

La sinusoïde n'est pas celle que vous croyez (I)¹
 Première partie : la sinusoïde selon Roberval, *Compagne de la Roulette*

Jean-Pierre LE GOFF, IREM de B.-N.
 Caen, juin 2008.

L'usage que l'on fait de la trigonométrie aujourd'hui en masque souvent l'histoire. Qu'il s'agisse des rapports trigonométriques, qui, comme la racine "trigone" l'indique, permettaient, et permettent toujours, de mesurer les angles d'un triangle en fonction de ses côtés et de ses hauteurs, ou qu'il s'agisse des courbes sinusoïdes, qui décrivent les variations de ces rapports, l'on a tendance à oublier que ces fameux rapports de grandeurs linéaires, pour nous sans dimension, étaient autrefois appelés des "lignes" : un sinus – un sinus verse ou une tangente, etc. – était défini comme une grandeur linéaire que l'on rapportait au rayon d'un cercle fixé d'avance : le fait que ce rayon était donné en puissance de 10, 10 000, 100 000, etc., montre bien que l'on savait que les angles ainsi "mesurés" l'étaient par le truchement de "lignes" avec une précision qui dépendait de l'ordre de grandeur du rayon choisi. Il ne s'agit pas alors de confondre les "lignes" trigonométriques avec les courbes sinusoïdales qui représenteront leurs variations : cela suppose d'abord que la géométrie analytique des courbes se soit muée, avec la mathématisation de la physique et/ou le développement des techniques lors de l'avènement de la science rationnelle, en analyse des phénomènes mesurables et exprimables sous une forme fonctionnelle ou tabulée ; de tels phénomènes s'avèrent alors représentables par des courbes connues ou par de nouvelles courbes qu'il s'agissait de construire, géométriquement ou point par point.

En l'occurrence, les courbes trigonométriques sont apparues assez tard², eu égard au fait que la trigonométrie relève de la plus haute antiquité : nul doute que la tablette sumérienne bien connue qui propose, plusieurs siècles avant notre ère, une liste de nombreux triplets "pythagoriciens" – pardonnez cet anachronisme – procède tout autant, si ce n'est plus, des besoins de l'astronomie – la position des étoiles étant fixée par la déclinaison angulaire en regard de l'horizon, c'est-à-dire du plan tangent du lieu d'observation – que des besoins supposés d'une théorie arithmétique des nombres dont on voit bien qu'elle prendra plutôt son essor en Grèce. La nécessité de mesurer les angles est donc fort ancienne et elle est longtemps associée à la mesure et à la comparaison des triangles, comme l'attestent, par exemple, les instruments de visée de type "bâton de Jacob" ou "arbalétrille" ou les instruments de Gerbert pour mesurer les grandeurs inaccessibles.

*
 * *

Première partie :
 la première apparition masquée : une occasion manquée ?

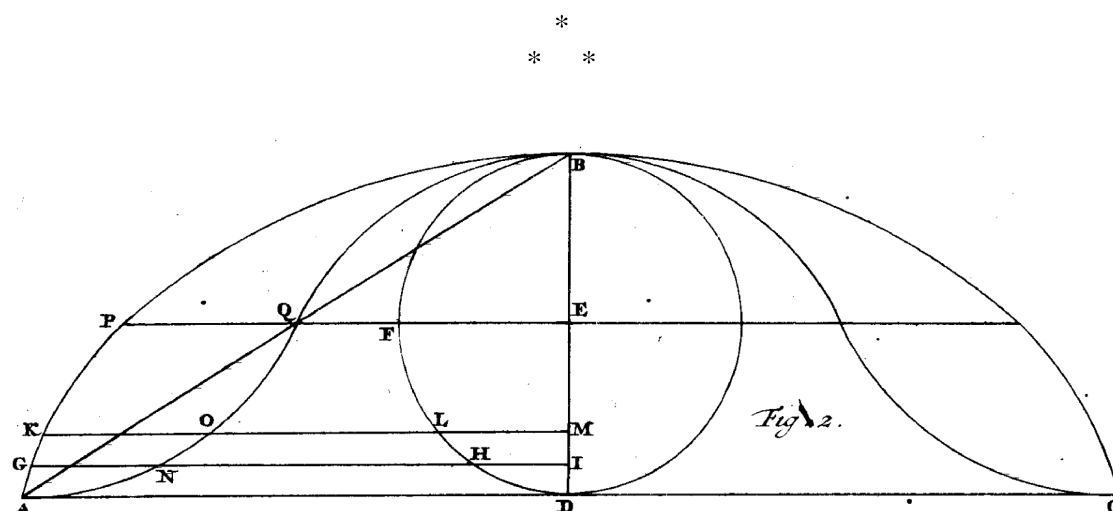
Première apparition : la compagne de la Roulette.

