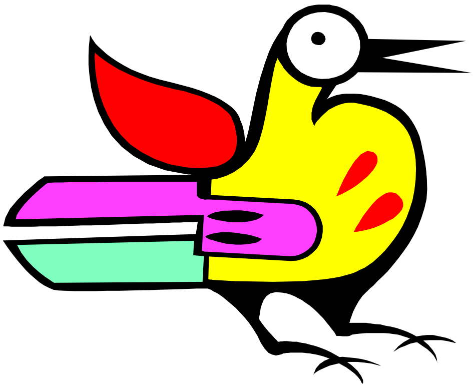
I.R.E.M. de Basse-Normandie Université de Caen France
I.R.E.M. de Ica UNICA Perú



Histoires de cerfs-volants et autres quadrilatères
Classer et reconnaître les quadrilatères
à l'aide de systèmes articulés et de pliages

à partir de la classe de sixième
avec des fiches pour les élèves

Historias de cometas y otros cuadriláteros
Clasificando y reconociendo los cuadriláteros
con ayuda de sistemas articulados y plegamientos

desde once años de edad
con fichas para los alumnos

Danielle Salles-Legac
Avec la participation de Anne-Marie Bock
Eladio Ocaña, Ruben Rodriguez Herrera et Oswaldo Velasquez

Febrero 2009 Février 2009

Histoires de cerfs-volants et autres quadrilatères
Historias de cometas y otros cuadriláteros

Sumario		Sommaire	

Introducción

Les presentamos, en las páginas que siguen, actividades de clasificación de los cuadriláteros, primero con ayuda de un sistema articulado muy simple constituido por cuatro bandas móviles en un plano que representan, sea los lados del cuadrilátero, sea sus diagonales.

Introducimos allí, según la petición del ministerio de la educación de Francia, la noción de cometa, distinguiendo, según la recomendación de Nadine Gérard, docente de colegio (*) la noción de la **cometa isósceles** de la noción general, precaución que nos parece útil. El texto en español se encuentra sobre la izquierda de las páginas y el texto en francés sobre la derecha de las páginas de tal modo que el profesor pueda fotocopiar el texto en la lengua de su elección para distribuírsela a los alumnos. Desde luego, el texto en español es un ejemplo (fué escrito initialmente para nuestros corresponsales de América del Sur) y podrá ser modificado así por el profesor.

Advertencia: empleamos en este texto el término **superponibles** preferentemente al término **iguales** en cuanto a **los ángulos y los triángulos**. El término superponible nos parece preferible porque una superposición puede fácilmente ser realizada por el alumno por doblez y\o deslizamiento de las figuras, decimos que es una “**acción expérimentable**”. (Ver el folleto por Danielle Salles-Legac y Ruben Rodriguez Herrera "Nuevas prácticas de la geometría" Editorio: IREM de Basse-Normandie France).

(*) « L’introduction du cerf-volant dans le programme de sixième… » Bulletin A.P.M.E.P. n°473

Introduction

Nous vous présentons, dans les pages qui suivent, des activités de classement des quadrilatères à l’aide, tout d’abord, d’un système articulé très simple constitué de quatre barrettes mobiles dans un plan, représentant, soit les côtés du quadrilatère, soit ses diagonales.

Nous y introduisons, suivant les instructions du ministère, la notion de cerf-volant, en distinguant, selon la recommandation de Nadine Gérard, professeur de collège (*) la notion de **cerf-volant isocèle** de la notion générale, précaution qui nous parait utile.

Le texte en espagnol se trouve dans la partie gauche des pages et le texte en français dans la partie droite de telle sorte que le professeur puisse polycopier le texte dans la langue de son choix pour la distribuer aux élèves. Bien entendu, le texte espagnol est un exemple (il a été écrit à l’origine à destination de nos correspondants d’Amérique du Sud) et pourra être ainsi modifié par le professeur.

Avertissement : Nous employons dans ce texte le terme “**superposables”** de préférence au terme **égaux** en ce qui concerne **les angles et les triangles**. Le terme superposable nous parait préférable car une superposition peut être facilement réalisée par l’élève par pliage et/ou glissement des figures, nous disons que c’est une “**action expérimentable”.** (Voir l’ouvrage de Danielle Salles-Legac et Ruben Rodriguez Herrera « Nouvelles pratiques de la géométrie » édité par l’IREM de Basse-Normandie).

(*) « L’introduction du cerf-volant dans le programme de sixième… » Bulletin A.P.M.E.P. n°473

Clasificando los cuadriláteros con ayuda de un sistema articulado: (nivel: secundario básico, segundo año)

Es muy importante para los alumnos conocer bien las distintas clasificaciones de los cuadriláteros. La utilización de sistemas articulados (es decir objetos constituidos por bandas rígidas y juntas o no entre ellas por pivotes móviles) es de un gran ayuda para hacerlo.

Al solicitar a los alumnos citar las propiedades que permiten clasificar los cuadriláteros, ellos responden que ello depende de:

- Las medidas respectivas de los lados consecutivos u opuestos.
- El paralelismo de los lados opuestos.
- Las medidas respectivas de los ángulos consecutivos o opuestos.
- Las posiciones relativas de las diagonales, sus medidas y ángulos.

Les indicamos que se pueden representar los diferentes casos con un sistema articulado.

Proponemos a los alumnos utilizar bandas de cartulina o de cartón que podemos construir segun el siguiente modelo:

Cortamos cuatro pequeñas bandas superponibles y dos más grandes superponibles, con agujeros en sus extremidades, en sus medios y en las cuartas partes de las grandes. (Podemos también utilizar bandas de plástico, vendidas, a un precio razonable, entre los especialistas de material pedagógico). Los pivotes podrán ser unos “ataderos parisinos” o roblones.

Classer les quadrilatères à l’aide d’un système articulé (à partir de la classe de sixième)

A propos de l’article de Nadine Gérald (bulletin APMEP n° 473) sur l’introduction en sixième de l’enseignement des propriétés des cerfs-volants voici des propositions d’activités bilingues franco-espagnoles sur le classement des quadrilatères grâce à un système articulé, c’est-à-dire un objet constitué de bandes rigides (carton ou plastique), jointes ou non entre elles par des pivots mobiles.

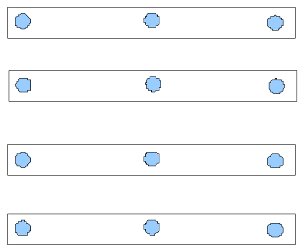
Nous pouvons demander, tout d’abord, aux élèves de citer quelles sont les propriétés qui permettent de classer les quadrilatères, cela dépend :

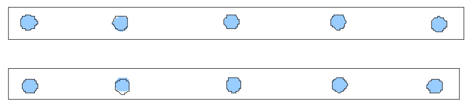
- Des longueurs respectives des côtés consécutifs ou opposés.
- Du parallélisme des côtés opposés.
- Des mesures respectives des angles opposés ou consécutifs.
- Des positions respectives des diagonales, de leurs longueurs et des angles qu’elles forment.

Nous leur proposons de représenter les différents cas grâce à un système articulé. Nous leur proposons d’utiliser des barrettes de carton ou de bristol que nous pouvons découper selon le modèle suivant :

Quatre petites barrettes de longueurs égales et deux plus grandes, perforées à leurs extrémités et en leur milieu, les deux grandes avec un trou supplémentaire à leurs quarts. (on peut aussi utiliser des barrettes en plastique, proposées à prix raisonnable chez les spécialistes en matériel pédagogique). Les pivots pourront être des attaches parisiennes ou des rivets.

Aquí el material utilizado en todo el folleto:
Voici le matériel utilisé dans toute la brochure :





Observación importante: las distancias entre los hoyos de las pequeñas bandas y las de las grandes bandas no son necesariamente iguales, es el caso de las bandas de plástico vendidas ya perforadas.
Remarque importante : les distances entre les trous des petites bandes et celles des grandes bandes ne sont pas nécessairement égales, c'est le cas des barrettes plastiques vendues déjà perforées.

FASE PRELIMINAR (de 12 a 14 años de edad)

Las nociónes de cometa y de deltoides isósceles

Les pedimos en primer lugar a los alumnos construir, con dos pequeñas bandas y dos grandes, un cuadrilátero cuyos lados consecutivos son de misma longitud dos – dos (ie. que tiene **dos pares (*) de lados consecutivos la misma longitud)**. He aquí tres ejemplos de construcciones.

PHASE PRÉLIMINAIRE (de la classe de sixième à la classe de quatrième)

Les notions de cerf-volant et de deltoïde isocèles

Nous demandons tout d'abord aux élèves de construire, avec deux petites barrettes et deux grandes, un quadrilatère qui a **deux paires (*) de côtés consécutifs de la même longueur**.

Voici trois exemples de constructions.

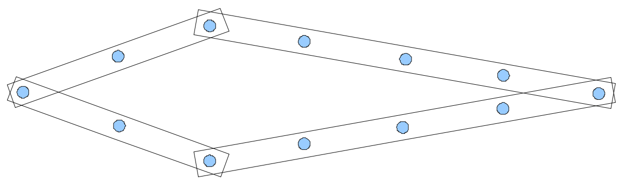


fig.1

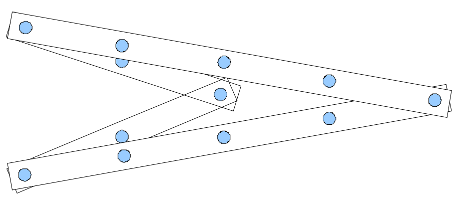


fig.3

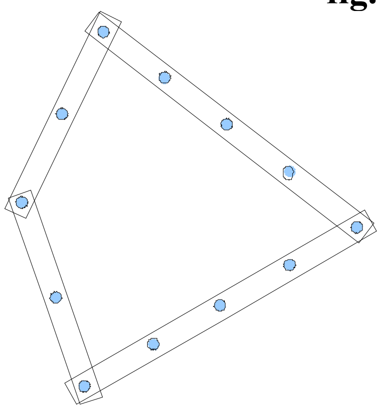
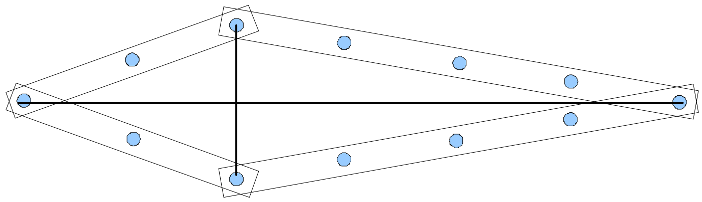


fig.2

(*) En todo lo que sigue empleamos el término "par" en su sentido común acostumbrado: objeto o ser conteniendo dos elementos distintos semejantes. Por ejemplo: un par de criados (juego de tarjetas), un par de zapatos, un par de amigos...

(*) Dans tout ce qui suit nous employons le terme "paire" dans son sens commun habituel : objet ou être comportant deux éléments distincts semblables. Par exemple : une paire de valets (jeu de cartes), une paire de chaussures, une paire d'amis…

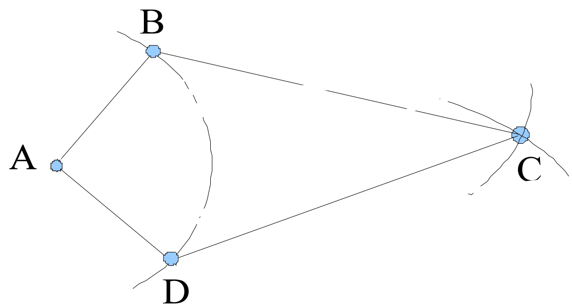
Les pedimos a los alumnos: ¿ En qué le hacen pensar las dos primeras construcciones?	Nous demandons aux élèves : à quoi vous font penser les deux premières constructions ? Ils répondent que la deuxième fait penser aux **cerfs-volants** des enfants sur la plage, la première aussi mais “moins”.
Segunda hecho pensar en las **cometas** de los niños sobre la playa, la primera también pero "menos".	
(Es un **cuadrilatero convexo.)**	(C’est un **quadrilatère convexe**.)
¿ Y el tercero? A los aviones de reacción. ¿ Cómo llamamos la forma de las alas de estos aviones?	Et la troisième ? Aux avions à réaction. Comment appelle-t-on la forme des ailes de ces avions ?
Alas "deltas". Es por eso que este cuadrilátero se llama un **deltoide** (es un ejemplo de **cuadrilatero concavo)**.	Des ailes “deltas”. C’est pourquoi ce quadrilatère s’appelle un **deltoïde** (c’est un exemple de **quadrilatère concave).**
Estudiamos primero la cometa isósceles.	**Premièrement nous étudions les cerfs-volants isocèles.**
Precisamos que, ya que nuestras cometas están constituidas por dos **triángulos isósceles** distintos que tienen sus bases en común, se los llaman **cometas isósceles**.	Nous précisons que, puisque nos cerfs-volants sont constitués de deux **triangles isocèles** distincts ayant leurs bases en commun, on les appelle **cerfs-volants isocèles.**
¿Cómo podemos definir una cometa isósceles?	Nous demandons ensuite comment on peut définir un cerf-volant isocèle.
Es un cuadrilátero que tiene dos pares de lados la igual longitud. Observamos: es verdad también de un parallélogramme. Entonces hay que añadir " lados **consecutivos** lo mismo longitud ".	C’est un quadrilatère qui a deux paires de côtés de la même longueur. Nous remarquons : c’est vrai aussi d’un parallélogramme. Alors il faut ajouter “des paires de côtés **consécutifs** de la même longueur”.
Les sugerimos precisar: **una cometa es un cuadrilátero que tiene dos lados consecutivos que tienen la mismo longitud y los otros dos también**.	Nous leur suggérons de préciser : **Un cerf-volant isocèle est un quadrilatère qui a deux côtés consécutifs de même longueur et les deux autres aussi.**
Observemos los cuadriláteros e imaginemos sus diagonales (si los alumnos no saben refleccionar asi, podemos figurarlos con un elástico)	Observons les quadrilatères et imaginons leurs diagonales (si les élèves n’y arrivent pas, on peut les figurer avec des élastiques), que remarquons-nous ?
¿ Que observamos?	
Parecen ortogonales, parecen también cortarse en el punto medio de una de ellas (la pequeña en nuestro caso).	Elles paraissent orthogonales, elles « ont l’air » de se couper au milieu de l’une d’elles (la petite dans notre cas). Nous allons essayer de le démontrer.
Vamos a tratar de demostrarlo	

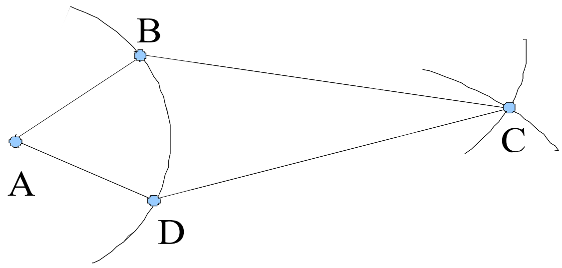


Rappel : nous appelons **sommet principal d'un triangle isocèle** le sommet de l'angle défini par les deux côtés de même longueur de ce triangle et **base** le côté opposé au sommet principal.

Recordemos que llamamos **vertice principal de un triángulo isósceles** el vertice del ángulo definido por ambos lados lo mismo longitud de este triángulo y **base** el lado opuesto al vertice principal.

Como siempre en el pasaje de la observación del objeto geométrico a su formalización, les pedimos a los alumnos **reproducir con cuidado** en su cuaderno la cometa isósceles **respetando sus propiedades**, a saber la igualdad de las longitudes de sus lados sucesivos. Luego debran **codificar la figura** obtenida. Esta construcción puede hacerse con la ayuda del compás, ver por ejemplo las figuras siguientes un poco distintas, con las mismas bandas:	Comme toujours dans le passage de l'observation de l'objet géométrique à sa formalisation**,** nous demandons aux élèves de **reproduire avec soin** sur leur cahier le cerf-volant isocèle **en respectant ses propriétés**, à savoir l'égalité des longueurs de ses côtés successifs. Puis de **coder la figure obtenue**. Cette construction peut se faire à l'aide du compas voir, par exemple, les deux figures suivantes légèrement distinctes, avec les mêmes barrettes :





Trazamos un círculo de centro A, de rayo la longitud de las pequeñas bandas, en el cual ponemos dos puntos B y D (la distancia entre B y D de modo que el **ángulo** formado por los segmentos [AB] y [AD] sea **agudo**).	Nous avons tracé un cercle de centre A, de rayon la longueur des petites barrettes, sur lequel nous avons porté deux points B et D de telle sorte que **l'angle géométrique** formé par les segments [AB] et [AD] soit **aigu**.

Luego, trazamos dos arcos de círculo de centro B y D y de radio la longitud de las grandes bandas, estos arcos de círculo se cortan en el punto C. Les pedimos a los alumnos observar los triángulos ABD y CDB: ¿ cuál son sus propiedades? Respuesta: son isósceles, podemos pues decir que una cometa isósceles está constituida por dos triángulos isósceles (no necesariamente superponibles) juntados por su base.

Observamos que se puede construir, con las mismas bandas "muchas" cometas isósceles no superponibles, (en hecho, una infinidad), según la separación de las bandas, es decir según la medida de los ángulos $\widehat{DAB}$ y $\widehat{DCB}$.

Les pedimos entonces a los alumnos trazar las diagonales y demostrar la conjetura: **"las diagonales de una cometa isósceles son ortogonales"**. Repetimos la figura trazando las diagonales y anotando las igualdades de longitudes.

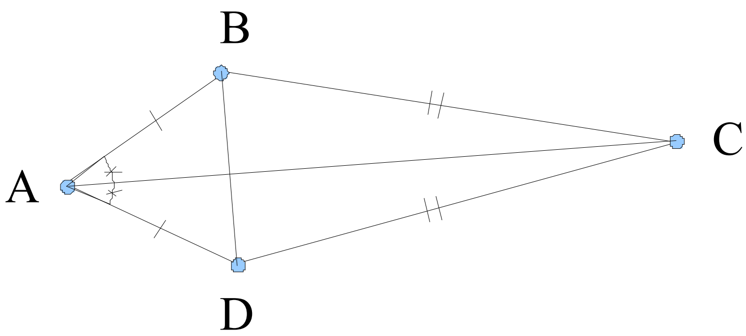
Ensuite nous avons tracé deux arcs de cercle de centres B et D et de rayon la longueur des grandes barrettes, ces arcs de cercle se coupent au point C.

Nous demandons aux élèves d’observer les triangles ABD et CDB : quelle est leur propriété ? Réponse : ils sont isocèles, on peut donc dire qu’un cerf-volant isocèle est constitué de deux triangles isocèles (non nécessairement superposables) accolés par leur base.

Nous remarquons que l’on peut construire, avec les mêmes barrettes “beaucoup” de cerfs-volants isocèles distincts (en fait, une infinité), selon l’écartement des barrettes, c'est-à-dire selon la mesure des angles $\widehat{DAB}$ et $\widehat{DCB}$.

Nous demandons alors aux élèves de tracer les diagonales et de démontrer la conjecture : **« les diagonales d’un cerf-volant isocèle sont orthogonales ».**

Nous reprenons la figure en traçant les diagonales et en notant toutes les longueurs égales.



Observamos que ambos triángulos ABC y ADC, tienen sus lados de las mismas longitudes dos–dos, entonces son superponibles.

Nous observons que les deux triangles ABC et ADC, ayant leurs côtés de mêmes longueurs deux à deux sont superposables.

Pues los ángulos $\widehat{CAB}$ y $\widehat{CAD}$ son de misma medida y el segmento [AC] es una parte de la bisectriz del ángulo $\widehat{DAB}$ y además una parte de la mediatriz del segmento [BD].

Concluimos que la **diagonal [AC] de la cometa isósceles es una parte de la mediatriz de la diagonal [BD]** y que, en particular, ambas diagonales de una cometa isósceles son ortogonales.

Les pedimos a los alumnos escribir estos resultados en forma de condiciones necesarias y suficientes:

$$\left\{\begin{array}{l}\text{un cuadrilatero convexo}\\ \text{es una cometa isósceles}\end{array}\right\}\hat{U}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\text{tiene dos lados consecutivos de la}\\ \text{misma longitud y los dos otros}\\ \text{también}\end{array}\right\}\hat{U}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\text{una de sus diagonales es la}\\ \text{mediatriz de la otra}\end{array}\right\}\hat{U}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\text{sus diagonales son ortogonales}\\ \text{y tiene dos lados consecutivos}\\ \text{de la misma longitud}\end{array}\right\}\hat{U}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\text{es formado por dos triángulos}\\ \text{isósceles no superpuestos}\\ \text{juntados por sus bases}\end{array}\right\}.$$

Recordamos que nos interesamos solamente por los **cuadriláteros construibles con dos pares diferentes de bandas de mismas longitudes.**

Donc les angles $\widehat{CAB}$ et $\widehat{CAD}$ sont de même mesure et le segment [AC] est porté par la bissectrice de l'angle $\widehat{DAB}$ et par la médiatrice du segment [BD].

Nous en concluons que la **diagonale [AC] du cerf-volant isocèle détermine la médiatrice de la diagonale [BD]** et que, en particulier, les deux diagonales d'un cerf-volant isocèle sont orthogonales.

Nous demandons aux élèves d'écrire ces résultats sous forme de conditions nécessaires et suffisantes :

$$\left\{\begin{array}{l}\text{un quadrilatère convexe est}\\ \text{un cerf}-\text{volant isocèle}\end{array}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l}\text{il possède deux côtés consécutifs}\\ \text{de même longueur et les deux}\\ \text{autres aussi}\end{array}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l}\text{une de ses diagonales est}\\ \text{médiatrice de l'autre}\end{array}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l}\text{ses diagonales sont orthogonales}\\ \text{et il possède deux côtés consécutifs}\\ \text{de même longueur}\end{array}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l}\text{il est formé de deux triangles}\\ \text{isocèles non superposés ayant}\\ \text{leurs bases en commun}\end{array}\right\}.$$

Remarque : Nous rappelons que nous sous intéressons ici seulement aux quadrilatères **constructibles avec deux paires distinctes de barrettes de mêmes longueurs.**

<table>
<tr>
<td>

Segundo los deltoïdes isósceles

Vimos que es posible construir deltoides con los mismos broches que aquellos a los que utilizamos para la cometa isósceles.

Simplemente basta con deformar la cometa isósceles con el fin de que se vuelva **cóncavo**. **Obtenemos con estas bandas un deltoïde isósceles.**

Invitamos a los alumnos que dibujan una figura que representa ambos cuadriláteros que obtenernos con los mismos broches dejando invariables dos broches consecutivos.

Despues, observarlos, escribir sus propiedades y encontrar **lo que hace la diferencia entre las cometas y los deltoides isósceles.**

Reflexionando con la clase, escribimos a la pizara:

Las cometas isósceles

-Una diagonal mediatriz de la otra;
-Un eje de simetría ortogonal (la diagonal mediatriz);
-Dos triángulos isósceles de base común la otra diagonal.

Los deltoides isósceles

-Una diagonal mediatriz de la otra;
-Un eje de simetría ortogonal (la diagonal mediatriz);
-Dos triángulos superponibles de base común la otra diagonal.

Preguntamos ¿Ahora **qué hace la diferencia?**

</td>
<td>

Deuxièmement : les deltoïdes isocèles

Nous avons vu qu'il est possible de construire un deltoïde avec les mêmes barrettes que celles que nous avons utilisées pour le cerf-volant isocèle.

Il suffit simplement de déformer le cerf-volant isocèle afin qu'il devienne **concave. Avec ces barrettes nous construisons un deltoïde isocèle.**

Nous invitons les élèves à dessiner deux figures représentant les deux quadrilatères que nous pouvons obtenir avec les mêmes barrettes sans déplacer les grandes barrettes.

Ensuite, nous leur demandons de les observer et de dire **ce qui fait la différence entre les cerfs-volants et les deltoïdes.**

Nous réfléchissons ensembles et écrivons au tableau :

Les cerfs-volants isocèles

- Une diagonale est médiatrice de l'autre ;
- Un axe de symétrie orthogonale (la "diagonale médiatrice") ;
- Deux triangles isocèles adjacents le long de l'autre diagonale.

Les deltoïdes isocèles

- Une diagonale est médiatrice de l'autre ;
- Un axe de symétrie orthogonale (la diagonale médiatrice) ;
- Deux triangles isocèles adjacents le long de l'autre diagonale.

Nous demandons : mais, alors, **qu'est-ce qui fait la différence ?**

</td>
</tr>
</table>

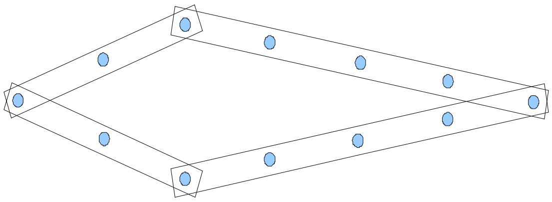
Respondemos:

En la **cometa isósceles** hay:

- Dos triángulos isósceles recostados **de una y otra parte de la segunda diagonal (no mediatriz).**

En el **deltoides isósceles** hay:

- Dos triángulos isósceles recostados **del mismo lado de la segunda diagonal.**



Una cometa isósceles
Un cerf-volant isocèle

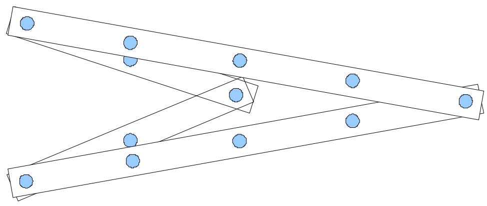
Nous répondons :

Dans le **cerf-volant isocèle,** il y a :

- Deux triangles isocèles **de part et d'autre de la seconde diagonale (non médiatrice)**.

Dans le **deltoïde isocèle**, il y a :

- Deux triangles isocèles adjacents par leur base **du même côté de la seconde diagonale.**



Un deltoides isóscele
Un deltoïde isocèle

Ejercicio 1 (facultativo para los 12 años de edad) Les proponemos entonces a los alumnos tomar como material tres pequeños bandas de misma longitud y una grande.

a) Observe los cuadriláteros tan construibles, pueden tener dos lados paralelos? ¿ Si sí, cómo se llama este cuadrilátero?

b) ¿ Podemos obtener una cometa isósceles? ¿ Sino, por qué?

c) ¿ Podemos obtener un cuadrilátero que no sea "notable" (según la terminología acostumbrada)?

Exercice 1 (à partir de la classe de sixième) Nous proposons alors aux élèves de prendre comme matériel trois petites barrettes de même longueur et un grande.

a) Observez les quadrilatères ainsi constructibles, peuvent-ils comporter deux côtés parallèles ? Si oui, comment s'appelle le quadrilatère obtenu ?

b) Peut-on obtenir un cerf-volant isocèle ? Sinon, pourquoi ?

c) Peut-on obtenir un quadrilatère qui ne soit pas " remarquable" (selon la terminologie habituelle) ?

