La sinusoïde n'est pas celle que vous croyez (III-B)

Troisième partie : le calcul des ordonnées de la "sinusoïde" selon Jacques Bernoulli

B) Le mémoire de Jean Bernoulli dans les *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences*

Nous allons maintenant rééditer et commenter deux mémoires, l'un de Jean et l'autre de Jacques Bernoulli, rédigés respectivement en 1699 et 1702 ; le premier – qui fera l'unique objet de cette seconde partie de notre épisode[3] – est paru en latin dans les *Acta Eruditorum* de juillet 1699, et sa traduction française en 1702, aux pages 134 à 139 des *Mémoires…* faisant suite à l' "*Histoire de l'Académie Royale des Sciences. Année MCDXCIX* (1699). *Avec les Mémoires de Mathématiques & de Physique pour la même Année. Tirés des Registres de cette Académie*", et imprimés à Paris en 1702 ; cette traduction s'intitule : "*Quadrature d'une Infinité de Segments, de Secteurs, & d'autres Espaces de la Roulette ou de la Cycloïde vulgaire. Par M. Bernoulli, Professeur des Mathématiques à Groningue*" ; le second, rédigé en 1702, fut imprimé en 1704 dans les *Mémoires de l'Académie…* (aux pages 281 à 288), sous le titre suivant : "*Section indéfinie des Arcs circulaires En telle raison qu'on voudra, avec la manière d'en déduire les Sinus, &c. Par M. Bernoulli, Professeur à Bâle*".

Les huit pages du second mémoire, celui de Jacques Bernoulli, sont " *Extraites d'une de ses Lettres écrite de Bâle le 13. Juillet 1702*", et seront lues à l'Académie des Sciences en sa séance du 6 décembre de la même année ; Jacques Bernoulli les consacre à l'explicitation d'un mémoire de son frère Jean, publié en latin et paru dans les *Acta Eruditorum* en avril 1701 (aux pages 170-175) : "*Joh. Bernoulli Multisectio Anguli vel arcus, duplici Æquatione universali exhibita, inserviens generali determinationi omnium Zonarum quadrabilium cycloidis*", *i. e.* : "*De la plurisection d'un angle ou d'un arc, par Jean Bernoulli, mise en lumière à partir de la duplication universelle des équations, dont découle la détermination générale de toutes les zones quarrables de la cycloïde*".

Nous allons donner au préalable quelques indications sur une partie des textes qui en constituent le contexte, pour faire suite à la précédente livraison de ce feuilleton : nous y avions indiqué que Fontenelle, dans son introduction à l'*Histoire… pour 1702* citait ou signalait des auteurs ayant écrit sur des questions connexes aux différents mémoires des frères Bernoulli ; mais Jacqques Bernoulli lui-même cite ses références ou ses sources en marge ou dans le texte de son mémoire. Voici la liste et une brève description de ces mémoires, que nous avions déjà mentionnés dans la première partie de cet article ; elles constituent un commentaire d'introduction au texte que l'on va lire ensuite, voire une paraphrase moderne de ses premiers développements :

– tout d'abord, un mémoire de Jean Bernoulli, publié dans les *Acta Eruditorum* de juillet 1699, aux pages 316 à 320, donne l'aire de plusieurs segments & secteurs cycloïdaux quarrables, sous forme d'exemples sans méthode : "*Cycloidis primariæ Segmenta innumera Quadraturam recipientia ; aliorum ejusdem spatiorum quadrabilium Determinatio : post varias illius fortunas nunc primum detecta a Joh. Bernoullio*", *i. e.* "*Obtention de la Quadrature d'une quantité innombrable de Segments de la Cycloïde vulgaire ; et Détermination d'autres espaces quarrables de cette même courbe : maintenant et pour la première fois découvertes par Jean Bernoulli, après des fortunes diverses*" ; l'auteur dit donc avoir trouvé une infinité d'autres zones quarrables de la Roulette ; ce mémoire attire l'attention de son frère, qui cherche alors à comprendre l'heuristique de Jean, que celui-ci n'a pas livrée ;

– ce mémoire, comme nous l'indiquions plus haut, fera l'objet d'une publication dans une traduction française assez libre dans les *Mémoires…* de l'Académie de Paris : "*Quadrature d'une Infinité…*". Ce texte, que nous rééditons *infra*, n'est en effet, si l'on excepte l'exposé mathématique des théorèmes et des corollaires du mémoire, qu'une version libre du texte original en latin des *Acta Eruditorum* cité à l'instant ; il est daté en marge du 11 juillet 1699, ce qui correspond à l'indication des *Acta Eruditorum* de juillet de cette année-là ; Jean Bernoulli évoque en particullier la "préhistoire" de ses spéculations, en parlant de la naissance des questions sur la Roulette, du temps de Toricelli et de Galilée dans des termes qu'on pourra lire *infra*, en soulignant le fait que le fond en est quelque peu différent du texte latin ;

– en 1699, Jacques envoie un premier mémoire sur le sujet : "*Jac*[*obi*]. *B*[*ernoulli*] *Quadratura Zonarum Cycloidalium demonstrata. Vid. Tab. IV, m. Jul. 1699*", *i. e.* : "*Quadrature des Zones cycloïdales démontrée par Jacques Bernoulli*", qui paraît dans les *Acta Eruditorum* de septembre, aux pages 427 et 428 (en renvoyant à la planche IV des *Acta Eruditorum*, où se trouvent les figures du mémoire de son frère) ; il y donne une méthode "*très-simple*" pour fournir de "*pareilles*" zones quarrables ;

– en décembre 1700, toujours dans les *Acta Eruditorum*, aux pages 551 et 552, Jacques Bernoulli revient sur le sujet, en donnant une méthode alternative faisant

