

Bonjour à tous, nous sommes heureux de vous présenter notre brochure :

Nouvelles pratiques de la géométrie

De la manipulation des objets géométriques à leur formalisation

Dans les pages qui suivent, nous vous en proposons :

- Une présentation où nous expliquons notre démarche, ses buts et ses outils, virtuels ou réels : la géométrie sans utiliser le compas, les pliages, les puzzles, les systèmes articulés.
- Des bonnes feuilles afin de vous donner l'envie d'utiliser ces outils, pour votre plaisir et celui de vos élèves.
- Un résumé de la table des matières pour vous en dire plus long.
- La bibliographie, afin de rendre à César ce qui lui appartient.

Toutes remarques et/ou commentaires seront accueillis avec reconnaissance.

Vous pouvez trouver certaines de nos publications en ligne sur le site IREM de Basse-Normandie dans le paragraphe « relations internationales » paragraphe « documents disponibles » car nous écrivons aussi des textes en espagnol et bilingues.

D. SALLES-LEGAC
salles@math.unicaen.fr

R. RODRIGUEZ HERRERA
ruben.rodriguez@caen.iufm.fr

PRÉSENTATION DE L' OUVRAGE

Nous vous proposons, dans cet ouvrage, des activités, de niveau collège et seconde, destinées à aborder la géométrie plane de façon ludique en utilisant soit des restrictions de matériel (pas de compas, pas d'équerre, pas de rapporteur par exemple) ou, au contraire du matériel peu habituel en classe (pliages, mètre articulé, pantographe, inverseur, barrettes de meccano etc.)

Est-il possible de pratiquer la géométrie au collège sans compas, sans rapporteur et sans équerre ? Lorsque, dans notre groupe "Géométrie au collège" de l'I.R.E.M. de Basse Normandie, Ruben Rodriguez nous a proposé de travailler sur une géométrie à la règle non-graduée seule et au crayon permettant le report des longueurs, nous avons été très intéressés. Nous connaissions déjà la géométrie au compas seul, étudiée par Mohr (en 1672) puis Mascheroni (en 1797), mais cela nous semblait un raffinement de mathématicien quelque peu difficile à utiliser au collège. Nous avons tout de même, au vu des démonstrations qu'il nous proposait, cru à la possibilité d'y intéresser de jeunes élèves. Les premières démonstrations de la constructibilité des lignes géométriques classiques : bissectrice d'un angle, droite orthogonale à une droite donnée, droite parallèle à une droite donnée etc, ont déjà été exposées dans notre ouvrage " Du dessin perçu à la figure construite" (voir la bibliographie).

Nous avons été séduits par l'aspect "constructiviste" de la géométrie sans compas, aussi avons-nous cherché des variantes aux différentes démonstrations de Ruben Rodriguez, ensuite quels outils, autres que le compas, pouvaient résoudre les problèmes posés.

L'univers géométrique accessible aux collégiens est plein d'outils merveilleux parfois plus puissants que le compas et l'équerre. Par exemple, le pliage avec glissement permet de trisecter les angles, alors que le compas ne le peut pas. Le mètre articulé des menuisiers permet de construire de superbes heptagones que ne peut pas construire le compas. Le pantographe des artistes peintres permet d'effectuer sans problème les homothéties et les règles de trois etc.

Nous avons ainsi quelque peu divergé de la géométrie à la règle seule pour construire des activités, plutôt manuelles, afin d'introduire ou de réinvestir des notions fondamentales de la géométrie plane au collège.

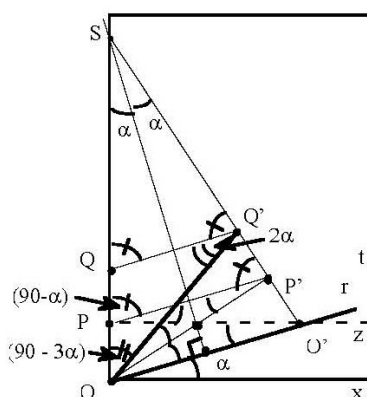
Le professeur pourra donc, soit **utiliser nos activités pour aborder de nouvelles notions ou propriétés**, soit s'en servir pour **revoir ces notions ou propriétés dans un contexte moins traditionnel que celui du cours**.

