

IREM d'Aquitaine
40, rue Lamartine 33400 Talence

Groupe "*Didactique des Mathématiques au Collège*"

**Annick Appriou, Colette Baheux, Annie Berté, Catherine Desnavres,
Martine Dayma, Pierre Faure, Jean Lafourcade, Annie Séné, Dominique Woilez**

« La Géométrie en sixième »

Cet ouvrage présente une suite de situations expérimentées dans les classes depuis plusieurs années pour enseigner la Géométrie en sixième.

La volonté des auteurs a été de construire une progression qui parte de problèmes que peuvent s'approprier les élèves en respectant au mieux le libellé du programme.

Les objectifs sont de commencer à apprendre aux élèves de sixième à :

- comprendre la nature des objets géométriques
- faire des liens entre les différentes notions étudiées
- voir une même notion sous plusieurs points de vue et choisir le plus efficace suivant le problème posé
- débiter l'apprentissage du raisonnement en Géométrie.

Public concerné :

- Professeurs de Collèges et de Lycées
- Etudiants préparant le CAPES externe ou interne de mathématiques
- Formateurs de professeurs

Mots clés :

situation d'enseignement.

Edition :

1^{er} semestre 1999

ISBN: 978-2-85633-016-6
EAN : 9782856330166

Université Bordeaux 1

Institut de Recherche Pour l'Enseignement
des Mathématiques d'Aquitaine

40, rue Lamartine, 33400 Talence

La Géométrie en sixième

*Groupe de didactique des mathématiques dans
l'enseignement secondaire*

Ce document résulte du travail de toute une équipe enseignant sur le terrain à différents niveaux et formant à l'IREM d'Aquitaine un groupe nommé "Didactique des mathématiques dans le secondaire". Certains d'entre nous, tout en enseignant, sont en même temps engagés dans une recherche en didactique des mathématiques et rattachés au LADIST (Laboratoire de didactique des sciences et des techniques) de l'Université de Bordeaux 1. Nous avons aussi bénéficié des réflexions d'un autre groupe de l'IREM d'Aquitaine nommé "Langage et mathématique" aux travaux duquel certains d'entre nous participent également. Notre réflexion dans ces groupes enrichit les stages de formation continue que nous animons dans le cadre du P.A.F, et, en partie, pour ceux parmi nous qui s'y consacrent, notre travail de formation à l'IUFM d'Aquitaine

Ce travail n'aurait pu se faire sans l'appui du directeur de l'IREM d'Aquitaine, Jean ESTERLE, qui a permis à nos deux groupes de réflexion d'exister dans cet IREM et d'y travailler pendant plusieurs années.

Groupe "Didactique des mathématiques dans le secondaire":

Annick APPRIOU	(Collège Léonard Lenoir- Bordeaux)
Colette BAHEUX	(Collège Emile Combes- Bordeaux)
Annie BERTE -	(IUFM d'Aquitaine - LADIST)
Cathy DESNAVRES	(Collège de Lesparre)
Martine DAYMA	(Collège de Lesparre)
Pierre FAURE	(Collège Cheverus- Bordeaux)
Jean LAFOURCADE	(Collège du Grand Parc- Bordeaux)
Annie SENE	(Collège et Lycée de Marmande)
Dominique WOILLEZ	(Collège Emile Combes- Bordeaux- LADIST)

Annie Berté et Cathy Desnavres, responsables tour à tour du groupe, ont assuré la rédaction avec l'aide de Jean Lafourcade, Martine Dayma et Annie Séné. .

INTRODUCTION

Nous présentons dans ce document une suite ordonnée de situations pour enseigner la géométrie au collège en 6^{ème} sans toutefois fournir en détail l'ensemble de tout le cours jour après jour car ce serait trop lourd. Le professeur pourra intercaler d'autres situations de son choix. Nous donnons simplement une trame solide formée de situations qui nous semblent décisives. Dans un premier temps nous nous limitons à la géométrie pour que notre publication ne soit pas trop volumineuse en signalant seulement les "ponts" avec l'algèbre. Pourquoi proposer une progression de plus alors que tous les manuels en proposent une ne serait-ce qu'en adoptant une numérotation des chapitres? Pourquoi employer les mots "situations" et exercices, au lieu du mot "activités" en usage actuellement?

Nous avons fait ce choix car la question de la progression à adopter est la première que se posent les professeurs débutants dans un niveau donné puisque les programmes laissent une certaine liberté aux enseignants. Ce qui a fondé la décision des auteurs d'un manuel relativement à l'ordre des chapitres apparaît rarement. Une interrogation sur l'ordre est donc inévitable et il n'est pas étonnant qu'elle revienne de façon insistante car souvent plane un doute sur la légitimité de l'ordre adopté. Or le professeur doit vite décider par quoi il commence, et avant de se trouver devant les élèves savoir dans les grandes lignes comment il va continuer au moins avec quelques mois d'avance. D'après Yves Chevallard, chercheur en didactique des mathématiques, c'est, entre autre, en choisissant la progression que le maître affirme sa place de maître par rapport aux élèves¹, parce que c'est lui qui maîtrise l'avenir pour les contenus. Il est important pour l'élève de se dire que le maître sait, et n'erre pas dans le programme. L'enseignant le sent et, dès qu'il a adopté une progression, en légitimant son choix par des arguments implicites ou explicites, il n'en change pas sans une modification de programme, sauf s'il a de nouveaux arguments sérieux. C'est pour cela que nous donnons les résultats de nos expérimentations qui justifient nos décisions.

NOUS VOULONS ORGANISER UNE PROGRESSION EN PARTANT NON PAS DES PROGRAMMES MAIS DES CONCEPTIONS DES ELEVES ET D'UNE PROBLEMATIQUE A LEUR PORTEE.

Ceci ne veut pas dire que nous ne tenons pas compte du programme de la classe, évidemment! Mais nous avons constaté que les programmes, et surtout l'interprétation qui en est faite à travers les manuels ou les pratiques courantes, ont souvent le défaut soit de sous-estimer les possibilités de nos élèves soit, au contraire, de les surestimer. Par moment on n'aborde pas telle notion, on évite tel raisonnement, parce qu'on pense qu'ils ne peuvent pas y accéder, et notre expérience prouve que c'est faux. Ce n'est pas grave si cela ne leur manque pas plus tard; mais très souvent cela leur manque effectivement, et seuls ceux qui bénéficieront d'une aide extérieure à l'école auront une chance de pouvoir compenser. A d'autres moments, on va trop vite, on utilise un langage inutilement compliqué, on perd du temps sur des détails trop techniques au lieu de traiter les obstacles réels. En effet la tête de l'élève n'est pas un vase vide dans lequel le professeur

¹ Y. Chevallard appelle cela la "topogénèse" dans "*La transposition didactique*" - Editions de la Pensée sauvage- Grenoble - 1990

pourrait verser le savoir. L'élève a un savoir antérieur qu'il a utilisé avec succès pendant plusieurs années. Presque toujours le savoir nouveau va nécessiter une restructuration de ce savoir ancien qui résiste aux changements. Il résistera d'autant mieux qu'aucune situation n'aura permis au savoir nouveau de se construire en fonctionnant pour résoudre un problème. D'où la nécessité pour le maître d'organiser en classe des situations spécifiques ou de poser des questions ciblées qui permettent à tel ou tel savoir de vivre. Pour cela, contrairement à ce qu'on met en général sous le mot "progression", nous ne donnons pas une simple liste de chapitres.

NOUS DONNONS UNE SUITE DE SITUATIONS QUE NOUS AVONS NOUS-MEME EXPERIMENTEES EN CLASSE

Nous utilisons les mots "situation" plus précis que le mot "activité" car il ne s'agit pas seulement de rendre l'élève actif, mais surtout de lui permettre de **donner du sens** à ce qu'il apprend en le mettant en situation pour:

- **se poser des questions, entrer dans une problématique**
- **établir des liens entre les différentes notions**
- **utiliser différents "points de vue" à propos d'une même notion.**
- **comprendre la fonction des signes, et plus spécialement en géométrie le statut de la figure**

La primauté donnée à une problématique pour l'élève légitime l'ordre que nous avons adopté. Ceci nous a conduit à quelques variations par rapport aux programmes qui nous ont paru tout à fait négociables. Elles sont signalées dans l'annonce de la progression. L'élève devra restructurer continuellement ce qu'il sait et il doit faire des liens non seulement entre les connaissances de géométrie à l'échelle d'une année scolaire mais de plusieurs années. Il doit aussi faire des liens entre algèbre et géométrie. D'autre part, savoir changer de point de vue selon le problème est fondamental. Par exemple pour placer un point équidistant des extrémités d'un segment donné, ou pour tracer un cercle passant par deux points donnés, l'objet de savoir est dans les deux cas la médiatrice du segment, mais ce n'est pas le même "point de vue".

Dès la 6^{ème} nous affrontons la difficulté d'apprendre à prouver en géométrie qui commence par comprendre le statut de la figure. Les objets mathématiques sont des concepts, par exemple le concept de cercle, et les dessins sont des traces matérielles, par exemple un rond dessiné avec ou sans compas, qui n'est en rien le concept de cercle, "invisible pour les yeux". Mais si on est dans le contexte de la géométrie, la figure "cercle" elle, n'est ni un rond ni le concept de cercle parce qu'elle est en même temps les deux à la fois. La figure est un signe qui dans la théorie remplace le concept pour que nous puissions en parler, agir sur lui, le faire fonctionner. Comprendre cette subtilité est un des gros enjeux de l'enseignement de la géométrie. Les professeurs d'université ou les étudiants en mathématiques peuvent éviter d'y réfléchir longuement car s'ils sont arrivés à une pratique des mathématiques telle qu'ils ont bien intériorisé l'enjeu d'une démonstration. Ils savent que faire un dessin peut les aider mais ne peut servir de preuve. Mais pour un néophyte l'observation du dessin est un piège redoutable qui condamne beaucoup de nos élèves à rester à jamais extérieur au jeu de la géométrie. Le problème est traité en 6^{ème} dès les premiers chapitres. Un professeur au delà de la 6^{ème} pourra reprendre ces situations si nécessaire.

Pour répondre aux questions des élèves, poussés par leurs idées souvent surprenantes, nous avons été obligés d'inventer des situations qui amènent certaines preuves souvent très simples mais que l'on ne trouve pas dans les manuels et qui permettent de faire des liens, de comprendre.

Pour construire cette progression, nous avons gardé en tête que l'objectif essentiel est d'intéresser les élèves. Or pour cela il y a deux directions:

- Ils sont intéressés s'ils comprennent, c'est à dire donnent du sens aux concepts et aux symbolisme en établissant des relations. C'est une motivation interne aux mathématiques

- Ils sont intéressés s'ils se sentent concernés, c'est à dire s'ils utilisent la mathématique pour percevoir autrement une "réalité" qui les touche, cette perception différente étant rendue possible par des modèles qui la rendent intelligible. De même qu'on entend autrement le chant des oiseaux quand on a fait de la musique, on voit autrement les ombres quand on les perçoit à travers les mathématiques, ce qui n'est évidemment pas la seule façon de les voir! C'est une motivation externe aux mathématiques.

Il est bien difficile pour un enseignant d'adopter une progression s'il ne l'a pas "vécue" lui-même d'autant plus que notre liste de situations n'est pas exhaustive. Si le professeur qui lit notre brochure suit depuis plusieurs années une progression différente, il ne va pas adopter celle-ci du jour au lendemain. Mais il pourra du moins "piquer" quelques situations qu'il "sent bien" pour ses classes. Cela pourra également intéresser un professeur qui enseigne en 6^{ème} pour la première fois, et qui se demande comment relier ce niveau aux autres niveaux où il a déjà enseigné. Ces situations pourront également rendre des services à des professeurs de 5^{ème} ou 4^{ème} car il existe des passages obligés, des obstacles à franchir, qui se manifestent quel que soit l'âge de l'élève par des erreurs récurrentes. Ce travail donnera alors des idées éventuelles au professeur pour reprendre certaines questions d'une autre façon. Il permettra à celui qui le désire d'organiser la classe de sorte que les élèves puissent exprimer leurs conceptions, discuter de leurs erreurs et de leurs méthodes, confronter leurs idées. Il pourra ainsi les aider et les observer pour mieux comprendre leurs difficultés, sans donner ni les réponses aux questions que les élèves trouveront en grande partie eux-mêmes, ni trop vite un vocabulaire et des techniques dont ils ne verraient pas d'emblée la nécessité. Pour construire nos situations nous nous sommes appuyés sur nos connaissances en didactique des mathématiques et en pédagogie et sur les observations de nombreuses classes pendant plusieurs années. Nous avons presque fini une progression en géométrie pour le cycle suivant du collège, c'est à dire l'ensemble des deux classes de 5^{ème} et 4^{ème}. Nous espérons pouvoir en faire la publication sous le titre "Géométrie en 5^{ème} et 4^{ème}" qui sera la suite de ce document, exactement dans le même esprit. A la fin de ce document nous explicitons nos références théoriques.

GUIDE PRATIQUE D'UTILISATION

1- Au début du document figure la liste des "chapitres" pour le niveau 6ème et l'exposé des grandes options choisies.

2- Chaque chapitre débute par la liste des savoirs visés, les conceptions des élèves à partir desquelles nous travaillons et que nous voulons faire évoluer et les objectifs des situations compte-tenu de ces conceptions.

3- Dans l'exposé des situations ce qui est destiné à être dit à l'élève, ce qui s'appelle généralement la consigne, est encadré.

EXEMPLE:

Situation 1: Notion de longueur

Voici de nombreux segments de longueurs différentes ou égales. Sans mesurer, les classer suivant leur longueur.

4- Les indications pour chaque situation puis les observations éventuelles réservées au professeur sont écrites en italiques pour les distinguer de ce qui est dit aux élèves.

EXEMPLE:

Observation: Dans le document que vous trouvez sur la page suivante nous avons choisi certaines longueurs assez proches bien que suffisamment discernables (à 3mm près) . Laisser les élèves libres de choisir le matériel qu'ils veulent (report avec bande de papier, compas ou calque).

5- Il est évident que dans les textes du n°1 (grandes options choisies), du n°2 (objectifs et conceptions des élèves) et du n°4 (indications et observations) le langage employé est un langage "professeur" et les mots utilisés ne sont pas, la plupart du temps, ceux qu'on utilisera avec les élèves. Par exemple nous distinguons dans un commentaire "l'angle" qui est une classe d'équivalence et "le secteur angulaire" qui est une partie du plan. Les mots "classe d'équivalence" et "secteur angulaire" ne sont pas employés avec les élèves. Il s'agit dans ce commentaire d'exposer le problème pour le professeur, et les options que nous avons choisies.

6-Un bilan fait en commun par la classe après chaque situation permet une trace écrite sur le cahier de l'élève. Il est lui aussi encadré mais une autre typographie permet de le repérer. Ces textes là sont écrits dans un langage que nous avons considéré comme adapté aux élèves, de sorte que cette phrase ou une phrase voisine puisse être énoncée par eux à la fin de la séquence.

EXEMPLE:

Bilan: 1- Le compas permet de transporter des longueurs et de les comparer.
2- segment $a \neq$ segment b mais longueur segment $a =$ longueur segment b

PROGRESSION EN GEOMETRIE POUR LA SIXIEME

- 1- Segment, longueurs, mesures des longueurs
- 2- Cercle comme ensemble de points
- 3- Médiatrice et droite, triangle isocèle
- 4- Droites parallèles et perpendiculaires
- 5- Périmètres et aires- Aire du rectangle
- 6- Cube et parallélépipède: patron et volume
- 7- Angles et mesure des angles
- 8- Symétrie orthogonale par rapport à une droite
- 9- Initiation aux fonctions à partir de l'aire du rectangle
- 10- Lecture de programmes de construction, dessin à main levée

Remarques générales relatives à cette progression:

- La difficulté pour commencer la géométrie est de donner à la ligne (cercle et droite) le sens d'ensemble de points. Qu'est-ce qu'un point pour un élève entrant en 6^{ème} ? Nous voulons très vite préciser le statut de la figure géométrique comme signe mathématique (voir l'introduction générale). Il nous a paru impossible de commencer par la droite qui présente en plus la difficulté d'être infinie "aux deux bouts". Nous avons commencé par la notion de segment d'abord parce que le segment est déjà vu à l'école primaire, ensuite parce que cela nous a permis de relier l'infinité des points d'un segment et l'infinité des nombres d'un intervalle (décimaux ou fractions simples). Puis viennent le cercle et la médiatrice qui peuvent se construire comme des ensembles de points ayant une propriété caractéristique. La médiatrice sert ainsi à introduire la droite.

- Nous distinguons le segment qui est un ensemble de points de sa mesure qui est un nombre. La longueur est la classe d'équivalence. Nous ne distinguons pas "longueur" et "mesure de cette longueur" dans le vocabulaire, bien que la distinction soit faite dans le savoir-faire: on peut comparer des longueurs sans mesurer.

- Nous introduisons la multiplication des décimaux en liaison avec l'aire du rectangle, car à l'école élémentaire la technique de la multiplication des entiers vient à partir du dénombrement d'objets disposés selon une grille rectangulaire, objets qui deviennent ensuite des cases d'un quadrillage, ce qui fait naturellement le lien avec l'aire du rectangle de dimensions entières. Il s'agit de prolonger cela. Nous n'abordons pas le périmètre du cercle. Nous le traiterons en 5^{ème}.

- Nous considérons l'angle comme une classe d'équivalence et non comme une portion de plan dite "secteur angulaire". Ce mot n'est pas introduit. C'est pour cela que nous parlons d'angles égaux. Nous distinguons l'angle (la classe) et sa mesure (un nombre). Deux angles égaux ont la même mesure. La donnée d'une paire de demi-droites de même origine ne suffit pas à déterminer un angle car une seule paire définit deux angles, un angle rentrant et un angle saillant, d'où l'introduction de la distinction entre saillant et rentrant. Nous n'orientons pas les angles de façon explicite, bien que dans le savoir-faire l'idée en soit donnée en tournant autour d'un point fixe.

- Le point 10 concernant les programmes de construction et le dessin à main levée peut se traiter peu à peu tout au cours de l'année. Nous ne l'abordons qu'à travers deux exemples. Le professeur en trouvera d'autres dans différents manuels ou publications.

1-Segments, longueurs, mesures

Savoirs visés:

- Un segment est composé de points, égalité de segments, milieu d'un segment
- Longueurs égales, mesures de longueur, somme de mesures, périmètre

Conceptions erronées repérées chez les élèves:

- 1- Le segment est une notion vue dès l'école élémentaire et à propos de laquelle les élèves ont élaboré certaines conceptions. Nous avons repéré les suivantes:
 - certains assimilent droite et segment à des traits matériels
 - certains confondent "droite" et "segment"
 - certains pensent que le segment n'a que deux points: ses extrémités
- 2- Un périmètre est un objet spécifique qui ne peut se calculer qu'en connaissant la bonne formule.

Objectifs:

- "Désamalgamer" l'objet segment de sa représentation
- Distinguer le segment de la mesure de sa longueur
- Donner du sens au mot "périmètre"

Matériel à prévoir pour l'ensemble des situations ci-dessous:

Papier blanc, compas, calque (ou du moins papier assez fin de sorte qu'en pliant on puisse voir par transparence)

Situation 1: Notion de longueur

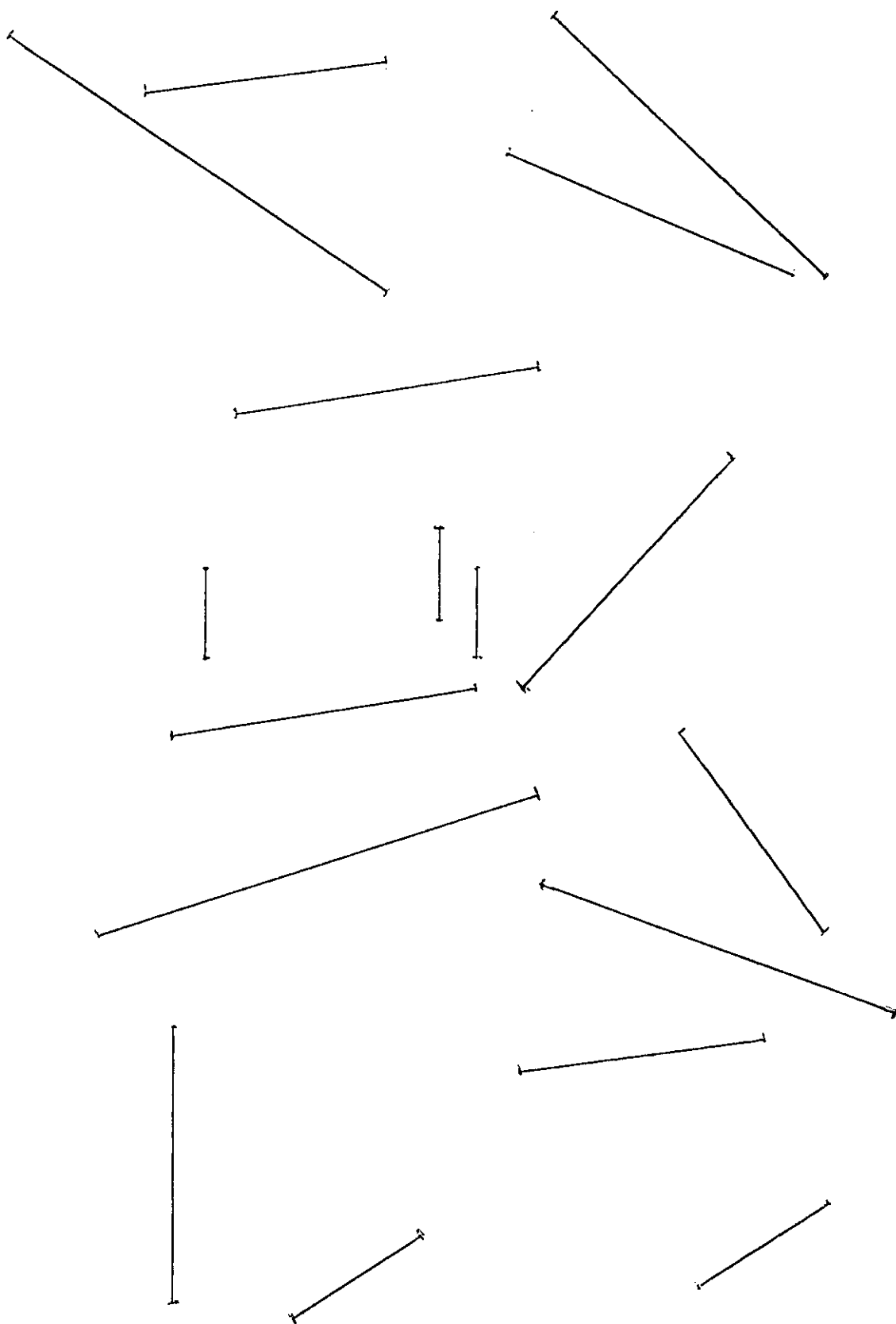
Voici de nombreux segments de longueurs différentes ou égales. Sans mesurer, les classer suivant leur longueur.

Observation: Dans le document que vous trouvez sur la page suivante nous avons choisi certaines longueurs assez proches bien que suffisamment discernables (à 3mm près) . Laisser les élèves libres de choisir le matériel qu'ils veulent (report avec bande de papier, compas ou calque). Il faut coder les segments pour les classer. Souvent les élèves donnent des numéros aux segments 1, 2, 3,...ce qui est bien mais les amène à écrire $1 = 3$, notation dont ils voient l'inconvénient. Certains choisissent des lettres a, b, c....Ils écrivent alors $a = c$, notation qui évite cet inconvénient. On s'achemine peu à peu vers l'usage des lettres en géométrie.

Bilan: 1- Le compas permet de transporter des longueurs et de les comparer.
 2- segment a $\neq$ segment b mais longueur segment a = longueur segment b

Situation 2: Notation d'un segment

Voici quatre points A,B,C,D alignés. Combien voyez-vous de segments sur cette figure?



Observation: Pour énumérer les 12 segments, une notation par une seule lettre a, b.....pour un segment conduit à des erreurs. On verra l'avantage de la notation avec les deux extrémités.

Situation 3: Milieu d'un segment

1- Représenter un segment sur une feuille. Sans utiliser une règle graduée, placer un point M appartenant au segment, de manière à déterminer deux segments de même longueur.

Observation: La méthode minimale attendue est le pliage. Pour cela donner une petite feuille volante qu'on pourra plier. Après avoir repassé au crayon sur le pli, la coller sur le cahier. Certains élèves ne pensent pas à plier et placent le point à vue. D'autres ont des méthodes très élaborées: certains tracent la médiatrice avec le compas car ils l'ont vue à l'école élémentaire, d'autres font un triangle isocèle avec le compas et la hauteur avec l'équerre.

2- Tracer un segment sur une feuille 1. Tracer sur une feuille 2 par la méthode de votre choix mais sans règle graduée un segment de longueur moitié. Transmettre la feuille 2 à votre voisin qui doit reconstituer sur cette feuille 2 un segment qui puisse se superposer au premier segment que vous avez tracé sur la feuille 1.

Observation: Cet exercice consolide l'apprentissage précédent. Pour la première partie, il suffit de plier la première feuille en faisant coïncider les deux extrémités du segment puis de reporter avec le compas la longueur moitié. La deuxième partie présente la difficulté pour les élèves de prolonger un segment donné, ici par un autre de longueur égale. Il y a des blocages pour prolonger un trait, joindre des points, plus généralement modifier une figure qui pour les élèves est un objet donné en soi et non un outil de travail. Ils demandent: "est-ce que j'ai droit de tracer cela?" Cet interdit qu'ils s'imposent, souvent implicitement, doit être levé.

3- a- Sur papier blanc, tracer deux segments AB et CD sachant que $AB = 6$ cm et $CD = 9$ cm et que ces deux segments ont le même milieu
b- Tracer trois segments ayant pour milieu le même point I donné

Observation: Arrivé au parallélogramme, le professeur peut ne pas se rendre compte que l'expression: "deux segments de même milieu" pose problème aux élèves. Or pour la question a sur 50 élèves nous avons obtenu les résultats suivants:

figure 1: figure attendue 27%

figure 2: segments portés par la même droite : 22%

figure 3: segments perpendiculaires: 14%

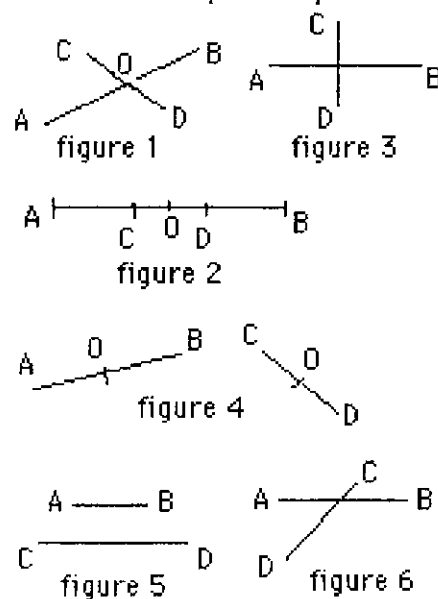
Dans ces deux dernier cas, la réponse est acceptable mais les élèves qui ne peuvent imaginer le milieu commun que dans ces cas particuliers, auront des difficultés par la suite. La question b, fait évoluer la conception des segments perpendiculaires.

figure 4: deux points O à deux endroits différents: 27%

figure 5: les segments ont la même médiatrice mais des milieux différents: 6%

figure 6: les segments ont un point commun qui est le milieu de l'un et pas de l'autre: 4%

Ne pas utiliser de papier quadrillé, sinon la réponse 3



beaucoup plus fréquente car les élèves vont privilégier les directions du quadrillage.