[3] Contrairement à ce qui était annoncé à la fin de la première partie, III-A) de cet épisode, dans la livraison précédente. En effet, si la version française du mémoire de Jean Bernouilli est réduite par rapport à la version latine parue en juillet 1699, il nous a finalement paru nécessaire de la livrer pour comprendre les raisons et l'heuristique qui ont conduit Jacques Bernoulli à sa propre démonstration de 1702. L'épisode III comportera donc trois parties et le mémoire de Jacques Bernoulli sera donné et commenté dans le prochain numéro de *Miroirs*. Un peu de suspens ne nuit pas…

usage d'une courbe qui, quoique mécanique (au sens de Descartes, et en l'occurrence engendrée par composition de mouvements et n'ayant pas d'équation cartésienne algébrique), peut être engendrée par des lignes droites et circulaires seulement (c'est-à-dire une courbe constructible point par point à la règle et au compas) : "*Jac*[*obi*]. *B*[*ernoulli*] *Quadratura Zonarum Cycloidalium promota ; Problema item Centri grav. Sectoria solidis Cycloïdici solutum. Conf. Acta Lips. P. 316 & 427, Anni 1699*" ; *i. e.* "*Quadrature de Zones cycloïdales poursuivie par Jacques Bernoulli : ensemble la Solution du Problème des Centres de Gravité des Secteurs de solides Cycloïdaux*" ; il renvoie aux deux mémoires de 1699 que nous venons de citer, à savoir celui de son frère et le sien ;

– la méthode de Jacques Bernoulli n'étant pas la même que celle de Jean, ce dernier revient à la charge en publiant la sienne, toujours dans les *Acta Eruditorum*, en avril 1701, pp. 170-175 : "*Joh. Bernoulli Multisectio Anguli vel arcus...*", mémoire dont nous avons dit qu'il a provoqué la réponse de Jacques en 1702 dans les *Mémoires...* de l'Académie de Paris parus en 1704. On y voit à l'œuvre une "*progression*", c'est-à-dire une suite, dont la loi de formation est établie par induction, et selon un procédé probablement inspiré des démarches de Wallis ; Jacques Bernoulli, estimant que cette voie est facile à établir par une démarche inspirée de celle de Leibniz pour la détermination des sinus et que le bibliothécaire de Hanovre lui avit communiquée "*autrefois*", s'en tient là, jusqu'à la connaissance qu'il aura – et qu'il semble avoir eue avant parution – d'une autre méthode due à un troisième auteur, "*J*[acques]. *Herman*[*n*]", puisqu'il décrit le contenu d'un mémoire de ce mathématicien suisse, paru en 1703 ;

– en effet, Jacques Hermann, publie dans les *Acta Eruditorum* d'août 1703 (aux pages 345-352), un mémoire intitulé "*J. Hermanni Demonstratio Geminæ Formula a Celeberrimo Dn. Joh. Bernoulli, in Actis Erudit. Mens. Apr. A. 1701, pro multisectione anguli vel arcus circularis, sine demonstratione exhibita*", *i. e.* "*De l'établissement, par Jean Herman, du fondement de la formule mise en lumière sans démonstration par le très célèbre Jean Bernoulli et parue dans les* Acta Eruditorum de Leipzig *au mois d'Avril 1701, pour la plurisection de l'angle ou d'un arc circulaire*", dans le quel l'auteur fait usage d'une progression qui peut servir à couper une courbe donnée en raison donnée ; Jacques Bernoulli aurait alors repris son étude sur le sujet, pour voir si elle le conduirait au résultat de Herman : ce faisant, il se serait convaincu alors de deux choses : non seulement la plurisection d'un arc circulaire et la détermination du sinus de l'arc sous-multiple, en fonction du sinus de l'arc donné, sont un seule et même problème, mais encore, la méthode d'Herman découlerait de celle qu'il avait proposée lui-même en 1700.

Rappelons encore ce que Fontenelle ajoute dans son introduction, qui éclaire les enjeux de la découverte des frères Bernoulli : *Nous laissons au Mémoire de M. Bernoulli la manière fine et subtile dont il a aperçu la progression des nombres connus qui entraient dans les expressions des cordes des arcs doubles ; il nous suffit d'avoir fait voir en gros quel chemin il a suivi, et comment il a profité d'une faible lumière qu'il a entrevue dans une si grande obscurité. Cette progression qui l'a conduit, était assez cachée, et ne se fût pas offerte à des yeux moins clairvoyans.* Et, plus loin : *Si l'on avait en termes finis et proportionnés à la capacité de l'Esprit humain le rapport d'un arc à sa corde, on aurait celui du demi-cercle, qui n'est qu'un arc – le plus grand de tous – , au diamètre qui est sa corde, et par là viendrait aussitôt la quadrature du cercle inutilement cherchée depuis tant de siècles. Mais la valeur d'un arc étant donnée, celle de sa corde ne se peut exprimer que par une suite infinie de termes, qui ne permet pas que l'on arrive au dernier, ni par conséquent que l'on trouve la somme qu'ils font tous ensemble, ce qui serait nécessaire.* Nous commentons plus loin le mémoire de Jacques Bernoulli, ce qui permettra de comprendre ces remarques de Fontenelle.

* * * * *

Le mémoire de Jean Bernoulli (juillet 1699),
tel que traduit en français et qu'imprimé en 1702.

[...]

QUADRATURE

D'UNE INFINITE'

De Segmens, de Secteurs, & d'autres Espaces de la Roulette ou de la Cycloïde vulgaire.

Par M. BERNOULLI, Professeur des Mathématiques à Groningue.

[En marge gauche :] 11. Juillet / 1699.

SUIVANT Toricelli il y a précisément cent ans que cette fameuse Courbe fut imaginée par Galilée son Maître, à qui il semble en attribuer l'invention. Quoiqu'il en soit, on peut dire avec verité, que c'est particulierement en France qu'elle a acquise sa plus grande réputation. Car il est constant que le P. Mersenne la divulga le premier en la proposant à tous les Géometres de son tems ; lesquels s'y appliquant à l'envie, y firent alors plusieurs découvertes : en sorte qu'il étoit difficile de juger à qui étoit dû l'honneur de la premiere invention. Delà vint cette célébre contestation entre Messieurs de Roberval, Toricelli, Descartes, Lalovera, &c. qui fit alors tant de bruit parmi les Sçavans[4]. Depuis ce tems-là à peine a t-on trouvé un Mathematicien tant soit peu distingué, qui n'ait éprouvé ses forces sur cette ligne, en tâchant d'y découvrir quelque nouvelle propriété. Les plus belles nous ont été laissées par Messieurs Pascal, Huggens, Wallis, Wren[5], & quelques autres. Son identité avec sa developpée, les chûtes en tems égaux par des arcs inégaux de cette Cour-

be, & la plus vîte descente à la quelle nous l'avons trouvée propre dans ces derniers tems, en sont sans contredit les plus remarquables & les plus utiles par les usages qu'elles peuvent avoir dans la Mécanique ; comme il paroît dans l'admirable invention des Pendules.