Les demi-droites $[Ox)$ et $[Pz)$ étant parallèles, les angles $\widehat{xO'O'}$ et $\widehat{O'O'P}$ sont de même mesure ($= \alpha$). (c)
Regroupons les résultats (a), (b), (c) :

$$\widehat{xO'O'} = \widehat{xO'y} = \widehat{O'O'P} = \widehat{P'O'Q'}.$$

En regroupant les égalités en gras nous pouvons dire que l'angle $\widehat{xO'Q'}$ a une **mesure triple** de celle de l'angle $\widehat{xO'O'}$ ou que **l'angle $\widehat{xO'Q'}$ est trisécté par les demi-droites $[OO')$ et $[OP')$** .

Nous complétons cette étude par l'exercice facile suivant.

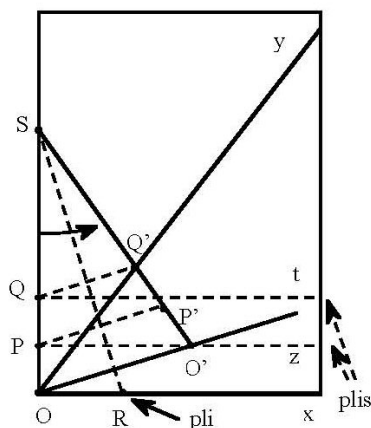


Exercice (nous conservons les hypothèses de l'étude préliminaire)

Appelons 3α la mesure de l'angle $\widehat{xO'Q'}$, on demande de calculer la mesure de l'angle $\widehat{OSO'}$ en fonction de α .

Nous demandons aux étudiants d'observer la figure précédente et d'y noter le maximum de mesures d'angles, nous laissons au lecteur le soin de justifier ces résultats.

Sachant que les symétries axiales sont obtenues facilement par pliage, les résultats précédents peuvent suggérer l'activité de découverte suivante destinée aux élèves de seconde.

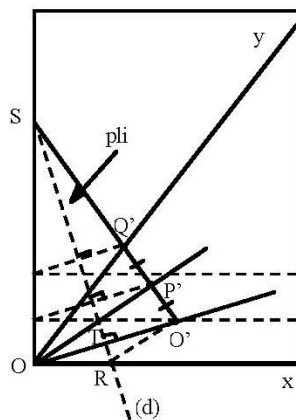


Méthode : Soient $[Ox)$ et $[Oy)$ deux demi-droites définissant l'angle à trisecter, tracées sur une feuille. (Ox étant confondu avec le bord inférieur de la feuille).

Traçons, par pliage de la feuille sur elle-même, parallèlement à $[Ox)$, deux droites $[Qt)$ et $[Pz)$ telles que P soit le milieu de $[OQ]$. Plions le bord gauche de la feuille de telle sorte que le point Q vienne sur la demi-droite Oy en Q' , et que le point O vienne sur la demi-droite $[Pz)$ en O' . Nous appelons le pli $[SR]$. Déplions la feuille.

Nous voici dans la situation typique d'un **objet physique dont nous voulons étudier les propriétés**.

Nous allons construire une figure cotée, (c'est-à-dire dont les points caractéristiques sont repérés par des lettres et les éléments de mêmes mesures indiqués par les mêmes signes conventionnels), dont nous allons chercher successivement les propriétés afin justifier, par un raisonnement mathématique, la trisection de l'angle $\widehat{xO'y}$ par les demi-droites $[OO')$ et $[OP')$.



Une fois la feuille dépliée, nous avons un pli, que nous matérialisons par une droite (d) et les points O' et Q' que nous avons obtenus par pliage et glissement de la feuille sur elle-même, Q' est un point de $[Oy]$ et O' est un point de la droite parallèle à Ox , d'origine P .

Q' est donc, par construction, le symétrique de Q dans la symétrie d'axe (d) ; O' est le symétrique de O par la symétrie d'axe (d).

Appelons P' l'image P par cette symétrie. Les segments $[QQ']$, $[PP']$, $[OO']$ sont orthogonaux à (d), ils sont donc . Les points O , P , Q étant équidistants par construction, il en est de même des points O' , P' et Q' .

