Géométries des pliages

Nous avons déjà au cours de nos publications (voir la bibliographie (2) et (3)) souligné combien les pliages pouvaient être une activité productive pour la compréhension de plusieurs notions mathématiques. Didier BOURSIN et Valérie LAROSE en présentent de nombreux dans leur joli livre « Mathématiques et pliages » (1). Il est frappant de constater que la géométrie des pliages est aussi "puissante" (c'est-à-dire qu'elle permet autant de constructions) (voir l'ouvrage de référence de Jean Claude CARREGA « Théorie des corps » (5)) que :

- **la géométrie du bissecteur** (c'est-à-dire celle qui utilise, en plus de la règle non graduée, un objet appelé bissecteur, (voir la fig. 2) permettant de construire la bissectrice d'un angle quelconque) ;
- **la géométrie de la règle et du transporteur** (que nous avons développée dans deux ouvrages (voir la bibliographie)), appelée aussi géométrie de la règle (non graduée) et du compas à pointes sèches, géométrie équivalente [1] à la précédente ;
- **la géométrie à la règle et au compas**, plus puissante que les deux précédentes, dont L. MASCHERONI (4) a montré qu'elle est équivalente à **la géométrie au compas seul** en convenant de représenter une droite par deux points distincts ;
- et même, si l'on admet les "ajustements" de la feuille au cours du pliage, (terme que nous préciserons plus loin), la **géométrie de la construction de certains nombres algébriques** puisqu'elle permet la trisection de l'angle (voir D. BOURSIN et V. LAROSE déjà cités ainsi que notre ouvrage « Nouvelles pratiques de la géométrie » (2)).

Nous vous conseillons, pour la bonne compréhension de ce texte, de réaliser les activités proposées.

Matériel indispensable : au moins deux feuilles de papier de format A4, de **préférence transparent,** une règle plate non nécessairement graduée, un crayon mine, une gomme.

Matériel recommandé : quatre règles plastiques perforées (deux grandes et deux plus petites) genre « Géo-règles », quatre attaches parisiennes, éventuellement un compas à pointes sèches.

Différentes géométries selon les outils autorisés

J.C. CARREGA (5) a étudié de façon précise les différentes géométries définies par les outils qu'elles autorisent, comme la règle et le compas, la règle et le bissecteur, le compas seul ou encore la règle seule.

Les problèmes de constructions à la règle et au compas ont été bien étudiés dans le cadre, en particulier de la théorie de Galois, puisque l'on a pu montrer si un nombre algébrique était constructible à la règle et au compas alors c'était **une racine qui soit, carrée ou une puissance de 2 d'un nombre rationnel**.

Lorsque l'on étudie le problème de la constructibilité du tiers d'un angle, ce que l'on nomme en mathématiques la trisection, on s'aperçoit que celui-ci est lié à l'extraction d'une racine cubique de rationnel (voir (2) et (5)), or on ne sait pas construire de telles racines ni avec la géométrie de la règle et du transporteur, équivalente à la géométrie de la règle et du bissecteur, ni à la règle et au compas. Or, "miraculeusement" on peut trisecter un angle avec un pliage alors que la géométrie des pliages est couramment considérée comme "équivalente" (J.C. CARREGA parle, plus précisément, de "constructions équivalentes" dans les géométries citées plus haut) à celle du bissecteur.

Les pliages seraient donc "encore plus forts" [2] que la règle et le compas ? Que nenni ! Il faut simplement préciser qu'il y a **plusieurs sortes de pliages** !

Aussi, nous vous proposons maintenant, d'observer quelques pliages remarquables.

Citons, pour commencer, un exemple simple :

Nous prenons une feuille rectangulaire (A4 par exemple) et demandons aux élèves : « Avec votre feuille A4 et un pliage, sans utiliser de règle, construisez un carré ».

Les élèves savent bien qu'en rabattant le plus "petit bord" de la feuille le long du "grand bord" adjacent, ils tracent la diagonale d'un carré, le reste suit facilement.

