# Quartiles : programme officiel, calculatrice, tableur... ou Wikipedia

**0. Introduction.**

Aujourd'hui la notion de quantile est passée dans le langage courant, même si le mot n'est pas prononcé.

La définition en semble simple a priori :

**Définition :** Soit $p$ un nombre réel appartenant à $]0,\ 1[$. Soit une série statistique de données réelles que l'on supposera pour simplifier ordonnées par ordre croissant : $(x_1, x_2, ...., x_n)$.

Le nombre réel $q_p$ est un quantile d'ordre $p$ si $100p\%$ des données sont inférieures ou égales à $q_p$ et $100(1-p)\%$ des données sont supérieures à $q_p$.

Certains quantiles sont connus sous d'autres noms.

- $Me = q_{0.50}$ = quantile d'ordre $1/2$ = médiane.
- $Q_1 = q_{\frac{1}{4}}$ = quantile d'ordre $1/4$ = premier quartile
- $Q_3 = q_{\frac{3}{4}}$ = quantile d'ordre $3/4$ = troisième quartile
- $D_1 = q_{\frac{1}{10}}$ = quantile d'ordre $1/10$ = premier décile

Trois exemples issus pour les deux premiers de revues économiques et le dernier d'un site médical.

- Exemple 1 : En 2003, le salaire médian, à temps complet était de 1849 euros c.-à.-d. la moitié des salariés à temps complet gagnait moins de 1849 euros et l'autre moitié plus de 1849 euros. Alors $1849 = Me$ = médiane.
- Exemple 2 : En 2003, les 10% des ménages les plus pauvres gagnaient moins de 609 euros par mois. Alors $609 = D_1$ = premier décile.
- Exemple 3 : Dans une étude sur 342 secteurs de gardes de la zone Vénissieux et Cours-la Ville, le quart de ces secteurs concernaient une population de moins de 34.41 h/km2 et le quart de ces secteurs une population de plus de 203.76 h/km2. Alors $34.41 = Q_1$ = premier quartile et $203.76 = Q_3$ = troisième quartile.

Il paraît important, à partir de données, de pouvoir faire calculer effectivement aux élèves certains de ces quantiles, et en particulier les quartiles qui sont utilisés pour établir une mesure de la dispersion des données - l'écart-interquartile - et dans l'établissement des « boîtes à moustaches », dites encore boîtes de Tukey, (box-plot en anglais).

La difficulté rencontrée est la suivante : à partir d'un même jeu de données, suivant la méthode utilisée, on peut aboutir à des résultats différents.

Dans une **première étape**, nous illustrerons ceci à partir des quatre jeux de données, et de trois méthodes les plus utilisées : la méthode dite "du programme officiel", la méthode utilisant les calculatrices, la méthode utilisant les tableurs classiques et les logiciels plus sophistiqués comme R.

Dans une **deuxième étape**, nous rappellerons les définitions mathématiques des concepts utilisés. Dans une **troisième étape**, nous tenterons d'expliquer ce qui "justifie" l'utilisation de chacune de ces méthodes. Dans une **quatrième étape**, nous amorcerons un débat sur les éventuelles conséquences sur les élèves, de la diversité de ces méthodes. Enfin nous irons voir ce que dit Wikipedia.

Ces réflexions sont inspirées de l'article Quartiles, déciles et tutti quantiles (*Jean-Claude Girard*) tiré de la brochure APMEP n°156 produite par la Commission Inter-IREM *Statistique et Probabilités*, et tentent de compléter cet excellent article.

**1. Quatre jeux de données et trois méthodes.**

**Durée de vie d'ampoules de 100W**

**Jeu 1** : 6 ampoules : $46, 270, 293, 382, 630, 952$

**Jeu 2** : 7 ampoules :$49, 90, 198, 302, 387, 547, 763$

**Jeu 3** : 8 ampoules : $34, 47, 71, 263, 282, 622, 667, 968$

**Jeu 4** : 9 ampoules : $39, 174, 196, 252, 331, 401, 456, 637, 944$

**Calcul des quartiles**

**1 er quartile**

| | Programme | Calculatrice | Tableur |
|---|---|---|---|
| Jeu 1 | 270 | 270 | 275.75 |
| Jeu 2 | 90 | 90 | 144 |
| Jeu 3 | 47 | 59 | 65 |
| Jeu 4 | 196 | 185 | 196 |