Quant à celles qui sont purement speculatives, il n'y en pas une qui ait tant excité l'admiration des Sçavans, que la Quadrature d'un seul segment de cette Cycloïde, d'autant plus qu'on démontre que sa Quadrature indéfinie est impossible sans celle du cercle dont elle dépend : Cette propriété a même paru trop belle à M. Wallis (jaloux de la gloire de sa Nation,) pour pouvoir reconnoître que M. Huggens soit le premier inventeur de cette Quadrature ; puisqu'il fait tous ses efforts pour l'attribuer à son M. Wren. Cest apparemment ce qui a donné occasion à M. Leibnitz d'aller plus avant, & de chercher cet autre segment quarrable oblique, qu'il a publié autrefois dans les Journaux. Mais ces deux segmens sont tout ce qu'on a crû jusqu'ici de quarrable dans la Cycloïde ordinaire ; & même M. Tschi[r]nhaus se persuadoit avec tant d'assûrance que c'étoient les seuls qui le fussent, qu'il avance hardiment dans les Actes de Leipsick de l'année 1687. page 526. que le Cycloïde n'a pas un nombre infini d'espaces quarrables.

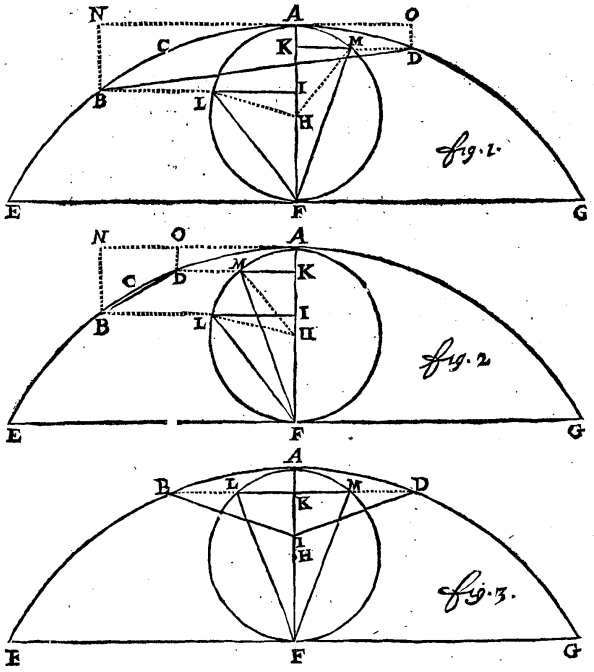
Pour désabuser donc ceux qui pourroient être de son sentiment, je me crois obligé de démontrer ici le contraire par la découverte que je fis il y a déja quelque tems, des Quadratures d'une infinité non seulement de segmens, mais aussi de secteurs, & d'autres sortes d'espaces de cette Courbe, & d'en laisser l'examen & le jugement à l'illustre Académie des Sciences, avant que de la rendre publique. Car, comme selon toutes les apparences, ce sera la derniere observation qu'on aura faite dans ce siecle au sujet de nôtre Cycloïde, il est juste qu'après une durée de cent ans, qu'elle a continuellement exercé les Mathématiciens de toute l'Europe, elle retourne maintenant porter ce dernier éclat en France où elle a pris son premier lustre.

[4] "Lalovera" est pour le Père Laloubère, qui répondit au concours lancé par Pascal, *alias* "Amos Dettonville", sur le sujet de la Roulette ou Cycloïde. Sur cette controverse, *cf*., par exemple : Denis Lanier, "Pascal et la roulette", Acte IV de l' *Opera Matematica. Les Mathématiques à l'Âge baroque. Dramma giocoso en quatre actes, une ouverture, un prologue, un intermède comique et un épilogue*, texte d'une conférence à quatre voix (Catherine Lanier, Denis Lanier, Jean-Pierre Le Goff & André Ropert) pour le Colloque inter-IREM d'Histoire des Sciences de Strasbourg (23 mai 1987), *in* : *La Science à l'âge baroque*. N° 2. Caen, IREM de B.-N., avril 1988. Retirage : juin 1992.

[5] "Huggens" est pour Christiaan Huygens (ou parfois "Huyghens"). L'architecte et géomètre anglais Christopher Wren (1632-1723) s'est illustré par la rectification d'une arche de cycloïde. Pour ce qui touche aux propriétés de la Cycloïde, on se reportera avec profit à : [BESSOT, LANIER, LE GOFF *& alii*, *Aux origines du calcul infinitésimal*, Ellipses, 1999].

[Figures]

[En marge gauche :] FIG. 1. / 2.

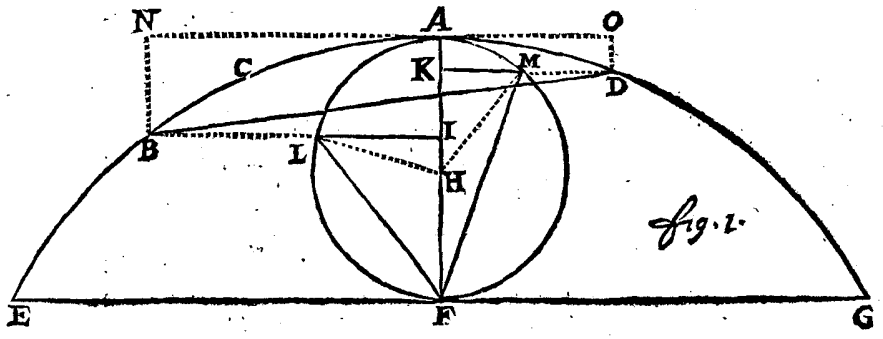


SOIT donc la Cycloïde commune *E A G*, dont la base soit *E G*, l'axe *A F*, & le cercle génerateur *A L F*. Je dis que si l'on méne à discretion deux ordonnées *I B* & *K D*, de maniere néantmoins, que la distance *I H* de l'une au centre, soit égale à la distance *K A* de l'autre au sommet ; la droite *B D* (que l'on conçoit tirée par les extremitez de ces ordonnées) retranchera un segment cycloïdal *B C D B*,

qui sera quarrable. *Ce Segment* BCDB *sera égal à la somme des triangles rectilignes* LFI + MFK (fig. 1.) *ou à la difference des mêmes* LFI – MFK (fig. 2.) ce que je démontre ainsi.

