

Si  $\sigma_2 > 0$ . Pour que donc  $P_2^{(2)}$  soit positif pour toutes les  
 valeurs de  $m$  il suffit  $\dots = \sigma_2, \sigma_2, \sigma_2$   
 Or en faisant dans  $\dots = \sigma_2$  il vient  

$$P_2^{(1)} - P_2^{(0)}$$

$$P_2^{(0)} =$$
 Mais l'équation  
 donc  $P_2^{(0)}$   
 deux équations  

$$P_2^{(0)} =$$

$$P_2^{(1)} =$$
 de ces équations  
 et  $P_2^{(1)}$  des valeurs  

$$(103) \begin{cases} \theta_2 > \frac{\sigma_2}{\sigma_2 - \rho_{21}} \quad (= \beta_2) \\ \theta_2 < \frac{\rho_2 - \sigma_{21}}{\rho_2 - \rho_{21}} + \frac{A_{\beta}^{(2)}}{(\rho_2 - \rho_{21})(\sigma_2 - \sigma_{21})} \quad (= \epsilon_2) \end{cases}$$
 maintenant  $\theta_2$  est comprise entre 0 et 1 par conséquent il faut  
 que  $\beta_2$  ne surpasse pas l'unité et que  $\epsilon_2$  soit positif. Or  
 c'est cela qui est toujours le cas. En effet  

$$1 - \beta_2 = \frac{\sigma_2 - \rho_{21}}{\rho_2 - \rho_{21}} + \frac{A_{\beta}^{(2)}}{(\rho_2 - \rho_{21})(\sigma_2 - \sigma_{21})}$$

$$1 - \beta_2 = \frac{\sigma_2 - \rho_{21}}{\rho_2 - \rho_{21}} + \frac{A_{\beta}^{(2)}}{(\rho_2 - \rho_{21})(\sigma_2 - \sigma_{21})}$$
 donc  $1 - \beta_2$  est toujours positif en remarquant que  $\sigma_2 > \rho_{21}$

# Niels Henrik Abel

1802 - 1829





*Gilles Damamme*

*Niels Henrik Abel*

*1802 - 1829*

Couverture, mise en page et préface par Danielle Salles.  
Édité par l'I.R.E.M.. de Basse-Normandie novembre 2002  
à l'occasion de la conférence de Gilles Damamme lors de l'exposition :  
"Vies de Mathématiciens" à l'Université de Caen.

## Sommaire

<b>Préface</b>	<b>p. 4</b>
<b>-1- Les jeunes années</b>	<b>p. 5</b>
<b>-2- L'Université</b>	<b>p. 8</b>
<b>-3- Le voyage en Europe</b>	<b>p. 10</b>
<b>-4- Le retour en Norvège</b>	<b>p. 14</b>
<b>-5- Froland</b>	<b>p. 18</b>
<b>Épilogue</b>	<b>p.20</b>
<b>Postface</b>	<b>p. 21</b>
<b>L'oeuvre d'Abel</b>	<b>p. 22</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>p. 24</b>



## Préface

La vie du mathématicien Niels Henrik Abel, que nous évoquons ici et dont nous fêtons cette année le bicentenaire de la naissance, fait irrésistiblement penser à celle d'Évariste Galois et à la remarque de Roger Apéry (découvreur tardif -après soixante ans- de l'irrationalité de  $\zeta(3)$ ) :

“Les mathématiciens, ça meurt ou bien très jeune ou bien très vieux”.

C'était, bien sûr une boutade et si nous connaissons beaucoup de grands mathématiciens qui atteignent un grand âge et restent souvent assez prolifiques, il semble qu'il y en ait eu beaucoup moins qui partirent dans la fleur de l'âge en ayant eu le temps de “faire avancer les mathématiques”.

Cela peut montrer au moins deux choses : les mathématiques conservent et il est très difficile de se faire un nom dans cette discipline dans son jeune âge.

Abel était, contrairement à Galois, un homme affable. Il aimait, outre nos chères mathématiques, la vie, les femmes, les voyages, bref l'aventure sous toutes ses formes. Il en a profité au maximum, au cours de sa courte vie pleine d'aléas tant familiaux que physiques. Il est banal de dire que, malgré l'aridité de leurs études, les mathématiciens sont des hommes (ou des femmes) comme les autres qui aiment et qui souffrent. Mais, à cause du caractère souvent novateur de leur pensée, ils se heurtent parfois à l'indifférence et l'incompréhension des autres. Cependant, s'ils meurent quelquefois trop tôt, ils laissent dans l'histoire et dans le cœur de leurs disciples une trace indélébile.

Danielle SALLES

## **-1- Les jeunes années**

Niels Henrik Abel naît le 5 août 1802, dans la petite île isolée de Finnoy près de Stavanger en Norvège. Son père, Soren Abel, vient d'y être nommé pasteur après de brillantes études, il est marié à Anne-Marie Simonsen et Niels Henrik est leur deuxième fils. Peu de temps après leur installation, le grand-père paternel de Niels Henrik, Mathias Abel, également pasteur, meurt à soixante-cinq ans. Soren fait acte de candidature sur le poste de son père et lui succède à Gjerstad, son village natal, situé près d'Arendal.

En 1806, la famille Abel compte six enfants : cinq garçons (Hans Mathias, Niels Henrik, Peder, Thomas et Thor Henrik) et une fille (Élisabeth).

Au début du dix-neuvième siècle, la Norvège est encore rattachée au Danemark et les danois s'efforcent d'observer une attitude de neutralité dans le déroulement des guerres Napoléoniennes. Pourtant, depuis 1801, les incidents entre le Danemark et l'Angleterre s'aggravent, et les anglais, alliés à la Suède, attaquent durant l'été 1807, sans déclaration de guerre, les danois et détruisent leur flotte. Le Danemark rejoint alors l'alliance contre l'Angleterre, il s'ensuit un blocus réciproque entre l'Angleterre et le Danemark qui sera une catastrophe économique pour ce dernier. Aussi, en 1808, la sœur d'Anne-Marie Abel, Élisabeth Simonsen se réfugie à Gjerstad chez sa sœur, et apprend à lire à Niels Henrik. En 1809 elle se marie avec le lieutenant Tuxen.