**3ème quartile**

| | Programme | Calculatrice | Tableur |
|---|---|---|---|
| Jeu 1 | 630 | 630 | 568 |
| Jeu 2 | 547 | 547 | 467 |
| Jeu 3 | 622 | 644.5 | 633.25 |
| Jeu 4 | 456 | 546.5 | 456 |

**1. Définitions mathématiques des concepts utilisés.**
**Le cas d'une variable aléatoire "continue" :**

Soit $X$ variable aléatoire réelle qui suit une loi de densité $f$ non nulle sur $I$.
Soit $F$ la fonction de répartition définie par :

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

Soit $p \in ]0, 1|$. **Le quantile d'ordre $p$ est le réel $q_p$ appartenant à $I$ tel que $F(q_p) = p$.**
On écrit aussi $q_p = F^{-1}(p)$.

*Un exemple :*

Une ampoule est vendue avec l'indication : durée moyenne = 1 an = 365 jours.

$X$ est la variable aléatoire qui mesure (en jours) la durée de vie de l'ampoule dont la loi est modélisée par la densité exponentielle

$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ si $x \geq 0$ et $f(x) = 0$ si $x < 0$.

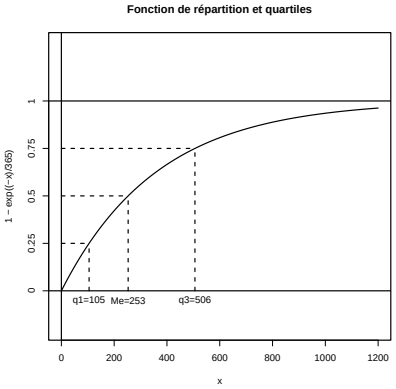
Puisque moyenne $= E(X) = \frac{1}{\lambda}$, $\lambda = \frac{1}{365}$ et $F(x) = 1 - e^{-\lambda x} = 1 - e^{-\frac{x}{365}}$ si $x \geq 0$ et $F(x) = 0$ si $x < 0$.

$q_p$ vérifie $1 - e^{-\lambda q_p} = p$ donc $q_p = -\dfrac{\ln(1-p)}{\lambda} = -365\ln(1-p)$

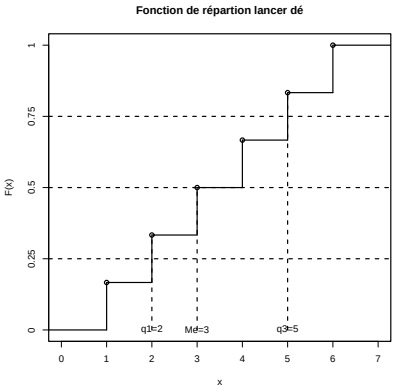
$Me = q_{0.50} = -365\ln(1 - 0.50) = 253$

$Q_1 = q_{0.25} = -365\ln(1 - 0.25) = 105$

$Q_3 = q_{0.75} = -365\ln(1 - 0.75) = 506$



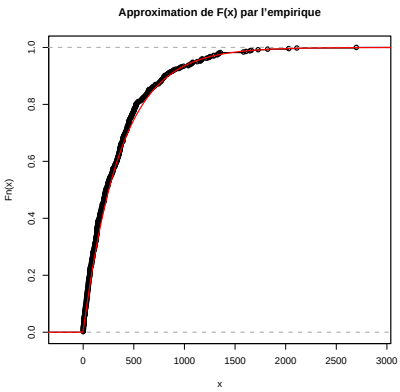
**Le cas d' une variable discrète à partir d'un exemple**
$X$ =numéro tiré après tirage d'un dé équilibré
$P(X = i) = \frac{1}{6}$ pour $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.
$F(x) = P(X \leq x) = 0$ si $x < 1$
$F(x) = P(X \leq x) = \frac{1}{6}$ si $1 \leq x < 2$
$F(x) = P(X \leq x) = \frac{2}{6}$ si $2 \leq x < 3$
.....
$F(x) = P(X \leq x) = \frac{5}{6}$ si $5 \leq x < 6$
$F(x) = P(X \leq x) = 1$ si $x \geq 6$
Définition :
$q_p = \min\{x \ \ /F(x) \geq p\}$