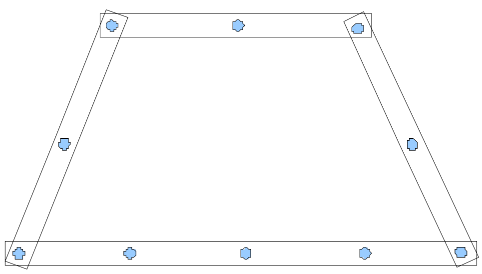


fig.1 trapecio isósceles
un trapèze isocèle

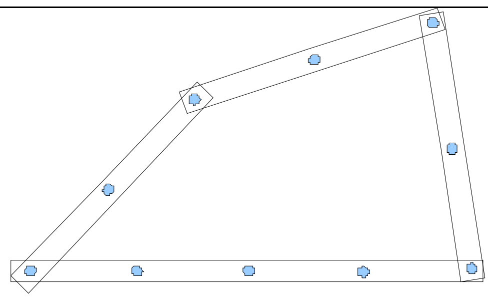


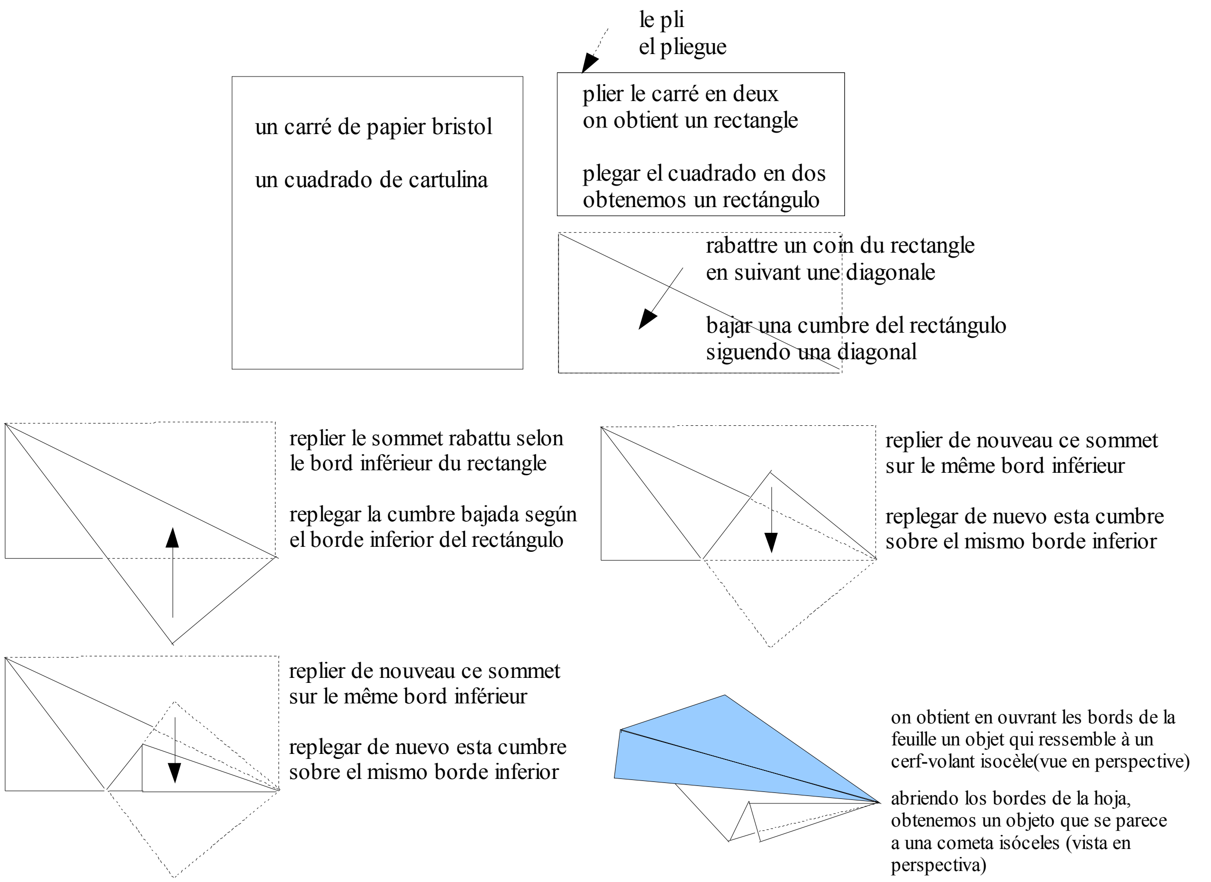
fig.2 cuadrilátero no notable
un quadrilatère non remarquable

La figura 2 no representa una cometa isósceles porque posee tres lados de la misma longitud pero no **dos pares diferentes de lados de la misma longitud**. (Ver también más lejos el ejercicio 2 sobre el mismo sujeto.)	La figure 2 ne représente pas un cerf-volant isocèle car elle possède trois côtés consécutifs de même longueur mais pas **deux paires distinctes de côtés de mêmes longueurs.** (Voyez aussi plus loin l'exercice 2 sur le même sujet.)

Una actividad de iniciación a la noción de cometa isóceles (para el edad de 12 años con un prolongamiento para los más grandes)

Une activité d'initiation à la notion de cerf-volant isocèle (à partir de la classe de sixième avec un prolongement pour les plus grands)

Proponemos a los alumnos hacer un plegamiento (un "**origami**") para construir un avión cuyas aslas son en forma de cometa isósceles.	Nous proposons aux élèves de construire, grâce à un pliage (un "**origami**"), un avion dont les ailes forment un cerf-volant isocèle.



Prolongement de l'activité pour les plus grands
Un prolongamiento para los mayores

Pedimos a **los mayores** dibujar una figura codificada que representa los dobleces sucesivos.

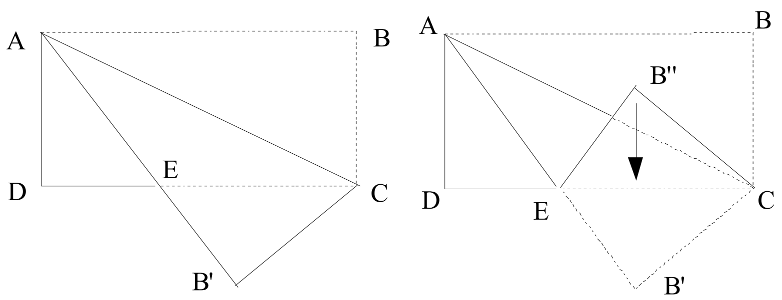
Comentario: la utilización de los plegamientos en geometría es particularmente interesante porque pone en evidencia su carácter "expérimentable" (ver nuestra publicación "Nuevas prácticas de la geometría" ya citada).

Así, dos ángulos son dichos lo mismo medida si son superponibles, por plegamiento por ejemplo.

Nous demandons "**aux plus grands**" de dessiner une figure codée représentant les pliages successifs.

Commentaire : l'utilisation des pliages en géométrie est particulièrement intéressante car elle met en évidence leur caractère "expérimentable" (voir notre publication : "Nouvelles pratiques de la géométrie" déjà citée).

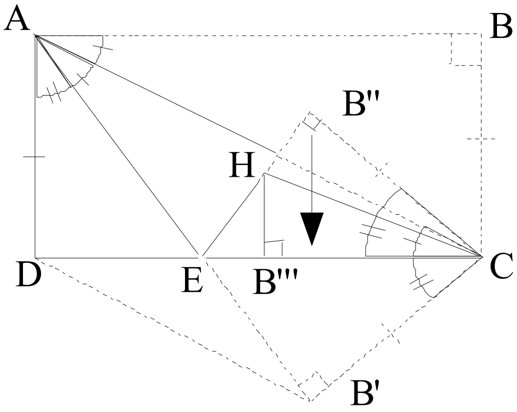
Ainsi, deux angles sont dits de même mesure s'ils sont superposables, par pliage par exemple.



Preguntamos en primer lugar cuál es la medida en grados del ángulo obtenido por doblez a lo largo de la diagonal [AC]. Observamos que plegamos el cuadrado de lado de longitud una unidad, pues el segmento [AD] tiene para longitud ½ y el segmento [DC] tiene para longitud 1. Pues la tangente del ángulo es ½. Utilicemos la función Arc tan de la calculadora observando que este ángulo es agudo, obtenemos:

$\widehat{ACD}$ = 26,6 al décimo de grado.

Nous demandons tout d'abord quelle est la mesure en degrés de l'angle $\widehat{ACD}$ obtenu par pliage le long de la diagonale [AC]. Nous observons que nous avons plié le carré de côté de longueur une unité, donc le segment [AD] a pour longueur ½ et le segment [DC] a pour longueur 1. Donc la tangente de l'angle $\widehat{ACD}$ est ½. Utilisons la fonction : Arc tan de la calculatrice en remarquant que cet angle est aigu, nous obtenons : $\widehat{ACD}$ = 26,6 au dixième de degré près.



Preguntamos entonces a los alumnos cuál es la naturaleza del cuadrilátero ACB' D. Observamos que "se parece" a un trapecio isósceles, vamos a verificar esta conjetura anotando sobre la figura todas las igualdades de ángulos obtenidas por plegamiento. 1) Los ángulos $\widehat{B'AC}$ et $\widehat{BAC}$ son iguales por plegamiento, los ángulos $\widehat{DCA}$ et $\widehat{CAB}$ son superponibles porque alternas internas. 2) Los triángulos ACD, ACB y ACB' son superponibles por construcción del plegamiento pues los ángulos $\widehat{DAC}$ y $\widehat{ACB'}$ son superponibles, son los ángulos a la base del cuadrilátero ACB'D. 3) Por plegamiento AB ' = AB = DC pues las diagonales del cuadrilátero son de misma longitud. 4) Por plegamiento también: AD = BC = B'C. El cuadrilátero tiene dos lados opuestos lo mismo longitud. Las propiedades 2), 3) y 4) muestran que el cuadrilátero ACB'D es un trapecio isósceles. Continuando preguntamos cuál es la medida del ángulo $\widehat{B'''CH}$ **al décimo de grado**.	Nous demandons alors aux élèves quelle est la nature du quadrilatère ACB'D. Nous remarquons qu'il "ressemble" à un trapèze isocèle, nous allons vérifier cette conjecture en notant sur la figure toutes les égalités d'angles obtenues par pliage. 1) Les angles $\widehat{B'AC}$ et $\widehat{BAC}$ sont superposables par pliage, les angles $\widehat{DCA}$ et $\widehat{CAB}$ superposables car alternes-internes. 2) Les triangles ACD, ACB et ACB' sont superposables par construction du pliage donc les angles $\widehat{DAC}$ et $\widehat{ACB'}$ sont superposables, ce sont les angles à la base du quadrilatère ACB'D. 3) Par pliage AB' = AB or AB = DC donc les diagonales du quadrilatère ACB'D sont de même longueur. 4) Par hypothèse AD = BC et par pliage : AD = B'C. Le quadrilatère ACB'D a deux côtés opposés de même longueur. Les propriétés 2), 3) et 4) montrent que le quadrilatère ACB'D est un trapèze isocèle. Pour continuer nous demandons quelle est la mesure de l'angle $\widehat{B'''CH}$ **au dixième de degré près**.

Sabemos que la medida del ángulo $\widehat{ACD}$ es 26,6 en grados, el ángulo $\widehat{DAC}$ es su complementario, pues su medida es 90 – 26,6 = 63,4 en grados. El ángulo $\widehat{DCB'}$ pues mide:

63,4 – 26,6 = 36,8 en grados. El ángulo $\widehat{B'''CH}$ mide pues:

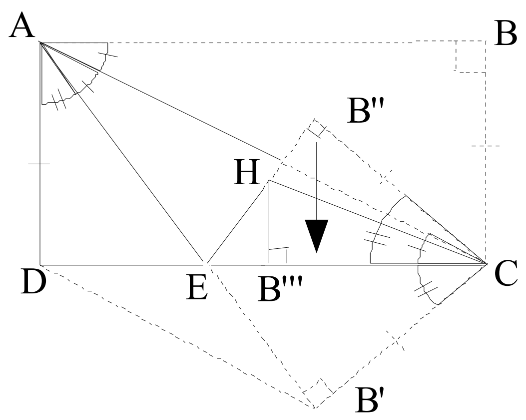
36,8 – 18,4 = 18,4 en grados. (O la mitad –por plegamiento- del ángulo $\widehat{DCB''}$ que es superponible por plegamiento al ángulo $\widehat{DCB'}$, es decir 36,8/2=18,4 al décimo de grado.)

Nous savons que la mesure de l'angle $\widehat{ACD}$ est 26,6 en degrés, l'angle $\widehat{DAC}$ est son complémentaire, donc mesure 90 – 26,6 = 63,4 en degrés, il est superposable à l'angle $\widehat{ACB'}$. L'angle $\widehat{DCB'}$ mesure donc :

63,4 – 26,6 = 36,8 en degrés.

L'angle $\widehat{B'''CH}$ mesure donc :

36,8 – 18,4 = 18,4 en degrés. (Ou bien la moitié -par pliage- de l'angle $\widehat{DCB''}$ qui est superposable par pliage à l'angle $\widehat{DCB'}$, c'est-à-dire :
36,8/2 = 18,4 au dixième de degré près.)



Para acabar les pedimos a los alumnos que citen cometas isósceles que aparecen en la figura.

Los plegamientos ponen de manifiesto de modo muy simple las cometas isóceles.

El cuadrilátero ABCB' es una cometa isósceles porque los triángulos ABC y AB' C son superponibles por doblez a lo largo de su lado común [AC].

El cuadrilátero EB"CB' es una cometa isósceles porque los triángulos EB'C y EB"C son superponibles por doblez a lo largo

Pour terminer nous demandons aux élèves qu'ils citent des cerfs-volants isocèles qui apparaissent dans la figure.

Les pliages font apparaître de façon très simple les cerfs-volants isocèles.

Le quadrilatère ABCB' est un cerf-volant isocèle car les triangles ABC et AB'C sont superposables par pliage le long de leur côté commun [AC].

Le quadrilatère EB"CB' est un cerf-volant isocèle car les triangles EB'C et EB"C sont superposables par pliage le long de leur côté commun [EC].

Le quadrilatère HB"CB''' est un cerf-volant isocèle car les triangles HB"C et

de su lado común [EC]. El cuadrilátero HB"CB'" es una cometa isóceles porque los triángulos HB"C y HB'"C son superponibles por doblez a lo largo de su lado común [HC]. Subrayemos el interés de los **plegamientos que conservan las medidas de ángulos**, así el ángulo recto $\widehat{ABC}$ se replega en $\widehat{AB'C}$ luego $\widehat{EB''C}$ luego $\widehat{HB'''C}$. Todos estos ángulos pues son derechos. En particular, las cometas isósceles estudiadas anteriormente tienen dos ángulos opuestos rectos.	HB'"C sont superposables par pliage le long de leur côté commun [HC]. Soulignons **l'intérêt des pliages qui conservent les mesures d'angles** (par symétrie par rapport au pli), ainsi l'angle droit $\widehat{ABC}$ se replie en $\widehat{AB'C}$ puis $\widehat{EB''C}$ puis $\widehat{HB'''C}$. Tous ces angles sont donc droits. En particulier, les cerfs-volants isocèles étudiés précédemment ont deux angles opposés droits.

§1 Clasificando los cuadriláteros con ayuda de un sistema articulado (a partir de 12 años de edad)

§1 Classification des quadrilatères à l'aide d'un système articulé (à partir de la classe de sixième)

Primera fase **Clasificando los cuadrilateros segun las propiedades de sus lados** **En primer lugar** les proponemos construir con las bandas, cuadriláteros con cuatros lados de misma longitud y les preguntamos ¿Cuales son los cuadriláteros que podemos encontrar? Respuesta: un **cuadrado** si sus ángulos son rectos y un **rombo no cuadrado** si no. **En segundo lugar** contruímos un cuadrilátero con dos pequeñas bandas de misma longitud y dos grandes también de misma longitud. Observamos que hay dos maneras construir el cuadrilátero:	**Première phase** **Classification des quadrilatères selon les propriétés de leurs côtés** **Premièrement** nous proposons, de construire, avec les barrettes, des quadrilatères ayant quatre côtés de même longueur et demandons quels quadrilatères nous pouvons former. Réponse : Un **losange** et si, de plus, les angles sont droits, un **carré**. **Deuxièmement** nous construisons un quadrilatère avec deux petites barrettes de longueurs égales et deux grandes barrettes de longueurs égales. Nous observons qu'il y a deux manières de construire le quadrilatère :

con las pequeñas bandas **consecutivas u opuestas**; - Si las pequeñas bandas (y también las grandes) son consecutivas, obtenemos una **cometa isósceles** (si el cuadrilátero esta convexo) o un **deltoides isóceles** (si el cuadrilátero es concavo). - Si las pequeñas bandas son opuestas, obtenemos un **rectángulo** si los ángulos son rectos y un **paralelogramo no rectángulo** si no. - Observamos que con estas bandas no es posible construir los lados de una **cometa no isósceles,** (es decir, una cometa cuyas diagonales no son perpendiculares) pero sera posible utilisando las bandas como diagonales del cuadrilátero. **En tercero lugar** construímos un cuadrilátero con tres pequeñas bandas de misma longitud y una grande. Con estas **bandas particulares** obtenemos un **trapecio isósceles** si dos ángulos consecutivos son superponibles o si dos lados opuestos son paralelos. **Atención**: esto no es verdad si las bandas son de longitudes cualquieras.	les deux petites sont **consécutives ou opposées** ; - Si les petites barrettes sont consécutives (ainsi que les deux grandes) nous obtenons un **cerf-volant isocèle** (si le quadrilatère est convexe) ou un **deltoïde isocèle** (si le quadrilatère est concave). - Si les petites barrettes sont opposées, nous obtenons un **parallélogramme** et si, de plus, les angles du quadrilatère sont droits, alors nous obtenons un **rectangle**. - Nous remarquons qu'avec ces barrettes nous ne pouvons pas construire les côtés d'un **cerf-volant non isocèle,** (c'est-à-dire, un cerf-volant dont les diagonales ne sont pas perpendiculaires), par contre nous pourrons le construire en utilisant les barrettes en tant que diagonales du quadrilatère. **Troisièmement** nous construisons un quadrilatère avec trois petites barrettes de longueurs égales et une grande. Avec **ces barrettes particulières**, nous obtenons un **trapèze isocèle** s'il existe deux angles consécutifs de même mesure ou s'il existe deux côtés opposés parallèles. **Attention** : ce n'est pas vrai si les barrettes sont de longueurs quelconques.

Segunda fase	**Deuxième phase**
Clasificación de los cuadriláteros segun las propiedades de sus diagonales Proponemos a los alumnos representar con las bandas precedentes las diagonales de los cuadriláteros.	**Classification des quadrilatères selon les propriétés de leurs diagonales** Nous proposons maintenant d'utiliser les barrettes précédentes pour représenter les diagonales des quadrilatères.
En primer lugar cuando las dos diagonales son de misma longitud y se encuentran en sus medios; - Si las diagonales son ortogonales tenemos un **cuadrado**, - si no es un **rectángulo no cuadrado**.	**Premièrement** les diagonales sont de même longueur et se coupent en leur milieu alors nous avons un **rectangle**. Si, de plus, les diagonales sont orthogonales, alors nous avons un **carré.**
En segundo lugar: diagonales de misma longitud, ortogonales que se encuentran en el punto medio de una (sola) diagonal; ahora tenemos una **cometa isósceles**.	**Deuxièmement** les diagonales sont de même longueur et l'une (seulement) d'elles est la médiatrice de l'autre alors nous avons un **cerf-volant isocèle**.
Tercio: diagonales non iguales, ortogonales que se encuentran en el medio de una diagonal, ahora tenemos de nuevo una **cometa isósceles**.	**Troisièmement** les diagonales sont de longueurs différentes et l'une d'elles est médiatrice de l'autre, nous avons encore un **cerf-volant isocèle**.
Cuarto: diagonales no iguales, no ortogonales que se encuentran en el medio de una de ellas, tenemos una **cometa no isósceles.**	**Quatrièmement** les diagonales sont de longueurs différentes, se coupent au milieu de l'une d'elles et ne sont pas orthogonales, nous avons un **cerf-volant non isocèle**.
Quinto: diagonales de longitudes diferentes que se encuentran en sus medios tenemos un **paralelógramo no rectángulo.**	**Cinquièmement** Les diagonales sont de longueurs différentes et se coupent en leurs milieux. Nous avons un **parallélogramme non rectangle**.
Sexto: diagonales de longitudes diferentes, ortogonales que se encuentran en sus puntos medios tenemos un **rombo no cuadrado.**	**Sixièmement** Les diagonales sont de longueurs différentes, elles sont orthogonales et se coupent en leurs milieux, nous avons un **losange non carré**.

Tercera fase **Clasificación de los cuadrilateros segun las medidas de sus ángulos** Proponemos a los alumnos observar la medida de los ángulos formados por los lados del cuadrángulo. - Cuatro ángulos superponibles: tenemos un **cuadrado** si los lados son de misma longitud o un **rectángulo no cuadrado** si no. - Los ángulos opuestos superponibles dos-dos: **un rombo** si los lados son de misma longitud o un **paralelógramo no rombo** si no. - Solo dos pares de ángulos consecutivos superponibles dos a dos: **un trapecio isósceles.**	**Troisième phase** **Classification des quadrilatères selon les mesures de leurs angles** Nous proposons aux élèves d'observer la mesure des angles formés par les côtés du quadrilatère. - Quatre angles superposables alors nous avons un **rectangle**, si, de plus, les quatre côtés sont de même longueur, alors nous avons un **carré.** - Les angles opposés superposables deux à deux alors c'est un **parallélogramme**, si, de plus, deux côtés consécutifs sont de même longueur alors c'est un **losange**. - Il existe deux paires (seulement) d'angles consécutifs superposables alors **c'est un trapèze isocèle**.
Cuarta fase (de recapitulación) Al fin de la actividad, podemos mostrarles a los alumnos las figuras más abajo y preguntarles, por ejemplo, cuáles son los cuadriláteros que: - Son parallelogramos (respuestas : Fig. 1; 2; 5; 6; 8; 9; 10; 11); - Son rectángulos (respuestas: Fig. 2; 6; 8; 9). Esto con el fin de evitar un error frecuente de los alumnos relativo a la inclusión de los conjuntos de figuras geométricas: los alumnos dicen, por ejemplo, que un cuadrado no es un rombo o que un rombo no es un paralelogramo. Observamos que el cuadrilatero de la Fig.7 bisno es un cuadrilatero notable.	**Quatrième phase (de récapitulation)** A la fin de cette activité, nous pouvons montrer aux élèves la page suivante et leur demander, par exemple, quels sont les quadrilatères qui : - Sont des parallélogrammes (réponses : Fig. 1 ; 2 ; 5 ; 6 ; 8 ; 9 ; 10 ; 11) ; - Sont des rectangles (réponses : Fig. 2 ; 6 ; 8 ; 9). Ceci afin d'éviter une erreur fréquente des élèves relative à l'inclusion des ensembles de figures géométriques : les élèves disent, par exemple, qu'un carré n'est pas un losange ou bien qu'un losange n'est pas un parallélogramme. Nous observons que le quadrilatère de la fig. 7 bis n'est pas un quadrilatère remarquable.

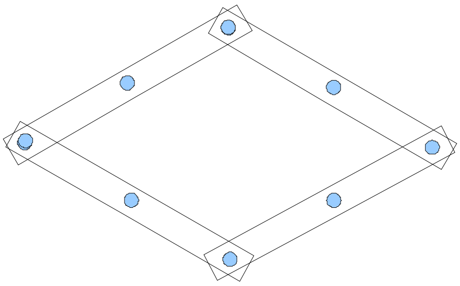


Fig.1

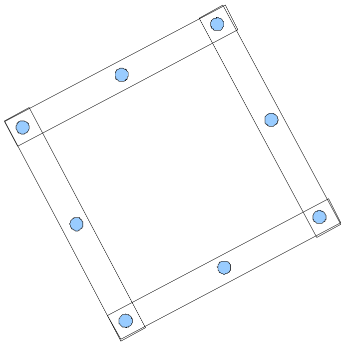


Fig.2

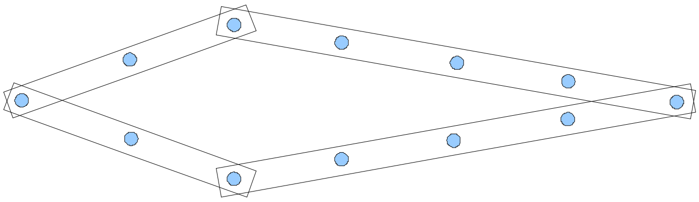


Fig.3

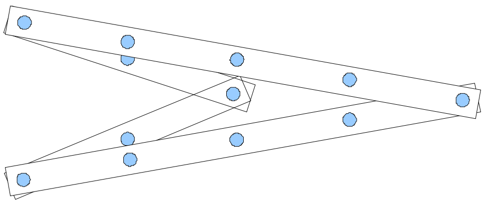


Fig.4

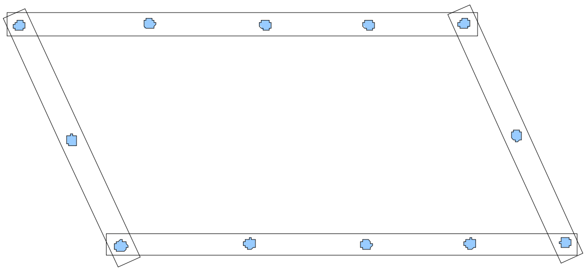


Fig.5

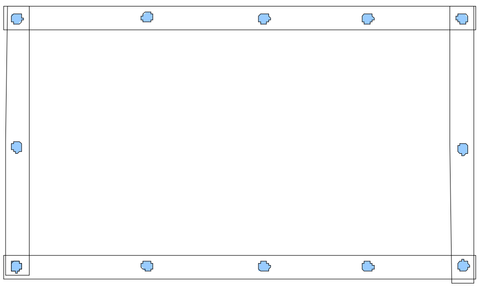


Fig.6

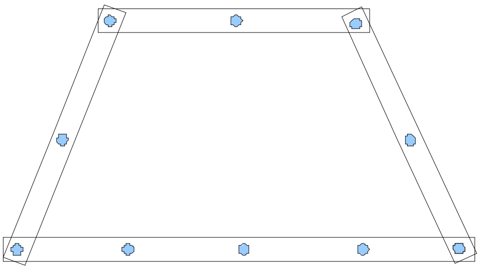


Fig.7

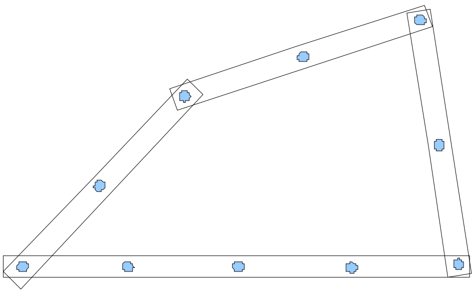


Fig.7 bis Avec les mêmes barrettes qu'en figure 7, nous pouvons construire un quadrilatère qui "ressemble" à un cerf volant isocèle. Ce n'en est pas un car les deux paires de côtés de même longueur ont un élément commun.

Fig.7 bis Con mismas bandas que en figura 7, podemos construir un cuadrilátero que "se parece" una cometa isósceles. No es una porque ambos pares de lados lo mismo longitud tienen un elemento común.

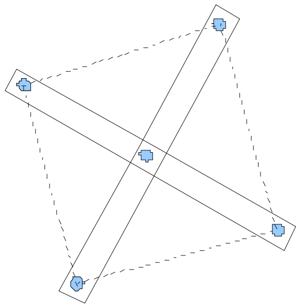


Fig.8

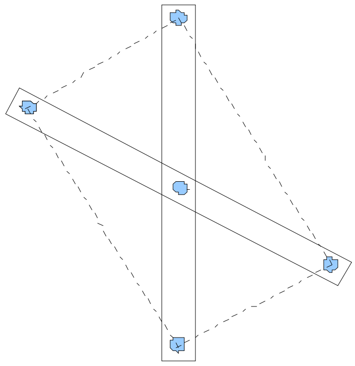


Fig.9

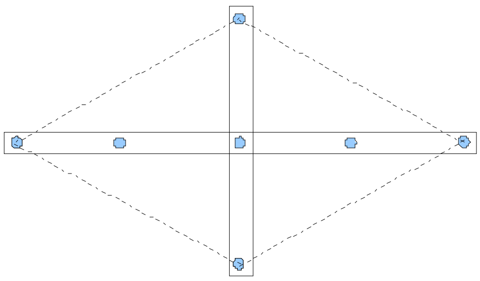


Fig.10

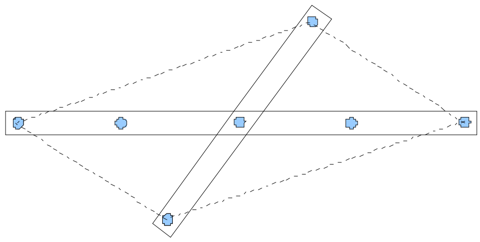


Fig.11

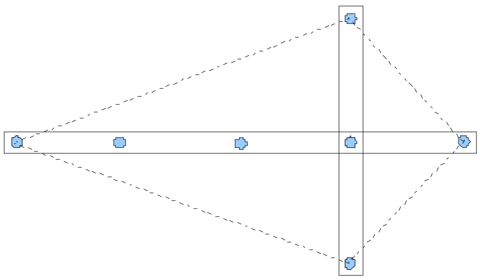


Fig.12

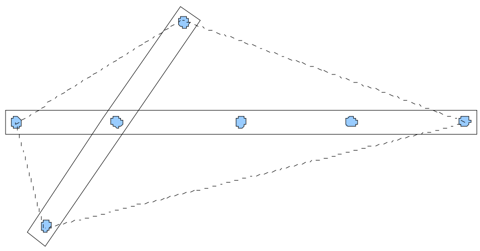


Fig.13

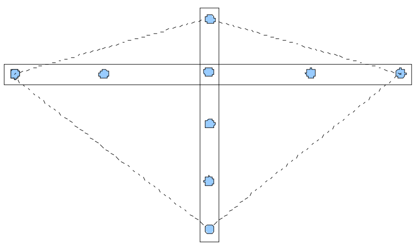


Fig.14

una segunda cometa isósceles con nuevas perforaciones de la pequeña banda: la pequeña se vuelve mediatriz de la grande

un deuxième cerf-volant isocèle avec de nouvelles perforations de la petite barrette : la petite barrette devient médiatrice de la grande

Remarcamos que podemos construír con dos bandas que se cruzan todos los cuadrilateros convexos (las bandas forman sus diagonales).