Quelle propriété du pliage avons-nous utilisée ? Nous avons reporté le long du grand côté, la mesure du petit côté, comme nous aurions pu le faire, par exemple avec un compas à pointes sèches. Nous sommes dans la géométrie de la règle et du transporteur (rappelons que le transporteur peut être une simple règle non graduée sur laquelle on peut tracer deux traits fins figurant les extrémités d'un segment, ces deux petits traits pourront

[1] Nous disons que deux géométries sont **équivalentes** si elles permettent la construction des **mêmes objets géométriques**.

[2] C'est-à-dire qu'ils autorisent plus de constructions géométriques.

servir à "reporter" cette longueur de segment sur une droite de la figure.

Le **transporteur n'autorise pas l'arc de cercle** (on ne peut pas reporter de segment n'importe où sur la feuille mais seulement le long d'une droite déjà tracée) et ne peut donc pas être assimilé à un compas sauf à celui à pointes sèches dont c'est justement l'utilisation habituelle. Nous avons rappelé (2) et (3) que la règle et le transporteur autorisent le tracé des bissectrices.

Maintenant nous voulons tracer, grâce à un pliage, la **bissectrice d'un angle aigu** dont un des côtés est le bord d'une feuille et l'autre côté une droite tracée à partir d'un coin de la feuille. Pour tracer le pli représentant la bissectrice, nous allons poser une règle sur le bord extérieur de l'angle et la maintenir immobile avec notre main gauche puis amener le côté de la feuille définissant l'autre côté de l'angle aigu le long de la règle, avec notre main droite (figure 1).

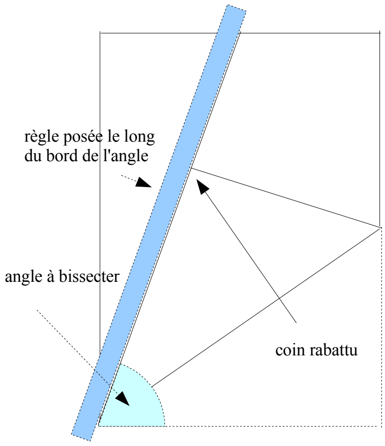


Figure 1
Recherche de la bissectrice

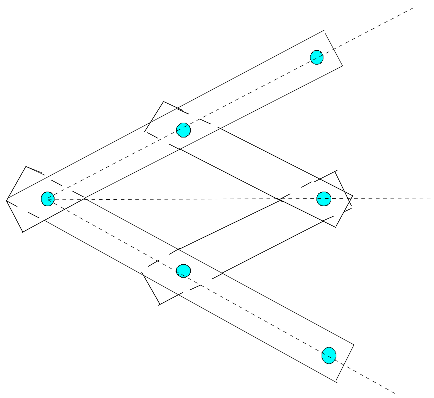


Figure 2
Un bissecteur

Nous avons effectué avec notre feuille, une **rotation dans l'espace autour du sommet (fixe) de l'angle** représenté par le coin de la feuille. Nous sommes dans la **géométrie de la règle et du bissecteur**. Nous rappelons la forme d'un bissecteur très simple réalisé avec des règles plastiques perforées dans la figure 2 (voir (2)).

Observons maintenant la résolution d'un autre problème connu : construire par pliage d'une feuille rectangulaire (A4 par exemple) **un triangle équilatéral**.

Plions la feuille sur elle-même en superposant deux de ses coins consécutifs A et B séparés par un de ses petits côtés, on obtient la médiatrice (MM') du petit côté [AB] :

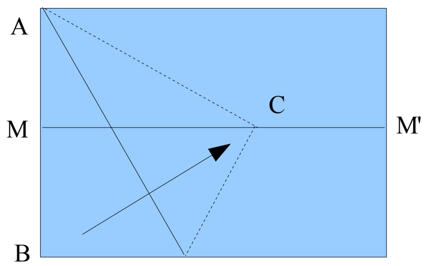


Figure 3

Rabattons un des coins de la feuille en laissant le point A fixe de telle sorte qu'il vienne sur la médiatrice (MM') construite par pliage, appelons C l'image du point B par pliage puis déplions la feuille, alors le triangle ABC est équilatéral (nous vous laissons le plaisir de trouver pourquoi).