Les triangles SQQ' , SPP' , SOO' sont isocèles, alors, nous disons que :

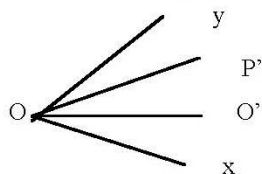
Les demi-droites $[OO']$ et $[OP']$ trisectent l'angle $\widehat{xOy}$.

Preuve : le quadrilatère $OPP'O'$ est un trapèze isocèle, ses diagonales se rencontrent en T , situé sur l'axe de symétrie (d).

Le quadrilatère $ORO'T$ est un losange, car ses diagonales sont orthogonales $[OO']$ est donc bissectrice de l'angle $\widehat{ROT}$.

Le segment $[OP']$ est orthogonal au segment $[P'O]$, P' est le milieu de $[O'Q']$.

Le triangle $OO'Q'$ est donc isocèle et $[OP']$ est la bissectrice de l'angle : $\widehat{O'OQ'}$.



Les demi-droites $[OO']$ et $[OP']$ trisectent l'angle : $\widehat{xOy}$.

... / ...

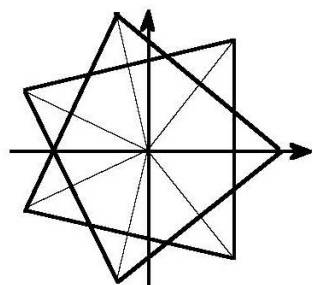
VII - 2.1 : Construire un heptagone en utilisant le mètre articulé des charpentiers (pour la classe de seconde et la préparation au C.A.P.E.S.)

La construction de l'heptagone est liée à un problème qui a beaucoup intéressé les mathématiciens : la résolution des équations du troisième degré. Les Arabes se sont intéressés à ces problèmes et ont inventé des méthodes élégantes de simplification de la rédaction des solutions des équations en particulier pour résoudre des problèmes d'héritage. Le mathématicien *Al-Khwarizmi* a tellement laissé son empreinte que nous employons maintenant le mot "algorithme" dérivé de son nom et le mot "algèbre" dérivé de l'arabe "*al-jabr*" proposé par ce grand mathématicien pour désigner une méthode de simplification des équations.

Il faudra attendre le seizième siècle pour que *Scipion del Ferro* (de Bologne) et *Tartaglia* (de Brescia), qui inspireront *Cardan* et *Bombelli*, résolvent le problème de la résolution des équations du troisième degré.

Nous reprenons le mètre articulé que nous avons utilisé au paragraphe VI et demandons aux élèves s'ils peuvent construire un **heptagone étoilé** avec ce matériel. Lorsqu'ils ont construit un **heptagone**, nous leur demandons comment ils peuvent s'assurer que celui-ci est **régulier**.

C'est l'occasion de rappeler la propriété importante : si un polygone est régulier alors tous ses sommets appartiennent au même cercle. Nous leur demandons aussi si cette condition est suffisante, elle est suffisante dans le cas de la construction avec le mètre articulé puisque tous les côtés de l'heptagone ont même longueur : 20 cm.



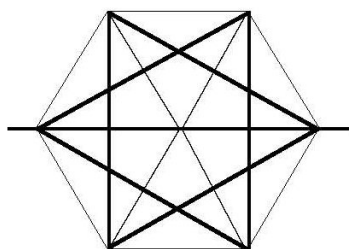
L'heptagone étoilé se prête bien à une construction avec le mètre articulé, comme le montre la figure.

Pour les étudiants préparant le C.A.P.E.S. il est intéressant de signaler que cette construction est liée à la représentation des racines septièmes de l'unité dans le plan complexe.

Le groupe des racines septièmes de l'unité est monogène c'est-à-dire qu'il admet un générateur. Celui-ci n'est pas unique puisque, sept étant premier, le groupe des racines septièmes de l'unité est engendré par un quelconque de ses éléments (sauf 1).

Cette activité est l'occasion de faire un peu de trigonométrie en demandant aux élèves de calculer la longueur du côté de l'heptagone étoilé et celle de l'heptagone convexe, nous allons traiter cette activité dans le paragraphe suivant.