Remarque : Plus généralement, deux barrettes qui se croisent peuvent être considérées comme les diagonales d’un quadrilatère convexe (remarquable ou non).

§2 Representación de la clasificación de los cuadrados con ayuda de árboles (facultativo a partir de 14 años de edad)

§2 Représentation de la classification des quadrilatères à l'aide d'arbres de choix (facultatif à partir de la classe de quatrième)

Proponemos a los alumnos dibujar un arbol de decisión segun el ejemplo siguiente hecho con la ayuda del docente (**clacificación segun las propiedades de los lados**):	Nous proposons aux élèves de tracer un arbre de choix comme dans l'exemple suivant, construit avec l'aide du professeur, **(classification selon les propriétés des côtés) :**

Español

propiedades de los lados

- iguales
  - orto. **cuadrado**
  - non orto. **rombo no cuadrado**
- iguales opuestos
  - orto. **rectángulo**
  - non orto. **paralelogramo no rectángulo**
- 2 pares de lados consecutivos iguales
  - convexo **cometa iso.**
  - concavo **deltoides isósceles**
- dos lados opuestos paralelos (solamente)
  - los otros dos lados opuestos iguales **trapecio isósceles**
  - **trapecio no isósceles**

Français

propriétés des côtés

- quatre côtés de même longueur
  - ortho. **carré**
  - non ortho. **losange non carré**
- côtés opposés de même longueur 2 à 2 (seulement)
  - ortho. **rectangle non carré**
  - non ortho. **parallélogramme non rectangle**
- 2 paires seulement de côtés consécutifs de même longueur
  - convexe **cerf-volant isocèle**
  - concave **deltoïde isocèle**
- deux côtés opposés parallèles (seulement)
  - les 2 autres côtés de même longueur **trapèze isocèle**
  - **trapèze non isocèle**

Despues, los alumnos continuan con ayuda del docente segun **las propiedades de las diagonales:**	Ensuite les élèves continuent avec l’aide du professeur le classement selon **les propriétés des diagonales :**

Español

propiedades de las diagonales

- de misma longitud
  - se encuentran en sus medios
    - ortogonales **cuadrado**
    - non orto. **rectángulo no cuadrado**
  - se encuentran en un medio
    - ortogonales **cometa isósceles**
    - non orto. **cometa no isósceles**
- de longitudes diferentes
  - se encuentran en sus medios
    - orto. **rombo**
    - non orto. **paraleló. no rombo**
  - se encuentran en un medio
    - orto. **cometa isósceles**
    - non orto. **cometa no isósceles**

Français

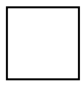
propriétés des diagonales

- de même longueur
  - se coupent en leurs milieux
    - orthogonales **carré**
    - non ortho. **rectangle non carré**
  - se coupent en un milieu
    - orthogonales **cerf-vol. isocèle**
    - non ortho. **cerf-vol. non isocèle**
- de longueurs différentes
  - se coupent en leurs milieux
    - ortho. **losange**
    - non ortho. **parallélo. non losange**
  - se coupent en un seul milieu
    - ortho. **cerf-vol. isocèle**
    - non ortho. **cerf-vol. non isocèle**

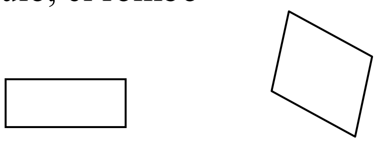
Para los mayores es intersante continuar la clasificación segun el número de los ejes de simetría o los ejes de rotación, si es posible, sin ayudarse de las bandas para invitar el alumno a construirse una imagen mental del cuadrilátero.

Nos parece que es más fácil comenzar por el número más grande de ejes de simetría.

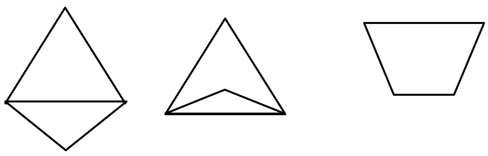
Cuatro ejes de simetría: el cuadrado



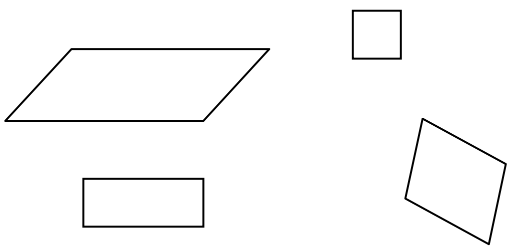
Dos ejes de simetría: el rectángulo, el rombo



Un eje de simetría: la cometa isósceles, el deltoide isósceles, el trapecio isósceles



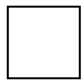
Un centro de simetría: el paralelógramo, el cuadrado, el rectángulo, el rombo



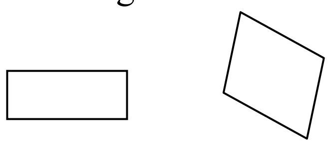
Pour les plus grands, il est intéressant de continuer la classification selon le nombre d'axes de symétrie ou de rotation, si possible, sans s'aider des barrettes pour inciter l'élève à se construire une image mentale du quadrilatère.

Il nous parait plus facile de commencer par le plus grand nombre d'axes de symétrie.

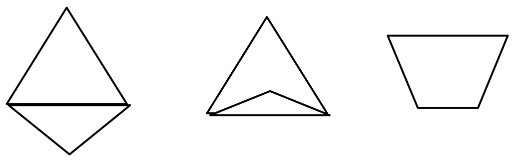
Quatre axes de symétrie : le carré



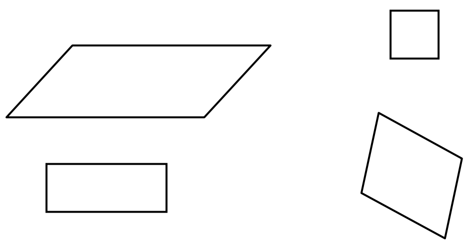
Deux axes de symétrie : le rectangle, le losange



Un axe de symétrie : le cerf-volant isocèle, le deltoïde isocèle, le trapèze isocèle



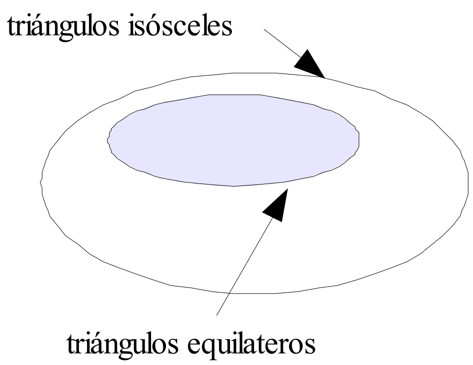
Un centre de symétrie : le parallélogramme, le carré, le rectangle, le losange

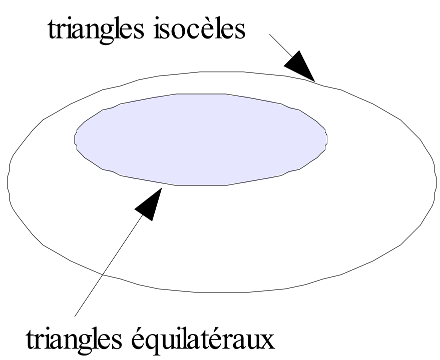


§3 Clasificación de los cuadrilateros con los diagramos de VENN (de 12 años a 15 años de edad y más)

§3 Classification des quadrilatères avec les diagrammes de VENN (de la classe de sixième au lycée)

Es interesante proseguir con el fin de poner de nuevo en memoria a los alumnos la representación de los conjuntos por los diagramas de Venn. Presentamos, capítulo 15 de nuestro libro "Del dibujo percibido a la figura construida" (ediciones Ellipses, Paris 2005) ejemplos de esta técnica muy **demostrativa** para razonar sobre las figuras geométricas. Recordemos que podemos presentar los conjuntos de objetos matemáticos por una línea curva cerrada (por ejemplo el conjunto de los triángulos isósceles) y la inclusión de un conjunto en otro (por ejemplo la inclusión del conjunto de los triángulos equiláteros en el de los triángulos isósceles) por una segunda línea curva cerrada dentro de la primera.	Il est intéressant de poursuivre afin de remettre en mémoire aux élèves la représentation des ensembles par les diagrammes de Venn. Nous avons présenté, chapitre 15 de notre livre “Du dessin perçu à la figure construite” (éditions Ellipses, Paris 2005) des exemples de cette technique très **démonstrative** pour raisonner sur les figures géométriques. Rappelons que nous pouvons présenter les ensembles d’objets mathématiques par une ligne courbe fermée (par exemple l’ensemble des triangles isocèles) et l’inclusion d’un ensemble dans un autre (par exemple l’inclusion de l’ensemble des triangles équilatéraux dans celui des triangles isocèles) par une seconde ligne courbe fermée à l’intérieur de la première.





Esta representación por los diagramas de VENN es un ejercicio muy bueno de ponida en memoria de las propiedades de los cuadriláteros.	Cette représentation par les diagrammes de VENN est un très bon exercice de remise en mémoire des propriétés des quadrilatères.

Podrá, por ejemplo, ser objeto de un trabajo de reflexión en la casa para incitar a los alumnos que se aplican en sus representaciones y así hacerlos muy legibles por otro alumno.

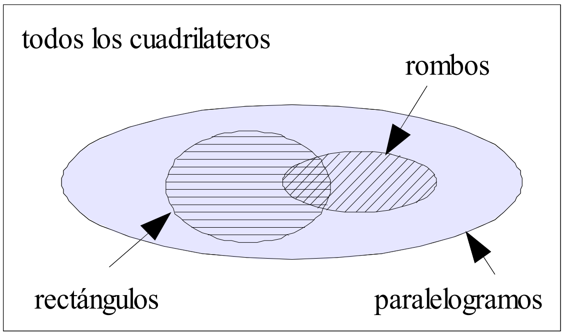
Primero proponemos estudiar los conjuntos siguientes:

Parallelógramos, rectángulos, rombos y luego cuadrados.

Estos conjuntos de cuadriláteros particulares son incluidos en el conjunto general de los cuadriláteros, es por eso que dibujamos un gran rectángulo que representa este conjunto.

Observamos, en primer lugar, que los rectángulos y los rombos son parallelógramos particulares pero que existen allí unos rombos que no son unos rectángulos, dibujamos pues dos líneas cerradas que representan ambos conjuntos pero no alguna de una de ellas es contenida en la otra.

Les pedimos a los alumnos: ¿si el conjunto de los rectángulos tiene una intersección no vacía con el conjunto de los rombos, cual conjunto de cuadriláteros representa esta intersección?



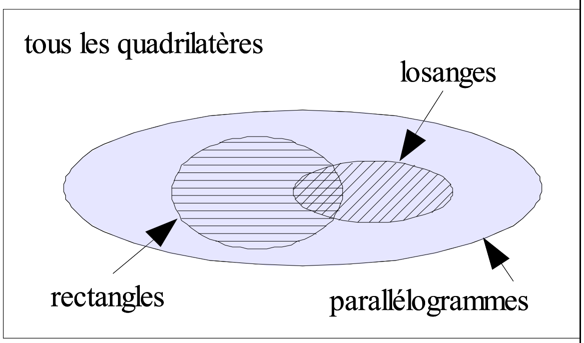
Elle pourra, par exemple, faire l'objet d'un travail de réflexion à la maison pour inciter les élèves à s'appliquer dans leurs représentations et ainsi les rendre bien lisibles par un autre élève.

Tout d'abord nous proposons d'étudier les ensembles des parallélogrammes, rectangles, losanges et ensuite des carrés.

Ces ensembles de quadrilatères particuliers sont inclus dans l'ensemble de tous les quadrilatères, c'est pourquoi nous avons dessiné un grand rectangle qui représente cet ensemble.

Nous remarquons, tout d'abord, que les rectangles et les losanges sont des parallélogrammes particuliers mais qu'il existe des losanges qui ne sont pas des rectangles, nous dessinons donc deux lignes fermées représentant les deux ensembles mais aucune de l'une d'elles n'est contenue dans l'autre.

Nous demandons aux élèves : si l'ensemble des rectangles a une intersection non vide avec l'ensemble des losanges, quel ensemble de quadrilatères représente cette intersection ?

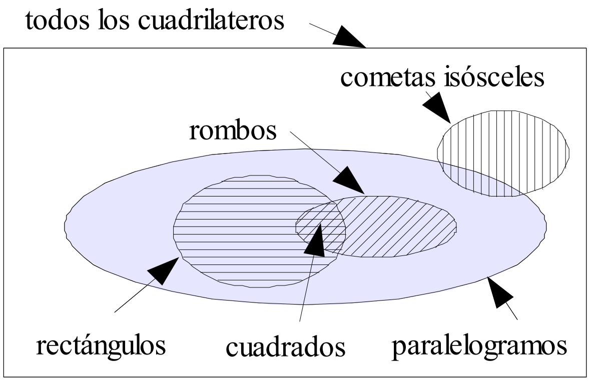


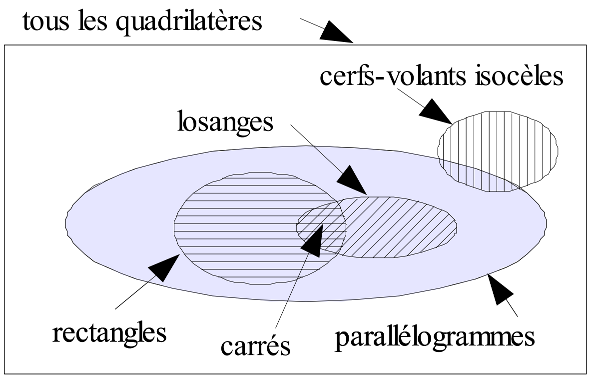
Dicen los alumnos que los rombos tienen cuatro lados de misma longitud y los rectángulos tienen cuatros ángulos superponibles, entonces los cuadrilateros que tienen las dos propiedades son los cuadrados.

Continuamos pidiéndoles colocar el conjunto de las cometas isósceles. Observan que una cometa isósceles necesariamente no tiene sus lados opuestos paralelos pues este conjunto puede, posiblemente, encontrar el de los paralelógramos pero no es incluido dentro. Proponen el dibujo siguiente:

Les élèves disent que les losanges ont quatre côtés de même longueur et les rectangles quatre angles superposables, donc que les quadrilatères qui admettent ces deux propriétés sont les carrés.

Nous continuons en leur demandant de placer l'ensemble des cerfs-volants isocèles. Ils remarquent qu'un cerf-volant isocèle n'a pas nécessairement ses côtés opposés parallèles donc cet ensemble peut, peut-être, rencontrer celui des parallélogrammes mais il n'est pas inclus dedans. Ils proposent le dessin suivant :





Les pedimos, como anteriormente, caracterizar el conjunto intersección del conjunto de los paralelógramos con el conjunto de las cometas isósceles. Devolvemos la llamada cuáles son las propiedades del parallélogrammes: Los lados opuestos son de misma longitud dos-dos.

Y de las cometas isósceles: dos lados consecutivos son de misma longitud y los otros dos lados también.

Nous leur demandons, comme précédemment, de caractériser l'ensemble intersection de l'ensemble des parallélogrammes avec l'ensemble des cerfs-volants isocèles.

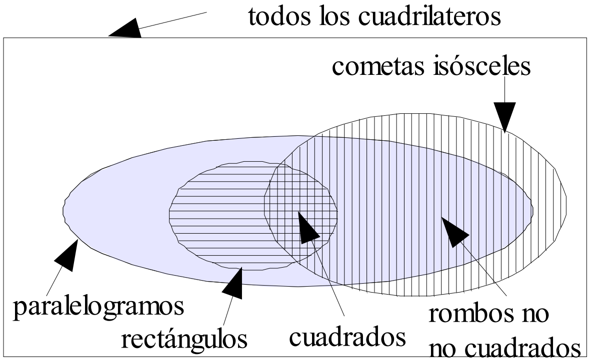
Nous rappelons quelles sont les propriétés des parallélogrammes : les côtés opposés sont de même longueur deux à deux.

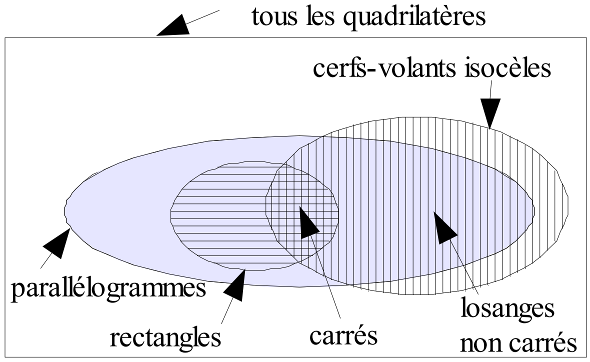
Et les propriétés des cerfs-volants isocèles : il existe deux côtés consécutifs de même longueur et les deux autres côtés aussi.

Los cuadriláteros que pertenecen al conjunto intersección de ambos conjuntos (parallelógramos y cometas isósceles) deben pues tener sus cuatro lados de misma longitud, son pues rombos. Sobre nuestra figura comprobamos que el conjunto de los rombos no es incluido en la intersección de los conjuntos paralelogramos y cometas isósceles, les pedimos entonces a los alumnos transformar la figura con el fin de que tome en consideración este resultado.

Les quadrilatères appartenant à l'ensemble intersection des deux ensembles (parallélogrammes et cerfs-volants isocèles) doivent donc avoir leurs quatre côtés de même longueur, ce sont donc des losanges.

Sur notre figure nous constatons que l'ensemble des losanges n'est pas inclus dans l'intersection des ensembles parallélogrammes et cerfs-volants isocèles, nous demandons alors aux élèves de transformer la figure afin qu'elle prenne en compte ce résultat.





Observando la figura les pedimos a los alumnos escribir las propiedades de las intersecciones de los conjuntos, siguiendo el modelo:

{paralelogramos}∩{cometas isosceles} = {rombos}.

Ahora nos proponen:

{rectangulos} ∩ {cometas isosceles} = {cuadrados}.

Les preguntamos ¿ existe un cuadilatero interessante que no es en alguno conjonto de la figura? Les pedimos entonces: ¿ conozca usted un cuadrilátero interesante quién no aparece en ninguno de estos conjuntos? Observamos juntos los árboles construidos anteriormente y

Nous demandons aux élèves d'écrire, en observant le schéma ci-dessous, les propriétés des intersections des ensembles, en suivant le modèle :

{parallélogrammes}∩{cerfs-volants isocèles} = {losanges}.

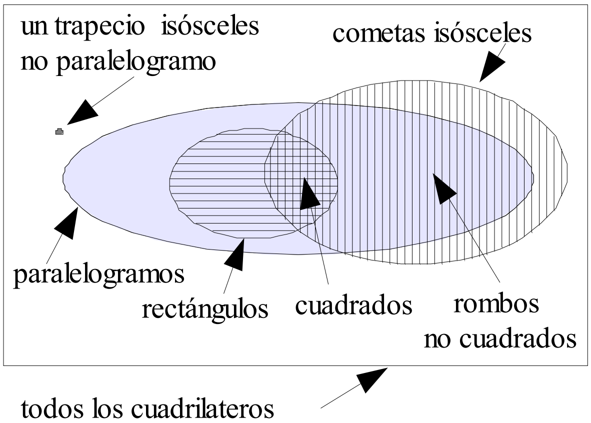
Ils nous proposent :

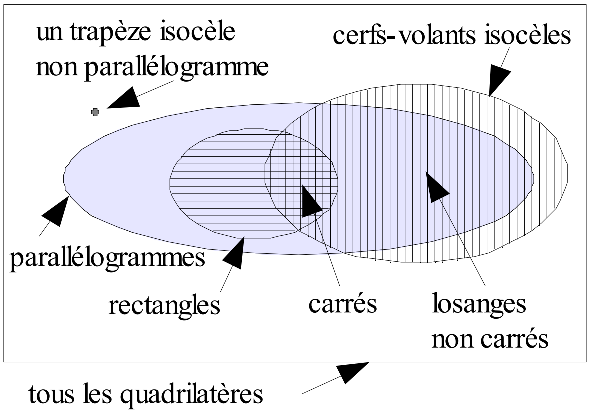
{rectangles}∩{cerfs-volants isocèles} = {carrés}.

Nous leur demandons alors : connaissez vous un quadrilatère intéressant qui n'apparaît dans aucun de ces ensembles ?

Nous observons ensemble les **arbres des choix** construits précédemment et remarquons que le trapèze isocèle n'apparaît dans aucun des ensembles observamos que el trapecio isósceles no aparece en ninguno de los conjuntos de nuestra figura, aumentamos pues un conjonto en el conjunto de los cuadriláteros que contiene un trapecio isóscele que no es un parallelogramo.

de notre figure, nous ajoutons donc un ensemble dans l'ensemble des quadrilatères qui contient un trapèze isocèle qui n'est pas un parallélogramme.





Para acabar el estudio de los cuadrilateros con la ayuda de los diagramos de Venn, proponemos a los alumnos el diagramo siguiente que es semejente a un hombre visto por la encima y les preguntamos cómo se pueden indicar los conjuntos de los cuadrados, rectángulos, rombos, cometas isósceles, trapecios isósceles y de los paralelógramos.

Una solución siguiente página.

Observación: no indicamos, voluntariamente, cuales conjuntos representaban los brazos derechos e izquierdos. Al final de actividad, si la cuestión no es puesta por los alumnos, se lo pedimos.

La respuesta es:

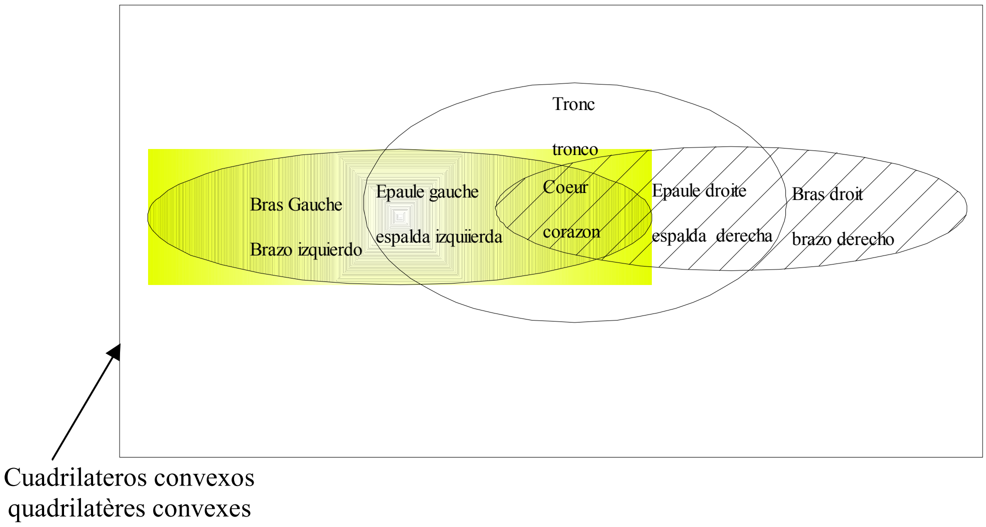
- El brazo izquierdo representa el conjunto de las cometas isósceles no rombos.
- El brazo derecho, el de los trapecios isósceles no rectángulos.

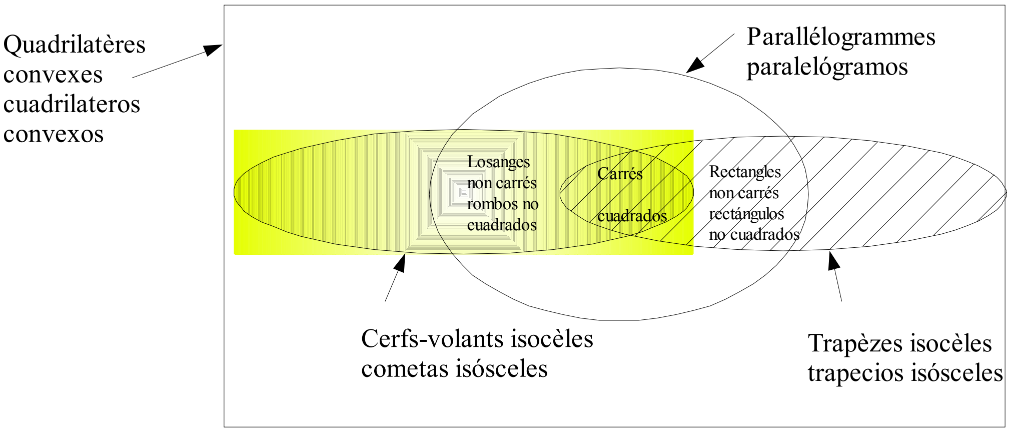
Pour terminer l'étude des quadrilatères grâce aux diagrammes de Venn, nous proposons aux élèves le dessin suivant, qui ressemble à un homme vu de dessus, en leur demandant de placer les ensembles des carrés, des rectangles, des losanges, des cerfs-volants isocèles, des trapèzes isocèles et des parallélogrammes. Voyez une solution page suivante.

Remarque : nous n'avons pas, volontairement, indiqué quels ensembles représentent les bras droits et gauches. En fin d'activité, si la question n'est pas posée par les élèves, nous le leur demandons.

La réponse est :

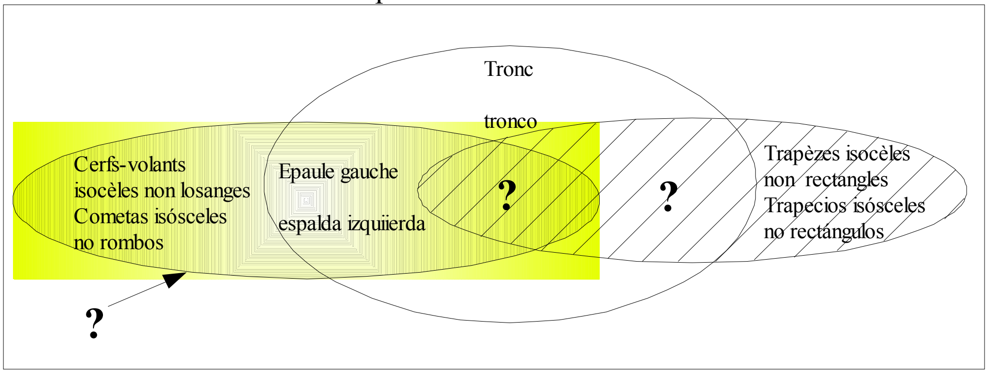
- Le bras gauche représente l'ensemble des cerfs-volants isocèles non losanges.
- Le bras droit, celui des trapèzes isocèles non rectangles.