Qu'avons-nous fait ? Nous sommes tentés de dire que nous avons **reporté la mesure AB** en gardant fixe A. Mais, en fait, nous n'avons pas fait un report de longueur sur une demi-droite préexistante ([AC) n'est pas encore connue) donc nous ne sommes plus dans la géométrie de la règle et du transporteur mais bien dans la **géométrie de la règle et du compas** (qui est, rappelons-le "plus puissante" que celle de la règle et du bissecteur cette dernière étant équivalente à celle de la règle et du transporteur).

Observons maintenant le célèbre "nœud plat" (ou "nœud simple" aplati) bien connu puisqu'il délivre par pliage serré (voir les fig. (5) et (6)) d'une bande régulière de papier fort **un pentagone régulier**. Comme chacun ne le sait pas nécessairement, le pentagone régulier est constructible à la règle et au compas ainsi qu'à la règle et au transporteur (voir « Nouvelles pratiques de la géométrie » loc. cit.)

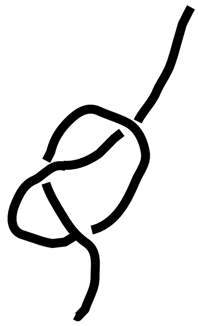


Figure 4
Un nœud simple avec une ficelle

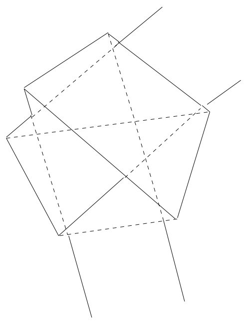


Figure 5
Un nœud simple avec une bande régulière

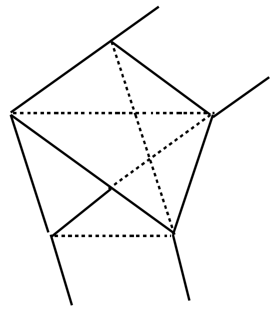


Figure 6
Le nœud bien serré

Lorsque l'on construit le nœud simple on voit bien que l'on doit, par ajustements successifs de la feuille sur elle-même, **serrer le noeud** (sans plisser la feuille) afin d'obtenir un beau pentagone régulier ! Rappelons que le pentagone régulier est constructible à la règle et au compas, ainsi qu'à la règle et au transporteur (mais ce n'est pas facile), pour vous montrer comment on **construit un pentagone régulier avec des pliages simples** c'est-à-dire **sans ajustement**, nous vous en donnons les séquences principales en annexe I, vous reconnaîtrez que c'est moins rapide que le nœud mais cela a le mérite de ne pas introduire d'ajustement dans ce pliage et de rester paisiblement dans la géométrie de la règle et du transporteur…

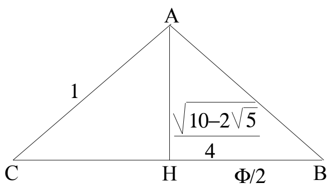


Figure 7

Rappelons les résultats obtenus dans notre chapitre "Polygones" de « Nouvelles pratiques … » (2) : Si l'on appelle C, A, B trois sommets successifs d'un pentagone régulier, il est bien connu que CB est égal au nombre d'or noté habituellement ϕ.

Nous avons montré (2) que la hauteur du triangle ABC, relative au sommet A est : $\dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$ et qu'elle est constructible à la règle et au transporteur.

Elle est donc constructible par pliage simple puisque la géométrie des pliages simples (sans ajustement) permet de construire les bissectrices et est équivalente à la géométrie de la règle et du transporteur.

