

La sinusoïde n'est pas celle que vous croyez (III-A)

Troisième partie : le calcul des ordonnées de la "sinusoïde" selon Jacques Bernoulli

A) Ce qu'en dit l'*Histoire de l'Académie Royale des Sciences* et ce qu'il faut entendre par là

Il y a loin de la géométrie du triangle et de la trigonométrie¹ aux fonctions trigonométriques que nous utilisons aujourd'hui. En particulier, au delà de l'usage des triangles rectangles pour mesurer et comparer les angles, les anciens géomètres ont élaboré au fil des siècles des méthodes pour calculer les valeurs des différentes lignes trigonométriques qu'ils ont définies dans un cercle de rayon quelconque, en rapportant ces valeurs à ce rayon. Cela les a conduit à construire des tables trigonométriques, qui seront données en valeurs entières dans l'écriture décimale, héritée des mondes hindou et arabo-musulman et introduite en occident chrétien vers le XII^{ème} siècle, dès lors que cette écriture s'est avérée fort commode pour des grandeurs linéaires rapportées à une grandeur linéaire : l'usage de l'écriture décimale des rationnels décimaux puis des rationnels et des réels quelconques avec des développements plus ou moins longs donnant une approximation sous un seuil donné, débute essentiellement avec Simon Stevin de Bruges (1548-1620) : les principes de la décimalisation des parties fractionnaires d'une grandeur non entière sont exposés dans

Die Thiende (La Disme) parue en 1585 ; auparavant, et même bien après que l'écriture des nombres sous forme décimale 'à virgule' se généralisât, la précision des tables trigonométriques dépendait de la taille du rayon ; le sinus de 30 degrés, par exemple, est de 50 pour un rayon de 100, de 500 000 pour un rayon d'un million, etc., ce qui donne une valeur entière avec une précision de deux ou de six chiffres – nous dirions aujourd'hui 'après la virgule' – pour les exemples choisis. Pour autant, le fait de tabuler les sinus 'droit' ou 'verse' (*i. e.* : $1 - \cos x$), ou les cosinus, la sécante ou la cosécante (inverse algébrique du sinus), la tangente ou la cotangente, – voire même de leurs logarithmes, lorsque ce nouvel outil fut élaboré à la charnière des XVI^{ème} et XVII^{ème} siècles par John Napier (1550-1617) et Henry Briggs (1561-1630), puis diffusé par Adriaan Vlacq (1600-1667) –, ne signifie pas que le concept de sinus soit alors défini de façon fonctionnelle. Les lignes trigonométriques restent de nature géométrique et valent essentiellement pour leur utilité pratique, et l'invention de l'algèbre littérale, par François Viète (1540-1603) puis René Descartes (1596-1650) comme moyen d'analyse et de résolution des problèmes de géométries portant sur les courbes "*algebriques*" ou "*mechaniques*" pour reprendre la distinction cartésienne, conduira dans un premier temps à 'accélérer' les calculs pour établir les tables, grâce, par exemple, aux formules d'addition établies par Viète dans son *Canon mathematicus seu ad triangula* (1579, permettant la 'résolution des triangles' en usant systématiquement des six lignes trigonométriques et de leurs relations, avec en particulier le calcul de $\sin(nx)$ en fonction des puissances $\sin x$ et de $\cos x$). Ce type de considérations donnera lieu, en France, à de nouvelles recherches de nature plus algébrique², par Thomas Fantet de Lagny (1660-1734) par exemple, que l'on retrouvera cité à plusieurs reprises sur ces questions, ainsi que sur leurs prolongements à la construction des logarithmes, par le signataire de l'*Histoire de l'Académie Royale des Sciences*. . . – à savoir Fontenelle, secrétaire de l'Académie et éditeur des *Mémoires*. . . –, ou en marge de ces mêmes *Mémoires*, et qui y signera lui-même des mémoires et plusieurs ouvrages roulant sur des questions connexes (*cf. infra*).

De même, nous l'avons vu dans les articles précédents, le fait qu'une courbe qui s'avère être – ici et maintenant – 'représentative' de la 'fonction sinus', soit exhibée et tracée pour les besoins de la résolution d'autres problèmes, ne signifie pas que la relation fonctionnelle entre la mesure variable d'un angle ou d'un arc et la valeur de son sinus (défini comme portion d'une puissance de 10 ou même comme fraction de l'unité) soit clairement comprise comme un phénomène physique digne d'étude pour lui-même, au même titre que ceux qui seront travaillés du fait de la mathématisation de la dite physique : notre "sinusoïde" n'est alors que la "*compagne de la roulette*" pour Roberval ou la 'développée' d'une ellipse tracée sur un cylindre droit pour Pitot ; et ces courbes jouent un rôle d'outil analogue à celui des lemmes, pour permettre la résolution d'autres problèmes et non un rôle central, en tant qu'objet d'étude. Nous verrons dans la cinquième partie de ce feuillet que le mot lui-même de "sinusoïde" apparaît pour la première fois chez l'ingénieur Bêlidor, lorsqu'il s'agira de construire physiquement une telle courbe dans une situation où elle permettra de résoudre directement un problème mécanique.

Dans le même ordre d'idées, dès le XVII^{ème} siècle, Blaise Pascal (1623-1662) proposera des 'intégrations avant la lettre' qui touchent à des 'sommes de puissances de sinus', dans ses *Traité des Sinus du Quart de Cercle*, paru³ en 1659. En voici un exemple, avec la *Proposition I* :

¹ Le terme de "*Trigonometria*" (*i. e.* : mesure des triangles) apparaît pour la première fois dans le titre d'un ouvrage de Pitiscus, paru en 1595.

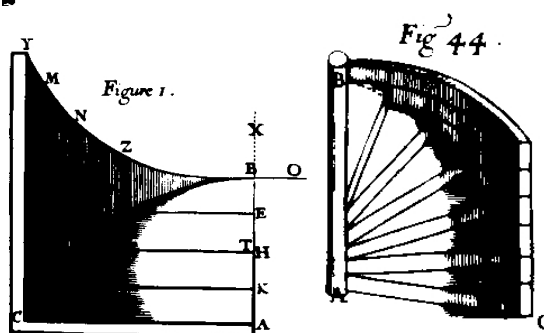
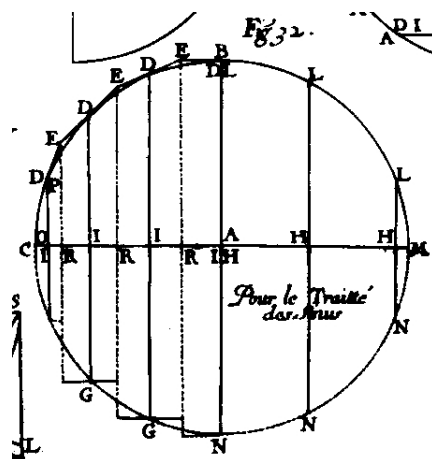
² Cf. [LAGNY, 1703 à 1729]. Les références entre crochets des notes renvoient à une bibliographie explicite et spécifique de ce III^{ème} épisode à la fin de sa seconde partie, dans le prochain numéro du *Miroir*.

³ Cf. [PASCAL, 1559].

Prop. I. La somme des sinus d'un arc quelconque du quart de cercle est égale à la portion de la base comprise entre les sinus extrêmes, multipliée par le rayon.

[Autrement dit, figure 32 :] Je dis que la somme des sinus DI (multipliés chacun par un des arcs égaux DD, comme cela s'entend de soi-même) est égale à la droite AO multipliée par le rayon AB. [...]

AVERTISSEMENT. Quand j'ai dit que toutes les distances ensemble RR sont égales à AO, et de même que chaque touchante EE est égale à chacun des petits arcs DD, on n'a pas dû en être surpris, puisqu'on sait assez qu'encore que cette égalité ne soit pas véritable quand la multitude des sinus est finie, néanmoins l'égalité est véritable quand la multitude est indéfinie ; parce qu'alors la somme de toutes les touchantes égales entre elles, EE, ne diffère de l'arc entier BP, ou de la somme de tous les arcs égaux DD, que d'une quantité moindre qu'aucune donnée : non plus que la somme des RR de l'entière AO.