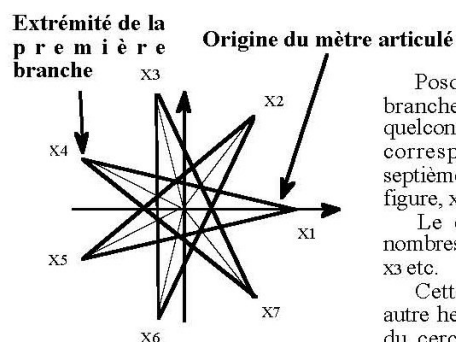
On peut relier aussi cette activité au problème qui a été assez exploité il y a quelques années : caractériser des figures que l'on peut dessiner sans lever le crayon et sans repasser sur un trait déjà tracé : ces figures, en mathématiques sont dites "connexes" : le pentagone étoilé est un ensemble connexe, contrairement, par exemple à l'hexagone :



L'hexagone étoilé ne se trace pas "sans lever le crayon" car il est formé de deux parties disjointes (les deux triangles équilatéraux tracés, l'un en trait normal et l'autre en trait gras).

Pour les élèves professeurs on pourra rappeler que le groupe des racines sixièmes de l'unité admet un sous-groupe propre d'ordre trois et un sous-groupe propre d'ordre deux.

Le fait que l'une quelconque (sauf la racine triviale : 1) des racines septièmes de l'unité dans le corps des nombres complexes engendre le groupe de ces racines peut-être matérialisé de la façon suivante :



Posons l'extrémité de la première branche du mètre articulé sur l'un quelconque de ses sommets. Ce sommet correspond à l'une des racines septièmes de l'unité, par exemple, sur la figure, x_4 .

Le carré de x_4 dans le corps des nombres complexes est x_7 , son cube est x_3 etc.

Cette construction nous donne un autre heptagone étoilé dont le diamètre du cercle circonscrit est différent du précédent.

Étudions d'autres possibilités de construction de l'heptagone avec le mètre articulé.

Dans la figure 1 page suivante, le groupe des racines septièmes de l'unité est engendré par x_3 , nous demandons alors aux élèves d'observer de combien de façons on peut construire des heptagones avec le mètre articulé.

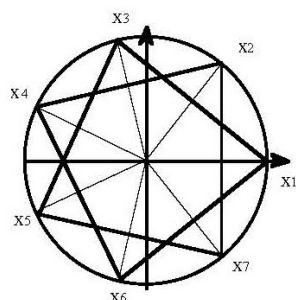


figure 1

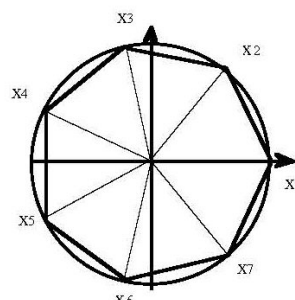


figure 2

Si l'on construit l'heptagone à partir de l'élément x_2 comme dans la figure 2, alors nous obtenons l'heptagone convexe (l'échelle n'est pas la même).

Si nous faisons de même avec les autres éléments nous constatons que nous retrouvons les mêmes heptagones que les trois précédents.

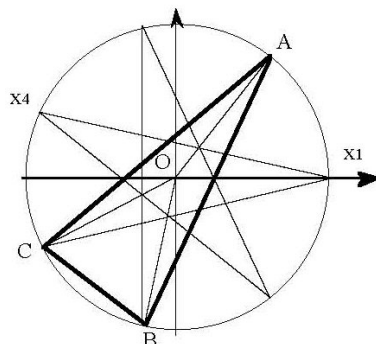
On peut donc construire deux heptagones étoilés et un heptagone convexe avec le mètre articulé.

Nous avons vu que le pentagone régulier est constructible à la règle et au transporteur, il est donc intéressant de regarder si l'heptagone l'est aussi.

VII - 2.2 : Calculer les longueurs des côtés de l'heptagone convexe de grande diagonale de longueur 20 cm (pour la classe de seconde et la préparation au C.A.P.E.S.)

Comme pour l'activité précédente, il sera préférable de se munir de mètres articulés, en bois ou en métal.