Il nous reste donc à construire par pliage le nombre d'or (facile et connu !) et le nombre $\dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$ (un peu moins facile). Nous vous détaillons ces constructions en annexe I.

Qu'en est-il pour **la trisection** qui elle, on le sait aussi, n'est pas réalisable à la règle et au compas ?

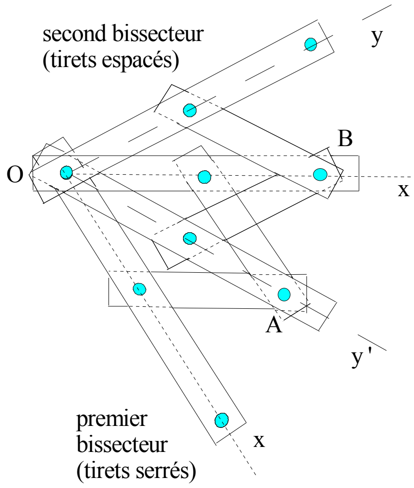


Figure 8

Remarquons tout d'abord qu'elle est facilement réalisable avec deux des bissecteurs que nous vous avons présentés en figure 2.

On positionne les deux centres de rotation des deux bissecteurs sur le sommet O de l'angle à trisecter, puis on pose les deux barrettes extérieures des deux trisecteurs réciproquement sur les côtés [Ox) et [Oy) de l'angle à trisecter.

Ensuite on superpose par ajustements successifs chacune des bissectrices [OA) et [OB) déterminées par les deux bissecteurs respectivement sur les barrettes [Oy') et [Ox') des bissecteurs.

Alors les deux demi-droites [Oy') et [Ox') trissectent l'angle $\widehat{xOy}$.

Nous avons effectué ici un **ajustement des deux points** A et B sur les deux demi-droites [Oy') et [Ox').

Voici la présentation de la **trisection par pliage** proposée par D. BOURSIN et V. LAROSE (1) et que nous détaillons dans notre ouvrage « Nouvelles pratiques … » (2).

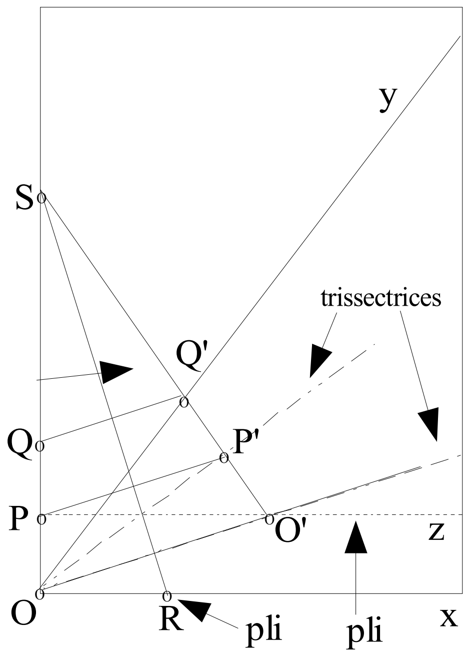


Figure 9

Construction des trissectrices (*) :

Soit [Ox) et [Oy) les deux demi-droites définissant l'angle à trisecter, tracées sur une feuille, [Ox) étant confondu avec le bord inférieur de la feuille.

Traçons, par exemple par deux pliages successifs de la feuille sur elle-même parallèlement à [Ox), une demi-droite [Pz) et un point Q tels que P soit le milieu de [OQ].

Plions le bord gauche de la feuille de telle sorte que, **simultanément** le point Q vienne sur la demi-droite [Oy) en Q' et le point O vienne sur la demi-droite [Pz) en O'.

Appelons le pli [SR] et déplions la feuille.

(*) on peut aussi écrire **"trisectrice"**

Alors **[OO') et [OP') trisectent l'angle $\widehat{xOy}$.** (Nous vous invitons à le démontrer.)

