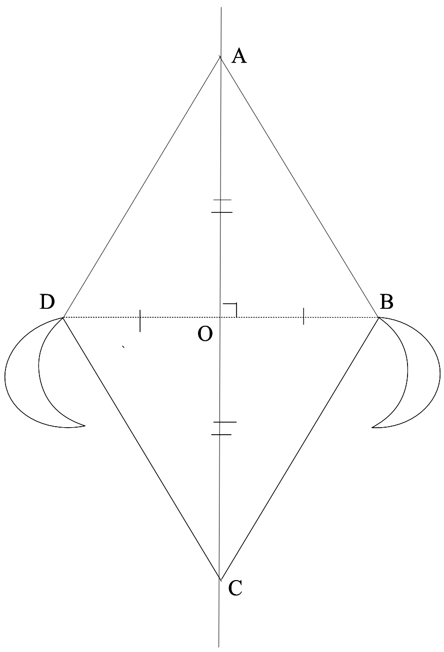


Quand le professeur et les élèves sont satisfaits de leur figure, nous leur demandons de repasser soigneusement les deux dessins au crayon bille ou de couleur (feutre à bout conique) puis d'observer deux points particuliers B et D qui se correspondent par le symétriseur (figure n°5).

Les élèves observent que **lorsque deux points se correspondent, ils forment les extrémités d'une des deux diagonales du losange** et que c'est la seconde diagonale qui glisse dans la fente.

Nous leur demandons alors de représenter sous la forme d'une **figure codée** à l'échelle de ¼ environ le symétriseur sous la forme d'un losange formé de segments de droites ainsi que les diagonales de ce losange, puis leur dessin et son image.

Figure n°5bis



Nous leur demandons alors d'écrire une définition la plus précise possible de la transformation effectuée par le système articulé que l'on appelle la symétrie orthogonale, voici un exemple :

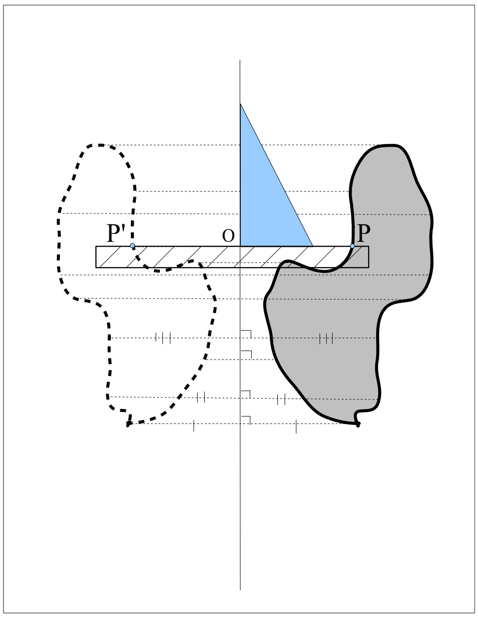
La symétrie orthogonale par rapport à un axe donné (AC) est la transformation qui associe à un point B donné, un point D tel que l'axe donné (AC) soit la médiatrice du segment [DB].

Séquence n°2

Nous proposons aux élèves une figure **non nécessairement régulière** tracée d'un côté d'une droite sur une feuille et leur demandons de tracer la figure symétrique de la première par rapport à la droite, à la règle et à l'équerre.

Le dessin peut-être fait sur une feuille distribuée par le professeur et fixée le long de la fente par une colle repositionnable, de même qu'une feuille vierge peut-être fixée de l'autre côté de la fente et destinée à recevoir le dessin de l'élève.

Figure n°6



Ce travail est destiné à leur faire utiliser la propriété du symétriseur construit à partir d'un losange : **les diagonales du losange sont orthogonales et se coupent en leurs milieux.**

Nous indiquons un exemple de construction de l'image P' d'un point P à la règle et à l'équerre.

Nous leur demandons alors de décrire la construction d'un point particulier P' image de P sous la forme d'une narration de recherche dont nous donnons un exemple ci-dessous.

Exemple de narration de recherche (qui consiste, pour l'élève, à expliquer le cheminement de son travail de construction)

Pour construire à la règle et à l'équerre l'image P' d'un point P d'une figure donnée, nous faisons glisser le grand côté de l'équerre le long de la fente en maintenant la règle le long du petit côté de celle-ci, jusqu'à ce que la règle passe par le point P. Nous mesurons alors la distance PO de P à la fente avec la règle graduée et reportons cette longueur sur la règle de l'autre côté de la fente. (On peut aussi s'aider d'un compas.)