Nous avons vu qu'il existe deux heptagones étoilés constructibles avec le mètre articulé, nous allons observer le premier (engendré par x_4) et calculer la longueur du côté de l'heptagone convexe correspondant.

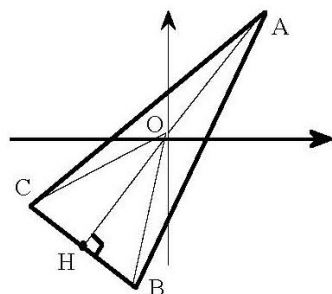


Nous allons réfléchir sur le premier heptagone étoilé que nous avons construit et, en particulier sur le triangle ABC.

Les côtés $[AB]$ et $[AC]$ sont formés de deux branches du mètre articulé, leur longueur est donc 20 cm. Nous cherchons quelle est la mesure du côté $[CB]$ de l'heptagone convexe.

Nous demandons aux élèves de réfléchir sur la mesure des angles du triangle ABC et de les noter sur la figure.

Nous leur suggérons alors de décalquer le triangle ABC et de le reporter sur une autre feuille afin de réfléchir plus facilement.



Puisque nous avons construit un heptagone, la mesure de l'angle au centre de son cercle circonscrit $\angle COB$ est $2\pi/7$, en radians, la mesure de l'angle au sommet $\angle CAB$ est $\pi/7$ (ou $180/7$ en degrés).

Prolongeons le segment $[AO]$ du côté de O, il rencontre $[CB]$ en H, milieu de $[CB]$ et extrémité de la hauteur relative à A car le triangle ABC est isocèle.

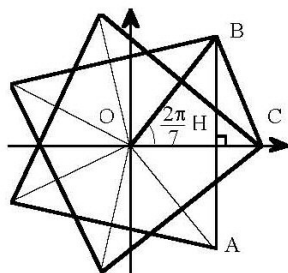
Dans le triangle rectangle AHB, l'hypoténuse [AB] est de longueur 20 cm, l'angle $\widehat{HAB}$ a pour mesure, en radians, $\pi/14$ (ou $180/14$ en degrés) donc :

$$HB/20 = \sin(\pi/14) = 0,22 \text{ (au centième de centimètre près).}$$

On a donc : $CB = 2 HB = 8,8$ (en cm).

Le côté de l'heptagone convexe de diagonale de longueur 20 cm a donc pour longueur 8,8 cm, son périmètre est : $8,8 \times 7 = 61,6$ (en cm).

Observons maintenant le second heptagone étoilé de petite diagonale de longueur 20 cm.



Nous pouvons, par exemple, calculer la mesure du côté [BC] du triangle OBC. Comme précédemment, la mesure de l'angle au centre $\widehat{BOC}$ est $2\pi/7$ (en radians), la branche [AB] du mètre articulé mesure 20 cm. Le segment [OC] est orthogonal à [AB] qu'il rencontre en H, milieu de [AB]. La mesure de [HB] est donc 10 (en cm), le triangle OBC est isocèle, l'angle $\widehat{HCB}$ a pour mesure :

$$1/2(180 - 360/7) = 64,3 \text{ (en degrés, au dixième près) ou :}$$

$$1/2(\pi - 2\pi/7) = 5\pi/14 \text{ (en radians).}$$

Dans le triangle BHC, nous avons donc, si nous exprimons la mesure des angles en degrés :

$$\sin(64,3) = \frac{HB}{BC} = \frac{10}{BC} = 0,90 \text{ au centième près.}$$

Ou, si nous exprimons la mesure des angles en radians :

$$\sin\left(\frac{5\pi}{14}\right) = \frac{HB}{BC} = \frac{10}{BC} = 0,90 \text{ au centième près.}$$

On obtient $BC = 11,1$ au dixième de cm près. **Le périmètre de l'heptagone convexe ainsi construit est donc 77,7 cm au dixième de centimètre près.**

Il peut être utile, afin de fixer ces études en mémoire, de faire construire aux élèves, avec le mètre articulé, l'heptagone étoilé "le plus régulier possible" et de vérifier que la distance entre ses sommets est de l'ordre de 11,1 cm.