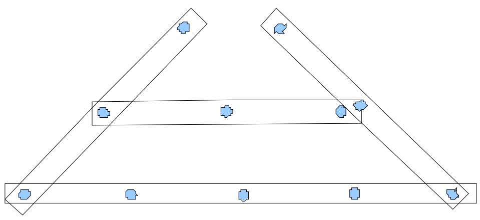
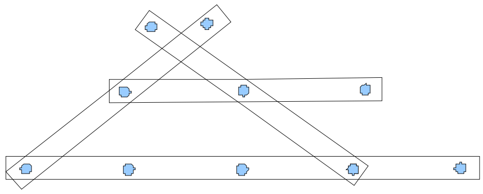




Actividad de recapitulación (en grupo o en la casa)
Activité de récapitulation (en groupe ou à la maison)

En consecuencia de esta actividad, podrá ser interesante presentarles a los alumnos, el hombrecillo visto de la parte superior enmascarando ciertos comentarios y pidiéndoles completar la figura de memoria. He aquí un ejemplo donde voluntariamente mezclamos los datos "físicos" del hombrecillo a los datos matemáticos:	A la suite de cette activité, il pourra être intéressant de présenter aux élèves, le petit bonhomme vu du dessus en masquant certains commentaires et en leur demandant de compléter la figure de mémoire. Voici un exemple où nous avons volontairement mélangé les données “ physiques” du bonhomme aux données mathématiques :



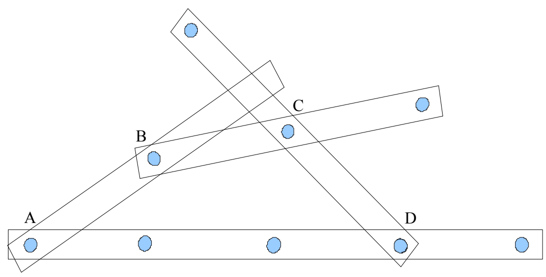
Ejercicio 2 (a partir de 14 años de edad) Ahora les proponemos un “PROBLEMA ABIERTO” (es decir no estructurado por preguntas sucesivas, donde el alumno tiene la iniciativa de la dirección de investigación) que puede tratarse a casa o en grupo de dos o tres alumnos: **estudiar las condiciones de construcción del trapecio isósceles con tres bandas lo mismo longitud.** Vimos, que con los bandas que utilizamos, es posible construir un trapecio isósceles. Les proponemos a los alumnos construir un cuadrilátero con tres bandas superponibles (utilizando los hoyos suplementarios de las pequeñas bandas por ejemplo) y una banda de longitud diferente, más pequeña u más grande (se puede utilizar una de las grandes por ejemplo).	**Exercice 2** (à partir de la classe de quatrième) Maintenant nous vous proposons un “PROBLÈME OUVERT” (c’est-à-dire non structuré par des questions successives, où l’élève a l’initiative de la direction de sa recherche) qui peut s’étudier à la maison ou en groupe de deux ou trois élèves : **étudier les conditions de construction du trapèze isocèle avec trois barrettes de même longueur.** Nous avons vu, qu’avec les barrettes que nous utilisons, il est possible de construire un trapèze isocèle. Nous proposons aux élèves de construire un quadrilatère avec trois barrettes de longueurs égales (on peut utiliser les trous supplémentaires des petites barrettes par exemple) et une barrette de longueur différente, plus petite ou plus grande (on peut utiliser une des deux grandes barrettes).
 Fig. 1 En la **figura 1** observamos	 Fig. 2 Dans la **figure 1** nous remarquons

<table>
<tr><td>que no nos es posible construir, con semi-pequeñas bandas y la grande, un trapecio isósceles.

Vemos que la suma de las longitudes de las pequeñas bandas es más pequeña que la longitud de la grande.
En la figura 2, acortamos la gran banda y vemos que podemos construir un trapecio. Pedimos: ¿ Es necesariamente isósceles?</td><td>qu’il ne nous est pas possible de construire, avec des demi-petites barrettes et la grande, un trapèze isocèle.
Nous observons que la somme des longueurs des petites barrettes est plus petite que la longueur de la grande. Dans la figure 2, nous avons raccourci la grande barrette et nous voyons que nous pouvons construire un trapèze. Nous demandons :
Est-il nécessairement isocèle ?</td></tr>
</table>

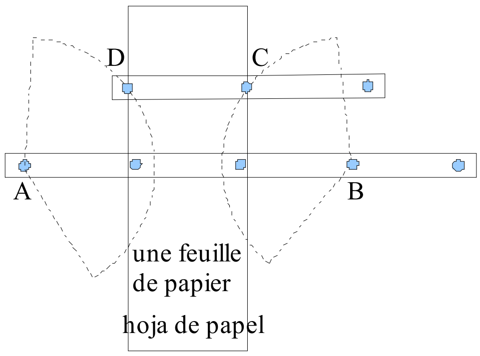
<table>
<tr><td>Vemos que ligeramente se puede mover las bandas y que no somos seguros para que las bandas opuestas no superponibles sean paralelas.
Tenemos ahora un comentario interesante: el cuadrado abajo tiene dos triángulos isósceles: ABC y BCD pero no es una cometa isósceles porque los dos triángulos tienen un lado común [BC].</td><td>Nous voyons que l’on peut bouger légèrement les branches et que nous ne sommes pas sûrs que les branches opposées qui ne sont pas de même longueur soient parallèles.

Nous observons, d’autre part, que le quadrilatère ci-dessous possède deux triangles isocèles : ABC et BCD mais ça n’est pas un cerf-volant isocèle car ces deux triangles ont un côté commun : [BC].</td></tr>
</table>



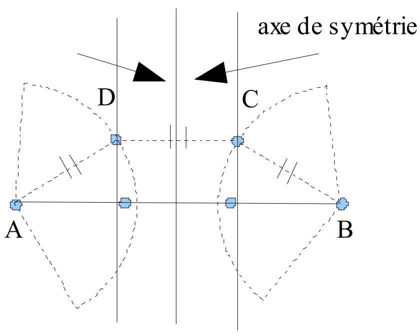
<table>
<tr><td>Dejamos a los alumnos reflexionar sobre la casa o en clase en grupo.
Observamos que la suma de las longitudes de las tres pequeñas bandas debe ser superior a la longitud de la grande para poder definir el trapecio.</td><td>Nous laissons les élèves réfléchir à la maison ou en groupe en classe.
Nous observons que la somme des longueurs des trois petites bandes doit être supérieure à la longueur de la grande afin de définir un trapèze.</td></tr>
</table>

He aquí una proposición de construcción del trapecio isósceles utilizando al compás.	Voici une proposition de construction du trapèze isocèle utilisant le compas.



Ponemos la gran banda sobre una primera hoja de **papel cuadriculado**. Con un compás trazamos sobre esta hoja dos arcos de círculo de rayo la distancia entre dos hoyos de las pequeñas bandas y de centros los hoyos A y B de la gran banda. Recortamos una banda de papel cuya anchura es igual al rayo de los arcos de círculo. Hacemos resbalar la hoja de papel perpendicularmente a la gran banda y a la distancia igual de los puntos A y B (ayudandose de los cuadrículas del primer papel). Entonces la intersección de la banda con ambos arcos de círculo nos libran las extremidades C y D de la pequeña banda. El cuadrilátero ABCD es un trapecio isósceles. Observamos que hay una solución suplementaria y simétrica con relación a la gran banda. Pedimos entonces cómo hacer sin utilizar banda de papel. Observamos que el trapecio isósceles admite un eje de simetría que pasa por los puntos medios de	Nous posons la grande barrette sur une première feuille de **papier quadrillé**. Avec le compas nous traçons sur cette feuille deux arcs de cercle de rayon la distance entre deux trous des petites barrettes et de centres les trous A et B de la grande barrette. Nous découpons une bande de papier dont la largeur est égale au rayon des arcs de cercle. Nous faisons glisser cette bande de papier perpendiculairement à la grande barrette et à égale distance des points A et B (en s'aidant du quadrillage du premier papier, le placement sera, de ce fait, approché). Alors l'intersection de la bande avec les deux arcs de cercle nous délivre les extrémités C et D de la petite barrette. Le quadrilatère ABCD est un trapèze isocèle. Nous remarquons qu'il y a une autre solution, symétrique par rapport à la grande bande. Nous demandons alors comment faire sans utiliser de bande de papier. Nous observons que, le trapèze isocèle admettant un **axe de symétrie** passant par les points milieux

ambas lados paralelos. Ahora basta con trazar dos derechas ortogonales a los lados paralelos, distantes de la anchura de una pequeña banda y que son simétricos con relación al eje de simetría del trapecio.	des deux côtés parallèles, il suffit de tracer deux droites orthogonales aux côtés parallèles, distantes de la largeur d'une petite bande et symétriques par rapport à l'axe de symétrie du trapèze.

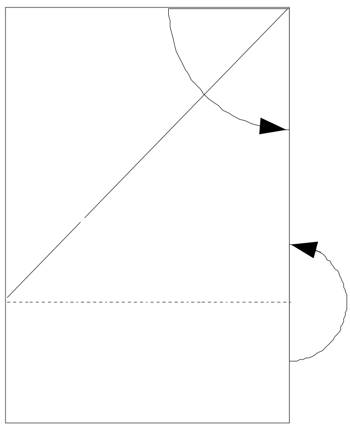


AD = DC = CB.

§4 Construir los cuadriláteros notables por dobleces (a partir de 12 años de edad)

§4 Construire les quadrilatères remarquables par pliage (à partir de la classe de sixième)

Primera fase : los cuadrados y los rectángulos Les pedimos a los alumnos recortar hoja A4 en cuadrados sin utilizar la escuadra ni la regla. Después de discusión, decidimos sobreponer, con un doblez, el borde superior de la hoja con su borde derecho. Obtenemos un tercio vertice del cuadrado. Mismo basta luego con replegar el borde derecho para obtener, al cabo del pliegue, la cuarta vertice del cuadrado.	**Première phase : les carrés et les rectangles** Nous demandons aux élèves de découper des feuilles A4 en carrés sans utiliser ni l'équerre ni la règle. Après discussion, nous décidons de superposer le bord supérieur de la feuille avec son bord droit. On obtient un troisième sommet du carré. Il suffit ensuite de replier le bord droit sur lui-même pour obtenir, au bout du pli, le quatrième sommet du carré.



Rabattre le bord supérieur de la feuille sur son bord droit, on obtient une diagonale du carré

Bajar el borde superior de la hoja sobre su borde derecho, obtenemos una diagonal del cuadrado

Replier la feuille sur elle-même horizontalement au pied de la diagonale

Doblar la hoja horizontalmente sobre si misma al pie de la diagonal

Pedimos entonces los alumnos cuáles propiedades del cuadrado utilizamos Utilizamos ambos ángulos rectos superiores de la hoja A4 y su lado superior para obtener dos ángulos rectos del cuadrado y uno de sus lados. Luego plegamos la hoja para trasladar verticalmente sobre el lado derecho de la hoja A4 una longitud igual a su anchura para obtener el segundo lado del cuadrado. Luego construímos por plegamiento de la hoja sobre él misma, el tercer ángulo recto del cuadrado. Ya que ambos bordes verticales de la hoja son paralelos el cuarto ángulo obtenido a la izquierda de la hoja es recto.	Nous demandons alors aux élèves quelles propriétés de la feuille avons-nous utilisées. Nous avons utilisé les deux angles droits supérieurs de la feuille A4 et son côté supérieur pour obtenir deux angles droits du carré et un de ses côtés. Puis nous avons plié la feuille pour reporter verticalement sur le côté droit de la feuille A4 une longueur égale à sa largeur pour obtenir le deuxième côté du carré. Ensuite nous avons construit par pliage de la feuille sur elle-même, le troisième angle droit du carré. Puisque les deux bords verticaux de la feuille sont parallèles le quatrième angle obtenu à gauche de la feuille est droit.
Ahora cortamos la parte exterior al cuadrado. Vamos a construir con esta hoja cuadriláteros de área dada sin utilizar ni la regla ni el compás ni la calculadora. Primero, supongamos que **la medida del lado del cuadrado sea una unidad.**	Maintenant nous coupons la partie extérieure au carré. Nous allons construire avec cette feuille des quadrilatères d'aire donnée sans utiliser la règle, ni le compas, ni la calculatrice. Premièrement, supposons que **la mesure du côté du carré soit une unité.**

Vamos a dar un nombre a esta unidad, les pedimos a los alumnos proponer un nombre de unidad, por ejemplo, el boulga. (Le aconsejamos al profesor escoger un nombre dado por los alumnos). Notamos la unidad de área: el "boulga cuadrado": 1 boulga^2 . (es la área de un cuadrado de lado de longitud 1 boulga).

Les pedimos a los alumnos construir simplemente, por plegamiento, un rectángulo de superficie ½ boulga^2.

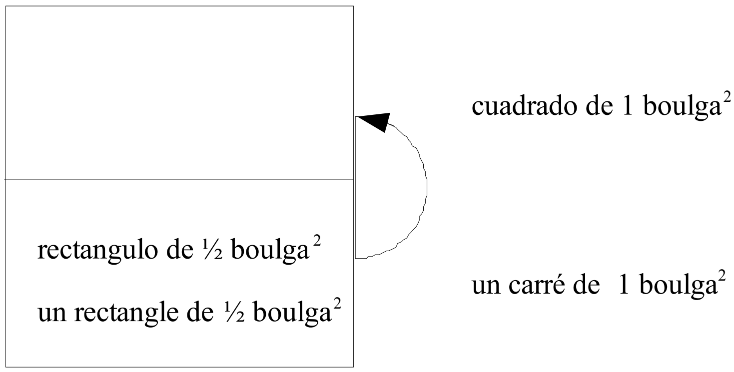
Pliegan el cuadrado en dos segun una de sus medianas. Ahora pedimos construir un cuadrado de superficie ¼ boulga^2. Pliegan su rectángulo en dos y obtenen su cadrado.

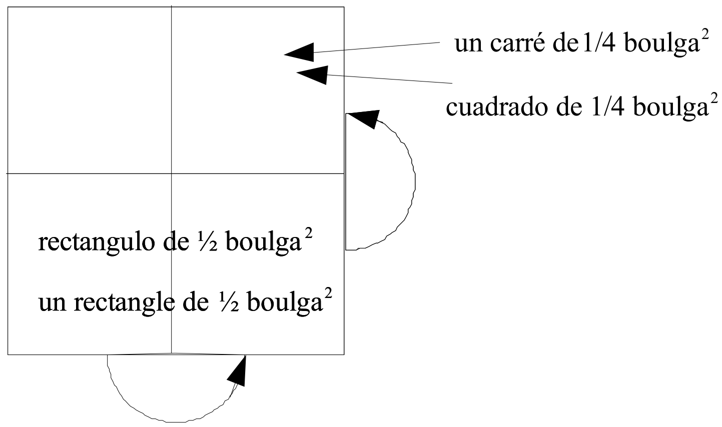
Nous allons donner un nom à cette unité, nous demandons aux élèves de proposer un nom d'unité, par exemple, le "boulga". (Nous conseillons au professeur de choisir un nom donné par les élèves).

Nous noterons l'unité d'aire : le "boulga carré" : 1 boulga^2 (c'est l'aire d'un carré de côté 1 boulga).

Nous demandons aux élèves de construire simplement, par pliage, un rectangle d'aire ½ (en boulga^2).

Ils plient le carré en deux, selon une de ses médianes. Maintenant nous demandons de construire un carré d'aire ¼ (en boulga^2). Ils plient leur rectangle en deux et obtiennent un carré.





Luego (un poco más difícil), pedimos construir por plegamientos

Ensuite (un peu plus difficile), nous demandons de construire par del gran cuadrado, un cuadrado de superficie ½ boulga^2.

Les dejamos reflexionar y les ayudamos si es necesario.

Para los más jóvenes, es inútil introducir la medida de la diagonal de un cuadrado de lado unidad: el doblez muestra bien que cuando se replega las cuatro vertices del cuadrado sobre su centro se obtienen dos nuevos cuadrados superpuestos pues la misma área.

pliages du grand carré, un carré d'aire : ½ (en boulga^2).

Nous les laissons réfléchir et nous les aidons si nécessaire.

Pour les plus jeunes, il est inutile d'introduire la mesure de la diagonale d'un carré de côté unité : le pliage montre bien que lorsque l'on replie les quatre sommets du carré sur son centre on obtient deux nouveaux carrés superposés donc de même aire.

Para los mayores

Es interesante pedir justificar el resultado, por la aplicación del teorema de Pitágoras.

Cada uno de cuatro pequeños cuadrados anteriormente construidos de área ¼ boulga^2 tiene para longitud de diagonal $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (boulga). Estas diagonales son los dobleces que forman el cuadrilátero buscado, éste es pues un rombo cuyas diagonales son de misma longitud, es pues un cuadrado de área:

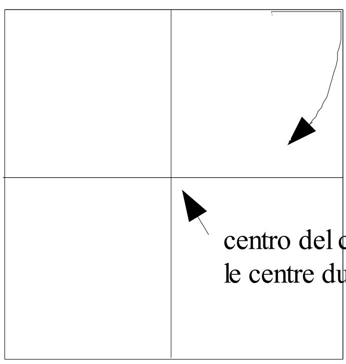
$$\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\right]^2 = \frac{1}{2} \text{ (boulga}^2\text{).}$$

Pour les plus grands

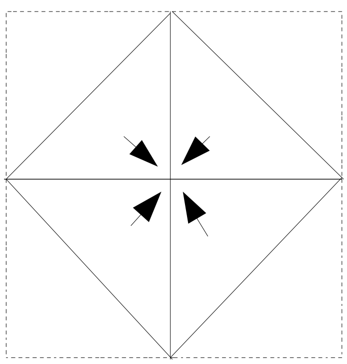
Il est intéressant de demander de justifier le résultat par l'application du théorème de Pythagore.

Chacun des quatre petits carrés précédemment construits d'aire ¼ (en boulga^2) a pour longueur de diagonale $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (en boulga). Ces diagonales sont les plis qui forment le quadrilatère recherché, celui-ci est donc un losange dont les diagonales sont de même longueur, c'est donc un carré d'aire :

$$\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\right]^2 = \frac{1}{2} \text{ (en boulga}^2\text{).}$$



rectangulo de ½ boulga^2
un rectangle de ½ boulga^2



Segunda fase : los rombos

Dejamos a los alumnos reflexionar sobre las propiedades de los rombos con el fin de encontrar un pegamiento dando uno que no sea un cuadrado.

Los alumnos dicen que las diagonales de un rombo son ortogonales, que se pueden utilizar una de las diagonales del cuadrado para plegar el papel a lo largo de éste (ver la siguiente figura). (Ver también una segunda construcción del rombo, utilisando una hoja A4, en la ficha por los alumnos n°4.)

Una solución es propuesta:

Plegar el cuadrado en dos a lo largo de una diagonal. Obtenemos un triángulo rectángulo isósceles.

Tirar un lado del ángulo recto del triángulo a lo largo de la hipotenusa. Obtenemos un nuevo vertice E.

Para acabar, tirar el segundo lado sobre la misma diagonal.

Deuxième phase : les losanges

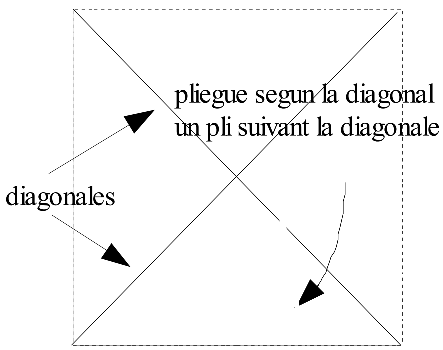
Nous laissons les élèves réfléchir sur les propriétés du losange afin de trouver un pliage en donnant un qui ne soit pas un carré. Les élèves disent que les diagonales d'un losange sont orthogonales et que l'on
peut utiliser l'une des diagonales du carré pour plier le papier le long de celle-ci (voir la figure ci-dessous). (Une autre construction du losange, à partir d'une feuille de format A4, est présentée dans la fiche élève n°4.)

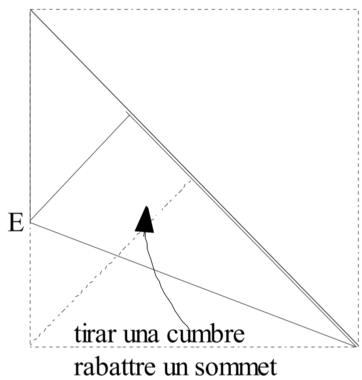
Une solution est proposée :

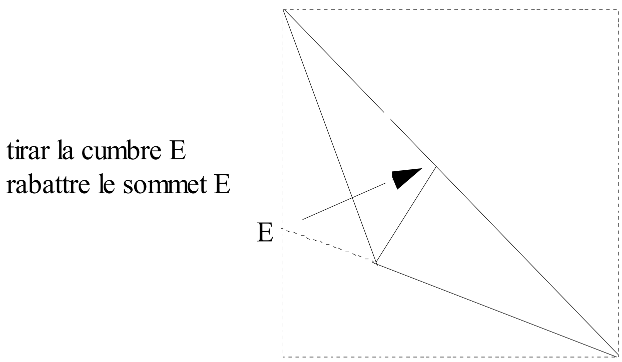
Plier le carré en deux le long d'une diagonale. On obtient un triangle rectangle isocèle.

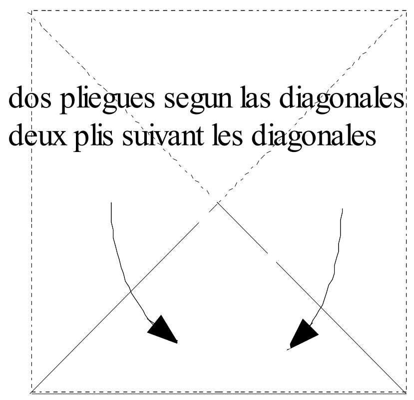
Rabattre un côté de l'angle droit du triangle le long de l'hypoténuse.

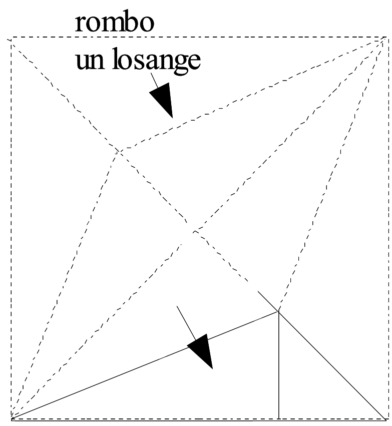
Nous obtenons un nouveau sommet noté E. Pour terminer, rabattre le deuxième côté sur la même diagonale.



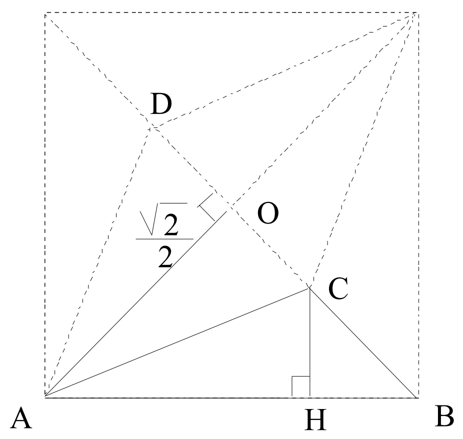




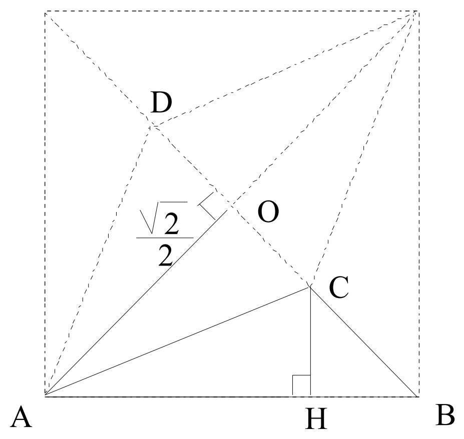




Preguntamos a los mayores:	**Nous demandons aux plus grands :**
¿Cuales son las medidas de los dos diagonales del rombo ? Decidimos dar al lado del cuadrado de origen la medida de la unidad que llamamos el “boulga”. La medida de sus diagonales pues es $\sqrt{2}$ boulga, es también la longitud de la más grande diagonal del rombo.	Quelles sont les longueurs des deux diagonales du losange ? Nous avons décidé de donner aux côtés du carré d’origine la mesure de l’unité que nous avons appelée le “boulga”. La mesure des diagonales du carré est donc $\sqrt{2}$ (en boulga) et c'est aussi la longueur de la plus grande diagonale du losange.



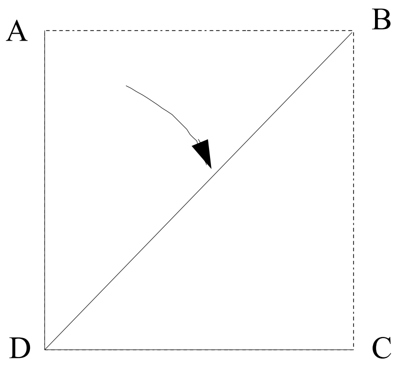
Codifiquemos la figura que representa el doblado y llamemos H el pie de la altura nacida de C del triángulo ABC.

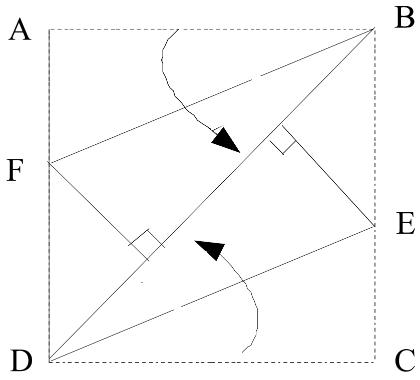


Codons la figure représentant le pliage et appelons H le pied de la hauteur issue de C du triangle ABC.

Para determinar la longitud de la pequeña diagonal [OC] del rombo, observamos que los triángulos ACH y ACO son superponibles por construcción del plegamiento.	Pour déterminer la longueur de la petite diagonale [OC] du losange, nous remarquons que les triangles ACH et ACO sont superposables par construction du pliage.
Tenemos entonces : $AH = \frac{\sqrt{2}}{2}$ y $\widehat{HAC} = \widehat{CAO} = \frac{\widehat{HAO}}{2} = \frac{45}{2} = 22{,}5$ (en grados) y en el triángulo HAC rectángulo en H: $\tan \widehat{HAC} = \frac{CH}{AH} = 0{,}41.$ La longitud de [CH] es: $0{,}41 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}29$ al centésimo de boulga. La longitud de la diagonal [CD] del rombo es 0,6 al décimo de boulga.	On a donc : $AH = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\widehat{HAC} = \widehat{CAO} = \frac{\widehat{HAO}}{2} = \frac{45}{2} = 22{,}5$ (en degrés) et, dans le triangle HAC, rectangle en H : $\tan \widehat{HAC} = \frac{CH}{AH} = 0{,}41.$ La longueur de [CH] est donc : $\tan \widehat{HAC} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}29$ au centième de boulga près. Celle de la diagonale [CD] du losange est donc 0,6 au dixième de boulga près.

Tercera Fase: **el paralelógramo** Dejamos a los alumnos reflexionar pidiéndoles las soluciones más simples posible, he aquí una.	**Troisième Phase :** **le parallélogramme** Nous laissons les élèves réfléchir en leur demandant les solutions les plus simples possibles, en voici une.



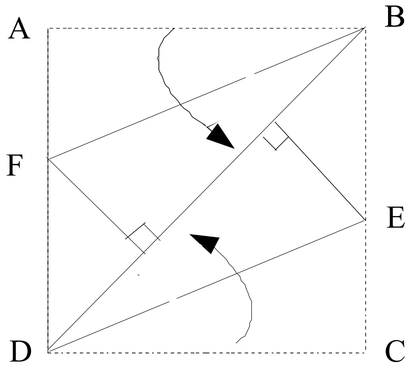


Conservamos uno de ambos dobleces precedentes que nos libraron ambas diagonales del cuadrado. El doblez [BD] separa el cuadrado en dos triángulos rectángulos isósceles ABD y CDB.

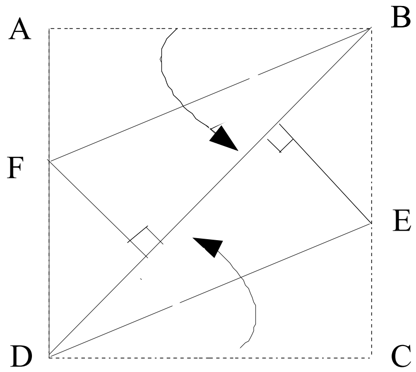
Nous conservons un des deux plis précédents qui nous ont délivré les deux diagonales du carré.

Le pli [BD] sépare le carré en deux triangles rectangles isocèles ABD et CDB.

Bajamos el lado [AB] del cuadrado y el lado [DC] a lo largo de [BD]. Llamamos los dobleces [BF] y [DE].



Nous rabattons le côté [AB] du carré et le côté [DC] qui lui fait face le long de [BD]. Nous appelons les deux plis [BF] et [DE].