La question b posée un mois après dans les mêmes classes en fixant les longueurs des segments: 6cm, 8cm, 4cm a donné 9 cas de figure et un nombre non négligeable de non réponses (8%)

figure 1: exacte, attendue (68%)

figure 2: exacte et des segments portés par la même droite (14%)

figure 3: segments ayant même médiatrice (2%)

figure 4: deux segments ayant le même milieu et le troisième passant par ce point sans l'avoir pour milieu (2%)

figure 5: 3 segments ayant un point commun qui n'est le milieu d'aucun des segments. (2%)

Quelques élèves ont fait des figures inattendues : segments portés par la même droite et ayant une extrémité commune, de sorte qu'on obtienne un genre de graduation (4, 6, 8), segments formant un triangle. il s'agit de phénomène de contrat didactique: les élèves ne lisent pas le texte et se rappellent une demande précédente du professeur

Bilan: 1- On ne peut nommer deux points différents par la même lettre

2-On appelle milieu d'un segment AB un point M qui satisfait à deux conditions

- il appartient au segment

- les longueurs MA et MB sont égales ($MA = MB$)

Observations: 1- Pour de jeunes élèves nous avons bien séparé dans le bilan les deux propriétés du milieu. Nous pensons qu'il vaut mieux deux phrases simples qu'une seule trop synthétique, même si l'expression est moins élégante. Le mot "appartient à" doit être appris.

2- Nous écrirons "on appelle" chaque fois qu'il s'agit d'une définition

3- Ce bilan est l'occasion d'introduire la notation des points et celle d'un segment en notant ses extrémités si ce n'est pas fait plus tôt.

Situation 3: Un segment est composé de points

Représenter un segment AB. Représenter un autre segment

-sans point commun avec le premier,

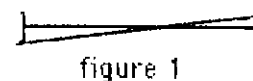
-avec une extrémité commune,

-avec un point commun autre qu'une extrémité

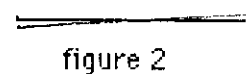
-avec plus d'un point commun (ce qui impose les extrémités alignées)

Observations: 1- Certains élèves ont interprété le mot "point commun" par "propriété commune, ressemblance" comme dans la phrase: "j'ai un point commun avec toi", de sorte qu'ils ont fait par exemple des segments portés par des parallèles pour avoir des segments qui avaient "un point commun", qui était implicitement cette direction commune. La discussion sur leur travaux a permis de se mettre d'accord sur le sens. Ne pas imaginer qu'on aurait évité le problème avec un changement de vocabulaire en employant le mot "intersection" qui nous paraît plus difficile. On peut parler de segments "qui ne se coupent pas" ou qui "se coupent en un point" mais de toutes façons il est bon que le problème sur le mot "point" se révèle car si on n'en parle pas il restera souterrain et se révélera plus tard.

2-Pour dessiner des segments ayant trois points communs certains ont dessiné la figure 1 car les petits traits verticaux faisaient pour eux partie du segment.

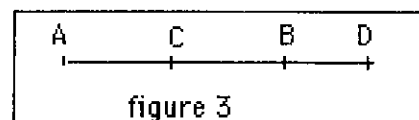


D'autres ont dessiné des segments faisant un très petit angle comme dans la figure 2 de sorte qu'en jouant sur l'épaisseur du trait, on pouvait "voir" beaucoup de points communs.



La classe a dû poser comme convention que dans ce cas il n'y avait qu'un point commun.

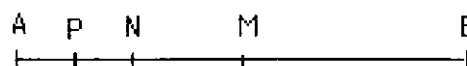
D'autres ont dit que deux segments placés comme dans la figure 3 n'ont que deux points communs. Pour eux, les seuls points d'un segment sont ses extrémités



3- Introduire le milieu d'un segment est utile car

- Les élèves peuvent en parler comme d'un point M autre que les extrémités. Nommer ce point, le distinguer par une lettre et une propriété précise lui donne une certaine existence. On peut recommencer avec le milieu N du segment AM puis le milieu du segment AN et ainsi de suite pour donner l'idée que sur un segment il y a "beaucoup" de points.

Le dessin n'est qu'une représentation.



- Le professeur peut dès à présent faire le lien avec les nombres: je prends deux nombres 0 et 1. Il y a un nombre "au milieu": 0,5. Il y a un nombre au milieu entre 0 et 0,5 puis un autre au milieu entre 0 et 0,25..etc . Les élèves font la remarque que matériellement on ne peut pas le faire longtemps avec les points parce que le dessin devient une tache alors qu'il n'y a aucun obstacle avec les nombres. Parallèlement, jeu du nombre caché: le professeur choisit un nombre décimal, l'écrit sur un papier caché aux élèves groupés par équipe qui posent à tour de rôle des questions au professeur pour encadrer le nombre de façon de plus en plus précise.

Exercices :

1- Dessiner un segment AB et un segment AC tels que $AB = AC$. (erreurs possibles: deux points A sur la figure. Faire distinguer les différentes possibilités: $B = C$, A milieu de $[BC]$,.....)

2- Dessiner plusieurs segments de même milieu et ayant aussi un autre point commun différent du milieu (les segments sont nécessairement de longueurs différentes et portés sur la même droite)

3- Soit un segment AB , son milieu M . Dessiner un autre segment CD de même longueur que le segment AM ayant un point commun avec le segment AM . Combien y a-t-il de segments sur cette figure? Les nommer. Combien de longueurs différentes? (différents cas, selon que le point commun est A , M , le milieu du segment AM , du segment CD , d'aucun des deux)

Bilan: On marque les segments de même longueur du même symbole. C'est utile pour les reconnaître. On repère des points sur un segment par un petit trait.

Situation 4: Mesurer la longueur d'un segment, la distance entre deux points.

Par groupe de 2: mesurer la longueur de la table avec la bande de papier qui vous est donnée.

Observation: Le professeur donnera des bandes différentes selon les groupes d'élèves, cependant il donnera la même unité pour deux groupes d'élèves éloignés qui pourront comparer leurs résultats, alors que c'est impossible quand les unités ont différentes. Les élèves seront amenés à reporter la bande puis à la couper. Ils pourront obtenir pour résultat: $3 + 1/2 + 1/4$. Avec une table assez grande s'il y en a une dans la classe et des bandes assez grandes pour pouvoir les couper en dix ils auront peut-être $3 + 7/10$.

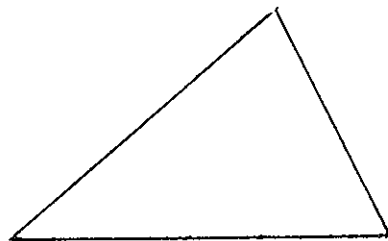
Bilan: La mesure est un nombre qui dépend de l'unité. Sa valeur exacte est impossible à déterminer par la manipulation pour cause de précision infiniment améliorable. Si nécessaire, on décide de convenir de la mesure d'un segment sachant que le dessin est une représentation approchée.

Observation: La rédaction définitive de ce bilan est à voir avec les élèves

Situation 5: Notion de périmètre.

Pour ces trois questions les élèves ont seulement à leur disposition un compas et/ou une bande de papier pour reporter les longueurs

1- Donner aux élèves un triangle dessiné et un segment de mesure 12 cm (document joint) . Avec pour seul instrument le compas, trouver si le périmètre du triangle est inférieur ou supérieur à 12cm



Observations: Le triangle fourni a un périmètre ni trop proche de 12 cm pour éviter des contestations à un mm près, ni trop différent de 12 cm pour éviter une réponse à l'oeil nu.

- 2- Tracer un polygone de 5 côtés. En faisant une seule mesure trouver le périmètre du polygone.
- 3- Tracer un carré, un triangle, et un rectangle non carré, les trois figures ayant le même périmètre de 36 cm
- 4- Tracer un losange, un triangle et un rectangle dont le périmètre est un segment donné.
- 5- Tracer un triangle ayant le même périmètre que le quadrilatère donné.

Observations:

- Les questions 2-3-4- et 5 sont assez proches . Certaines peuvent être résolues en classe, d'autres en devoir à la maison ou en contrôle au choix du professeur.

-En 2: Les élèves peuvent reporter bout à bout les côtés du polygone sur un dessin à part ou en reporter un de moins en les plaçant sur la droite qui porte l'un d'eux
Ils insistent souvent pour tracer un polygone régulier car pour eux un polygone est nécessairement régulier. Ils s'imposent cette contrainte qui n'est pas dans la consigne.

-Les questions 3-4 et 5 permettent déjà de soulever le problème de l'inégalité triangulaire. Le professeur choisira selon la classe d'approfondir ou non la question si elle se présente. En général les élèves évitent plus ou moins consciemment cet écueil en choisissant trois longueurs voisines, de sorte qu'ils obtiennent un triangle presque équilatéral qui répond à la question

- En 3: Le périmètre est 36 car certains commenceront par tracer un carré de côté 6 cm, confondant aire et périmètre (on y reviendra plus loin). Remarquer que tous ceux qui ont réussi ont le "même" carré mais ils peuvent avoir des triangles et des rectangles non superposables.

Exercices:

1- On donne un quadrilatère composé de deux triangles ayant un côté commun. On donne le périmètre de chaque triangle et la longueur du côté commun. Trouver le périmètre du quadrilatère. (document joint, extrait de l'évaluation nationale en 6^{ème}- 1992- Item 28)

Observations: Voir sur le document des réponses d'élèves représentatives.

Noter que l'erreur la plus fréquente est 29: le périmètre du quadrilatère est la somme des périmètres des deux triangles, de la même façon que l'aire du quadrilatère est la somme des aires des deux triangles. La réponse 24 est obtenue en enlevant une seule fois 5 à 29

Les écrits des élèves 1 et 3 donnent une idée sur les 21,7% d'autres réponses.

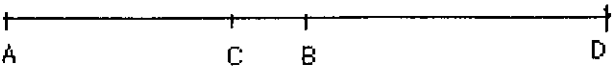
- Par exemple l'élève 1 n'utilise que le nombre 5 parce qu'il est le seul à apparaître deux fois sur le dessin d'où sa réponse: $5+5$

- L'élève 3 multiplie chaque périmètre par 5. Une interprétation possible consiste à dire qu'il s'engage dans une formule sur les aires puisqu'il fait des multiplications en confondant aire et périmètre. Ceci se confirme par la division par 2 qu'il tente ensuite. Il ne possède pas la technique de la division

Bilan: Le périmètre du quadrilatère n'est pas la somme des périmètres des deux triangles

2- Mesure de la longueur d'un segment par somme et différence:

AB = 8, CD = 10, CB = 2. Trouver AD



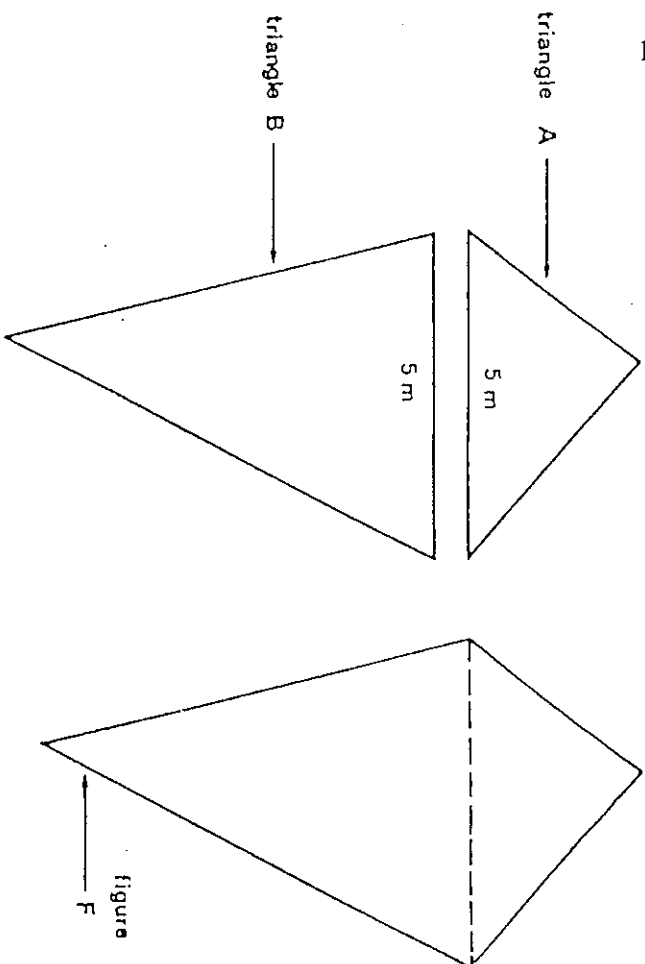
Bilan: On ajoute les mesures et pas les segments. Pour trouver une mesure en faisant une somme il faut que les points soient alignés et que les segments aient un seul point commun.

Situation 6 : Correspondance points d'un segment et nombres dans un intervalle (décimaux, fractions)

On travaille sur papier blanc que l'on peut plier

1- Sur un segment AB mesurant $12\text{cm} = 120\text{ mm}$, on suppose qu'on fait une graduation en mettant 0 en correspondance avec A et 1 en correspondance avec B. En utilisant la méthode et l'instrument de votre choix (pliage, compas, double décimètre..) placer des points M, N....tels que

M correspond à 0,5	N correspond à 0,2;	
P correspond à $\frac{2}{3}$	Q correspond à $\frac{3}{4}$	R correspond à $\frac{4}{5}$



Le périmètre du triangle A est 12 m.
Le périmètre du triangle B est 17 m.

La figure F est formée à l'aide des deux triangles, comme indiqué sur le dessin.
Quel est le périmètre de la figure F ?

résultats nationaux

réponse	%
29	45,5 %
19	20,3 %
24	4,6 %
diverses autres réponses rassemblées	21,7 %
absence de réponse	7,9 %

① Écris tes calculs :

$$5 + 5 =$$

Le périmètre de la figure F est :

10 m

②

Écris tes calculs :

$$12 + 17 = 29 \text{ m}$$

Le périmètre de la figure F

Le périmètre de la figure F est :

29 m

③

Écris tes calculs :

$$12 + 17 = 29$$

Le périmètre de la figure F est :

29 m

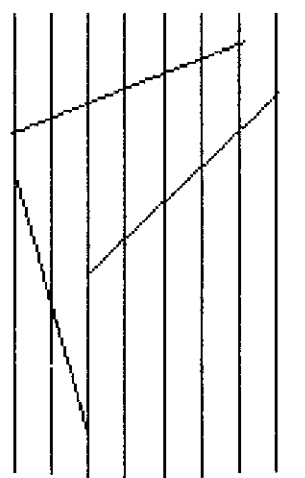
2- Dessiner à nouveau le segment AB avec les points M, N, P, Q, R tels que vous les avez placés. Faire maintenant une autre graduation en mettant un nombre en correspondance avec chacun des points et en prenant 0 pour A et 12 pour B. Recommencer en prenant 0 pour A et 2 pour B.

Observation: 120 mm est choisi car le nombre 60 a beaucoup de diviseurs, ce qui permet de placer les points avec le double décimètre. La distance entre A et B doit être suffisante pour pouvoir placer les points.

3- Dessiner une partie de graduation permettant de placer le point correspondant au nombre 3,4192

Observation: On peut placer les points A, B, C, correspondants aux nombres 3,418 ; 3,419 et 3,420 en prenant un espace de 5 cm entre chacun. Il est alors possible de placer le nombre donné.

4- Avec seulement le quadrillage du cahier qui permet d'avoir un réseau de droites parallèles et avec le segment de longueur unité transporté sur un calque, tracer des segments de longueur : $\frac{5}{6}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{3}{2}$



Dessin ci-contre non fourni aux élèves. Ils ont seulement le réseau de parallèles et le calque avec le segment unité.

Pour partager le segment avec les parallèles, c'est bien sûr la propriété de Thalès qui est en jeu, mais elle reste totalement implicite. Les élèves trouvent seuls la méthode, sans expliciter. On le reprendra dans les classes ultérieures.

Bilan: Sur un segment les points sont très "serrés" comme les nombres dans un intervalle. Entre deux nombres on peut toujours en intercaler autant qu'on veut. En changeant d'échelle, on peut toujours représenter autant de points qu'on veut entre deux points.

Observation: 1- Mettre facultativement dans le bilan l'écriture abrégée de segment AB par $[AB]$ (analogie avec les intervalles comme $]0[$ vus bien plus tard.) Notations différentes: $[AB]$ (segment) et AB (longueur ou mesure)

2- Cette remarque peut s'introduire dès la situation 3 où on a vu qu'un segment est composé de points notamment en mettant en évidence le milieu du segment, puis les milieux des deux segments ainsi déterminés, et ainsi de suite.

3- Il n'y a aucune gêne pour écrire les nombres de plus en plus "serrés" grâce aux décimaux. En revanche, on est gêné pour représenter les points à cause de l'épaisseur matérielle de la mine de crayon. Le professeur pourra utiliser le document suivant² et conclure par le bilan ci-dessous. On reviendra un peu plus loin sur la nature des objets géométriques.

Bilan : la représentation du point ne s'agrandit pas comme par photocopie. L'épaisseur du segment non plus. Les points, les segments, sont des objets imaginaires, comme les nombres.

²- Document produit par Francis Reynès, professeur au collège Grand-Air d'Arcachon et travaillant à l'IREM de Bordeaux dans le groupe "Langage et mathématique"

DES IMAGES POUR POUVOIR IMAGINER

Un tout petit disque noir

Une représentation d'un point

ON AGRANDIT 10 FOIS :

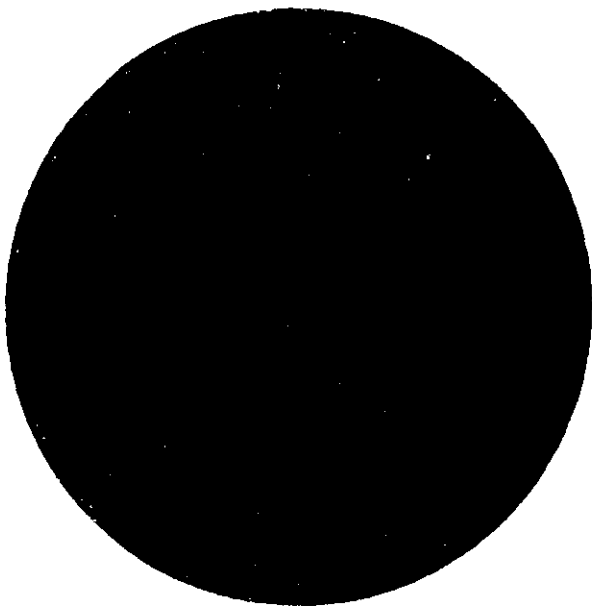
Le tout petit disque noir

La représentation du point

ON AGRANDIT ENCORE 10 FOIS :

Le tout petit disque noir

La représentation du point



Qu'est-ce qu'on essaie de faire imaginer et comprendre lorsqu'on dit
qu'"un point n'a pas de dimension" ?

2- Cercle

Savoir visé:

Le cercle est un ensemble de points.

Conceptions repérées chez les élèves:

- La conception du cercle comme une ligne de courbure constante domine le plus souvent la conception comme ensemble de points à une distance donnée d'un point donné.
- Certains font un amalgame entre cercle et disque.
- Le centre du cercle est un point du cercle même si le cercle est bien conçu comme une ligne et non comme un disque: il y a la ligne et en plus un point au centre.

Objectifs:

- Préciser le statut de la figure en géométrie
- Pouvoir passer d'une conception à une autre suivant le problème à résoudre.
- Voir le cercle comme un ensemble de points et pas seulement globalement comme une ligne courbe fermée
- Donner du sens aux intersections de cercles comme ensembles de points

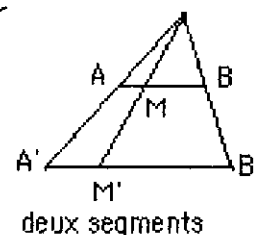
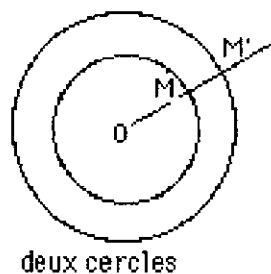
Situation 1: Ensemble de points- Cercle et disque

1- Placer dix points à 3 cm d'un point donné. En placer 500. Combien y en a-t-il?

Observations: 1- Les élèves vont commencer à placer les points un à un avec la règle graduée, sans doute jusqu'à 10. Quand arrive la question des 500, ils cherchent à accélérer le travail. Ils pensent au compas qui leur permet de placer les points d'un coup. Mais alors ils ont une hésitation car ils disent: "en dessinant avec le compas, j'en ai placé plus de 500". La question : combien y en a-t-il? arrive alors tout naturellement.

2- Le nombre de points est infini comme sur un segment. Cet infini est difficile à comprendre. Pour les élèves de cet âge c'est "plus de mille, un million, un milliard". A la question sur le nombre de points, la réponse attendue est "une infinité" comme nous l'avons vu pour le segment où nous avons fait le rapprochement avec les nombres. Pour donner l'idée que c'est le "même infini" pour un segment et un cercle enrouler un morceau de fil sur un cercle.

3- Un élève a eu l'idée de faire varier le rayon du cercle avant de répondre à cette question sur le nombre de points. Il a dit alors: "mais si le rayon du cercle est 4 cm au lieu de 3 cm, le nombre de points est plus grand!". Le professeur a essayé de le convaincre que c'est le "même nombre" en utilisant une bijection (sans prononcer le mot) entre deux cercles concentriques. A tout point sur un des cercles correspond un point sur l'autre et réciproquement. Deux segments de longueurs différentes sont aussi en bijection (réalisable sans prononcer le mot)



2- Colorier les points à moins de 3 cm d'un point donné O , puis d'une autre couleur ceux qui sont à plus de 3 cm de ce point.

Observation: Quand on demande aux élèves de colorier les points à moins de 3 cm de O , ils colorient l'intérieur du cercle mais se posent des questions pour la frontière. Certains laissent un petit liseré blanc autour. Le professeur peut expliquer la subtilité du disque ouvert ou fermé, ou considérer implicitement, comme nous l'avons fait pour le segment, que le disque est fermé et donc qu'il s'agit des points à la fois à moins de 3 cm ou à 3 cm de O . Ces subtilités de topologie arrivent naturellement comme le savaient Papy et Frédérique (Belgique) dans les années 70. Le professeur choisira de les éviter ou de les soulever.

3- Tracer 10 segments de mesure 4 cm ayant même milieu A . Les extrémités de ces segments sont sur un même cercle. Effacer tout ce qui ne fait pas partie du cercle.

Observation: Beaucoup d'élèves se demandent s'il faut effacer le point A . Après discussion il vient que le point A est à une distance nulle de A et non à la distance 2 cm de A .

Bilan: On appelle cercle de centre O et de rayon 4 cm, l'ensemble des points situés à 4 cm de O . Ceci veut dire que tous les points du cercle sont à 4 cm de O et il n'y a pas de points à 4 cm de O ailleurs que sur le cercle.
Les points à l'intérieur du cercle sont à moins de 4 cm de O et appartiennent à un disque de rayon 4 cm.

Observations: Dans la définition, on peut choisir de dire "de rayon R ".

Exercice: Une chèvre est attachée à un piquet dans un pré. Représente par un point le trou où le piquet est enfoncé et colorie la partie du pré que la chèvre peut brouter.

Situation 2: Dessin et figure

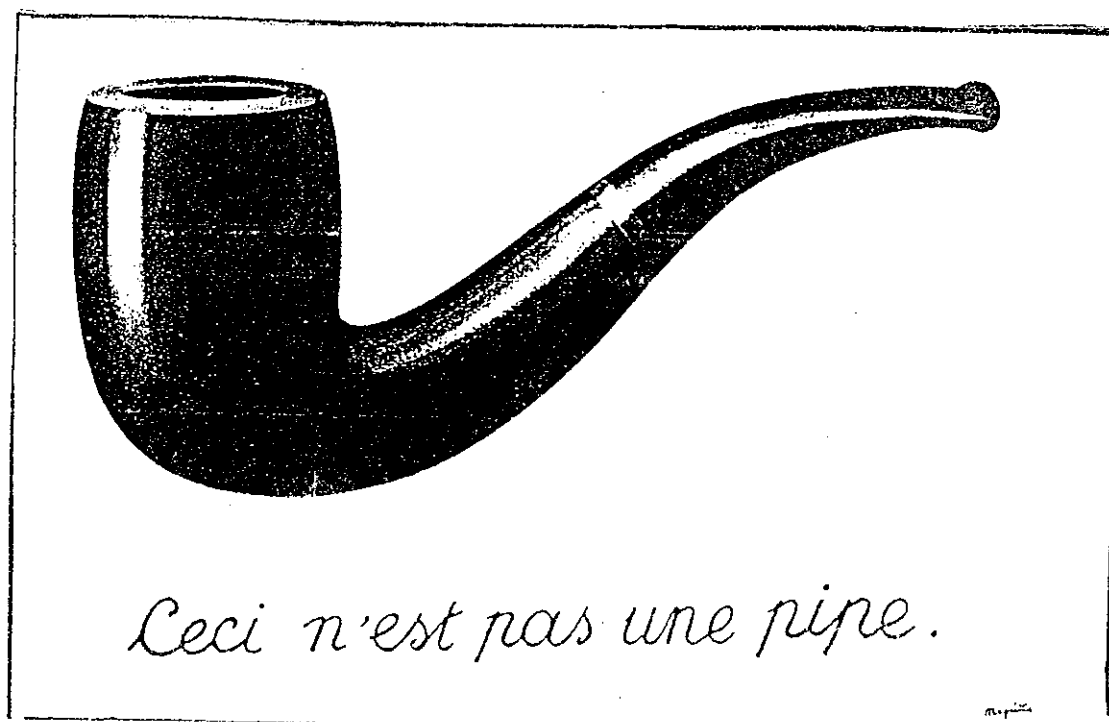
Faire discuter sur une image représentant le tableau de Magritte: "Ceci n'est pas une pipe". Puis discuter sur "Ceci n'est pas le nombre douze" puis "Ceci n'est pas un cercle" (document joint)³

³ - Ceci est inspiré des travaux de Francis Reynès déjà cité, et pour lesquels on peut se référer à un article qu'il a publié dans le journal Petit x n°26: *Géométrie ou trahison des dessins*- IREM de Grenoble- 1991

Le lecteur peut aussi se référer aux deux ouvrages d'Annie Berté: *Mathématique dynamique* (1993) et *Mathématique du collège au lycée* (1996) parus aux éditions Nathan- Pédagogie, tout spécialement au second pages 221 et 222

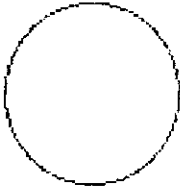
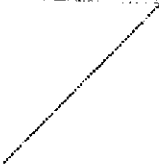
Le lecteur peut encore se référer à l'exposé d'Annie Berté et de Dominique Woillez paru dans les Actes de la 46ème Rencontre de la CIEAEM (Commission Internationale pour l'Etude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques de juillet 1994 : *Représentations graphique et symbolique de la maternelle à l'Université*- Publication en 1996 par l'IREM de Toulouse- Université Paul Sabatier.

Le document fourni ici vient d'un cours donné en PLC2 section mathématiques, à l'IUFM d'Aquitaine en 1995, et intitulé "Les signes en mathématiques" par Annie Berté et Dominique Woillez



La première image est une reproduction d'un tableau du peintre René Magritte (1898-1967- Belgique).

Le titre du tableau est: "*La trahison des images*"

12				x
Ceci n'est pas le nombre douze	Ceci n'est pas un cercle	Ceci n'est pas une droite	Ceci n'est pas un vecteur	Ceci n'est pas un nombre

Observations: 1- Donner d'abord la pipe seule. Les élèves rient, puis disent: "c'est normal, avec un papier on ne peut pas fumer." Leur demander d'analyser pourquoi, avant de comprendre, leur première réaction a été de rire. Ils arrivent alors à formuler la cause: ils ont cru qu'il y avait une contradiction entre le dessin et le texte qui l'accompagne. Pourquoi tout le monde réagit-il ainsi ? Parce que le but des images est de remplacer les objets et nous sommes habitués à dire que le dessin EST réellement une pipe. C'est bien la fonction des signes de remplacer les objets. Mais pour les images, ce remplacement peut, quand notre vigilance est endormie, devenir une "trahison" comme le dit le peintre, puisqu'il ne s'agit pas de l'objet réel mais d'une simple représentation. nous pouvons même reconnaître sur une image un objet que nous n'avons jamais vu - les pyramides d'Egypte par exemple- ou pire, un objet qui n'existe pas, un objet imaginaire. Par exemple un dragon, une licorne.