Les élèves s'aperçoivent bien vite que ce travail est compliqué et long si on l'exécute « point par point », aussi il est très utile de disposer soit d'outils géométriques comme notre symétriseur, soit de logiciels de géométrie.

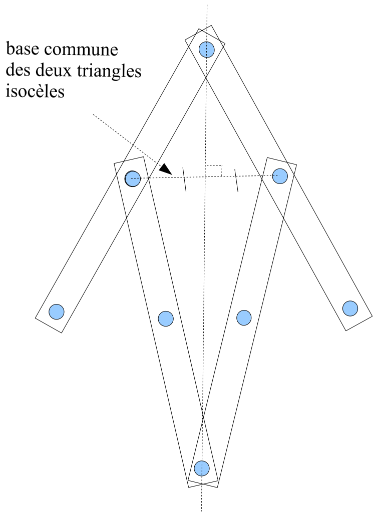
Séquence n°3

Nous demandons aux élèves de transformer leur « symétriseur losange » en « **symétriseur cerf-volant** ».

C'est l'occasion d'introduire cette notion nouvelle en classe de sixième et d'en observer les propriétés géométriques. Donnons-en la définition la plus élégante sinon la plus facile :

Un cerf-volant est un quadrilatère dont l'une des diagonales est la médiatrice de l'autre et leur point d'intersection est à l'intérieur du quadrilatère.

Figure n°7



Pour aider les élèves nous leur proposons de raccourcir de façon identique deux branches successives du symétriseur en utilisant les trous intermédiaires puis nous leur annonçons qu'ils ont construit un cerf-volant et leur demandons d'énoncer une autre définition de celui-ci par exemple :

Un cerf-volant est constitué par deux triangles isocèles ayant leurs bases de même mesure et confondues.

Puisque les deux triangles sont isocèles les bissectrices de leurs angles au sommet sont médiatrices de leur base commune, elles sont donc confondues.

Nous demandons ensuite aux élèves de reprendre le carton, de montrer le symétriseur en cerf-volant et de symétriser une nouvelle figure grâce à celui-ci.

Ensuite nous leur demandons d'écrire sur leur cahier la justification du fait que le cerf-volant permet bien de construire la figure symétrique orthogonale d'une figure donnée.

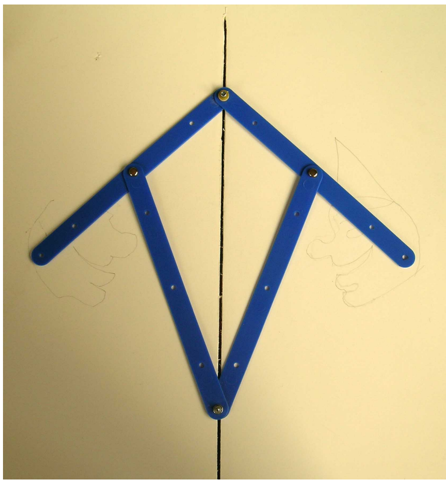


Figure n°8

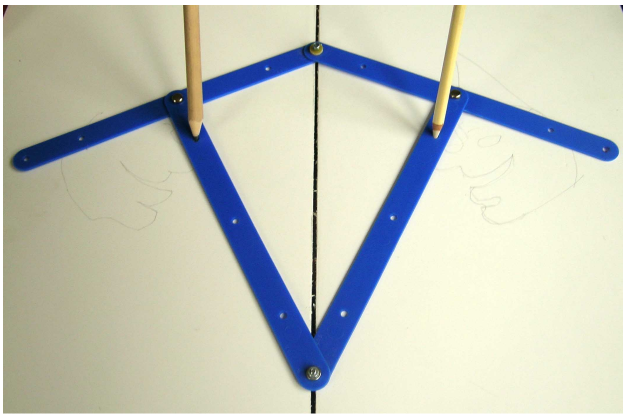


Figure n°9

Dans le montage de la figure n°9 nous avons repris l'artifice de la variante du premier symétriseur (figure n°4) que nous développons plus loin pour les plus grands en utilisant, pour insérer la pointe sèche et le crayon, deux trous symétriques par rapport à la fente mais non confondus avec les sommets du cerf-volant.