**Remarque :**
Pour une variable continue, on peut appliquer la même définition car
$\forall x \geq q_p \quad F(x) \geq F(q_p) = p$
et de plus $F$ est continue au point $q_p$ d'où la définition générale :

$$q_p = \min\{x \ \ /F(x) \geq p\}$$

**Fonction de répartition empirique**
$x_1, x_2, ....., x_n$ suite de données classées par ordre croissant. La fonction de répartition empirique $\hat{F}$ est définie ainsi :
$\hat{F}(x) = \frac{1}{n} Card\{i \ \ / \ x_i \leq x\}$ = fréquence des données inférieures ou égales à $x$.
La fonction de répartition empirique construite à partir d'un ensemble de $n$ données est une bonne approximation de $F$, fonction de répartition de la variable aléatoire qui a engendré les données.
*Exemple :*
Simulation de 500 durées de vie pour des ampoules de durée moyenne 1 an



**2. Justification du calcul pour chacune des trois méthodes :**

**2.1. Méthode du programme officiel :**

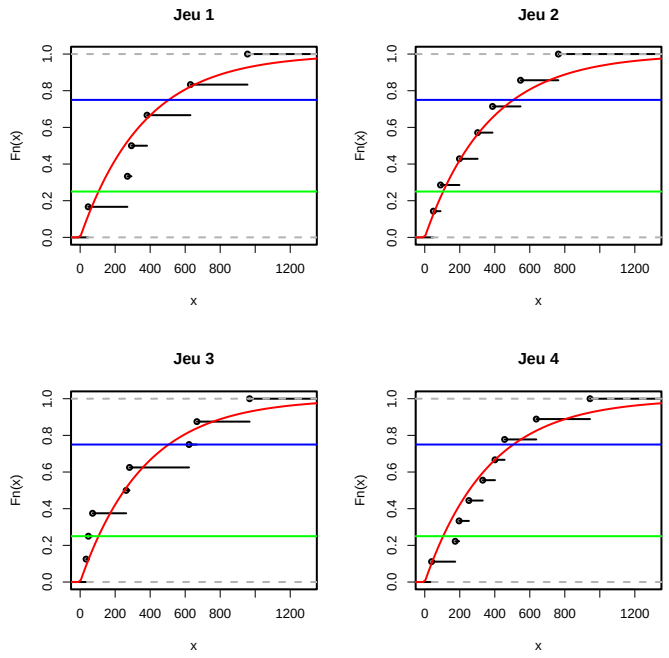
*Nouveaux programmes de première :*

*Le premier (respectivement le troisième) quartile est le plus petit élément $q_1$ (respectivement $q_3$) des valeurs de la série ordonnée par ordre croissant, tel qu'au moins 25%(respectivement 75%) de ces valeurs soient inférieures ou égales à $q_1$ (respectivement $q_3$).*

**Jeu 1** : $46, 270, 293, 382, 630, 952$
$q_1 = 46$? Il y a 1 valeur inférieure ou égale à 46 soit $\frac{1}{6} = 16,66\%$
$q_1 = 270$? Il y a 2 valeurs inférieures ou égales à 270 soit $\frac{2}{6} = 33,33\%$
Donc $q_1 = 270$

**Jeu 3** : $34, 47, 71, 263, 282, 622, 667, 968$
$q_1 = 34$? Il y a 1 valeur inférieure ou égale à 34 soit $\frac{1}{8} = 12,5\%$
$q_1 = 47$? Il y a 2 valeurs inférieures ou égale à 47 soit $\frac{2}{8} = 25\%$
Donc $q_1 = 47$

Fonction de répartition empirique pour les quatre jeux de données :




Un constat :

$\hat{q}_{0.25}$ = 1er quartile calculé suivant programme. Alors : $\hat{q}_{0.25} = \min\{x \ \ /\hat{F}(x) \geq 0.25\}$
$\hat{q}_{0.75}$ = 3ème quartile calculé suivant programme. Alors : $\hat{q}_{0.75} = \min\{x \ \ /\hat{F}(x) \geq 0.75\}$

La justification mathématique de cette méthode parait évidente. Puisque la fonction de répartition empirique $\hat{F}$ est une bonne approximation de la fonction de répartition $F$, pour obtenir $\hat{q}_{0.25}$ (resp. $\hat{q}_{0.75}$ ), estimateur du quantile $q_{0.25}$(resp. $q_{0.75}$), il suffit de remplacer dans l'expression générale d'un quantile d'ordre $p$, à savoir $q_p = \min\{x \ \ /F(x) \geq p\}$, la fonction de répartition $F$ par son estimation $\hat{F}$ et ainsi on retombe sur la définition du programme officiel.

