

La sinusoïde n'est pas celle que vous croyez (II)
Deuxième partie : la sinusoïde selon Pitot, de l'espace au plan

Deuxième apparition : Le développement du cylindre et d'une de ses sections.

La deuxième apparition explicite d'une courbe sinusoïde est due au mathématicien Pitot. Cette fois elle est reconnue comme la courbe que l'on obtient en développant un cylindre droit à base circulaire sur lequel est tracé une ellipse par intersection d'un plan non parallèle au plan de la base, mais Pitot reprend la dénomination de Roberval, au nom près de la *Roulette*, devenue *Cycloïde* : la sinusoïde reste pour lui la *Compagne de la Cycloïde*.

Qui est ce M. Pitot ? L'*Index biographique de l'Académie des Sciences*⁵ nous apprend qu'il se prénomrait "Henri" et que :

"PITOT (*Henri*), [*est*] né à Aramon, Languedoc [Gard], le 29 mai 1695 ; — [*qu'il devient*] adjoint mécanicien, le 9 juin 1724, en remplacement de Beaufort, promu associé mécanicien ; — [*qu'il est promu lui-même*] associé mécanicien, le 20 juillet 1727 ; en remplacement de J[*ean*].-N[*icolas*]. de La Hire [*dit le cadet*], décédé ; — [*qu'il devient*] pensionnaire géomètre, le 18 mars 1733, en remplacement de [Thomas Fantet de ?] Lagny, nommé vétéran ; — [*puis*] pensionnaire vétéran, le 17 avril 1742 ; — [*qu'il est*] mort à Aramon, le 27 décembre 1771."

Cet index le présente comme : "— *Physicien. Directeur du canal du Languedoc.*" Son *Éloge* sera lu par Grandjean de Fouchy, le 14 novembre 1772. L'article de l'index est signé : AP.

La sinusoïde fait cette fois l'objet d'un mémoire de Pitot⁶, paru en 1724 dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences* et dont on trouvera plus loin le texte. En effet, celui-ci est introduit par une notice, insérée comme à l'accoutumée dans l'*Histoire de l'Académie... pour la même Année*, dans les pages consacrées à la *Géométrie*, et dont le lecteur trouvera ci-après la teneur.

*
* *

[*Histoire de l'Académie Royale des Sciences, Année M. DCCXXIV (1724).*]

DES SCIENCES.
GÉOMÉTRIE.

// p. 65 //

SUR LA QUADRATURE
de la moitié d'une Courbe, qui est la COMPAGNE
DE LA CYCLOÏDE.

[En marge droite :] V. les M. // p. 107.

ON sait que les Ordonnées de la Cycloïde, ou plutôt de la demi-Cycloïde, parallèles à sa Base, sont égales chacune à l'Ordonnée correspondante du demi-Cercle generateur, plus l'Arc du même demi-Cercle correspondant à l'Ordonnée, pris depuis l'origine du demi-Cercle. On a imaginé une autre Courbe, dont les Ordonnées, posées comme celles de la Cycloïde par rapport au même demi-Cercle generateur, ne seroient égales qu'aux Arcs correspondants du même demi-Cercle. On la peut appeler *Compagne de la Cycloïde*. Il est évident que l'une & l'autre sont Mécaniques, puisque les Ordonnées de la Cycloïde sont en une de leurs parties, & les Ordonnées de la Compagne en leur entier, des Arcs circulaires qu'on suppose rectifiés, & qu'on n'a pas en Géométrie ces rectifications. La dernière & plus grande Ordonnée de l'une & de l'autre Courbe est la même, le

⁵ Paris, Institut de France et Gauthier-Villars, 1979, p. 418.

⁶M. PITOT. "Quadrature de la moitié d'une Courbe des arcs, appelée la Compagne de la Cycloïde", in *Histoire de l'Académie Royale des Sciences, Année M. DCCXXIV (1724). Avec les Mémoires de Mathématique & de Physique, pour la même Année. Tirés des Registres de cette Académie*. A Paris, De l'Imprimerie Royale, M. D C C X X V I (1726), pp. 65-67 de l'HARS, pp. 107-113, planches 8 et 9, p. 112 des MMPARS.

demi-Cercle generateur étant le même, car dans la Cycloïde cette dernière Ordonnée est la dernière Ordonnée du demi-Cercle, qui est alors zero, plus une ligne égale à la circonference de ce demi-Cercle, & dans la Compagne c'est cette circonference seule, ce qui est la même chose. La Compagne devient de concave qu'elle étoit, convexe vers son axe, qui est le diametre du demi-Cercle generateur, ou, ce qui est le même, a un point d'inflexion, & ce point répond au centre du demi-Cercle generateur, & peut-être appelé par cette raison le point du milieu de la Courbe ; la Cycloïde n'a point d'inflexion. // p. 66 //

L'aire ou l'espace curviligne de la Compagne de la Cycloïde est renfermé entre le diametre du demi-Cercle generateur, la dernière & plus grande Ordonnée de cette Courbe, & sa circonference. L'aire du demi-Cercle generateur est comprise dans cet espace. Il s'agit d'en quarrer la moitié déterminée par l'Ordonnée de la Courbe qui part du centre du demi-Cercle generateur, cette moitié étant prise du côté de l'origine du demi-Cercle, & de la Courbe. M. Pitot croit que cette Quadrature n'a point encore été trouvée, quoi-qu'elle soit fort simple.

En effet dès qu'on prend à l'ordinaire la Differentielle de l'espace de la Courbe, qui est son Ordonnée indéterminée multipliée par une des portions infiniment petites & égales de son axe, & qu'on integre cette quantité selon les Regles, on a une expression indéterminée de l'espace, où il entre sous differents signes de plus & de moins differents produits d'Abscisses, ou d'Ordonnées, & du rayon du demi-Cercle qui est la seule grandeur constante & connuë. Or la Courbe n'est point quarrable, tant qu'il subsiste dans cette expression quelqu'une de ses Ordonnées, parce qu'elles sont toutes égales à des Arcs circulaires, dont on ne connoît par la grandeur. Mais si dans cette même expression generale & indéterminée, on suppose l'Abscisse égale au rayon du demi-Cercle generateur, les grandeurs qui comprenoient des Ordonnées disparaissent, parce qu'elles sont alors affectées de signes contraires, & il ne reste que le quarré du rayon du demi-Cercle, ce qui fait voir que l'espace curviligne de la moitié de la Courbe, telle que nous venons de la poser, est égal à ce quarré.

M. Pitot apporte encore une autre preuve tirée de ce que cette Courbe est la Compagne de la Cycloïde. Une demi-Cycloïde étant décrite avec son demi-Cercle generateur, si l'on fait un parallelogramme rectangle, dont un des côtés soit le diametre du demi-Cercle, & l'autre la Base ou dernière Ordonnée de la Cycloïde égale à la circonference de ce demi-Cercle, il est très facile de voir que cet espace rectiligne est quadruple du demi-Cercle generateur. Dans cet espace total // p. 67 // sont compris 3 espaces curvilignes partiels ; le 1^{er} est le demi-Cercle generateur, le 2^d est entre la circonference de ce demi-Cercle, la circonference concave de la Cycloïde, & sa base, le 3^{me} est entre la circonference convexe de la Cycloïde, & les deux côtés du rectangle total. Il est démontré que ce 3^{me} espace est égal au demi-Cercle generateur, d'où il suit que le 2^d est égal à deux fois ce demi-Cercle.