En 1810, le gouvernement suédois choisit comme succession à la famille royale, le maréchal Charles Jean-Baptiste Bernadotte, général de Napoléon, qui envahit le Danemark.

En 1813, celui-ci est obligé de signer le traité de Kiel qui cède la Norvège à son adversaire la Suède. Mais la Norvège proclame son indépendance et convoque une assemblée constituante (le Storting) qui vote la très libérale Constitution d'Eiolsvoll. Le père de Niels Henrik, Soren, nationaliste norvégien très actif est élu au Storting. Toute l'enfance de Niels Henrik se déroulera dans une situation de crise économique et de vie difficile pour la famille Abel.

Aux alentours de 1815, il est décidé d'envoyer les deux aînés des fils Abel : Hans Mathias et Niels Henrik, à l'École Cathédrale d'Oslo qui à l'époque s'appelle encore Christiania. Bien que cela soit assez tôt pour cette époque, le pasteur ayant moins de temps à consacrer aux leçons de ses enfants, prend cette décision, d'autant que la situation se dégrade à Gjerstad, financièrement, mais aussi moralement.

Le pasteur qui consacre beaucoup de temps au Storting, en consacre de moins en moins à ses paroissiens et sa popularité s'en ressent. De plus le pasteur et sa femme sont parfois surpris en état d'ébriété. Une autre rumeur plus inquiétante encore, circule : les domestiques laissent entendre que, sous l'influence de l'alcool, la femme du pasteur deviendrait peu avare de ses charmes.

Niels Henrik et son frère arrivent donc à leur École Cathédrale d'Oslo qui, en raison de la création récente du Storting et de l'Université, est privée, d'une part, d'une partie de ses locaux et d'autre part, de ses professeurs. Ainsi, Soren Rasmussen, le professeur de l'École Cathédrale dont la réputation n'est plus à faire, est nommé à la chaire de mathématiques de l'Université. Il est remplacé à l'école Cathédrale par Hans Peter Bader, professeur excessivement sévère et brutal. Le proviseur reçoit fréquemment des plaintes de garçons victimes d'une hémorragie nasale, d'un œdème au visage ou de maux de tête provoqués par les mauvais traitements de Bader.

Les deux frères débutent à l'école sans difficulté et obtiennent d'excellentes notes. Niels est sérieux et appliqué et le Recteur Rosted note que Niels Henrik "a une excellente tenue et qu'il est ordonné et modeste".

Il y a peu de distractions pour un élève de l'époque. Quelques représentations de théâtre qu'il adore, les jeux de cartes et les échecs, pour lesquels il montre des dons, mais ce qu'Abel préfère par-dessus tout c'est la compagnie. Entouré d'amis, il est gai et drôle, mais la solitude le rend triste et le déprime. Il est de surcroît très timide.

Mais si Niels Henrik comprend les mathématiques cela ne le soustrait pas aux coups de Bader. A l'automne 1816, cela lui devient insupportable et il quitte provisoirement l'école. Quand Niels Henrik est confirmé à 15 ans à l'église, sa conduite et ses résultats sont jugés excellents, mais, à l'école, un déclin s'amorce et ses notes baissent.

L'année 1818 marque une étape décisive pour la vie de Niels Henrik. Un jour une agitation extrême s'empare de la ville : des bruits courent que l'un des élèves de l'école a succombé aux mauvais traitements de Bader. Celui-ci est allé trop loin, frappant un garçon avec une brutalité inhabituelle même pour lui. La victime, fils d'un représentant du Storting, meurt huit jours plus tard.

Les élèves témoignent devant la commission d'enquête et exigent la démission de Bader. Ce dernier admet qu'il a isolé le garçon dans un coin et l'a longuement cogné à poings fermés ; il nie pourtant l'avoir frappé lorsqu'il était à terre. Bader doit démissionner mais n'est pas poursuivi : le docteur qui a soigné le garçon, précise que c'était une fièvre qui avait entraîné la mort et non les coups. Bader bénéficiera de protections car il continuera à enseigner.

Le remplaçant de Bader s'appelle Bernt Michaël Holmboe. C'est un des élèves les plus doués de Rasmussen, qui l'a de surcroît formé à la pédagogie de

l'enseignement. Holmboe s'attache d'emblée à rendre l'enseignement plus attrayant, laissant les élèves travailler indépendamment et les encourageant à s'attaquer à quelques problèmes.

Niels Henrik prend rapidement de l'intérêt au jeu et découvre qu'il est capable de résoudre des problèmes trop ardues pour les autres élèves. Holmboe l'encourage et lui soumet de quoi satisfaire sa curiosité mathématique. Une fois envoûté par les mathématiques, Niels Henrik y consacre presque tout son temps, dévorant le cours de Rasmussen -qu'Holmboe lui prête- et les œuvres de l'époque. Holmboe fait l'éloge de son élève et note en 1819 dans le carnet scolaire de Niels Henrik : "Un don mathématique exceptionnel". L'année suivante il est encore plus enthousiaste : "...s'il vit, il sera probablement un grand mathématicien".

Pendant ce temps Abel essaie de voler de ses propres ailes et s'attaque à un problème des plus profonds de l'époque : comment résoudre les équations du cinquième degré ? On savait exprimer les solutions du second degré à l'aide de radicaux, celles du troisième et quatrième degrés depuis la Renaissance mais on butait sur l'équation du cinquième degré depuis plusieurs centaines d'années. Abel croit avoir trouvé la solution : il soumet ses résultats à Holmboe et à Hansteen, professeur de mathématiques appliquées à l'Université d'Oslo, qui n'y trouvent pas de faute. Ceux-ci envoient les travaux d'Abel à Degen, mathématicien danois qui ne trouvant pas de faille se montre plus sceptique, connaissant l'ampleur du problème. Il souhaite une meilleure rédaction et des exemples et conseille à Abel de s'attaquer à une branche moins stérile : celles des fonctions elliptiques. En essayant des exemples numériques, Niels Henrik s'aperçoit rapidement que sa solution n'est pas correcte dans tous les cas et est très déçu. Mais il n'a pas dit son dernier mot.