Remarque importante : avec cette méthode très générale puisqu'elle s'applique quelle que soit la valeur de $p \in ]0, 1[$, on devrait pouvoir définir la médiane $Me$ comme le plus petit élément des valeurs de la série ordonnée par ordre croissant, tel qu'au moins 50% de ces valeurs soient inférieures ou égales à $Me$. Or dans le programme officiel, il n'en est rien et c'est une autre définition qui est proposée (voir méthode de la calculatrice).

### 3.2. Méthode de la calculatrice :

**Rappel :** *« On ordonne la série des observations par ordre croissant ; si la série est de taille* $2n+1$*, la médiane est la valeur du rang* $n+1$ *dans cette série ordonnée ; si la série est de taille* $2n$ *la médiane est la moyenne des valeurs des termes de rang* $n$ *et* $n+1$ *dans cette série ordonnée »* (Document d'accompagnement des programmes de première).

La médiane détermine deux sous-séries de même taille constituées des observations antérieures.

. sous-série 1 = observations $\leq$ médiane

. sous-série 2 = observations $\geq$ médiane

Si taille de l'échantillon $= 2n+1$, on exclut dans chaque sous-série une et une seule donnée : la donnée centrale de la série initiale (c.-à-d. la médiane), sinon on n'exclut rien.

1er quartile = médiane de la nouvelle sous-série 1.

3ème quartile = médiane de la nouvelle sous-série 2.

*Exemples :*

**Jeu 1** : $46, 270, 293, 382, 630, 952$

Taille $= 2n = 2 \times 3$. Médiane $= = \dfrac{x_3 + x_4}{2} = \dfrac{293 + 382}{2} = 337.5$

Sous-série 1 : $46, 270, 293$ . 1er quartile $= 270$

Sous-série 2 : $82, 630, 952$ . 3ème quartile $= 630$

**Jeu 4** : : $39, 174, 196, 252, 331, 401, 456, 637, 944$

Taille $= 2n + 1 = 2 \times 4 + 1$. Médiane $= = x_5 = 331$

. sous-série 1 $= 39, 174, 196, 252, 331$

. sous-série 2 $= 331, 401, 456, 637, 944$

Taille impaire :

. nouvelle sous-série 1$= 39, 174, 196, 252$. 1er quartile $= \dfrac{174 + 196}{2} = 185$

. nouvelle sous-série 2 $= 401, 456, 637, 944$. 3ème quartile $= \dfrac{456 + 637}{2} = 546.5$

La justification apparaît ici aussi évidente. Après avoir ordonné les données, il suffit de les "couper" en quatre parts. La médiane sert à "couper" la série ordonnée d'abord en deux parties. Pour obtenir le premier quartile (resp. de troisième quartile), il suffit de "couper" de nouveau en deux les données inférieures à la médiane (resp. supérieures à la médiane), et donc d'en prendre à nouveau la médiane.

### 3.3. Méthode utilisée par les tableurs Excel, Open Office et le logiciel R

Calcul du quantile d'ordre $p$.

On construit d'abord le tableau suivant :

| Ordonnée | $x_1$ | $x_2$ | $\cdots$ | $x_i$ | $x_{i+1}$ | $\cdots$ | $x_n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Abscisse | 0 | $\frac{1}{n-1}$ | $\cdots$ | $\frac{i-1}{n-1}$ | $\frac{i}{n-1}$ | $\cdots$ | 1 |
| Indice | 1 | 2 | $\cdots$ | $i$ | $i+1$ | $\cdots$ | $n$ |

Pour $i = 1, 2, ..., n-1$, on relie par un segment de droite les points $(\frac{i-1}{n-1}, x_i)$ et $(\frac{i}{n-1}, x_{i+1})$.

Ce polygone est donc le graphe de la fonction $H : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ :

$H(p) = (1 - \lambda_p)x_i + \lambda_p x_{i+1}$ si $\frac{i-1}{n-1} \leq p \leq \frac{i}{n-1}$ avec $i$ défini ainsi :

$i = [r]$ où $r = (n-1)p + 1$

$\lambda_p = (n-1)p + 1 - i = r - [r]$

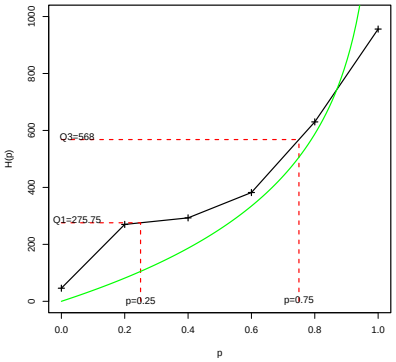
Le quantile d'ordre $p$ est alors donné par : $q_p = H(p)$

*Exemple :*

**Jeu 1** : $46, 270, 293, 382, 630, 952 \quad n = 6$

| Ordonnée | 46 | 270 | 293 | 382 | 630 | 952 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Abscisse | 0 | $\frac{1}{5}$ | $\frac{2}{5}$ | $\frac{3}{5}$ | $\frac{4}{5}$ | $\frac{5}{5}$ |
| Indice | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |

On a ajouté le graphe de $F^{-1}$.