Chaque Ordonnée de la Cycloïde ayant deux portions, dont l'une est une Ordonnée du demi-Cercle generateur, & l'autre est égale à l'Arc circulaire correspondant, le 2^d espace partiel que nous considerons ici n'est rempli que des secondes portions des Ordonnées de la Cycloïde égales aux Arcs circulaires. L'espace de la Compagne de la Cycloïde n'est pareillement rempli que d'Ordonnées de la même grandeur. De part & d'autre ces lignes paralleles sont séparées entre elles par le même intervalle toujours égal, qui est l'infiniment petit du diametre du demi-Cercle generateur, ou, ce qui est la même chose, celles d'une part font de petits parallelogrammes rectangles toujours égaux à ceux des correspondants de l'autre part. Elles sont de part & d'autre en nombre infini égal. Donc le 2^d espace partiel de la Cycloïde est égal à l'espace total de la Compagne de la Cycloïde. Or M. Pitot démontre aisément que si de cet 2^d espace partiel de la Cycloïde on en prend la moitié comme nous avons pris celle de la Compagne, cette moitié est égale au quarré du rayon du demi-Cercle generateur.

Il suit de cette démonstration que l'espace total de la Compagne de la Cycloïde est double du demi-Cercle, & comme dans cet espace est compris le demi-Cercle, si on l'en retranche, le reste lui est égal.

Nous ne dirons rien d'une troisième preuve un peu plus compliquée, d'où M. Pitot tire une Regle pour mesurer la force de la Vis. On peut pardonner à l'Art de passer quelquefois les bornes de la nécessité absoluë.

[...]

*

* *

Commentaire de la notice de l'*Histoire de la Académie*...

Sans figure, le texte n'est pas très explicite : le lecteur pourra se reporter aux textes de Roberval (dans le premier épisode de ce feuilleton). Il constatera en outre ci-dessous que le *Mémoire* d'Henri Pitot constitue bien une nouveauté quant à la cycloïde ou plutôt quant à sa *compagne*, car il ne s'agit pas pour lui de donner la *n*-ième quadrature relative d'une arche ou d'une demi-arche de cycloïde ou de sa *compagne*, voire d'en faire la rectification, mais bien plutôt de quarrer un certain espace sous la sinusoïde dont l'aire est équivalente au carré du rayon du cercle générateur ; il s'agit donc, cette fois, d'une quadrature absolue, et non d'une quadrature relative. Précisons :

– une quadrature absolue est celle qui permet d’exprimer l’aire limitée par des lignes mixtes, droites ou courbes, par un rapport rationnel avec l’aire d’un carré donné (d’où le mot de “quadrature”) : par exemple, lorsque Pitot montre que l’aire “sous” la *Compagne de la Cycloïde* est égale à celle d’un carré construit sur le rayon du cercle générateur, ou lorsqu’Archimède montre qu’un “segment” de parabole vaut les $\frac{4}{3}$ d’un certain triangle qu’il contient, ils réalisent l’un comme l’autre une quadrature absolue ; dans le second cas, l’on sait en effet réaliser la quadrature absolue d’un triangle. L’impossibilité, parfois, de réaliser une quadrature ressortit à l’impossibilité de construire, à la règle et au compas, le rapport qui existe entre l’aire cherchée et le carré qui pourrait la “commensurer” : c’est le cas pour celle d’un cercle, que l’on ne peut “rapporter” au carré de son rayon, dans la mesure où le rapport π qui existe entre eux n’est pas constructible, comme il l’aurait été, si c’eût été $\frac{22}{7}$ ou $\frac{355}{113}$, nombres rationnels ;

– une quadrature relative est celle qui exprime une aire limitée par des lignes mixtes, par un rapport rationnel avec une autre aire limitée par des lignes mixtes : par exemple, lorsque Roberval montre que l’aire comprise entre la *Roulette* et sa *Compagne* est égale à celle d’un demi-cercle générateur, du fait que les deux surfaces comportent les mêmes *indivisibles*, il réalise une quadrature relative. Une quadrature relative peut présenter un intérêt, même si on sait, par ailleurs, réaliser la quadrature absolue de la seconde aire, auquel cas l’on a réalisé du même coup une quadrature absolue de la première. Cela explique les nombreuses tentatives pour réaliser la “quadrature du cercle” (sous-entendu : “absolue”), en se servant d’autres courbes mixtilignes, telles que les lunules, par exemple, ou ce que les Anciens nommaient “quadratrices”, obtenues par exemple par composition de mouvements.

D’autre part, on pourrait croire que seules les deux premières méthodes de Pitot ont un intérêt et que la troisième relève du “supplément d’âme” ou de “l’art pour l’art”, si l’on en croit les derniers mots de la notice ; c’est vrai, si l’on considère que le but proposé est aisément atteint par les deux premières voies. Mais on va voir que la troisième méthode est intéressante à plus d’un titre : d’une part, Pitot y considère une courbe tracée sur un cylindre qu’il aplanit – on dirait aujourd’hui qu’il le développe – puis une hélice formée dans ce même cylindre, soulignant fort à propos et en digne *neveu* de Descartes, qu’il serait bon que les géomètres s’occupassent de telles courbes qu’il nomme à *double courbure* ; on sait que c’était l’un des travaux que Descartes laissait à sa descendance spirituelle et qu’Alexis-Claude Clairaut s’y attellera en 1732, se signalant ainsi au monde savant ; les seuls à avoir abordé cette question dans quelques cas particuliers sont Leibniz, Bernoulli et Philippe de La Hire, auxquels il faut donc ajouter Pitot. D’autre part, il montre que la sinusoïde peut être obtenue comme “développée” – au sens du développement-plan d’une surface cylindrique – d’une ellipse. La démonstration du fait que l’ellipse de section du cylindre, *EAQD* (Figure 3 du *Mémoire*), se transforme en sinusoïde – ou plutôt en *compagne de la Cycloïde* – lorsque l’on développe le cylindre, n’est pas explicite, mais c’est bien le constat qui résulte de l’*Avertissement* et des *Remarques* qui le suivent. Enfin, il applique certaine conséquence de son étude à la mécanique des vis (conçues comme vis de pressoir). En revanche, Pitot ne dit pas un mot d’une éventuelle rectification de la sinusoïde, dont on est en droit de penser pourtant qu’il a pu percevoir qu’elle a même longueur que l’arc d’ellipse dont elle est la “développée plane”, dès lors que l’on admettrait, ou démontrerait, bien sûr, qu’un tel “développement-plan” ne modifie pas la longueur de la courbe. Est-ce à dire qu’il était bien conscient que la rectification “générale” de la sinusoïde – *i. e.* le calcul de la longueur de l’un quelconque de ses arcs – pose les mêmes problèmes que celle de l’ellipse – qui relève de ce que l’on appellera plus tard “les intégrales elliptiques” ? Ou est-ce que le problème ne l’intéressait pas ? On peut penser pourtant que la question a pu l’effleurer : pour chaque courbe étudiée, il était devenu habituel, à la fin du XVII^e siècle, d’en chercher toutes les caractéristiques métriques, et en particulier la longueur ; dans le cas de la cycloïde, c’est Wren, l’architecte anglais, qui l’a rectifiée le premier, lorsqu’il répondit au concours roulant sur les propriétés de cette courbe que Blaise Pascal nomme “la roulette” ; ce concours avait été proposé à la sagacité du monde savant et primé par Amos Dettonville, *alias* Blaise Pascal – en effet, Amos Dettonville est l’anagramme transparent de Louis de Montalte, nom sous la signature duquel les *Provinciales* étaient parues. Pascal le rapporte en ces termes dans son *Histoire de la Roulette* (1658) : “*Mais entre tous les écrits qu’on a reçus de cette sorte, il n’y a rien de plus beau que ce qui a été envoyé par M. Wren. Car outre la belle manière qu’il donne de mesurer le plan de la roulette, il a donné la comparaison de la ligne courbe même et de ses parties avec la ligne droite. Sa proposition est que la ligne de la roulette est quadruple de son axe, dont il a envoyé l’énonciation sans démonstration. Et comme il est le premier qui l’a produite, c’est sans doute à lui que l’honneur de la première invention en appartient*”. Le lecteur intéressé par cette question de la rectification de la cycloïde trouvera quelques éléments, et en particulier la version que donne John Wallis de la démonstration de Wren, dans un article à paraître : il pourra y constater que le résultat de Wren est beaucoup plus général que ne le laisse entendre Pascal.