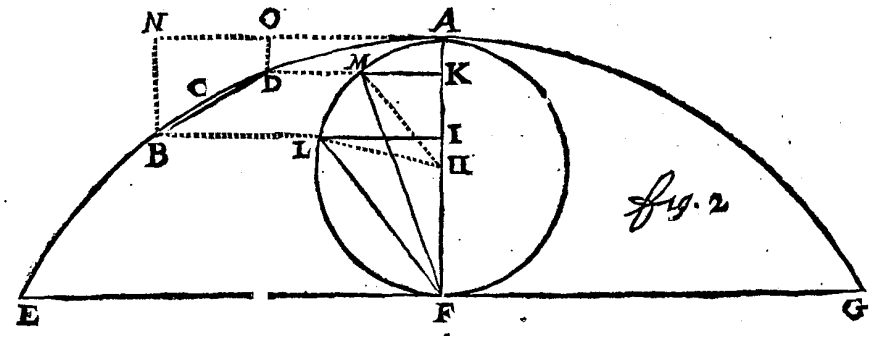
En marge droite :] FIG. 1.

Soient *N A O* parallele à la base *E G* ; *B N*, *D O*, paralleles à l'axe *A F* & les raïons *H L*, *H M*. Premierement lorsque les ordonnées *I B*, *K D*, (*fig.* 1.) sont de differens côtez de l'axe, le segment *B C D B* se trouve égal au trapeze *B N O D* diminué des deux trilignes *A N B* & *A O D* ; mais le trapeze $BNOD = \overline{\frac{1}{2}BN + \frac{1}{2}DO} \times NO$ (à cause de $HI = AK$) $= \frac{1}{2}HA \times NO = \frac{1}{2}HA \times NA + \frac{1}{2}HA \times OA$. Or par la nature de la Cycloïde $\frac{1}{2}HA \times NA = \frac{1}{2}HA \times \overline{\text{arc.}AL + LI} = \text{sect.}LHA + \text{triang.}LHF = \text{sect.}LFA$: On démontrera de même que $\frac{1}{2}HA \times OA = \text{sect.}MFA$. Maintenant par la propriété de la Cycloïde, déja connuë, le triligne *A N B* = au segment circulaire *A I L* ; & le triligne *A O D* = segm. circ. *A K M*. Donc ayant ôté du trapeze *B N O D* les deux trilignes *A N B*, *A O D* ; & des secteurs *A F L*, *A F M*, les deux segmens circulaires *A I L*, *A K M* : l'on aura le segment cycloïdique *B C D B* = au[x] deux triangles rectilignes *L F I* + *M F K*. *Ce qu'il falloit démontrer.*



[Figure 1.]

En marge droite :] FIG. 2.



[Figure 2.]

Que si les ordonnées *I B*, *K D*, sont d'un même côté (*fig.* 2.), le segment *B C D B* = trap. *B N O D* – triligne *A N B* + triligne *A O D*; & en suivant les traces de la démonstration précedente, on trouvera le le trapez e $BNOD = \frac{1}{2}HA \times NA - \frac{1}{2}HA \times OA$ = sect. *L F A* – sect. *M F A*. Donc ayant substitué les deux segmens circulaires *A I L*, *A K M*, à la place des trilignes *A N B*, *A O D*, qui leur sont égaux; il viendra le segment cycloïdique *B C D B* = à la difference des deux triangles rectilignes *L F I* – *M F K*. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROL I. Les points *K* & *I* concourant & se con-

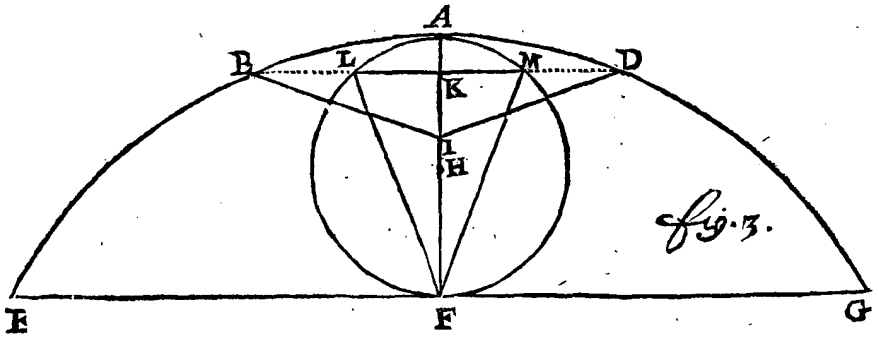
[En marge gauche :] FIG. 1.

fondant au milieu du rayon *A H*, il est manifeste que la corde *D B* (*fig.* 1.) sera alors perpendiculaire à l'axe *A F*, & qu'elle passra alors par le même point du milieu du rayon *A H*. Ce qui fait le cas particulier de M. Huggens; le segment *B A D B* devenant en ce cas égal au triangle équilateral inscrit dans ce cercle générateur, ou (ce qui est la même chose) au demi hexagone inscrit dans le même cercle.

[En marge gauche :] FIG. 1. 2.

COROL. II. Mais si les points *K* & *I* sont éloignez l'un de l'autre de plus qu'il est possible, c'est-à-dire, si *K* tombe au sommet *A*, & *I* au centre *H*; le segment *B C D B* dégénerera dans celui qui a été trouvé par M. Leibnitz, & sera égal au seul triangle *L F I* (l'autre *M F K* s'évanoüissant) ou, ce qui vaut autant, au quart du quarré inscrit dans le cercle générateur.