**Recherche des quartiles :**

Lorsque le graphe de $H$ a été tracé, le quantile d'ordre $p$ est l'ordonnée du point du graphe de $H$ correspondant à l'abscisse $p$.

On peut aussi le trouver en utilisant la suite de calculs suivants :

1er quartile : $Q_1 = q_{0.25} =?$

- on calcule $r = (n-1)p + 1 = (6-1) \times 0.25 + 1 = 2.25$
- alors $i = [r] = [2.25] = 2$ et $\lambda_{0.25} = r - [r] = 2.25 - 2 = 0.25$
- on cherche $x_i = x_2 = 270$ et $x_{i+1} = x_3 = 293$
- on trouve $q_{0.25} = H(0.25) = (1-\lambda_p)x_i + \lambda_p x_{i+1} = (1-0.25) \times 270 + 0.25 \times 293 =$ donc $Q_1 = 275.75$.

3ème quartile : $Q_3 = q_{0.75} =?$

- on calcule $r = (n-1)p + 1 = (6-1) \times 0.75 + 1 = 4.75$
- alors $i = [r] = [4.75] = 4$ et $\lambda_{0.75} = r - [r] = 4.75 - 4 = 0.75$
- on cherche $x_i = x_4 = 382$ et $x_{i+1} = x_5 = 630$
- on trouve $q_{0.75} = H(0.75) = (1-\lambda_p)x_i + \lambda_p x_{i+1} = (1-0.75) \times 382 + 0.75 \times 630 = 568$ donc $Q_3 = 568$.

La justification paraît aussi évidente. Puisque $q_p = F^{-1}(p)$, il suffit d'obtenir une approximation de l'inverse de la fonction de répartition de $F$. Puisque la fonction de répartition empirique $\hat{F}$ est une "bonne" approximation de $F$, pourquoi ne pas prendre l'inverse de cette fonction de répartition empirique ? Ce n'est pas possible car $\hat{F}$ est une fonction "en escalier". Pour une ordonnée fixée, il peut exister plusieurs abscisses qui correspondent à cette ordonnée... ou aucune ! Elle n'est donc pas inversible. On utilise alors une approximation de $F^{-1}$ par une fonction affine par morceaux construite de telle manière que pour chaque $p$, il puisse exister une valeur pour cette fonction. C'est la raison pour laquelle on prend les points d'abscisses $\dfrac{i}{n-1}$ et non $\dfrac{i}{n}$ ce qui paraîtrait pourtant plus naturel. La justification qu'en donne J.P.Girard utilise une généralisation de "rang" mais qui donne le même résultat. D'autres tableurs Minitab,... et logiciel SAS peuvent utiliser encore d'autres méthodes mais toutes reviennent à utiliser une approximation de $F^{-1}$.

**4. Début de discussion.**

Il n'est pas évoqué une méthode pourtant universellement utilisée. C'est celle où les données sont groupées en classes et où, à partir de ces classes, on construit la fonction représentative du polygone des fréquences cumulées qui permet ensuite par interpolation d'obtenir les quantiles désirés. Cette méthode qui utilise l'interpolation a très longtemps été la seule enseignée. Lorsque les données sont livrées effectivement, "en classes" avec pour chaque classe la fréquence de la classe, c'est la seule méthode utilisable.

Lorsque les données sont fournies sous la forme d'une série de nombres, les regrouper en classes (quelles classes ?) fait perdre de l'information et ceci d'autant plus que la taille de la série est petite. De toute façon, le calcul des quartiles pourra donner par cette méthode un résultat encore différent des trois autres méthodes.

Rappelons aussi qu'historiquement, la médiane a été définie en 1757 par le moine serbe Boscovitch comme une valeur $m$ qui minimise $\sum_{i=1}^{n} |x_i - m|$. On sait que si $n$ est pair, cette valeur peut ne pas être unique.

L'étudiant ne risque-t-il pas d'être dérouté par le fait que, pour un même jeu de données, différentes méthodes puissent donner des résultats différents pour une même définition ?