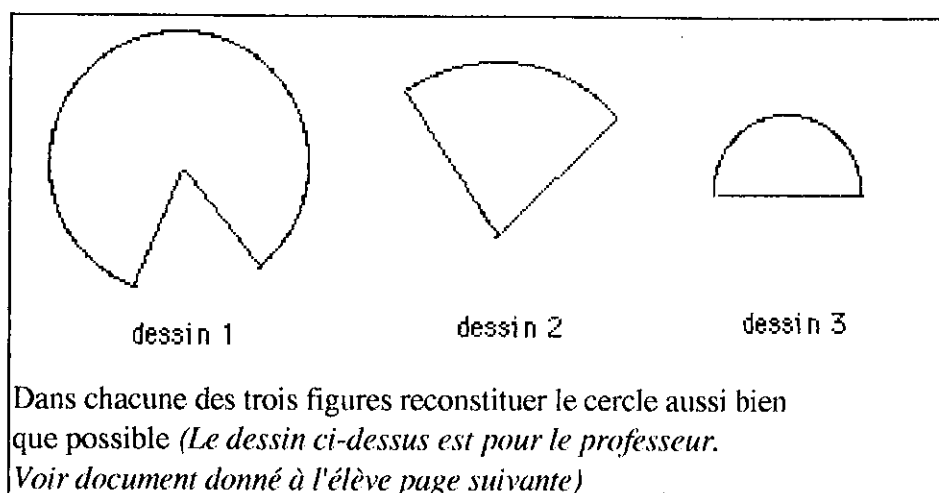
2- Le nombre douze et le cercle sont justement des objets imaginaires. La discussion avec les élèves est plus longue car c'est beaucoup moins facile que pour la pipe puisqu'il s'agit d'objets mathématiques et que, dans ce domaine, les signes remplacent parfaitement bien les objets. Cependant il y a un seul nombre douze alors qu'il y a une multitude d'écritures différentes de ce nombre (12 ou $10 + 2$ ou $24/2$,.....etc) C'est justement parce que deux écritures représentent le même objet que l'on utilise le signe =. On écrit $12 = 10 + 2$. Deux écritures différentes et le même objet, le nombre douze qui, lui, est unique. Faire des mathématiques c'est justement jouer à remplacer une écriture par une autre, selon le problème posé, la substitution permettant d'avancer.

3- Arrivés au cercle, certains élèves commencent par dire: "non, ce n'est pas un cercle, car il manque le centre". Ceci permet de revenir sur la distinction entre cercle et disque. Puis la discussion continue car le dessin du cercle est encore d'une autre nature que l'écriture d'un nombre. Comme pour le nombre, nous en avons une représentation qui remplace le cercle pour nous permettre de travailler : placer des points sur le cercle, le faire couper par une droite ou un autre cercle. Mais à l'inverse des écritures 12 ou $10 + 2$, une figure de géométrie ne peut être employée dans une phrase. Elle fonctionne plutôt comme une icône.

4- Nous donnons le document complet avec "ceci n'est pas une droite", "ceci n'est pas un vecteur",....etc...car on peut utiliser ce document beaucoup plus loin que la 6ème et l'adapter aux connaissances des élèves.

Bilan: Les dessins ne sont que des représentations des objets et pas les objets eux-mêmes. Une pipe est un objet matériel, visible. Un cercle est un objet imaginaire. En géométrie on fait des dessins nommés figures et on s'autorise à dire en parlant de la figure: "ceci est un cercle" au lieu de "ceci représente un cercle"

Situation 3: Les différentes conceptions du cercle ⁴



Donner le dessin de trois secteurs pris dans trois cercles de rayons différents.
Le centre du cercle est donné.

Le compas n'est pas autorisé, règle graduée et calque seulement

Observations; Méthodes qui sortiront probablement:

- porter la mesure du rayon plusieurs fois: conception ensemble de points (surtout pour le 1)
- décalker et faire tourner en gardant le centre fixe (surtout pour le 2)
- symétrie orthogonale: plier le calque en gardant un segment fixe (pour le 3)

Les élèves peuvent appliquer chacune des trois méthodes aux trois cas et même combiner les méthodes. Prononcer le mot "rotation" si certains élèves le connaissent sinon garder "tourner autour d'un point". La "symétrie orthogonale" est au programme et sera reprise plus loin.

Erreurs: Même la notion de courbure constante pour le cercle est une connaissance non stabilisée, et non un savoir. Certains élèves par exemple essaient de compléter les dessins 1 ou 3 en prenant le bord de leur rapporteur sans se rendre compte que la courbure n'est pas la même, le rayon étant différent. Du moment que la ligne est courbée, elle doit s'adapter au cercle. D'autres utilisent des arcs décalqués sur un des cercles pour compléter l'autre, et comme les rayons sont différents ce n'est pas bon. C'est pour cela que dans le document élève que nous fournissons, les rayons des cercles ne sont pas trop proches et le secteur manquant dans le cercle 1 ne doit pas exactement se remplir avec 2 ou avec une juxtaposition de 2. Le secteur fourni en 2 ne doit pas non plus avoir une mesure qui est un diviseur de 180° , pour éviter que les élèves puissent s'en servir pour 3

Situation 4: Intersection de cercles et de disques

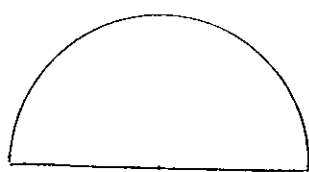
1- Donner deux points A et B. Placer un point à 3 cm de A et à 4 cm de B

Observation: Les points A et B doivent être déjà placés par le maître sur une feuille pour prendre un cas où les cercles sont sécants et ne pas soulever le problème d'une autre position possible des cercles. Faire tracer les cercles en entier. Il y a deux solutions symétriques parce que (AB) est axe de symétrie des cercles

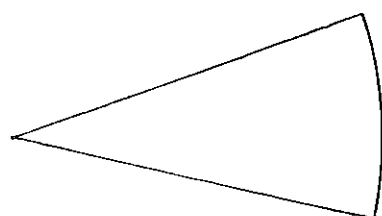
2- Où sont les points à la fois à moins de 3 cm de A et à moins de 4 cm de B? A plus de 3 cm de A et moins de 3 cm de B... etc.. Faire caractériser les régions

Bilan: L'intersection des cercles et des disques sont des ensembles de points

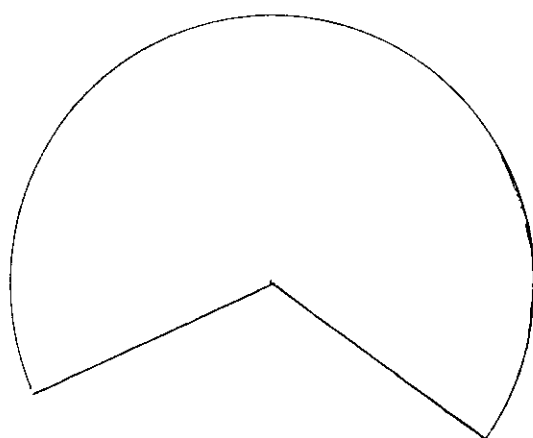
⁴- D'après chapitre 3 de la thèse de Doctorat d'Etat en didactique des mathématiques - Michèle Artigue- Paris 7- 1984



①



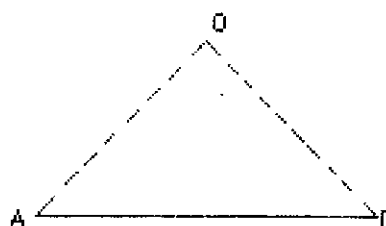
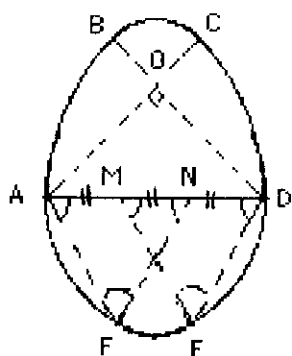
②



③

Situation 5: Dans une figure un peu complexe, repérer le centre d'un arc de cercle

Reproduire la figure suivante à partir du triangle AOD fourni



Observation: Il faut repérer les centres des arcs de cercle. Cette figure est intéressante car les courbes "se raccordent bien" (il n'y a pas de points anguleux au point de commun de deux cercles différents car ces deux cercles ont une tangente commune) mais pourtant la figure fermée obtenue n'est pas un cercle car la courbure n'est pas constante. Ceci est à mettre en relation avec les erreurs lors de la situation 3.

3- Médiatrice d'un segment, triangle isocèle

Savoir visé:

- La droite est un ensemble de points.
- La médiatrice est une droite perpendiculaire au segment en son milieu et aussi l'ensemble de points équidistants des extrémités du segment.

Conceptions repérées chez les élèves:

- La conception de la médiatrice comme un trait perpendiculaire au segment en son milieu domine celle d'ensemble de points équidistants. Pour cette raison, nous commençons par la deuxième.
- Un triangle isocèle se trace en commençant par la base et jamais en commençant par le sommet. Ceci est lié à la difficulté d'individualiser deux points sur un cercle avec leur propriété d'être à la même distance du centre
- Un triangle équilatéral n'est pas isocèle car il a trois côtés de même longueur et non deux

Objectifs:

- Pouvoir passer d'une conception à une autre suivant le problème à résoudre.
- Voir la droite et le cercle comme des ensembles de points et pas seulement globalement comme une ligne droite (non courbée, de courbure nulle) ou une ligne courbe fermée.
- Donner du sens aux intersections de lignes (cercles et droites) comme ensemble de points
- Pouvoir changer de points de vue en utilisant le triangle isocèle et la médiatrice

Situation 1: Médiatrice comme ensemble de points

Placer deux points A et B sur papier blanc et placer dix points à égale distance de A et de B en autorisant règle graduée et compas

Observations: 1- Les élèves ont toujours beaucoup de difficultés à comprendre l'expression "à égale distance". Le mot plus technique "équidistant" n'arrange rien, au contraire! Ce qui les débloque un peu c'est d'expliquer qu'ils ont le droit de faire varier la distance, qu'ils ne sont pas obligés une fois qu'ils se sont fixés une distance qui doit être effectivement la même pour A et B de la conserver comme pour tracer le cercle. En fait ce qui provoque la difficulté c'est la notion sous-jacente de paramètre. On a une distance d qui reste constante un certain temps quand on trace les deux arcs de cercle mais qui peut prendre autant de valeurs qu'on veut. $d = 3, 4, 5$ cm

2- Il faut voir d'abord qu'il n'y a pas qu'un seul point, le milieu du segment qui répond à la question. L'obstacle est accentué quand on pose la question sous la forme : trouver un point à égale distance des extrémités du segment $[AB]$ parce que dans ce cas le segment est tracé et souvent horizontalement ce qui introduit en plus une direction privilégiée. C'est pour cela que nous la posons avec des points A et B seulement.

3- Les élèves tracent des cercles mais font seulement les petits arcs utiles, de sorte qu'ils sont assez surpris de l'alignement des points. Pour comprendre il faudrait tracer les cercles en entier. Ne pas le dire et laisser planer un doute sur l'alignement. Passer immédiatement à la situation suivante

4- Quelques élèves remarquent qu'il faut prendre une ouverture de compas plus grande que la moitié du segment. Approuver sans insister. On le reverra en 5^{ème} pour toute la classe avec l'inégalité triangulaire.

Situation 2: Médiatrice comme droite perpendiculaire au segment

Même question mais cette fois on ne peut plus se servir de la règle graduée ni du compas. Aucun instrument n'est autorisé.

Solution: Pliage, A vient sur B, on prend tous les points qu'on veut sur le pli. On peut les marquer soit avec un crayon, soit par un petit trou avec la pointe sèche du compas. Il est bon de comprendre qu'on peut marquer les objets géométriques de n'importe quelle façon car cela n'a pas d'importance: les droites par des traits de crayon ou des plis du papier, les points par des croix, des petits trous ou autre chose.....Ce ne sont que des représentations.

Observations :

On revient à ce qui s'est passé avant. Comment se convaincre de l'alignement des points?

- certains élèves ont l'idée de dire qu'on a fait des triangles isocèles qui ont tous le même base et donc que les points sont alignés sur l'axe de ces triangles. C'est exact.

- faire tracer deux cercles en entier sans se limiter aux petits arcs utiles pour insister sur la conception du cercle utilisée implicitement: ligne de niveau et ensemble de points. Quand A vient sur B que se passe-t-il pour les cercles?. Faire colorier de la même couleur les arcs qui viennent l'un sur l'autre.

Plier aussi en suivant le segment [AB] pour constater la symétrie des points d'intersection comme on l'a déjà vu dans le cas de deux cercles quelconques.

- Si tous les cercles sont tracés en entier les élèves risquent, une fois qu'ils en ont tracé plusieurs de rayons différents, de ne plus savoir quelles sont les intersections utiles pour avoir les points équidistants. Il faut trouver un moyen de les repérer.

- Expliquer l'alignement: les points d'intersection des cercles sont alignés sur le pli, c'est à dire l'axe de symétrie de la figure.

Remarquer qu'il s'agit de la même explication que celle des triangles isocèles.

Bilan: 1- Il y a des points aussi loin qu'on veut des deux côtés. En les plaçant on a obtenu une droite. Une droite est un ensemble de points qui n'a pas d'extrémité.

2- En pliant de sorte que A vienne sur B on obtient le milieu du segment AB et un angle droit. On appelle médiatrice d'un segment la droite perpendiculaire au segment en son milieu.

3- Tout point de la médiatrice d'un segment est à égale distance des extrémités de ce segment.

4- Tout point à égale distance des extrémités d'un segment est sur la médiatrice de ce segment.

Situation 3: Correspondance points-nombres sur une droite

Observation: Ceci est facultatif, car si on n'a pas vu les nombres relatifs, on ne peut graduer qu'une demi-droite sans prononcer le mot. On peut attendre donc de voir les nombres négatifs.

L'intérêt est d'insister sur la droite illimitée en opposition au segment qui a des extrémités, et de réviser la correspondance entre points et nombres déjà vue avec les segments.

Représenter une droite et nommer un point de cette droite. On détermine ainsi deux parties infinies. Graduer une des deux parties avec des entiers en utilisant le cm pour unité. Peut-on placer les nombres 100; 2 000; 10 000; 1,263 ; 50,8 ?

Observation: Pour avoir 100 il faut prolonger mentalement la droite et on ne peut pas le placer. Pour le faire on peut changer d'unité (1cm = 10 cm) ou représenter seulement une partie de la graduation (entre 95 et 105 par exemple). Changer d'unité en commençant toujours à 0 peut suffire pour les quatre premiers nombres. Pour 1,263 on peut prendre 20 cm entre 1 et 1,2. Pour le dernier, il faut nécessairement ne représenter qu'une partie de la graduation (entre 50 et 60 par exemple avec un pas de 0,1). Cet exercice peut se préparer en donnant d'abord aux élèves des parties de graduations à compléter avec des pas variables

Bilan: 1- A chaque nombre aussi grand soit-il correspond un point de la droite. Sur le dessin on prolonge si nécessaire.
2- On peut placer tous les nombres connus (décimaux ou fractions) à condition de prolonger ou de changer d'échelle.
3- Je me représente mentalement les points de la droite "infiniment serrés" et la droite "infiniment longue"

Situation 4: Centre des cercles passant par deux points

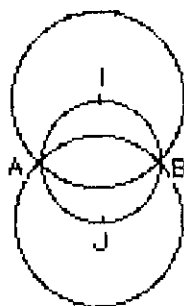
1- On donne deux points. Combien peut-on tracer de cercles passant par ces deux points?

Observation: i

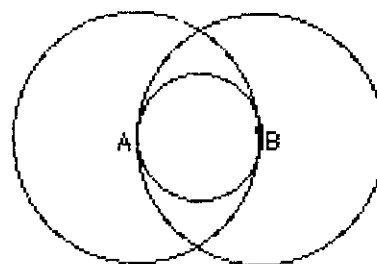
Il est possible que les élèves répondent qu'il y a trois cercles. Cela peut venir de deux erreurs

1- Ils tracent le cercle de diamètre le segment formé par les deux points A et B puis sur ce cercle ils prennent les deux points I et J. Ils tracent les cercles de centre I et de centre J passant par A et B Ils s'arrêtent là car ils ne voient pas d'endroit où prendre d'autres centres. C'est parce que pour eux, les points dans le plan n'ont pas d'existence si rien ne les marque.

2- Ils tracent le cercle de diamètre [AB], le cercle de centre A passant par B et le cercle de centre B passant par A. Pour eux, le centre d'un cercle est un point du cercle.



erreur 1



erreur 2

2- On donne un cercle sans son centre. Retrouver le centre en utilisant seulement la règle graduée et le compas. Vérifier avec le compas que le centre trouvé convient.
3- On donne un arc de cercle. Construire son centre en utilisant seulement la règle non graduée et le compas. Vérifier avec le compas.

Observation: La question 2 est une variante du 1 mais nous conseillons de poser seulement la 1 en 6ème et de garder la 2 pour la 5ème. En effet quand on a le cercle entier il suffit de tracer une

corde, sa médiatrice qui donne un diamètre du cercle coupant le cercle en deux points A et B. le centre cherché est le milieu du segment $[AB]$. Devant la question 3, les élèves de 6ème pensent en général à tracer une corde de l'arc, sa médiatrice, mais ensuite ils ne pensent pas à tracer la deuxième corde. Avec la question 2, la deuxième corde est tout de suite visible, c'est un diamètre.

Bilan: 1- La médiatrice d'une corde d'un cercle passe par le centre.
2- L'ensemble des centres des cercles passant par deux points donnés A et B est la médiatrice du segment AB

Situation 5: Triangle isocèle et équilatéral

- 1- Construire à la règle non graduée et au compas un triangle qui a deux côtés de même longueur et deux seulement
- 2- Construire des triangles isocèles en imposant certaines contraintes (à partir de sommets, de côtés ou de longueurs de côtés)(document joint)

Observations: 1- Bien préciser aux élèves que dans les questions 5-6-7 et 8, il s'agit de construire un triangle isocèle ABC avec $AB = AC$. Quand on donne le point A il s'agit du sommet du triangle, la longueur désignée par l est celle de AB ou AC et la longueur désignée par b est celle de BC, base du triangle.

2- Il y a deux façons de construire les triangles isocèles: soit en partant de la base, soit en partant du sommet. Pour la question 1, les deux procédés sont possibles. Laisser les élèves libres et faire le bilan. Il est probable qu'il y aura une seule méthode dans la classe : la base et un point équidistant des extrémités. Passer alors au 2.

3- Pour certaines questions du 2, un seul des deux procédés est possible. En général les élèves ont plus de difficultés à faire la construction en partant du sommet. Parfois ils évitent le problème en construisant un triangle équilatéral, alors que souvent, à l'inverse, ils refusent de considérer un triangle équilatéral comme isocèle car il a 3 côtés de même longueur et non 2 (pris au sens de 2 seulement)⁵

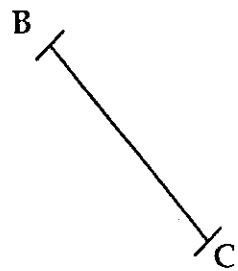
Bilan: On appelle triangle isocèle un triangle qui a au moins deux côtés de même longueur. On appelle triangle équilatéral un triangle qui a trois côtés de même longueur. C'est un triangle isocèle particulier

Exercice: Tracer deux triangles isocèles ABC et ABD. Que peut-on dire de la droite (CD)?

Observation: Certains élèves peuvent tracer deux segments $[AB]$ à des endroits différents.

⁵ Voir article dans le journal "Petit X" N° 38- IREM de Grenoble- 1994 par Annie Berté et Dominique Woillez:
Triangles isocèles et cercles au collège

1-On donne le côté $[BC]$:

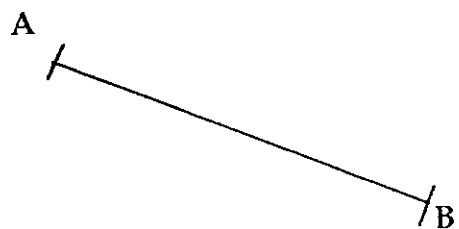


2-On donne le sommet A :



3 2

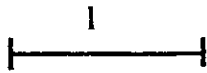
3-On donne le côté $[AB]$:



4-On donne le sommet B :

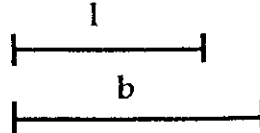


5-On donne la longueur l et le sommet A :

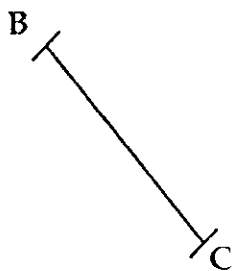
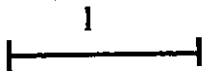


$\times^A$

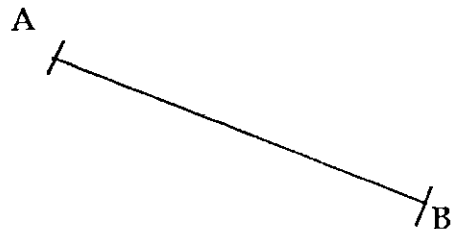
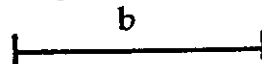
6-On donne la longueur l et la longueur b :



7-On donne le côté $[BC]$ et la longueur l :



8-On donne le côté $[AB]$ et la longueur b :



4-Droites parallèles et perpendiculaires

Savoir visé:

- Représentation de la droite.
- Droites sécantes, parallèles et perpendiculaires- Angle droit

Conceptions repérées chez les élèves:

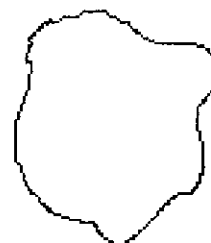
L'angle droit s'obtient seulement en croisant une "horizontale" et une "verticale" c'est à dire des parallèles aux bords de la feuille.

Objectifs:

- Reconnaître et tracer des angles droits sans direction privilégiée
- Eviter de transformer une connaissance dans le plan en obstacle dans l'espace, ou du moins d'accentuer l'obstacle. Dans l'espace, deux perpendiculaires à la même droite ne sont pas toujours coplanaires.

Situation 1: Droites sécantes et perpendiculaires

*Donner à chaque élève une feuille à bords découpés comme ci-contre.
Il s'agit d'éviter les directions privilégiées des bords de la feuille.*



1- Sans règle ni crayon représenter une droite, puis deux droites

Solution: On plie la feuille n'importe comment, on ouvre et le pli représente une droite. On plie à nouveau la feuille. On ouvre et on a une autre droite

Observations: 1- Mettre l'accent sur le fait qu'on peut représenter une droite aussi bien par un pli que par un trait. Le crayon n'est pas nécessaire, car justement il ne s'agit que d'une représentation de l'objet et non de l'objet lui-même.

2- Le point commun peut être dans la feuille ou hors de la feuille. Dans ce cas les droites sont dites sécantes. Les droites peuvent sembler parallèles. Souvent les élèves connaissent déjà le mot. On ne peut pas le savoir sans renseignements plus précis. Tout ce qu'on peut dire c'est que, si ces droites ont un point commun, il est très loin. Quand des droites ne sont pas sécantes, on dit qu'elles sont parallèles.

3- Le professeur peut expliquer l'étymologie du mot "sécante" (vient du latin *secare*) et surtout demander aux élèves de trouver des mots de la même famille. Ils trouvent "sécateur", puis "section", (ce qui se voit quand on a coupé). Le professeur n'oubliera pas "intersection" qui pose problème et se transforme souvent en "interception"

2- Avec une autre feuille à bords découpés, toujours sans règle ni crayon ni équerre, représenter deux droites perpendiculaires.

Solution: Plier une fois, et replier une deuxième fois sans ouvrir. On peut ouvrir avant de replier mais alors il faut faire attention à superposer dans le deuxième pliage deux parties de la première droite obtenue avec le premier comme on l'a vu pour la médiatrice. Plus facile sans déplier.

Quand on laisse tout plié, on a une équerre en papier (à conserver dans du papier assez épais).
Quand on déplie la feuille on a quatre angles droits (à conserver sur du papier calque)

Situation 2: Parallèles, perpendiculaires

- 1- Sans règle ni crayon ni équerre, représenter deux droites parallèles
- 2- Sans plier, avec seulement l'équerre, représenter une droite parallèle à une droite donnée passant par un point donné.

Solution: Trois pliages: le premier donne une droite, le second une perpendiculaire à celle-ci et pour le troisième on a le choix

Bilan: 1- Dans le plan, deux droites perpendiculaires à la même droite sont parallèles. Ceci permet de tracer les parallèles avec une équerre.
2- Quand deux droites sont parallèles, toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.

Observation: On peut prendre comme définition des parallèles deux droites qui n'ont pas de points communs. C'est gênant car plus tard les élèves apprendront qu'une droite est parallèle à elle-même. De toutes façons, la première définition des parallèles comme des droites non sécantes n'est pas fonctionnelle pour raisonner en géométrie. Ce qui est fonctionnel c'est par exemple de savoir que des droites perpendiculaires à la même droite sont parallèles comme nous le voyons dans les situations qui suivent. Cela sert à construire des parallèles avec l'équerre et à raisonner.

- 3- Tracer deux droites sécantes (D) et (D'). Tracer avec la règle et l'équerre une droite parallèle à (D) et une droite parallèle à (D')

Observations:

Même si les élèves savent très bien tracer une parallèle à une droite donnée, ils ont des difficultés ici car la présence de la deuxième droite (D') les déroutent. Il peut être utile de faire passer plusieurs élèves au tableau en leur demandant d'imaginer la place de la parallèle qu'ils veulent tracer et de la montrer avec leur doigt sans rien tracer. Les autres élèves discutent et indiquent des méthodes: "pour tracer la droite, fais comme si (D') était cachée". Pour réussir le dessin, compte-tenu de la grande liberté sur le choix de la place des parallèles, il faut imaginer les droites avant de les tracer.

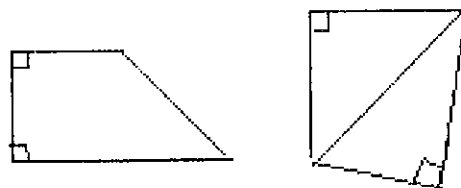
- 4- Peut-on dessiner sur la feuille un quadrilatère avec un angle droit et un seulement, deux angles droits et deux seulement, puis trois angles droits et trois seulement?

Observation: Pour le quadrilatère qui a deux angles droits et deux seulement, les élèves dessinent soit la figure 1 soit la figure 2. Dans le cas 1 on montre qu'il y a deux côtés parallèles (trapèze).

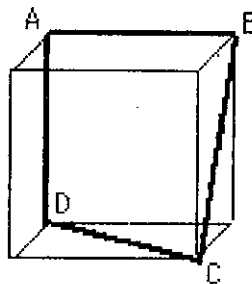
Les élèves s'acharnent à trouver un quadrilatère

avec trois angles droits seulement. Certains arrivent à le dessiner en trichant un peu. Ils sont soulagés quand la démonstration (qu'ils peuvent trouver seuls grâce au bilan précédent) leur assure qu'une telle figure n'existe pas dans le plan.

Le professeur peut montrer qu'un quadrilatère ayant trois angles droits existe dans l'espace.



5- Retrouver sur un cube quatre sommets qui forment un quadrilatère ayant 3 angles droits.
 6- Dans la classe vue comme un parallélépipède, repérer des droites parallèles et perpendiculaires (réponses orales)



Solution pour le professeur:

Les angles A, B, et D sont droits et l'angle C mesure 60° car le triangle BCD est équilatéral. Ses côtés sont les diagonales des faces.

Observation:

Pour le 5, ne pas faire la figure, mais faire construire un cube en papier (la surface latérale suffit, donc plier en quatre un rectangle dont la longueur est quatre fois la largeur). Faire repérer le quadrilatère sur le cube matériel. Pour convaincre les élèves il n'est pas nécessaire de parler du triangle équilatéral. Il suffit de placer le compas branches écartées selon (CB) et (CD) et constater que ce n'est pas perpendiculaire.