Pendant ce temps l'esprit de Hans Mathias, le frère aîné de Niels Henrik, commence à décliner. En 1820 le Proviseur Rosted conseille à son frère de lui faire arrêter ses études. La situation se dégrade aussi pour le père de Niels Henrik, d'autant plus que la guerre et le blocus des anglais ont considérablement appauvri le pays. Le Pasteur Abel n'est pas réélu député au Storting en 1816, mais il l'est en 1818 où ses adversaires politiques jettent le discrédit sur lui, à la suite de ses maladroites. Sa santé se dégrade et il s'adonne de plus en plus à la boisson. Au début de l'année 1820, il tombe gravement malade et meurt peu de temps après, à l'âge de quarante-huit ans.

Mathias, le frère aîné montrant de plus en plus de signes de folie et sa mère peu de soucis pour ses enfants, Niels Henrik se retrouve à 18 ans, responsable de ses frères et de sa sœur qu'il tentera toujours d'aider le mieux possible.

## -2- L'Université

En juillet 1821, Niels Henrik Abel reçoit le diplôme de l'École Cathédrale et le mois suivant est reçu à l'examen de l'Université où il a des notes médiocres sauf en mathématiques. Niels reçoit comme bourse le logement, l'éclairage et le chauffage de sa chambre, mais comme il n'a aucun revenu, certains professeurs de l'Université donnent un peu d'argent pour sa bourse. Niels Henrik se débrouille aussi pour que son frère Peder qui a 14 ans, puisse venir étudier à l'École Cathédrale et loge dans la même chambre que lui.

Abel se plaît bien à l'Université et fait partie d'une bande d'amis. Comme Rasmussen est occupé par son travail au gouvernement, Abel demande au Professeur Hansteen, professeur de mathématiques, mais surtout de sciences de la nature et d'astronomie, de devenir son directeur de recherche. Il fera par cette occasion connaissance avec Mme Hansteen qui deviendra pour lui comme une seconde mère.

En juin 1822, Abel est reçu à ses examens, toujours avec des résultats moyens mais des notes excellentes en mathématiques. Avec d'autres étudiants dont Boeck et Keilhau -avec qui il se lie d'amitié- il contribue à la création d'une revue scientifique en Norvège "Sciences physiques et naturelles" dont le premier numéro paraît au début de 1823. Abel y publiera quelques articles sans importance. Ayant dévoré tous les ouvrages de mathématiques avancées de la bibliothèque, il continue ses recherches. Au printemps 1823, Abel reçoit une bourse de 100 thalers (\*) pour aller au Danemark présenter ses travaux aux mathématiciens danois durant l'été.

Il rencontre Degen, le mathématicien suédois qui lui avait conseillé d'étudier les intégrales elliptiques. Celui-ci est étonné des résultats qu'Abel obtient en considérant l'inverse des fonctions définies par ce type d'intégrales.

Il rencontre aussi lors d'un bal, une jeune danoise, Christine Kemp - surnommée Crelly- qu'il invite à danser. Mais au bout de quelques minutes, ils s'aperçoivent en riant que ni l'un ni l'autre ne sait danser, c'est le début de leur liaison amoureuse.

(\*) 20 thalers permettaient de vivre correctement pendant un mois.

Encouragé par son voyage, il se remet au travail au retour sur son sujet favori : les équations du 5-ième degré. Et, à Noël 1823, il prouve l'impossibilité d'exprimer les solutions d'une telle équation avec des formules ne contenant que des radicaux, mettant fin à un problème sur lequel on butait depuis trois siècles.

Vers la fin de cette année Hansteen et Rasmussen envoient le mémoire au conseil et une demande de bourse pour le voyage, ils demandent pour lui :

- 20 thalers à partir du 1-er juillet 1824 par mois avant son voyage,
- 150 thalers pour s'équiper, 1 mois avant son séjour,
- 50 thalers par mois à l'étranger pour un séjour qui ne devra pas dépasser 18 mois,
- 30 thalers par mois au retour pendant 6 mois ou jusqu'à ce qu'il trouve un emploi.

Le conseil accepte la demande à l'exception du dernier point. Quand celle-ci arrive au Ministère des Finances, celui-ci propose d'octroyer une bourse pour deux ans afin de permettre à Abel de poursuivre l'apprentissage des langues et autres disciplines annexes et qu'il puisse ainsi pleinement profiter de son voyage.

Abel reste donc en 1824 à Oslo où il continue d'étudier et de travailler en mathématiques. En aidant le fils d'un douanier à préparer son examen d'entrée à l'Université, il apprend que des familles du village de Son -situé à une journée de voyage d'Oslo- cherchent une gouvernante. Il écrit à Crelly pour lui proposer de venir et peu de temps après, celle-ci arrive à Son en tant que maîtresse d'école.

A Noël de l'année 1824, Abel passe les vacances chez les parents de son élève ; Niels Henrik et Crelly annoncent alors officiellement leurs fiançailles.

Durant l'été 1825, Niels Henrik commence à préparer son voyage. Il partira avec Boeck, un de ses amis, et deux des amis de celui-ci : Tank et Möller.

### **-3- Le voyage en Europe**

Niels obtient du gouvernement, après les difficultés habituelles, une bourse pour deux ans. Il dispose de six cents thalers par an et doit se rendre à Paris et Göttingen où séjourne Gauss. Avant de partir il confie à Madame Hansteen cinquante thalers pour son frère Peder qu'il craint de voir s'adonner à la boisson.

Il demande aussi à Madame Hansteen d'accueillir sa sœur Élisabeth studieuse et persévérante. Madame Hansteen l'accueille six mois pour lui trouver un excellent foyer chez le Recteur Rosted.

Niels Henrik espère, une fois son voyage terminé, obtenir un poste, devenir un membre estimé de l'Université de son pays natal et épouser sa chère Crelly.