Si l'on exprime en termes algébriques l'énoncé de cette proposition I, par exemple, on peut l'entendre comme l'intégrale de la 'fonction sinus' ⁴, à ceci près qu'il s'agit d'une intégrale en quelque sorte curviligne, qui somme les lignes 'sinus' le long d'un arc de cercle, et ces lignes sont érigées perpendiculairement au plan du cercle, dans une portion de cylindre élevé sur l'arc en question. On retrouve ici la courbe sinusoïdale dans le cylindre, comme chez Pitot, mais nullement dans un plan comme représentation d'une relation fonctionnelle liant expressément x et $\sin x$. On comprend ce parti-pris en lisant l'Avvertissement qui suit d'une part et selon une conception dont on trouve l'usage sur deux des figures 1 et 44 des planches I et III illustrant d'autres propositions des *Lettres d'Amos Detonville* : une fois encore, la mathématique est intimement liée à des préoccupations d'ordre pratique, qui ne sont pas seulement de l'ordre de la justification *a posteriori*, mais relèvent d'une volonté *a minima* pédagogique (faire sens) et plus probablement d'une demande technique effective en amont de la spéculation (ici l'architecture, semble-t-il, qui nécessite la mesure des aires et des volumes pour l'estimation des besoins en matériaux) ; on objectera sans doute la grande diversité des propositions des *Traité*s de Pascal : mais celle-ci reflète peut-être la volonté généralisatrice du géomètre, qui envisage d'autres situations, non nécessairement tirées de la réalité qui a provoqué les premières spéculations.

Mais alors qu'en est-il de l'aspect fonctionnel – au sens moderne – de ce que nous appelons aujourd'hui une fonction trigonométrique ? Un aspect essentiel de la question passe par le calcul des valeurs d'une fonction sous la forme de développements polynomiaux limités ou illimités. C'est un aspect du nouveau calcul, que l'on appellera 'infinitésimal' et que vont développer Newton et Leibniz à la fin du XVII^e siècle, puis leurs héritiers, les frères Bernoulli, Jacques (ou Jacob, *alias* Jacques I^{er}, 1654-1705) et Jean (ou Johann, *alias* Jean I^{er}, 1667-1748), le Marquis Guillaume de l'Hospital (1661-1704) – dont l'*Analyse des Infiniments Petits*⁵ fut "éclaircie" par le caennais Pierre Varignon⁶ (1654-1722) et complétée du calcul intégral par Louis-Antoine de Bougainville⁷ (1729-1811) –, ou encore Jakob Hermann (1678-1733) et bien évidemment Leonhard Paul Euler (1707-1783), et de nombreux autres auteurs, au nombre desquels il faut citer Maria-Gaëtana Agnesi (1718-1799), dont le traité de calcul (1748) eut un grand succès comme manuel d'enseignement de cette 'géométrie supérieure' que devint très

⁴ Considérant le cercle de la figure 32 dans les axes [AC] pour Ox et [AB] pour Oy, et supposant que AC = 1, Pascal se propose en effet de calculer la somme des sinus (DI) des angles IAD de mesure z , comme les arcs CD, lorsque z varie de z_0 mesure de OAD lorsque D se projette en O, jusqu'à $\pi/2$, mesure de OAB lorsque D vient en B. On a donc à calculer l'intégrale $\int_{z_0}^{\pi/2} \sin z \, dz = [-\cos \pi/2 + \cos z_0] = \cos z_0$, qui est bien le produit du rayon AB = 1 par la ligne AO, cosinus de l'angle de mesure z_0 .

⁵ Cf. [L'HOSPITAL, Guillaume, François, Antoine de Sainte-Mesme (Marquis de ?), 1696, 1716, 1768].

⁶ Cf. [VARIGNON, Pierre, 1725].

⁷ Cf. [BOUGAINVILLE, 1754-6].

vite le calcul infinitésimal dans le monde savant européen au XVII^e siècle⁸.

Pour ce qui nous occupe ici, on notera cependant qu'en 1802, Montucla, dans son *Histoire des Mathématiques*⁹, traite de la trigonométrie antique (jusqu'à Ptolémée) dans le tome 1 puis des innovations de Rheticus et de Regiomontanus, des arabes (au tome 1) et de Néper (ou Napier, au tome 2), et encore parle-t-il plutôt de trigonométrie sphérique, essentielle en astronomie : par exemple, rappelons que le théorème de Ménélaüs est originellement sphérique et 'devient' plan chez Ptolémée. Mais ensuite, Montucla attribue au XVIII^e siècle l'essentiel des connaissances nouvelles concernant les lignes trigonométriques : *Je ne vois pas que personne, avant les premières années de ce siècle [le XVIII^e], se soit avisé de rechercher des formules propres à exprimer les sinus ou co-sinus, tangentes ou co-tangentes des sommes ou différences d'arcs de cercle, de leurs puissances, &c. Il étoit cependant bien naturel, ce semble, et l'occasion a dû s'en présenter souvent, de chercher à connoître quel étoit le sinus ou le co-sinus, la tangente ou la co-tangente d'un arc qui seroit la somme ou la différence de deux autres dont on connoissoit les sinus et co-sinus, ou les tangentes et co-tangentes. Les premiers théorèmes sur ce sujet paroissent être l'ouvrage de Frédéric-Christian Mayer*¹⁰, l'un des premiers membres de l'académie de Pétersbourg. On a de lui, dans les Anciens Mémoires de cette Académie, pour l'année 1727, une trigonométrie analytique, toute fondée sur ces théorèmes ; et il dresse en cet endroit le formulaire classique des relations trigonométriques (le rayon étant supposé = 1). C'est dire si l'historien – dont on connaît à la fois les mérites, en particulier comme lecteur attentif des œuvres du passé, mais aussi les lacunes – avait commis quelques impasses sur la question, comme on vient de le voir pour la fin du XVI^e et le XVII^e siècle, et comme nous l'allons montrer, s'agissant du développement en série des lignes trigonométriques.

* * * * *

Une rapide chronologie des faits concernant le calcul des sinus par développement en série s'impose en effet, pour comprendre le contexte des éléments 'd'histoire' livrés dans les volumes de l'*Histoire de l'Académie Royale des Sciences pour l[es] année[s] 1701 & 1703*, que nous allons citer dans cette première partie du 3^e épisode de notre feuilleton, et qui servent d'introduction au mémoire de Jacques Bernoulli.

Si l'on considère que la construction point par point d'une 'courbe intégrale solution d'un problème différentiel' est une amorce de la question, il faut nommer Descartes, qui le premier, montre que sa méthode algébrique de détermination des tangentes ne peut pas s'appliquer à un problème qui conduirait à une équation où une tangente, voire une normale, interviendrait dans les données : c'est ce que fait malencontreusement Florimond de Beaune (1601-1652), qui, cherchant à résoudre un problème d'optique en 1638, se retrouve sans en avoir pris conscience, devant une équation que nous appelons "différentielle" aujourd'hui, et qui soulevait ce que ses contemporains nommeront le "problème inverse des tangentes", puisqu'il nécessite la construction d'une courbe intégrale. De Beaune s'en ouvre à Descartes dans une lettre et Descartes résoudra le problème par la construction d'une logarithmique point par point, dont il calcule les ordonnées par développement numérique : nous sommes alors en 1639.