Pour le 6, les élèves verront des représentations de droites aux intersections des plans des murs, plancher et plafond, s'ils sont habitués à voir des droites représentées par autre chose que des traits de crayons (par des plis par exemple)

Le professeur peut profiter de cette leçon pour expliquer que la notion de verticale est une notion de géographie et non de mathématiques. Deux verticales ne sont pas parallèles, elles se rejoignent au centre de la terre, mais évidemment il faut les imaginer "très, très longues". Deux personnes debout côte à côte n'ont pas les axes de leur corps parallèles, les murs de la salle de classe ne sont pas non plus parallèles bien que, à notre échelle, on peut croire qu'ils le sont. Ceci permet de parler des plans et droites infinies, du parallélisme et de ce que veulent dire le mot "droites sécantes", ou "droites parallèles"

Bilan: On appelle rectangle un quadrilatère du plan ayant trois angles droits. Il en a donc obligatoirement quatre.

Situation 3: Statut de la figure, intersection de deux lignes

On a vu que le point et le segment ne peuvent pas "s'épaissir" quand on fait un agrandissement. De même pour une ligne comme un cercle ou une droite.

Question en débat: Combien de points communs pour deux segments (vu en 1), pour deux arcs, pour deux droites? A l'intersection de deux lignes peut-être y aura-t-il zéro point, ou une infinité, (parce que le point est infiniment petit) ou deux (un rouge et un vert si une des lignes est rouge et l'autre verte)? Le document⁶ qui suit permet d'en discuter

Bilan: 1- On décide qu'il y a un seul point à l'intersection de deux lignes. On représente le point par une petite croix, au lieu d'une tache.

2- On appelle droites sécantes des droites qui ont un point commun. Si elles en ont plus d'un c'est la même droite.

3- Il existe une seule perpendiculaire et une seule parallèle à une droite donnée passant par un point donné

4- J'imagine le plan et les droites "infinies" pour prolonger par la pensée les parallèles

⁶ Documents produit par Francis Reynès, professeur au collège Grand-Air d'Arcachon et travaillant à l'IREM de Bordeaux dans le groupe "Langage et mathématique"

Un objet physique :
un petit trait rectiligne

Un tout petit morceau d'une
représentation d'une droite

38

O N A G R A N D I T 10 F O I S :

Le trait rectiligne

La représentation de la droite

Qu'est-ce qu'on essaie de faire imaginer et comprendre lorsqu'on dit
qu' "une droite est une ligne sans épaisseur" ?

Deux petits ronds



Un trait rectiligne passant
par deux petits ronds



Deux traits rectilignes passant
par deux petits ronds



Pourquoi est-il commode de DECIDER que " par deux points il
passe une droite et une seule " ?

Par deux points il passe une droite et une seule.

Etant donnés deux points appelés "A" et "B", LA droite passant par A et B est désignée par la notation " (AB) ".

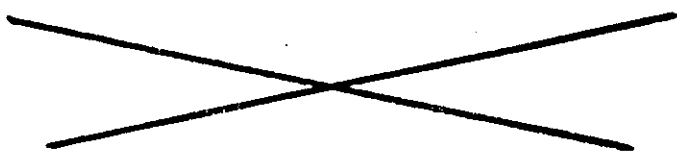
On a décidé d'adopter cette propriété car elle permet

1°) de relier l'idée de point à l'idée de droite

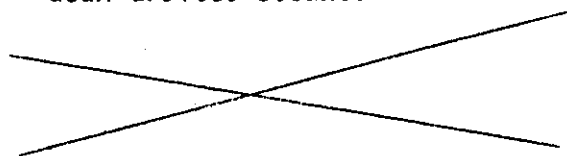
2°) de dépasser les limitations du dessin et de RAISONNER.

EXEMPLE : l'intersection de deux droites

Deux traits rectilignes qui se croisent



Une représentation de
deux droites sécantes



QUESTION : lorsque deux droites sont sécantes, combien de points ont-elles en commun ?

1) Un dessin peut-il fournir la réponse ? Pourquoi ? _____

2) Alors il faut raisonner !

S'il y avait plusieurs points d'intersection, il y en aurait au moins combien ? _____

Mais on a décidé que " par _____ points il passe _____ droite et _____ seule" ! ALORS ?

Situation 3: Angle droit

- 1- Sur cette feuille (*document joint*), compléter chaque dessin de manière à obtenir pour chacun au moins un angle droit.
- 2- Par binôme: Chaque élève trace un angle droit et décalque un seul côté de l'angle. Il passe le calque à son voisin qui sera son adversaire. Celui-ci doit tracer le côté manquant sur le calque. On vérifie par superposition.

Observations: 1- Pour le 1 selon que les élèves prennent le sommet de l'angle à une extrémité du trait ou au milieu du trait, et selon comment ils prolongent leur trait, ils obtiennent soit un seul angle droit, soit deux angles droits, soit quatre angles droits. Le professeur le fait apparaître dans le bilan.

2- Dans le jeu 2, il y a deux possibilités pour le côté manquant. On peut proposer les deux mais cela n'a pas d'importance ensuite car on peut retourner le calque. Cette situation a permis de révéler certains blocage en puissance sur les mots : "un angle droit n'est pas un angle gauche"! Le dessin est plus difficile si un côté n'est pas tracé horizontalement ou s'il commence au bord de la feuille. Les élèves s'en rendent compte et essaient de faire perdre leur voisin. A la fin ils disent en riant qu'ils ne peuvent pas empêcher leur voisin de réussir car le tracé est toujours possible à faire.

- 3- Tracer à main levée une droite perpendiculaire à une droite donnée (non parallèle à un des bords de la feuille) et passant par un point donné. Vérifier avec l'équerre en papier

Exercices:

1- Construire avec règle, compas et équerre des triangles isocèles ou rectangles avec différentes données de longueur

2- Dans le rectangle de la figure 1 combien sont représentés de triangles rectangles?

3- Dans la figure 2 combien sont représentés de rectangles? de triangles rectangles?

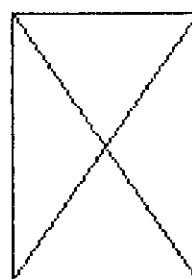


figure 1

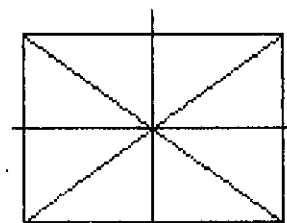


figure 2

Observations: Pour s'entendre il faudra nommer les points.

Solution: dans la figure 2 il y a 9 rectangles

5- Périmètres - Aires - Produit de décimaux

Savoir visé:

Notion d'aire, aire du rectangle dont les dimensions sont des décimaux
Produit de deux décimaux et technique de la multiplication des décimaux

Conception repérée chez les élèves:

Deux figures qui ont la même aire ont le même périmètre

Objectif:

- 1 - "Désamalgamer" aire et périmètre. Montrer que ce sont des grandeurs différentes.
- 2 - Montrer que l'aire est une grandeur mesurable. Nous l'avons déjà fait pour le périmètre.
- 3 - Comprendre la formule de l'aire du rectangle de dimensions décimales

Situation 1: Différencier aire et périmètre

La situation suivante est extraite du suivi scientifique de 6ème- (Régine Douady)

Prendre deux rectangles sur papier non quadrillé. Laisser un des rectangles intact et découper l'autre en 5 ou 6 morceaux. Recoller les morceaux au hasard sur un papier quadrillé mais de manière que tous se touchent au moins par un point et sans reconstituer le rectangle initial

- Qu'est ce qui est "pareil" entre le rectangle de départ et cette nouvelle figure obtenue par collage?
- Commander une ficelle pour entourer la nouvelle figure obtenue.

Solution: Exemple de collage dans le document joint. (fiche 1) Réponse attendue à la première question: elles occupent le même nombre de carreaux sur le quadrillage, elles ont la même aire.

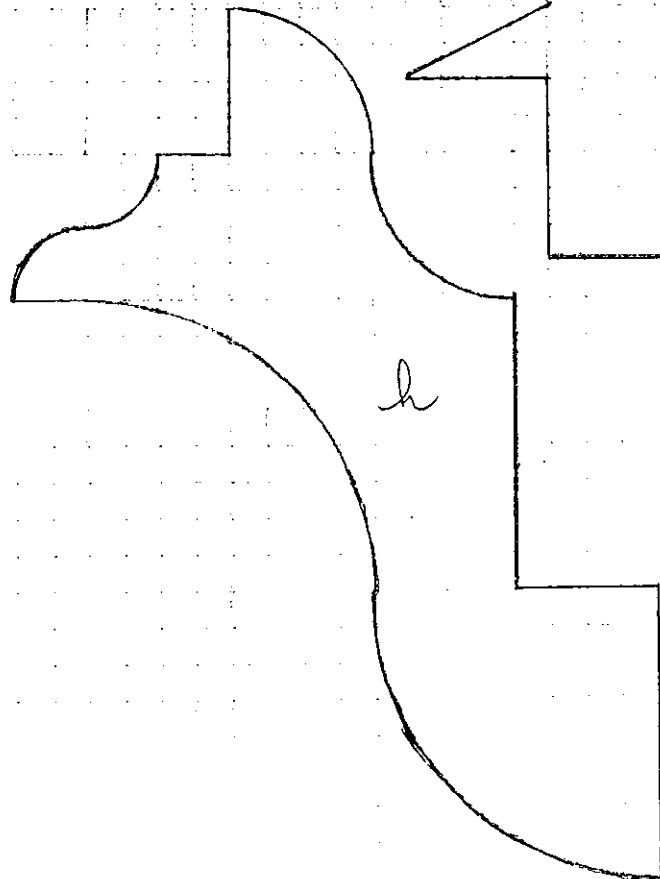
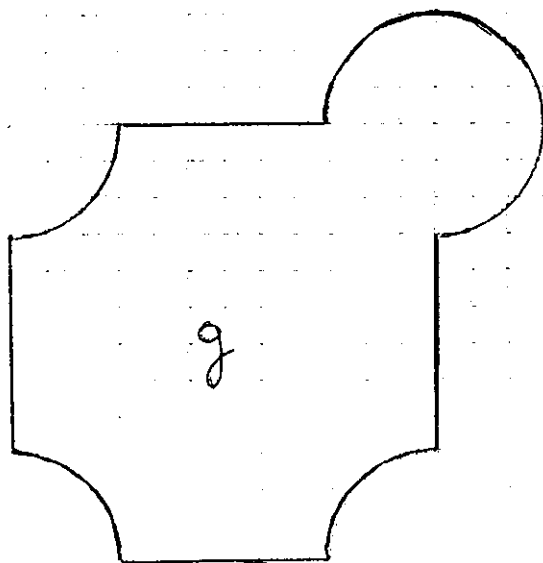
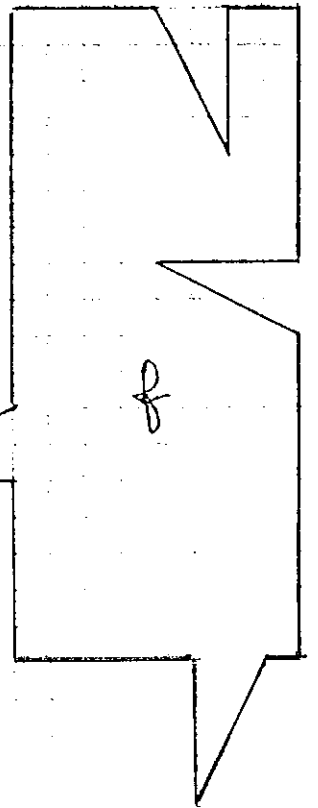
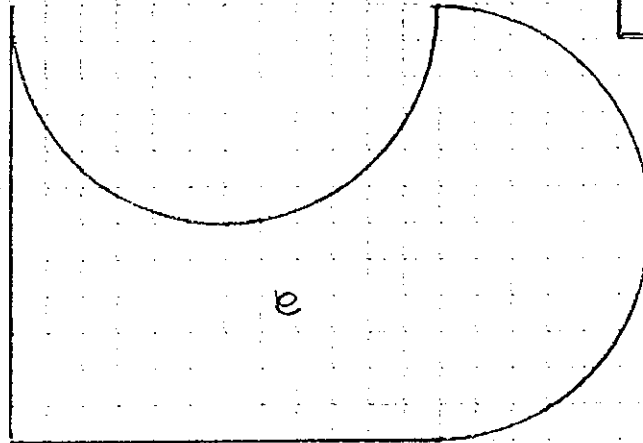
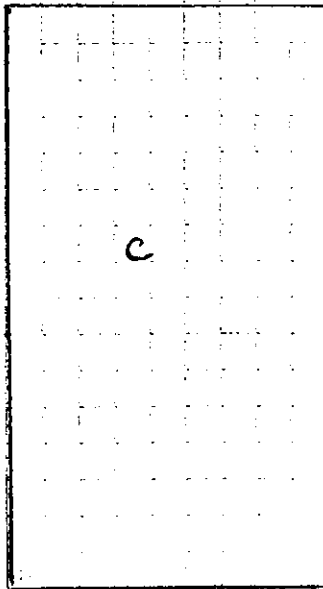
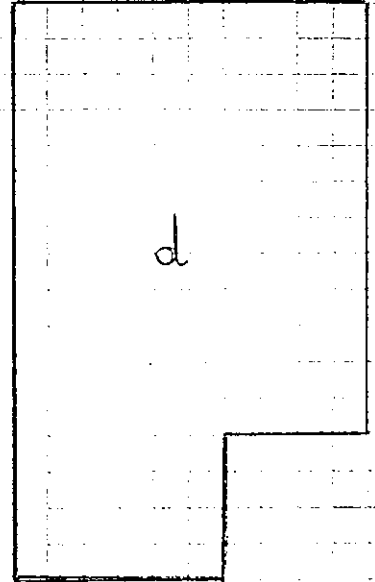
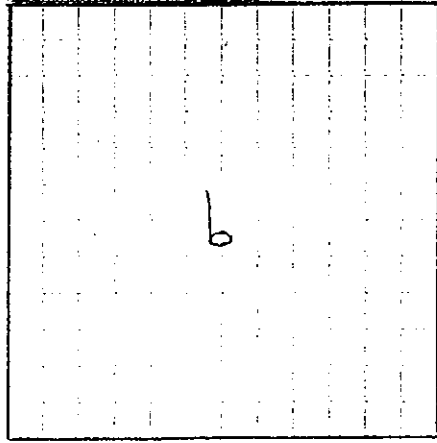
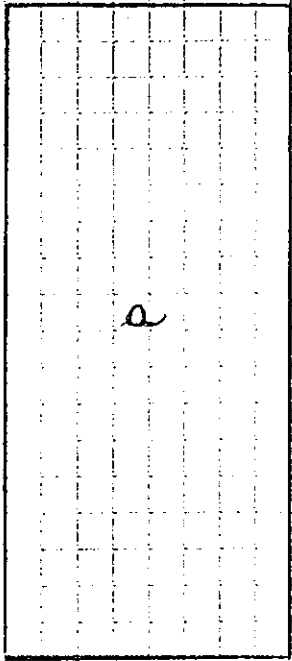
Observation: 1- Poser la deuxième question seulement quand la première est résolue et que toute la classe est d'accord sur la réponse. Préciser que le découpage doit donner 5 à 6 morceaux car si les élèves font un trop grand nombre de morceaux ils en perdent. S'ils n'en font pas assez il est possible que la différence des périmètres soit trop faible.

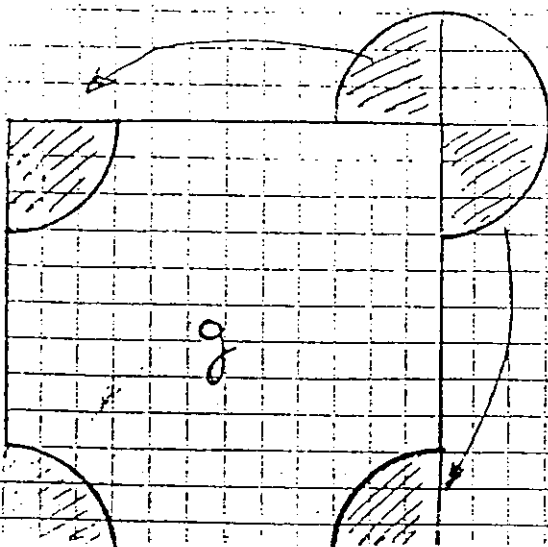
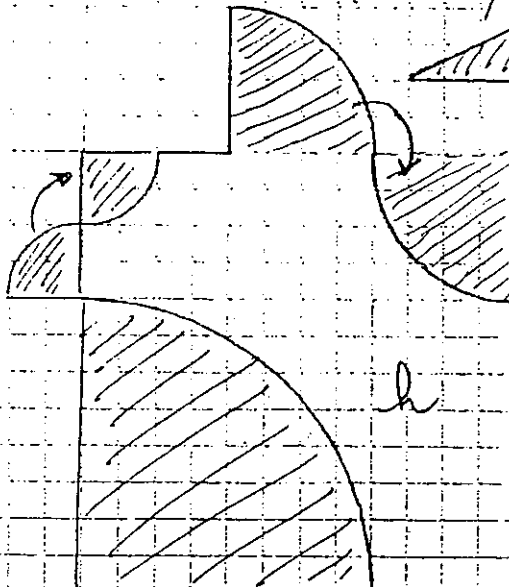
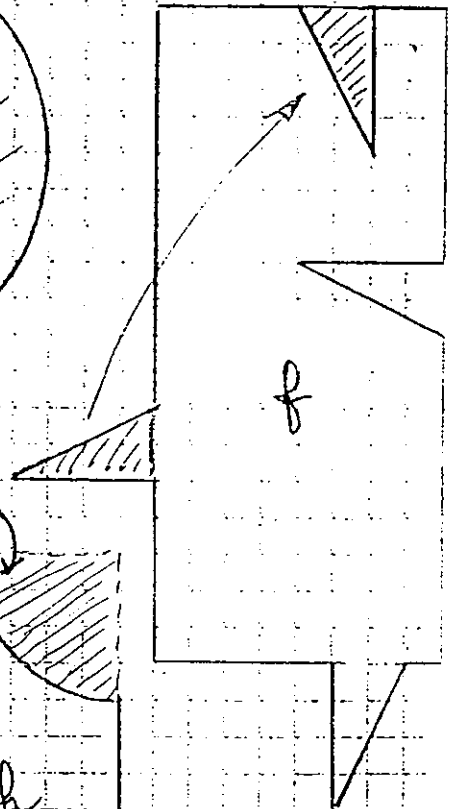
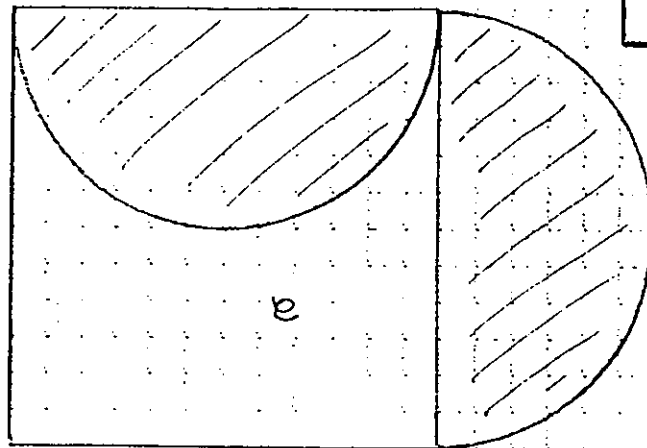
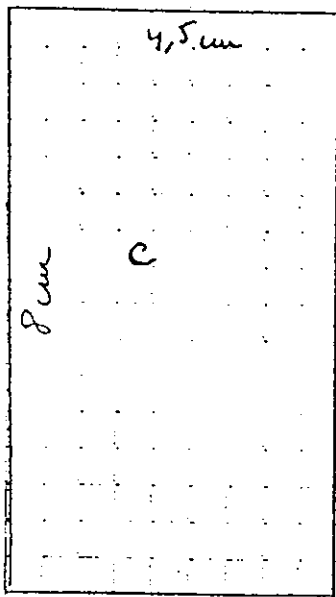
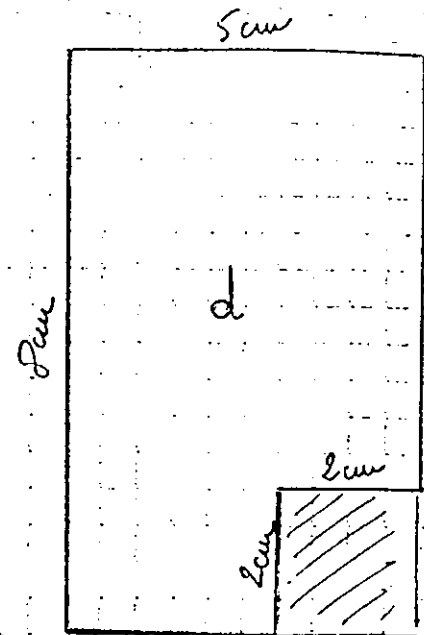
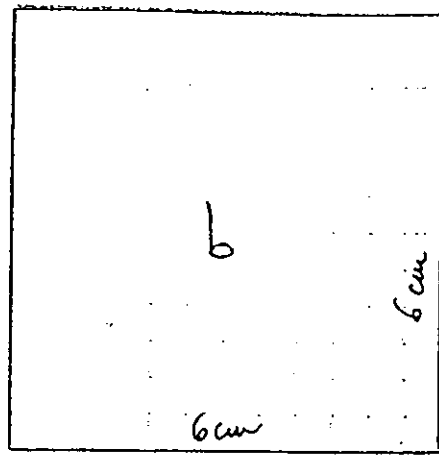
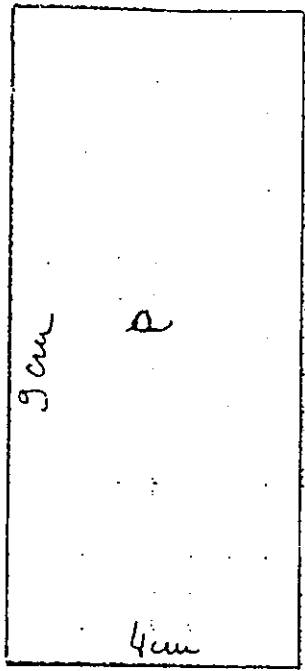
2- Les élèves mesurent le périmètre du rectangle initial et commandent cette longueur de ficelle. Ils se rendent compte en voulant entourer leur figure que c'est trop court

Bilan: Deux figures de même aire n'ont pas toujours le même périmètre

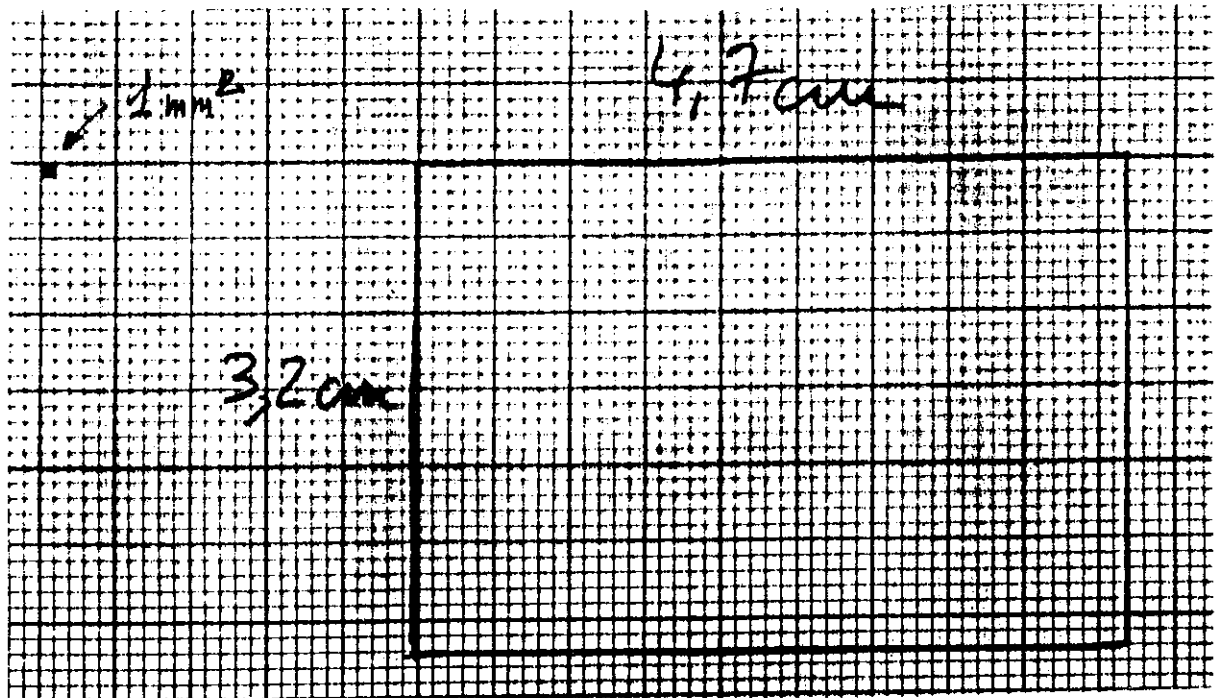
Situation 2: Aires de figures sur papier quadrillé

- 1- Comparer les aires des figures suivantes (document joint fiche 2 ainsi que le corrigé 2')
- 2- Dessiner un rectangle de 4,7 cm sur 3,2 cm sur papier millimétré. Dans un coin de la feuille noircir un petit carré de 1 mm de côté. (document joint agrandi fiche 3)
 - a- Combien y a-t-il de petits carrés noirs dans le rectangle tracé?
 - b- Quelle est l'aire de ce rectangle en centimètres carrés?



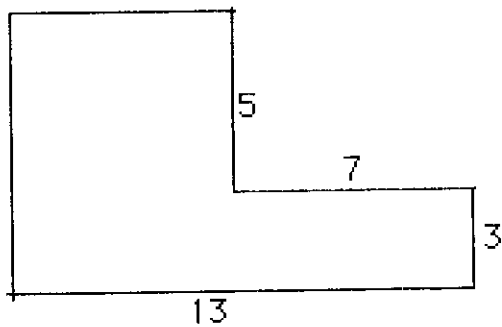


Combien y a-t-il de mm^2 dans le rectangle?



1- Reproduire la figure suivante et écrire les deux dimensions manquantes sur le dessin.

2- Calculer son aire en utilisant seulement les dimensions marquées



Observations: 1- Dans le 1, comme le montre le corrigé, il n'y a rien à calculer. Au bout d'un certain moment, les élèves s'en aperçoivent. Le professeur peut donner le corrigé avec le rétroprojecteur.

Les périmètres de ces figures sont-ils les mêmes? On peut prouver pour certaines que les périmètres sont différents et le conjecturer pour d'autres, même si on ne sait pas les calculer. On pourra faire les calculs exactement dès qu'on saura trouver le périmètre du cercle et l'hypoténuse d'un triangle rectangle. Cette situation peut être reprise en 5ème.

2- Dans le 2 faire chercher d'abord la question a- avant de dévoiler la b.-

- La solution du a- consiste à transformer les dimensions en mm et faire le produit des deux nombres. Mais les élèves ne font pas le lien ni avec le produit de deux nombres entiers qui permet de trouver le nombre de carreaux d'un quadrillage, ni avec l'aire, bien que la première question permettent de redire que l'aire c'est bien le nombre de carreaux du quadrillage occupé par la figure. Spontanément ils commencent par compter un à un tous les petits carrés ce qui ne peut aboutir. Ils y arrivent après échanges entre eux.

- Dans la question b- on fait le lien avec la technique opératoire de la multiplication de deux décimaux: rendre les nombres entiers en multipliant ici chacun par 10, puis faire la multiplication des entiers, puis diviser ensuite le résultat par 100.