¹ Cet article est la première partie, revue et corrigée d'un *Petit Papier* paru avec le n° 18 de l'*Écho* de l'IREM de B.-N., mai 2002.

² Comme on le verra dans les parties troisième & *sqq.* de cet article, qui prolonge et complète celui publié initialement en 2002, l'usage du mot "*sinusoïde*" et la construction effective de cette courbe, pour ce qu'elle est et l'usage qu'on peut en faire es qualité, date du premier quart du XVIII^e siècle, et apparaît sous la plume de l'ingénieur – bien évidemment militaire – , architecte et hydraulicien, Bernard Forest de Bélidor (1698-1761).

lorsqu'il cherchait à quarrer la *cycloïde* – dite aussi *roulette* ou *trochoïde* –, c'est-à-dire la courbe engendrée par un point de la circonférence d'une roue circulaire d'axe horizontal tournant sans glisser sur une ligne droite d'un plan horizontal, en sorte que l'axe reste parallèle à lui-même dans son mouvement. C'est dire si l'on est loin, en apparence, des questions de trigonométrie pure. Néanmoins, cette courbe est construite point par point par Roberval, comme d'ailleurs la cycloïde elle-même, selon des considérations angulaires pour la cycloïde et par translation horizontale de longueur variable pour sa *compagne*, puisque chacun des points de cette dernière est obtenue en utilisant le "sinus" du point de la roue en mouvement – en fait, notre moderne cosinus multiplié par le rayon de la roue – tel qu'il se présente en chaque point de son mouvement. Le lecteur comprendra aisément ces constructions en suivant l'exposé de Roberval dans l'extrait que voici, et qu'il peut retrouver commenté dans un ouvrage récent du *Cercle de lecture* de l'IREM³.

Roberval s'intéresse à la cycloïde, dès 1634 ; il semble qu'il connait l'aire d'une arche de la courbe dès avant 1637. Il traitera de la quadrature de la trochoïde à la fin de ses *Observations* (pp. 63-66 de l'édition de 1730), dans un passage qui fait suite à la recherche de la tangente à la cycloïde. Roberval donne aussi cette quadrature de la cycloïde dans son *Traité des Indivisibles*, et c'est l'objet du second extrait. Le premier texte a été rédigé par un tiers, élève de Roberval ; lorsque l'auteur parle de *la seconde façon de l'exemple précédent*, c'est précisément au passage sur la tangente à la *Roulette* qu'il fait allusion.



[...]

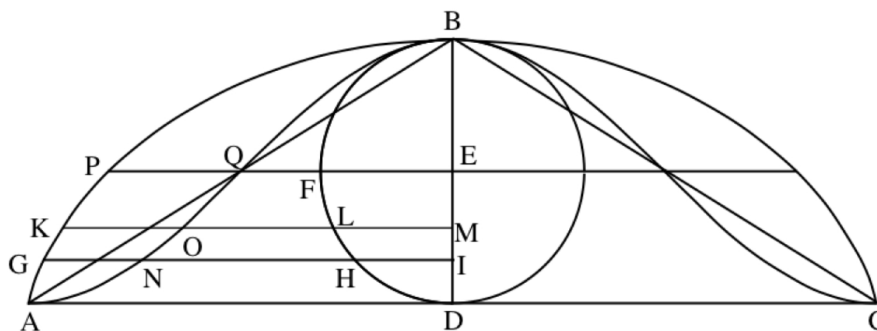
Deuxième exemple, de la compagne de la Roulette.