Séquence n°4 – Construction d'un deltoïde à partir d'un cerf-volant

Nous introduisons ensuite de la même façon la notion de **deltoïde qui peut être considéré comme un cerf-volant concave** (figure n°10).

Il est facile de construire un deltoïde à partir du cerf-volant précédent, avec les barres articulées. En effet, il suffit de retourner le petit triangle isocèle de telle sorte qu'il se trouve à l'intérieur du grand sans changer la mesure de ses deux côtés égaux (figure n°11).

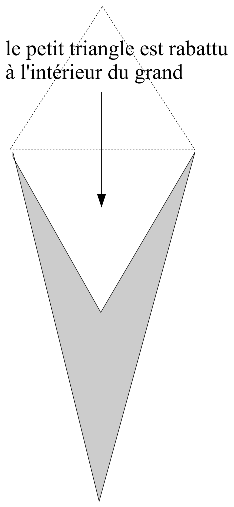


Figure n°10 - un deltoïde (en gris)

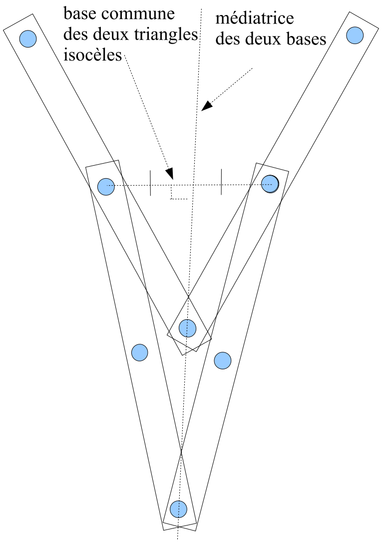


Figure n°11 - le symétriseur deltoïde

Nous demandons aussi aux élèves de noter soigneusement sur leur cahier une définition du deltoïde par exemple :
Un deltoïde est un quadrilatère constitué de deux triangles isocèles ayant leur base commune et situés dans le même demi-plan par rapport à cette base.
Ou bien, de façon proche de la définition du cerf-volant :
Un deltoïde est un quadrilatère tel que l'une de ses diagonales est médiatrice de l'autre. Leur point d'intersection est situé à l'extérieur du deltoïde.

On pourra, à cette occasion, introduire les notions de **quadrilatère convexe et quadrilatère concave :**
– Un cerf-volant est un quadrilatère convexe
– Un deltoïde est un quadrilatère concave.

Pour terminer cette activité autour des systèmes articulés symétriseurs, il sera indispensable de demander aux élèves d'écrire sur leur cahier les **propriétés de la symétrie orthogonale** :
– **équidistance** par rapport à l'axe du point d'origine et du point image,
– **orthogonalité** de l'axe et du segment joignant le point origine au point image.

Variante du premier symétriseur pour les plus grands (à partir de la classe de quatrième)