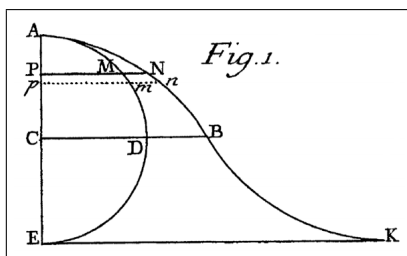
Voici maintenant le texte du *Mémoire* de Pitot.

* * * * *

QUADRATURE
DE LA MOITIE'
D'UNE COURBE DES ARCS,
APPELLE'E
LA COMPAGNE DE LA CYCLOIDE.
Par M. PITOT.

[En marge droite :] 12 Juillet // 1724. // Fig. 1.

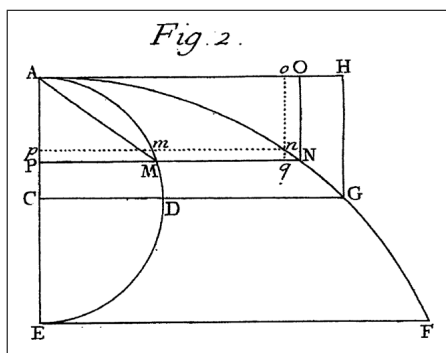
LA Courbe ABK est telle que chaque Ordonnée PN est égale à l'Arc correspondant AM du demi-Cercle ADE . Cette Courbe est connue des Geometres, mais personne, que je sçache, n'a parlé de la Quadrature de l'espace ACB renfermé par sa moitié AB : cet espace est égal au carré du Rayon AC ; ce que je démontre par trois voyes différentes.



[Figure 1 de la Planche 8.]

1.^o Soit le Rayon $AC = a$, la Coupée $AP = x$, l'Arc AM , ou l'Ordonnée $PN = z$: on aura zdx égale à la différentielle de l'espace APN , dont on trouvera l'intégrale $xz + a \times \sqrt{2ax - xx} - az$ par les methodes expliquées dans l'Analyse démontrée pages 761 & 794 : mais lorsque $x = a$, on a pour la quadrature de l'espace ACB , le carré du Rayon $AC = aa$. // p. 108 //

[En marge gauche :] Fig. 2.

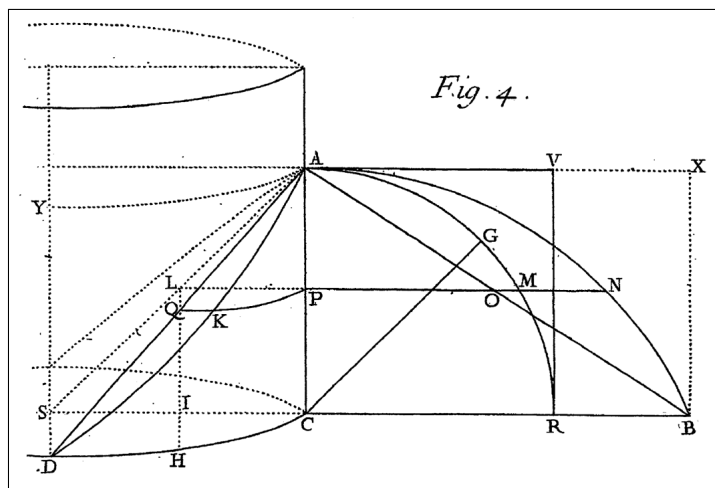


[Figure 2 de la Planche 8.]

2.^o Par les propriétés de la Cycloïde ou Roulette simple, comme AGF , toutes les lignes MN sont égales aux arcs de Cercle correspondant[s] AM ; d'où il suit que l'espace ADG est égal à celui de la Courbe ABC (Fig. 1.)

Entre plusieurs manières de démontrer que l'espace ADG , formé par le Quart de Cercle AD , la droite DG , & la portion AG de la Cycloïde, est égal au carré du Rayon, voici la plus simple que nous ayons trouvée.

Ayant mené NO parallèle à AP , on tirera les parallèles infiniment proches pn, no ; mais à cause de la Cycloïde, Nn est parallèle à AM , ainsi les Triangles Nqn, MPA , sont semblables, d'où l'on tire Nq ou Oo . qn ou Pp : : MP . PA ou NO & Oo ' $NO = MP$ ' Pp . L'on voit par-là que l'élément No de l'espace AGH étant égal à l'élément Pm du Quart de Cercle AD , cet espace est égal au Quart de Cercle. Maintenant si l'on fait CA ou $CD = a$, l'arc $AD = DG = z$, on aura la superficie du rectangle $CH = aa + az$, duquel il faut retrancher l'espace AGH & le Quart de Cercle ACD qui lui est égal : on ôtera donc le demi-Cercle $ADE = az$ du rectangle $CH = aa + az$, pour avoir l'espace $ADG = aa$. Donc, &c.



[Figure 4 de la Planche 9.]

[En marge droite :] 17 Fevr. // 1725. // Fig. 4.