C'est ainsi que l'a voulu nommer M. de Roberval qui l'a inventée, et qui en a imaginé l'hypothèse et la description en cette sorte.

Soit proposé la Roulette ABC de laquelle la base est AC l'axe BD, le centre du cercle dans l'axe est E, et le cercle de la Roulette BFD à l'entour de l'axe. Entendez que la Roulette est décrite par la seconde façon qui en a été donnée dans l'exemple précédent ; c'est à savoir que pendant que le cercle de la Roulette glisse depuis A jusqu'en C, en sorte que son centre E décrit d'un mouvement uniforme une ligne parallèle et égale à AC, en même temps le point mobile A parcourt par un mouvement uniforme la circonférence de ce cercle, et décrit la Roulette par le mouvement composé de ces deux ; imaginez maintenant que pendant que ce point parcourt ainsi la circonférence DFB, un autre point A ou D mobile dans le diamètre du cercle, qui est toujours perpendiculaire à AC, monte le long de ce diamètre de D vers B d'un mouvement inégal, en sorte qu'il soit toujours également élevé sur la base AC, comme est le point

3 BESSOT, D., LANIER, D., LE GOFF, J.-P. & alii (Cercle d'Histoire des Sciences de l'IREM de Basse-Normandie). *Aux origines du calcul infinitésimal*. Recueil de textes, d'Euclide à Pascal, introduits, commentés, avec des exercices et leurs corrigés. Paris, Ellipses, 1999.

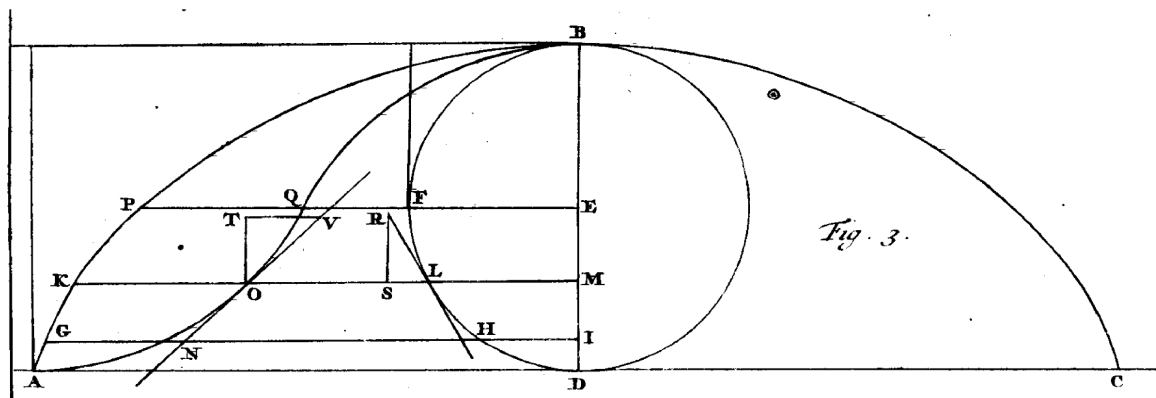
qui décrit la Roulette, c'est-à-dire qu'ayant tiré du point de la Roulette comme G, la ligne GHI coupant la circonférence du cercle en H et l'axe en I, lorsque le point mobile qui décrit la Roulette se rencontre en G dans la Roulette, le point qui décrit cette compagne se rencontre en I dans l'axe.