[En marge gauche :] FIG. 3.



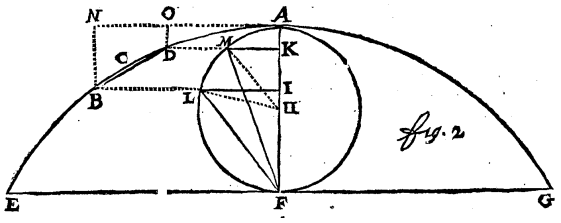
[Figure 3.]

Je passe maintenant à une détermination générale d'une infinité de secteurs de la Cycloïde, tous quarrables, qui (comme j'espere) ne paroîtront pas moins curieux que les segmens. Les points *K* & *I* sont encore ici supposez également éloignez du sommet [*A*][6] & du centre *H*. Du point *I* soient tirées deux lignes droites *I B*, *I D*, aux deux extremitez de l'ordonnée *B K D* : elles formeront un secteur cycloïdal *I B A D I*, que je dis être encore quarrable, étant égal au triangle isoscele *L F M*. Je n'en mets point ici la démonstration, parce qu'elle se tire aisément de la précedente. Il faut seulement observer en passant, que les deux cas particuliers de Messieurs Huggens & Leibnitz, sont encore ici compris dans cette détermination générale, étant visible que le secteur *I B A D I* prend la forme du segment de M. Huggens, quand les deux points *K* & *I* se confondent; & qu'il se change en deux segmens obliques de M. Leibnitz, lorsque *I* tombe en *A*, & *K* en *H*.

Il ne sera pas hors de propos de dire, que j'ai aussi trouvé une méthode toute singulière de déterminer d'autres espaces cycloïdiques quarrables par l'Algebre. Par exemple, je [peux][7] tirer deux ordonnées *K D*, *I B* (*fig.* 2.) qui comprennent un espace *K D C B I* quarrable, démon-

[6] Le texte donne : "*K*".

[7] Le texte donne : "je peux". Une telle zone KDCBI n'est pas généralement quarrable; en revanche, il l'est si K et I vérifient la propriété AK = IH, qui conduit aux segments quarrables des figures 1 et 2, ce que l'on "peut" obtenir en complétant le segment quarrable BCDB du trapèze rectiligne IBDK.



[Figure 2.]

trant en même tems, que cela se peut pratiquer d'une infinité de manieres, en sorte que l'espace *K D C B I* sera toûjours different selon la diversité des racines des équations algébraïques tantôt plus tantôt moins élevées. Car il faut remarquer que tous ces espaces ne peuvent pas être déterminez par une construction universelle, comme l'ont été ci-dessus les segmens & les secteurs. Quand je sçaurai que la démonstration synthetique de cette quadrature générale aura eu le bonheur de plaire à l'Académie, je communiquerai aussi la Méthode analytique dont je viens de parler.

[. . .]

* * * * *

Commentaires

Le projet affiché de Jean Bernoulli est bien d'apporter sa pierre à l'édifice construit autour de la Roulette ou Cycloïde depuis les travaux menés en Italie et en France, après que le père Marin Mersenne ait fait connaître cette courbe et son mode d'engendrement à Roberval, Descartes et bien d'autres. Et de le faire en cette fin de siècle dans les *Mémoires de l'Académie Royale* française en hommage à cette période initiatrice de la *nouvelle analyse*, celle de M. Descartes – l'algèbre littérale appliquée à la géométrie –, d'abord, celle des Newton et Leibniz – le calcul infinitésimal –, ensuite.

Pour mettre en évidence l'importance de sa découverte, il rappelle que la *quadrature absolue* de la Cycloïde n'est pas possibke, c'est-à-dire que : il n'est pas possible de donner l'expression de l'aire comprise sous une arche et au-dessus de la base de cette courbe périodique et indéfinie, comme étant celle d'une figure rectiligne connue, ce qui autoriserait la construction à la règle et au compas d'un carré d'aire égale à celle de cette figure rectiligne. En revanche sa *quadrature relative* – ce qu'il appelle une *quadrature indéfinie*, c'est-à-dire une expression de l'aire d'une arche en fonction d'une figure curviligne plus simple, est connue depuis Roberval (*cf.* le premier épisode de ce feuilleton) : l'aire d'une arche vaut trois fois l'aire du cercle générateur (la fameuse roulette qui a donné son nom à la cycloïde par métonymie). Et il semblait qu'hormis les deux segments d'arche particuliers que Huygens (un certain segment délimité par une parallèle à la base) puis Leibniz (un certain segment délimité par une corde oblique) avaient mis en évidence comme quarrables, il ne s'en trouvait pas d'autres dans l'arche ou il ne s'en trouvait pas en nombre infini ; c'était en tout état de cause – nous dit-il – la conviction de Tschirnhaus, en 1687. L'enjeu est donc de montrer que, tout comme la parabole, engendrée dans un cône à base circulaire et dont tous les segments sont quarrables (on le savait depuis Archimède), la cycloïde, courbe engendrée par la rotation d'un cercle, avait une infinité de segments quarrables, voires d'autres zones comme des secteurs.

Pour le reste, l'exposé et les figures sont explicites, pour peu que l'on connaisse les propriétés de la Cycloïde, qui découlent de son mode d'engendrement "mécanique", par composition de mouvements de la roulette génératrice (rectiligne de son centre, de rotation sans glissement pour les points de sa circonférence, de celui dont on suit le parcours, en particulier).

Aussi, nous allons expliciter ici quelques éléments qu'il convient de rappeler pour comprendre la démarche de Jean Bernoulli :

1°) La roulette ou cycloïde est engendrée par le déplacement d'un point de la circonférence d'une roue (ALF) de centre H et de rayon r, roulant sans glisser sur une base (EG). Primitivement cette roue est posée en E et c'est le point en contact – nommons le X – avec E qui est pris comme mobile ; lorsque la roue tourne d'un demi-tour jusqu'au contact en F (EF = πr), X "monte" et se retrouve en A, sommet de la cycloïde, avant de "redescendre" jusqu'en G, lorsque la roue a effectué un tour complet (EG = $2\pi r$). Ce mouvement se poursuit à l'identique (c'est-à-dire périodiquement), formant ainsi une courbe composée d'une infinité d'arches successives. Notons que, contrairement à ce que semblent indiquer les figures gravées, les tangentes aux extrémités de chaque arche sont "verticales", faisant des points E et G des points de rebroussement de seconde espèce.