L'enseignant peut répondre que le quartile obtenu n'est qu'une approximation - estimation - du "véritable" quartile, et qu'il peut y avoir, pour un paramètre inconnu à estimer à partir d'un échantillon de taille de toute façon finie, plusieurs approximations possibles, mais ceci entraîne une interrogation supplémentaire, quelle est la "réalité", sinon mathématique, de ce paramètre inconnu, le "véritable" quartile ? Cette interrogation ne nous amène-t-elle pas à une autre : la frontière entre le fini et l'infini ?

Une autre réponse possible est d'enseigner ce qui n'est "pas contraire" à l'outil de calcul utilisé. Dans le cas où c'est la calculatrice qui est utilisée, prendre la définition de la calculatrice. Dans le cas où c'est le tableur, prendre la définition du tableur. Mais n'est-ce pas dans ce cas se soumettre aux fabricants de matériel ?

" Quant au calcul fait par Excel, il peut être intéressant d'expliquer aux élèves que l'on ne maîtrise pas toujours les résultats donnés par les fonctions standard d'un logiciel." C'est une réponse trouvée dans un document de l'Inspection pédagogique régionale de mathématique de l'Académie de Strasbourg intitulé : "Les difficultés soulevées par la définition de la médiane et des quantiles" !

**5. ...et Wikipedia ?** L'encyclopédie participative en ligne Wikipedia est en quelques années devenue une ressource documentaire très usitée.

Citons l'article « quartile » tiré de cette référence.

> « En statistique descriptive, un quartile est chacune des 3 valeurs qui divisent les données triées en 4 parts égales, de sorte que chaque partie représente 1/4 de l'échantillon de population.
>
> Calcul des quartiles
>
> Voir à quantile pour les méthodes. Le quartile est calculé en tant que 4-quantile. Donc :
> – le 1er quartile sépare les 25% inférieurs des données ;
> – le 2e quartile est la médiane de la série ;
> – le 3e quartile sépare les 75% inférieurs des données.
>
> Méthode :
> – Dans le cas continu on utilise la fonction représentative du polygone des fréquences cumulées. (voir à Statistiques élémentaires continues)
> – Dans le cas discret on range les données par ordre croissant ensuite : Le quartile inférieur est la valeur du milieu du premier ensemble, dans lequel 25% des valeurs sont inférieures à Q1 et 75% lui sont supérieures. Le premier quartile prend la notation Q1. Le quartile supérieur est la valeur du milieu du deuxième ensemble, dans lequel 75% des valeurs sont inférieures à Q3 et 25% lui sont supérieurs. Le troisième quartile prend donc la notation Q3
>
> Exemple :
>
> Les valeurs dans l'ordre ascendant 1, 11, 15, 19, 20, 24, 28, 34, 37, 47, 50, 57.
>
> Q1 est entre 15 et 19 donc : Q1 = 17
>
> Q2 est entre 24 et 28 donc : Q2 = 26 (c'est la médiane)
>
> Q3 est entre 37 et 47 donc : Q3 = 42 »

Quelques critiques... entre autres !

– Dans le cas discret, l'"ensemble" dont il est question est sans doute le sous ensemble $E = ]15, 19[$ car 25% des valeurs de la série sont inférieures à n'importe $x \in E$ et 75% sont supérieures à $x \in E$. Pour le Jeu 3, on retrouve la définition des calculatrices. De toute façon, définition pas claire !

– Qu'en est-il pour le Jeu 2 : $49, 90, 198, 302, 387, 547, 763$ ?
  $E = ]90, 198[$ ou bien $E = ]49, 90[$ ?
  Dans le premier cas, plus de 25% des valeurs inférieures à $x \in E$ et moins de 75% sont supérieures à $x \in E$ : Q1= 144 ;
  Dans le deuxième cas, moins de 25% des valeurs inférieures à $x \in E$ et plus de 75% sont supérieures à $x \in E$ : Q1= 69.5. Définition inapplicable dans l'état si $n \neq 4k$.

Pour poursuivre la polémique, voir le site MathemaTex :
`http ://forum.mathematex.net/mathematiques-f5/mediane-quartiles-t2127.html`

Jean LEJEUNE

## Permanence « Statistiques » à l'IREM

Vous vous posez des questions concernant les programmes, vous cherchez des compléments d'information, ...
Jean LEJEUNE peut vous rencontrer à l'IREM si vous le souhaitez.
Prendre contact par messagerie : jeannotlejeune@orange.fr