Pedimos entonces si el cuadrilátero BEDF tan obtenido es bién un paralelogramo.

Observamos que cada uno de los nuevos pliegues definió la bisectriz de los ángulos $\widehat{ABD}$ y $\widehat{CDB}$ de medida 45 en grados.

La medida de $\widehat{DBF}$ et $\widehat{EDB}$ es 22,5 en grados.

El segmento [DB] encuentra los segmentos [DE] y [FB] sobre los puntos D y B y forma, con ellos dos ángulos alternas internas de medida 22,5. Esto muestra que los segmentos [DE] y [FB] son paralelos.

El cuadrilátero BEFD tiene dos pares de lados opuestos paralelos, es pues un paralelógramo.

Nous demandons alors si le quadrilatère BEDF ainsi obtenu est bien un parallélogramme.

Nous remarquons que chacun des nouveaux plis a défini la bissectrice des angles $\widehat{ABD}$ et $\widehat{CDB}$ de mesure 45 en degrés, donc $\widehat{DBF}$ et $\widehat{EDB}$ ont pour mesure 22,5 en degrés.

Le segment [DB] rencontre les segments [DE] et [FB] en D et B et forme, avec eux deux angles alternes-internes de même mesure 22,5 en degrés.

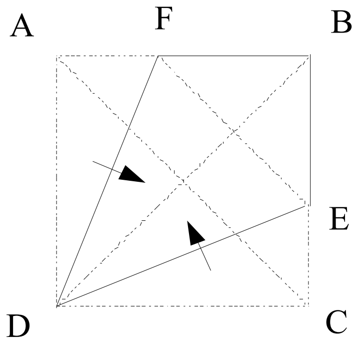
Ceci montre que les segments [DE] et [FB] sont parallèles.

Le quadrilatère BEDF a ses côtés opposés deux à deux parallèles, c'est donc un parallèlogramme.

Pedimos entonces a **los mayores**: ¿Cuál es el área de este parallelógramo? Observamos que, para obtener el paralelógramo BEDF, llevamos al cuadrado ABCD, dos triángulos rectángulos ADE y CBF.	Nous demandons alors **aux plus grands :** Quelle est l'aire de ce parallélogramme ? Nous remarquons que, pour obtenir le parallélogramme BEDF, nous avons oté au carré ABCD, deux triangles rectangles CDE et ABF.

Los lados [AB] y [DC] miden 1 unidad (el boulga) y conocemos la medida de dos ángulos $\widehat{ABF}$ et $\widehat{CDE}$: 22,5 en grados. Los segmentos [AF] y [EC] tienen pues para longitud: Tan (22,5) (boulga) es decir 0,41 al centésimo. El área de cada uno de los triángulos ABF y CDE es entonces: $0{,}41 \times 1 \times 0{,}5 = 0{,}205$. El área del paralelógramo BEDF es: $1 - 0{,}41 = 0{,}59$ (al centésimo de boulga^2).	Les côtés [AB] et [DC] mesurent une unité (le boulga) et nous connaissons la mesure des deux angles $\widehat{ABF}$ et $\widehat{CDE}$: 22,5 en degrés. Les segments [AF] et [EC] ont donc pour longueur : tan (22,5) (en boulga) c'est-à-dire 0,41 au centième près. L’aire de chacun des deux triangles ABF et CDE est donc : $0{,}41 \times 1 \times 0{,}5 = 0{,}205$. L’aire du parallélogramme BEDF est donc : $1 - 0{,}41 = 0{,}59$ (au centième de boulga^2 près).

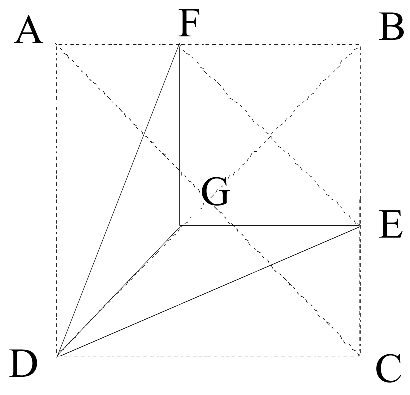
Cuarta fase: las cometas y los deltoides isósceles Les pedimos a los alumnos construir, lo más simplemente posible, con cuadrado de origen, una cometa que no sea un rombo y además un deltoide isósceles. Repetimos las definiciones: la cometa isósceles tiene sus dos diagonales ortogonales, siendo una la mediatriz de la otra. Proponemos siguiente página una construcción.	**Quatrième phase : les cerfs-volants et les deltoïdes isocèles** Nous demandons aux élèves de construire, le plus simplement possible, avec le carré d’origine, un cerf-volant isocèle qui ne soit pas un losange puis un deltoïde isocèle. Nous reprenons les définitions : le cerf-volant isocèle a ses deux diagonales orthogonales, l’une étant la médiatrice de l’autre. Nous proposons page suivante une construction.



rabattre deux sommets opposés du carré le long de la diagonale ne passant pas par ces sommets ; les deux plis et les deux bords du carré en traits continus forment un cerf-volant isocèle non losange

bajar dos cumbres opuestas del cuadrado a lo largo de la diagonal que no pasa por estas cumbres; ambos pliegues y ambos bordes del cuadrado en rayas continas forman una cometa is ósceles no rombo

Observamos que el ángulo $\widehat{FBE}$ de la cometa isósceles es recto.	Remarquons que l' angle $\widehat{FBE}$ du cerf-volant isocèle BEDF est droit.
Les pedimos entonces a los alumnos calcular el área de la cometa isósceles tan construida.	Nous demandons alors aux élèves de calculer l'aire du cerf-volant isocèle ainsi construit.
Según la construcción de los plegamientos, la cometa isósceles está constituida por el cuadrado de origen al cual se quitó dos triángulos rectángulos AFD et CDE que tienen sus pequeños lados [AD] y [DC] de longitud 1 (boulga). Los ángulos $\widehat{FDA}$ et $\widehat{EDC}$ formados por los dobleces y el lado del cuadrado tienen para medida 22,5 (en grados).	D'après la construction des pliages, le cerf-volant isocèle est constitué du carré ABCD d'origine auquel on a ôté deux triangles rectangles AFD et CDE dont les grands côtés [AD] et [DC] ont la même longueur 1 (en boulga). Les angles $\widehat{FDA}$ et $\widehat{EDC}$ formés par les plis et le côté du carré ont pour mesure 22,5 (en degrés).
Pues los otros pequeños lados [AF] y [EC] de los triángulos rectángulos tienen como longitud Tan(22,5), es decir 0,41 (al centésimo de boulga). Los triángulos AFC y CDE tienen cada uno una área de: $(0{,}41 \times 1)/2$. El área de la cometa isósceles es pues: $1 - 0{,}41 = 0{,}59$ boulga^2.	Donc les autres côtés [AF] et [EC] des triangles rectangles ont pour longueur tan (22,5), c'est-à-dire 0,41 (au centième de boulga près). Les triangles AFD et CDE ont donc chacun pour aire : $(0{,}41 \times 1)/2$. L'aire du cerf-volant isocèle est donc : $1 - 0{,}41 = 0{,}59$ (en boulga^2).
Ahora, si bajamos la cumbre B restante del cuadrado (ver la figura siguiente página), ambos dobleces precedentes y los bordes [FB] y [BE] bajados del cuadrado forman un deltoide isósceles FGED cual ángulo $\widehat{FGE}$ es recto.	Maintenant, si nous rabattons le sommet B restant du carré (voir la figure page suivante), les deux plis précédents et les bords [FB] et [BE] rabattus du carré forment un deltoïde FGED isocèle dont l'angle extérieur $\widehat{FGE}$ est droit.



Ejercicio 3 (14 años de edad)

Es posible construir una cometa isósceles a partir de un rectángulo, por ejemplo con una hoja A4.

Recordemos que las hojas utilizadas en imprenta son cortadas de tal modo que la relación entre su longitud y su anchura sea $\sqrt{2}$.

Pedimos a los alumnos verificar con su calculadora que:

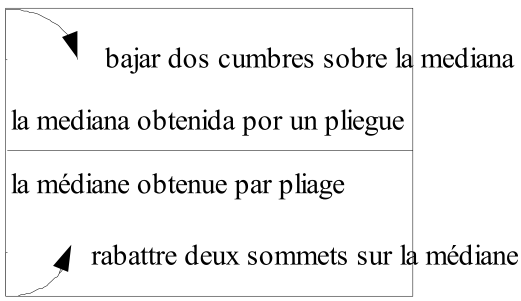
$21 \times \sqrt{2} = 29{,}7$ (al décimo).

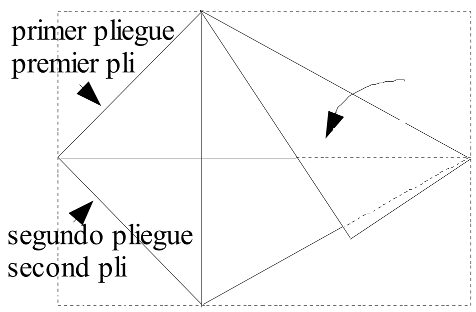
Exercice 3 (pour la classe de 4ème)

Il est possible de construire un cerf-volant isocèle à partir d'un rectangle, par exemple avec une feuille A4.

Rappelons que les feuilles utilisées en imprimerie sont coupées de telle sorte que le rapport entre leur longueur et leur largeur soit $\sqrt{2}$.

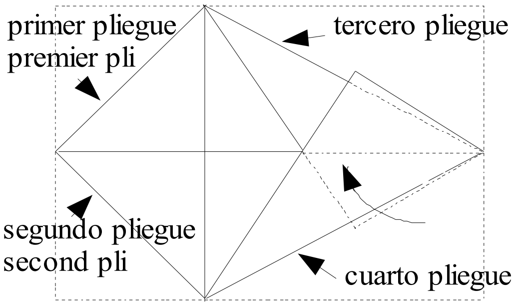
Nous demandons aux plus grands de vérifier avec leur calculatrice que : $21 \times \sqrt{2} = 29{,}7$ (au dixième près).





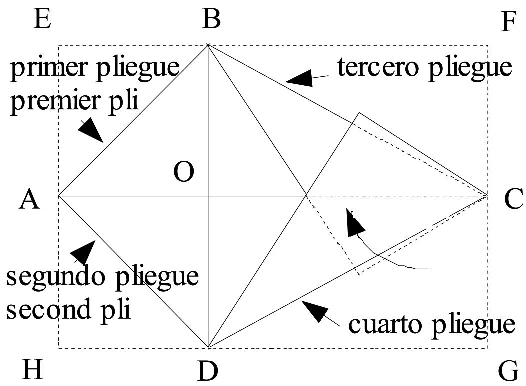
hacer un tercero pliegue de la extremidad del primero hasta la extremidad de la mediana; luego el cuarto pliegue de la extremidad del segundo hasta la extremidad de la mediana

faire un troisième pli de l'extrémité du premier jusqu'à l'extrémité de la médiane, puis un quatrième pli de l'extrèmité du second jusqu'à l'extrémité de la médiane



observamos que los dos últimos pliegues se sobreponen, sin embargo, les pedimos a los alumnos, de observar los pliegues y de deducir de eso simplemente el área, en boulga de esta nueva cometa

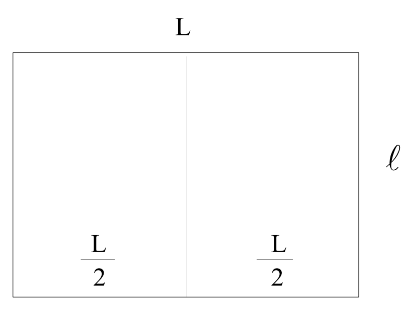
nous remarquons que les deux derniers plis se superposent, cependant, nous demandons aux élèves, d'observer les plis et d'en déduire simplement l'aire, en boulga de ce nouveau cerf-volant



Sugerimos a los alumnos codificar la figura que representa el doblez con el fin de facilitar la descripción y la redacción del raciocinio. Los dos primeros tipos de pliegue [AB] y [AD] comparten a ambos primeros cuadrados EBOA y AODH en cuatro triángulos rectángulos isósceles superponibles. El área del triángulo isósceles ABD es pues la mitad de la del rectángulo EBDH. Ambos pliegues siguientes [BC] y [DC] siguen las diagonales de los rectángulos BFCO y OCGD. El área de los triángulos rectángulos BCO y CDO son pues la mitad de las áreas de estos rectángulos. El área total de la cometa isósceles tan construida es pues la mitad de la del rectángulo EFGH. Utilizamos una hoja A4 cuyas dimensiones son tales como la relación	Nous suggérons aux élèves de coder la figure représentant le pliage afin de faciliter la description puis la rédaction du raisonnement. Les deux premiers plis [AB] et [AD] partagent les deux premiers carrés EBOA et AODH en quatre triangles rectangles isocèles superposables. L'aire du triangle isocèle ABD est donc la moitié de celle du rectangle EBDH. Les deux plis suivants [BC] et [DC] suivent les diagonales des rectangles BFCO et OCGD. L'aire des triangles rectangles BCO et CDO est donc la moitié des aires de ces rectangles. L'aire totale du cerf-volant isocèle ainsi construit est donc la moitié de celle du rectangle EFGH. Nous avons utilisé une feuille A4 dont les dimensions sont telles que le rapport entre sa longueur et sa largeur

entre su longitud y su anchura sea: $\sqrt{2}$ (ver el siguiente ejercicio). Convinimos que la anchura de la hoja medía 1 boulga, pues su longitud es $\sqrt{2}$ boulga. El área de la hoja A4 es pues $\sqrt{2} \times 1 = \sqrt{2}$ boulga^2, y la de la cometa isósceles es $\frac{\sqrt{2}}{2}$ boulga^2.	soit $\sqrt{2}$ (voyez l'exercice suivant). Nous avons convenu que la largeur de la feuille mesurait 1 en boulga, donc sa longueur est $\sqrt{2}$ en boulga. L'aire de la feuille A4 est donc $\sqrt{2} \times 1 = \sqrt{2}$ en boulga^2. et celle du cerf-volant isocèle est $\frac{\sqrt{2}}{2}$ en boulga^2.

Ejercicio 4 (para los 14 años de edad) Vamos a justificar el hecho que la relación entre la longitud y la anchura de la hoja A4 es $\sqrt{2}$. Los tamaños de imprenta son definidos de tal modo que la relación entre la longitud de la hoja y su anchura queda constante después de plegamiento. Así, si se pliega una hoja A3 en dos según su longitud encontramos dos tipos de hoja A4. Observamos la figura siguiente: Deseamos que $\frac{L}{\ell} = \frac{\ell}{\frac{L}{2}}$ es decir: $L^2 = 2 \times \ell^2$ entonces $L = \sqrt{2} \times \ell$.	**Exercice 4 (pour la classe de quatrième)** Nous allons justifier le fait que le rapport entre la longueur et la largeur des feuilles A4 est $\sqrt{2}$. Les formats d'imprimerie sont définis de telle sorte que le rapport entre la longueur de la feuille et sa largeur reste constant après pliage. Ainsi, si l'on plie une feuille A3 en deux suivant sa longueur on trouve deux feuilles A4. Observons la figure suivante : Nous désirons que : $\frac{L}{\ell} = \frac{\ell}{\frac{L}{2}}$ c'est-à-dire : $L^2 = 2 \times \ell^2$ ou encore : $L = \sqrt{2} \times \ell$.

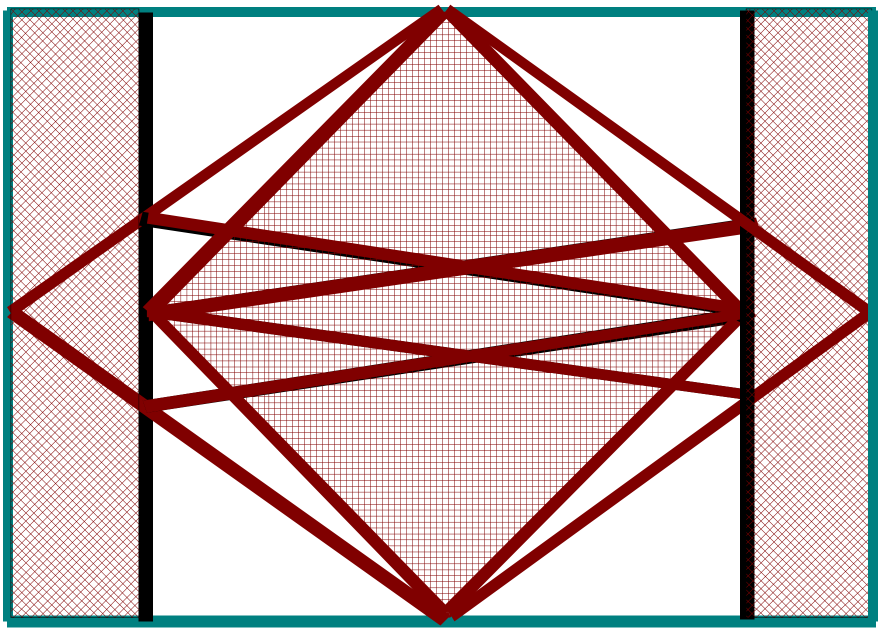


§5 Reconocer cuadriláteros en un motivo geométrico (a partir de 12 años de edad)

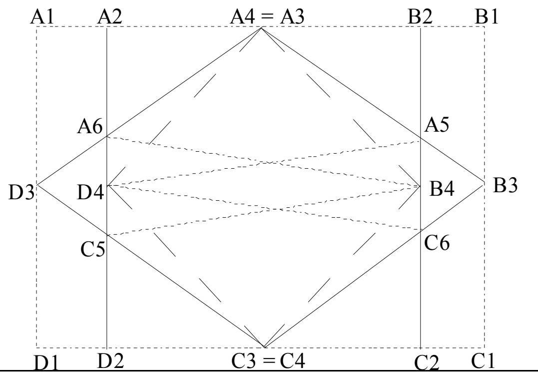
§5 Reconnaître des quadrilatères dans un motif géométrique (à partir de la classe de 6ème)

Llamamos **"motivo geométrico"** una figura geométrica que tiene calidades estéticas y de simetría, podemos también llamar este tipo de figura una **"alfombra".**

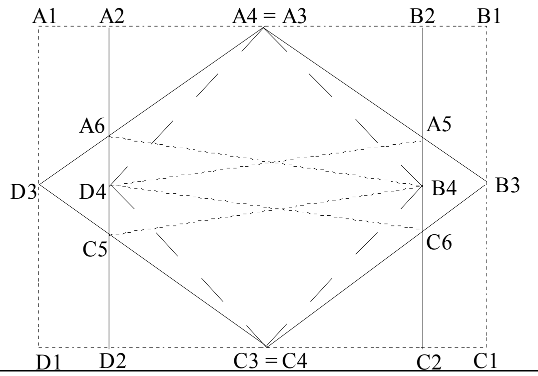
Nous appelons **“motif géométrique”** une figure géométrique ayant des qualités esthétiques et de symétrie, on peut aussi appeler ce type de figure un **“tapis”.**



El motivo tiene como contorno exterior un rectángulo de longitud 7 cm, de anchura 5 cm y anotamos su vertice A_1, B_1, C_1, D_1, el número indicando que es el primer cuadrilátero.



Le motif a pour contour extérieur un rectangle de longueur 7 cm, de largeur 5 cm dont nous avons noté les sommets A_1, B_1, C_1, D_1, le numéro indiquant que c’est le premier quadrilatère.



Hipótesis de trabajo :

$A_1D_1 = B_1C_1 = A_2D_2 = B_2C_2 = A_2B_2 = D_2C_2$ (a)
$A_1D_3 = D_3D_1 = A_2D_4 = D_4D_2 = B_2B_4 = B_4C_2 = B_1B_3 = B_3C_1$ (b).

Les pedimos a los alumnos observar el motivo que vamos a codificar, y de descubrir allí los cuadriláteros sucesivos anotados por su número (ejemplo: el cuadrilátero número 2 se llama $A_2B_2C_2D_2$). Luego de observar sus propiedades con la ayuda de sus regla y escuadra.

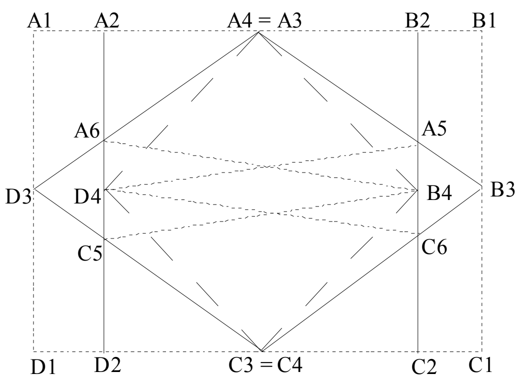
Por fin de demostrar, si necesario, estas propiedades y de nombrar los cuadriláteros.

Hypothèses de travail :

$A_1D_1 = B_1C_1 = A_2D_2 = B_2C_2 = A_2B_2 = D_2C_2$ (a)
$A_1D_3 = D_3D_1 = A_2D_4 = D_4D_2 = B_2B_4 = B_4C_2 = B_1B_3 = B_3C_1$ (b).

Nous demandons aux élèves d'observer le motif que nous allons coter et d'y découvrir les quadrilatères successifs notés par leur numéro (exemple : le quadrilatère numéro 2 s'appelle $A_2B_2C_2D_2$). Ensuite d'observer leurs propriétés à l'aide de leur règle graduée et de leur équerre.

Enfin de démontrer, si nécessaire, ces propriétés et de nommer les quadrilatères.

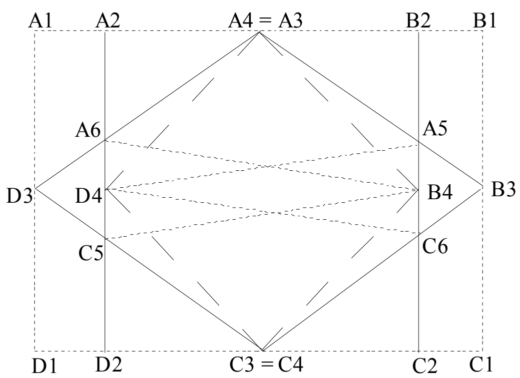


Los alumnos pueden encontrar fácilmente los primeros cuadriláteros que anotamos por un número:

1) $A_1B_1C_1D_1$ es un **rectángulo** por hipótesis.

2) $A_2B_2C_2D_2$ es un **cuadrado** a causa de las igualdades (a).

3) Las vertices del cuadrilátero $A_3B_3C_3D_3$ son los medios de los lados del rectángulo A_1 B_1 C_1 D_1, los triángulos rectángulos $A_1A_3D_3$, $A_3B_1B_3$, $B_3C_1C_3$, $C_3D_1D_3$ son superponibles.



Les élèves peuvent trouver facilement les premiers quadrilatères que nous avons notés par un numéro :

1) $A_1B_1C_1D_1$ est un **rectangle** par hypothèse.

2) $A_2B_2C_2D_2$ est un **carré** à cause des égalités (a).

3) Les sommets du quadrilatère $A_3B_3C_3D_3$ sont les milieux des côtés du rectangle $A_1B_1C_1D_1$, les triangles rectangles $A_1A_3D_3$, $A_3B_1B_3$, $B_3C_1C_3$, $C_3D_1D_3$ sont superposables.

Los lados [A_3B_3], [B_3C_3], [C_3D_3], [D_3A_3] del cuadrilátero $A_3B_3C_3D_3$ son de misma longitud, estonces éste es un **rombo**.

4) Las vertices del cuadrilátero $A_4B_4C_4D_4$ son los medios de los lados del cuadrado $A_2B_2C_2D_2$, los triángulos $A_4B_2B_4$, $B_4C_2C_4$, $C_4D_2D_4$, $D_4A_2A_4$ son rectángulos isósceles y superponibles. Los lados [A_4B_4], [B_4C_4], [C_4D_4], [D_4A_4] son de misma longitud y el cuadrilátero $A_4B_4C_4D_4$ es pues un rombo. Además, los ángulos $\widehat{A_4B_4C_4}$, $\widehat{B_4C_4D_4}$, $\widehat{C_4D_4A_4}$, $\widehat{D_4A_4B_4}$ son rectos pues el rombo $A_4B_4C_4D_4$ es un **cuadrado (un solo** ángulo recto es sufisante para que un rombo sea un cuadrado).

5) Ahora les pedimos a los alumnos encontrar otro rectángulo y paralelógramos. Observemos en primer lugar el cuadrilátero $A_6A_5C_6C_5$. Los puntos A_6, A_5, C_6 et C_5 son las intersecciones de los lados del rombo $A_3B_3C_3D_3$ con los segmentos [A_2D_2] y [B_2C_2] del cuadrado $A_2B_2C_2D_2$.

Observamos que el motivo es simétrico con relación al eje (D_3B_3) así como con relación al eje (A_3C_3) (=(A_4C_4)).

Pues A_6 y C_5 de una parte, A_5 y C_6 por otra parte son simétricos ortogonales con relación a (D_3B_3). Además, A_6 y A_5 de una parte, C_6 y C_5 por otra parte, son simétricos ortogonales con relación a (A_3C_3) ; el cuadrilátero $A_6A_5C_6C_5$ es pues un **rectángulo**.

Les côtés [A_3B_3], [B_3C_3], [C_3D_3], [D_3A_3] du quadrilatère $A_3B_3C_3D_3$ sont de même longueur, celui-ci est donc un **losange**.

4) Les sommets du quadrilatère $A_4B_4C_4D_4$ sont les milieux des côtés du carré $A_2B_2C_2D_2$, les triangles $A_4B_2B_4$, $B_4C_2C_4$, $C_4D_2D_4$, $D_4A_2A_4$ sont rectangles isocèles et superposables. Les côtés [A_4B_4], [B_4C_4], [C_4D_4], [D_4A_4] sont de même longueur et le quadrilatère $A_4B_4C_4D_4$ est donc un losange. De plus, les angles $\widehat{A_4B_4C_4}$, $\widehat{B_4C_4D_4}$, $\widehat{C_4D_4A_4}$, $\widehat{D_4A_4B_4}$ sont droits donc le losange $A_4B_4C_4D_4$ est un **carré** (**un seul** angle droit suffit pour qu'un losange soit un carré).

5) Maintenant nous demandons aux élèves de trouver un autre rectangle et des parallélogrammes.

Observons tout d'abord le quadrilatère $A_6A_5C_6C_5$.

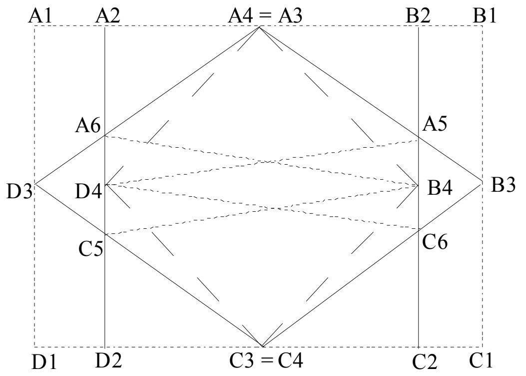
Les points A_6, A_5, C_6 et C_5 sont les intersections des côtés du losange $A_3B_3C_3D_3$ avec les segments [A_2D_2] et [B_2C_2] du carré $A_2B_2C_2D_2$.

Nous remarquons que le motif est symétrique par rapport à l'axe (D_3B_3) ainsi que par rapport à l'axe (A_3C_3) (=(A_4C_4)).

Donc A_6 et C_5 d'une part, A_5 et C_6 d'autre part sont symétriques orthogonaux par rapport à (D_3B_3) ;

De plus, A_6 et A_5 d'une part, C_6 et C_5 d'autre part, sont symétriques orthogonaux par rapport à (A_3C_3) ;

Le quadrilatère $A_6A_5C_6C_5$ est donc un **rectangle**



6) Observemos ahora el cuadrilátero $A_6B_4C_6D_4$. Dos de sus lados opuestos $[A_6D_4]$ y $[B_4C_6]$ son de misma longitud y paralelos pues es un **paralelógramo**. Por la mismas razón $D_4A_5B_4C_5$ también.