VII - 2.3 : Étudier la constructibilité de l'heptagone à la règle et au transporteur (pour la préparation au C.A.P.E.S.)

Pour le problème de la constructibilité des polygones réguliers à la règle et au compas on pourra consulter de nouveau Carrega (voir la bibliographie).

Utilisons de nouveau la formule d'addition des tangentes du paragraphe VII - 1.8 : il s'agit de savoir, tout d'abord, si l'on peut construire $\tan \frac{\pi}{7}$ à la règle et au compas.

$$\text{On a, d'une part : } \tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$$

$$\text{et, d'autre part : } \tan 5a = \frac{5 \tan a - 10 \tan^3 a + \tan^5 a}{1 - 10 \tan^2 a + 5 \tan^4 a}.$$

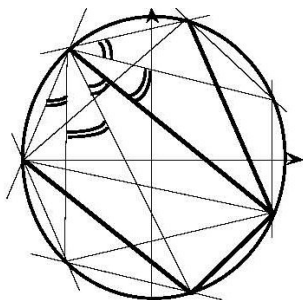
$$\text{Donc } \tan 7a = \frac{\tan 2a + \tan 5a}{1 - \tan 2a \tan 5a} = \frac{\frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a} + \frac{5 \tan a - 10 \tan^3 a + \tan^5 a}{1 - 10 \tan^2 a + 5 \tan^4 a}}{1 - \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a} \times \frac{5 \tan a - 10 \tan^3 a + \tan^5 a}{1 - 10 \tan^2 a + 5 \tan^4 a}} =$$

$$\tan 7a = \frac{7 \tan a - 35 \tan^3 a + 21 \tan^5 a - \tan^7 a}{1 - 21 \tan^2 a + 35 \tan^4 a - 7 \tan^6 a}.$$

.../...

VII - 2.4 : Construire un heptagone par pliage d'une bande de papier (pour la classe de seconde)

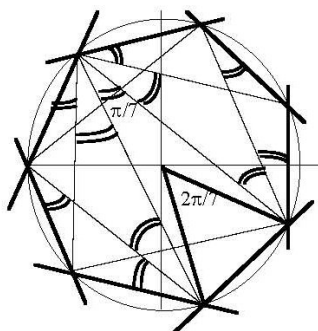
Nous avons vu qu'il est possible de construire un pentagone par pliage, en faisant un noeud simple avec une bande de papier, nous souhaitons maintenant observer si l'on peut, de la même manière, construire un heptagone.



Nous proposons tout d'abord aux élèves de construire un heptagone régulier inscrit dans un cercle en utilisant le rapporteur.

Si nous observons la figure, nous voyons que, puisque l'heptagone est régulier, tous les angles indiqués par un double arc sont égaux car ils sous-tendent des segments égaux dans le même cercle.

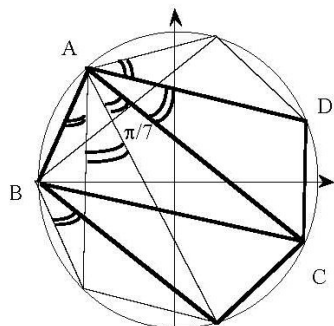
Reprenons le raisonnement habituel sur les polygones réguliers :



Puisque l'heptagone est régulier, l'angle au centre correspondant à l'un des angles égaux a pour mesure $2\pi/7$ (en radians) ou : $360/7 = 51,43$ (en degrés) au centième de degré près.

Les angles égaux repérés par un arc double ont donc pour mesure $\pi/7$ (en radians) ou $25,71$ (en degrés).

Nous demandons alors aux élèves d'essayer de plier une bande de papier de telle sorte que nous obtenions, par exemple un pli [AB] et un trapèze ABCD.



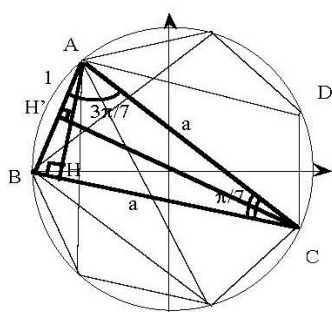
Si nous raisonnons comme pour le pentagone, nous voyons que, puisque nous avons fait un pli le long de [AB], l'angle $\widehat{BAD}$ a pour mesure $4\pi/7$ et l'angle $\widehat{BAC}$ a pour mesure $3\pi/7$ en radians. La somme de ces deux angles est π .