POUR démontrer que chaque arc PQ est égal à l'Arc correspondant AM , si par un point P du rayon CA , on coupe le Cylindre par un plan parallèle à sa base, la diagonale AS , ou le demi-grand-axe de l'Ellipse, sera coupée au point L , & on aura $AP = PL$, car les triangles ACS , APL , sont semblables, rectangles & isosceles, puisque $CA = CS$.

Soit mené LI parallèle à AC , il est clair que $CI = PL$, & par conséquent l'arc PQ égal à l'arc CH ; & puisque $AP = PL$, & que $PL = CI$, AP & CI sont égales. Ce qui montre clairement que l'ordonnée IH est égale à l'ordonnée // p. 110 // PM , & l'arc AM égal à l'arc CH , ou à l'arc $PQ = PN$. Donc, &c.

REMARQUE I.

[En marge gauche :] Fig. 4.

Si l'on applique sur le cylindre le triangle rectangle ACB , dont la base CB est égale au quart de Cercle CHD , ou AMR ; il faut voir ce que devient la diagonale AB : en quoi la courbe AKD qu'elle forme sur le cylindre diffère de l'Ellipse, & les propriétés de cette courbe. Pour trouver tous les points K de la courbe AKD , il faut mener PO parallèle à CB , & faire l'arc PK égal à PO , car on aura AC à CB , ou au quart de Cercle CHD :: AP . PO , ou à l'arc PK ; & si l'on fait AC au quart de Cercle AMR , ou CHD :: AP à l'arc AG , on aura l'arc AG égal à l'arc PK , mais l'arc $PQ =$ l'arc $AGM = PN$, & l'arc $PK =$ l'arc $AG = PO$, donc l'arc $QK =$ l'arc $GM = ON$.

Puisque le triangle ACB occupe sur le cylindre l'espace $ACHDKA$, il s'ensuit que cet espace est égal au triangle, mais la superficie du coin cylindrique $ACHDQA$ est égale au carré CV du rayon, & à celle de la Courbe ou de la Compagne de la Cycloïde $ANBCA$, ainsi que nous l'avons démontré; d'où l'on voit que l'espace $AKDQA =$ l'espace $AGMRVA =$ au segment $ANBOA =$ au triligne $ANBRMGA$. Tous ces espaces égaux ne méritent pas qu'on s'y arrête davantage, n'étant pas indépendant[s] de la Quadrature du Cercle.

REMARQUE II.

[En marge gauche :] Fig. 5.

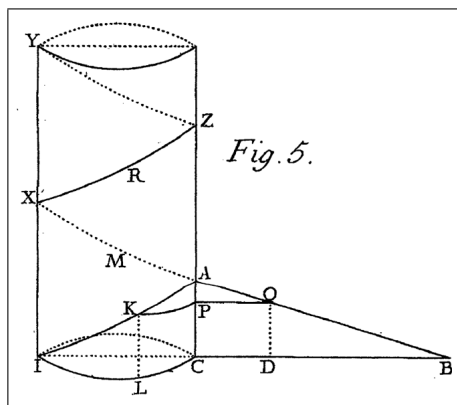
On peut prendre la base du triangle ABC égale à la circonférence de celle du cylindre, ou de tel arc de cette circonférence qu'on voudra : nous la prendrons ici égale à la demi-circonférence. La Courbe formée par la diagonale sera AKI , dont on trouvera tous les points, en prenant de même que ci-dessus l'arc PK égal à PO ; mais l'arc CL étant égal à l'arc PK , l'arc IL est égal à DB , & LK à DO . Or BD . DO :: BC . CA ; donc IL . LK :: IC . CA . Cette // p. 111 // proportion donne une manière facile de trouver tous les points de la Courbe, car si sur un point quelconque L de la circonférence de la base du cylindre on élève LK perpendiculaire sur le plan de cette base, & qu'on fasse LK quatrième proportionnelle à IC , CA & IL , le point K sera un des points de la Courbe.

Si l'on prend l'arc IL plus grand que la demi-circonférence IC , on aura toujours cette proportion IC . CA :: IL . LK ; & la courbe IKA pourra toujours être continuée autour du cylindre comme en AMX , &c. Lorsque l'arc IL sera pris égal à toute la circonférence de la base, le point K sera au point X , le point L au point I , & la Courbe aura fait une révolution entière autour du Cylindre, savoir $IKAMX$. On peut faire faire autant de révolutions qu'on voudra à cette courbe autour du Cylindre, comme XRZ , &c. en prenant l'arc IL plus grand que la circonférence de la base, car il peut être pris double, triple, &c.

REMARQUE III.

[En marge droite :] Fig. 5.

[Figure 5 de la Planche 9.]



Pour trouver la longueur de cette Courbe, comme de la partie ou demi-révolution IKA , soit la demi-circonférence $ILC = c$, $CA = a$, l'arc indéterminé $IL = x$, & $LK = y$. Puisque $IC(c) \cdot CA(a) : IL(x) \cdot LK(y) \cdot \frac{ax}{c} = y$, & $\frac{adx}{c} = dy$, dont il faut quarrer chaque membre pour avoir $\frac{aadx^2}{cc} = dy^2$, & substituer $\frac{aadx^2}{cc}$ à la place de dy^2 dans la formule de la rectification des Courbes $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ pour avoir⁸ $\sqrt{\frac{ccdx^2 + aadx^2}{cc}} = \frac{dx}{c} \sqrt{aa + cc}$, dont l'intégrale est $\frac{x}{c} \sqrt{aa + cc}$, & lorsque $x = c$, on a $\sqrt{aa + cc}$ pour la longueur de la demi-révolution IKA . Si on veut avoir la longueur d'une révolution entière $IKAMX$, il faut mettre $(2a)$ à la place de (a) , & $(2c)$ à la place de (c) dans // p. 112 // $\sqrt{aa + cc}$ pour avoir $\sqrt{4aa + 4cc} = 2\sqrt{aa + cc}$, ce qui est la même chose que de prendre le double de IKA pour une révolution entière; on prendra de même le triple ou $3\sqrt{aa + cc}$ pour une révolution & demie, le quadruple pour deux révolutions, &c.

REMARQUE IV.

Il est facile de voir par la seconde Remarque, que la courbe $IKAM$, &c. est la même que celle des filets ou spires de la vis : or on sait par les principes des mécaniques que la force de la Vis est à la puissance qui lui est appliquée, comme la longueur d'un tour ou d'une révolution des filets ou spires est à la hauteur d'un des pas; ou comme la longueur entière de tous les contours des filets est à la hauteur de la Vis. D'où nous déduisons de la troisième Remarque la Règle suivante, pour mesurer la force absolue de la Vis, ou pour avoir le rapport de la force absolue à la puissance qu'on y applique. J'estime même qu'il vaut mieux, pour trouver ce rapport le plus juste qu'il soit possible, comparer la longueur totale de la courbe des spires avec la somme de tous les pas, ou la hauteur de la Vis, que de comparer la longueur d'une révolution à la hauteur d'un des pas.