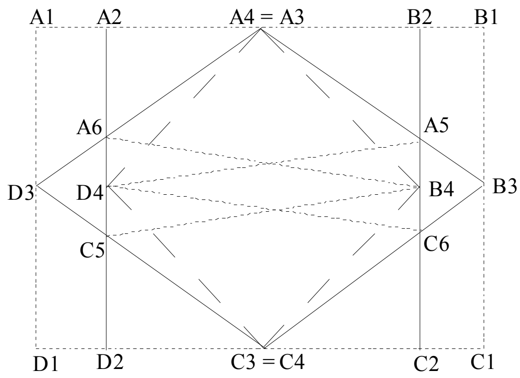
7) Buscamos luego una o varias **cometa isósceles no cuadradas**.

Observamos que los triángulos $A_4B_4C_4$ y $A_3D_3C_3$ son isósceles porque son las mitades de un cuadrado y de un rombo. Tienen como adyacentes por sus bases $[A_3C_3]$ y $[A_4C_4]$. El cuadrilátero $A_4B_4C_4D_3$ es pues una **cometa isósceles no cuadrada.**

8) Les pedimos ahora a los alumnos buscar un **deltoide isósceles**.

Todavía podemos utilizar el rombo $A_3B_3C_3D_3$ y el cuadrado $A_4B_4C_4D_4$: los cuadriláteros $A_3B_3C_3B_4$ y $A_3D_3C_3D_4$ son unos deltoides isósceles.

9) Vamos a buscar ahora si nuestro motivo contiene un **trapecio isósceles**. Observamos que si trazamos sobre un triángulo isósceles, un segmento paralelo a su base, obtenemos un trapecio isósceles. Así, el rombo $A_3B_3C_3D_3$ está constituido por dos triángulos isósceles $A_3B_3C_3$ y $A_3C_3D_3$ que tienen sus basas $[A_3C_3]$ común.



6) Observons maintenant le quadrilatère $A_6B_4C_6D_4$. Deux de ses côtés opposés $[A_6D_4]$ et $[B_4C_6]$ sont de même longueur et parallèles donc c'est un **parallélogramme**. Pour les mêmes raisons $D_4A_5B_4C_5$ aussi.

7) Nous recherchons ensuite un ou plusieurs **cerfs-volants isocèles non carrés**. Nous remarquons que les triangles $A_4B_4C_4$ et $A_3D_3C_3$ sont isocèles car ce sont des moitiés d'un carré et d'un losange. Ils ont adjacents par leurs bases confondues $[A_3C_3]$ et $[A_4C_4]$. Le quadrilatère $A_4B_4C_4D_3$ est donc un **cerf-volant isocèle non carré.**

8) Nous demandons maintenant aux élèves de rechercher un **deltoïde isocèle**.

On peut encore utiliser le losange $A_3B_3C_3D_3$ et le carré $A_4B_4C_4D_4$: les quadrilatères $A_3B_3C_3B_4$ et $A_3D_3C_3D_4$ sont des deltoïdes isocèles.

9) Nous allons chercher maintenant si notre motif contient un **trapèze isocèle**. Nous remarquons que, si nous traçons sur un triangle isocèle, un segment parallèle à sa base, nous obtenons un trapèze isocèle. Ainsi, le losange $A_3B_3C_3D_3$ est constitué de deux triangles isocèles $A_3B_3C_3$ et $A_3C_3D_3$ ayant leur base $[A_3C_3]$ commune. Le côté $[B_2C_2]$ du carré $A_2B_2C_2D_2$ rencontre les côtés $[A_3B_3]$

El lado $[B_2C_2]$ del cuadrado $A_2B_2C_2D_2$ encuentra los lados $[A_3B_3]$ y $[B_3C_3]$ del triángulo isósceles $A_3B_3C_3$ a los puntos A_5 y C_6. Por construcción, $[A_5C_6]$ es paralelo a $[A_3C_3]$. Pues el cuadrilátero $A_3A_5C_6C_3$ es un trapecio isósceles. 10) Preguntamos por fin si se encuentra en el motivo unos **trapecios rectángulos,** es decir trapecios que tienen dos ángulos rectos. Encontramos dos: $A_2B_2A_5D_4$, $A_2B_2B_4C_5$, hay otros que les quedan descubrir ! Encontramos así en nuestro motivo los **cuadriláteros notables**. Hay otros que le dejamos el cuidado de descubrir. Para acabar esta actividad de modo lúdico, les pedimos a los alumnos construír en la casa, su motivo o alfombra personal y colorearlo. Los expondremos en clase.	et $[B_3C_3]$ du triangle isocèle $A_3B_3C_3$ aux points A_5 et C_6. Par construction, $[A_5C_6]$ est parallèle à $[A_3C_3]$. Donc le quadrilatère $A_3A_5C_6C_3$ est un trapèze isocèle. 10) Nous demandons enfin s'il existe dans le motif des **trapèzes rectangles**, c'est-à-dire des trapèzes ayant deux angles droits. Nous en trouvons deux : $A_2B_2A_5D_4$, $A_2B_2B_4C_5$, il y en a d'autres que nous vous laissons découvrir… Nous avons ainsi retrouvé dans notre motif les **quadrilatères remarquables**. Il y en a d'autres que, de nouveau nous vous laissons le soin de découvrir. Pour terminer cette activité de façon ludique, nous demandons aux élèves de construire à la maison, leur motif ou tapis personnel et de le colorier. Nous les exposerons en classe.

§6 Construir los cuadriláteros notables con menos segmentos posibles (por los 14 años de edad)

§6 Construire les quadrilatères remarquables avec le moins de segments possibles (pour la classe de quatrième)

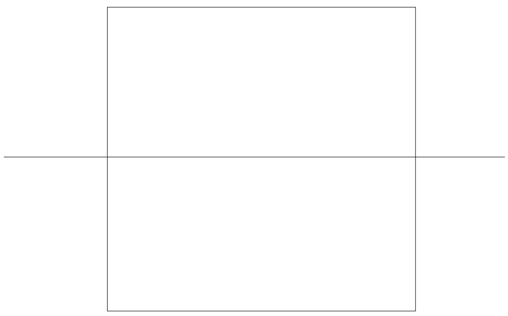
Presentamos una última actividad destinada a instalar las definiciones y las propiedades de los cuadriláteros notables.

Nous présentons une dernière activité destinée à installer les définitions et propriétés des quadrilatères remarquables.

Recordemos que uno de los grandes principios del aprendizaje, sea de nociones matemáticas o no es **atacar los problemas de puntos de vista diferentes utilizando "instrumentos" diferentes.** Es por eso que le presentamos actividades diversas que tenían totalmente el mismo fin. Estudiar los cuadriláteros notables con instrumentos diferentes (instrumento que fue tomado con sentido ancho: también bien instrumento material: sistemas articulados, doblados de papel, que abstraídos: diagramas de Venn, árboles) le permite al profesor escoger entre ellos a los que son, según su opinión, mejores según sus alumnos y sobre todo si es posible, utilizando varios instrumentos diferentes que consolidan las nociones por la utilización de diferentes puntos de vista. Les presentamos pues a los alumnos una figura que representa un cuadrado del que se trazó a la mediatriz de dos lados opuestos:

Rappelons que l'un des grands principes de l'apprentissage, qu'il soit de notions mathématiques ou non est **d'aborder les problèmes de points de vues différents en utilisant des "outils" différents.** C'est pourquoi nous vous avons présenté des activités diverses ayant toutes le même but. Étudier les quadrilatères remarquables avec des outils différents (outil étant pris au sens large : aussi bien outil matériel : systèmes articulés, pliages de papier, qu'abstraits : diagrammes de Venn, arbres de choix) permet au professeur de choisir parmi eux ceux qui conviennent, à son avis, le mieux à ses élèves et surtout, si possible, en utiliser plusieurs, les outils différents consolidant les notions par l'utilisation de différents points de vue.

Nous présentons donc aux élèves une figure représentant un carré dont on a tracé la médiatrice de deux côtés opposés :

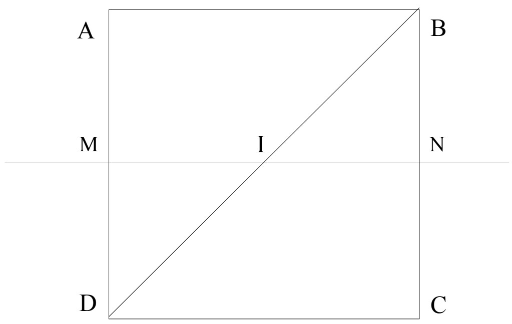


Les pedimos entonces, a partir de esta figura definir, trazando **los menos segmentos posibles, los vertices de los cuadriláteros notables**, utilizando solo la regla y trazando sobre ella dos rayos para representar una longitud de segmento.

Nous leur demandons alors, à partir de cette figure, de définir, **en traçant le moins de segments possibles, les sommets des quadrilatères remarquables** en utilisant seulement leur règle sur laquelle ils peuvent tracer deux traits pour représenter une longueur de segment.

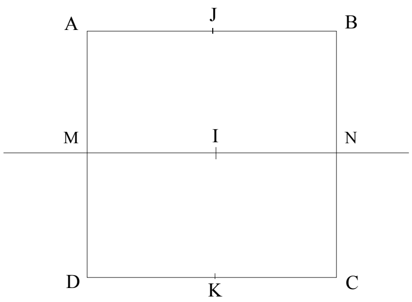
Les dejamos reflexionar y esperamos que codifican, como de costumbre, su figura, luego que escriben las hipótesis con forma algébrica y por fin trazen sus primeros segmentos.	Nous les laissons réfléchir et attendons qu'ils cotent, comme d'habitude, leur figure, puis qu'ils écrivent les hypothèses sous forme algébrique et enfin tracent leurs premiers segments.

He aquí las hipótesis escritas con forma algébrica: AB = BC = CD = DA; AM = MD; BN = NC ; [AB] ⊥ [AD]; [AB] ⊥ [BC]; [BC] ⊥ [CD]; [MN] ⊥ [AD]; [MN] ⊥ [BC]. Está más abajo, una sugerencia de comienza: trazar una diagonal del cuadrado con el fin de determinar el centro de éste.	Voici les hypothèses écrites sous forme algébrique : AB = BC = CD = DA ; AM = MD ; BN = NC ; [AB] ⊥ [AD] ; [AB] ⊥ [BC] ; [BC] ⊥ [CD] [MN] ⊥ [AD] ; [MN] ⊥ [BC]. Voici ci-dessous, une suggestion de départ : tracer une diagonale du carré afin de déterminer le centre de celui-ci.



Un alumno observa en primer lugar que los cuadriláteros ABNM y MNCD son **rectángulos**. Luego proponemos trasladar sobre [AB] a partir de A, un segmento [AJ] de longitud MI, obtenemos el punto medio de [AB]. Luego de trasladar sobre [DC] a partir de D, un segmento [DK] de longitud MI, obtenemos el punto medio de [DC].	Un élève remarque tout d'abord que les quadrilatères ABNM et MNCD sont des **rectangles**. Nous proposons alors de reporter sur [AB] à partir de A, un segment [AJ] de longueur MI, on obtient le milieu de [AB]. Puis de reporter sur [DC] à partir de D, un segment [DK] de longueur MI, on obtient le milieu de [DC].

Observamos que podemos construir del mismo modo el punto medio I de [MN] y que **es inútil trazar [BD].**



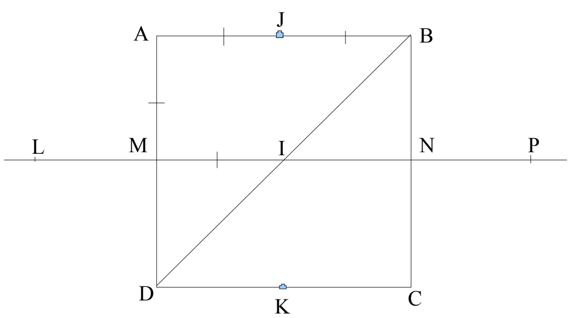
Enunciamos ahora las propiedades de la figura dejándole al lector el cuidado de demostrarlas.

El cuadrilátero MBND es un **paralelogramo no rombo** y el cuadrilátero MJBD es un **trapecio isósceles**.

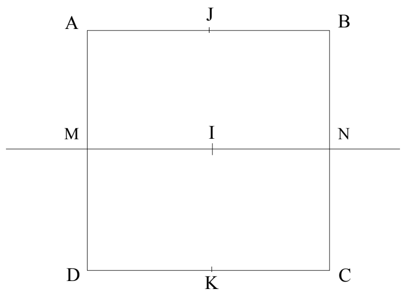
Luego proponemos trasladar sobre la derecha (MN) un segmento [ML] a la izquierda de M y un segmento [NP] a la derecha de N, los dos de longitud MI.

Entonces el cuadrilátero LJPK es un **rombo no cuadrado.** El cuadrilátero JNKL es una **cometa isósceles no rombo**. El cuadrilátero AIDP es un **deltoide isósceles.**

Podemos pues encontrar los cuadriláteros notables sin trazar una sola raya suplementaria sobre la figura.



Nous remarquons que nous pouvons construire de la même façon le milieu I de [MN] et **qu'il est inutile de tracer [BD].**



Nous énonçons maintenant les propriétés de la figure en laissant au lecteur le soin de les démontrer.

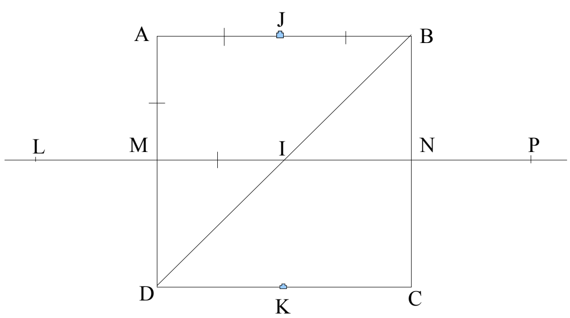
Le quadrilatère MBND est un **parallélogramme non losange** et le quadrilatère MJBD est un **trapèze isocèle**.

Ensuite on propose de reporter sur la droite (MN) un segment [LM] à gauche de M et un segment [NP] à droite de N, les deux de longueur MI.

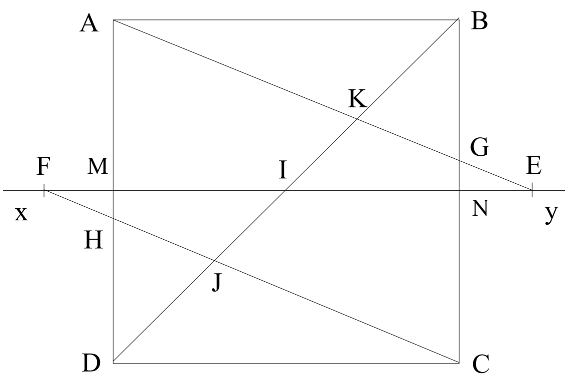
Alors le quadrilatère LJPK est un **losange non carré**.

Le quadrilatère JNKL est un **cerf-volant isocèle non losange**. Le quadrilatère AIDP est un **deltoïde isocèle**.

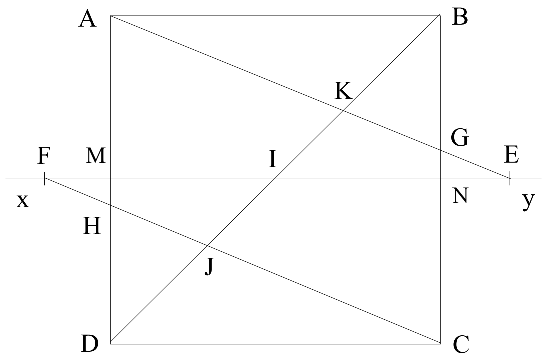
Nous pouvons donc trouver les quadrilatères remarquables sans tracer un seul trait supplémentaire sur la figure.



Entre las numerosas otras posibilidades de construcciones le proponemos la siguiente (recordemos que **pedimos menos segmentos posibles que permite situar las vertices de los cuadriláteros notables no cuadrados**, no pedimos trazar a sus lados).	Parmi les nombreuses autres possibilités de constructions nous vous proposons la suivante (rappelons que nous demandons **le moins de segments possibles permettant de situer les sommets des quadrilatères remarquables non carrés**, nous ne demandons pas de tracer leurs côtés).



Gracias a dos pequeñas rayas dibujadas sobre nuestra regla, trasladamos sobre la derecha (xy) el segmento [FI] tal como FI = IB y el segmento [IE] tal como IE = IB. Entonces enunciamos **las propiedades de esta figura** (que vamos a demostrar más abajo): El cuadrilátero AECF es un **rectángulo no cuadrado**. El cuadrilátero AJCK es un **rombo no cuadrado**. El cuadrilátero AGCH es un **paralelogramo no rectángulo**. El cuadrilátero AFDE es una **cometa isósceles no rombo**. El cuadrilátero AIDE es un **deltoide isósceles**. El cuadrilátero ABEF es un **trapecio isósceles**.	Grâce à deux petits traits dessinés sur notre règle, nous reportons sur la droite (xy) le segment [FI] tel que FI = IB et le segment [IE] tel IE = IB. Alors nous énonçons les **propriétés de cette figure** (que nous allons démontrer ci-dessous) : Le quadrilatère AECF est un **rectangle non carré**. Le quadrilatère AJCK est un **losange non carré**. Le quadrilatère AGCH est un **parallélogramme non rectangle**. Le quadrilatère AFDE est un **cerf-volant isocèle non losange**. Le quadrilatère AIDE est un **deltoïde isocèle**. Le quadrilatère ABEF est un **trapèze isocèle.**



Para acabar, **con los alumnos a partir de 14 de edad**, demostramos las propiedades enunciadas precedamente: los puntos A y C se encuentran sobre el círculo de centro I y de diámetro [FE]. Los ángulos $\widehat{FAE}$ y $\widehat{FCE}$ pues son rectos. Por lo mismo los puntos E y F se encuentran sobre el círculo de centro I y de diámetro [AC] confundido con el precedente círculo.

Los ángulos $\widehat{AFC}$ y $\widehat{AEC}$ pues son rectos y el cuadrilátero AECF es un **rectángulo no cuadrado** porque $AF \neq AE$.

Observemos el cuadrilátero AJCK: sus diagonales [AC] y [JK] forman un ángulo recto porque son llevadas por las diagonales de un cuadrado. El punto I es el punto medio de [AC] pues [JK] es mediatriz de [AC] y el cuadrilátero AJCK es una cometa isósceles.

Siendo el cuadrilátero AEFC un rectángulo, sus lados opuestos [AE] y [FC] son paralelos, llevan los lados [AK] y [JC]. Los ángulos $\widehat{IAK}$ y $\widehat{ICJ}$ son superponibles porque alternas internas. Los triángulos AKI y CJI son superponibles pues AK = JC.

El cuadrilátero AJCK es una cometa isósceles que tiene dos lados consecutivos con la misma longitud,

Pour terminer, **avec les élèves de quatrième**, nous démontrons les propriétés énoncées plus haut :

Les points A et C se trouvent sur le cercle de centre I et de diamètre [FE]. Les angles $\widehat{FAE}$ et $\widehat{FCE}$ sont donc droits. De même les points E et F se trouvent sur le cercle de centre I et de diamètre [AC] confondu avec le précédent. Les angles $\widehat{AFC}$ et $\widehat{AEC}$ sont donc droits.

Le quadrilatère AECF est un **rectangle non carré** car $AF \neq AE$.

Observons le quadrilatère AJCK : ses diagonales [AC] et [JK] forment un angle droit car elles sont portées par les diagonales d'un carré. Le point I est milieu de [AC] donc [JK] est médiatrice de [AC] et le quadrilatère AJCK est un cerf-volant isocèle et AK = KC.

Le quadrilatère AECF étant un rectangle, ses côtés opposés [AE] et [FC] sont parallèles, ils portent les côtés [AK] et [JC]. Les angles $\widehat{IAK}$ et $\widehat{ICJ}$ sont superposables car alternes-internes. Les triangles AKI et CJI sont superposables donc AK = JC. Le quadrilatère AJCK est un cerf-volant isocèle ayant deux côtés consécutifs de même longueur c'est donc un **losange non carré** car $AC \neq JK$.

es pues un **rombo no cuadrado** porque AC≠ JK.

El cuadrilátero AGCH tiene sus lados [OH] y [GC] paralelos por hipótesis. El cuadrilátero AECF, que es un rectángulo tiene sus lados [AE] y [FC] paralelos.

Los segmentos [AG] y [HC] son pues paralelos y el cuadrilátero AGCH es un paralelogramo no rectángulo porque, por ejemplo, el ángulo $\widehat{HAG}$ no es recto.

El cuadrilátero AFDE tiene una de sus diagonales: [FE] mediatriz de la otra: [AD] (por hipótesis la derecha (MN) que lleva el segmento [FE] es mediatriz del segmento [AD]), es pues una cometa isósceles, no rombo porque [AD] no es la mediatriz de [FE].

El cuadrilátero AIDE es cóncavo, constituido por dos triángulos superponibles (con un doblez, teniendo un lado común [IE]. Es pues un deltoide isósceles.

El cuadrilátero ABEF tiene sus dos lados opuestos [AB] y [FE] paralelos. Los puntos F y E estan situados sobre la mediatriz de [AD] y [BC] por hipótesis, entonces tenemos AF = FD y BE = EC.

Los lados [AF] y [EC] del rectángulo AECF son de la misma longitud. Tenemos pues: AF = BE y el cuadrilátero ABEF es un trapecio isósceles no rectángulo porque AB≠ FE.

Para definir los cuadriláteros notables trazamos tres segmentos (la primera solución pues es mejor).

Le quadrilatère AGCH a ses côtés [AH] et [GC] parallèles par hypothèse. Le quadrilatère AECF étant un rectangle il a ses côtés [AE] et [FC] parallèles. Les segments [AG] et [HC] sont donc parallèles et le quadrilatère AGCH est un parallélogramme non rectangle car, par exemple, l'angle : $\widehat{HAG}$ n'est pas droit.

Le quadrilatère AFDE a l'une de ses diagonales : [FE] médiatrice de l'autre : [AD] (par hypothèse la droite (MN) qui porte le segment [FE] est médiatrice du segment [AD]), c'est donc un cerf-volant isocèle, non losange car [AD] n'est pas la médiatrice de [FE]

Le quadrilatère AIDE est concave, constitué de deux triangles superposables (par pliage) ayant un côté commun [IE].

C'est donc un deltoïde isocèle.

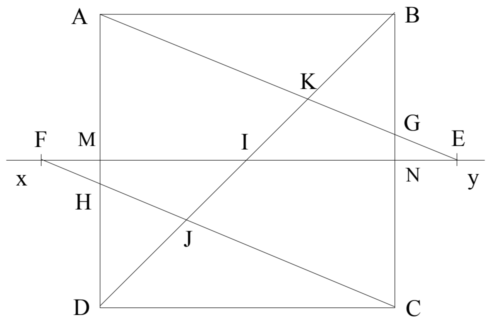
Le quadrilatère ABEF a ses deux côtés opposés [AB] et [FE] parallèles. Les points F et E étant situés sur la médiatrice de [AD] et [BC] par hypothèse, on a AF = FD et BE = EC. Les côtés [AF] et [EC] du rectangle AECF sont de même longueur.

On a donc : AF = BE et le quadrilatère ABEF est un trapèze isocèle non rectangle car AB ≠ FE.

Pour définir les quadrilatères remarquables nous avons donc tracé trois segments (la première solution est donc meilleure).

Si se quiere proseguir con esta actividad, será interesante calcular dimensiones de segmentos y de áreas, suponiendo, por ejemplo, que el lado del cuadrado inicial mide 1 unidad.

Si l'on veut poursuivre cette activité, il sera intéressant de calculer des dimensions de segments et des aires en supposant, par exemple, que le côté du carré initial mesure 1.



Aquí dos ejemplos de calculo

1) Supongamos pues que:

AB = BC = CD = DA = 1; preguntamos cuál es **el área del rectángulo AECF.**

Construímos [IF] y [IE] de tal manera que: IF = IE = IB = ID.

Tenemos pues, ya que [AC] y [BD] son las diagonales del cuadrado ABCD:

IF = IE = IB = ID = IA = IC = $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Pues FE = $\sqrt{2}$. Entonces AM = $\frac{1}{2}$ y [AM] es la altura del triángulo rectángulo FAE, pues el área de este triángulo es $\frac{\sqrt{2}}{4}$ y el área del rectángulo AECF es $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2) Observamos ahora la **cometa isósceles AFDE** y preguntamos cuál es su área.Tenemos:

FM = FI – MI = $\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$.

Voici deux exemples de calcul

1) Supposons donc que :

AB = BC = CD = DA = 1 ; nous demandons quelle est **l'aire du rectangle AECF**.

On a construit [IF] et [IE] de telle sorte que : IF = IE = IB = ID.

On a donc, puisque [AC] et [BD] sont les diagonales du carré ABCD :

IF = IE = IB = ID = IA = IC = $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Donc FE = $\sqrt{2}$. Or AM = $\frac{1}{2}$ et [AM] est la hauteur du triangle rectangle FAE, donc l'aire de ce triangle est $\frac{\sqrt{2}}{4}$ et l'aire du rectangle AECF est $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2) Observons maintenant le **cerf-volant isocèle AFDE** et demandons quelle est son aire. On a :

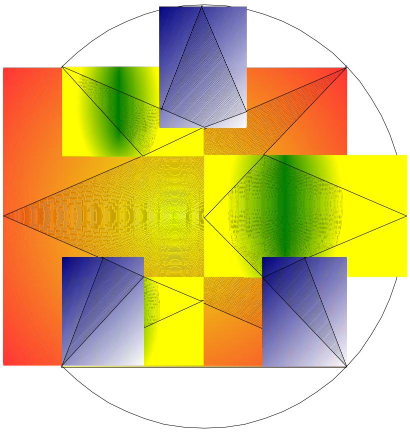
FM = FI – MI = $\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$.

El área del triángulo AFD es entonces : $\frac{\sqrt{2}-1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}-1}{4}$. Además: ME = MI + IE = $\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}+1}{2}$. El área del triángulo AED es entonces : $\frac{\sqrt{2}+1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}+1}{4}$. El área de la cometa isóceles AFDE is est pues : $\frac{\sqrt{2}-1}{4}+\frac{\sqrt{2}+1}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. ¿ Es lo misma que la del rectángulo AECF, ved el porqué?	L'aire du triangle AFD est donc : $\frac{\sqrt{2}-1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}-1}{4}$. D'autre part : ME = MI + IE = $\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}+1}{2}$. L'aire du triangle AED est donc : $\frac{\sqrt{2}+1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}+1}{4}$. L'aire du cerf-volant isocèle AFDE est donc : $\frac{\sqrt{2}-1}{4}+\frac{\sqrt{2}+1}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. C'est la même que celle du rectangle AECF, voyez-vous pourquoi ?

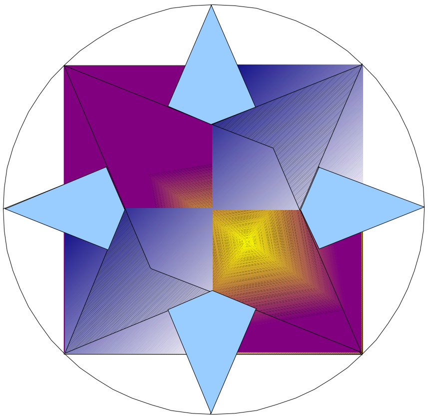
El profesor puede desear continuar con este tipo de actividad para introducir **nociones más generales de otros polígonos**. Así, la figura estudiada anteriormente podrá ser completada, luego coloreada de un modo agradable para resaltar los polígonos como los dibujos de una “alfombra”. Ve usted la siguiente página.	Le professeur peut désirer poursuivre ce type d'activité pour introduire des **notions plus générales de polygones**. Ainsi la figure étudiée précédemment pourra être complétée puis coloriée d'une façon attrayante pour mettre les polygones en évidence à la façon d'un “tapis”, voyez la page suivante.

Un heptágono estrellado no regular
con tres deltoides isòsceles

Un heptagone étoilé non régulier
avec trois deltoïdes isocèles



Un octógono estrellado regular
(rosa del viento)
Un octogone étoilé régulier
(rose des vents)



¡Les invitamos continuar !
Nous vous invitons à continuer !