Les premiers développements en série 'algébriques' concernent essentiellement les fonctions rationnelles et/ou radicales, et se trouvent, par exemple, chez John Wallis (1616-1703), Nicolas Mercator (ca. 1620-1687), Lord Brouncker (1620-1684) et Isaac Newton ; ils peuvent conduire, par intégration terme à terme, aux développements de certaines fonctions transcendentes :

– le premier, fêru de géométrie et d'algèbre – comme son compatriote, Thomas Harriot¹¹ (1560-1621), qui a fortement influencé John Wallis, et après lui toute la tradition algébrique anglaise –, adopte les notations cartésiennes et développe ensuite l'idée que les expressions polynômiales algébriques peuvent être conçues comme prolongeables à l'infini et que la *nouvelle analyse* de Descartes (qui nomme ainsi l'algèbre), permet d'étendre l'arithmétique et ses opérations *ad infinitum*. En 1655, paraît son *Arithmétique des infinis* (*Arithmetica Infinitorum*, 1655) ; on y trouve de nombreux résultats, dont le calcul de ce que nous appelons aujourd'hui les "intégrales de Wallis", donnant les aires sous les arches des fonctions périodiques obtenues comme puissances entières des lignes trigonométriques ordinaires, $\sin^p x$ ou $\cos^q x$. Ses spéculations, et sa correspondance avec Lord Brouncker (cf. *infra*) le conduiront aussi à l'inégalité remarquable :

$$\frac{3 \times 3 \times 5 \times 5 \times \dots \times 13 \times 13}{2 \times 4 \times 4 \times 6 \times \dots \times 12 \times 14} \sqrt{1 \frac{1}{14}} < \frac{4}{\pi} < \frac{3 \times 3 \times 5 \times 5 \times \dots \times 13 \times 13}{2 \times 4 \times 4 \times 6 \times \dots \times 12 \times 14} \sqrt{1 \frac{1}{13}}$$

cet encadrement est en revanche peu utile, étant donné la lenteur de convergence du processus, en substance :

$$\frac{4}{\pi} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \times 3 \times 5 \times 5 \times \dots \times (2n-1) \times (2n+1) \times (2n+1)}{2 \times 4 \times 4 \times 6 \times \dots \times (2n) \times (2n) \times (2n+2)}$$

⁸ Cf. [AGNESI, 1748 & 1775].

⁹ Cf. [MONTUCLA, 1799-1802].

¹⁰ Frédéric-Christian (ou Christoph) Mayer (1697-1729) semble n'être connu des historiens que par ses travaux en astronomie et quelques articles dans les *Commentarii*... de l'académie de Saint-Petersbourg. Cf. [MAYER, 1727 & 1728].

¹¹ Élève de John Dee et lecteur de François Viète, il a laissé des notes rassemblées et éditées *post mortem* sous le titre : *Artis analyticae Praxis ad Aequationes algebraicas*... Cf. [HARRIOT, 1631].

– les deux suivants réalisent la *Quadrature de l'Hyperbole* par le développement de la logarithmique obtenu par intégration terme à terme d'une fonction hyperbolique de type $(1 \pm x)^{-1}$. Mercator (de son nom Nicolaus Kauffmann, en latin : *Mercator*) est un mathématicien et astronome allemand, né à Cismar (Holstein) vers 1620, mort à Paris en février 1687 ; il a publié de nombreux mémoires d'astronomie et de trigonométrie sphérique, en particulier dans les *Philosophical Transactions*, de 1660 à 1670 ; sa *Logarithmo-technia* paraît en août 1667, et on y trouve le développement suivant : $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \pm \frac{x^n}{n}$, qui semble avoir frappé Newton, et dont Wallis tentera d'attribuer la paternité par antériorité à Lord Brouncker. Ce dernier, lord vicomte de Castle-Lyons, homme d'État et mathématicien, est né vers 1620 à Castle-Lyons (Irlande), et mort à Londres le 5 avril 1684 ; il prit une part active à la restauration de Charles II, fut nommé chancelier et lord commissaire de la Tour ; c'est l'un des fondateurs de la *Royal Society*, dont il fut le premier président en 1662. En avril 1668, paraît un mémoire dans les *Philosophical Transactions*, donnant la quadrature de l'hyperbole par une série, résultat auquel il serait arrivé dès avant 1657, d'après Wallis ; on y trouve un second mémoire en 1673 sur le tautochronisme de la cycloïde ; dans son *Commercium epistolicum* (imprimé en 1658), Wallis a inséré plusieurs lettres de Brouncker, relatives à la solution de problèmes proposés par Fermat, notamment à celle en nombres entiers de l'équation : $ax^2 + 1 = y^2$; enfin, et surtout, Brouncker est en quelque sorte l'inventeur des fractions continues sous leur forme moderne, en résolvant une question soulevée par Wallis dans son *Arithmetica Infinitorum* : Wallis y proposait d'interpoler dans la série $1, \frac{2}{3}, \frac{8}{15}, \frac{48}{105}, \dots$, un terme intermédiaire entre 1 et $\frac{2}{3}$; ce terme devant donner la valeur de $\frac{\pi}{4}$. Brouncker trouva

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{9}{2 + \frac{49}{2 + \frac{81}{2 + \text{etc.}}}}}}$$

l'expression qui conduit au calcul d'approximations successives de π avec

une efficacité toute relative. Comme l'indique Paul Tannery dans la notice qu'il rédigea sur Brouncker, c'est bien plutôt l'algorithme qu'il emploie à cette occasion qui "*suscita un grand intérêt et fut à l'origine de nombreuses découvertes*".

– quant à Isaac Newton¹², il semble qu'il soit parvenu à de nombreux résultats dès 1664, si l'on en croit certains passages de ses lettres à Henry Oldenburg, en date des 13 juin et 24 octobre 1676, dont le contenu roule sur ces questions et conduiront, pour une bonne part aux contenus de son *Tractatus de Quadratura Curvarum* (1704) et de sa *Méthode des Fluxions et des Suites infinies* dont la traduction française par Buffon paraîtra en 1740, et à certaines spéculations d'analyse développées dans ses *Principia*... (*Principes Mathématiques de la Philosophie Naturelle*, 1687) traduits en français par la Marquise du Châtelet en 1759. Il est clair que dès 1664-5 d'après Newton, et au plus tard en 1676, d'après les lettres à Oldenburg, que Newton était en possession de sa formule générale, dite du binôme, pour le développement d'expressions du type $(1 \pm x)^{-n}$, avec n rationnel, et de méthodes en calcul en série, du type de celle de Mercator, dont il manifeste l'efficacité pour l'établissement de tables de logarithmes avec un nombre de décimales déterminé (il calcule avec 13 décimales dans la lettre d'octobre) et par le calcul (*au passage*, dit-il) d'une approximation expéditive de π , en calculant l'aire d'un demi-cercle de rayon l'unité, centré sur l'axe des abscisses et passant par l'origine ; ce sont ces résultats que l'on trouvera exposés plus en détail dans sa *Méthode des Fluxions*.

C'est cependant plutôt du côté de Leibniz qu'il faut chercher une influence sur les Bernoulli, dans la mesure où ses méthodes ont prévalu assez vite sur le continent, celles de Newton n'étant publiées véritablement que dans les *Principia* (1687) – et encore très partiellement, car ce n'est pas l'objet principal de l'ouvrage –, puis à la suite d'*Opticks* (1704) et enfin par les éditions, par William Jones en 1711, de ses méthodes dans l'*Analysis per Quantitatum Series, Fluxiones, ac Differentias*.

Gottlob Wilhelm Leibniz publiera de nombreux articles dans les *Acta Eruditorum* de Leipzig, dont il est l'éditeur scientifique. Ses premières spéculations sur le calcul de séries numériques ou algébriques, semblent dater de son premier séjour parisien (à partir de mars 1672 et il a 26 ans), mais ne virent le jour qu'avec leur publication dans les *Acta Eruditorum*, à partir de 1682 ; son premier travail original sur la quadrature du cercle (1673-5), objet de sa fierté, est contemporain de la découverte qu'il fait de ses propres lacunes, qu'il comble en lisant Descartes, Pascal, Grégoire de Saint-Vincent ou de Sluse, et en rencontrant Huyghens, guide avisé dans ses lectures ; il n'avait eu à connaître, dans sa formation que quelques rudiments d'arithmétique, quelque teinture d'Euclide qu'il a seulement survolé, et une idée des indivisibles de Cavalieri par ce qu'en disent Thomas Hobbes et Vincent Léotaud¹³ (1596-1672), enseignant de mathématiques à Dole et à Lyon ; il s'agit d'une "*Quadrature arithmétique du cercle au*

¹² Cf. [NEWTON, 1674-1684 à 1759].