Après lui avoir dit adieu, il part à l'automne avec ses compagnons, essuie une tempête sur le bateau, passe par Copenhague (où il apprend que Degen est mort) et par Hambourg. Mais, au lieu d'aller ensuite vers Paris, il continue vers Berlin pour ne pas être séparé de ses compagnons. Hansteen qui se sentait responsable d'Abel devant le ministère n'apprécie pas du tout quand il l'apprend par ses lettres ; mais ce coup d'audace d'Abel s'avérera une des décisions les plus heureuses qu'il ait prises. En effet, il rencontre à Berlin, Auguste Léopold Crelle, ingénieur passionné de mathématiques. Abel s'exprimant mal en allemand, Crelle croit d'abord avoir affaire à un étudiant souhaitant passer l'examen d'entrée d'une école de commerce de la ville ! Mais quand il lui demande s'il a étudié les mathématiques et qu'Abel lui cite les travaux des plus grands mathématiciens, il est enchanté et une conversation passionnante s'engage.

Quand Abel dit à Crelle qu'il a démontré l'impossibilité de résoudre l'équation générale du cinquième degré, celui-ci ne veut pas le croire. Abel lui remet donc une démonstration, pour laquelle Crelle demande des éclaircissements. Abel s'étonne qu'il n'existe pas de revues de mathématiques en Allemagne, Crelle lui exprime son souhait d'en créer une. Et, peu de temps après, paraît le "Journal de Crelle" qui sera au XIX<sup>ème</sup> siècle la plus grande revue de mathématiques en Allemagne et peut-être même au monde.

Abel reste l'hiver à Berlin et en trois mois, il publie six articles de premier ordre pour le premier volume de la revue.

Niels Henrik a trouvé en Crelle un admirateur chaleureux et un ami plein de sentiments paternels.

Le vieux mathématicien comprend bien la modestie d'Abel, son humanité et, par-dessus tout, sa grande soif d'amitié.

Crelle est, en plus, suffisamment bon mathématicien pour comprendre l'ampleur des idées d'Abel et la profondeur de son génie, même s'il ne suit pas toujours le détail de ses articles.

Abel rencontre aussi des jeunes mathématiciens à Berlin et a des discussions passionnées sur le besoin qui se fait ressentir à l'époque d'une plus grande rigueur dans les démonstrations mathématiques.

Pendant ce temps une autre partie de son destin se joue à Oslo : Rasmussen qui est de plus en plus accaparé par ses fonctions de financier du gouvernement, démissionne de son poste de professeur d'Université, qui se trouve vacant au mois de janvier 1826.

Deux candidats s'imposent naturellement : Holmboe -le professeur d'Abel à l'école Cathédrale et l'assistant de Hansteen- et Abel.

Se pose alors un choix cornélien pour Hansteen, dont le rapport pour le Conseil d'Université sera probablement déterminant : défendre Holmboe, son fidèle et dévoué assistant, professeur pédagogue depuis huit ans à l'école Cathédrale, ou Abel, qu'il a aidé comme un fils, promis à un brillant avenir, mais n'est pas encore reconnu.

Abel est lui-même embarrassé, et pendant quatre mois il n'écrira pas à son ami Holmboe, ne pouvant feindre de ne pas être au courant de la situation.

Hansteen opte finalement pour l'expérience plutôt que pour le talent et la jeunesse, espérant qu'Abel puisse le remplacer par la suite pendant deux ans lorsqu'il entreprendra un voyage d'études en Sibérie.

Lorsqu'il apprend la nomination d'Holmboe, Abel cache son amertume à celui-ci et se résigne à écrire à Crelly pour lui dire que leur mariage est ajourné à une date indéfinie.

Peut-être pour se consoler, au lieu d'aller à Paris, Abel décide de suivre ses compagnons de voyage dans leur excursion. De plus, Abel craint de rencontrer Gauss, réputé inaccessible, à Göttingen et il a peur de voyager seul jusqu'à Paris. Il rejoint tout d'abord Keilhau à Freiberg puis les cinq étudiants norvégiens se retrouvent tous à Dresde en mars. Ils vont ensuite à Prague, puis à Vienne où ils prennent un peu de bon temps pendant un mois, vont au théâtre, puis arrivent en Italie au mois de juin où ils visitent Trieste, Venise, Padoue, Vicence, Vérone et Bolzano. Après ce merveilleux voyage, Abel se décide enfin à rejoindre Paris en compagnie de Tank et Möller. Malgré toutes ses escapades, Hansteen reste compréhensif envers son protégé.

Abel arrive à Paris au mois de juillet. Bien que tout soit fermé et les professeurs absents, il en profite pour améliorer son français et se remettre au travail.

A Paris vivent à l'époque de nombreux grands mathématiciens : Poisson, Fourier, Ampère, Laplace, Legendre, Cauchy et Lacroix. Mais Abel prend tout d'abord contact avec un cercle de jeunes scientifiques qui collaborent au bulletin de Ferrussac, une revue scientifique. Il y rencontrera notamment Raspail et fera la promotion du journal de Crelle.

Il a cependant du mal à rencontrer les mathématiciens célèbres, peu abordables et parfois âgés.

Il aborde néanmoins Legendre et Cauchy. Il juge Legendre très aimable mais par malheur très âgé ; celui-ci pourtant spécialiste des fonctions elliptiques, ne comprendra que bien plus tard l'ampleur des travaux d'Abel.

Quant à Cauchy, Abel admire son œuvre de mathématicien mais juge le personnage "fou, catholique et bigot". Il est vrai que Cauchy, humainement, n'a pas très bonne réputation et s'intéresse peu aux travaux des autres.

Le 30 octobre 1826, Abel assiste à une session de l'Institut lors de laquelle son mémoire devrait être proposé à la publication. Fourier, le secrétaire de l'Académie, en lit le titre : "Mémoire sur une propriété générale d'une classe très étendue des fonctions transcendentes" présenté par M. Abel, Norvégien.

Cauchy et Legendre doivent donner leurs appréciations et c'est Cauchy qui a été désigné pour rédiger un rapport sur le mémoire. Le mémoire étant long, (67 pages), Cauchy ne l'a pas lu.

En attendant -vainement- le rapport, Abel ne cesse de broyer du noir. Il se sent de plus en plus seul à Paris depuis le départ de ses derniers compagnons. Il n'a plus de nouvelles de sa fiancée depuis qu'il lui a écrit que ses projets de mariage étaient reportés à un futur lointain et incertain. Celle-ci, lassée d'attendre Niels Henrik en Norvège, est repartie vivre avec sa sœur, mariée à un médecin au Danemark.