- Nous prévoyons d'établir les formules du périmètre et de l'aire seulement pour le rectangle et le carré de dimensions décimales. Pour des dimensions rationnelles non décimales, nous le prévoyons en 5ème avec les fractions

Bilan: L'aire d'un rectangle se calcule en faisant le produit de ses deux dimensions

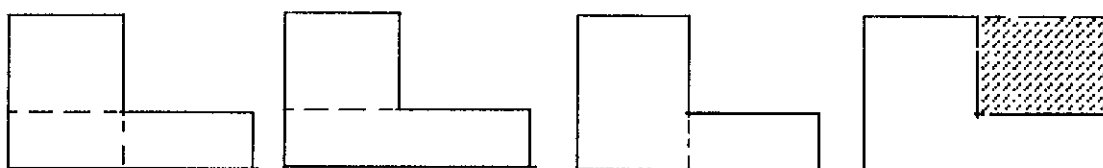
Situation 3: Reproduction de figure et calcul d'aire

1- Reproduire la figure suivante et écrire les deux dimensions manquantes sur le dessin.

(document fiche 3)

2- Calculer son aire en utilisant seulement les dimensions données marquées.

Observation: Les élèves découpent la figure en deux ou trois rectangles (trois découpages possibles) ou font la différence entre les aires du grand rectangle et du rectangle hachuré.



Bilan: Pour calculer l'aire de certaines figures, il est possible

- de les décomposer en rectangles et d'ajouter les aires de ces différents rectangles ou
- de les placer dans un rectangle et d'enlever les aires des rectangles en trop.

6- Cube, pavé

Savoir visé:

Patron du parallélépipède- Dessin en perspective cavalière
Associativité de la multiplication et volume du parallélépipède en liaison avec la multiplication des décimaux

Objectif:

Imaginer les éléments cachés sur un dessin représentant un objet dans l'espace.

Situation 1: Patron

Trouver un patron en observant un cube, un pavé

Observation: *Un patron est une figure plane qui, par découpage et collage, va donner le solide. Il y a plusieurs patrons possibles pour le même solide.*

Pour un polyèdre, les polygones du patron doivent tous avoir une face commune. On n'accepte pas que les faces se touchent en un seul point, alors que par exemple dans le patron d'un cône fermé, la base est un cercle tangent en un seul point à l'autre cercle

Situation 2: Dessin en perspective

- 1- Dessiner en perspective un parallélépipède avec l'objet dans les mains
- 2- En observant un dessin en perspective, retrouver des faces, des arêtes sur le solide. Sont-elles parallèles ou perpendiculaires? (en réalité et sur le dessin)

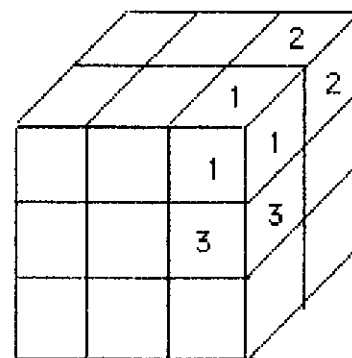
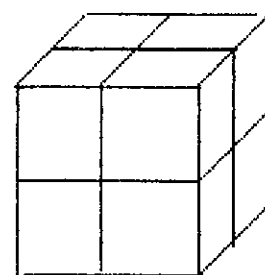
Situation 3: Découper un cube

1- Le professeur montre un grand cube en bois ou en carton et dit aux élèves: "Imaginez que je découpe ce cube verticalement et horizontalement selon les lignes que je vous montre.

Combien vais-je avoir de morceaux?"

Les élèves écrivent la réponse sur leur cahier, puis le professeur dit: "on va vérifier" Le professeur a amené 8 petits cubes en bois ou en carton de sorte qu'avec les huit petits cubes il puisse constituer le grand. Devant la classe, mimer le découpage.

Quand tout le monde est d'accord le professeur demande de faire le dessin en perspective du grand cube, le fait lui-même, ainsi que celui du cube coupé (ci-contre) et demande: "Sur ce dessin combien de cubes de petits cubes sont visibles?" (réponse 7 cubes)
"Combien sont cachés?" (réponse 1 cube)



2- On recommence et cette fois on coupe en trois selon deux des dimensions. Mêmes questions. Pour éviter les erreurs, certains élèves numérotent les petits cubes dont ils voient certaines faces sur le dessin

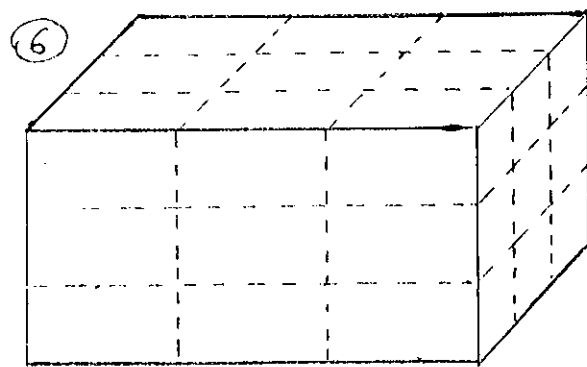
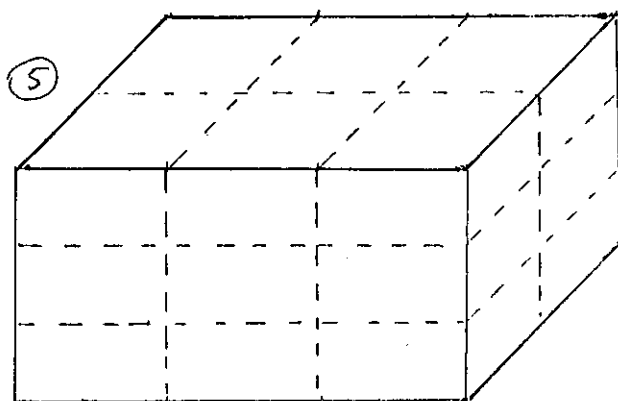
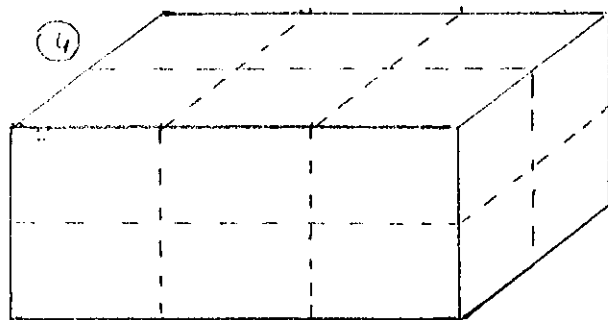
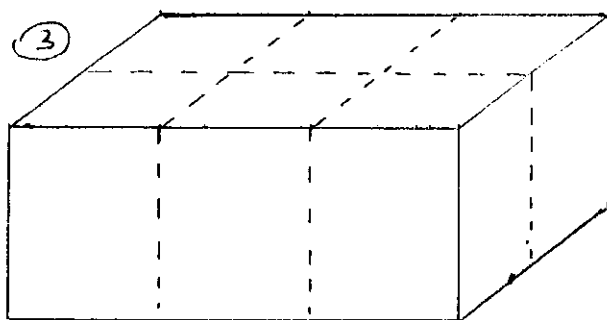
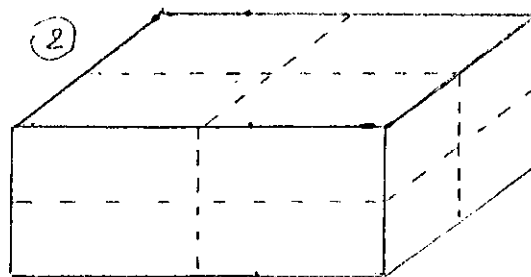
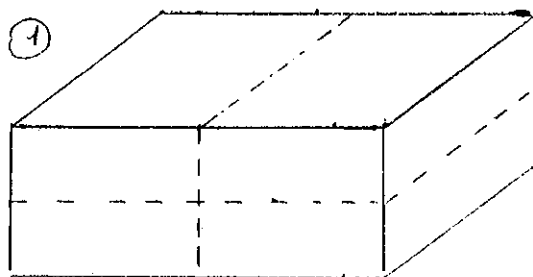
Vérification avec 18 morceaux de sucre apportés par le professeur et qu'ils présente d'abord comme un seul bloc dont on mime le découpage.

Nous avons commencé par découper un cube en 8 cubes pour préparer à la mesure des volumes et aux changements d'unités dans les mesures de volume. (combien de cm^3 dans un dm^3 ... ?.)

Situation 4: Le pavé peint

Un pavé en bois a été peint en rouge sur toute ses faces. On le scie en suivant les pointillés. Dans chaque cas, répondre aux questions suivantes: (les élèves travaillent à deux)

- Combien obtient-on de petits pavés?
- Combien de pavés sont visibles sur le dessin?
- Combien de pavés sont cachés sur le dessin?
- Combien de pavés ont:
 - 3 faces rouges?
 - 4 faces rouges?
 - 5 faces rouges?
 - 6 faces rouges?
 - 2 faces rouges?
 - 1 face rouge?
 - 0 face rouge?



Observations: 1- Nous utilisons le mot "pavé" plutôt que le mot "parallélépipède rectangle" trop compliqué pour les élèves.

2- Les élèves ont pour seul matériel pendant la recherche le dessin fourni par le professeur. Sur ce dessin les élèves trouvent des méthodes pour repérer les morceaux. Ils les numérotent par exemple et peuvent dire que le pavé 1 aura trois faces peintes, ainsi que le 2. Le pavé 3 aura deux faces peintes...etc... Pour vérifier, se convaincre, trouver une erreur, le professeur leur donne le matériel qu'il a apporté, soit des petits parallélépipèdes de carton ou des sucres, qui, assemblés, reconstituent le grand parallélépipède coupé. Les élèves peuvent alors marquer d'un petit signe les faces peintes et compter.

Situation 5: Volume

Le professeur apporte une boîte de sucre en morceaux.

1- Connaissant le nombre de morceaux de sucre sur chaque dimension, trouver le nombre total de morceaux de sucre.

Vérifier en comptant les sucres de la boîte. Comment s'y prendre pour les compter? On peut compter combien de sucres sur un plancher, puis combien de planchers ou compter combien de sucres sur "un mur" et combien de "murs".

Réviser ainsi en même temps l'associativité de la multiplication des entiers.

On admet la même propriété pour les décimaux, ce qui permet d'expliquer la technique opératoire pour une opération comme

$$3,4 \times 7,81 = (3,4 \times 10 \times 7,81 \times 100) : 1000 = (3,4 \times 7,81 \times 1000) : 1000 = (34 \times 781) : 1000$$

2- Calcul de l'aire totale, du volume d'un cube, d'un pavé.

Pour le volume on remplit le solide que l'on a construit avec des petits cubes unité.

Qu'est-ce qu'un centimètre cube? Pourquoi l'appelle-t-on ainsi?

Remplir un décimètre cube avec des centimètres cubes. Combien y en a-t-il? Pourquoi trois chiffres par colonne dans le tableau des unités de volume?

7- Notion d'angle et de mesure d'angle

Savoirs visés:

- Notion d'angle; angles égaux; mesurer les angles
- Bissectrice d'un angle

Conceptions repérées chez les élèves:

1- Si on demande aux élèves ce qu'est un angle ils répondent: "c'est là où se croisent les droites" ou "c'est un coin". Souvent ils confondent un angle et un point particulier, le sommet de l'angle. L'angle est parfois "l'écart entre les droites" et pour le mesurer ils prennent la distance entre deux points pris n'importe où sur chacun des côtés. L'angle est pour d'autres "l'espace délimité par le dessin entre les côtés" soit le triangle obtenu en joignant les extrémités des traits marquants les côtés. L'angle plat n'est pas considéré comme un angle.

2- La mesure d'un angle dépend de la longueur de ses côtés.

Objectifs:

- Savoir comparer, tracer des angles. Notation des angles
- Savoir démontrer que des points sont alignés en utilisant une somme d'angles pour avoir un angle plat ou une différence pour avoir un angle nul.

Situation 1: L'angle ne dépend pas de la longueur des côtés

Pour le 1 donner la fiche 1 (document joint) avec une pièce m et d'autres pièces a, b, c, d, qui s'encastrent dans la pièce m. Les solutions sont données par la fiche 1'

Pour le 2 donner la fiche 2

Sans découper les pièces:

- 1- Trouver les pièces qui s'encastrent dans m
- 2- Avec seulement la pièce m dessiner d'autres pièces qui s'encastrent aussi dans m et qui ne sont pas superposables avec les autres.
- 3- Qu'y a-t-il de commun entre ces pièces et les pièces données?

Observation: *Pour répondre aux questions 1 et 2, les élèves peuvent voir à l'oeil ou utiliser le calque, ou mais c'est moins probable, utiliser le compas en transportant une corde donnée pour comparer les angles. La méthode attendue est le calque. Le professeur peut utiliser le rétroprojecteur pour corriger avec les documents 1' et 1'' fournis.*

Réponse 3: il y a un angle commun. Ainsi se dégage la notion d'angle.

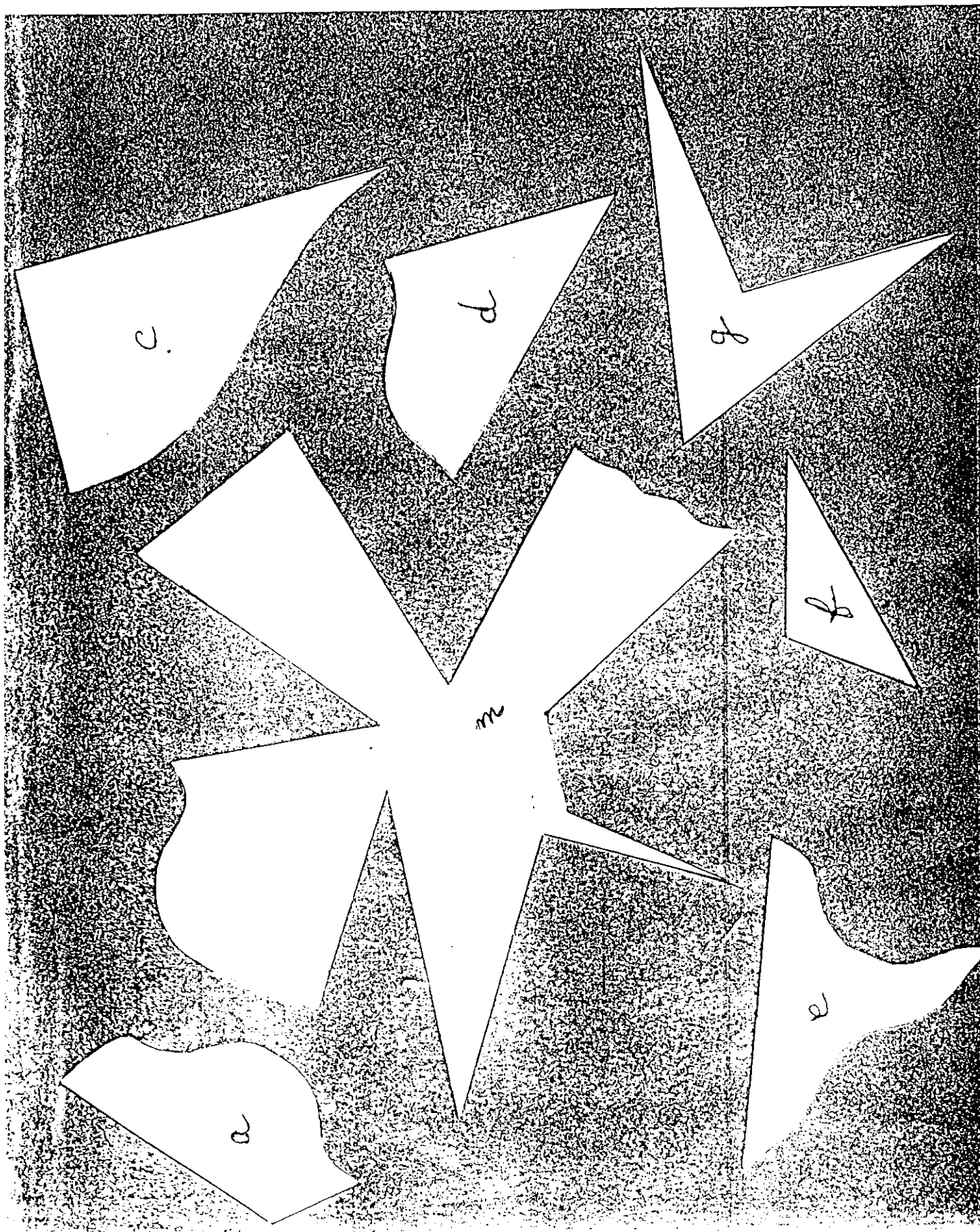
4- Donner la feuille recto-verso avec la consigne (document fourni)⁷

Observation: *Les élèves sont amenés à fabriquer un gabarit de l'angle qu'ils veulent transporter*

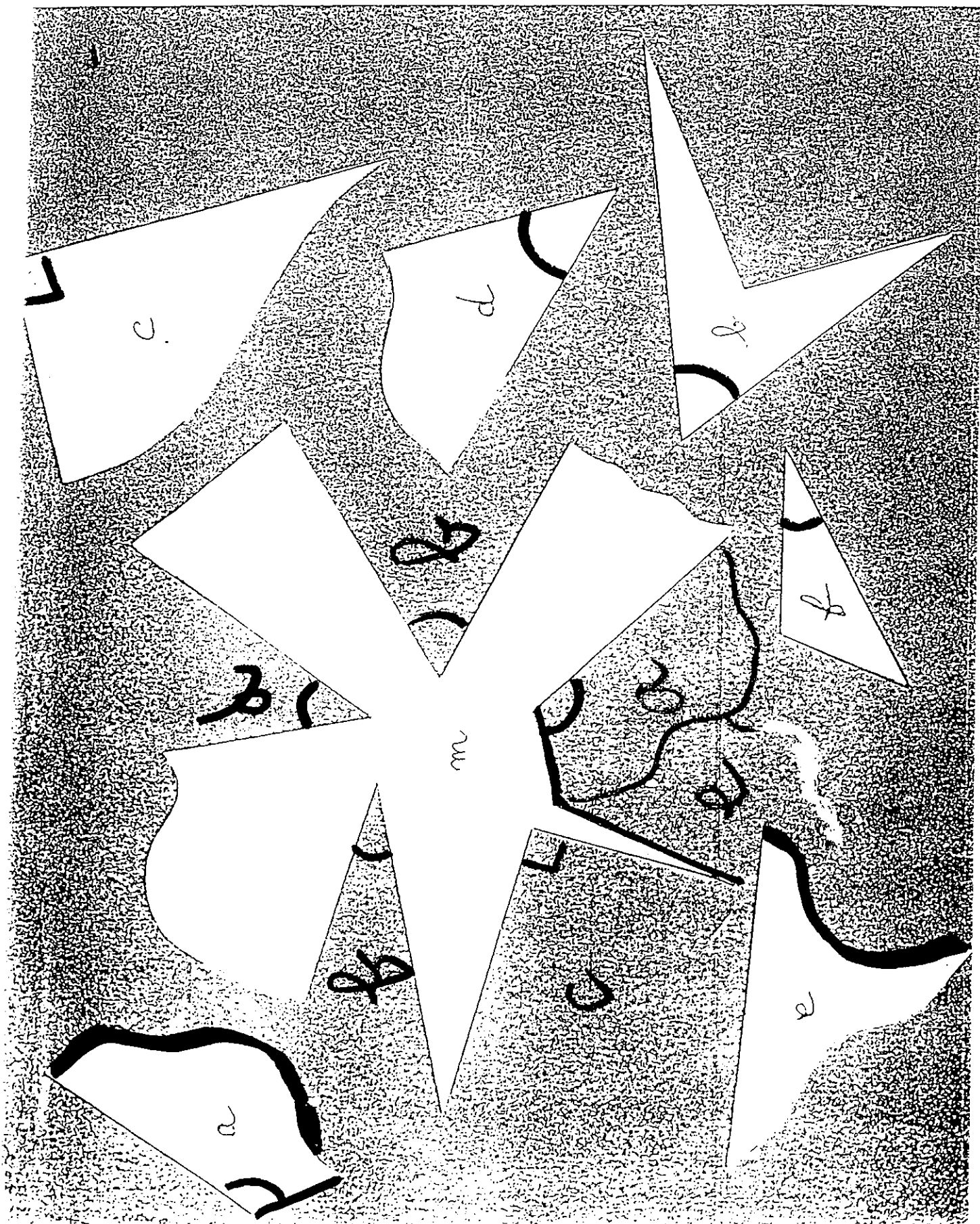
⁷- Ceci est pris dans la thèse de didactique des mathématiques de M.H. Salin et René Berthelot- LADIST- Université de Bordeaux I- 1993

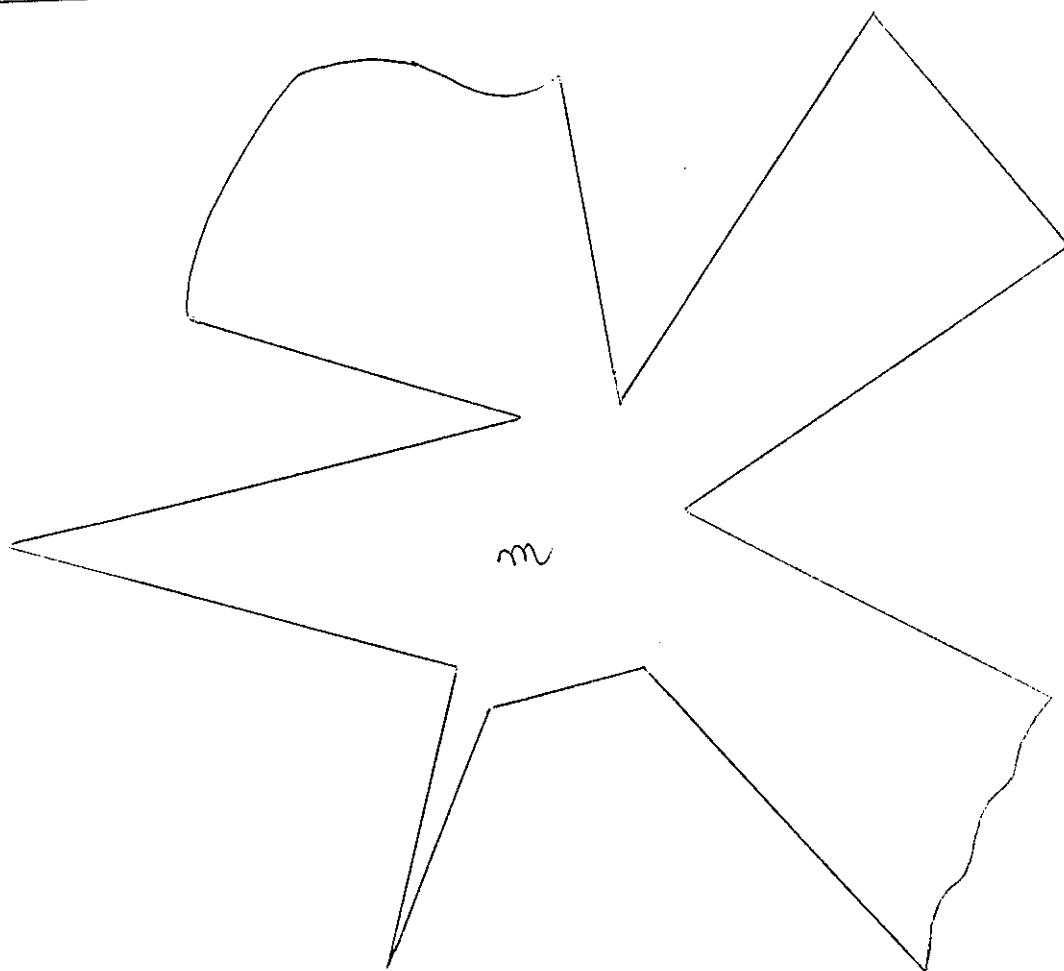
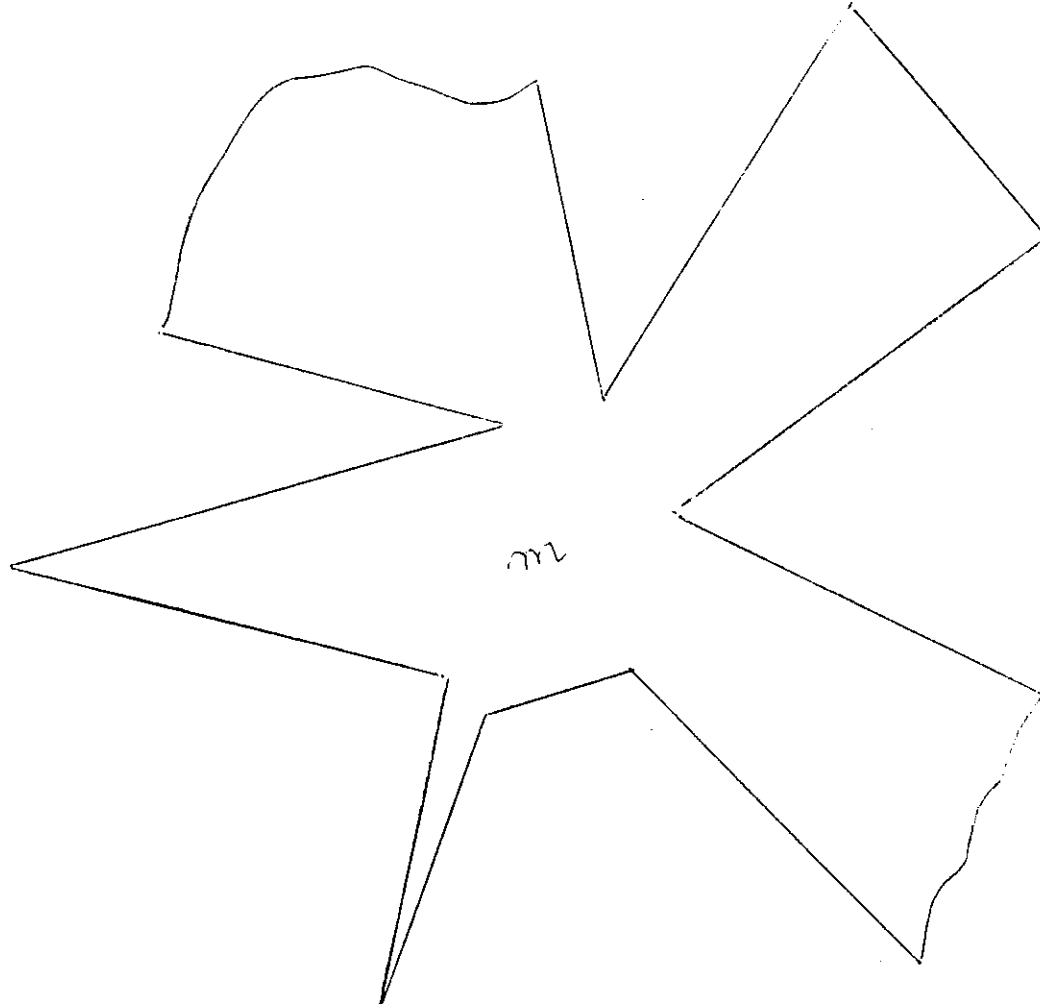
PUZZLE

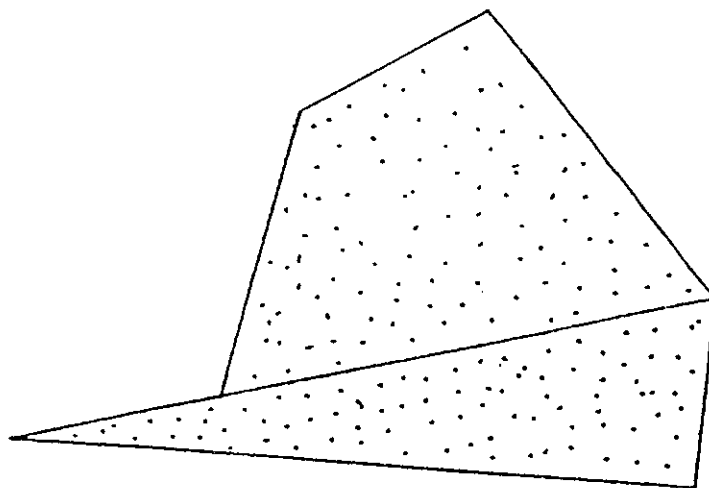
Pour que deux pièces s'encastrent il faut qu'elles aient deux bords qui se touchent



FICHE 1'- CORRIGE DE LA FICHE 1



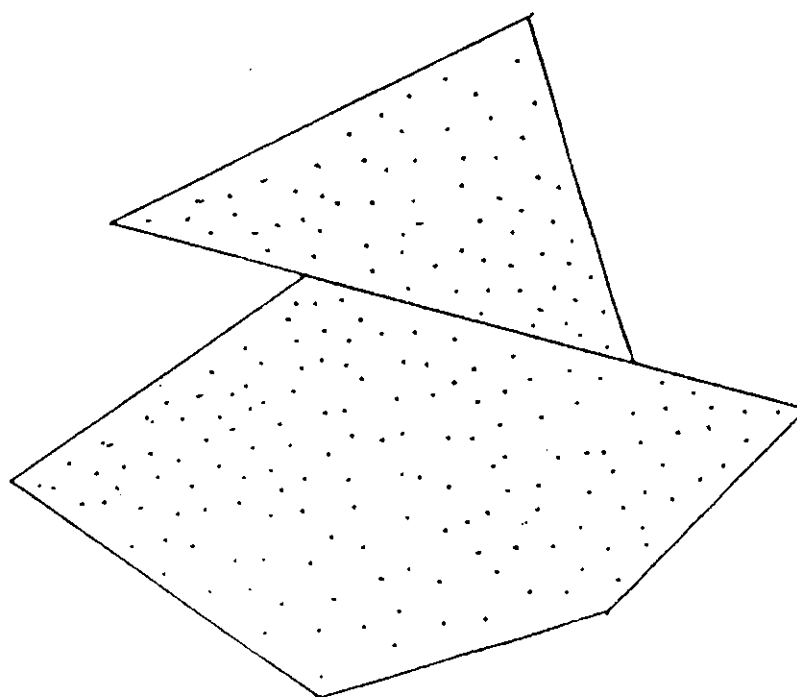




La pièce dessinée derrière la feuille peut-elle s'emboîter dans le puzzle?