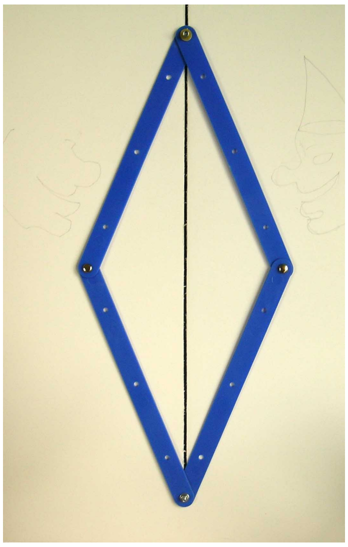


Figure n°12

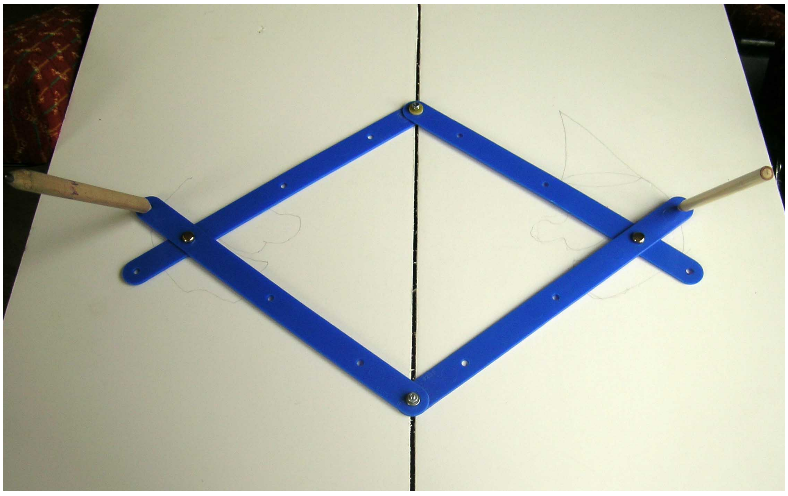


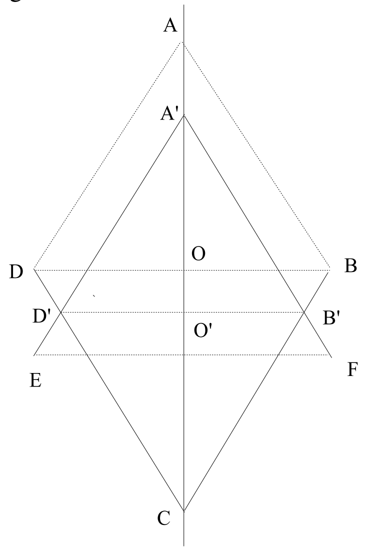
Figure n°13

La figure n°12 représente une photo du premier symétriseur.
La manipulation de celui-ci montre une difficulté : il est difficile de placer le crayon et la pointe sèche sur les sommets du losange extérieurs à la fente : un crayon n'est pas fait pour servir d'axe de rotation. Il serait peut-être plus commode de poser deux rivets creux et de placer la pointe sèche et le crayon à l'intérieur du tube formé par les rivets.

En fait nous **proposons une autre solution** aux élèves présentée par la figure n°13 : les vis ou rivets ne sont pas placés en bout de barrette mais sur le trou précédent, le système articulé est toujours un losange mais la pointe sèche et le crayon sont placés au bout des barrettes.

Nous demandons alors aux élèves d'effectuer le même travail que précédemment et de dire si nous avons de nouveau un symétriseur. S'ils répondent oui, nous leur demandons de justifier leur conjecture, c'est l'occasion de faire un **travail de raisonnement géométrique sur un objet physique.**

Figure n°14



Le premier symétriseur est représenté par le losange ABCD, la diagonale [AC] est donc portée par la médiatrice de la diagonale [DB]. La nouvelle position des barrettes définit le losange A'B'CD'. Nous avons posé la pointe sèche en F et le crayon en E sur les barrettes qui portent [A'D'] et [A'B']. Les distances DD' et BB' sont égales, par construction des barrettes. Dans le triangle isocèle BCD les segments [D'B'] et [DB] sont donc parallèles et [CA] est médiatrice de [D'B']. De même dans le triangle isocèle EA'F les segments [D'B'] et [EF] sont parallèles. Le segment [CA] qui est porté par la médiatrice de [DB] est aussi porté par la médiatrice de [D'B'] et [EF]. Les points E et F sont donc symétriques par rapport à l'axe (AC).

Nous pouvons donc dire que les points E et F, quelles que soient les positions des points A et C sur la fente, sont équidistants de [AC] et que [EF] et [AC] sont orthogonaux. Donc E et F se correspondent par la symétrie orthogonale d'axe (AC).

Notre nouveau système articulé est donc un symétriseur.

Commentaire sur la réalisation des symétriseurs

Nous avons présenté cette activité sur la symétrie orthogonale en premier car elle s'insère naturellement dans le programme des classes du collège. Cela étant, elle est un peu délicate à réaliser, à cause du système de glissière, avec le matériel pédagogique usuel. Le lecteur trouvera dans l'article suivant traitant des trisecteurs, une autre solution de glissière : les petits rails pour rideaux trouvés facilement dans les magasins de bricolage. Cette solution sera aussi réalisée par le professeur, l'outil sera plus solide et la glissière fonctionnera mieux que celle de la fente dans le carton.

Malgré cette difficulté, nous pensons qu'il est plus pédagogique de faire **réaliser l'ensemble symétriseur (feuille avec fente et losange articulé) à chaque groupe de deux ou trois élèves** car ces manipulations leur sont très profitables, elles développent :

- le soin d'une réalisation technique un peu délicate
- la patience nécessaire à la réalisation et à l'utilisation de l'outil
- les concessions au cours d'un travail en équipe
- la reconnaissance de certains dons d'élèves peu doués pour l'abstraction mathématique mais adroits
- la nécessité du tracé d'une figure codée réaliste et du raisonnement sur celle-ci
- le plaisir de réaliser un travail difficile mais gratifiant et de conserver le produit de ce travail qui pourra ensuite être exposé en classe et montré à l'entourage de l'élève.