¹³ Cf. [LÉOTAUD, 1654, 1660 & 1663].

moyen d'une série infinie", qui procède à la fois de l'induction et de ce qu'il indique comme un héritage de Pascal, avec la généralisation à toute courbe du triangle 'infinitésimal' que ce dernier utilisa dans son *Traité des Sinus* ; mais ces recherches resteront à l'état de manuscrit qu'il n'eut pas le temps de publier à la fin de son séjour parisien (1673)¹⁴ : "*De Quadratura arithmetica Circuli, Ellipseos et Hyperbolæ, cujus corollarium est Trigonometria sine Tabulis*". Ces réflexions sur la nature du nombre π – qui le conduiront à l'emploi du mot 'transcendance' – sont provoquées par la polémique autour de la quadrature 'prétendument exacte' du cercle proposée par Grégoire de Saint-Vincent dans son monumental *Opus geometricum Quadraturæ Circuli* (1647) puis autour de la 'prétendue' incompatibilité entre approximation par une série numérique et accès à une valeur exacte par une telle expression, défendue par James Gregory dans sa *Vera Circuli et Hyperbola Quadratura* (1668), débats dont l'un des protagonistes, à savoir Huyghens encore, lui fournit les éléments et lui en conseille la lecture. Les premières traces imprimées qui ressortissent à ces réflexions, se trouvent dans les *Acta Eruditorum* et datent de février 1682 (9 ans plus tard, donc), pp. 41-46 : "*De vera Proportionem Circuli ad Quadratum circumscriptum in Numeris rationalibus expressa*"; puis, après plusieurs articles sur la question de la quadrature des secteurs circulaires et autres segments de courbes – par exemple : "*De Dimensionibus Figurarum inveniendis*" dans les *Actes* de 1684 –, Leibniz publie, en avril 1691, pp. 178-182 : "*Quadratura arithmetica communis Sectionum conicarum quæ Centrum habent, indeque ducta Trigonometria Canonica, ad quantamcunque in Numeris exactis Exactitudinem a Tabularum necessitate liberata, cum Usu speciali ad Lineam rhomborum nauticam, aptatumque illi Planisphaerium*". Entre temps, il jette les bases du calcul infinitésimal (qu'il nomma d'abord différentiel et sommatoire, la qualificatif d'intégral qu'il adoptera étant dû à Jean Bernoulli) : c'est l'objet essentiel de sa "*Nova Methodus pro Maximis et Minimis, itemque Tangentibus, quæ nec irrationales Quantitates moratur et singulare pro illis Calculi genus*" parue en octobre 1684 dans les *Actes* de Leipzig, pp. 467-473 ; et il écrit encore sur l'angle de contact et les lignes isochrones, etc.

C'est alors que paraissent, dans les *Acta Eruditorum* et dans les *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences* les contributions des frères Bernoulli que nous allons regarder plus en détail, et successivement :

- un article de Jean Bernoulli, dans les *Acta Eruditorum*, en 1699 : "*Ad novas Spatorum Cycloidalium Quadraturas*", c'est-à-dire : "*À propos de nouvelles quadratures d'espaces cycloïdaux*", soit segments de la courbe (compris entre une partie d'arche de la courbe et sa corde), soit "secteurs" (compris entre la courbe et deux rayons issus du milieu de sa base), soit tranches (comprises entre la courbe, son axe et deux ordonnées) ;

- cet article fera l'objet d'une seconde publication en français, donnée pour être de 1699 et imprimé à Paris en 1702, dans les *Mémoires de l'Académie Royale* : "*Quadrature d'une Infinité de Segmens, de Secteurs, & d'autres Espaces de la Roulette ou de la Cycloïde vulgaire. Par M. Bernoulli, Professeur des Mathématiques à Groningue*"; Fontenelle, auteur de l'*Histoire*... pour la même année 1699, l'introduit par un article intitulé : "*Quadrature d'une infinité de Segmens et de Secteurs de la Cycloïde*";

- un second article, daté d'avril 1701, complète les précédents dans les *Acta Eruditorum* : "*Joh. Bernoulli Multisection Anguli vel arcus, duplici Equatione universali exhibita, inserviens generali determinationi omnium Zonarum quadrabilium cycloidis*", c'est-à-dire : "*La multisection d'un angle ou d'un arc, mise en lumière par Jean Bernoulli à l'aide d'une équation de duplication universelle*..." ;

puis, la démonstration et l'heuristique de la démarche et de la formule proposée pour la section indéterminée des angles étant éludées par Jean Bernoulli, paraissent des mémoires de Jakob Hermann et de Jacques Bernoulli, qui proposent respectivement, le fondement de la formule, et une heuristique doublée d'une démonstration par induction du résultat :

- dans les *Acta Eruditorum* d'août 1703 : "*J. Hermannii Demonstratio Geminæ Formula a Celeberrimo Dn. Joh. Bernoulli, in Actis Erudit. Mens. Apr. A. 1701, pro multisectione anguli vel arcus circularis, sine demonstratione exhibita*", c'est-à-dire : "*Démonstration de l'origine de la formule donnée sans démonstration par Mr. Jean Bernoulli dans les Acta Eruditorum du mois d'avril de l'année 1701, pour la multisection d'un angle ou d'un arc de cercle*";

- dans les *Mémoires* pour l'année 1702, parus en 1704 : "*Section indéfinie des Arcs circulaires En telle raison qu'on voudra, avec la manière d'en déduire les Sinus, &c. Par M. Bernoulli, Professeur à Bâle, Extraite d'une de ses Lettres écrite de Bâle le 13. Juillet 1702*". Ce mémoire est introduit par Fontenelle par un article de l'*Histoire* pour la même année, dans la section "*Geometrie*", intitulé : "*Sur la Section indéfinie des Arcs circulaires, Et la manière de déduire les Sinus des Arcs donnés*".

* * * * *

Voici d'abord comment est présenté le mémoire de Jacques Bernoulli – que nous étudierons dans une deuxième partie de cet épisode – dans l'*Histoire de l'Académie Royale des Sciences*¹⁵, pour l'année 1702 :

¹⁴ Cf. l'édition qu'en donna Gerhardt : G. W. Leibniz *Mathematische Schriften herausgegeben von C. I. Gerhardt*. Band V. *Die mathematischen Abhandlungen*. Halle, 1858, pp. 81-132. Rééd. Hildesheim : Olms, 1971.

¹⁵ Cf. [FONTENELLE ? 1702 (1704)].

SUR LA SECTION INDEFINIE

DES ARCS CIRCULAIRES,

Et la maniere de déduire les Sinus des Arcs donnés.

[En marge gauche :] V. les M[émoires]. / pag. 281.

LA seule vûe d'un Cercle suffiroit pour faire comprendre que si l'on en veut couper un Arc quelconque en deux parties égales, il n'y a qu'à couper sa Corde en deux par une perpendiculaire, que ce sera encore la même chose si l'on veut couper en deux un des deux nouveaux Arcs égaux que l'on vient de trouver, moyennant quoi le premier Arc est coupé en quatre, & le sera en 8, en 16, &c. enfin selon tous les termes d'une progression double, tant que l'on continuëra une semblable operation.