Cette construction des trissectrices délivre les deux vraies trissectrices (au sens rigoureux mathématiques), (aux défauts près liés à l'épaisseur des traits par exemple et à l'imprécision des ajustements).

Alors, **les pliages seraient "plus forts" que la règle et le compas ?**

« Ça dépend », comme disent les Normands… Ça dépend de quoi l'on parle, comme toujours en mathématiques. Le pliage qui permet d'obtenir les trissectrices ne se contente pas de faire "tourner" la feuille, il demande de poser deux points donnés sur deux droites données (pour plus de précisions, voyez l'annexe II : axiomatique des pliages), il faut "tâtonner" pour y arriver (essayez !).

Autrement dit on procède par **approximations successives** et qu'est-ce que l'on fait, en mathématiques, lorsque l'on fait des approximations successives ? Eh bien ! On fait de la **géométrie analytique** (celle-ci permet, par exemple, de construire, avec une approximation connue, des nombres non algébriques).

On peut appeler cela, si vous le voulez bien de la géométrie "**des pliages avec ajustement**".

Pour bien fixer les idées nous vous présentons un classement des différentes géométries dont nous avons parlé selon leur "puissance" croissante c'est-à-dire selon le nombre de constructions géométriques qu'elles autorisent :

Désignation de la géométrie	- Géométrie à la règle et au bissecteur (ou au transporteur ou au compas à pointes sèches) - Géométrie des pliages simples	- Géométrie à la règle et au compas - Géométrie au compas seul - Géométrie des pliages avec ajustement d'un point sur une droite (arc de cercle)	- Géométrie des pliages avec ajustements simultanés de deux points sur deux droites distinctes non parallèles
Exemples de figures et/ou de nombres constructibles	- Bissectrice - Triangle équilatéral - Pentagone régulier - Racines carrées de nombres rationnels - Autres : $\sqrt{2+\sqrt{2}}$	- Triangle équilatéral - Racines carrées de nombres réels - Autres : $\sqrt{1+\sqrt{2}}$ $\sqrt[4]{2}$	- Trisection - Pentagone régulier par nœud - Racines cubiques de nombres rationnels $\sqrt[3]{2}$

Résumons

Géométrie à la règle et au bissecteur = Géométrie à la règle et au transporteur = Géométrie des pliages simples $\subset$ Géométrie à la règle et au compas = Géométrie au compas seul = Géométrie des pliages avec ajustement d'un point $\subset$ Géométrie des pliages avec ajustement de deux points sur deux droites distinctes.

Attention donc à vos pliages et autres origamis ! Comme Monsieur Jourdain et la prose vous y utilisez des tas de géométries différentes sans le savoir !

Pour une mathématisation des origamis vous pouvez consulter le site (Bibliographie (6)) qui présente une réflexion empruntant des voies très différentes des nôtres mais, (heureusement), retrouve nos résultats sur la constructibilité des points et lignes géométriques étudiés en (2). Pour nos lecteurs qui n'auraient pas le temps ou l'envie de visiter ce site, nous établissons en annexe II un parallèle entre les axiomes des origamis dus à Huzita et Justin (7) et notre classement des différents pliages selon les constructions qu'ils autorisent.

ANNEXE I

Construction du pentagone régulier par pliage simple (sans ajustement)

Construisons tout d'abord par pliage **le nombre d'or** ϕ (cette construction est bien connue à la règle et au compas, nous ne la donnons par pliage que pour mémoire).

Prendre une feuille de papier deux fois plus longue que large, plier la feuille trois fois sur elle-même pour former une graduation régulière

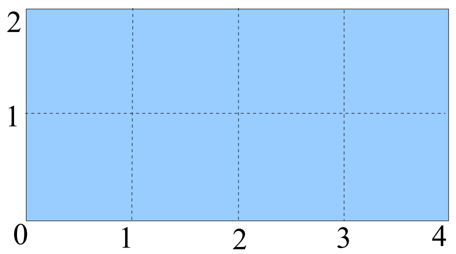


Figure 10

Par pliage former un triangle rectangle de côtés de longueurs 2 et 1 donc d'hypoténuse $\sqrt{5}$.