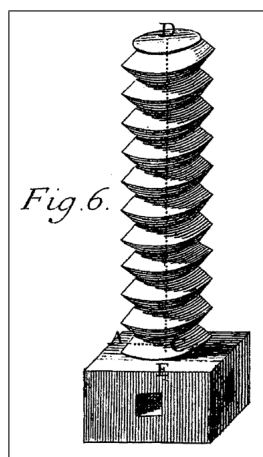
Règle pour mesurer la force de la Vis.

[En marge gauche :] Fig. 6.

Prenés la circonférence du Cercle dont le rayon est CA depuis l'axe du Cylindre ou de la Vis jusqu'au point A du milieu de l'arête des pas : multipliés cette circonférence par le nombre des pas de la Vis; au quarré de ce produit il faut ajouter le quarré de la hauteur DE , la racine quarrée de la somme sera à la hauteur de la Vis DE , comme la force absolue de la Vis est [à] la puissance qui lui est appliquée. On sait que cette force est augmentée suivant la raison réciproque du rayon CA , à la longueur du bras ou levier qu'on ajoute ordinairement à la Vis, mais qu'elle est diminuée par les frottements. // p. 113 //

⁸Le texte donne : " $\sqrt{\frac{dx^2 + aadx^2}{cc}}$ "; on peut aussi corriger en : " $\sqrt{dx^2 + \frac{aadx^2}{cc}}$ ".

E X E M P L E.



[Figure 6 de la Planche 9.]

Soit 10 le nombre des pas de la vis dont la hauteur DE est de 3 pieds & demi, ou 42 pouces : le rayon CA de 3 pouces & demi, sa circonférence sera de 22 pouces, qu'il faut multiplier par le nombre des pas 10, pour avoir 220, dont le carré est 48400, auquel il faut ajouter le carré de la hauteur 42 ou 1764 pour avoir 50164, dont la racine carrée sera à peu-près 224 pour l'expression de la force de la vis à la puissance 42, ce qui se réduit comme 16 à 3 ; ainsi 3 de puissance produisent 16 de force par le moyen de la vis proposée dans cet Exemple.

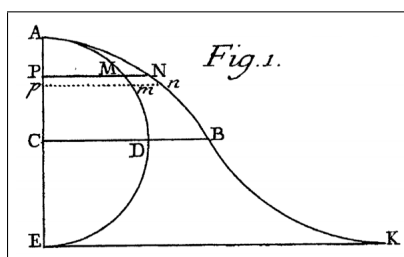
Cette Règle peut aussi servir pour mesurer les contours des rampes des Escaliers à vis ; la longueur des Courbes rampantes autour des Noyaux, lorsque les Escaliers à vis sont à jours, &c.

Les Anciens ont nommé cette Courbe *Spirale* ou *Helice*, parce que sa formation sur le cylindre suit la même analogie que la formation de la spirale ordinaire sur un plan ; mais elle est bien différente de la Spirale ordinaire, étant une des Courbes à double courbure, ou une des lignes qu'on conçoit tracée sur la surface courbe des Solides. Peut-être que ces sortes de Courbes à double courbure, ou prises sur la surface des Solides, feront un jour l'objet des recherches des Geometres. Celle que nous venons d'examiner est, je crois, la plus simple de toutes.

Nous donnerons dans la suite les mêmes Rgles pour cette Courbe prise autour du Cone. [...]

*
* *

Commentaire du texte de Pitot.



[Figure 1 de la Planche 8.]

La courbe ABK est définie ainsi (fig. 1) : le point courant N est tel que $PN = \text{arc}(AM)$ du demi-cercle ADE . Il s'agit donc bien d'une sinusoïde, puisque le point N a pour abscisse PN , soit un arc, c'est-à-dire encore un angle inscrit (ACM), mesuré par exemple en radians et en prenant le rayon comme unité, et pour ordonnée BP , c'est-à-dire un sinus CP , à une translation près (de longueur BC). L'équation de cette courbe dans le repère $(E, [EK], [EA])$, $CA = CB = R$ étant le rayon du cercle générateur, EK étant égal à πR , est : $y = R(1 + \cos(x/R))$ sur l'intervalle $[0, \pi R]$. Avec les choix de Pitot, en matière de repère et de données (le Rayon $AC = a$, la Coupée, $AP = x$, l'Arc AM , ou l'Ordonnée $PN = z$, ce qui fait de A l'origine, de $[AB]$ l'axe des abscisses et de $[EK]$ la direction de l'axe des ordonnées), on obtient : $z = a \cdot \arccos(1 - x/a)$ sur l'intervalle $[0, 2a]$.

La première méthode consiste à intégrer la fonction entre 0 et a , puisque Pitot cherche l'aire du segment de sinusoïde $ANBCPA$. Ce qu'il appelle la différentielle de l'espace APN est bien sûr l'augmentation infinitésimale d'aire ; sur la figure, c'est le pseudo-rectangle infiniment petit $PNnp$, d'aire zdx , z étant la longueur PN et dx étant la largeur infiniment petite $Pp = dx$. Ce faisant, il applique des méthodes mises en lumière par Leibniz à la fin du XVIII^{ème} siècle et devenues classiques avec la publication de l'*Analyse des Infiniments Petits* du

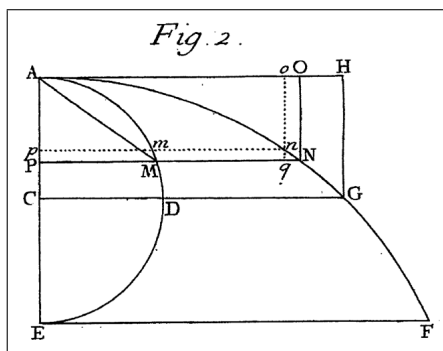
Marquis de l'Hospital⁹. Il s'agit donc d'intégrer $z = a \cdot \text{Arccos}(1 - x/a)$ sur l'intervalle $[0, a]$. Une *intégrale* de zdx , c'est-à-dire une primitive de z , est : xz , produit qui doit être diminué d'une primitive de xdz , soit :

$$\begin{aligned} F(x) &= x \cdot a \cdot \text{Arccos}(1 - x/a) - \int x \frac{-a \times (-\frac{1}{a})}{\sqrt{1 - (1 - \frac{x}{a})^2}} dx \\ &= x \cdot a \cdot \text{Arccos}(1 - x/a) - \int \frac{ax}{\sqrt{2ax - x^2}} dx \\ &= x \cdot a \cdot \text{Arccos}(1 - x/a) - a \left[- \int \frac{a - x}{\sqrt{2ax - x^2}} dx + \int \frac{a}{\sqrt{2ax - x^2}} dx \right] \\ &= xz + a \times \sqrt{2ax - x^2} - az, \text{ puisque } \frac{a}{\sqrt{2ax - x^2}} \text{ est la dérivée de } z; \end{aligned}$$

on reconnaît là la méthode d'intégration par parties, qui résulte de ce que $d(zx) = zdx + xdz$. Faisant $x = 0$ et $x = a$ dans cette primitive, on obtient, par différence :

$\text{Aire}(ANBCPA) = F(a) - F(0) = [az(a) + a^2 - az(a)] - [0]$ puisque $z(0) = 0$; d'où l'égalité entre ce segment de sinusoïde et un carré construit sur le rayon du cercle.