D'où il s'ensuit, que pour décrire cette ligne, ayant tiré des points de la Roulette des lignes parallèles à AC, si dans chacune de ces lignes, à commencer aux points de la Roulette, l'on prend une ligne égale à la portion de la même ligne comprise entre la demi-circonférence du cercle et son axe, l'on aura les points par lesquels cette ligne est décrite. Ainsi tirant comme nous avons dit, la ligne GHI, si dans la même ligne vous prenez GN égale à HI, vous aurez le point N, par lequel passe la compagne de la Trochoïde ; de même prenant dans KLM la ligne KO égale à LM, vous aurez un autre point O de la même ligne [courbe]. Et si par le centre E vous tirez EF perpendiculaire à BD, et si vous la prolongez en P jusqu'à la Roulette ; ayant pris de P vers F la ligne PQ égale à EF, dans la même ligne PF vous aurez le point Q, qui est le milieu de cette ligne-ci, et auquel elle change de courbure, comme vous remarquerez mieux ci-après. Or ç'a été la même chose de décrire le cercle autour de l'axe de la Roulette, que de lui donner toutes les diverses positions qu'il a en glissant sur la ligne AC, ce qui a déjà été remarqué dans la Roulette.

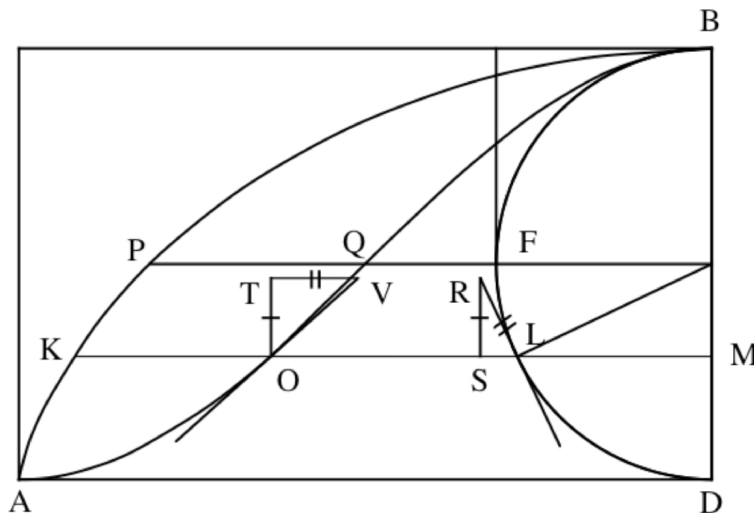
Ceci posé vous voyez que le point qui décrit cette ligne-ci est porté par un mouvement composé de deux droits, l'un uniforme, l'autre inégal, et desquels les directions sont perpendiculaires l'une à l'autre, se prenant dans les lignes AD, BD ou dans leurs parallèles.

Et parce que le point qui décrit cette ligne-ci monte de la même façon que celui qui décrit la Roulette monte dans le demi-cercle, tirant la touchante du point réciproque dans le demi-cercle, et composant le mouvement dont elle est la direction de deux mouvements droits, l'un parallèle à AD et l'autre à BD, l'on aura dans la ligne parallèle à BD la quantité du mouvement qui fait monter ce point ; et sachant la raison de la base AC à la circonférence du cercle, puisque le point qui décrit la compagne de la Roulette est porté d'un mouvement uniforme et égal à AC, comme le point qui décrit la Roulette a un mouvement uniforme et égal à la dite circonférence, si l'on fait que, comme la circonférence du cercle est à AC, ainsi la touchante du cercle soit à une ligne droite, cette ligne sera la quantité du mouvement parallèle à AC du point de cette ligne-ci qui est réciproque à celui du cercle auquel on a tiré la touchante.