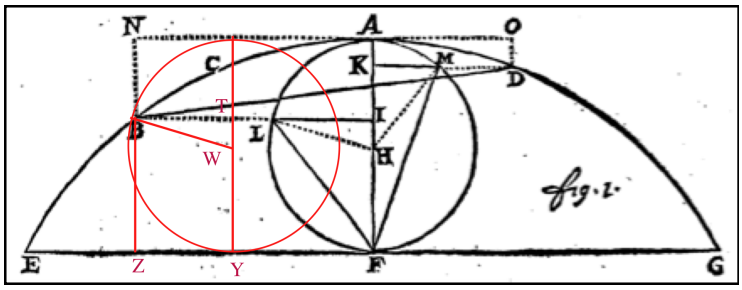
2°) Jean Bernoulli s'attache à quarrer successivement : a) un segment d'une arche de cycloïde – comme l'on définit un "segment" de cercle ou de parabole à cette époque et depuis l'Antiquité –, c'est-à-dire, soit la région BCADB, comprise entre l'arc de cycloïde BCAD et la corde [DB] de la première figure, soit la région BCDB, comprise entre l'arc BCD et la corde [DB] de la deuxième figure, du fait que deux cas se présentent ici,

B et D pouvant être de part et d'autre de A ou tous les deux sur la même demi-arche ; b) un secteur d'une arche de cycloïde IBADIB, compris entre l'arc BAD de cette arche (B et D étant symétriques par rapport à l'axe) et les deux "rayons" [IB] et [ID] issus d'un point I de l'axe tel que IH = KA (K étant le milieu de [BD]) ; on notera que la notion de secteur est à entendre de façon plus générale que celle de "secteur" de cercle, primitivement défini comme secteur angulaire de sommet le centre du cercle : I est ici un point intérieur de l'arche, certes situé sur son axe, mais quelconque en ceci qu'il n'est pas nécessairement choisi au centre H de la roue, ni au point F qui pourrait constituer une sorte de "centre" de l'arche. Ce choix est lié à la position de K (ou de BD, parallèle à la base), mais conduit bien à une infinité de cas, dont celui exposé auparavant par Leibniz.

3°) Le fait que ces segments soient "quarrables" au sens de l'époque de Bernoulli – qui prévaut depuis l'Antiquité, et qui a été remémoré *supra* – tient au fait que l'auteur met en évidence leur égalité d'aire avec une somme de figures rectilignes, dont on sait, selon la démonstration qu'en donne Euclide dans ses *Éléments*, qu'elle peut toujours se ramener à un carré, par des opérations géométriques ne nécessitant que la règle et le compas, c'est-à-dire équivalant à n'user que des opérations arithmétiques élémentaires et à l'extraction des racines carrées ; en effet, Euclide donne la méthode pour quarrer un rectangle – il suffit d'insérer une moyenne proportionnelle, ou géométrique, entre les deux grandeurs linéaires que sont les côtés du rectangle, c'est-à-dire extraire la racine carrée de leur produit, pour avoir le côté du carré de même aire – et un triangle peut être "rectangulé" puisque son aire équivaut à la moitié du "rectangle produit" (c'est de là que vient le substantif "produit") par un côté du triangle et la hauteur qui lui est relative. Quant à la somme de deux triangles (ou plus), elle sera donc la somme de deux rectangles (ou plus), R et S, et une simple règle de trois donnera la quatrième proportionnelle des deux côtés de l'un, R, et d'un côté de l'autre, S, ce qui permet, si aucun de ces deux rectangles n'a un côté de même longueur que les côtés de l'autre (pour pouvoir les accoler et ne faire qu'un seul rectangle), de trouver un rectangle R' ayant même côté que S et même aire que R, de sorte que R' peut être accolé à S et ne former qu'un seul rectangle T de même aire que la somme de celles de R et S.

4°) Quant à montrer l'égalité d'aires entre celle du segment BCADB (figure 1) et la somme des aires des triangles LFI et MFK, la démonstration ressortit aux implicites suivants, concernant la cycloïde :

[Figure 1, complétée.]



– on mène les droites "ordonnées" (KD) et (IB), parallèles à la base [EG] et issues de K et I de sorte que AK = IH, qui coupent la cycloïde en D et en B (resp.) et la "roulette" qui engendre la cycloide, dans sa position ALF, en M et en L (resp.) ; sur la tangente en A à la courbe, parallèle à (EG), sont projetés D et B orthogonalement, en O et N (resp.) ; le trapèze BDON contient le segment à quarrer, et deux triangles mixtilignes, BNACB et DOAC'D (C' étant un point de la courbe situé entre A et D) ; l'aire du segment sera donc la différence entre l'aire du trapèze et celles des deux triangles mixtilignes, suivant la loi implicite de l'additivité des aires par découpage ; BDON a pour aire la moitié de celle du rectangle produit par un côté de longueur ON et par un côté de longueur OD + NB (somme des bases) ; or OD + NB = AK + AI = AK + KH = AK + IH + KI = AK + KH = AH ; donc *aire* (BDON) = (ON . AH)/2 = (OA . AH)/2 + (AN . AH)/2, c'est-à-dire que l'aire du trapèze est égale à la somme des aires des triangles rectangles OAH et NAH.