Mais s'il falloit couper un Arc en 3, en 5, ou même en quelque nombre pair qui ne fût pas de la progression double, la même Méthode ne subsisteroit plus, parce que la Section de l'Arc n'est pareille à celle de la corde que dans le seul cas, où la corde est coupée en deux. Ainsi l'on ne sçait communément couper un Arc circulaire ou un Angle qu'en deux parties égales, & delà vient le fameux Problème de la Trisection de l'Angle, dont la difficulté a été sentie par les anciens Geometres. Les Modernes le proposent d'une maniere plus generale, & l'appellent la Section in- // p. 59 // définie des Arcs circulaires, c'est à dire, la Méthode de les couper en tel nombre de parties égales qu'on voudra. C'est le Problème que M. Bernoulli de Groningue¹⁶ proposa dans les Actes de Leipsik de 1700, & dont il donna deux solutions dans les Actes de 1701. M. Bernoulli Professeur en Mathematique à Bâle & Academicien Associé¹⁷, a trouvé ce Problème assés difficile pour en entreprendre aussi la Solution qu'il a envoyée à l'Academie. Il établit d'abord une maniere generale pour trouver une corde qui sôûtienne un Arc double de celui que sôûtient une autre corde quelconque donnée, car la proportion des Arcs n'est pas celle des cordes, & un Arc étant double d'un autre, sa corde est moins que double de l'autre corde. De plus cette raison d'une corde à celle qui sôûtient un Arc la moitié moins grand, n'est pas fixe ; elle change toûjours à mesure que les Arcs doublent, & les cordes qui sôûtiennent des Arcs deux fois plus grands, deviennent toûjours plus petites à proportion.

L'expression generale des Cordes qui sôûtiennent des Arcs toûjours doubles d'un premier Arc quelconque étant trouvée, ce sont differentes équations où une même grandeur monte à differens degrés, mais on n'a que les cordes dont les Arcs seroient 1, 2, 4, 8, 16, &c. & pour avoir les cordes qui sôûtientroient les Arcs d'entre-deux, c'est à dire, les Arcs, 3, 5, 6, 7, 9, &c. M. Bernoulli observe que dans les équations qui expriment les cordes des Arcs 1, 2, 4, 8, &c. il entre des nombres connus qui sont des termes d'une certaine progression, pris justement à la premiere, seconde, quatrième, huitième place ; delà il conclut que dans cette même progression des termes pris à la troisième, cinquième, sixième place, &c. seroient précisément les nombres qui entreroient dans les équations par lesquelles on exprimeroit les cordes des Arcs 3, 5, &c. Par ce moyen les vuides que laissoient entr'elles les cordes de la progression double se trouvent remplis, & l'on a toutes les cordes selon la suite naturelle des nombres 1, 2, 3, &c. c'est à dire aussi les Arcs. // p. 60 //

Nous laissons au Memoire de M. Bernoulli la maniere fine & subtile dont il a apperçû la progression des nombres connus qui entroient dans les expressions des cordes des Arcs doubles ; il nous suffit d'avoir fait voir en gros quel chemin il a suivi, & comment il a profité d'une foible lumiere qu'il a entrevûe dans une si grande obscurité. Cette progression qui l'a conduit, étoit assés cachée, & ne se fût pas offerte à des yeux moins clair-voyans.

M. Bernoulli ayant trouvé les Arcs par le moyen des Cordes, renverse le Problème, & cherche ensuite les Cordes, ou ce qui revient au même, les Sinus par le moyen des Arcs dont la valeur seroit donnée. Si l'on avoit en termes finis & proportionnés à la capacité de l'Esprit humain le rapport d'un Arc à sa Corde, on auroit celui du demi-cercle qui n'est qu'un Arc le plus grand de tous au diametre qui est sa corde, & par-là viendrait aussi-tôt la Quadrature du Cercle inutilement cherchée depuis tant de siècles. Mais la valeur d'un Arc étant donnée, celle de sa corde ne se peut exprimer que par une suite infinie de termes, qui ne permet pas que l'on arrive au dernier, ni par conséquent que l'on trouve la somme qu'ils font tous ensemble, ce qui seroit necessaire. Cette suite ou progression a cela de particulier, que tous ses termes ont alternativement les signes de plus & de moins. Ils sont produits par une operation où l'on pose d'abord plus qu'il ne faut, ce qui oblige aussi-tôt à un retranchement, mais ce retranchement est trop grand, il faut donc remettre, & on remet trop, & ainsi de suite à l'infini, sans

¹⁶ Il s'agit de Jean (1^{er}) Bernoulli, dont on trouvera les articles mentionnés ici, dans la bibliographie.

¹⁷ Il s'agit de Jacques (1^{er}) Bernoulli, dont on trouvera les articles mentionnés ici dans la bibliographie.

que l'on puisse jamais ôter ou remettre ce qu'il faut précisément ; espece de Tonneau des Danaïdes pour les Geometres, si l'on peut en cette matiere se servir de comparaisons poëtiques.

Quoiqu'on ne puisse voir le bout de cette progression, il est agréable d'en voir la naissance, & il n'appartient qu'à une subtile Geometrie de la découvrir, & de la déterminer. C'est ce qu'ont fait Messieurs Bernoulli, après quoi l'on n'a plus rien à desirer legittimement sur les rapports des Arcs circulaires & des Cordes.

Commentaire

Première remarque : les "*anciens Geometres*" mentionnés au début de l'article sont les géomètres Grecs, pour lesquels le problème de la trisection de l'angle était réputé insoluble, entendant par là que la construction d'une "trisectrice" s'avère impossible à la règle et au compas – ce qu'ils traduisaient dans les termes suivants : "ce n'est pas un problème plan" – ; ils qualifiaient ce type de problème de "solide", du fait qu'il requerrait l'usage de courbes obtenues dans un solide affecté à cet usage, en l'occurrence le cône, dont les sections planes, bien que non constructibles à la règle et au compas, pouvaient être définies point par point et permettaient l'insertion de deux "moyennes proportionnelles" entre deux grandeurs données (comme le sont les racines cubiques de la mesure d'une grandeur a et de son carré, moyennes géométriques entre la grandeur unité et cette grandeur a) ; en effet, ces géomètres avaient reconnu d'autres problèmes qui nécessitaient l'insertion de plusieurs moyennes proportionnelles entre deux grandeurs, tels que la "duplication du cube" (ou problème déliaque, qui revient à chercher les racines cubiques de 2 et de 4) et la construction de l'heptagone régulier (qui suppose la construction d'un triangle isocèle dont l'angle au sommet soit le tiers des angles à la base). Les géomètres de la Renaissance italienne (comme Rafaele Bombelli, par exemple) puis des XVI^{ème} et XVII^{ème} siècles flamand et français (Simon Stevin de Bruges, François Viète, Albert Girard en 1634, René Descartes en 1637) mettront en évidence que la question relève d'une équation "du troisième degré" et/ou donneront des solutions analytiques ou géométriques faisant intervenir une ou deux sections coniques.

Deuxième remarque, quant à "*la maniere fine & subtile dont il a apperçû la progression des nombres connus qui entroient dans les expressions des cordes des Arcs doubles*", on verra, lors du commentaire du texte lui-même qu'elle relève de la connaissance des "nombres figurés" et permet de comprendre, sur un exemple, comment fonctionnait le raisonnement par induction, qui conduisait à des résultats généraux sur la seule foi des premiers termes d'une récurrence que l'on ne prenait pas nécessairement la peine de valider par un raisonnement par récurrence, bien que Blaise Pascal en ait jeté les bases dans son *Traité des Triangles arithmétiques*.