On peut donc "déplier" le côté [AB] et, plus généralement, l'heptagone est réalisable par pliage.

Ce pliage n'est pas facile à réaliser contrairement à celui du pentagone aussi, nous allons raisonner sur les mesures des différents segments qui entrent en jeu dans cette construction.

Nous remarquons que, pour une largeur de bande donnée, si nous connaissons la longueur du segment $[AC]$, nous pourrions plier la bande autour de A de telle sorte que C vienne sur le bord opposé.

Ceci est l'occasion de réinvestir nos connaissances en trigonométrie. Nous sommes maintenant dans une **géométrie du pliage avec glissement** dont nous savons qu'elle est une source très intéressante de manipulation et de raisonnement.



Nous allons observer le triangle ABC. Pour simplifier les calculs nous allons supposer que la mesure du segment $[AB]$ est 2 (en cm).

Le triangle ABC est isocèle d'angle de sommet de mesure $\pi/7$ en radians et d'angles à la base de mesures égales à $3\pi/7$. Soit $[CH']$ sa hauteur issue de C, alors : $AH' = 1$. Les côtés $[AC]$ et $[BC]$ ont donc pour longueur a telle que :

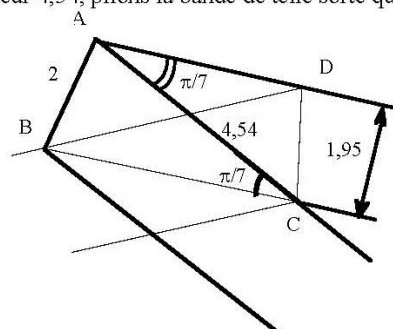
$1/a = \cos 3\pi/7$ soit 0,22 (au centième près).

Nous avons donc $a = 1/0,22 = 4,54$.

De plus, la hauteur $[AH]$, relative au sommet A, de mesure h est telle que : $h/2 = \sin 3\pi/7$ donc $h = 1,95$, c'est la hauteur en centimètres de la bande.

Nous pouvons donc maintenant construire notre heptagone de côté de longueur 2.

Découpons une bande de papier assez fort de largeur 1,95 cm, traçons, sur le bord supérieur de la bande, un segment $[AC]$ de longueur 4,54, plions la bande de telle sorte que le point C vienne sur le bord inférieur de la bande.



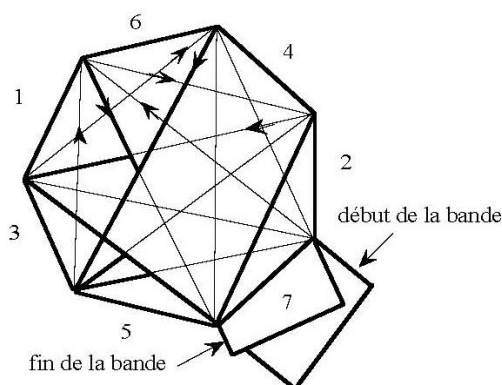
Alors il peut être utile, pour la suite de la construction de vérifier que la mesure du pli $[AB]$ est bien 2.

Maintenant, rabattons la bande autour de C de telle sorte que son bord supérieur passe par B (dessin en trait maigre). Nous obtenons ainsi un nouveau sommet de l'heptagone : D ; on vérifiera là encore avec profit que :

$CD = 2$.

Nous indiquons ci-dessous une suggestion de pliage avec les numéros successifs et le sens des pliages.

Nous invitons le professeur à faire effectuer complètement le pliage par les élèves, celui-ci offre un objet tout à fait satisfaisant, à condition de soigner son travail.