Abel passe désormais ses journées à travailler et a de plus en plus le mal du pays. Le contraste entre la richesse de ses idées et son dénuement matériel s'accroît de jour en jour. Bien qu'il ne fasse qu'un repas par jour, il sait que le peu d'argent qui lui reste ne lui permettra pas de vivre à Paris encore très longtemps. Et, après Noël, il décide de quitter Paris pour Berlin, où il se sentira moins isolé.

Abel a à peine de quoi payer son voyage pour Berlin. Comme d'habitude, il essaie de prendre des voitures de poste qui sont moins chères mais peu confortables en hiver. De Paris à Bruxelles, il voyage seul avec une danseuse qui s'endort dans ses bras, mais "c'est tout", dit-il dans une de ses lettres.

Un peu plus loin, en Allemagne, il prend une diligence qui écrase un enfant de sept ou huit ans et l'abandonne, mort, sur la route.

Après plus d'une semaine de voyage il arrive enfin à Berlin où une bonne nouvelle l'attend : une lettre de Crelly qui lui dit que tout va bien.

Mais Abel est sans le premier sou. Il écrit à ses amis qui lui doivent un peu d'argent et à Holmboe pour qu'il lui en prête un peu. Crelle essaie de l'aider et lui propose encore une fois de s'installer à Berlin mais Abel a trop la nostalgie de son pays. Il gagne de l'argent en jouant aux cartes avec un pharmacien et sa femme qui le laissent peut-être gagner par compassion. Il tombe malade une quinzaine de jours, puis publie au journal de Crelle la première partie de ses "Recherches", un mémoire sur les fonctions elliptiques.

#### -4- Le retour en Norvège

Fin avril, Abel quitte Berlin pour Copenhague afin de rendre visite à son oncle Tuxen et à sa fiancée Crelly.

Puis il repart et le 20 mai 1827, il débarque à Oslo. Après avoir retrouvé ses amis et professeurs, il retourne à Gjerstad dans sa famille, puis suit son oncle Tuxen chez les Smith, une riche famille vivant en châtelains dans une vaste demeure à Froland. Les Smith cherchent une gouvernante pour leurs 11 enfants et Abel écrit à Crelly qui accepte de venir. Abel se préoccupe aussi de trouver de l'argent et après de nombreuses démarches et un premier refus, il obtient finalement le 4 septembre 1827 une bourse de 200 thalers de la part du gouvernement pour l'année. C'est une somme qui permet de bien vivre.

Mais, en vivant avec prodigalité pendant son premier séjour à Berlin et en s'offrant le voyage à Prague, Vienne et en Italie, Abel s'est endetté. A ses dettes, s'ajoutent celles de son frère Peder assez oisif et celles de sa mère qui n'a pas réglé ses impôts.

Le 20 septembre 1827, les 80 premières pages des "Recherches" paraissent dans le journal de Crelle. Isolé à Oslo, Abel est loin de se douter quel retentissement cet article aura dans le milieu des mathématiques. Pour l'instant il s'occupe de ses soucis d'argent, fait un emprunt à la banque et donne des cours particuliers pour survivre. La situation s'arrange provisoirement pour lui en janvier 1828 car Hansteen part enfin faire son expédition scientifique en Sibérie et Abel le remplace, pour un an et demi, à son poste. Mais il totalise presque un an de salaire de dettes, et il doit être très vigilant sur son train de vie.

Pendant ce temps, un autre jeune mathématicien s'intéresse aux fonctions elliptiques. Il s'appelle Carl Jacobi, est né en 1804 et est fils d'un banquier juif. Il a déjà travaillé sur la géométrie différentielle et la théorie des nombres et obtenu un poste à l'Université de Königsberg. Pendant l'été 1827, il s'intéresse aux intégrales elliptiques et il propose un article à une revue allemande (Astronomische Nachrichten) dans laquelle il donne une formule générale sur les intégrales elliptiques mais sans aucune démonstration. Ennuyé, le directeur de la revue, Schumacher, envoie l'article à Gauss qui est gêné car il a, lui-même, travaillé sur les fonctions elliptiques et pense publier un jour ses travaux.

Il répond néanmoins que le résultat de Jacobi est correct et peut se déduire des siens.

Schumacher publie donc les travaux de Jacobi qui paraissent le même mois que l'article d'Abel, "Recherches".

Bessel (un autre grand mathématicien allemand), qui est le protecteur de Jacobi, presse alors Gauss de publier ses propres recherches. Gauss, qui a pris connaissance entre temps de l'article d'Abel, répond que l'article d'Abel contient une bonne partie de ses résultats et que celui-ci étant clair, il ne voit pas l'utilité de publier ses résultats. Il précise, de plus, qu'il n'a parlé de ses propres résultats à personne pour lever tout doute sur les travaux d'Abel.

Le 18 novembre, Jacobi fournit la preuve de la fameuse formule qu'il a annoncée au mois de septembre. Sa démonstration utilise justement des idées contenues dans l'article d'Abel, mais il n'y fait aucune référence.

Cependant la proximité de temps et de lieu (Jacobi avait reçu à Königsberg l'article d'Abel) laisse vraiment planer un doute sur ses inspirations, sans vouloir nier le talent certain de Jacobi.

Legendre prendra au début parti pour Jacobi, qui reconnaîtra par la suite le talent d'Abel.

Quand Abel prend connaissance des articles de Jacobi et y voit ses propres idées, il se dépêche de terminer la deuxième partie des "Recherches" (sur les fonctions elliptiques) et l'envoie aussitôt à Crelle. (Il envoie un autre article le 29 mars 1828 sur les équations, celui-ci ne sera publié qu'un an après, Crelle attendant un complément.)

Enfin, il envoie le 27 mai 1828, un article volumineux intitulé "Solution d'un problème général" à la revue de Schumacher car celui-ci à la réputation d'imprimer vite.

Hansteen est maintenant parti en expédition pour la Sibérie. Après son départ, Abel se sent plus déprimé. Son frère Thomas vient lui rendre visite et repart en lui laissant des factures impayées.