La deuxième méthode relève de la même heuristique, mais est expliquée plutôt dans les termes qu'auraient employés Cavalieri ou Roberval, puisqu'elle ressortit à la méthode dite *des Indivisibles*. Sur la figure 2, c'est une cycloïde qui est représentée ; le segment $ANGCPA$ de cette courbe est composé de deux morceaux : le quart de cercle $AMDCPA$, d'aire connue et le segment $ANGDMA$, compris entre la cycloïde et le cercle et composé, par construction, de lignes comme MN , de même longueur que les arcs de cercle AM , pour toute position de P sur $[AC]$ et de M sur le quart de cercle.



[Figure 2 de la Planche 8.]

Comme il en va de même pour la sinusoïde (fig. 1), à ceci près que les lignes égales aux arcs de cercle AM sont les lignes PN , toutes les lignes du segment $ANGDMA$ [de la figure 2] sont égales à toutes les lignes du segment $ANBCPA$ [de la figure 1], comme aurait dit Roberval, et ces deux segments sont égaux. Il ne reste plus qu'à montrer que le segment $ANGDMA$ a même aire que le carré construit sur a , rayon du cercle. Pitot trace des lignes pn et no parallèles à PN et NO , passant par un point n infiniment proche de N sur la cycloïde ; (no) coupe PN en q ; le "triangle" qNn , considéré comme tel car Nn est assimilé à une droite (la tangente à la courbe dans la méthode de L'Hospital), est semblable au triangle PMA , car il est bien connu de Pitot, depuis les travaux de Roberval, de Descartes ou de Fermat, que la tangente en N à la courbe, ici confondue avec nN , est, par construction, parallèle à la corde AM du quart de cercle (de même que EM est parallèle à IN , menée par le point I de contact du cercle générateur sur la base EF lorsque ce cercle, en roulant, amène le point A au point N). Cette similitude est le fondement même de la méthode pour tracer des tangentes : qNn est le fameux triangle caractéristique que Pascal utilise dans son *Traité des Sinus du Quart de Cercle* et dont Leibniz dit qu'il lui a donné l'idée de son algorithme pour les calculs différentiel et intégral.

On a donc : $Nq/qn = MP/PA$, ou : $Oo/Op = MP/PA = MP/NO$, et en faisant le produit des extrêmes et des moyens : $Oo \cdot NO = MP \cdot Pp$. Ce qui revient à dire que les rectangles infinitésimaux $oONq$ et $pPMm$ sont égaux. Il s'ensuit, les *Indivisibles* aidant, que le segment $ANGHOA$ situé au-dessus de la cycloïde a même aire que le quart de cercle $AMDCPA$, puisque leurs *rectangles élémentaires* sont égaux et se cumulent le long des lignes coordonnées de G , AH et AC ; c'est le principe du calcul infinitésimal, sans l'algorithme leibnizien et cette égalité n'est rien d'autre que l'effet d'un changement de variable.

Comme le rectangle $ACGH$ a pour côtés $AC = a$ et $CG = CD + DG = a + \text{arc}(AD) = a + z$ (avec $z = \pi a/2$), son aire

⁹Guillaume François Antoine de L'Hospital, Comte d'Autremont, Marquis de Sainte-Mesme (1661-1704) est l'auteur de l'*Analyse des infiniment Petit*, parue en 1696. Voir les différentes éditions dans la bibliographie.

vaut : $a^2 + az$ (avec $az = \pi a^2/2$) ; or le segment $ANGDMA$ est la différence entre le rectangle en question et deux segments d'aire égale à celle du quart de cercle, $ANGHOA$ dont on vient de montrer qu'il vaut un quart de cercle et $AMDCPA$ qui est un quart de cercle. Donc $\text{aire}(ANGDMA) = a^2 + az - az$ puisque deux quarts de cercle valent un demi cercle, soit encore $az = \pi a^2/2$. Par conséquent $\text{aire}(ANGDMA) = a^2$, c. q. f. d.

La troisième méthode nous amène au résultat qui nous intéresse : la sinusoïde est la courbe obtenue en “développant” une ellipse, ce qui fait d'elle la *compagne* d'une autre courbe “issue” du cercle puisque l'ellipse est transformée du cercle par perspective parallèle ou par affinité.

Pitot coupe un cylindre de base circulaire $IDCE$ (fig. 3) par un plan incliné à 45° . De ce fait la courbe elliptique $EAQD$ obtenue est de demi-grand axe $AS = a\sqrt{2}$ et de demi-petit axe $ES = ED = SC = AC = a$, rayon du cercle de base. La demi-ellipse $EAQD$ forme avec le demi-cercle DCE un segment de surface cylindrique $EAQDCE$, qui délimite, avec le plan de base et le plan de coupe, ce que l'on appelle un onglet ; ce genre de solide est connu depuis Archimède, au moins ; on retrouve cette ligne elliptique, ce segment de surface cylindrique et un volume analogue dans l'intersection de deux cylindres de même rayon et d'axes perpendiculaires, en particulier en architecture, lorsqu'il s'agit de voûtes d'arête ou de voûtes en arc de cloître (à la croisée de deux voûtes en berceau), par exemple dans les traités du peintre et mathématicien Piero della Francesca au Quattrocento, de l'architecte Philibert de L'Orme, au XVIème siècle, du géomètre Caravelli¹⁰ au XVIIIème siècle ou de l'insolite comte Léopold Hugo, avec ses curieuses théories sur les cristalloïdes et autres *équidomoïdes*¹¹.

Si l'on coupe le cylindre par un plan parallèle à la base et selon un cercle qui coupe AC en P , ce cercle coupera l'ellipse en Q .

La figure 3 est erronée, de ce point de vue, car PQ semble être en prolongement de NMP , alors que Pitot parle d'un arc de cercle tracé sur le cylindre ; le tracé est meilleur sur la figure 4. Pitot indique, sans justification, que cet arc PQ est égal, d'évidence, à l'arc AM du quart de cercle AMR de même rayon (CA) que le cercle de base. Le lecteur aura compris que le rectangle $ACBX$ de la figure 3 est le rectangle $ACBX$ de la figure 1 (X n'y figurant pas) et que la courbe ANB de la figure 3 est le même arc de sinusoïde que la courbe ANB de la figure 1. Les points P , M et N jouent donc le même rôle sur les deux figures, 1 et 3.