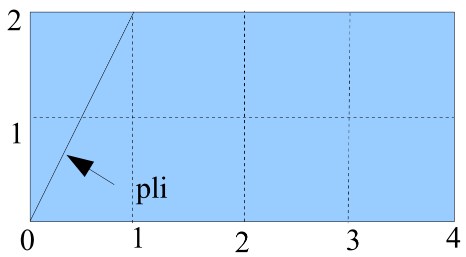


Figure 11

Par pliage reporter la longueur $\sqrt{5}$ (en trait gras) le long du grand côté de la feuille

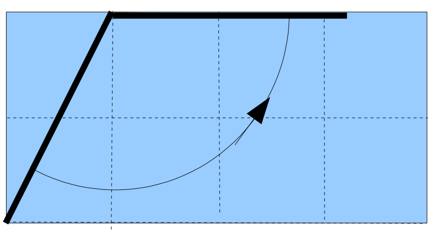


Figure 12

Couper la feuille à l'extrémité du trait gras. Il suffit maintenant de replier la feuille sur elle-même en deux parties d'égales longueurs pour obtenir Φ, le nombre d'or.

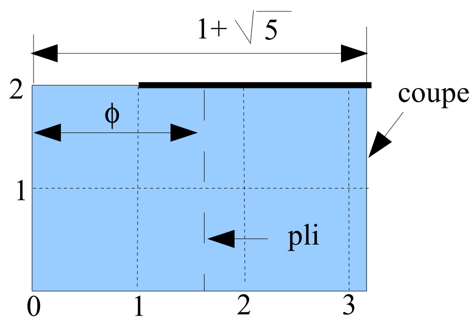
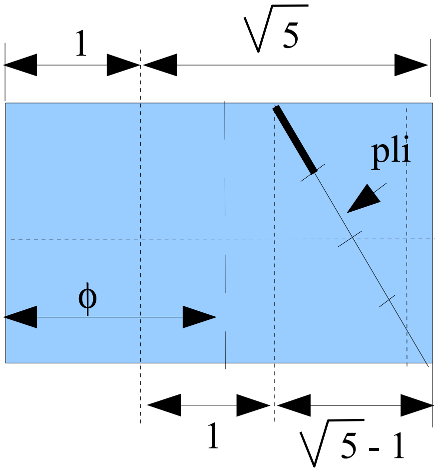
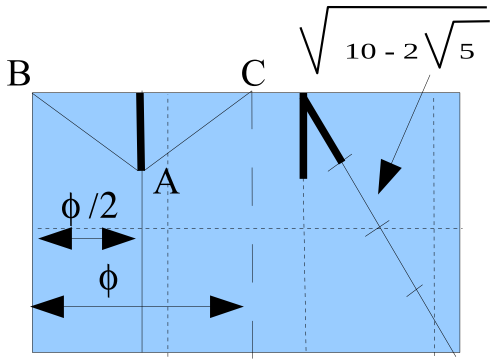


Figure 13

Il nous reste, pour compléter la construction du triangle ABC qui nous permettra de construire le pentagone régulier, à construire par pliage la longueur $\dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$.

Celle-ci peut s'obtenir comme l'hypoténuse d'un triangle rectangle de petits côtés de mesures $\sqrt{5}-1$ et 2, celle-ci a pour longueur $\sqrt{10-2\sqrt{5}}$. Il suffira ensuite de diviser cette longueur par 4 par pliage.