Par exemple, soit la Roulette ABC du premier genre, c'est-à-dire que sa base AC soit égale à la circonférence de son cercle et le reste, comme il a été dit : pour tirer la touchante de cette ligne au point O, je tire au cercle par le point L, réciproque du point O, la touchante du cercle LR, et je compose le mouvement LR de deux, RS, SL, dont l'un RS est parallèle à BD ; puis comparant les mouvements du point O à ceux du point L, puisque par la supposition le point O monte autant que le point L, je tire OT

parallèle et égale à RS, ce sera la direction et la quantité de ce premier mouvement du point O ; puis après, parce que le point O a dans une ligne parallèle à AC un mouvement égal à celui du point L le long de la circonférence de son cercle, c'est-à-dire un mouvement égal à celui du point L le long de la touchante LR, ayant tiré TV parallèle à AC, et égale à LR, j'aurai les directions et la raison des deux mouvements du point O, et partant la ligne OV sera la touchante de cette ligne au point O ; ce qu'il fallait faire. [...]



*

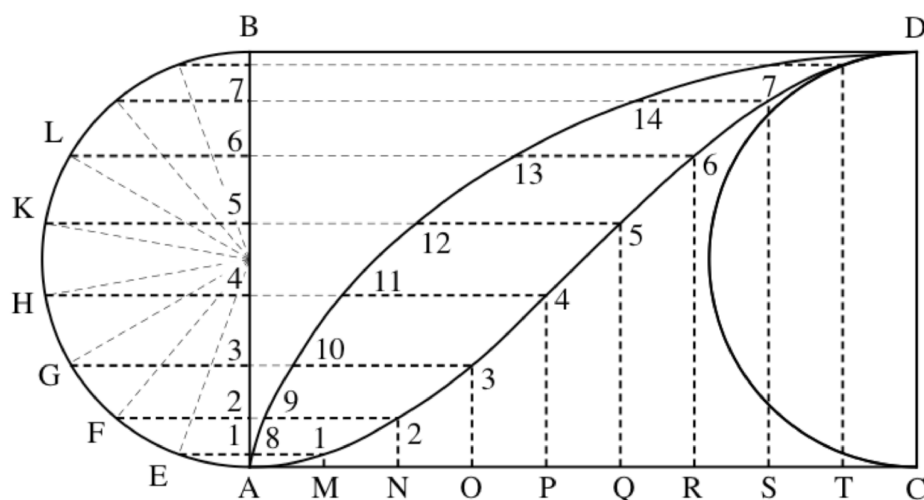
* *

Voici maintenant l'extrait du *Traité des Indivisibles* (pp. 250-253 de l'édition de 1693).

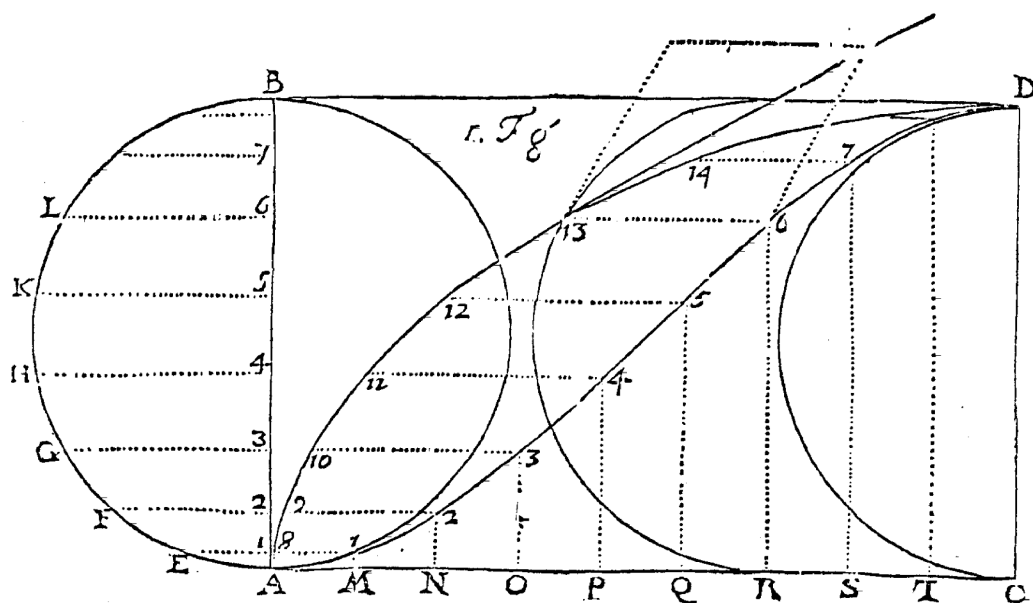
$$\left[\begin{array}{c} \vdots \end{array} \right]$$