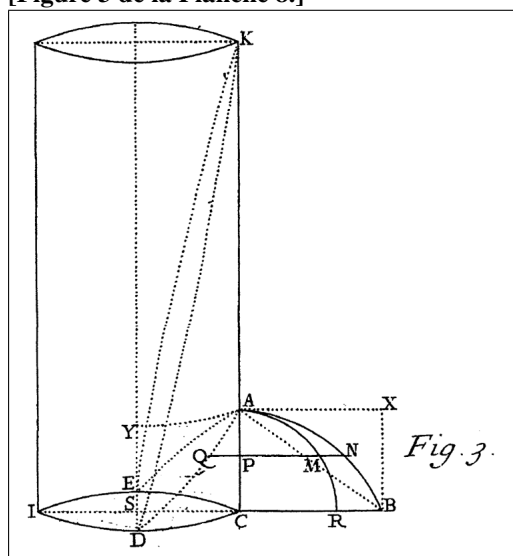
Pour se convaincre de l'égalité, affirmée par Pitot, entre l'arc PQ tracé sur le cylindre et l'arc AM du quart de cercle, il suffit de considérer que le quart de cercle $AMRCA$ est la projection orthogonale dans le plan de base (et en vue du dessus) du quart d'ellipse $AQDSA$, c'est-à-dire une représentation du quart de cercle $CQ'DSC$, où Q' est la projection orthogonale de Q sur l'arc CD . Dès lors et pour parler comme Roberval, *toutes les lignes PQ de la face cylindrique $APCDQA$ d'un demi-onglet sont égales à toutes les lignes AM , arcs du quart de circonférence AR , soit encore à toutes les lignes droites PN comprises entre AC et la sinusoïde ANB* , comme cela a été montré précédemment, et l'aire cylindrique du demi-onglet est égale à l'aire du segment $ANBCPA$ de la sinusoïde. Il serait pour nous assez naturel de conclure en disant que, l'aire sous la sinusoïde étant connue, on peut en déduire l'aire latérale du demi-onglet, allant ainsi du plus simple (une aire de figure plane aujourd'hui élémentaire) au plus complexe (l'aire d'une surface non-plane) ; en vérité, les voies de l'heuristique primitive sont plus tortueuses : l'aire latérale d'un demi-onglet est connue depuis des lustres puisqu'avant notre ère, tandis que la *compagne de la cycloïde* n'est entrée dans l'histoire que depuis quelques décennies lorsque Pitot rédige ce mémoire.

L'aire du segment de sinusoïde résultera donc de la connaissance que tout un chacun, tant soit peu géomètre, pouvait avoir du résultat suivant : *Dans un cylindre droit dont la hauteur CK est égale à la circonférence de la base circulaire $CEID$ (soit $2\pi a$), l'aire cylindrique latérale de l'onglet $EKCD$ sera égale à l'aire de la sphère de même rayon a que le cylindre*. Ici, cette aire vaut $4\pi a^2$; or, c'est une affinité de rapport CK/CA qui fait passer de la demi-ellipse $EAQD$ à la demi-ellipse EKD ; donc les aires cylindriques latérales des deux onglets sont dans ce même rapport : $\text{aire}(EKCD)/\text{aire}(EAQDC) = CK/CA = 2\pi$; donc $\text{aire}(EAQDC) = 2a^2$; et finalement, pour le demi-onglet, $\text{aire}(AQDC) = a^2$. D'où le résultat pour le segment $ANBCPA$ de sinusoïde.

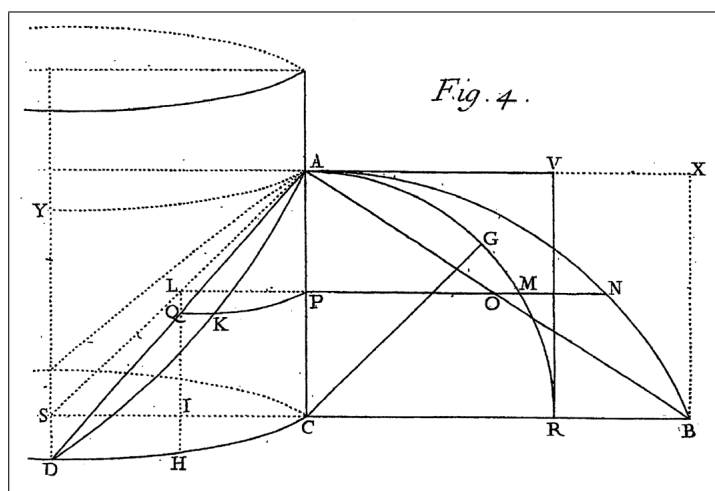
¹⁰ Vito Caravelli (1724-1800) est un géomètre italien ; il publia, en 1751, un *Traité* sur les *Hosoèdres*, solides mixtes de l'espace, qui généralisent les onglets et autres solides étudiés primitivement par Archimède, puis par les auteurs de traités d'architecture roulant sur les voûtes à symétrie d'ordre 3, 4 (comme la voûte en arc-de-cloître) ou plus, autour d'un axe central vertical, formées de surfaces planes, sphériques et/ou cylindriques. Cf. : CARAVELLI, Vito. *Le Traité des Hosoèdres*. Trad. du latin en fr. par P. Ver Eecke, publication extraite de *Mathesis*. Paris, 1959.

¹¹ Cf., les œuvres de Léopold Hugo, en bibliographie.

[Figure 3 de la Planche 8.]



[Figure 4 de la Planche 9.]



Le manque de justification de l'égalité entre la ligne droite PQ et la ligne circulaire AM aura sans doute été reproché à Pitot lors de la séance du 12 juillet 1724, puisque le 17 février 1725, il y revient ; et il y revient d'autant plus que les académiciens protestataires – des *Geometres du premier ordre*, nous dit Pitot – avaient avancé une autre hypothèse sur le développement de l'ellipse tracée sur le cylindre : selon eux, elle devait devenir la diagonale rectiligne AB du rectangle $ACBX$, preuve s'il en est que la "vision dans l'espace" n'est pas la chose la mieux partagée du monde... des géomètres, encore à cette époque. Pitot s'emploiera donc, avec la figure 4 et la démonstration qui fait suite à son *Avertissement*, à montrer la dite égalité par des considérations de géométrie plane ; nous avons explicité cette égalité plus haut par la voie des projections, qui nous paraît si simple aujourd'hui. Le reste du *Mémoire* roule sur des questions annexes qui ont cependant l'intérêt de montrer que Pitot était un géomètre de qualité et qu'il participe de l'esprit du temps, en particulier au sein de l'Académie, qui cherchait à montrer l'utilité pratique des spéculations et l'application possible de la théorie.

*

* *

Bibliographie succincte

Sources des textes & sources secondaires

CARAVELLI, Vito. *Le Traité des Hosoèdres* (1751). Éd. consultée : trad. du latin en fr. par P. Ver Eecke, publication extraite de *Mathesis*. Paris, Blanchard, 1959.

HUGO, Léopold (comte –). Éd. consultées : exemplaires de la BnF sur microfilms ou microfiches.

— *Essai de Géométrie polyédrique. Théorie des cristalloïdes élémentaires*. Paris, 1867 ;

— *Les cristalloïdes à directrice circulaire. Études géométriques*. Paris, 1867.