 Figure 14	Utiliser la graduation (en traits pointillés) de la feuille pour désigner la longueur $\sqrt{5}-1$, tracer à l'aide d'un pli, la diagonale du rectangle de côtés de longueurs 2 et $\sqrt{5}-1$, celle-ci a pour longueur $\sqrt{10-2\sqrt{5}}$. Diviser cette longueur par 4 en pliant la feuille deux fois de suite (les plis sont désignés par des petits traits). Le trait gras a pour longueur $\dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$, c'est la hauteur recherchée du triangle ABC.
 Figure 15	Rabattre la longueur $\dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$ le long du pli de graduation verticale le plus proche, parallèlement au petit côté de la feuille (segment dessiné en trait pointillé gras) (cette étape paraît inutile mais ce n'est pas le cas, essayez de la supprimer pour voir...). Noter [BC] le segment de longueur ϕ porté par le grand côté supérieur de la feuille. Marquer d'un pli la moitié de ϕ, reporter sur ce pli la longueur $\dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$. L'extrémité du segment nous délivre la position du sommet A du triangle ABC recherché.

Vous pouvez vérifier avec votre rapporteur que l'angle $\widehat{\mathrm{BAC}}$ a pour mesure 108 degrés (aux approximations de pliage près).

Si l'on veut se faire plaisir, on peut découper le triangle ABC, s'en servir comme patron pour en découper deux autres (il reste un vide au milieu) et se construire un beau pentagone régulier. Le nôtre (voyez ci-dessous) n'est pas beau car les triangles ne sont pas parfaitement découpés mais il est authentique (nous n'avons pas corrigé le dessin pour faire joli) !

Bien entendu, bien que cette construction soit peu précise à cause, par exemple, des erreurs dues à l'épaisseur des pliages elle est **rigoureuse d'un point de vue mathématique**, c'est ce qui nous importe avant tout.

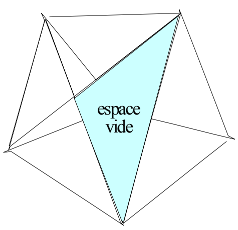


Figure 16

Le pentagone construit avec trois triangles sans utiliser le compas.

ANNEXE II
Comparaison entre notre classement des pliages et l'axiomatique des origamis de Huzita-Justin

Nous énumérons ci-dessous les axiomes de Huzita-Justin, l'énoncé géométrique correspondant habituel ***en italique*** ainsi que les termes **entre parenthèses** sont **ajoutés par nous,** nous spécifions ensuite la ou **les géométries correspondantes** :

Axiome 1 "Un unique pli passe par deux points P_1 et P_2 spécifiés (distincts). "
Par deux points distincts passe une seule droite.
Géométrie du pli simple sans ajustement.

Axiome 2 "Un unique pli amène un point P_1 sur un point P_2 (les deux spécifiés). "
Tout segment [P_1 P_2] admet une médiatrice.
Géométrie du pli simple sans ajustement
Géométrie de la règle et du transporteur (ou du compas à pointes sèches)
Géométrie de la règle et du bissecteur

Axiome 3 "Un unique pli superpose deux droites (non parallèles) L_1 et L_2. "
Tout angle (aigu) défini par deux droites admet une bissectrice.
Géométrie du pli simple sans ajustement
Géométrie de la règle et du transporteur
Géométrie de la règle et du bissecteur

Axiome 4 "Un unique pli passe par un point P_1 et est orthogonal à une droite donnée L_1. "
Par tout point il passe une et une seule droite orthogonale à une droite donnée.
Géométrie du pli simple sans ajustement
Géométrie de la règle et du transporteur
Géométrie de la règle et du bissecteur

Axiome 5 "Soient une droite L_1 et deux points P_1 et P_2, un seul pli passe par P_2 et amène P_1 sur L_1. "
Il existe un seul axe de symétrie passant par un point donné et transformant une droite donnée en une droite contenant un point donné.
Géométrie du pli avec rotation (arc de cercle ou ajustement d'un point)
Géométrie de la règle et du compas

Axiome 6 "Soient deux droites L_1 et L_2 et deux points P_1 et P_2 (donnés), un pli amène P_1 sur L_1 et P_2 sur L_2."
Il existe un axe de symétrie axiale transformant deux droites données en deux droites contenant deux points donnés.
Géométrie avec ajustement de deux points (sur deux droites distinctes)

Pour les problèmes de constructibilité des nombres algébriques par ces différentes géométries, veuillez consulter notre ouvrage (2) et J.JUSTIN(7).