EXPLICATION DE LA ROULETTE.

Nous posons que le diamètre AB du cercle AEFGB se meut parallèlement à soi-même, comme s'il était emporté par quelqu'autre corps, jusqu'à ce qu'il soit parvenu en CD pour achever le demi-cercle ou demi-tour. Pendant qu'il chemine, le point A de l'extrémité du dit diamètre marche par la circonférence du cercle AEFGB, et fait autant de chemin que le diamètre, en sorte que quand le diamètre est en CD, le point A est venu en B, et la ligne AC se trouve égale à la circonférence AGHB. Or cette course du diamètre se divise en parties infinies et égales tant entr'elles qu'à chaque partie de la circonférence AGB, laquelle se divise aussi en parties infinies toutes égales entr'elles et aux parties de AC parcourues par le diamètre, comme il a été dit. En après je considère le chemin qu'a fait le dit point A porté par deux mouvements, l'un diamètre en avant, l'autre du sien propre dans la circonférence. Pour trouver le dit chemin, je vois que quand il est venu en E, il est élevé au-dessus de son premier lieu duquel il est parti ; cette hauteur se marque tirant du point E au diamètre AB un sinus E1, et le sinus Verse A1 est la hauteur du dit A quand il est venu en E. De même quand il est venu en F, du point F sur AB je tire le sinus F2, et A2 sera la hauteur de A quand il aura fait deux portions de la circonférence, et tirant le sinus G3, le sinus Verse A3 sera la hauteur de A quand il est parvenu en G ; et faisant ainsi de tous les lieux de la circonférence que parcourt A, je trouve toutes les hauteurs et élévemens par dessus l'extrémité du diamètre A, qui sont A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7 ; donc, afin d'avoir les lieux par où passe le dit point A, à savoir la ligne qu'il forme pendant ses deux mouvements, je porte toutes ses hauteurs sur chacune des diamètres M, N, O, P, Q, R, S, T, et je trouve que M1, N2, O3, P4, Q5, R6, S7 sont les mêmes que celles qui sont prises sur AB. Puis je prends les mêmes sinus E1, F2, G3, etc. et je les porte sur chaque hauteur trouvée sur chaque diamètre, et je les tire vers le cercle, et des extrémités de ces sinus se forment deux lignes, dont l'une est A 8 9 10 11 12 13 14 D, et l'autre A 1 2 3 4 5 6 7 D.



Je sais comme s'est faite la ligne A 8 9 D ; mais pour savoir quels mouvements ont produit l'autre, je dis que pendant que AB a parcouru la ligne AC, le point A est monté par la ligne AB, et a marqué tous les points 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, le premier espace pendant que AB est venu en M, le second pendant que AB est venu en N, et ainsi toujours également d'un espace à l'autre jusqu'à ce que le diamètre soit arrivé en CD ; alors le point A est monté en B. Voilà comment s'est formée la ligne A 1 2 3 D. Or ces deux lignes enferment un espace, étant séparées l'une de l'autre par tous les sinus, et se rejoignant ensemble aux deux extrémités A D. Or chaque partie contenue entre ces deux lignes est égale à chaque partie de l'aire du cercle AEB contenue dans la circonférence d'icelui ; car les unes et les autres sont composées de lignes égales, à savoir de la hauteur A1, A2, etc. et des sinus E1, F2, etc. qui sont les mêmes que ceux des diamètres M, N, O, etc. ainsi la figure A 4 D 12 est égale au demi-cercle AHB. Or la ligne A 1 2 3 D divise le parallélogramme ABCD en deux également, parce que les lignes d'une moitié sont égales aux lignes de l'autre moitié, et la ligne AC à la ligne BD ; et partant selon Archimède, la moitié est égale au cercle, auquel ajoutant le demi-cercle, à savoir l'espace compris entre les deux lignes courbes, on aura un cercle et demi pour l'espace A 8 9 D C ; et faisant de même pour l'autre moitié, toute la figure de la cycloïde vaudra trois fois le cercle. [...]