RÉSUMÉ DE LA TABLE DES MATIÈRES

Introduction	p.7
I - PARALLÈLES Construction des parallèles sans utiliser le compas, parallélogrammes, notion de translation, construction d'un translateur articulé	p.11 à 21
II - BISSECTRICES ET TRISSECTRICES Constructions des bissectrices sans utiliser le compas, construction d'un bissecteur articulé, trisection d'un angle par pliage, trisection d'un angle avec une équerre	p.22 à 32
III - MILIEUX DE SEGMENTS Traçage du milieu d'un segment sans utiliser le compas, constructibilité d'un losange de centre donné, étude du "quadrilatère des milieux"	p.33 à 39
IV - ANGLES DROITS Traçage des droites orthogonales, des médiatrices, des ellipses point par point sans utiliser le compas	p.40 à 49
V - RADICAUX Traçage des segments de longueur et du rectangle d'or sans utiliser le compas	p.50 à 58
VI - TRIANGLES ET RECTANGLES Construction des triangles sans utiliser le compas, construction des triangles par pliage, constructibilité des triangles scalènes, problème de Napoléon	p.59 à 87
VII - POLYGONES Construction du pentagone par pliage, de la spirale dorée, construction du pentagone sans utiliser le compas, construction de l'heptagone avec le mètre des charpentiers construction de l'heptagone par pliage, construction d'hexagones avec un puzzle	p.88 à 123
VIII - TRANSFORMATIONS PLANES ET SYSTÈMES ARTICULÉS Construction d'un symétriseur central, d'un symétriseur axial, d'un pantographe d'un translateur, d'un compas de proportion, d'un inverseur de Peaucellier	p.124 à 172

BIBLIOGRAPHIE

- BAVEREL Danièle.** *Instruments scientifiques à travers l'histoire.* Ellipses, APMEP éditeurs 2004
- BORCEUX Francis.** *Invitation à la géométrie.* CIACO éditeur 1986
- BOULE François.** *Questions sur la géométrie et son enseignement.* Nathan Editeur 2001
- BOURSIN Didier et LAROSE Valérie.** *Pliages et mathématiques.* ACL les éditions du Kangourou 2000
- CALAIS Josette.** *Extensions de corps Théorie de Galois.* Ellipses éditeur 2006
- CARREGA Jean Claude.** *Théorie des corps, la règle et le compas.* Hermann éditeur 1981
- DE LOURDES Maria, ESTEVEZ Bravo, MARTINEZ Jorge Luis del sol, VALDES ARTEAGA Eloy.** *El dibujo geométrico en la resolución de problemas.* Revisita electrónica de didáctica de las matemáticas. Universidad Autónoma de Querétaro, Cuba. En ligne : www.uaq.mx/matematicas/redm
- Groupe évaluation Inspection Académique des Yvelines.** *Evaluation diagnostique à l'entrée en 6^{ème}.* En ligne : www.ac-versailles.fr/ia78/intra_jen/doc/eval6/Analyse_Eva_6eme_2006_MATH.pdf
- LEHMAN Eric.** *Mathématiques pour l'étudiant de première année Tomes 1 et 2.* Collection DIA Université, Belin 1984
- LESAGE Vincent.** *Les différentes moyennes par la trigonométrie ou les triangles semblables.* En ligne : <http://www4.ac-lille.fr/~math/classes/themes/moyennes/moy2.htm>
- MALLIAVIN Marie Paule.** *Algèbre commutative.* Masson éditeur 1984
- MEHL Serge.** *Trapezes et moyenne harmonique.* En ligne : http://seger.mehl.free.fr/anx/trapez_harmo.html
- RIBENBOIM Paulo.** *L'arithmétique des corps.* Hermann éditeur 1972
- RODRIGUEZ HERRERA Ruben.** *La géométrie sans cercle dans la formation de la pensée géométrique.* En ligne : www.math.unicaen.fr/irem/internat/documents.htm
- RODRIGUEZ HERRERA Ruben, SALLES-LEGAC Danielle.** *Du dessin perçu à la figure construite.* Ellipses éditeur 2005
- RODRIGUEZ HERRERA Ruben, SALLES-LEGAC Danielle.** *Practicar la geometria : de la acciones directamente experimentables a sus formalizaciones matemáticas.* Editions de l'IREM de Basse-Normandie 2008
- VINCENT Robert.** *Géométrie du nombre d'or.* Chalagam éditeur 2004
- WELLS David.** *Dictionnaire Penguin des curiosités géométriques.* Eyrolles éditeur 1997