— *Les cristalloïdes complexes à sommet étoilé*. Paris, 1872.

— *Essai sur la géométrie des cristalloïdes*. Paris, 1873.

— *Une réforme géométrique. Introduction à la géométrie descriptive des cristalloïdes*. Paris, 1874.

— *Géométrie Hugodomoïdale, anhellénique, mais philosophique et architectonique. La question de l'équidomoïde et des cristalloïdes géométriques*. Paris, 1875.

L'HOSPITAL, Guillaume, François, Antoine (de –, Comte d'Autremont, Marquis de Sainte-Mesme, dit le Marquis de –). *Analyse des Infiniment Petits, Pour l'Intelligence des Lignes Courbes*, A Paris, De L'Imprimerie Royale. M. DC. XCVI. Éd. princeps : 1696, par les soins de Jean Anisson (1642—1721). Éd. consultée : reproduction en fac simile par ACL-éditions, suivie des *Eclaircissements sur l'Analyse des Infiniment Petits*. de Varignon (Paris, 1725). Paris, 1988.

— *Analyse des Infiniment Petits, Pour l'Intelligence des Lignes Courbes, Par M. le Marquis De l'Hospital, Seconde Edition*, Paris, chez François Montalant, à l'entrée du Quay des Augustins du côté du Pont S. Michel, 1715. Réimpr. : Paris, François Montalant, 1716 & Paris, É. Papillon, 1716. Éd. consultée : rééd. en fac-similé par l'IREM de Dijon. Dijon, s. d.

— Éd. anglaise par Edmund Stone : *The Method of Fluxions, Both direct and inverse, the Former being a Translation from the celebrated Marquis de l'Hospital's Analyse des infiniment petits, and the latter supply'd by the Translator, E. Stone, ...* London, W. Innys, 1730.

— . *Analyse des Infiniment Petits*, par M. le Marquis de l'Hôpital, Suivie d'un nouveau Commentaire pour l'intelligence des endroits les plus difficiles de cet Ouvrage. Par l'Auteur du Guide des jeunes Mathématiciens dans l'étude des Leçons de Mathématique de M. l'Abbé de La Caille, Paris, Moutard, 1758. Éd. consultée : troisième édition française, avec des Notes du père Aimé-Henri Paulian, s. j.

— . *Chez la Veuve Girard & François Seguin, Impr. Libraires, près la Place St. Didier, à Avignon. Se trouve à Paris, chez Jean Desaint, Libraire, rue du Foin S. Jacques, chez Charles Saillant, Libraire, rue S. Jean de Beauvais, chez C. Joseph Panckoucke, Libraire, rue, & à côté de la Comedie Française, et chez Durand Neveu, Libraire, rue S. Jacques,*

— . *Analyse des Infiniment Petits, suivie d'un nouveau Commentaire pour l'intelligence des endroits les plus difficiles de cet Ouvrage. Par l'Auteur [l'abbé Aimé-Henri Paulian] du Guide des jeunes Mathématiciens dans l'étude des Leçons de Mathématiques de M. l'Abbé de la Caille. 3ème éd. Chez la Veuve Girard & François Seguin, Impr. Libraires, près la Place St. Didier, à Avignon. Se trouve à Paris, chez Jean Desaint, Libraire, rue du Foin S. Jacques, chez Charles Saillant, Libraire, rue S. Jean de Beauvais, chez C. Joseph Panckoucke, Libraire, rue, & à côté de la Comedie Française, et chez Durand Neveu, Libraire, rue S. Jacques. M. D C C. L X V I I I. (1768). Éd. consultée : réimpression à Avignon & Paris de la 3ème édition.*

— . *Analyse des Infiniment Petits, pour l'Intelligence des Lignes Courbes*, par M. le Marquis de l'Hospital, Nouvelle édition, revue et augmentée par M. Le Fèvre... Paris, A. Jombert, 1781. Quatrième édition.

PASCAL, Blaise. *Histoire de la Roulette* (1658). Éditions critiques in :

— . *Œuvres complètes*. Éd. établie par Jacques Chevalier. Coll. "La Pléiade". Paris, Gallimard, 1954. En particulier : V. [Histoire de] *La Roulette et Traités connexes*, pp. 173-312.

— . *Œuvres complètes*. Éd. établie par Michel Le Guern. 2 volumes. Coll. "La Pléiade". Paris, Gallimard, 1998-2000. En particulier : Vol. II (2000). *Œuvres mathématiques d'Amos Dettonville (sur la Roulette)*, pp. 317-524.

— . *Œuvres complètes*. Éd. chronologique établie par Jean Mesnard, 4 vol. Coll. "Bibliothèque européenne". Paris, Desclée de Brouwer, 1964-1970-1991-1992. En particulier : Vol. IV (1992), essentiellement depuis XIII. *Écrits relatifs au Concours de la Roulette (fin juin 1658-20 janvier 1659)*, jusqu'à XXXII. *Extrait d'une Lettre de Sluse à Huygens (20 août 1660)*, pp. 147-925.

PITOT, Henri. "Quadrature de la moitié d'une Courbe des arcs, appelée la Compagne de la Cycloïde", in *Histoire de l'Académie Royale des Sciences, Année M. DCCXXIV (1724). Avec les Mémoires de Mathématique & de Physique, pour la même Année. Tirés des Registres de cette Académie*. A Paris, De l'Imprimerie Royale, M. D C C X X V I (1726), pp. 65-67 de l'HARS, pp. 107-113, planches 8 et 9, p. 112 des MMPARS. Éd. consultées : exemplaires de la Bibliothèque Emmanuel Liais de Cherbourg et de la BnF. Édition critique par J.-P. Le Goff, Caen, pré-publication de l'IREM de B.-N., 2002.

Ouvrages de référence

COLLECTIF (Institut de France. Dir. : P. G. & R. C., i. e. : Pierre GAUJA – & Robert COURRIER –). *Index biographique de l'Académie des Sciences du 22 décembre 1666 au 1er octobre 1978*. Paris, Gauthier-Villars, 1979, p. 418.

COLLECTIF (BESSOT, D., LANIER, D., LE GOFF, J.-P. & alii (Cercle d'Histoire des Sciences de l'IREM de Basse-Normandie). *Aux origines du calcul infinitésimal*. Recueil de textes, d'Euclide à Pascal, introduits, commentés, avec des exercices et leurs corrigés. Paris, Ellipses, 1999. En particulier : pp. 91-98, 176-180 & 225-227.

COLLECTIF (HEMILY : ARSAC, Cécile, ARSAC, Gilbert & KELLER, Olivier, IREM de Lyon). *Textes fondateurs du Calcul infinitésimal*. Recueil de textes, introduits, commentés, avec des exercices et leurs corrigés. Paris, Ellipses, 2006.

*

* *

À suivre : Troisième partie : la sinusoïde selon Jacques Bernoulli, devenue cycloïde du cercle.

Jean-Pierre LE GOFF, IREM de B.-N.