Plus généralement, le lecteur auquel cette introduction semble vouloir épargner la lecture du mémoire s'il en veut seulement connaître l'idée générale, est censé comprendre qu'il s'agit de calculer les arcs au moyen des cordes et réciproquement et que la difficulté apparaît dès que l'on passe de la duplication à la triplification et autres multiplications des arcs et que la démarche de Bernoulli le conduit à un développement en série alternée, décrite en termes d'augmentation et de diminution compensatoires successives. L'auteur de l'article, très certainement Fontenelle, s'agissant de mathématiques, manifeste sa connaissance profonde des enjeux, puisqu'il fait allusion à la question des incommensurables, à celle de la quadrature du cercle ; en particulier, l'idée que certaines courbes relèvent d'expressions algébriques indéfinies et révèlent ainsi l'éventualité de ce que l'on appellera plus tard leur transcendance, apparaît au travers de ce qu'il écrit dans les dernières lignes : "*la valeur d'un Arc étant donnée, celle de sa corde ne se peut exprimer que par une suite infinie de termes, qui ne permet pas que l'on arrive au dernier, ni par conséquent que l'on trouve la somme qu'ils font tous ensemble, ce qui seroit necessaire*" pour espérer que les spéculations de Bernoulli aient pu conduire à cette fameuse quadrature.

* * * * *

Notons que l'auteur de l'*Histoire*... reviendra une nouvelle fois sur le sujet, en commentant les innovations promises par Thomas Fantet de Lagny, dans le volume¹⁸ des *Mémoires*... pour l'année 1703. Voici ce qu'il en dit, qui éclairera les spéculations de Bernoulli en les replaçant dans le contexte des spéculations contemporaines sur le sujet :

64

HISTOIRE DE L'ACADEMIE ROYALE

[...]

SUR LES TANGENTES

ET LES SECANTES DES ANGLES

[En marge gauche : * Page 61.]

¹⁸ Cf. [FONTENELLE ? 1703].

Il a été dit ci-dessus * que M. de Lagni travaille à une nouvelle Trigonométrie. Il l'appellera *Trigonométrie Française ou Réformée*, titre qui répondra en partie à celui de *Trigonometria Britannica* de Breggius.¹⁹

Dans cette nouvelle Trigonométrie, M. de Lagni met à la place des anciens Logarithmes qu'il trouve arbitraires & défectueux, les Logarithmes naturels de l'Airhémique Binaire. Il a aussi de nouvelles vûes sur les Tables des Sinus, Tangentes, & Sécantes ; & il a donné à l'Académie sur les Tangentes & les Sécantes, un petit échantillon de son Ouvrage, & une assurance de ses promesses.

[En marge gauche : * Page 58.]

Ce qui a été dit dans l'Hist. de 1702 * de Cordes qui soutiennent différens arcs, est vrai aussi des Tangentes & des Sécantes qui répondent à différens arcs ou angles. Toutes ces lignes droites ne suivent la proportion de leurs arcs, ni n'ont entre elles une raison fixe & constante qui les régle. M. Bernoulli de Basle, demêla & en quelque sorte devina, comme on l'a vû, une espèce de progression assez cachée & assez enveloppée, qui se trouve entre les Cordes des arcs 1. 2. 3. 4. &c. De même M. de Lagni en a découvert ou une ou plusieurs compliquées qui regnent dans la Suite des Tangentes ou des Sécantes de tous les arcs ou angles, pris selon l'ordre des nombres naturels. Que l'on ait le rayon du cercle où l'on suppose que se forment tous ces angles, & la Tangente ou la Secante de tel angle qu'on voudra, on trouvera aussi-tôt celle de quelque autre angle que ce soit multiplié du premier. M. de Lagni avance que sa Formule générale // p. 65 // se démontre par deux seules propositions d'Euclide ; mais il convient que la démonstration ne laisse pas d'être très-longue. Ce ne sont pas de médiocres progrès en Géométrie, que les découvertes de ces sortes de rapports qui s'étoient dérobés jusqu'à présent aux yeux des plus grands Mathématiciens, & que notre siècle dévoile enfin à force d'art & de recherches. On seroit tenté de croire que toutes les grandeurs d'un même genre, comme toutes les Cordes, toutes les Tangentes d'arcs de cercle, suivent toujours quelque règle générale entre elles ; que souvent cette règle est si compliquée, qu'elle nous échappe, du moins pour un tems ; & que quand même nous ne la pourrions jamais découvrir, elle ne laisseroit pas de subsister dans quelque autre Géométrie réservée à des intelligences plus sublimes.

* * * * *

Enfin, notons que dans les rééditions ultérieures de l'*Histoire...* et des *Mémoires...*²⁰, le mémoire de Jacques Bernoulli de 1702 comporte une note faisant référence à un mémoire... ultérieur de Lagni, *Sur une Proposition de Geometrie elementaire*, qui pourrait être, selon lui, le point de départ des spéculations des frères Bernoulli, mais que Lagni ne communiqua à l'académie royale qu'en 1706. Il s'agit d'une configuration élémentaire dans un cercle, qui sous-tend très probablement la méthode que Jean Bernoulli expose dans les *Actes* de Leipsig, configuration que Jacques Bernoulli explicite en 1702 pour en tirer une méthode alternative conduisant à un résultat analogue à celui de son frère ; Fontenelle, dans l'*Histoire...* de 1702, dit qu'elle est à l'origine de la solution de Jacques Bernoulli dans les termes suivants (cf. *supra*) : "Il établit d'abord une maniere generale pour trouver une corde qui soûtienne un Arc double de celui que soûtient une autre corde quelconque donnée, car la proportion des Arcs n'est pas celle des cordes, & un Arc étant double d'un autre, sa corde est moins que double de l'autre corde".

Une maîtrise complète des valeurs que prennent les lignes trigonométriques et des relations qu'elles entretiennent est un enjeu majeur de la nouvelle analyse : il faut donc, pour comprendre le mémoire de Jacques Bernoulli, le replacer dans la diversité de ces enjeux, et en faire une lecture informée ; c'est pourquoi nous donnerons ici le texte de présentation de l'*Histoire...* pour 1706.

* * * * *

DES SCIENCES.

83

[...]

SUR UNE PROPOSITION DE GEOMETRIE ELEMENTAIRE.

[En marge droite : V. les M. / p. 319.]

Il y a dans la Géometrie Elementaire des Propositions que l'on retrouve presque par tout, & à chaque moment, & qui sont si souvent employées, qu'il semble que toutes les autres soient devenues inutiles. Telle est la

¹⁹Cf. BRIGGS, Henry. *Trigonometria britannica*, Londres : Gillibrand, 1633. Cet ouvrage de Briggs poursuit le travail qu'il avait engagé à la suite des spéculations de Napier, travail qui l'avait conduit à de premières publications : *Logarithmorum Chilias Prima* (Londres, 1617) et *Arithmetica Logarithmica* (Londres, 1624). La version originale de l'ouvrage de Briggs, mort en 1630, ne comportait qu'un premier Livre de tables de Sinus et reprenait ses tables de logarithmes des nombres de 1 à 20 000 et de 90 000 à 100 000. Elles furent complétées par son ami et associé, Henry Gillibrand, qui les fit imprimer, pour la première fois à Londres, en 1633, sous le titre indiqué. Mais dès 1628, à Gouda, Adrian Vlacq en avait donné une première impression, complétée d'une tables des logarithmes à "14 décimales", et de la table "manquante" des nombres de 20 000 à 90 000.

²⁰ Comme en particulier dans la réédition des *Mémoires...* pour l'année 1702, en 1743, autre édition consultée.

fameuse Quarante-septième du premier Livre d'Euclide, si digne de l'Hecatombe que l'on dit qu'elle coûta à son Inventeur. Telle est aussi celle de la similitude des Triangles. Il arrive le plus souvent que les plus sublimes recherches n'empruntent de toute la Géometrie Elementaire que ces deux Propositions.

M. de Lagni croit qu'il y en a encore quelques-unes // p. 84 // ou inconnues ou négligées, qui pourroient tenir à peu près le même rang. On peut prendre pour exemple celle qu'il démontre ici, que dans un Parallelogramme quelconque la somme des quarrés des deux Diagonales est égale à la somme des quarrés des quatre côtés.