– jusque là, il s'agit de manipulations d'aires rectilignes ; intervient alors une propriété de la cycloïde, non explicitée par Jean Bernoulli, à savoir que lorsque le point mobile X est en B, l'arc de la "roulette" compris entre le point de contact Y de celle-ci avec la base et le point B est égal, en longueur, à EY, et que, appelant Z le projété orthogonal de B sur EG et W le centre de la "roulette" à cet endroit, on constate alors que les quadrilatères BLHW et BLFY sont des parallélogrammes ; on a donc et BL = WH, YF = BL et ZY = LI, mais aussi *arc* (YB) = *arc* (FL), d'où *arc* (LA) = EF – EY = YF = WH = BL ; en conséquence, NA = BI = BL + LI = *arc* (AL) + LI, et *aire* [*tri.* (OAH)] = (AN . AH)/2 = [(*arc* (AL) + LI) . AH]/2 ; or [*arc* (AL)] . AH/2 est l'aire du secteur angulaire centré LHA de la "roulette", et LI . AH/2 = LI . HF/2 est l'aire du triangle LHF ; l'aire du triangle NAH est donc égale à l'aire cumulée de ces deux surfaces – secteur angulaire LHA et triangle LHF – cumul qui donne l'aire du secteur angulaire non centré FLA de la "roulette",

triangle mixtiligne dont la partie curviligne est LA ; on obtient, par les mêmes considérations que l'aire du triangle OAH, (OA . AH)/2, est égale à l'aire cumulée de deux surfaces – secteur angulaire MHA et triangle MHF – cumul qui donne l'aire du secteur angulaire non centré FMA de la "roulette", triangle mixtiligne dont la partie curviligne est MA ; ces deux triangles mixtilignes, FLA et FMA, contiennent deux secteurs non centrés, ILA et KMA, dont Jean Bernoulli nous dit qu'ils sont respectivement de même aire que les triangles mixtilignes ANB et AOD, autre propriété de la cycloïde qui lui est évidente – *déja connuë*, nous dit-il – que nous allons expliciter ; moyennant quoi, le segment BCADB sera égal, en aire, à :

aire (*trapèze* BDON) – *aire* [*tri. mixt.* (ANB)] – *aire* [*tri. mixt.* (AOD)]
= (OA . AH)/2 + (AN . AH)/2
= *aire* [*tri. mixt.* (FMA)] + *aire* [*tri. mixt.* (FLA)] – *aire* [*tri. mixt.* (ANB)] – *aire* [*tri. mixt.* (AOD)]
= *aire* [*tri. mixt.* (KMA)] + *aire* [*tri.* (KMF)] + *aire* [*tri. mixt.* (ILA)] + *aire* [*tri.* (ILF)]
– *aire* [*tri. mixt.* (ANB)] – *aire* [*tri. mixt.* (AOD)]
= *aire* [*tri.* (KMF)] + *aire* [*tri.* (ILF)],
si l'on a bien : *aire* [*tri. mixt.* (KMA)] = *aire* [*tri. mixt.* (AOD)] et :
aire [*tri. mixt.* (ILA)] = *aire* [*tri. mixt.* (ANB)] ; ce qu'il nous reste à montrer, et si possible par une voie synthétique pour rester au plus près de la pensée de l'époque ;

– cette dernière propriété résulte du fait que, appelant T le point de BI tel que BT = LI, l'on savait, depuis la méthode de Roberval pour déterminer, en s'inspirant de la méthode des "*Indivisibles*" de Cavalieri une quadrature relative de l'arche complète (dont l'aire vaut trois fois celle de la "roulette" génératrice, *cf.* la 1ère partie), que ce point T décrit une sinusoïde, "*compagne de la cycloïde*", lorsque B et L décrivent, en restant sur une même ordonnée parallèle à la base, respectivement la cycloïde et la "roulette" qui l'engendre ; pour chaque point T de ce mouvement, l'aire comprise entre l'arc AT de la sinusoïde et celui, AB, de la cycloïde, est égale à l'aire du secteur non centré LIA de la "roulette", cumulant ainsi tous les sinus tirés de AI vers l'arc AL, lignes que l'on retrouve sur les ordonnées B'T'L'I' entre les points B' et T' décrivant les arcs BA et TA de la cycloïde et de sa "*compagne*" ; de la même façon, l'aire comprise entre l'arc AT de la sinusoïde et celui, AB, de la cycloïde, est égale à celle du triangle mixtiligne ANB, qui cumule les sinus verses (*sin verse* $(x) = r - cos\ (x)$), comme IA = HA – IH, des angles qui se forment lorsque ce mouvement se produit de B à A ; par conséquent ; ces résultats sont évidemment démontrables par le calcul intégral, mais il est clair que Jean Bernoulli sait ce que le "cumul des lignes" veut dire, tandis que la représentation "algébrique" de la cycloïde par des équations paramétriques [$x = r(t - sin\ t)$ et $y = r(1 - cos\ t)$, avec $t = mes$ (FHL), avec E pour origine du repère, [EG) pour axe Ox et la demi-droite perpendiculaire à celle-ci pour axe Oy] n'est pas encore usitée pas plus que n'est habituel l'usage des changements de variable, qui permettrait ici de transformer l'intégrale $\int ydx$.

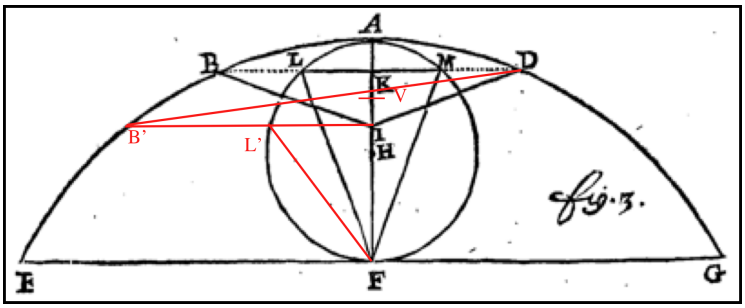
Les arguments sont les mêmes pour le cas de la figure 2, à ceci près que l'on procède par différence d'aires au lieu d'opérer avec une somme.