Au mois de juin, Crelly vient passer trois semaines chez Mme Hansteen et Abel interrompt quelques jours son intense activité mathématique. De plus, Crelle lui écrit pour l'informer qu'un ministre du gouvernement prussien veut s'enquérir discrètement de son acceptation éventuelle à devenir "Privat Docent" (professeur stagiaire) à l'Université de Berlin pour un salaire convenable. Abel est enchanté, et il écrit au conseil de l'Université d'Oslo pour lui faire part de l'offre qu'il a reçue. Le conseil lui répond qu'il acceptera de le voir partir, ne pouvant le retenir.

Quelques journaux ont vent de l'affaire et s'en emparent, mais alors qu'il se repose en compagnie de Crelly chez les Smith à Froland, il reçoit une lettre de Crelle datée du 11 juillet 1828 lui annonçant des événements nouveaux risquant de compromettre gravement sa nomination.

Un personnage mystérieux, prioritaire sur lui, a toutes les chances d'être nommé à sa place. Abel ignore de qui il s'agit mais ce personnage mystérieux n'est autre que Gauss pressenti pour diriger l'Institut que le ministre souhaite créer. La lettre de Crelle laisse Abel abattu et désespéré. Il signe la lettre apprenant la nouvelle à Madame Hansteen : "votre ruiné".

Vers le milieu du mois d'août, Abel retourne à Oslo pour préparer ses cours. Il a été malade à plusieurs reprises pendant l'été, pris de fièvre et de quintes de toux. Peu après son arrivée à Oslo, il est terrassé par une attaque plus sérieuse et plus longue. Il n'est même pas capable de faire ses adieux à Mme Hansteen quant celle-ci part -en l'absence de son mari- chez sa sœur à Copenhague.

Pendant ce temps les articles d'Abel commencent à être connus de la communauté mathématique. L'article contenant la deuxième partie des "Recherches" a été publié et Jacobi ne cache pas son admiration.

A Paris, quatre membres éminents de l'Institut de France écrivent une pétition adressée au roi de Suède lui demandant d'user de son influence personnelle pour créer une chaire pour Abel. La pétition est datée du 15 septembre et signée par Legendre, Poisson, Lacroix et Maurice. Abel, encouragé par Crelle qui lui a fait part du jugement favorable de Legendre, lui écrit à l'automne 1828 pour lui présenter un texte donnant une généralisation des intégrales elliptiques, qu'on appelle maintenant intégrales hyperelliptiques. Legendre, ravi d'avoir des nouvelles du brillant rival de Jacobi lui répond le 25 octobre 1828. Il lui exprime son admiration pour ses travaux et lui avoue même, qu'à son âge, il a parfois du mal à suivre et à imaginer comment il a pu vaincre de pareilles difficultés.

Le 25 novembre, Abel lui répond : "*Monsieur, la lettre que vous avez bien voulu m'adresser en date du 25 octobre m'a causé la plus vive joie. Je compte parmi les moments les plus heureux de ma vie celui où j'ai vu mes essais mériter l'attention de l'un des plus grands géomètres de notre siècle (...)*".

Après avoir appris à Madame Hansteen qu'il s'entend mieux avec Crelly et lui avoir parlé de ses éternels problèmes d'argent, il lui écrit :

*"Il faut encore que je vous raconte quelque chose. Dernièrement, j'ai reçu quelques lettres de l'étranger qui m'ont rempli de fierté. Je vais vous en citer quelques passages, parce que vous savez bien que ce n'est pas pour me vanter.*

*Vous vous rappelez peut-être d'un mathématicien du nom de Jacobi, qui m'a devancé et aussi d'un mémoire que j'ai envoyé à Schumacher au printemps.*

*Ce mémoire a eu du succès. Jacobi a dit dans une lettre à Crelle : "Je tiens ce mémoire pour un des plus beaux chefs-d'œuvre des mathématiques". (Après avoir cité les lettres de Crelle et de Legendre, Abel continuait : ) Pour être tout à fait véridique, j'ai cité ce qui précède un peu pour me faire valoir, et, en partie, parce que je crois que cela vous fera plaisir, excellente Madame Hansteen, de voir quel succès j'obtiens, puisque vous prenez tant de part à tout ce qui m'arrive. Mais il ne faut pas le prendre comme une vantardise. Je vous prie de présenter mes compliments les plus sincères à votre aimable famille, qui m'est si chère. Je serais extrêmement heureux d'apprendre que vous vous portez tous bien. Adieu, chère, excellente Madame Hansteen, et croyez-moi si je dis que je suis, avec le dévouement et le respect les plus profonds,  
Votre Abel."*

## -5- Froland

En dépit de ses succès scientifiques, Abel se retrouve bien seul à Oslo tout l'automne. Ses rares moments de réconfort sont ceux qu'il éprouve quand il se rend chez le Recteur Treschov où vit sa sœur Élisabeth. Noël approche et Abel est impatient de retrouver Crelly à Froland. Il est fiévreux et agité et écrit souvent tard dans la nuit. A Froland, il pourrait fêter Noël entouré d'amis. Cependant, en hiver, il faut plusieurs jours de traîneau pour rejoindre Froland. Le docteur déconseille formellement le voyage et ses amis font de même. Mais passer Noël à Froland avec Crelly, dans une maison confortable où l'on prendrait soin de lui est pour Abel une tentation irrésistible. Les Smith l'ont spécialement invité. Le 15 décembre après avoir terminé ses cours à l'Académie militaire et à l'Université, Abel quitte Oslo chaudement emmitoufflé pour arriver à Froland le 19 décembre, par un froid mordant. Il se plaint de crises de toux et de frissons. Il continue néanmoins à travailler de temps en temps et envoie à Crelly un article le 6 janvier 1829. Il fait aussi des projets avec Crelly mais le seul espoir d'avoir désormais un poste fixe repose sur Crelly. Celui-ci l'a compris et redouble d'efforts pour obtenir la nomination d'Abel à Berlin.

Il a désormais le soutien de nombreuses personnalités y compris Gauss et Legendre.