*
* *

Commentaire du second texte de Roberval (cf. aussi *Aux origines..., op. cit.*).

Roberval se propose de *quarrer* une demi-arche de cycloïde, c'est-à-dire de calculer l'aire du segment ACD-14-13-12-11-10-9-8-A. Il s'agit d'une "quadrature" relative, quoiqu'exacte, puisque le résultat va s'exprimer "exactement" en fonction de l'aire du cercle générateur et non d'un carré donné : on devrait d'ailleurs plutôt parler de "circulature" ou de "disquature", puisqu'il s'agit d'exprimer l'aire de cette portion d'arche en proportion – rationnelle ou constructible à la règle et au compas – de celle d'un disque –, mais il n'y a pas quadrature absolue puisqu'il est impossible de réaliser la quadrature exacte du dit cercle (c'est-à-dire de trouver un carré d'aire égale qui serait constructible à la règle et au compas). Pour ce faire, il construit, pour chacun des points 8, 9, etc., 14, de la cycloïde, un point 1, 2, 3, etc., 7, obtenu sur des parallèles à la base AC de la courbe, "à droite" de celle-ci, et tels que 8-1 = E-1, longueur de ligne E-1 "ordonnée" – comme le disaient les Grecs – dans le demi-cercle AEFGHKLBA sur le diamètre AB, et de même pour toutes les lignes semblables : 9-2 = F-2, 10-3 = G-3, 11-4 = H-4, 12-5 = K-5, 13-6 = L-6, etc. Il en résulte, selon un principe de la théorie des *Indivisibles*, imaginée au début du XVII^e siècle par Cavalieri⁴ et ici appliquée par Roberval, que "toutes les lignes" horizontales du segment en forme de "vague" A-8-9-10-11-12-13-14-D-7-6-5-4-3-1-A sont égales à "toutes les lignes" horizontales du demi-cercle AEFGHKLBA-7-6-5-4-3-2-1-A et que les aires de ces deux surfaces sont égales ; tout se passe comme si l'on avait "tassé" les lignes 8-1, 9-2, 10-3, 11-4, 12-5, 13-6, 14-7 et leurs semblables "contre" le diamètre AB, après les avoir déplacées parallèlement à elles-mêmes sur les horizontales qu'elles définissent, comme avec cet outil à aiguilles parallèles que les menuisiers utilisent pour relever le profil des moulures. C'est très probablement le même principe qui a servi d'heuristique aux anciens pour établir la constance de l'aire des triangles ayant même base et même hauteur : le déplacement du sommet A d'un triangle ABC sur une parallèle au support de la base BC ne change pas la longueur des lignes découpées par AB et AC sur toute autre parallèle située entre la base et le lieu de A.