Bibliographie

(1) RODRIGUEZ HERRERA Ruben, SALLES-LEGAC Danielle *Du dessin perçu à la figure construite.* Ellipses éditeur 2005

(2) RODRIGUEZ HERRERA Ruben, SALLES-LEGAC Danielle *Practicar la geometría : de las acciones directament experimentables a sus formalizaciones matemáticas (en espagnol).* IREM de Basse-Normandie éditeur 2008

(3) RODRIGUEZ HERRERA Ruben *La géométrie sans le cercle dans la formation de la pensée géométrique* et *Segments, droites, demi-droites : Exemple de Psychomorphisme contrarié* ».

En ligne : www.math.unicaen.fr/irem/internat /documents.htm

(4) SALLES-LEGAC Danielle, RODRIGUEZ HERRERA Ruben *Nouvelles pratiques de la géométrie.* IREM de Basse-Normandie éditeur 2008

Historias de cometas y otros cuadriláteros

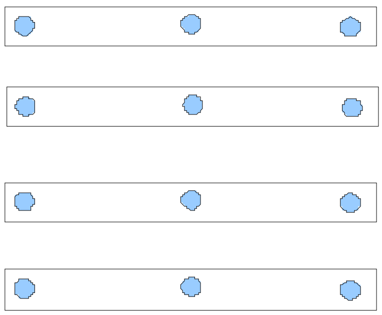
Ficha número uno para los alumnos :

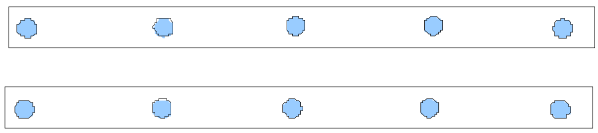
Nociónes de cometa y deltoide isósceles

Material necesario : plexiglas adesivo ligiero para hacer pantalas o cartulina o “géorègles” de plástico vendadas por los especialistas de material pedagógico (Pierron éducation en Francia).

Vamos a construir, con el material siguiente varios tipos de cuadrilateros.

1) Corten ustedes sobre el “plexiglas” o la cartulina bandas segun el modelo, (se puede también utilizar bandas de plástico “georègles”) : cuatro bandas de 12 cm y dos de 22 cm. Los hoyos se hacen con una perforadora para el papel a 1 cm del pequeño borde de las bandas (las bandas “géorègles” ya son perforadas, sus longitudes son un poco diferentes pero no es importante). Este material podra ser conservado para otras actividades geometricas.





Observación importante: las distancias entre los hoyos de las pequeñas bandas y las de las grandes bandas no son necesariamente iguales.

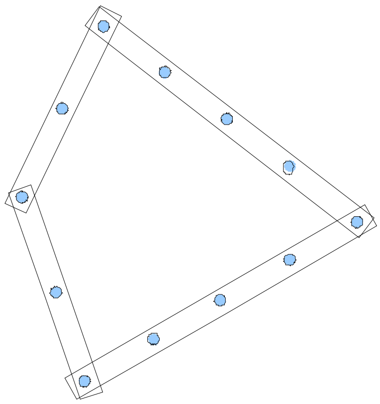
2) Tomamos cuatro bandas : dos de 12 cm de longitud y dos de 22 cm de longitud. Construya usted todos los diferentes cuadrilateros que se puede usted tales que hay **dos pares de bandas consecutivas de la misma longitud (*)**. Utilice usted solamente los hoyos de las extremidades.

Dibuje las diferentes formas obtenidas más abajo:

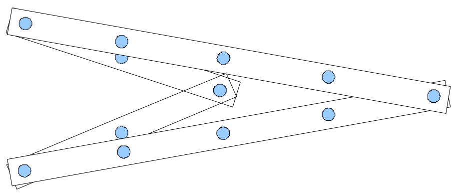
(*) Si utilizan ustedes bandas de plástico que se presentan con varias longitudes podren ustedes utilizar dos grandes bandas (de 20, 22, 27 o 31 cm) y cuatro pequeñas bandas (11, 13, 16 o 17 cm)

¿Conoce usted el nombre de los cuadrilateros obtenidos?
Ponga usted un nombre sobre cada figura que usted reconoce.

3) ¿En qué les hacen usted pensar las construcciones siguientes?



1ra figura



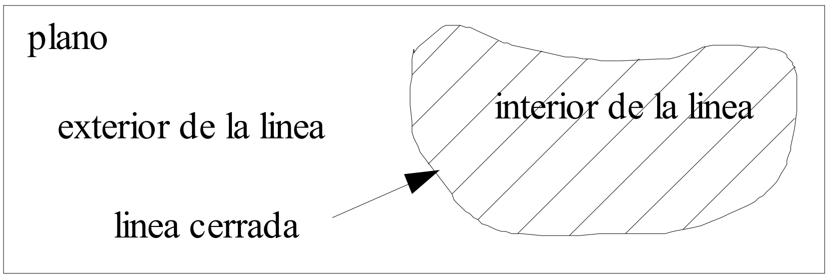
2da figura

Escriba usted aquí su respuesta
1ra figura:

2da figura :

La primera figura es la de un **cuadrilatero convexo**, la segunda la de un **cuadrilatero concavo**.

Llamamos "interior" de una linea cerrada, la parte del plano rodeada por la linea cerrada y "exterior"el resto del plano.



Escriba usted, observando las diagonales de los cuadrilateros, cómo se puede distinguir los cuadrilateros convexos y los cuadrilateros concavos, usted puede utilizar la noción de "interior" de un polígono.

4) Escriba usted ahora, con 10 a 15 lineas, un proyecto de construcción de las bandas para un amigo, y después de construcción de las cometas, y de los deltoides :

5) Escriba usted una definición de la cometa isósceles y una definición de un deltoide isósceles, lo más precisamente posible, de tal modo que un amigo que no ve las figuras que representan estos cuadriláteros pueda construirlos sin confundirlos.

6) Ahora proponemos a usted copar una hoja de cartulina segun un cuadrado de lado de medida la hanchura de la hoja. Pués, construir una cometa isóceles segun las instrucciones de la siguiente página:

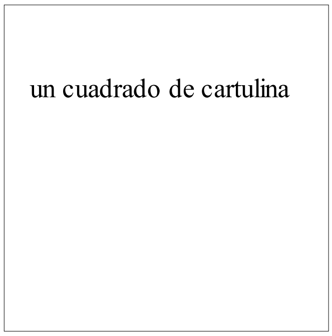


Fig. n°1

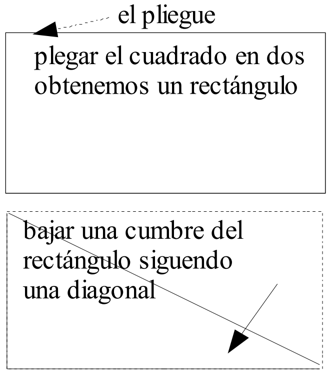


Fig. n°2

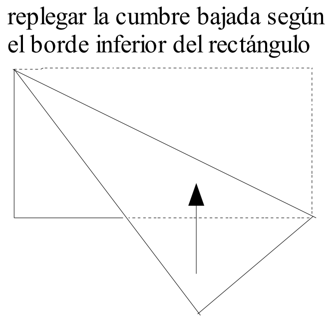


Fig. n°3

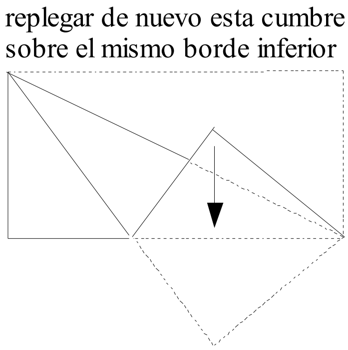


Fig. n°4

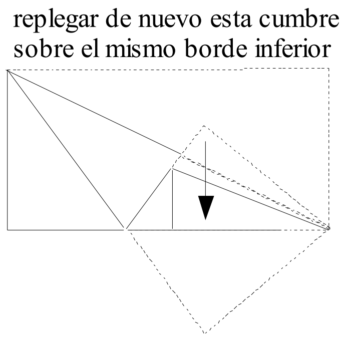


Fig. n° 5

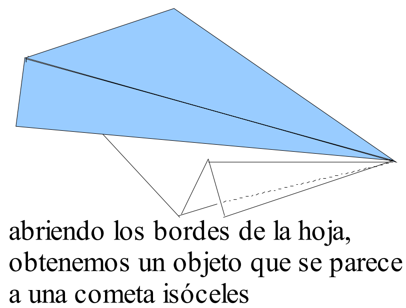
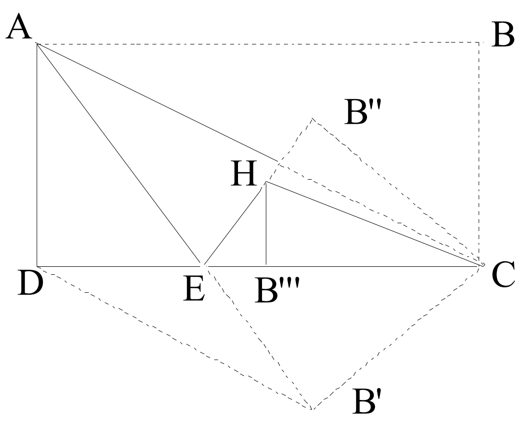


Fig. n°6

7) Ahora le demandamos codificar la figura n° 5 segun el modelo siguiente y dibujar pequeños arcos de círculo sobre los ángulos para mostrar los que son iguales, pequeños rayos sobre los segmentos para mostrar los que tienen la misma longitud y pequeños rayos ortogonales para mostrar cuales son los ángulos que son rectos:



6) Observe usted la figura e indique todas las cometas que aparecen gracias a los dobleces.

9) Una pregunta para los mayores (utilisamos la función Arc Tan de la calculatriz): ¿Cual es la medida del ángulo $\widehat{ACD}$ ¿ Justifique usted la respuesta.

7) Una segunda pregunta para los mayores (utilisamos la noción de ángulos alternos internos) ¿Cual es la naturaleza del cuadrilatéro ACB'D? ¿Cual es la medida del ángulo $\widehat{B'''CH}$ ¿ Justifique sus respuestas.

Histoires de cerfs-volants et autres quadrilatères

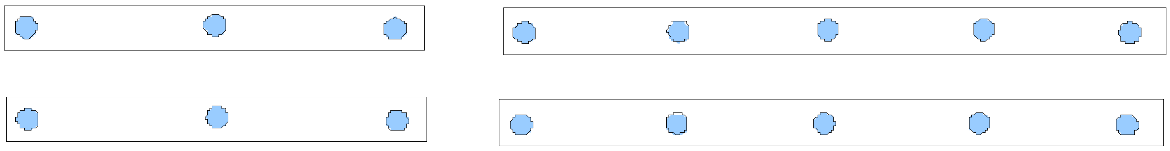
Fiche numéro un pour les élèves

Notions de cerf-volant et de deltoïde isocèle

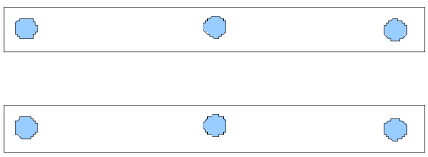
Matériel : Plastique transparent adhésif pour abat-jour (que l'on peut doubler pour plus de rigidité) ou carton genre Bristol ou "géorègles" : barrettes plastiques perforées (*), attaches parisiennes. Conservez ce matériel qui pourra servir pour d'autres activités.

Nous allons construire, avec le matériel suivant, différents quadrilatères.

1) Découpez, dans le plastique transparent ou le Bristol, des bandes selon le modèle ci-dessous, (vous pouvez aussi utiliser des bandes pré perforées genre géorègles) : 4 bandes de 12 cm de longueur et 2 bandes de 22 cm. Les trous se font, grâce à une perforatrice à papier, à 1 cm du petit bord des bandes. Les trous extérieurs seront donc distants de 10 cm pour les petites bandes et de 20 cm pour les grandes bandes. (Le dessin est à l'échelle 8/20ème.)



Remarque importante : les distances entre les trous des petites bandes et celles des grandes bandes ne sont pas nécessairement égales.



2) Nous prenons quatre bandes : deux de longueur 12 cm et deux de longueur 22 cm (*).

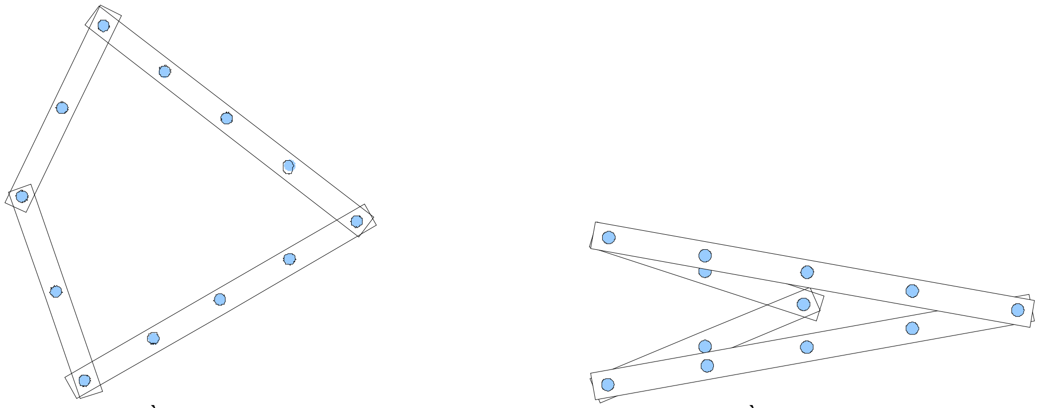
Construisez tous les différents quadrilatères que vous pouvez, de telle sorte que les deux petites bandes aient une extrémité commune, de même que les grandes bandes. Utilisez seulement les trous des extrémités.

Dessinez, ci-dessous, les différents quadrilatères obtenus :

(*) Si vous utilisez les géorègles qui se présentent en dimensions variées, vous pourrez utiliser deux grandes barrettes (de 20, 22, 27 ou 31 cm) et quatre petites barrettes (11, 13, 16 ou 17 cm).

Connaissez-vous le nom des quadrilatères obtenus ? Si oui, écrivez leur nom sous chacun de vos dessins.

3) Á quoi vous font penser les constructions suivantes ?



1ère figure **2ème figure**

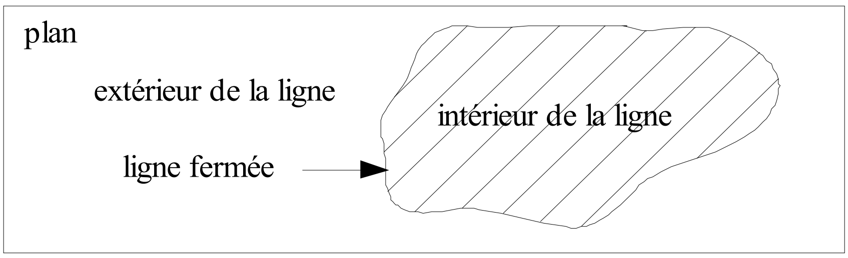
Écrivez ci-dessous vos réponses :

- 1ère figure :

8) 2ème figure :

La première figure représente un **quadrilatère convexe**, la deuxième figure représente un **quadrilatère concave**.

On appelle “**intérieur**” d'une ligne fermée tracée sur un plan, la partie du plan entourée par la ligne fermée, on appelle “**extérieur**” le reste du plan.



Écrivez, en observant leurs diagonales, comment on peut **distinguer un quadrilatère convexe d'un quadrilatère concave**, pour pouvez utiliser la notion d'intérieur du polygone.

4) Écrivez maintenant, ci-dessous, en 10 à 15 lignes, un projet de découpage des bandes pour un ami absent et, ensuite un mode d'emploi pour la construction d'un cerf-volant et d'un deltoïde isocèles.

5) Écrivez une définition d'un cerf-volant isocèle et une définition d'un deltoïde isocèle, les plus précises possible, de telle sorte qu'un ami qui ne voit pas les figures qui représentent ces quadrilatères puisse les construire sans les confondre.

6) Nous vous proposons maintenant de découper une feuille de carton fort genre Bristol suivant un carré de côté la largeur de la feuille puis de construire un cerf-volant isocèle selon les instructions page suivante :

Fig. n°1

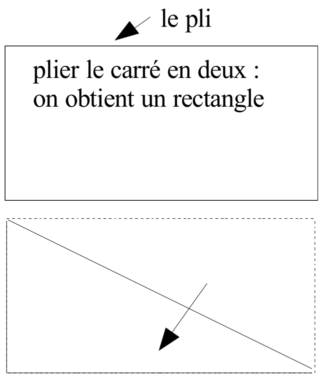


Fig. n°2

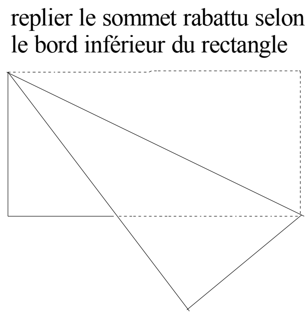


Fig. n°3

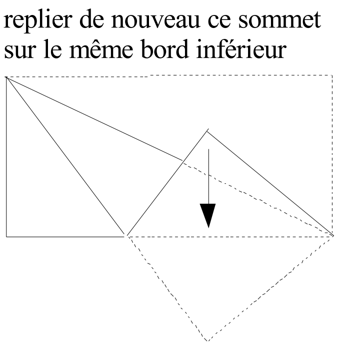


Fig. n°4

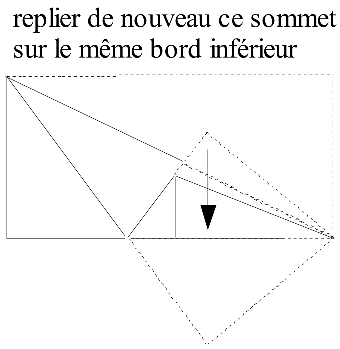


Fig. n° 5

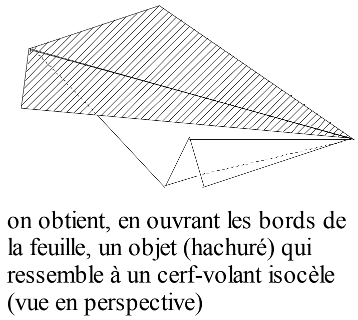
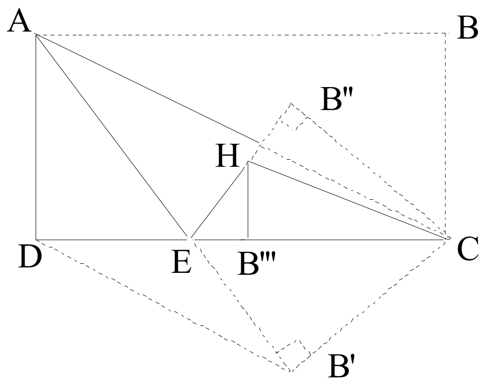


Fig. n°6

7) Observez la figure n° 5 et codez-la, c'est-à-dire donnez des noms aux différents sommets des polygones apparaissant dans la figure et indiquez par des petits arcs de cercles les angles de même mesure, ensuite par deux petits traits orthogonaux les angles droits, pour terminer, notez par des petits traits les segments de longueurs égales (par hypothèse ou par pliages). Nous vous suggérons ci-dessous une notation des sommets.



8) Observez la figure et nommez tous les cerfs-volants isocèles qui apparaissent grâce aux pliages.

9) Une question pour les plus grands (elle utilise la fonction Arc tan de la calculatrice) : quelle est la mesure de l'angle $\widehat{ACD}$? Justifiez votre réponse.

10) Une seconde question pour les plus grands (cette question utilise la notion d'angle alterne interne). En observant toutes les propriétés de la figure, déterminez quelle est la nature du quadrilatère ACB'D puis la mesure de l'angle $\widehat{B'''CH}$? Justifiez vos réponses.

Historias de cometas y otros cuadrilateros

Ficha número dos para los alumnos

Clasificar los cuadrilateros con un sitemo articulado

Material: las bandas de plástico transparente o de cartulina recortadas para la ficha n ° 1, o "géorègles", ataderos parisinos.

Nota para el Profesor: las hojas 1, 2, 3 y 4 serán distribuidas preferentemente sucesivamente pero dejando a los alumnos reflexionar entre cada distribución.

Vamos, primeramente clasificar los cuadrilateros **segun las propiedades de sus lados (longitud y ángulos interiores)**

9) Tome usted cuatro bandas de longitud 12 cm y átelos juntos con ataderos parisinos para formar un cuadrilátero.

Dibuje usted, más abajo, las diferentes formas de cuadriláteros que usted obtiene y nómbrelos:

10) Tome usted dos bandas de 12 cm de longitud y dos bandas de 22 cm de longitud, átelos juntos con ataderos parisinos para formar cuadriláteros que **no sean unas cometas o deltoides isósceles**. Dibújelos más abajo y nómbrelos:

3) Tome usted **tres** bandas de 12 cm de longitud y **una** banda de 22 cm de longitud, construya un cuadrilátero, ¿Cuál cuadrilátero podemos obtener de ese modo? ¿ Como hacer para que sea isósceles?

Aquí están diferentes cuadrilateros que pueden ser construidos con nuestros dos tipos de bandas.

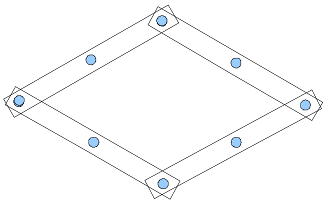


Fig.1

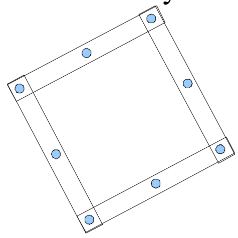


Fig.2

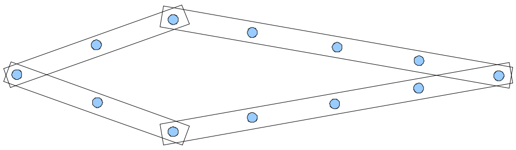


Fig.3

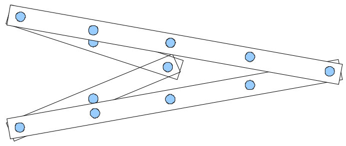


Fig.4

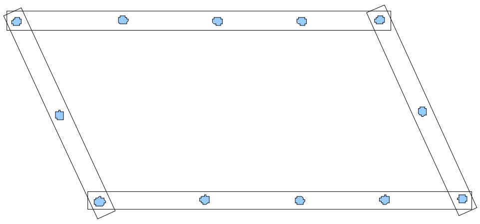


Fig. 5

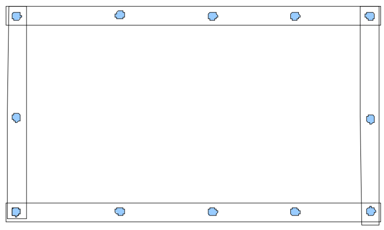


Fig.6

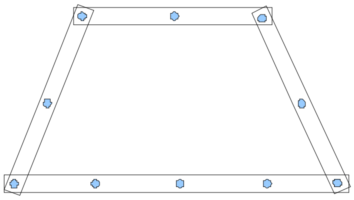


Fig.7

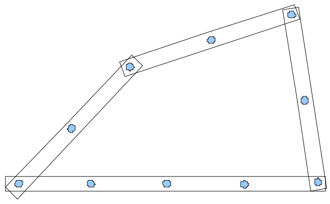


Fig. 8

Diga usted cuales son las figuras que representan (cuidado de no olvidar uno)

Paralelogramos:

Rectángulos:

Cometas:

Diga usted cuales son las figuras **que no son**:
Trapezios:
Rombos:
¿Representa la figura número 8 una cometa ¿ ¿Porqué?

Clasificar los cuadrilateros segun las propiedades de sus diagonales

Tome usted las diferentes bandas de las que usted dispone y utilícelos para representar las diagonales de diferentes cuadriláteros.

Dibuje, más abajo, los cuadriláteros que usted obtiene figurando las diagonales en rayas llenas y los lados en rayas punteados. Luego nómbrelos. (Se puede utilizar elásticos par representar los lados de los cuadrilateros.)

Escribe usted un modo de empleo de construcción para un amigo de los diferentes cuadrilateros segun sus diagonales, inspirándose por ejemplo del modelo siguiente:

"Para construir un cuadrado, tomas dos bandas lo mismo longitud, las reúnes por un atadero parisino en sus centros, pones tu escuadra sobre un ángulo formado por ambas diagonales y ajustas este ángulo para que sea derecho ".

"Para construir un rectángulo no cuadrado....

"Para construir un rombo no cuadrado...

"Para construir un paralelogramo no rectángulo...

"Para construir una cometa isósceles...

"Para construir un deltoide isósceles...

Aquí esta la representación de diferentes posiciones de las diagonales obtenidas con los dos tipos de bandas, diga usted, **si es posible, sin dibujar los lados de los cuadrilateros**, cuales son las que representan las diagonales (cuidado de no olvidar uno):

De una cometa isósceles:

De un cuadrado:

De un rombo:

De un paralelogramo:

De un rectángulo.

¿Qué representan la figura 13 ¿

¿La figura 14 ¿

¿La figura 15 (se ha perforado un nuevo hoyo sobre una pequeña banda) ¿

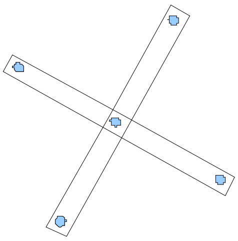


Fig.8

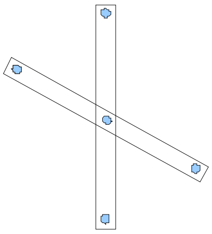


Fig.9

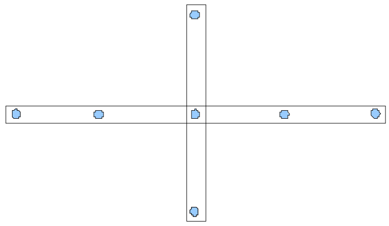


Fig.10

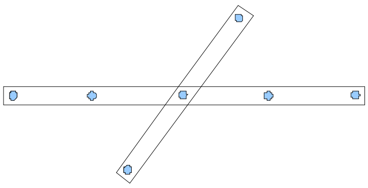


Fig.11

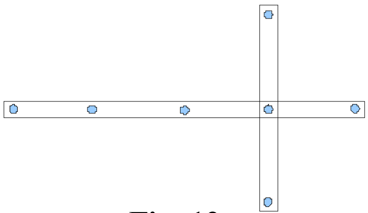


Fig. 12

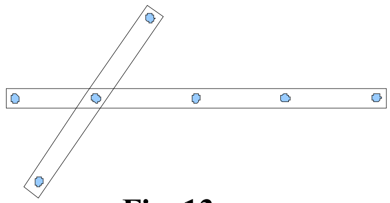


Fig. 13

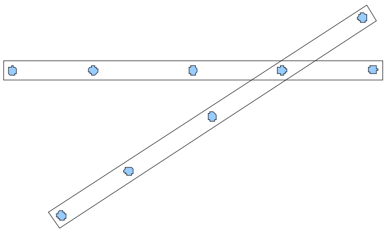


Fig. 14

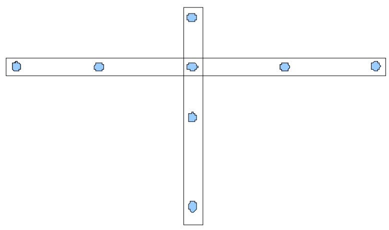


Fig. 15

Histoires de cerfs-volants et autres quadrilatères

Fiche numéro deux pour les élèves

Classement des quadrilatères à l'aide d'un système articulé

Matériel : les bandes de plastique transparent ou de Bristol découpées de la fiche n° 1, ou des « géorègles », des attaches parisiennes.

Note pour le Professeur : les feuilles 1, 2, 3 et 4 seront distribuées de préférence successivement mais en laissant les élèves réfléchir entre chaque distribution.

Nous allons, tout d'abord, **classer les quadrilatères selon les propriétés de leurs côtés (leur longueur et les angles intérieurs** qu'ils définissent).

1) Prenez quatre bandes de longueur 12 cm chacune et attachez-les ensemble avec des attaches parisiennes pour former un quadrilatère convexe.

Dessinez ci-dessous les différentes formes de quadrilatères convexes que vous obtenez et nommez-les :

2) Prenez deux bandes de 12 cm de longueur chacune et deux bandes de 22 cm de longueur chacune, attachez-les ensemble avec des attaches parisiennes pour former successivement des quadrilatères qui ne soient **ni des cerfs-volants isocèles ni des deltoïdes isocèles**. Dessinez-les ci-dessous et nommez-les :

3) Prenez trois bandes de 12 cm et une bande de 22 cm, construisez un quadrilatère convexe, quel quadrilatère remarquable peut-on obtenir de cette façon ? Citez les propriétés de ses côtés.