On notera que la version latine de 1699 comportait un troisième corollaire, disant en substance : *il est patent que, parmi tous les segments quarrables* [de la cycloïde]*, il n'en est aucun dont la soustendante* [*i. e.* la corde comme BD dans les figures 1 et 2] *passe sous le milieu du rayon AH ; ce qui fait qu'il est impossible de réaliser la quadrature de tous ceux qui ne sont pas compris dans les cas des figures I et II*". Il est vrai que tout segment quarrable construit selon la méthode de Jean Bernoulli a une corde qui passe entre K et I et au dessus du milieu de KI – que nous nommerons V et qui est aussi celui de AH, par construction –, puisque la corde BD coupe KI en un point que nous nommerons U et qui est tel que UK/UI = KD/IB < 1 dans le cas de figure où K est plus proche de A que I ; donc U est au-dessus de V ; pour autant, cela ne prouve pas qu'il n'existe aucun autre segment quarrable de la cycloïde : c'est sans doute une certaine prudence d'un auteur qui vient de reprocher à Tschirnhaus une déclaration imprudente de même nature – passage qui ne figure pas dans la version latine –, qui lui aura fait retrancher ce corollaire dans sa lettre à l'académie parisienne.

Quant à l'infinité de secteurs de la cycloïde dont Jean Bernoulli nous donne la quadrature, il nous indique qu'il "*n'en met*[*s*] *point ici la démonstration, parce qu'elle se tire aisément de la précedente*". Il nous semble que cette démonstration pourrait être celle-ci : dans le cas de la figure 1, on a montré que le secteur BADB a même aire que la figure rectiligne LIKMFL formée des deux triangles ILF et KMF : dans la figure 3, B et D sont sur la même ordonnée issue de K ; par le point I, tel que AK = IH, traçons une ordonnée (parallèle à la base) qui coupe l'arc de cycloïde EBA en B' et l'arc de cercle FLA en L', le segment de cycloïde B'BADB' est quarrable d'après le cas de la figure 1, puisqu'égal à {*aire* [*tri.* (KMF)] + *aire* [*tri.* (IL'F)]} et le segment de cycloïde B'BB' est quarrable, d'après le cas de la figure 2, puisqu'égal à {*aire* [*tri.* (IL'F)] – *aire* [*tri.* (KMF)]} ; or le secteur de cycloïde BADIB de la figure 3 est formé de deux éléments : le segment de cycloïde BADB et le triangle rectiligne BDI ; le segment de cycloïde BADB est la différence entre le segment de cycloïde B'BADB' et le triligne mixte (ou secteur) B'BADB', et le triangle rectiligne BDI est égal au triangle rectiligne B'BD, puisque ces deux triangles ont même hauteur IK et même base BD ;

donc :
aire (secteur de cycloïde BADIB) = *aire* (segment de cycloïde BADB) + *aire* (triangle rectiligne BDI) = *aire* (segment de cycloïde B'BADB') – *aire* (secteur de cycloïde B'BDB') + *aire* (triangle rectiligne B'BD) = *aire* (segment de cycloïde B'BADB') – *aire* (segment de cycloïde B'BB') – *aire* (triangle rectiligne B'BD) + *aire* (triangle rectiligne B'BD) = *aire* (segment de cycloïde B'BADB') – *aire* (segment de cycloïde B'BB'), qui est la différence de deux segments quarrables, du type des figures 1 & 2. Donc le secteur de cycloïde BADIB est quarrable et son aire vaut : *aire* [*tri.* (KMF)] + *aire* [*tri.* (IL'F)] – *aire* [*tri.* (IL'F)] + *aire* [*tri.* (KMF) = 2 . *aire* [*tri.* (KMF) ou *aire* (triangle rectiligne LFM) puisque KMF et KLF sont symétriques par rapport à l'axe.

[Figure 3, complétée.]



On notera enfin que Jean Bernoulli ne livre pas son analyse, ce qu'il appelle "*une résolution par équations*", et ne donne que des raisons géométriques à son théorème et à ses corollaires, ce qu'il appelle une "*démonstration synthétique*" ; il promet, certes, une *Méthode analytique* ; ce faisant il fait usage des qualificatifs *synthétique* et *analytique* au sens ancien des mots *Synthèse* et *Analyse*, qui désignent l'un, quelque chose comme la preuve *a posteriori*, et l'autre quelque chose comme les voies de l'invention, l'heuristique de la découverte.

Dans la dernière partie du texte, où il ne livre ni analyse, ni synthèse, se situe un autre point de départ du mémoire de Jacques Bernoulli, comme nous le verrons. Jean Bernoulli indique alors que : "*Il ne sera pas hors de propos de dire, que j'ai aussi trouvé une méthode toute singulière de déterminer d'autres espaces cycloïdiques quarrables par l'Algebre. Par exemple, je* [*p*]*eux tirer deux ordonnées* K D, I B *(* fig. *2.) qui comprennent un espace* K D C B I *quarrable* [puisque composé de deux espaces quarrables : le trapèze KDBI et le segment de type 2, DCBD, *cf.* la note du texte]*, démontrant en même tems, que cela se peut pratiquer d'une infinité de manieres, en sorte que l'espace* K D C B I *sera toûjours different selon la diversité des racines des équations algébraïques tantôt plus tantôt moins élevées*". Et, dans la version latine de 1699, Jean Bernoulli développe quelques considérations autour d'une figure IV, mettant ainsi en évidence d'autres zones quarrables de la cycloïde, et dans lesquelles il esquisse dans un premier temps le développement en série de HK (x) en fonction de HA (a), puis montre que si x est racine de l'équation du troisième degré $12x^3 - 10aax - a^3 = 0$, la zone IKDB, construite de façon analogue à celle de la figure 2, est quarrable.

* * * * *

Il nous restera à donner et à commenter le texte de Jacques Bernoulli lui-même[8], que nous avons choisi ensuite pour représenter la dernière étape du processus d'invention du développement en série de ce que nous appelons aujourd'hui la "fonction sinus" ; cette étude nous permettra de comprendre les voies empruntées par l'auteur, voies caractéristiques de l'heuristique de cette époque, comme nous le verrons dans la troisième partie de cet épisode.

À suivre : La sinusoïde n'est pas celle que vous croyez
(III-C) Le mémoire de Jacques Bernoulli, 1702 (1704) et la bibliographie de la partie III

Jean-Pierre Le Goff, IREM de B.-N., Caen, décembre 2009.

[8] *Cf.* [BERNOULLI, Jacques, 1702].