L'aire de la "vague" comprise entre la cycloïde et sa *compagne* vaut donc un demi-cercle générateur. Comme la dite *compagne de la roulette* (en fait la sinusoïde) possède un centre de symétrie situé au centre du rectangle ABDC, elle partage ce rectangle en deux parties égales en aires puisque superposables :

$$\text{aire (AMNOPQRSTCD-7-6-5-4-3-2-1-A)} = \text{aire (A-1-2-3-4-5-6-7-DBA)}.$$

Or, l'aire du rectangle vaut le produit de AC par AB, c'est-à-dire de la longueur d'une demi-circconférence par celle d'un diamètre, ce qui donne $\pi R \cdot 2R = 2\pi R^2$. L'aire de la "vague" vaut donc πR^2 , c'est-à-dire l'aire du cercle générateur. Une demi-arche de cycloïde, composée d'une arche de sinusoïde et d'une vague, vaut donc, en aire, un disque augmenté d'un demi-disque. Une arche de cycloïde contient, pour finir, trois disques tels que celui inclus dans le cercle générateur, en aire :

$$\text{aire (arche de cycloïde)} = 3 \text{ aire (cercle générateur)} = 3\pi R^2.$$

À suivre : *Deuxième partie : la sinusoïde selon Pitot, de l'espace au plan.*

*
* *

⁴ Francesco Bonaventura Cavalieri (1598-1647) est un mathématicien italien de l'Ordre des Jésuites, né à Milan et professeur à Bologne, où il mourut ; il publia en 1635, une *Géométrie des Indivisibles*, qui préfigure le calcul infinitésimal et les rectangles infiniment petits de Leibniz : *Geometria Indivisibilibus Continuatorum, nova quadam ratione promota, Authore F. Bonaventura Cavaliero Mediolan[sis, i. e. milanais]. Ord. Jesuatorum S. Hieronymi, D. M. Mascarellæ Pr. Ac in Almo Bonon. Gymn. Prim. Mathematicarum Professore...* Bononiæ [Bologne], Typis Clementis Ferronij, M. DC. XXXV. [1635].

Bibliographie succincte

Sources des textes & sources secondaires

- CARAVELLI, Vito. *Le Traité des Hosuèdres* (1751). Trad. du latin en fr. par P. Ver Eecke, publication extraite de *Mathesis*. Paris, 1959.
- CAVALIERI, Francesco Bonaventura. *Geometria Indivisibilibus Continuum, nova quadam ratione promota, Authore F. Bonaventura Cavaliero Mediolan[is, i. e. milanais]. Ord. Jesuatorum S. Hieronymi, D. M. Mascarellæ Pr. Ac in Almo Bonon. Gymn. Prim. Mathematicarum Professore...* Bononiæ [Bologne], Typis Clementis Ferronij, M. DC. XXXV. [1635].
- ROBERVAL, Gilles PERSONNE (de —). *Observations sur la Composition des Mouvements, et sur le Moyen de trouver les Touchantes des Lignes Courbes*, in *Divers Ouvrages de Mathématique et de Physique, par Messieurs de l'Académie Royale des Sciences*, Paris, 1693, pp. 63-66. Rééd. in *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, depuis 1666, jusqu'à 1699*. Tome VI. Paris, 1730.
- . *Traité des Indivisibles*, in *Divers Ouvrages de Mathématique et de Physique, par Messieurs de l'Académie Royale des Sciences*, Paris, 1693, pp. 250-253. Rééd. in *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, depuis 1666, jusqu'à 1699*. Tome VI. Paris, 1730.

Ouvrages de référence

- COLLECTIF (BESSOT, D., LANIER, D., LE GOFF, J.-P. & *alii* (Cercle d'Histoire des Sciences de l'IREM de Basse-Normandie). *Aux origines du calcul infinitésimal*. Recueil de textes, d'Euclide à Pascal, introduits, commentés, avec des exercices et leurs corrigés. Paris, Ellipses, 1999. En particulier : pp. 91-98, 176-180 & 225-227.
- COLLECTIF (HEMILY : ARSAC, Cécile, ARSAC, Gilbert & KELLER, Olivier, IREM de Lyon). *Textes fondateurs du Calcul infinitésimal*. Recueil de textes, introduits, commentés, avec des exercices et leurs corrigés. Paris, Ellipses, 2006.

*

* *