Point de vue didactique

L'utilisation de ce type d'activités repose sur notre **conviction de l'importance de la mise en correspondance de deux ou plusieurs univers physiques et/ou intellectuels** afin de favoriser l'acquisition des notions, concepts et propriétés, géométriques (voir par exemple nos articles en ligne : bibliographie (3).

Des **conditions nécessaires et suffisantes** pour une réalisation correcte de la construction apparaissent lors des manipulations des barrettes articulées et des barrettes libres. Les tiges sont les représentations physiques de la notion de « ligne droite ». Une « boite à camembert » est la représentation du cercle géométrique (voir article du prochain Miroir : les « trisecteurs »).

Une fente rectiligne découpée dans un carton permettant de faire glisser une vis représente aussi une ligne droite. La vis représente alors un point mobile sur la droite, on accède alors à la notion de **lieu géométrique**.

Il apparaît alors aux élèves combien il est nécessaire, premièrement **de soigner la réalisation de l'outil** (surtout dans le cas, très intéressant, où ils réalisent eux-mêmes celui-ci), deuxièmement de le manipuler avec le **maximum de précision**, troisièmement de représenter avec soin mais en évitant les tracés inutiles le fonctionnement de l'outil par une **figure géométrique codée**.

Nous appelons ces techniques d'aller et retour entre l'observation, la manipulation et le raisonnement des actions « **directement expérimentables** ».

Cette prise de contact avec des objets géométriques non parfaits mais perfectibles permet en outre d'introduire de façon naturelle les notions « **d'erreur** » et « **d'approximation** ».

À propos de ces réalisations et manipulations d'outils mathématiques nous citerons Émile Borel qui, dès 1904 soulignait la nécessité de créer dans les écoles des « Laboratoires de Mathématiques » où les élèves disposeraient de matériel : carton, ficelle, tiges, axes filetés, ciseaux etc. leur permettant de construire des objets ayant des propriétés mathématiques, nous ajouterons maintenant par exemple des outils modernes comme les niveaux à laser et, évidemment, les ordinateurs.

Nous affirmons donc avec vigueur que la **mise en correspondance** de l'univers des systèmes articulés et, plus généralement des instruments géométriques, avec l'univers des figures construites avec les outils traditionnels de la géométrie : règle, équerre et compas est **indispensable à l'installation dans l'univers mental de l'élève des propriétés géométriques** étudiées au collège et au lycée ; cet univers mental sera, par la suite un excellent terreau pour l'acquisition de notions plus difficiles, par exemple le raisonnement dans des espaces de dimensions supérieures.

Dans notre article suivant du Miroir des Mathématiques, nous vous présenterons des **trisecteurs**, c'est-à-dire des systèmes permettant de tracer avec un mécanisme articulé les trisectrices d'un angle donné de mesure inconnue.

Bibliographie

(1) RODRIGUEZ HERRERA Ruben, SALLES-LEGAC Danielle *Du dessin perçu à la figure construite.* Ellipses éditeur 2005

(2) RODRIGUEZ HERRERA Ruben, SALLES-LEGAC Danielle *Practicar la geometría : de las acciones directament experimentables a sus formalizaciones matemáticas (en espagnol).* IREM de Basse-Normandie éditeur 2008

(3) RODRIGUEZ HERRERA Ruben *La géométrie sans le cercle dans la formation de la pensée géométrique* et *Segments, droites, demi-droites : Exemple de Psychomorphisme contrarié*
En ligne : www.math.unicaen.fr/irem/spip.php ?article23

(4) SALLES-LEGAC Danielle, RODRIGUEZ HERRERA Ruben *Nouvelles pratiques de la géométrie.* IREM de Basse-Normandie éditeur 2008

(5) SALLES-LEGAC Danielle, l'équipe géométrie de l'IREM de Basse-Normandie et l'IREM de Ica Pérou *Histoires de cerf-volants et autres quadrilatères, Historias de cometas y otros cuadrilateros (bilingue franco-espagnol)* IREM de Basse-Normandie éditeur 2009.