Explique comment tu as fait pour répondre.

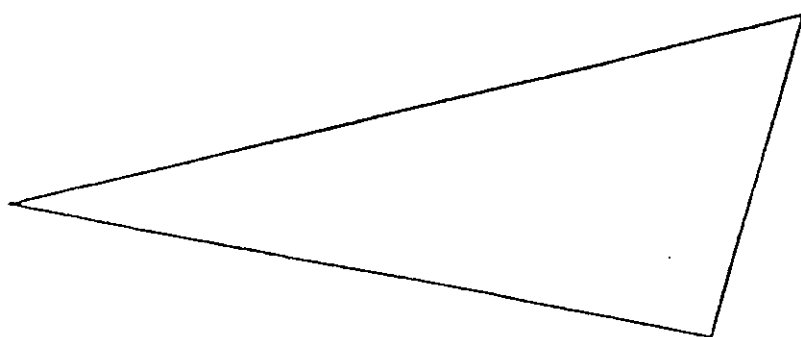
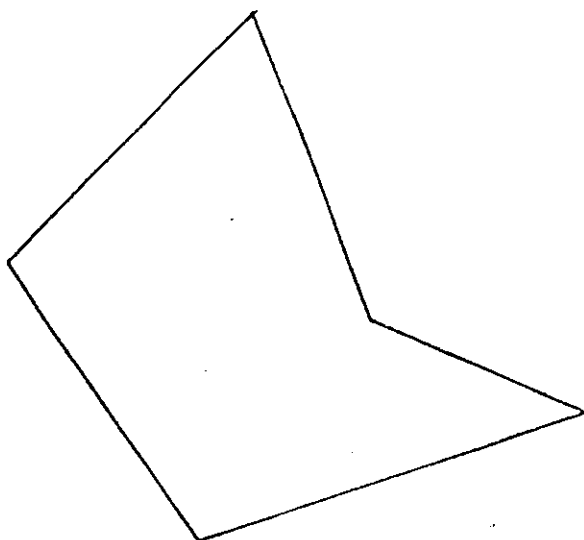
Mets une croix à l'endroit où la pièce s'ajuste.



La pièce dessinée derrière la feuille peut-elle s'emboîter dans le puzzle?

Explique comment tu as fait pour répondre.

Mets une croix à l'endroit où la pièce s'ajuste.



Situation 2: Comparer ou ajouter des angles

On donne une feuille avec de nombreux angles. Rapporteur non autorisé. (document joint).

1- Les classer du plus petit au plus grand.

2- A l'aide du calque dessiner un angle qui soit la somme des angles a et c et un autre qui soit la somme des angles b et e et un autre qui soit la somme des angles b et d.

Combien y a-t-il d'angles sur la figure obtenue? Les nommer

Observation:

1- En 1 pour classer les angles, la méthode attendue est le transport par le calque. Ceux qui prennent l'"écart" en plaçant deux points n'importe où sur les côtés et en comparant les distances avec le compas font des erreurs qui seront révélées lors de la mise en commun. Si le cas se présente, on montrera comment rendre la méthode fiable en traçant des arcs de même rayon. Sinon, inutile d'en parler, à réserver pour la 5ème.

2- L'angle rentrant, puis l'angle plat apparaissent en 2. Il semble que les nouveaux programmes de 6ème ne demandent pas de parler d'angle plat, car il y a un petit obstacle. Si c'est plat, les élèves peuvent dire "qu'il n'y a plus d'angle!". Cependant il faudra bien affronter le problème un jour, par somme cela ne nous a pas paru insurmontable, et il nous a semblé bien frileux de repousser la difficulté à l'année suivante, d'autant plus que si on veut commencer de petits raisonnements en géométrie, comme les instructions le recommandent, l'angle plat est bien utile pour se convaincre d'un alignement. Avec le pliage et les diverses représentations d'une droite (pas seulement avec un trait de crayon mais aussi un pli, un bord...) nous avons tout en main pour affronter l'obstacle. En effet si je plie la feuille, et si, sans ouvrir, je suis persuadé d'avoir représenté une droite, je peux replier en deux, et j'ai un angle plat, somme de deux angles droits. Il va sans dire que le professeur reste libre d'utiliser ce que nous disons pour la 5ème seulement.

Facultatif: Prononcer le mot d'angles adjacents

3- Pour compter les angles, il est difficile de les repérer si on ne les nomme pas avec trois lettres. Ainsi s'introduit la notation.

Bilan: 1- On note les angles avec trois lettres. la lettre du centre est le sommet.

2- On peut comparer et ajouter des angles.

3- Les angles plus petits que l'angle droit sont aigus. les angles plus grands que l'angle droit mais plus petits que l'angle plat sont obtus.

On appelle angle rentrant un angle plus grand que l'angle plat.

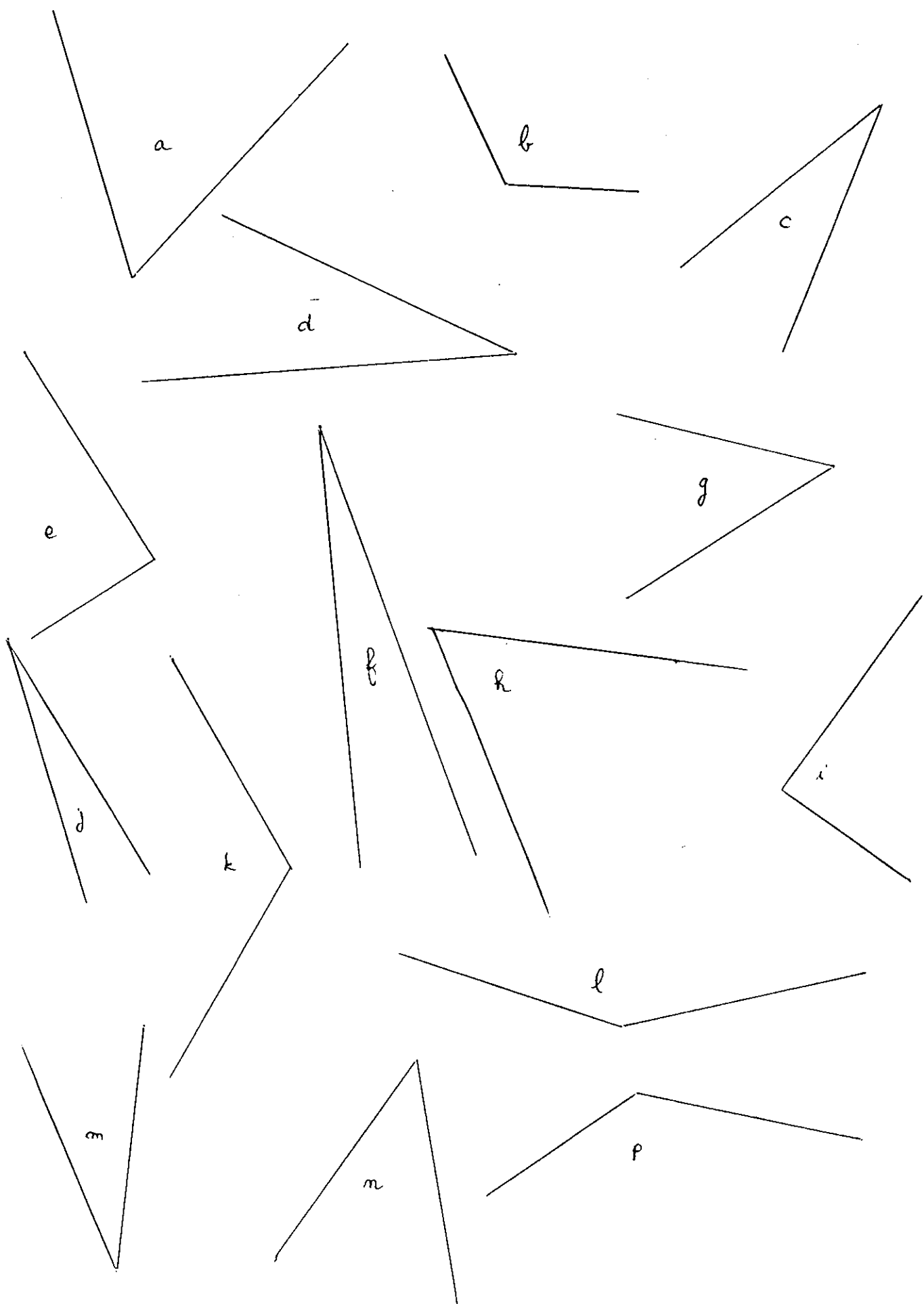
4- la notation de l'angle avec trois lettres ne permet pas de savoir si on parle de l'angle saillant ou de l'angle rentrant. Si on ne précise pas il s'agit de l'angle saillant.

Situation 3: Bissectrice

Tracer quatre angles (aigu, obtus, plat, rentrant). Partager chacun en deux angles de même mesure.

Observation: La méthode attendue est le pliage.

Bilan: On appelle bissectrice d'un angle la droite qui partage l'angle en deux angles égaux

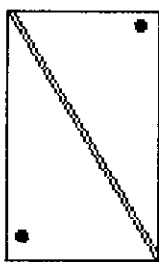


Situation 4: Gabarits d'angles remarquables, rapporteur

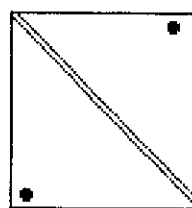
L'angle qu'on sait faire en papier est l'angle droit. Il est trop grand comme unité pour mesurer des angles. Le professeur a alors deux possibilités:

Option 1: On regarde les angles des équerres.

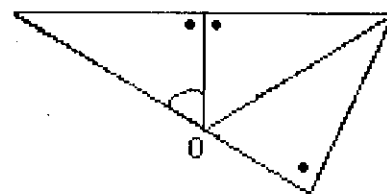
Avec deux équerres de même forme fabriquer un rectangle (équerre type 1) ou un carré (équerre type 2). Avec trois équerres de type 1 fabriquer un grand triangle rectangle



type 1



type 2



Constater l'alignement en O ce qui signifie que l'angle plat est divisé en trois parties. Constater que le plus petit des angles aigus est la moitié de l'autre.

On a divisé l'angle droit en 90 parties (degré) et donc l'angle plat vaut 180° . Les angles aigus des équerres valent donc

45° pour le type 2

60° ($180^\circ/3$) et 30° ($60^\circ/2$ ou $90^\circ/3^\circ$) pour le type 1

Option 2: On trace un triangle équilatéral. Par symétrie les trois angles sont égaux. On découpe les angles (voir croquis) et on les place côte à côte. On admet l'alignement et donc que les angles mesurent 60° , ce que les élèves savent depuis l'école élémentaire.



En traçant la bissectrice d'un angle de 60° on a 30° , et avec celle de l'angle droit on a 45°

Quelle que soit l'option choisie -on peut même combiner les deux- continuer de la façon suivante. Tous fabriquent un gabarit de 15° (soit bissectrice de 30° soit $45^\circ - 30^\circ$).

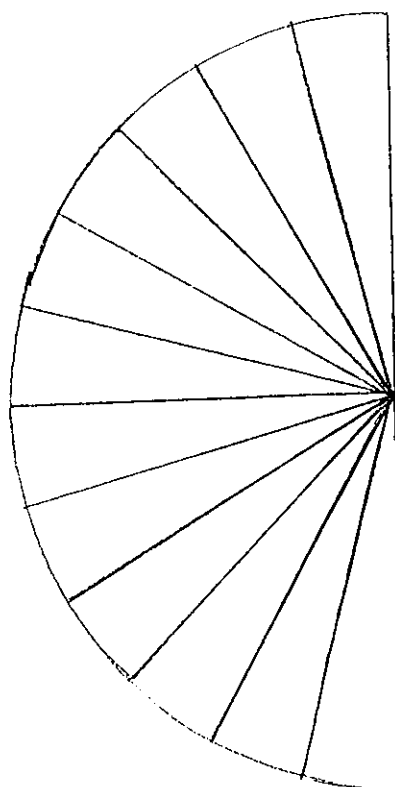
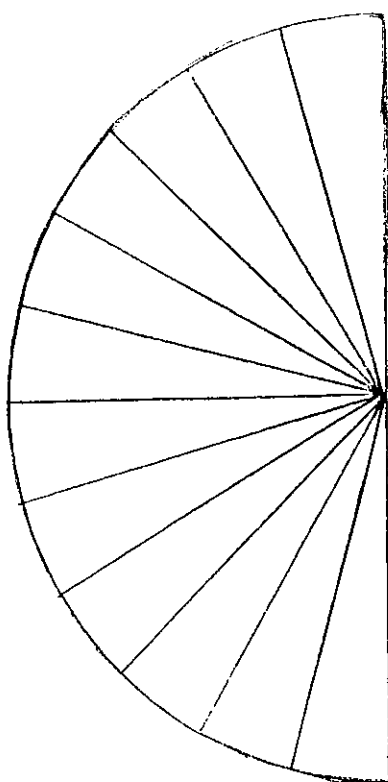
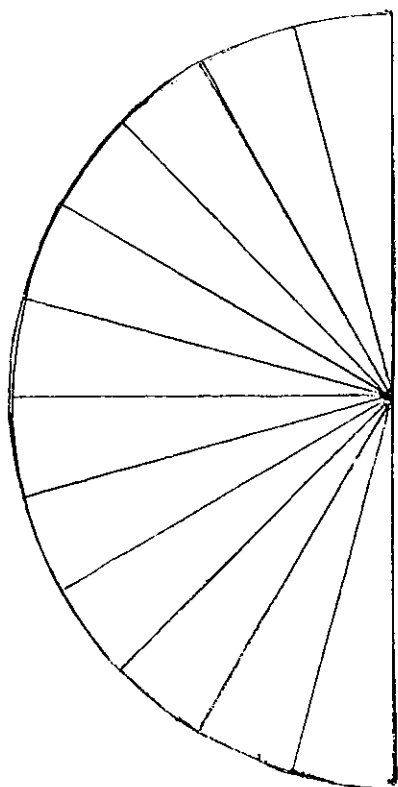
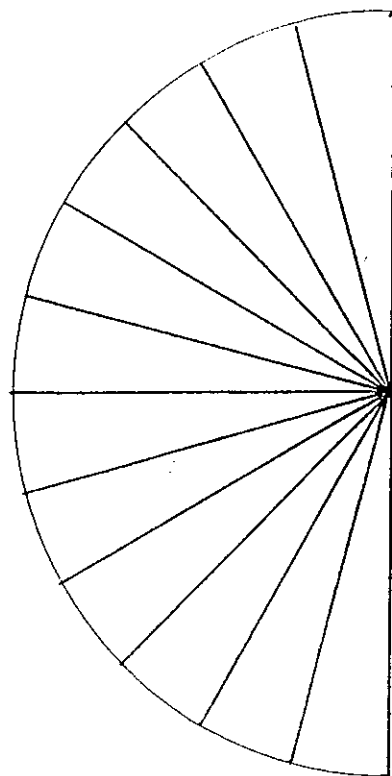
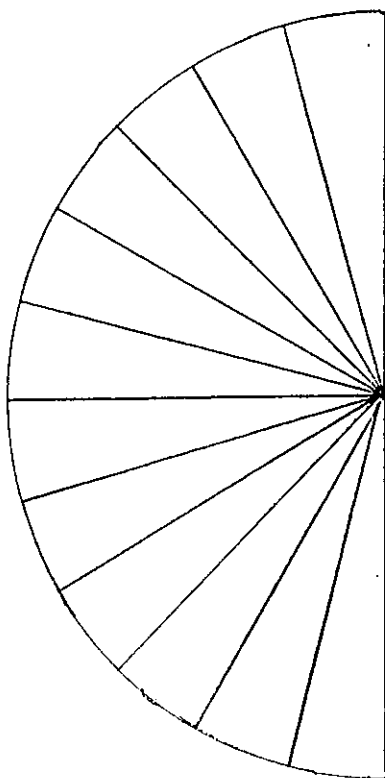
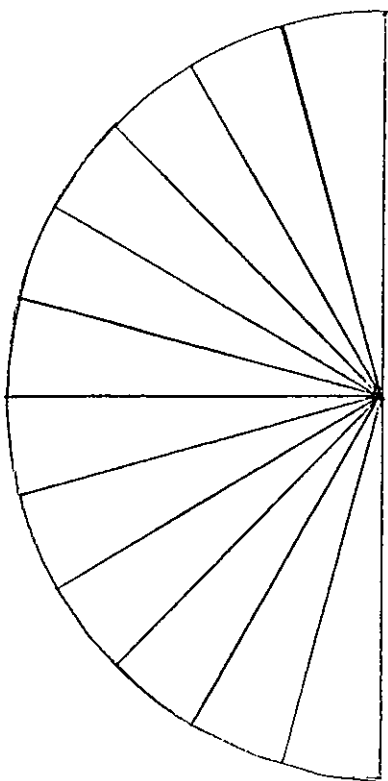
Avec les gabarits des angles de 15° , 30° , 45° , 60° et 90° constituer d'autres gabarits : 120° , 150° , 135° . Trouver d'autres angles saillants dont vous pouvez construire le gabarit par somme ou différence

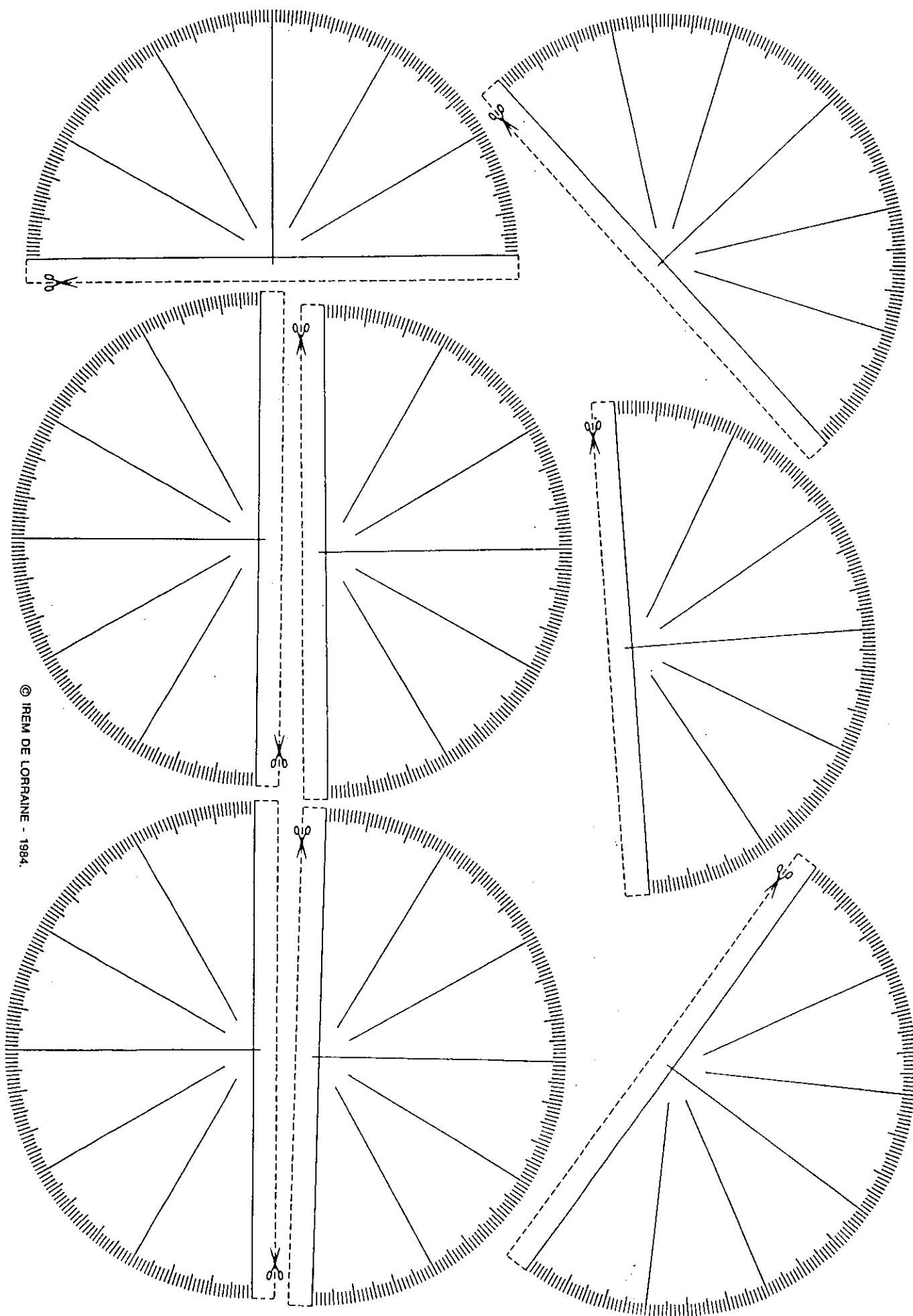
Chaque fois on fait un gabarit en carton, on marque dessus la valeur de l'angle et on conserve le tout dans une enveloppe.

Comme la longueur des côtés des angles n'a pas d'importance on arrive au rapporteur muet (demi-cercle) gradué de 15° en 15° . Ceci évite d'avoir tous ces gabarits à transporter pour tracer ou mesurer un angle. (voir document 1 joint)

Observation: Il est important que le rapporteur soit muet car cela oblige les élèves à réfléchir pour distinguer 60° et 120° par exemple. Dès que les mesures sont marquées sur le rapporteur, ils lisent sans réfléchir et se trompent.

Facultatif: quand les élèves sauront se servir du rapporteur de 15° en 15° , on peut donner un rapporteur muet de degré en degré. (voir document 2 joint, de l'IREM de Lorraine- Le professeur peut le reproduire sur transparent et découper un rapporteur muet pour chaque élève





Exercices:

1- Construire un triangle ayant un angle de 165° compris entre deux côtés mesurant 4cm et 7cm (*rapporteur muet et règle graduée seuls*)

2- Sans rapporteur, comparer les angles d'un polygone donné

Observation: Il y a plusieurs moyens: calque, gabarits en papier.

3-a- Avec les indications marquées sur la figure, CALCULER les mesures de tous les autres angles de cette figure

b- Démontrer que les bissectrices des angles xOy et yOz sont perpendiculaires



Observation: Pour 3-a, on pourra désigner les angles par de petits arcs et des numéros mais on verra qu'il est plus pratique de nommer les angles. Ne pas oublier les angles rentrants

Situation 5: Angle des aiguilles de la montre

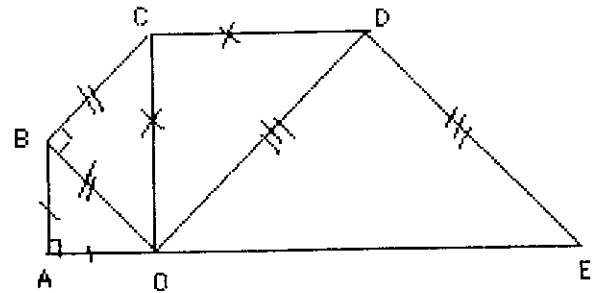
Une montre à aiguille marque trois heures et demi. Dessiner la montre et les aiguilles. Quelle est la mesure de l'angle que font les aiguilles?

Les aiguilles de la montre peuvent-elles faire entre elles un angle nul?

Solution: A trois heures et demi l'angle est de 75° ($90^\circ - 15^\circ$) car la petite aiguille a avancé de 15° durant les 30 minutes. L'angle est nul à midi et à minuit

Situation 6: Démontrer par l'angle plat que des points sont alignés

Dessiner la spirale ci-contre. On commence par le triangle rectangle isocèle OAB, puis on continue avec des triangles rectangles isocèles de sommet B, C, et D. Que peut-on dire à propos de cette figure?. Chaque affirmation doit être justifiée.



Les élèves peuvent trouver que les points A, O et E sont alignés, que les droites (OE) et (CD) sont parallèles ainsi que les droites (OD) et (BC)et ils peuvent trouver beaucoup de choses faciles à justifier avec ce qu'ils savent.

Observation: 1- Les élèves ont des difficultés à prouver l'alignement avec les angles car ils ont du mal à voir l'angle plat. Ils pensent qu'il n'y a pas d'angle parce que c'est plat. Dans un angle plat, il n'y a plus de sommet, du moins on en a le libre choix ce qui n'est pas le cas pour un angle ordinaire. Cette difficulté est normale et disparaît quand on fait fonctionner le raisonnement.

2- Nous préférons entraîner les élèves dès la 6ème pour l'angle plat. Nous verrons en 5ème comment démontrer un alignement avec l'angle nul, ce qui est encore plus difficile.

3-Symétrie orthogonale

Savoir visé:

- Symétrie orthogonale par rapport à une droite dans le plan, demi-tour autour d'une droite dans l'espace.

Conceptions repérées chez les élèves:

La symétrie orthogonale est souvent confondue avec:

- la translation
- une symétrie axiale oblique: par exemple la diagonale d'un rectangle est axe de symétrie
- la symétrie centrale

Objectif:

- Reconnaître dans le plan une symétrie orthogonale, construire l'image d'une figure par symétrie orthogonale, trouver un axe de symétrie

Situation 1: Notion de symétrie orthogonale

1- Dessiner une figure (triangle par exemple) avec un crayon à papier assez gras et plier selon une droite qui ne coupe pas le triangle. Frotter sur le papier plié. Ouvrir. Le triangle a donné par décalquage un triangle image.
Recommencer de sorte que cette fois le pli coupe le triangle de départ.

Bilan: Les deux figures sont symétriques par rapport à la droite représentée par le pli.

2- Dessiner à main levée la figure symétrique d'une figure donnée par rapport à une droite donnée (deux figures: le muguet d'abord et la voiture ensuite - document joint)⁸
Vérifier par le pliage.