Voici différents quadrilatères constructibles avec nos deux types de bandes.

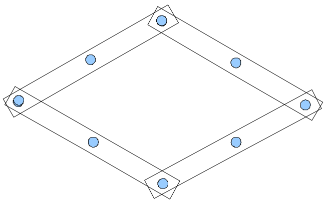


Fig.1

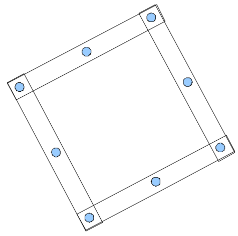


Fig.2

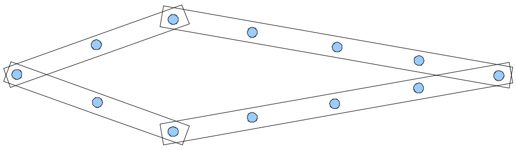


Fig.3

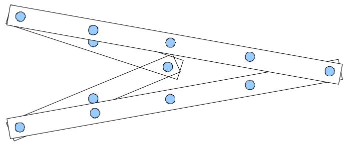


Fig.4

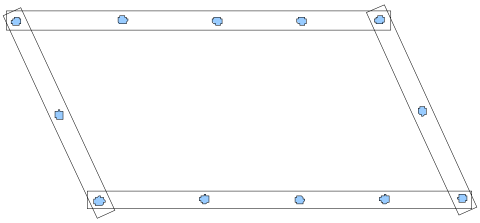


Fig. 5

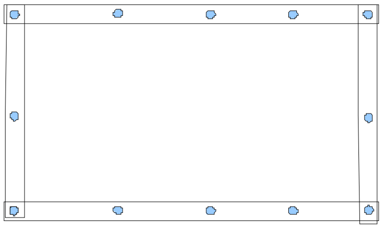


Fig.6

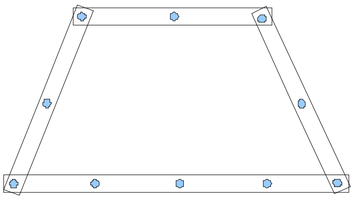


Fig.7

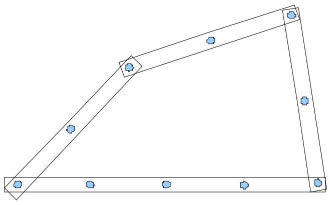


Fig. 8

a) Dites quelles figures représentent (attention, n'en oubliez pas) :
- Des parallélogrammes :

- Des rectangles :

- Des cerfs-volants isocèles :

b) Dites quelles **figures ne sont pas** :
- Des trapèzes :
- Des losanges :

La figure 8 représente-t-elle un cerf-volant isocèle ?

c) Existe-t-il un quadrilatère qui soit à la fois trapèze et cerf-volant isocèles ?

Classement des quadrilatères selon les propriétés de leurs diagonales

Prenez les différentes bandes dont vous disposez et utilisez-les pour représenter les diagonales de différents quadrilatères.

Dessinez, ci-dessous, les quadrilatères que vous obtenez en figurant les diagonales en traits pleins et les côtés en traits pointillés. Ensuite nommez-les.

Écrivez un mode d'emploi de construction pour un ami absent ("jeu du téléphone") des différents quadrilatères par leurs diagonales en vous inspirant par exemple du modèle suivant :

« Pour construire un carré, tu prends deux barrettes de même longueur, tu les assembles par une attache parisienne en leurs centres, tu poses ton équerre sur un angle formé par les deux diagonales et tu règles cet angle pour qu'il soit droit ».

« Pour construire un rectangle non carré…

« Pour construire un losange non carré…

« Pour construire un parallélogramme non rectangle…

« Pour construire un cerf-volant isocèle…

« Pour construire un trapèze isocèle…

Voici la représentation de différentes positions des diagonales obtenues avec les deux types de barrettes, dites dans quelle figure les diagonales représentent celles (attention, n'en oubliez pas) :

- D'un cerf-volant isocèle :
- D'un carré :
- D'un losange :
- D'un parallélogramme :
- D'un rectangle :

Que représente la figure 13 ? La figure 14 ? La figure 15 (on a percé un trou supplémentaire sur une petite barrette) ?

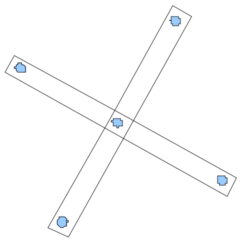


Fig.8

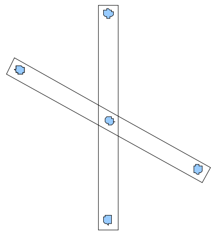


Fig.9

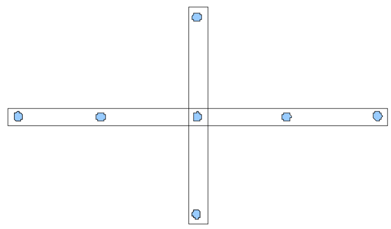


Fig.10

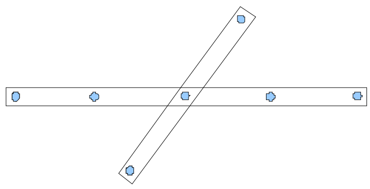


Fig.11

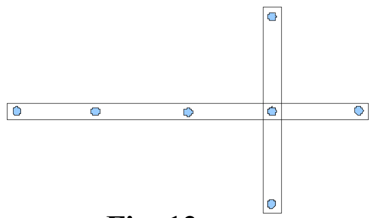


Fig. 12

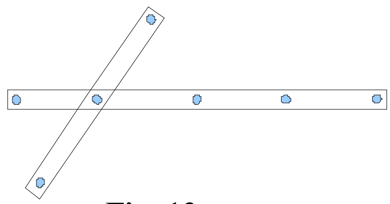


Fig. 13

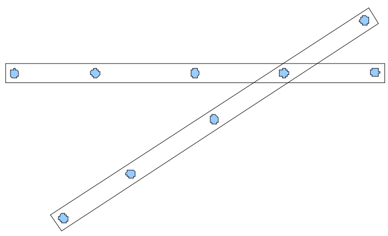


Fig. 14

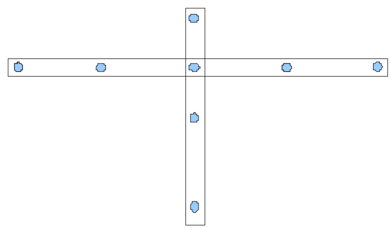


Fig. 15

Historias de cometas y otros cuadrilateros
Ficha número tres para los alumnos
Clasificar los cuadrilateros con los diagramos de Venn

Recordamos que, en matemática, convenimos representar un conjunto de objetos que tienen una misma propiedad por una linea cerrada (se dice una "batata") : los objetos que tienen la propiedad estan al dentro de la linea y los objetos que no la tienen por fuera de la linea. Decimos que habemos dibujado un "**Diagramo de Venn**".

Para bien decir de lo que se habla, llamamos "un universo" (que hemos dibujado con un rectángulo) un conjunto màs grande que la batata, que contiene todos los objetos que vamos a utilizar. Por ejemplo aquí el universo de los cuadrilateros (convexos). Ejemplo figura n° 1:

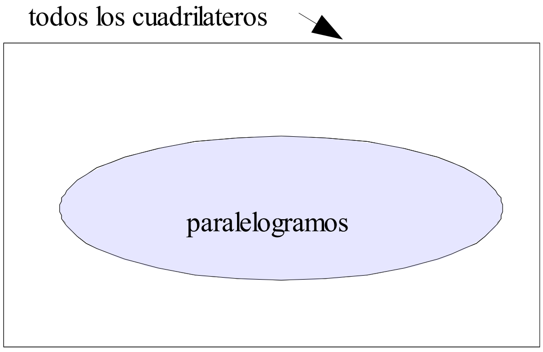


Figura n°1

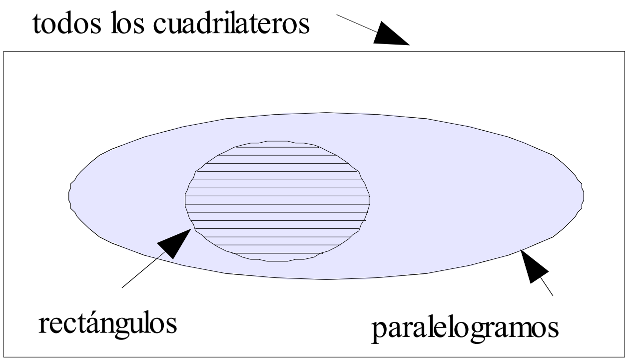


Figura n° 2

Cuando se observa un otro conjunto teniendo la primera propiedad y además una otra se dice que el nuevo conjunto esta **incluído** en el primero y trazamos la segunda batata al dentro de la primera (figura n° 2).

1) Dibuje usted abajo un diagramo de Venn para representar el universo de los cuadrilateros, el conjunto de los rombos y el de los cuadrados.

2) Los conjuntos no estan cada vez incluidos unos al dentro de los otros, por ejemplo: un rombo es un rectángulo solamente si tiene sus ángulos interiores rectos.

Entonces, se debe dibujar dos batatas distintas pero se debe saber si se encuentran o no. Nos demandamos: ¿ Existe rectángulos que son rombos? Y ¿Existe rombos que son rectángulos?

La respuesta es « Sí » y le pedimos completar el diagrama más abajo, escribiando la respuesta sobre el punto "¿ ".

Dibuje usted, a derecha del diagramo de Venn, un rectángulo que no es un rombo, un rombo que no es un rectángulo y un cuadrilatero que es a la vez un rectángulo y un rombo.

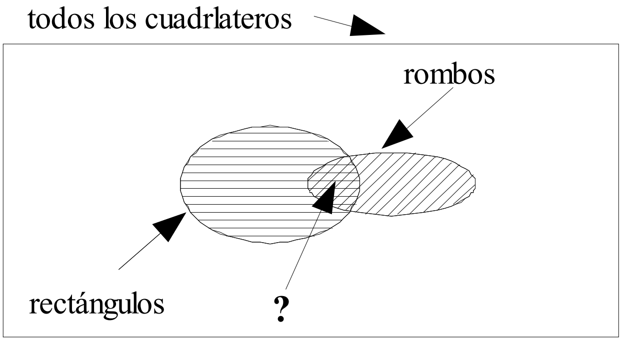


Figura n° 3

3) Los rectángulos y los rombos tienen sus lados oposados paralelos dos a dos, ¿Cuales son los cuadrilateros que no son necesariamente rectángulos o rombos y que verifican esta propiedad? Dibuje usted un tal cuadrilatero a la derecha de la figura n°4. Escribe usted su nombre sobre el punto "¿ " del diagramo de la figura n° 4.

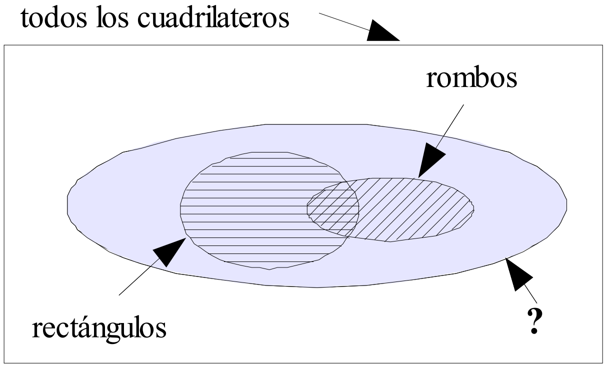


Figura n° 4

4) Recordamos una de las definiciones de las cometas isóceles:

«Una cometa isósceles es un cuadrilatero convexo que tiene dos lados adjacentes de la misma longitud et los dos otros también ». Cuidado, hay que precisar "**convexo**" si nó, tenemos la definición del **deltoide isósceles** (ve usted la ficha n° 1). Dibuje usted sobre la siguiente página un cuadrilatero no convexo (es decir "concavo") que no sea un deltoide.

Hemos ponido, sobre el diagramo de Venn (figura n° 5), el conjunto de las cometas isósceles, ¿Es este diagramo correcto? Si nó, ponga lo usted sobre la figura n° 6.

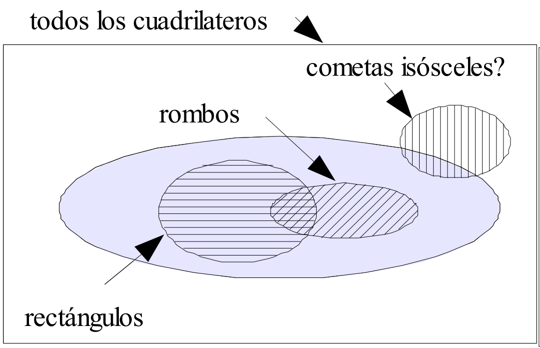


Figura n° 5

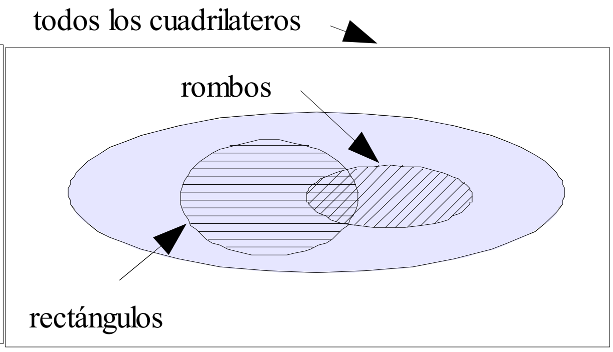
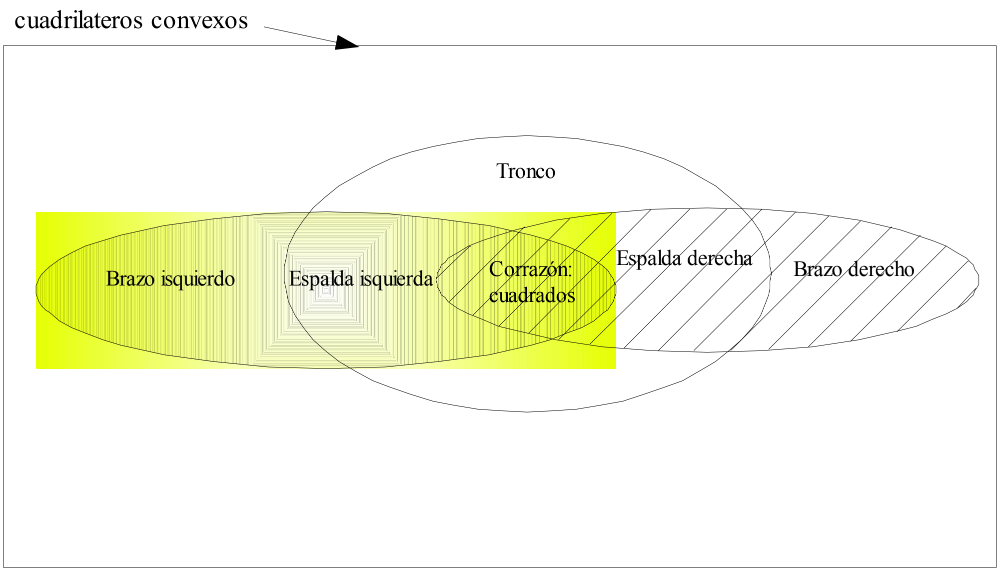


Figura n° 6

5) Con el fin de devolverle bien en memoria las diferentes propiedades de los cuadriláteros le proponemos a usted un diagrama de Venn que representa a un personaje visto de la parte superior ¿Puede usted colocar sobre cada las diferentes partes del personaje un **nombre de cuadrilátero de tal modo que sus propiedades sean bien respetadas**? (Hemos escribido un ejemplo.)



Histoires de cerfs-volants et autres quadrilatères

Fiche numéro trois pour les élèves

Classement des quadrilatères à l'aide de diagrammes de Venn

Nous vous rappelons que, en mathématiques, nous convenons de représenter un **ensemble** d'objets ayant une certaine propriété par une ligne courbe fermée (on dit souvent une "patate") : les objets vérifiant la propriété sont à l'intérieur de la courbe, les objets ne l'ayant pas sont à l'extérieur. On dit que l'on a dessiné un "**diagramme de Venn".**

Pour bien fixer les idées, on définit ce que l'on appelle un "**univers**" matérialisé par exemple par un grand rectangle, c'est un ensemble plus grand, contenant tous les objets sur lesquels nous allons travailler. Dans notre cas ce peut être **l'univers des quadrilatères convexes**. Exemple voir la figure n° 1.

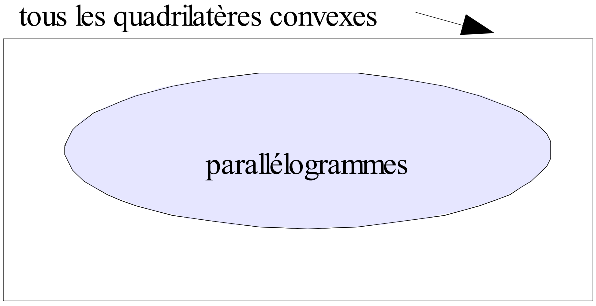


Figure n° 1

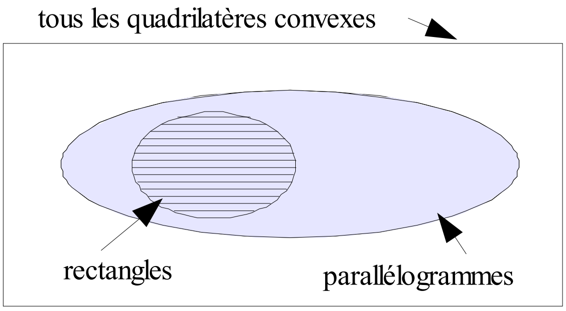


Figure n° 2

Lorsque l'on considère un autre ensemble ayant la première propriété et une propriété supplémentaire, on dit qu'il est **inclus** dans le premier et on dessine la patate à l'intérieur de la première (figure n° 2). Un ensemble inclus dans l'univers mais n'ayant pas la propriété considérée est appelé **ensemble complémentaire**.

1) Nommez l'ensemble complémentaire de l'ensemble des quadrilatères convexes dans l'univers des quadrilatères :

2) Dessinez ci-dessous un diagramme de Venn représentant l'univers des quadrilatères convexes, l'ensemble des losanges et celui des carrés.

3) Les ensembles ne sont pas toujours inclus les uns dans les autres, ainsi les losanges et les rectangles : un losange ne peut être un rectangle que s'il a ses angles intérieurs droits.

Dans ce cas on dessine deux "patates" mais il faut se demander si elles se rencontrent ou non. Alors on se pose la question : existe-t-il des rectangles qui sont des losanges ? Ou bien des losanges qui sont des rectangles ?

La réponse est « Oui » et nous vous demandons de compléter le diagramme de Venn ci-dessous en mettant un nom sous le point d'interrogation.

Dessinez, à droite du diagramme de Venn un rectangle non losange, un losange non rectangle et un quadrilatère à la fois rectangle et losange.

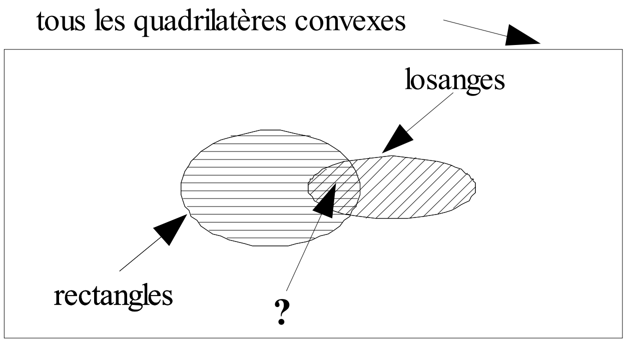


Figure n° 3

4) Les rectangles et les losanges ont leurs côtés opposés parallèles deux à deux, quels sont les quadrilatères, qui ne sont pas nécessairement rectangles ou losanges qui vérifient cette propriétés ? Dessinez un tel quadrilatère à droite de la figure n° 4. Écrivez leur nom sur le diagramme suivant (figure n° 4) :

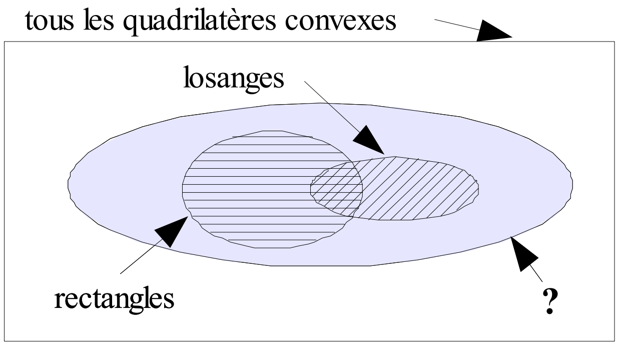


Figure n° 4

5) Rappelons une des définitions des cerfs-volants isocèles :

Un cerf-volant isocèle est un quadrilatère convexe qui a deux côtés adjacents de même longueur et les deux autres côtés aussi.

Attention, il faut préciser "**convexe**" sinon on a la définition du **deltoïde isocèle** (voyez la fiche n° 1).

Dessinez, page suivante, un quadrilatère **non convexe** (c'est-à-dire "**concave**").

On a placé, sur le diagramme de Venn (figure n° 5) ci-dessous, l'ensemble des cerfs-volants isocèles ainsi que celui des deltoïdes isocèles, ce diagramme est-il correct ? Sinon, placez les deux ensembles précédents sur la figure n° 6.

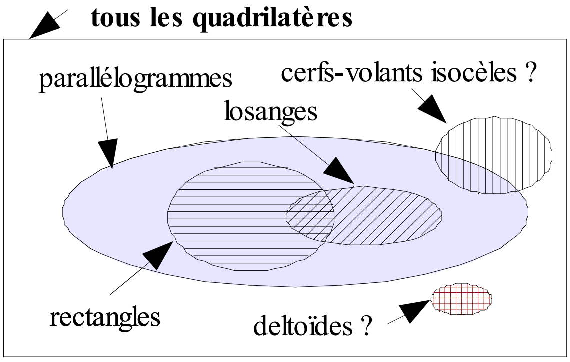


Figure n° 5

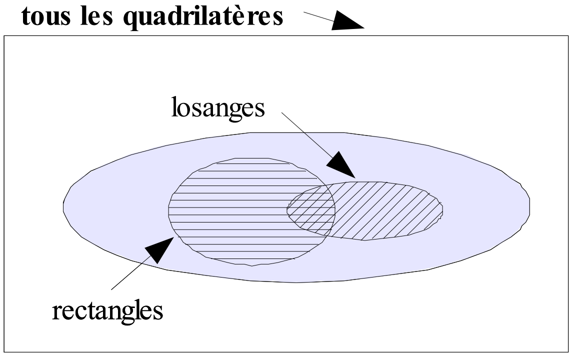
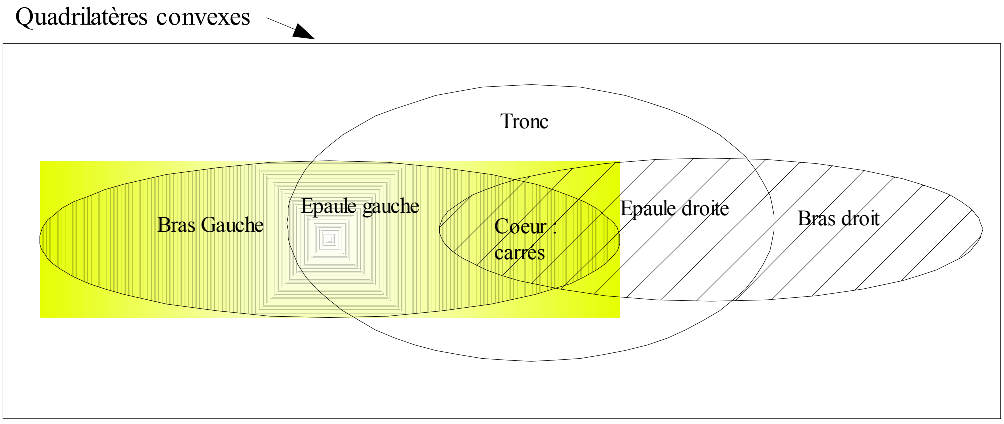


Figure n°6

6) Afin de bien vous remettre en mémoire les différentes propriétés des quadrilatères nous vous proposons un diagramme de Venn qui représente un personnage vu du dessus, pouvez-vous placer sur les différentes parties du personnage un nom de **quadrilatère convexe de telle sorte que ses propriétés soient bien respectées** ? (Nous avons indiqué un exemple.)



I.R.E.M. de Basse-Normandie Université de Caen France
I.R.E.M. de Ica UNICA Perú

Histoires de cerfs-volants et autres quadrilatères pour le collège
Historias de cometas y otros cuadriláteros para el colegio

Nous vous proposons quelques activités autour du classement des quadrilatères . Ce travail fait suite à un article de Nadine Gérard : « L'introduction du cerf-volant dans le programme de sixième » paru dans le bulletin A.P.M.E.P. n°473. L'auteur y soulignait le fait que le classement des quadrilatères, y compris les cerfs-volants est présenté depuis longtemps chez nos voisins allemands et aux Etats-Unis, entre autres, parfois sous la dénomination « Maison des quadrilatères ». Le centre de ce travail est constitué d'une classification à l'aide de systèmes articulés, facilement constructibles par l'élève ou achetable, à prix raisonnable, chez les spécialistes de matériel pédagogique. Nous sommes très enthousiastes à propos de l'apprentissage de la géométrie au collège grâce aux manipulations (voir notre brochure « Nouvelles pratiques de la géométrie » une publication de l'I.R.E.M. de Caen, 2008) que ce soit d'outils fabriqués par l'élève, de pliages, de puzzles. Ces travaux, complétés par les travaux sur matériel informatique, permettent à l'élève d'approcher les objets géométriques par différentes voies, c'est-à-dire de construire ses « psychomorphismes » selon la terminologie de l'un de nous (Ruben Rodriguez Herrera).

Nous remercions Anne-Marie Bock, Eladio Ocaña et Oswaldo Velasquez de leur participation précieuse.

Mots clés : arbre de tri, carré, cerf-volant, collège, deltoïde, diagonale, diagramme de Venn, ensemble, géométrie, losange, motif géométrique, parallélogramme, pliage, quadrilatère, rectangle, système articulé.

salles@math.unicaen.fr ruben.rodriguez@caen.iufm.fr

Les proponemos algunas actividades entorno a la clasificación de los cuadriláteros. Este trabajo es la continuación de un artículo de Nadine Gerard, docente de colegio (en francés):

"La introducción de la cometa en el programa de sexto" publicado en el boletín A.P.M.E.P. N°473 (Francia). El autor subrayaba allí el hecho de que la clasificación de los cuadriláteros, incluido las cometas, es presentada desde hace tiempo en paises de Europa y en los Estados Unidos, entre otros, a veces bajo la denominación "Casa de los cuadriláteros". El centro de este trabajo está constituido por una clasificación con la ayuda de sistemas articulados y fácilmente constructibles por el alumno o comprables, a precio razonable, en los especialistas de material pedagógico. Somos muy entusiastas a propósito del aprendizaje de la geometría en el colegio gracias a las manipulaciones (Ver nuestro folleto "Nuevas prácticas de la geometría" una publicación en francés del I.R.E.M. de Caen, Francia, 2008) es decir a partir de instrumentos fabricados por el alumno, de dobleces, de rompecabeza. Estos trabajos completados por los trabajos con ayuda de la informatica, le permiten al alumno acercarse a los conceptos geométricos por diferentes vías, es decir construir "psicomorfismos" según la terminología de uno de nosotros (Ruben Rodriguez Herrera).

Agradecemos Anne-Marie Bock, Eladio Ocaña y Oswaldo Velasquez de su ayuda preciosa.

***Palabras claves**: árbol de selección, cometa, conjunto, cuadrado, cuadrilátero, deltoide, diagonal, diagrama de Venn, doblez, motivo geométrico, paralelogramo, rectángulo, rombo, sistema articulado.*

salles@math.unicaen.fr ruben.rodriguez@caen.iufm.fr

Format : A4	Nombre de pages : 85	Prix : 5 euros