Il [est] évident d'abord que la quarante-septième du premier Livre d'Euclide n'est qu'un cas particulier de cette proposition, car si le Parallelogramme est rectangle, il s'ensuit que les deux Diagonales sont égales, & par consequent le quarré d'une Diagonale, ou, ce qui est la même chose, le quarré de l'Hypotenuse d'un angle droit, est égal aux quarrés des deux côtés. Mais si le Parallelogramme n'est pas rectangle, & si par consequent les deux Diagonales ne sont pas égales, ce qui est le cas le plus général, la proposition devient d'un usage fort étendu.

Elle peut servir, par exemple, dans toute la Theorie des Mouvements composés, d'où dépendent toutes les recherches de Mechanique, & plus généralement presque toutes celles qui ont quelques mouvements pour objet.

Dans un Parallelogramme qui n'est pas rectangle, la grande Diagonale est la soutendante d'un angle obtus, & la petite est la soutendante d'un angle aigu, complement de cet obtus²¹. La grande est d'autant plus grande, & la petite d'autant plus petite que l'angle obtus est plus grand, de sorte que si cet angle obtus en croissant toujours devient infiniment grand par rapport à l'aigu, ou, ce qui est la même chose, si les deux côtés *conjoins* ou inégaux du Parallelogramme sont posés bout à bout en ligne droite, la grande Diagonale est la somme même de ces deux côtés, & la petite est nulle. Si on connoît deux côtés conjoins du Parallelogramme & l'angle qu'ils font entre eux, il est aisé de trouver en nombres la soutendante de cet angle, c'est à dire, une des Diagonales du Parallelogramme, après quoi la proposition de M. de Lagni donne l'autre Diagonale, ce qu'on peut voir très-facilement. Or, cette seconde Diagonale qu'on trouve ainsi est la ligne que // p. 85 // décrirait un corps poussé en même tems par deux forces qui auroient entre elles le même rapport que les deux côtés conjoins, & agiroient selon ces deux directions, & ce corps décrirait cette diagonale dans le même tems qu'il auroit décrit l'un ou l'autre des deux côtés conjoins, s'il n'avoit été poussé que par la force correspondante. C'est-là un des plus grands usages de la Proposition, car le rapport de deux forces, & l'angle qu'elles font entre elles étant donnés, il est souvent necessaire de déterminer en nombres la ligne que décrirait dans un certain tems un corps poussé par ces deux forces ensemble.

Ce n'est pas que deux Methodes ordinaires & connues, l'une Trigonometrique, l'autre Géometrique & Analitique ne pussent resoudre ce Problème ; mais M. de Lagni fait voir que la premiere demande 21 operation, la seconde 15, & que la sienne n'en demande que 7. Elle a même encore cet avantage qu'elle épargne des divisions & des extractions de racines, qui presque toujours produisent des fractions, qu'on ne peut negliger sans erreur, ou employer dans le calcul sans le rendre beaucoup plus long & plus penible.

Si les deux côtés conjoins d'un Parallelogramme sont donnés de grandeur seulement, il est visible qu'ils peuvent faire entre eux une infinité d'angles differens, & puisque le rapport des deux Diagonales entre elles, dépend de l'angle de ces deux côtés, on en peut former une infinité de Parallelogrammes dont les deux Diagonales auront entre elles un rapport different. C'est là un Problème qui a une infinité de solutions, & même, à le considerer encore de plus près, une infinité d'infinités de solutions. Car que les deux côtés donnés fassent d'abord un angle de 180, c'est à dire, soient posés bout à bout en ligne droite, ils peuvent faire ensuite des angles toujours décroissans selon la progression soudouble infinie, ou selon la progression soutriple pareillement infinie ; en un mot, selon une infinité de progressions differentes, dont chacune est infinie, M. de Lagni // p. 86 // donne cette infinité d'infinités de solutions en deux formules générales, dont l'une est pour deux côtés égaux, & l'autre pour deux côtés inégaux, & il remarque en même tems que ces sortes de Problèmes ne sont pleinement resolus que de cette maniere, car ni plusieurs solutions, quel qu'en fût le nombre, ni une infinité, ni même plusieurs infinités ne comprendroient tout. Ce n'est pas cependant que toutes ces solutions soient toujours differentes entre elles ; quelques-unes de celles qui sont entrées dans un certain ordre, peuvent se retrouver dans un autre ; ainsi lorsque des angles décroîtront toujours depuis celui de 180 selon une certaine progression, quelques-uns de ceux qui étoient compris dans la progression soudouble 16, 8, 4, 2, 1, &c. se retrouveront dans la progression souquadruple, 16, 4, 1, &c. mais on reconnoît assés aisément en quels endroits ces répétitions doivent arriver, & comme elles ne sont qu'en nombre fini dans chaque ordre, elles y laissent l'infini en son entier.

Ce Problème des Diagonales du Parallelogramme a du rapport avec celui du Triangle rectangle en nombres, qui a tant exercé les Arithmeticiens, & les Algebristes. Ils ont cherché des regles pour déterminer tous les nombres qui pris trois à trois eussent la propriété du Triangle rectangle, c'est-à-dire, qui fussent tels que le quarré de l'un fût égal aux quarrés des deux autres, & ils ont infiniment étendu & enrichi cette Theorie. Ici, il

²¹ Il faut entendre, en termes d'aujourd'hui : pour "soutendante" : "côté opposé à l'angle" obtus ou aigu dans un triangle donné de la figure ; et pour "complement de cet obtus" : "supplémentaire de cet aigu".

est question de trouver une somme de deux quarrés doubles de deux autres quarrés donné[e]s, & ce peut être une assez ample matiere à de nouvelles recherches. On peut observer en passant que comme les nombres 3, 4, 5, sont les plus simples qui ayent la propriété du Triangle rectangle, ainsi 5 & 10 pris pour côtés, & 9 & 13 pour Diagonales sont les plus simples qui fournissent un exemple de la Proposition de M. de Lagni.

Il en est aussi une application à un sujet plus détourné que les mouvemens composés, & auquel on peut croire qu'il s'intéresse davantage. Nous avons dit dans l'Histoire // p. 87 //

[En marge droite :] * p. 61. 62. / & 64.

de 1703 *, que M. de Lagni trouve que les Logarithmes, tels qu'ils sont jusqu'à present, sont défectueux & arbitraires, & qu'il prétend leur en substituer d'autres plus parfaits & naturels, tirés de son Arithmetique Binaire. D'un autre côté, il faut sçavoir que l'Hiperbole prise entre ses Asimptotes a cette propriété, que si on prend une Asimptote pour diametre, qu'on la divise en parties égales, & que par toutes ces divisions qui formeront autant d'Abscisses toujours croissantes également, on tire des Ordonnées à la Courbe, paralleles à l'autre Asimptote, les Abscisses représenteront la suite infinie des Nombres naturels, & les espaces Asimptotiques ou Hiperboliques correspondans, représenteront la suite des Logarithmes de ces Nombres. Pour prendre quelque idée de cette verité, il n'y a qu'à considerer que le rapport Arithmetique est toujours le même dans la suites des Nombres naturels, puisqu'ils croissent toujours d'une unité, & que leur rapport géometrique décroît toujours, de sorte qu'entre deux nombres voisins il est toujours d'autant plus petit, qu'ils sont plus avancés dans la suite, ou, ce qui est la même chose, plus grands. Ainsi le rapport géometrique de 99 & de 100 est plus petit que celui de 9 & de 10, ou, ce qui revient au même, 99 & 100 approchent davantage de l'égalité, non pas arithmetiquement, mais géometriquement, parce que 1 qui est la difference de part & d'autre est moins considerable par rapport à 100, que par rapport à 10. Si la suite naturelle pouvoit avoir une fin, on conçoit que 1 difference des deux derniers nombres seroit infiniment petit par rapport à eux, & par consequent les laisseroit égaux. Les Logarithmes sont des nombres qui par leur rapport Arithmetique representent le rapport géometrique des nombres naturels, & par consequent le rapport Arithmetique des Logarithmes décroît toujours, quoique les Logarithmes croissent toujours, ainsi que les nombres naturels correspondans, ou, ce qui est la même chose, les Logarithmes croissent toujours, mais de moins en moins. Or, telle est aussi la nature de l'espace compris entre une Asimptote & l'Hiperbole, qu'il croît à l'infini, mais toujours de moins en moins, parce que l'Hiperbole s'approche toujours davantage de l'Asimptote, & il croît de moins en moins selon la même proportion que les Logarithmes.