Observation: Analyser les erreurs. Si l'élève a fait une autre transformation, l'identifier (translation ou symétrie par rapport à un axe vertical ou horizontal qui n'est pas l'axe donné)

- Exercices:
- 1- Même question avec le point d'interrogation
 - 2- Corriger et compléter le dessin donné de sorte qu'il présente une symétrie par rapport à l'axe tracé (d)

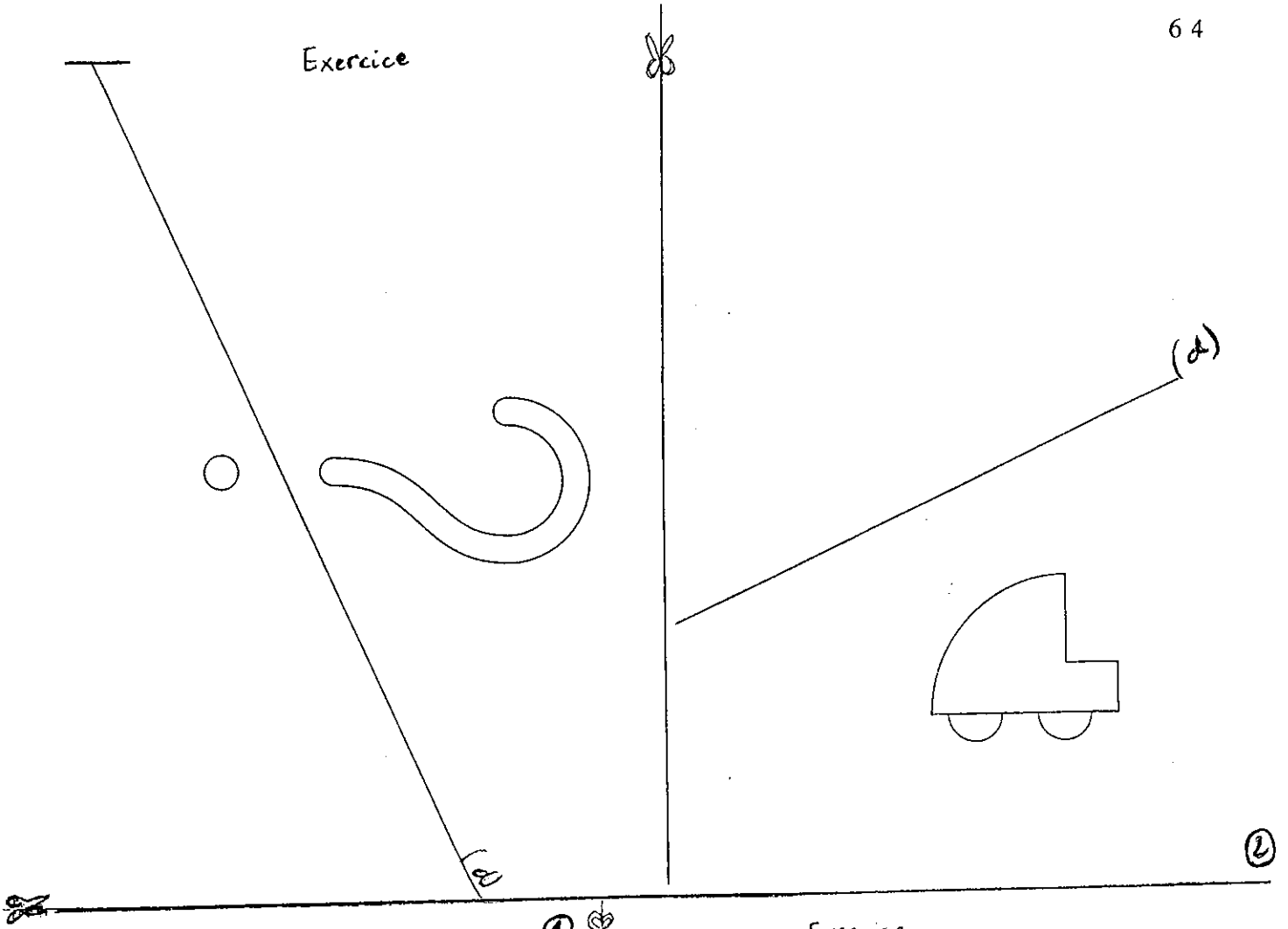
3- Plier une feuille, dessiner un quadrilatère, découper le papier en double. On a ainsi deux figures isométriques. Dessiner une droite sur un papier épais et coller une des figures hors de la droite. Trouver comment coller l'autre pour que les deux figures soient symétriques par rapport à la droite. Vérifier avec le calque.

4- Construire le symétrique d'une figure donnée. Trouver une méthode pour faire juste du premier coup. (document joint- on impose un axe qui touche puis qui coupe la figure)⁹.

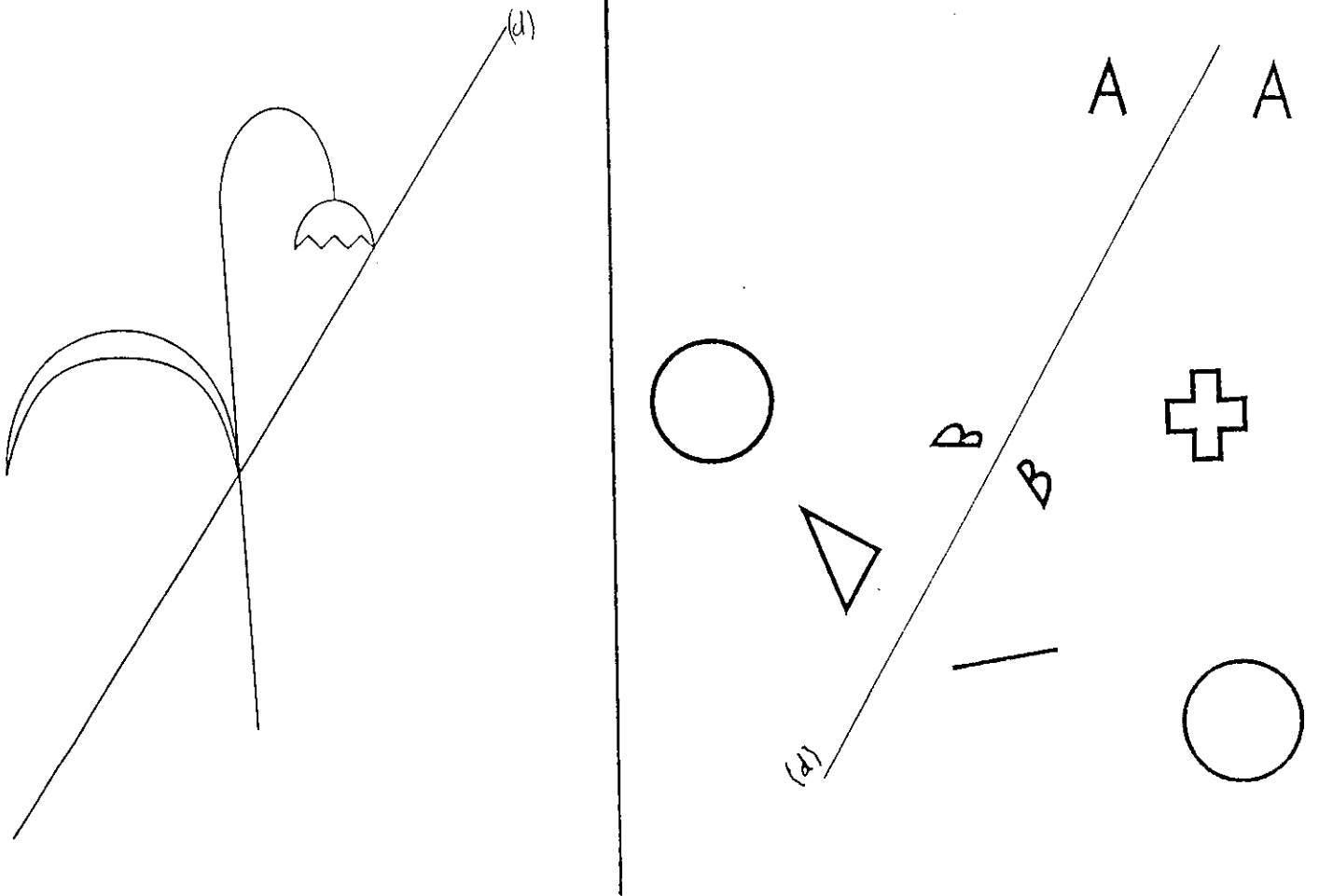
⁸ Document tiré de ERMEL classe de 6ème pages 130 et 131- INRP- Editions Hatier

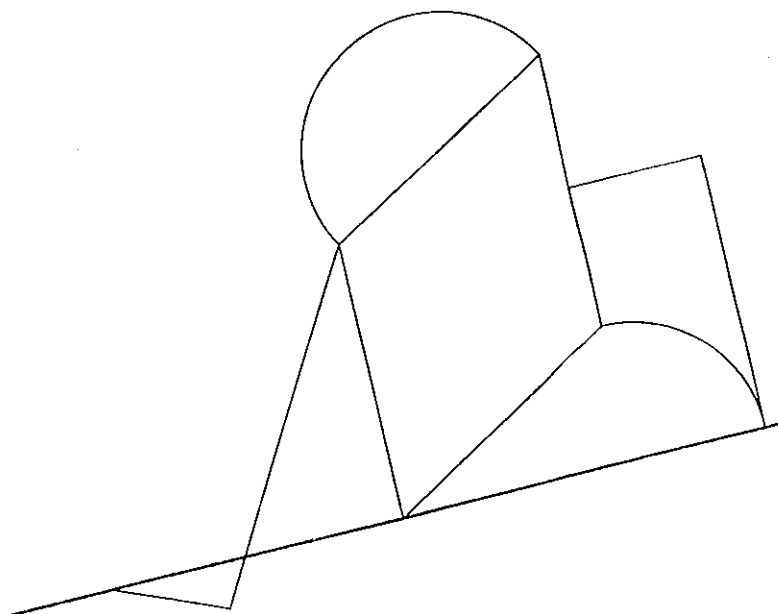
⁹ Document tiré de ERMEL classe de 6ème page 136

Exercice



Exercice





Observation: Les élèves trouvent différentes méthodes (équerre, compas). Le professeur leur demande de les expliciter.

Bilan: 1- L'axe de symétrie est la médiatrice des segments formés par un point et son image.
 2- Des points alignés se transforment en points alignés et les longueurs sont conservées. En appliquant ceci, il suffit de choisir quelques points et de trouver leurs images pour avoir toute la figure symétrique.
 3- la figure et la figure symétrique se coupent sur l'axe car un point de l'axe est son propre symétrique

5- Dessiner deux droites. Choisir une des droites comme axe de symétrie et tracer la symétrique de l'autre par rapport à cet axe. On obtient trois droites. Peut-on obtenir deux droites parallèles sur les trois?

Bilan: 1- Quand une droite coupe l'axe, sa symétrique le coupe au même point.
 2- Quand une droite est parallèle à l'axe, sa symétrique est parallèle à l'axe

Situation 2: Transformation des angles

1-Tracer une figure représentant une montre à 3H et demi. Dessiner le symétrique de cette figure par rapport à une droite parallèle à la grande aiguille.
 Quelle heure est représentée sur la montre symétrique?

Observation: Pour faire dessiner la première montre, voir le chapitre précédent sur les angles. Faire remarquer le changement de signe de l'angle, simplement en montrant qu'on ne tourne pas dans le même sens pour passer d'un côté au second sur la figure, puis sur son image. Il faut prendre une droite parallèle à la grande aiguille sinon la figure symétrique obtenue ne peut s'interpréter pour donner une heure

2- Demander le symétrique d'un mot écrit

Observation: On regarde le mot dans un miroir et on a la solution cherchée. Expliquer pourquoi (lois de la réflexion permettant de construire l'image d'un point . (dessin dans un plan vertical quand le miroir est horizontal)

Certaines élèves signalent alors l'écriture du mot *POLICE* "à l'envers" sur les voitures des policiers (pour voir dans le rétroviseur)

Nous avons entendu des élèves dire que leur image qu'ils voient en se plaçant au bord d'une eau dormante est leur "ombre". Au sortir du collège les élèves pourraient ne plus confondre leur ombre et leur reflet

Situation 3: Axe de symétrie:

Dans les dessins fait plus haut, on peut voir soit deux figures symétriques, soit une seule figure (en effaçant l'axe par exemple). La figure unique est telle que si on plie selon l'axe ancien elle se superpose exactement sur elle-même. On dit qu'elle a un axe de symétrie.

1- Construire une figure quelconque qui a un axe de symétrie
 2- Tracer un cercle et une corde [AB] de ce cercle. Tracer un segment [CD] perpendiculaire à [AB]. Comment placer C et D de sorte que le quadrilatère obtenu ABCD n'ait aucun axe de symétrie, un axe de symétrie, deux axes de symétrie ?

Bilan:

- 1- Une figure a un axe de symétrie quand elle est sa propre symétrique par rapport à cet axe.
- 2: Dans un cercle, tout diamètre est axe de symétrie
- 3- Un losange est un quadrilatère dont les diagonales sont médiatrices l'une de l'autre donc un losange a deux axes de symétrie qui sont ses diagonales. Il a donc aussi tous ses côtés de même longueur

2-Tracer quatre figures: un triangle isocèle de sommet donné, un triangle équilatéral,
 deux triangles isocèles de même base donnée
 un quadrilatère qui a tous ses côtés de même longueur
 Rechercher si les figures données peuvent coïncider sur elles-mêmes par un pliage

Observation: Pour les figures du 2, il est facile chaque fois de raisonner.
 Par exemple soit le triangle isocèle ABC de sommet A . On plie de sorte que B vienne sur C . Le pli est la médiatrice de $[BC]$ et donc passe par A . On peut raisonner sur la figure sans la plier: Soit M le milieu de $[BC]$, la droite (AM) qui a deux points équidistants de B et C est médiatrice de $[BC]$. C'est un axe de symétrie et on en déduit les propriétés du triangle isocèle: angles à la base égaux, la médiane est aussi hauteur et médiatrice, on peut même prouver réciproquement que la hauteur est aussi médiane (unicité de la perpendiculaire à (BC) passant par A)

Bilan:

- 1- Dans un triangle isocèle les angles à la base sont égaux, c'est le même angle
- 2- Dans un triangle isocèle, la médiane relative à la base est aussi hauteur et médiatrice de la base.
- 3- Un quadrilatère qui a ses quatre côtés de même longueur est un losange

3- Axe de symétrie de deux demi-droites (bissectrice), de deux droites parallèles
 - Axes de symétrie dans le triangle équilatéral, le rectangle, le carré, les polygones réguliers.

Observation: Pour deux droites parallèles, prendre un point sur l'une et tracer la perpendiculaire aux deux droites. On obtient deux points A et B . On plie de sorte que A vienne sur B

4- Compléter une figure pour obtenir une figure ayant un axe de symétrie donné, en particulier un triangle quelconque et un de ses côtés (on obtient une pointe de flèche ou cerf-volant), un triangle quelconque et une de ses bissectrices ou médiatrices, (essayer toutes sortes de triangles), un cerf-volant et son autre diagonale (on obtient deux losanges)

Observation: Les élèves disent: "une figure a un axe de symétrie quand cette droite la partage en deux parties superposables". C'est incomplet. il faut ajouter: superposables par pliage autour de cette droite. Voici des contre-exemples à donner, parce qu'ils peuvent constituer des obstacles:

- un rectangle non carré et sa diagonale qui le partage bien en deux parties superposables (symétrie centrale) mais qui n'est pas un axe de symétrie,
- ou bien un parallélogramme et la droite qui joint les milieux de deux côtés opposés. (symétrie d'axe oblique)

Bilan: Les seuls triangles ayant un axe de symétrie sont le triangle isocèle (un axe) et le triangle équilatéral (trois axes)

Situation 4: Tracé de la bissectrice d'un angle

Rechercher une méthode pour tracer à la règle et au compas (sans calque) la bissectrice d'un angle donné

Bilan: Deux méthodes:

Avec le compas seul: Tracer un triangle isocèle ayant même sommet O et même côtés que l'angle donné et tracer la médiatrice de la base

Avec le double décimètre seul : Prendre deux points A et A' à la même distance de O . Ils sont symétriques. Puis prendre B et B' deux autres points aussi à la même distance de O . Les droites (AB) et $(A'B')$ sont symétriques et se coupent en I sur l'axe de symétrie.

Situation 5: Symétrie du triangle isocèle

1: Soit un triangle ABC quelconque.

Comment avoir un triangle ayant un axe de symétrie en conservant les points A et B (base $[AB]$) et un des deux angles CAB ou CBA ?

2: Soit un triangle ABC ayant deux angles égaux $CAB = CBA$.

Comment prouver qu'il est isocèle?

Solution : 1- Il faut tracer la médiatrice de $[AB]$ et prendre pour sommet le point d'intersection de cette médiatrice avec un des deux autres côtés (deux solutions C' ou C'')

2- On trace la médiatrice de $[AB]$ qui coupe (AC) en C' , à priori différent de C

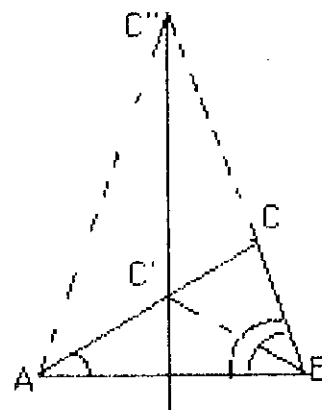
Par symétrie: $C'AB = CAB = C'BA$

et par hypothèse $CAB = CBA$

donc $C'AB = CAB$ donc l'angle CBC' est nul, donc $C = C'$

Cette deuxième partie est un peu difficile. Le professeur peut ne pas démontrer et admettre directement le résultat qui est très

utile pour commencer à bâtir de petits raisonnements en géométrie. C'est pour cette raison que nous avons donné la justification, le professeur jugera.



Bilan: 1- Un triangle isocèle a ses angles à la base égaux et réciproquement tout triangle qui a deux angles égaux est isocèle.

2- Un triangle isocèle ne peut avoir un angle à la base droit

3- Un triangle équilatéral a tous ses angles égaux et réciproquement un triangle qui a ses trois angles égaux est équilatéral.

Exercice: Tracer une droite et un point A placé hors de la droite. Placer un autre point B . Le point A , son symétrique A' , le point B , son symétrique B' forment une figure. Selon la place de B , quelles peuvent être les figures obtenues?

Solution: Si le point B est sur la droite on obtient un triangle isocèle ou un triangle équilatéral.

Si le point B est hors de la droite, on obtient un trapèze isocèle, un rectangle ou un carré.

9- Initiation aux fonctions et aux graphiques à partir de l'aire du rectangle

Situation 1: Révision sur aire et périmètre du rectangle

- 1- Dessiner 7 rectangles de périmètre 18.
- 2- Voici une ficelle de périmètre 18. Avec cette ficelle je fais deux rectangles voisins. Ont-ils la même aire?
- 3- Découper les rectangles que vous avez dessinés dans des papiers de couleur différentes. Trouver des critères de classement pour ces rectangles

Observations: Poser la question 2 quand la question 1 a été résolue et poser la 3 quand les deux autres sont résolues

Demander au moins 7 rectangles en prenant un périmètre assez petit comme 18 de sorte qu'il ne soit pas facile de trouver des rectangles de dimensions simples. Avec ce choix de 7 et de 18, il n'y a que trois rectangles faciles à trouver immédiatement: 5 sur 4; 6 sur 3 et enfin 2 sur 7. Les élèves doivent en trouver quatre autres

1- Ils s'interrogent alors:

-si un rectangle très allongé (1 sur 8 par exemple) est ou non un rectangle.

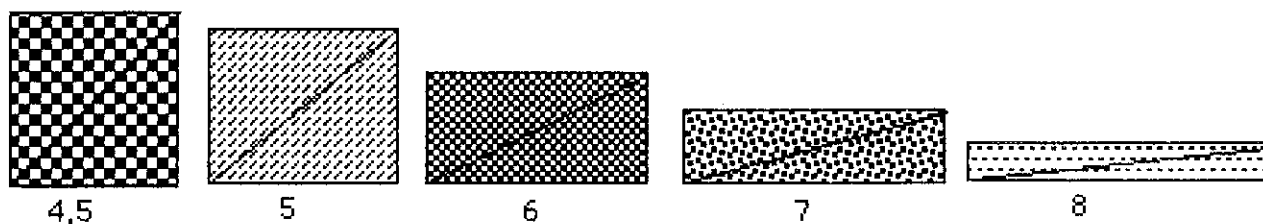
Nous avons rencontré des élèves qui disent que ce n'est pas un rectangle mais une bande. C'est le vocabulaire usuel: "découper une bande"

- si le carré est ou non un rectangle

2- Les dimensions entières sont insuffisantes. Le passage aux décimaux est facilité par l'introduction du carré de côté 4,5

Critères: On peut classer par ordre croissant par exemple selon une dimension, selon la longueur de la diagonale, selon l'aire.

Le classement donne ceci par ordre croissant d'une dimension et de la diagonale et par ordre décroissant de l'aire



- 3- Rassembler les rectangles découpés et les classer en les superposant avec un sommet commun comme le montre le dessin. Les quatrièmes sommets sont alignés. Peut-on l'expliquer?
- 4- Tracer le graphique qui représente la variation de l'aire en fonction d'une dimension point par point.

Observations:

1- Cette situation peut être utilisée depuis la sixième jusqu'à la seconde.¹⁰

2- La superposition donne ceci:

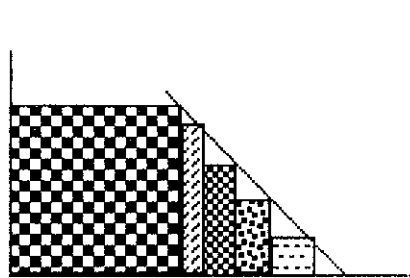


figure 1

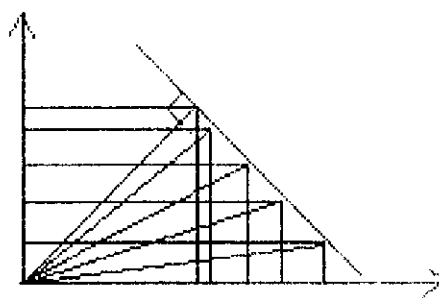


figure 2

Les quatrième sommets sont alignés à cause de la compensation pour conserver le périmètre: par exemple si j'enlève 2 cm à une dimension, je dois rajouter 2 cm à l'autre dimension, de sorte que j'obtiens, en superposant les deux rectangles, un triangle rectangle isocèle "entre les coins". Et ceci se reproduit car quelle que soit la longueur que j'enlève à une dimension, je rajoute la même à l'autre. On a donc une "pente" constante de 45° , ce qui explique l'alignement sur une droite parallèle à la deuxième bissectrice des axes.(figure 1)

La superposition donne le classement selon une dimension croissante, ou selon la diagonale de plus en plus grande : la plus courte est celle du carré car la diagonale du carré est perpendiculaire à la droite qui porte les sommets, et plus on s'éloigne du pied de la perpendiculaire plus la diagonale augmente. (figure 2) . On a un classement par aires décroissantes.

3- Dans la question 4 on obtient une demi parabole. Pour placer des points assez nombreux, les élèves sont conduits à calculer le produit de deux décimaux. Le graphique permet de vérifier d'un coup d'oeil s'il n'y a pas une erreur de calcul (dans ce cas la courbe n'est pas jolie et si l'erreur est grossière il y a un point aberrant) .

Les rectangles réalisés avec la ficelle nouée permettent d'introduire la symétrie. Faire compléter la parabole par symétrie et aussi l'empilement des rectangles ce qui donne un classement par aire croissante (graphique d'une dimension en fonction de l'autre)

¹⁰- Cette situation se réfère à l'ouvrage d'Annie Berté: *Mathématique du Collège au lycée* (chapitre 1) Editions Nathan-Pédagogie- 1996. On y trouvera les prolongements possibles pour les classes ultérieures

10-Lectures de programmes de construction. Dessin à main levée

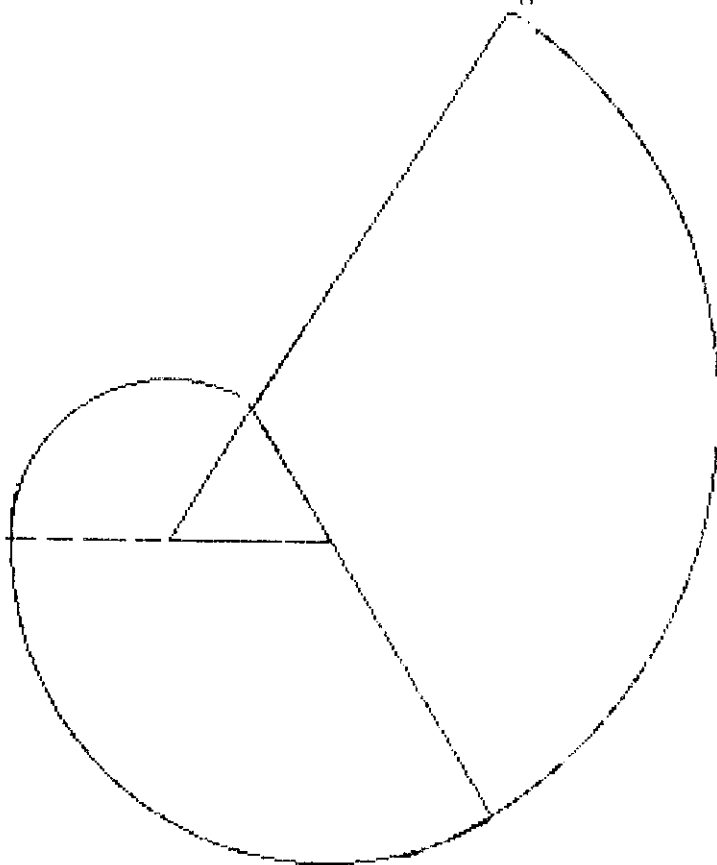
Situation 1: Associer figures et programmes de construction

On donne différentes figures et les différents programmes de construction correspondants, le tout en désordre. (document joint n°1^{1 1)})

Un des intérêts de ce travail est de faire prendre conscience aux élèves que si le professeur demande par exemple de tracer un triangle isocèle, celui qui trace un triangle équilatéral donne une réponse valable. En revanche si la demande est faite au cours d'un problème de géométrie il est déconseillé de dessiner un cas particulier.