Commentaire mathématique

Il est intéressant de souligner qu'une fois de plus le mathématicien utilise ici un univers géométrique "plus vaste " que celui sur lequel il veut faire des constructions ou des démonstrations. En effet, nous voulons travailler dans l'univers des objets géométriques de dimension deux mais nous utilisons l'outil "pliage " dans l'espace de dimension trois.

Nous avons déjà souligné ce fait dans un autre contexte, par exemple le passage du corps des nombres réels à celui des nombres complexes pour effectuer des calculs intermédiaires utiles. Nous utilisons aussi, sans le dire pour ne pas compliquer le propos, le fait que le papier servant au pliage n'est pas élastique, s'il l'était, la trisection, par exemple, pourrait avoir plusieurs solutions et devenir inexacte.

Commentaire pédagogique

Bien que les pliages n'apparaissent pas explicitement dans les programmes de l'enseignement français, sauf éventuellement dans les classes de maternelle, on constate immédiatement, lorsque l'on se penche sur les mathématiques sous-jacentes, leur intérêt pédagogique.

Comme le soutient depuis longtemps l'un de nous (R. Rodriguez, Thèse de Sciences de l' Éducation de l'Université de Caen (8)) et plus récemment nos publications dans le sein de l'I.R.E.M. de Basse-Normandie ((2) et (3)) il est indispensable d'aborder les apprentissages mathématiques et en particulier géométriques par des directions variées par exemple :

- Observation visuelle d'une figure tracée sur un papier
- Tri de figures découpées dans du carton
- Tracé à main levée de la figure
- Tracé de la figure avec des instruments
- Construction d'objets avec du matériel pédagogique (barres perforées, polygones agrafables de plastique par exemple)
- Tracé "manuel" virtuel avec un logiciel de géométrie. . ..

L'élève construisant grâce à ces différents media ses "psychomorphismes" (8) menant a l'acquisition de ses notions mathématiques abstraites. (Pour le rôle prépondérant de la main dans les apprentissages on pourra consulter l'ouvrage d' Édouard Gentaz : « La main, le cerveau et le toucher » (9).)

Les pliages font partie de ces media, ils sont eux aussi intéressants et innovants car ils font appel à d'autres actions intellectuelles, parfois très fines comme nous avons pu le constater dans les pages précédentes.

Ceci est donc un plaidoyer pour l'introduction des activités de pliages en initiation et développement des notions mathématiques dans les classes de collège et même, pourquoi pas, au lycée.

Bibliographie

(1) D. BOURSIN, V. LAROSE « Pliages et géométrie » Editions du Kangourou

(2) D. SALLES, R. RODRIGUEZ « Nouvelles pratiques de la géométrie ». Editions I.R.E.M. de Basse-Normandie 2008

(3) R. RODRIGUEZ, D. SALLES « Du dessin perçu à la figure construite » Editions Ellipses 2006

(4) L. MASCHERONI « Géométrie du compas » (Geometria del compasso) 1797

(5) J.C. CARREGA « Théorie des corps » Editions Hermann 1997 et 2001

(6) En ligne : fr.wikipedia.org/wiki/Mathématiques_des_origamis

(7) J. JUSTIN « Résolution par le pliage de l'équation du troisième degré et applications géométriques »", reprinted in Proceedings of the First International Meeting of Origami Science and Technology, H. Huzita ed. (1989), pp. 251-261.

(8) R. RODRIGUEZ Thèse de Sciences de l'Éducation de l'Université de Caen

(9) É. GENTAZ « La main, le cerveau et le toucher » Éditions Dunod Collection Psycho Sup 2009

Danielle SALLES-LEGAC et l'Équipe Géométrie - septembre 2009