Cette propriété se trouve dans toutes les différentes Hiperboles, car on sçait que par un même point du Cone pris pour sommet, il se peut former une infinité d'Hiperboles différentes, aussi-bien que d'Ellipses, au lieu qu'il ne se pourroit former qu'une Parabole ou qu'un Cercle. Les Asimptotes de ces différentes Hiperboles font toutes entre elles un angle différent, & leurs espaces Asimptotiques, quoique tous infinis, sont inégaux, parce que deux Hiperboles différentes, dont chacune s'approche toujours de plus en plus de ses Asimptotes, ne laissent pas de s'en approcher inégalement. Delà vient qu'une Asimptote de chacune de ces deux Hiperboles ayant été divisée en parties égale[s] entre elles, & égales aux divisions de l'autre, les espaces Asimptotiques correspondans seront inégaux, & par consequent à la même suite des nombres naturels, il peut repondre différentes suites de Logarithmes; & en effet, puisque la maniere de construire les Tables des Logarithmes est de prendre 0 ou 00 ou enfin tant de Zero qu'on voudra pour Logarithme de 1; 100 ou 1000 &c., & pour Logarithme de 10; 200 ou 2000 &c. pour Logarithme de 100, et toujours ainsi en prenant les nombres naturels selon la progression de 1 à 10, après quoi les Logarithmes de tous les nombres interposés entre 1 & 10, entre 10 & 100 &c. sont déterminés par ces premiers Logarithmes des nombres 1, 10, 100 &c[.], il est clair que si au lieu de la progression de 1 à 10, on eût pris, par exemple, celle de 1 à 8, & qu'on eût donné aux nombres 1, 8, 64 &c. les mêmes Logarithmes qu'on a donnés dans l'autre hypothese aux nombres 1, 10, 100 &c. les Logarithmes des nombres interposés 2, 3, 4, &c. auroient été dans la seconde hypothese differents de ceux de la premiere, & par consequent la même suite des // p. 89 // nombres naturels peut recevoir différentes suites de Logarithmes, ou, ce qui revient au même, une infinité d'Hiperboles différentes peuvent représenter par leurs espaces asimptotiques les Logarithmes des nombres naturels.

Pour déterminer la suite des Logarithmes, il faut donc faire un choix arbitraire de quelque Hiperbole, mais il est certain que ce choix sera d'autant meilleur, qu'il sera moins arbitraire, & plus fondé en raison. Or la plus simple de toutes les Hiperboles est l'équilatere; c'est-à-dire, celle dont les Asimptotes font entre elles un angle droit, car quand deux lignes peuvent faire entre elles differens angles, le droit est en quelque sorte le plus naturel de tous, & c'est incontestablement celui qui produit dans les figures les propriétés les plus simples. Delà M. de Lagni conclut que pour regler les Logarithmes, il auroit fallu choisir l'Hiperbole équilatere, & on auroit trouvé ceux que son Atithmetique Binaire lui donne.

Au lieu de suivre cette Arithmetique Binaire, ou, ce qui est la même chose, de couper toujours la suite des nombres de deux en deux, on l'a coupée de dix en dix, & on s'est assujetti à cet usage dans la détermination des Logarithmes. Ceux que l'on a établis, répondent donc à une autre Hiperbole que l'équilatere, & M. de Lagni a

cherché quelle est cette Hiperbole, c'est-à-dire, [quel angle font]²² ses Asimptotes. Comme toute Hiperbole peut être décrite par le moyen d'un Parallelogramme pris sur ses deux Asimptotes, & dont l'angle des Asimptotes est un des Angles, M. de Lagny trouve par sa Proposition quelles sont les Diagonales du Parallelogramme qui a formé l'Hiperbole à laquelle répondent les Logarithmes communs, & par ces Diagonales il détermine que l'angle des Asimptotes de cette Hiperbole [est] de $25^{\circ} 44' 25''$ à peu près. La grandeur de cet angle irreguliere & bizarre, pour ainsi dire, fait assés voir qu'il n'auroit pas dû être préféré à l'angle droit, & que les Logarithmes dont l'Hiperbole équilatera seroit le modele, meriteroient le titre de *naturels*, à l'exclusion de tous les autres, qui ne pourroient // p. 90 // être traités que d'arbitraires. Cela justifie ce que M. de Lagny a déjà avancé plusieurs fois sur les Logarithmes communs, & ce n'est peut-être pas un des moindres fruits de la Proposition des Parallelogrammes, que de lui avoir aidé à mettre sa pensée & sa prétention dans tout son jour.

Commentaire

Lagny s'appuie donc sur une propriété bien connue des rectangles qu'il étend aux parallélogrammes : la somme des carrés de leurs lignes diagonales est égale à la somme des carrés des quatre côtés. On remarquera que les considérations de l'auteur de cette présentation – très certainement Fontenelle, de nouveau –, font usage du mouvement pour apprécier croissance ou décroissance et situations limites, avec la désinvolture désormais admise par la plupart des géomètres du XVIII^{ème} siècle, tant le maniement des infinitésimaux leur est devenu familier et leur apparaît efficace, au point de ne pas prendre les précautions d'un Archimède ou de ne plus se préoccuper de la *doxa* des Éléates. De ce point de vue, Fontenelle est l'un de ceux qui iront le plus loin dans cette autre querelle des Anciens et des Modernes, avec, par exemple ses *Éléments de la Geometrie de l'Infini*, qui le conduiront à de nombreux raisonnements fallacieux²³. Il n'en reste pas moins que sa présentation relève de ce prodigieux talent qu'il avait pour vulgariser les recherches dont les *Mémoires*... se faisaient l'écho.

En fait, dans un *post-scriptum* à son mémoire, Jacques Bernoulli renvoie à une propriété de géométrie en apparence différente de celle que propose Lagny : il dit l'avoir trouvée chez Hermann, dans son mémoire intitulé "*J. Hermannii Demonstratio Geminae Formulae a Celeberrimo Dn. Joh. Bernoulli, in Actis Erudit. Mens. Apr. A. 1701, pro multisectione anguli vel arcus circularis, sine demonstratione exhibita*" (*Acta Eruditorum*, août 1703), qui roule sur la démonstration de la formule de Jean Bernoulli pour la multisection des angles. Jacques Bernoulli formule ainsi cette propriété géométrique : c'est "*la propriété du quadrilatère inscrit dans le cercle, dont le produit des diagonales est égal à la somme des produits des côtés opposés*". Ce *post-scriptum* renvoie en effet lui aussi à un mémoire ultérieur, puisqu'on trouve le texte de Hermann (que Bernoulli ne précise que par son objet, sans en donner ni le titre ni la date) dans les *Acta Eruditorum* de 1703.

* * * * *

Il nous reste à donner et à commenter le texte de Jacques Bernoulli lui-même²⁴, que nous avons choisi pour représenter cette étape du processus dans la mesure où il est plus explicite que celui (en latin dans les actes de Leipsig) de son frère Jean ; cette étude nous permettra de comprendre les voies empruntées par l'auteur, voies caractéristiques de l'heuristique de cette époque, comme nous le verrons dans la seconde partie de cet épisode.

*

* *

À suivre : La sinusoïde n'est pas celle que vous croyez
(III-B) Le mémoire de Jacques Bernoulli (1702)

Jean-Pierre Le Goff, IREM de B.-N., Caen, juin 2009.

²² Le texte donne : "que l'angle sont ses Asimptotes".

²³ Cf. [FONTENELLE, 1727].

²⁴ Cf. [BERNOULLI, Jacques, 1702].