Le 9 janvier Abel doit partir à Oslo reprendre son service. Le traîneau et son conducteur ont été retenus, mais, le matin même il est pris d'une violente quinte de toux et ne peut dissimuler qu'il crache du sang. Crelly et la famille Smith sont très inquiets, ils envoient chercher le médecin de famille, le docteur Möller à Arendal.

L'examen révèle la gravité de l'état du malade : il doit absolument rester alité sous surveillance, avec des sédatifs et des médicaments pour la toux. Après quelques jours de repos, l'état d'Abel s'améliore. Deux ou trois semaines plus tard, il peut même s'asseoir quelques heures par jour. Il reçoit une lettre de Legendre, datée du 25 janvier où celui-ci exprime sa fascination pour le mémoire d'Abel sur les fonctions hyperelliptiques.

Mais l'amélioration de l'état de santé d'Abel s'avère de courte durée et la famille à Froland commence à comprendre que sa maladie durera plus de temps que prévu.

Le médecin envoie à Holmboe un certificat où il informe le conseil de l'état de santé d'Abel :

*“Après une forte congestion pulmonaire et des crachements de sang, il souffre toujours d’une toux sévère chronique et d’une grande faiblesse et a, vraisemblablement, des tubercules cachés dans les poumons et la trachée. Même dans le cas le plus favorable de la maladie, il ne pourra pas, selon toute vraisemblance, reprendre ses fonctions à l’université.”*

Quand Crelle est informé de l’état de santé d’Abel, il comprend que le seul espoir, désormais, de l’améliorer est de lui redonner goût à la vie en lui apprenant sa nomination. Il fait le maximum pour débloquer la situation et, le 8 avril il écrit enfin à Abel :

*“Très cher ami, voici de bonnes nouvelles : le ministère de l’Instruction Publique a pris la décision de vous faire venir à Berlin. Je viens tout juste de l’apprendre par le fonctionnaire qui s’occupe de cette affaire. Il n’y a donc plus aucun doute. (...)*

*Je veux simplement vous faire connaître l’essentiel. Soyez certain que vous êtes dans de bonnes mains. Votre avenir est assuré, vous n’avez plus à vous en inquiéter : vous êtes désormais des nôtres et nous veillerons sur vous. (...)*

*Reprenez courage et ne vous inquiétez plus. Vous allez venir dans un beau pays, sous un meilleur climat, plus près de la communauté scientifique et chez des amis sincères qui vous apprécient et qui vous aiment. Répondez-moi par retour du courrier ; je reste votre fidèle et dévoué, Crelle.”*

Mais, hélas, Abel ne lira jamais la lettre de Crelle.

Oystein Ore décrit les derniers moments d’Abel :

Tout le monde à Froland soignait Abel avec beaucoup de tendresse et d’attention, et surtout Crelly, qui veillait sur lui de tout son amour. Les deux filles aînées de la famille Smith, Marie et Hanna, l’assistaient au chevet d’Abel.

Hanna écrit dans ses lettres les derniers instants d’Abel :

*Durant le mois de Mars il devint évident que l’issue serait fatale. Les crises de toux s’aggravaient et il s’affaiblissait : il ne pouvait rester debout quand on refaisait son lit. Quelquefois il essayait de travailler, mais il n’avait pas la force d’écrire. Parfois il évoquait son passé, sa pauvreté et la gentillesse de Madame Hansteen. Il ne se départait jamais de sa patience et de sa douceur.*

Le chagrin de Crelly est si grand qu’il lui est difficile de feindre en sa présence, aussi Marie et Hanna restent-elles toujours à ses côtés.

Abel souffre d’insomnies, les crises de toux se faisant de plus en plus pénibles. L’idée de rester seul l’angoisse et une infirmière est appelée pour rester à son chevet pendant la nuit.

*La nuit du 5 Avril fut atroce, écrit Hanna. Le matin il semblait plus calme et, dans la matinée, vers onze heures il rendit son dernier soupir. Ma sœur et son fiancé restèrent à ses côtés jusqu'au dernier instant et purent le voir quitter paisiblement le monde des vivants."*

-O-

## Épilogue

En 1830 Abel reçut à titre posthume le grand prix de l'Académie de Paris. Sa mère put même toucher, après bien des difficultés, les 1500 F de prix.

Avant sa mort, Niels Henrik s'était beaucoup inquiété de l'avenir de Crelly. Il avait écrit à son ami Keilhau en le priant de faire tout son possible pour elle. Finalement Keilhau ira même jusqu'à l'épouser et leur couple fut très harmonieux mais n'eut pas d'enfant. Madame Hansteen fut la première à apprendre leurs fiançailles.

Élisabeth, la sœur d'Abel épousa un ingénieur allemand plein d'avenir : Carl Friedrich Bohert. Encore une fois, Madame Hansteen fut complice des fiançailles.

Après la mort de son frère, Peder fut obligé de se débrouiller seul. Il accepta un poste de précepteur comme Niels le lui avait suggéré et finit sa vie comme pasteur en prenant soin de son plus jeune frère Thor Henrik.

Au cours des décennies qui suivirent -et encore de nos jours- les travaux d'Abel furent très largement reconnus. Ainsi, à l'occasion du bicentenaire de sa naissance, et puisqu'il n'existe pas de Prix Nobel de mathématiques à cause d'une rivalité amoureuse entre Nobel et un mathématicien suédois, la Norvège, en partenariat avec la Société Européenne de Mathématiques et la société Internationale de Mathématiques, a décidé de créer un Prix Abel qu'elle décernera tous les ans.

-O-

## Postface

Lorsque l'on essaie de faire un bilan de la vie d'Abel, on est tenté, comme nous l'avons déjà fait dans notre préface, de faire un rapprochement avec la vie de Galois. Rappelons en quelques lignes quelle fut la vie de celui-ci. Évariste Galois est un mathématicien français né à Bourg la Reine en 1811, qui a, par ses idées particulièrement novatrices, contribué au développement de la théorie des groupes et a introduit la notion d'extension algébrique (dite "Galoisienne"), il est mort en duel en 1832 après une vie brève et tumultueuse.

Quand on examine d'un peu plus près les vies d'Abel et Galois, il est troublant d'en remarquer les nombreuses similitudes :

Ils vivent à la même époque (entre la naissance d'Abel et la mort de Galois, il s'est écoulé à peine trente ans), tous deux meurent très jeunes, en ayant chacun perdu leur père encore plus jeune et dans des circonstances assez dramatiques.

Tous les deux ont des mères se désintéressant complètement de leurs recherches et d'ailleurs de leur fils.

Tous deux ne sont pas vraiment reconnus de leur vivant (et même pas du tout pour Galois).

Ils travaillent sur le même sujet (la résolution d'équations, en particulier, de celles du cinquième degré) et rencontrent Cauchy en travers de leur route.

Leurs destins s'entrecroisent d'ailleurs à ce moment puisque c'est le prix remis à titre posthume à Abel en 1830 qui sert de prétexte à Cauchy pour écarter le mémoire de Galois.

Abel et Galois se sont même peut-être rencontrés à Paris par hasard au détour d'une rue ou d'une bibliothèque.

Pourtant, malgré les similitudes de leurs existences, leurs personnalités semblent diamétralement opposées.

Galois est taciturne, orgueilleux et même provocateur alors qu'Abel semble doux, réservé, aimant la vie et les autres.

Que pourront-ils faire pour échapper à leur destin ? Rien.

Tous deux rencontrent de l'aide et des personnes qui leur permettent de laisser une trace dans l'histoire des Mathématiques, mais aucun ne peut échapper à la mort prématurée qui lui est promise.

Les mathématiciens du dix-neuvième siècle ont entrepris -et nos contemporains la continuent- l'exploration des brèches révolutionnaires qu'ils avaient ouvertes.

A nous de tirer les enseignements humains de leurs destins tragiques.

## L'œuvre d'Abel

Il est difficile pour le profane de se faire une idée de l'œuvre d'Abel.

De nombreux théorèmes, notions ou définitions portent son nom :

**Groupes Abéliens, Intégrales Abéliennes, Variétés Abéliennes, théorème d'Abel, convergence au sens d'Abel, transformation d'Abel** etc.

Nous allons tenter de vous donner une idée des grandes énigmes mathématiques auxquelles Abel s'est attaqué et qu'il a éclaircies ou résolues par des méthodes souvent très personnelles et innovantes.

### Les équations algébriques

Le problème de la résolution des équations polynomiales du type :

$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = 0$  où, rappelons-le, on recherche les éléments  $x_i$  qui la vérifient, a fait couler beaucoup d'encre dans le monde des mathématiques. Au temps d'Abel, on sait exprimer les solutions réelles des équations de degré inférieur ou égal à 4 à l'aide de "radicaux" : racines carrées, cubiques etc. Mais toutes les tentatives pour exprimer les solutions d'une équation de degré 5 étaient restées vaines sauf dans les cas simples. Devant leur échec à trouver une formule de résolution par radicaux, les mathématiciens du dix-huitième siècle en venaient à se demander si, en fait, il n'en existait pas.

C'est Abel qui prouva le premier qu'il n'existe pas de formule générale de résolution des équations de degré cinq ne comportant que des radicaux.

### Les fonctions elliptiques

Les mathématiciens du XVIII<sup>ème</sup> siècle, dans leur recherche de méthodes pour calculer des longueurs d'arcs de coniques, avaient été amenés à étudier des intégrales dites "transcendantes" du type :

$$\int \sqrt{\frac{1-ax^2}{1-x^2}} dx \quad \text{et} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} \quad \text{où } a \text{ vérifie : } 0 < a < 1.$$

Celles-ci sont non exprimables par des fonctions "classiques" de l'époque :  $e^x$ ,  $\log x$ ,  $\sin x$ , etc.

Abel considérera ces intégrales comme des fonctions dont il étudiera les fonctions réciproques. Il démontrera de nombreuses propriétés contribuant ainsi à faire avancer la théorie des fonctions elliptiques.

Lors de la présentation de son mémoire à l'Académie en 1824 (et paru en 1841 !) il utilisera des techniques innovantes laissant présager celles de la Géométrie Algébrique. Il obtiendra des résultats sur la convergence des séries ("critère d'Abel").

Pour de plus amples détails sur l'œuvre d'Abel et de ses contemporains on pourra consulter le tome II de l'ouvrage de Jean Dieudonné : Abrégé d'histoire des Mathématiques (voir la bibliographie).

## Bibliographie

Le lecteur intéressé trouvera les détails de la vie d'Abel dans le livre d'Oystein Ore dont nous nous sommes largement inspirés :

“Abel, un mathématicien romantique” paru chez Belin dans la collection “Un savant, une époque” en 1989.

Une courte mais intéressante biographie ainsi qu'un résumé des travaux d'Abel se trouve dans le livre de Bertrand Hauchecorne et Daniel Surreau :

“Des mathématiciens de A à Z” paru chez Ellipses en 1996.

Pour de plus amples informations sur les travaux d'Abel et de ses contemporains, on pourra consulter le tome II de l'ouvrage de Jean Dieudonné :

“Abrégé d'histoire des mathématiques” paru en 1978 chez Hermann.

Le site internet :

<http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Abel.html>  
propose, en anglais, un long et intéressant article assorti d'un glossaire, d'anecdotes (il y a un cratère nommé “Abel” sur la Lune !) et de liens vers des références mathématiques.

AUTEUR : Gilles Damamme, Maître de Conférences à l'Université de Caen,  
Directeur de l'I.R.E.M. de Basse-Normandie.

Collaboration de Danielle Salles, Maître de conférences honoraire à  
l'Université de Caen et Anne Marie Bock, Professeur au lycée Fresnel de Caen.

TITRE : Niels Henrik Abel 1802-1829.

ÉDITEUR : I.R.E.M. de Basse-Normandie à Caen.

DATE : novembre 2002.

PUBLIC CONCERNÉ : tous publics.

RÉSUMÉ : cet ouvrage présente une biographie de Niels Henrik Abel à  
l'occasion du bicentenaire de sa naissance ainsi que des références  
biographiques et mathématiques.

MOTS CLÉS : Histoire des mathématiques, bicentenaire, Abel, Cauchy,  
Galois, intégrales elliptiques, intégrales Abéliennes, équations du 5-ième degré,  
critère d'Abel.

FORMAT : A4, 24 pages.