Situation 2: Reproduction de figure

1- Donner à reproduire la figure suivante sachant que le triangle est équilatéral. Il faut repérer que les centres des arcs sont les sommets du triangle

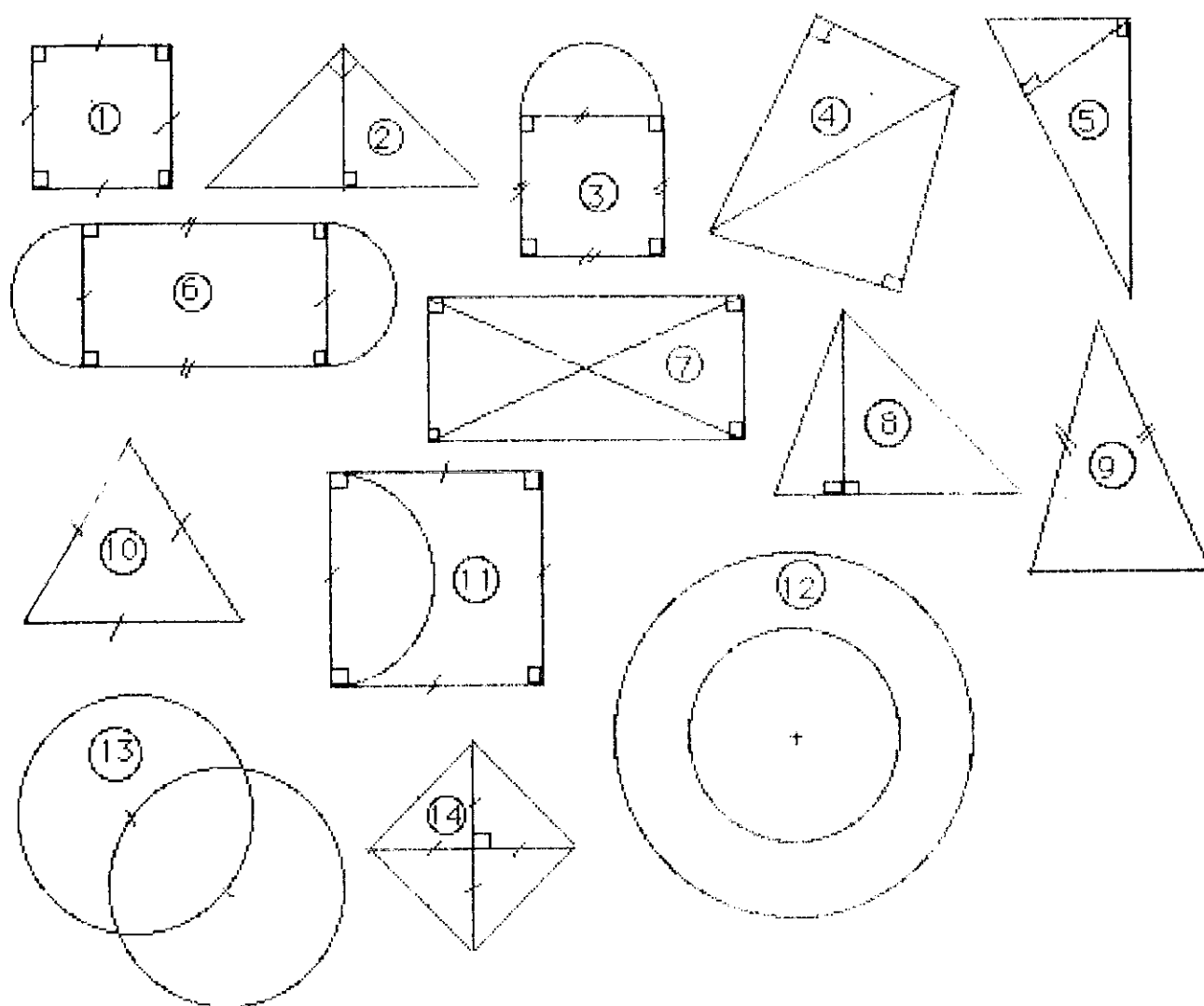


2- Donner ces figures (document joint n° 2) ou d'autres et demander de les reproduire sans mesurer (avec règle non graduée et compas) en imposant une autre place et /ou une autre longueur pour un segment de la figure

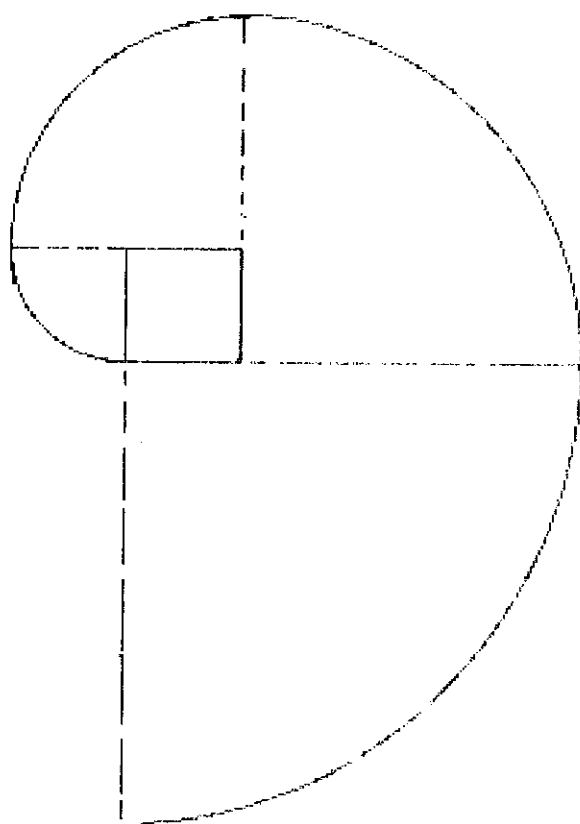
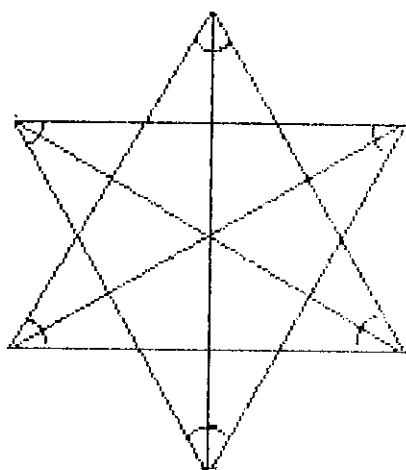
^{1 1} - Ceci est inspiré d'un article d'Annick Massaut et Eric Jaffrot paru dans la revue "Reperes" n° 12 - Juillet 93

Tu as 14 figures repérées par des N° (1,2,3...) et 12 textes repérées par des lettres (A, B, C...). Chaque texte correspond ou non à un programme de construction d'une ou de plusieurs des 14 figures. Sur chaque figure, les propriétés qu'elle possède sont indiquées par un code. Associe les textes et les figures qui vont ensemble.

- A- Tracer deux cercles qui ont les mêmes centres et des rayons différents
 B- Tracer un triangle rectangle et la perpendiculaire à l'hypoténuse passant par le sommet de l'angle droit
 C- Construire un carré, et à l'intérieur un quart de cercle ayant pour rayon le côté du carré et pour centre l'un des sommets
 D- Construire un triangle isocèle
 E- Tracer un cercle de 2,5 cm de rayon, puis un autre cercle de même centre et de rayon 1,5cm
 F- Construire deux triangles rectangles ayant un côté de l'angle droit en commun.
 G- Tracer un carré et ses deux diagonales
 H- Tracer un triangle rectangle isocèle
 I- Construire un rectangle et deux demi-cercles ayant pour diamètre des côtés opposés du rectangle
 J- Construire un carré et à l'extérieur un demi-cercle ayant pour diamètre un des côtés du carré
 K- Construire un triangle équilatéral de 3 cm de côté
 L- Construire un triangle rectangle dont les côtés mesurent 4 cm et 2 cm. tracer la hauteur issue du sommet de l'angle droit.

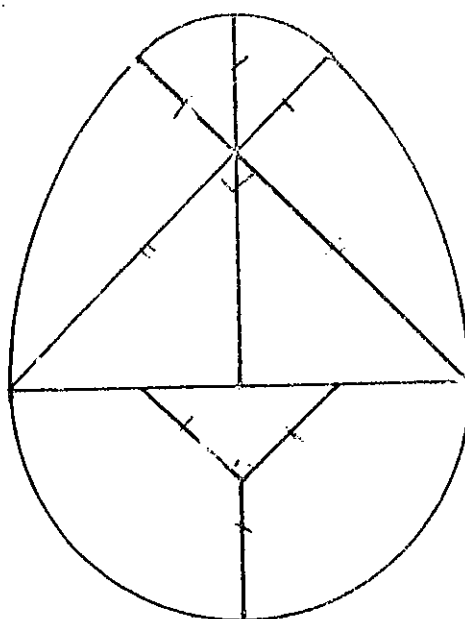


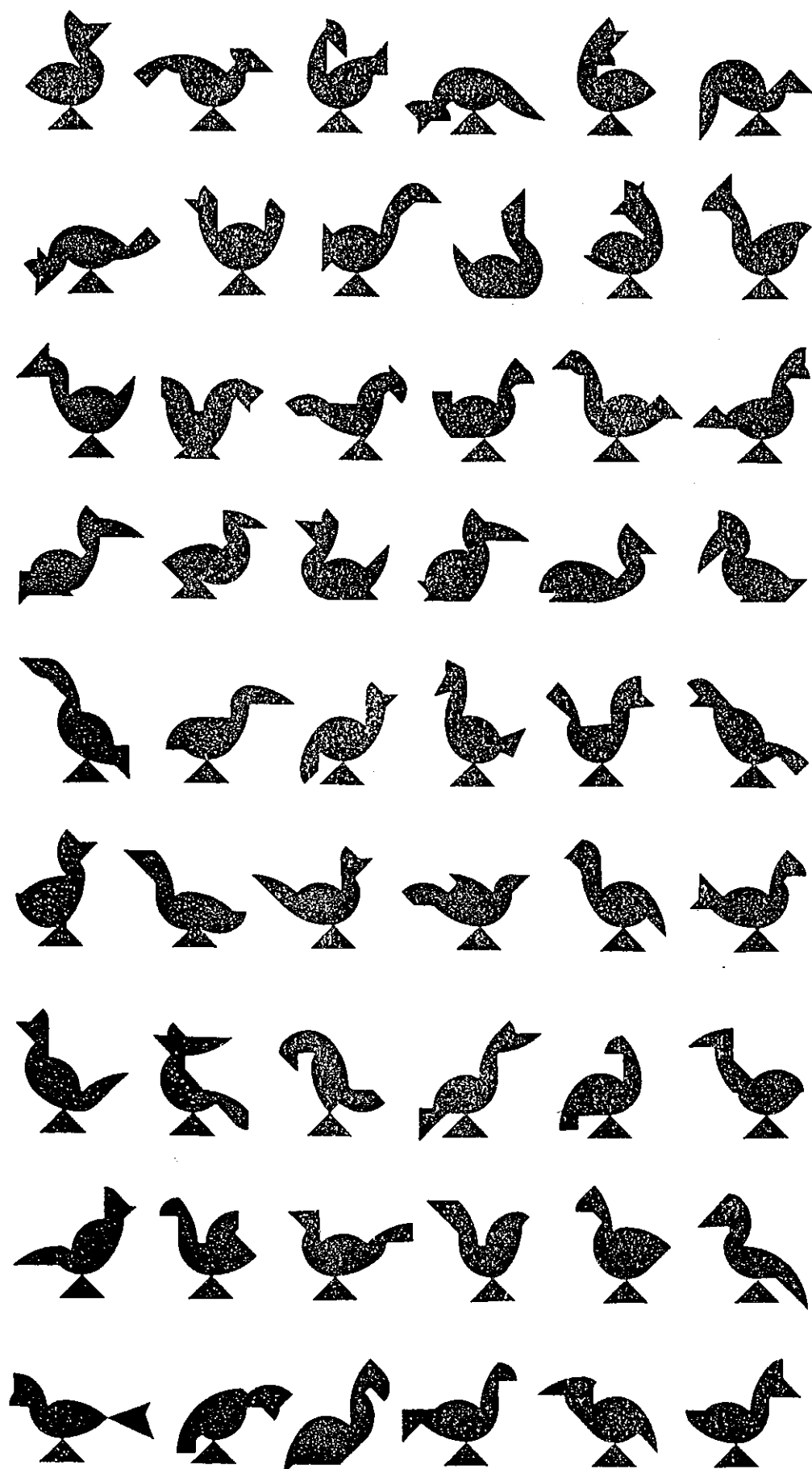
Document 2



Les oiseaux sortent de l'oeuf, c'est bien connu. Une fois brisé, cet oeuf donne naissance à toute une famille d'oiseaux.

Avant de pouvoir faire les oiseaux il faut fabriquer le puzzle en carton





QUELQUES NOTIONS THEORIQUES POUR CONCLURE^{1 2}

Pour écrire ce document sur la géométrie nous nous sommes appuyés sur des connaissances théoriques de didactique des mathématiques d'une part et de pédagogie générale d'autre part, même si cela ne transparaît pas explicitement à travers notre travail destiné avant tout à aider les enseignants et que, pour cette raison, nous avons conçu dans une forme très pratique. Nous n'avons pas voulu en alourdir la lecture par des références théoriques. Cependant il ne faut pas se leurrer. Sans la prise de distance que permettent certaines théories, on peut améliorer la pratique dans une certaine mesure seulement, et en général sur de petits détails, qui ont leur importance, certes, mais qui ne font pas vraiment changer les choses. En revanche, en utilisant certaines théories pour préparer sa classe, le professeur peut améliorer vraiment les apprentissages. C'est exactement comme "si dans le premier cas on perfectionnait la diligence tandis que dans le deuxième cas on inventait la machine à vapeur". Nous empruntons cette métaphore à une conversation avec Guy Brousseau.

Il est bien évident qu'un enseignant isolé n'a ni le temps, ni les moyens matériels, de lire de nombreux ouvrages, d'en extraire des théories applicables, de les assimiler suffisamment pour pouvoir les appliquer, tout ceci dans la solitude, sans échanger avec des collègues et passer de nombreuses heures à discuter de son travail, à exprimer ses idées, les défendre, les modifier, pour les améliorer. C'est ce que permet la structure d'un groupe IREM où travaillent des enseignants "de terrain" dont certains ont le courage d'entreprendre des travaux de recherche en didactique, ou du moins de s'adonner à des actions de formation initiale en IUFM ou de formation continue dans un IREM ou une MAFFPEN. Ces engagements les obligent à lire des ouvrages théoriques, à en discuter, ce qui leur donne aussi quelques moyens en décharge horaire. Hélas ces moyens sont de plus en plus faibles.....En ce qui nous concerne, à l'IREM d'Aquitaine, nous espérons cependant pouvoir au moins terminer la rédaction, qui est presque déjà finie, d'un deuxième fascicule qui s'intitulera : *"La géométrie en 5ème et 4ème"*. Nous découpons nos fascicules conformément aux nouveaux cycles du collège. Mais nous n'avons pas pu écrire *"La géométrie en 6ème"* sans avoir une vue assez précise sur ce que nous pourrions écrire dans les classes ultérieures, aussi bien d'ailleurs sur la partie géométrique que sur la partie numérique et algébrique.

I- DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES

Les connaissances dont nous avons bénéficié pour ce travail sont d'abord des connaissances de didactique des mathématiques^{1 3}. De façon plus précise, nous nous sommes appuyés sur :

^{1 2}- Ce texte a été rédigé par Annie Berté et par Cathy Desnavres.

^{1 3}- Le professeur novice en didactique des mathématiques voulant approfondir le contenu de ce qu'il trouve ici et aussi avoir d'autres exemples pourra, avant de lire certains travaux théoriques de recherche, lire dans deux ouvrages d'initiation à la didactique des mathématiques pour les enseignants, les textes intitulés "textes de didactique des mathématiques" ainsi que les dialogues entre élèves et professeurs et les commentaires didactiques correspondants. Il s'agit de: *Mathématique dynamique*- 1993- et *Mathématique du collège au lycée* - 1996- par Annie Berté- Nathan- Pédagogie-

1- Notion d'obstacles

Elle a été précisée par Guy Brousseau en didactique des mathématiques¹⁴. Les études sur les obstacles nous ont permis de nous référer aux conceptions des élèves en même temps qu'au savoir visé pour fixer les objectifs des apprentissages. La notion de "conception" est théorique. Elle est construite par le didacticien. On ne peut pas ouvrir les têtes des élèves pour connaître de façon effective leurs conceptions! Mais d'après les travaux qu'ils produisent, ce qu'ils expriment oralement, on peut inférer des conceptions, des modèles implicites, qui proviennent de connaissances antérieures. Certaines de ces conceptions font obstacle car le savoir nouveau se construit par restructuration du savoir ancien qui résiste, mais sans modèles implicites dans la tête des élèves, le professeur ne peut rien enseigner. C'est un point d'appui duquel nous partons, en prévoyant des explicitations et des restructurations. Un obstacle n'est pas une absence de connaissance. Au contraire c'est une connaissance, un savoir, qui a fait ses preuves pour l'élève à un moment, mais qui doit se révéler insuffisant pour que l'élève progresse. Il fait des erreurs car il cherche à utiliser ce savoir hors de son domaine de validité qu'il connaît mal. Cerner mieux les limites de notre savoir est la condition pour commencer à apprendre un savoir nouveau. Les didacticiens font la distinction entre "connaissances" et "savoirs". Les connaissances sont du domaine privé: un élève de 6ème a des connaissances sur l'espace, il les a acquises en explorant l'espace dans ses déplacements. Les savoirs eux, sont institutionnels. La géométrie est un savoir, qui relève des mathématiques et n'a pas un rapport direct avec la connaissance de l'espace. Un chauffeur de taxi peut avoir une très bonne connaissance de l'espace, sans avoir jamais fait de géométrie, meilleure même que celle d'un mathématicien. Le chauffeur de taxi, comme le mathématicien, pourront compenser une connaissance insuffisante en utilisant un plan, donc un savoir qui relève à la fois des mathématiques et de la géographie

2- Notion de situation d'enseignement.

a- Différentes situations d'après la théorie des situations de Guy Brousseau:

des situations d'inter-actions sociales dans la classe quand les élèves cherchent, s'expliquent entre eux, discutent, essaient de se convaincre.

des situation d'institutionnalisation: Le maître en faisant écrire les bilans, qui constituent le cours, garantit qu'il s'agit bien là d'un savoir institutionnel à retenir, objet du programme, et qui servira pour résoudre d'autres problèmes. Ces moments de bilan permettent de rehomogénéiser la classe, de garantir à tous qu'ils ont appris la même chose.

des situations d'application et d'appropriation avec des exercices ou des problèmes qui permettent à l'élève seul de continuer à construire un rapport personnel au savoir mathématique, la notion de rapport au savoir ayant été théorisée par Yves Chevallard.

Nous avons utilisé le mot "situation" plutôt que le mot "activité" qui convient aussi quand on le prend au sens d'"activité mathématique", mais qui est aujourd'hui complètement galvaudé. On appelle "activité" tout ce qui fait bouger les élèves: un découpage, un coloriage ou quoi que ce soit d'autres, sans vérifier s'il y a ou non un enjeu de savoir mathématique. Une situation de la vie courante n'est pas en général "didactique". A part les parents parfois, ou les maîtres sans cesse, le milieu extérieur n'a aucune intention d'enseigner à l'élève. Rien ne l'empêche de retirer après coup

¹⁴ La notion d'obstacle a été introduite par le philosophe des sciences Gaston Bachelard dans son ouvrage: "La formation de l'esprit scientifique"

un enseignement de ce qui lui échoit, mais c'est aléatoire car il n'y a pas eu d'intention didactique au départ, le milieu ordinaire produit des situations **"non didactiques"**. En revanche, en classe, le maître organise le milieu par des situations **"didactiques"**. Mais pour que l'élève apprenne, les situations d'inter-actions sociales doivent être le plus **"a-didactique"** possibles, ce qui signifie que l'élève ne pourra pas trouver la solution du problème dans les habitudes de la classe, les expressions, les gestes du maître, en essayant d'imaginer ses attentes. En d'autres termes, une fois que l'élève a pris la question à sa charge, quand le maître lui en a fait la **dévolution**, il oublie le maître, il oublie qu'il est en classe jusqu'au moment du bilan où la situation redevient didactique. Avant cela, l'élève doit avoir eu **des décisions à prendre, des stratégies à adopter**, avec une incertitude assez grande qui ne peut se réduire sans mobiliser des connaissances mathématiques implicites ou explicites. Tous les élèves doivent pouvoir démarrer, donc le problème doit se résoudre par une **stratégie de base**, facile à imaginer sans connaissances nouvelles, mais sans doute lourde, et qu'ils auront envie de changer. L'élève agit, communique avec ses camarades pour obtenir un résultat, tente de les convaincre. Quand le problème semble résolu, la situation doit amener une rétroaction qui permette à l'élève de valider ou d'invalidier sa réponse sans interventions du maître. Dans certaines **"activités"** qui n'en sont pas, les élèves sont constamment guidés, ils n'ont aucune décision à prendre ou ils leur suffit d'imiter, de sorte qu'ils n'apprennent rien.

Dans toute classe, l'élève sait que le maître veut lui enseigner quelque chose, et le maître attend de l'élève qu'il joue le jeu de l'apprentissage. Ces attentes réciproques sont réglées par ce que Guy Brousseau a appelé **"le contrat didactique"** qui est un contrat implicite. Mais l'élève n'apprend pas vraiment sans des situations **a-didactiques**, **"hors contrat"** si on peut dire. Un enseignement qui fonctionne sans cesse sous des effets de contrat, avec des dérives d'imitation par exemple, ne favorisera pas du tout la construction du savoir. Cependant dans toute classe, un contrat didactique implicite, et qui peut d'ailleurs changer, est nécessaire pour réguler la classe, même s'il doit être rompu par le maître de temps à autre pour provoquer l'apprentissage

b- Variables didactiques

Pour construire nos situations, nous avons utilisé la notion de **"variable didactique"**. Quand nous avons fait certains choix de matériel ou de données chiffrées dans les questions posées aux élèves, nous avons expliqué pourquoi nous avons fait ces choix et non d'autres. Il s'agit de paramètres, dont le maître a le libre choix, mais qui, selon les valeurs qu'il leur donnera, changeront les stratégies et solutions envisageables par les élèves, de sorte que l'apprentissage sera différent. Il peut même n'y avoir aucun apprentissage si des changements sont faits sans précaution sur ces variables, parce que le problème deviendra résoluble avec les connaissances antérieures des élèves ou bien des connaissances non mathématiques. Donc il n'apprendra rien de nouveau fixé dans nos objectifs. S'il veut garder l'efficacité des situations proposées ici, le professeur doit donc conserver les valeurs que nous avons données aux variables didactiques. Nous avons attiré son attention sur elles dans les observations

c- Dialectique outil-objet et changement de cadre

Pour construire nos situations nous avons aussi utilisé deux notions introduites en didactique des mathématiques par Régine Douady: celle de **dialectique outil-objet** et celle de **changement de cadre**.

La dialectique outil-objet correspond en quelque sorte à la dialectique du savoir et du savoir-faire. Un concept mathématique est d'abord utilisé, c'est un outil, avant d'être défini et de devenir objet de la théorie. Il s'agit d'un processus dialectique car il y a sans cesse aller et retour. Les concepts mathématiques ne sont pas des objets figés, ils évoluent, comme la théorie. Quand un outil est devenu objet il est utilisé autrement, et ce faisant, il devient un autre objet, un objet nouveau.

Un cadre est une branche des mathématiques. Il y a le cadre géométrique, le cadre algébrique, etc... Pour résoudre un problème, il est parfois utile de changer de cadre. Dans notre travail, nous avons changé de cadre par exemple pour introduire la multiplication des décimaux qui se pose dans le cadre numérique. Nous passons dans le cadre géométrique à l'aire d'un rectangle dont les dimensions sont décimales. En fait le problème de fond se pose dans le cadre de l'analyse car il s'agit du lien entre le produit de deux réels et l'aire du rectangle, même si le problème est abordé au seul niveau des décimaux en 6ème. Outre les changements de cadre, les didacticiens parlent aussi de **changements de registre**. Cela concerne plutôt le langage, l'expression. Un même bilan peut parfois s'écrire dans deux registres différents, la langue naturelle ou un registre symbolique. Un changement de registre peut aussi correspondre à un changement de point de vue.

3- Transposition didactique

La notion de **transposition didactique** a été importée en didactique par Yves Chevallard^{1 5}. Nous avons un savoir à enseigner précisé dans nos objectifs mais le savoir ne se transmet pas comme un objet. Il est construit par l'élève. Pour enseigner le professeur doit effectuer une transposition didactique, soit découper des objectifs de savoir, concevoir un langage adapté à l'élève, un enchaînement de situations d'enseignement, une trajectoire d'apprentissage pour les élèves. Intervient alors le temps, et aussi la notion d'objets paramathématiques et d'objets pré-construits". Par exemple si nous supposons que l'élève a une connaissance suffisante de l'expression "distance entre deux points" pour comprendre une phrase où elle figure sans que le mot "distance" ait été défini avant.

II- PEDAGOGIE GENERALE^{1 6}

Les didactiques sont disciplinaires, l'idée de base étant que la construction d'un savoir est spécifique de ce savoir, donc de la discipline. Les didactiques des différentes disciplines ont cependant construit des concepts communs, particulièrement en sciences. La pédagogie générale, elle, se développe indépendamment de la discipline. Les deux approches sont complémentaires et se rejoignent sur certains points.

^{1 5}- Cette notion a été introduite au départ hors du contexte de la didactique par M. Verret dans "*Le temps des études*"- 1975. En didactique des mathématiques, on pourra se référer à l'ouvrage théorique de Yves Chevallard "*La transposition didactique, du savoir savant au savoir enseigné*" - Editions La Pensée Sauvage- Grenoble

^{1 6}- Le professeur qui s'intéresse à la pédagogie générale pourra lire les ouvrages de Philippe Meirieu, notamment: "*Apprendre, oui, mais comment?*"- Editions ESF

1- Les élèves apprennent de façon différente et les classes sont toujours plus ou moins hétérogènes.

Savoir comment les élèves apprennent est très complexe. En revanche on sait assez bien les raisons pour lesquelles certains n'apprennent pas. Les élèves sont différents à plusieurs titres.

a- Ils ont des **représentations mentales** diverses qui viennent de leurs parcours, de histoires personnelles différentes. Le professeur pourra faire émerger ces représentations le plus souvent inconscientes et dont certaines font obstacle pour les faire évoluer ensuite.

b- Ils ont des **motivations** différentes qui viennent de leur passé personnel, de leur environnement familial, social, culturel. Le professeur pourra chercher des sources de motivation à l'intérieur des mathématiques, et aussi à l'extérieur des mathématiques. Un habillage "concret" des problèmes peut motiver tel élève et au contraire repousser tel autre. Nous utilisons souvent ce que nous avons appelé des "objets transitionnels" qui sont des objets neutres: bouts de papier, ficelles, élastiques. Ces objets sont "concrets" certes, plutôt matériels, mais en même temps assez dépouillés pour ne pas faire trop de "bruit" parasite, et servir de transition entre les objets de la vie courante avec lesquels les élèves ont eu des expériences passées et les concepts abstraits de mathématique. Nous voulons ainsi les aider à construire des représentations mentales.

c- Ils ont des **manières d'apprendre et de retenir** différentes liées à leur personnalité:

- visuels ou auditifs: certains retiennent plutôt des images, d'autres des phrases qu'ils ont entendues. Ceci est développée par la gestion mentale d'A. de La Garanderie
- synthétiques ou analytiques: ils apprennent d'abord globalement, cherchant une vue d'ensemble, ou au contraire ils ne peuvent pas apprendre tant qu'ils n'ont pas analysé pas à pas.
- actifs ou passifs: ils ne peuvent apprendre un savoir nouveau qu'en étant actifs lors du premier contact avec ce savoir, ou au contraire ils préfèrent enregistrer passivement pour y revenir seuls après.

Il existe de nombreuses autres classifications car les nuances entre chacun sont infinies, et heureusement! Elles ont le mérite d'attirer l'attention des enseignants sur les différences entre les élèves et sur le fait que chaque fois qu'un professeur fait un exposé, il impose une manière d'apprendre, une approche de la notion et les représentations qui l'accompagnent, qui peuvent défavoriser certains élèves qui ne fonctionnent pas comme lui

2- Au cours des temps se sont développées diverses pédagogies qu'un professeur peut utiliser selon sa classe, le niveau où il enseigne ou successivement dans une même classe, selon ce qu'il juge le plus adapté au moment. Ces différentes pédagogies résultent de conceptions différentes de l'apprentissage et peuvent se décrire ainsi:

a- L'exposé est magistral et l'élève doit l'apprendre et le réciter. Dans cette **pédagogie dogmatique** utilisée avec grand succès par les jésuites l'apprentissage est basé sur la **mémoire**.

b- Des échanges ont lieu entre le maître d'une part et tel ou tel élève. Le maître pose une question, met les élèves sur la voie de la réponse et ils interviennent tour à tour. Le maître reformule certaines réponses d'élèves bien choisies et conduit ainsi son exposé en faisant participer la classe. Nous dirons que le maître utilise la **maïeutique** socratique, accouchement de l'esprit.

La conception de l'apprentissage qui la sous-tendait du temps de Platon était la théorie de la réminiscence: l'élève a su dans une vie antérieure et le professeur lui permet de se ressouvenir. Même sans se fonder sur la réminiscence, on peut utiliser la maïeutique en imaginant que l'élève sait des choses implicitement et le professeur l'aide à les exprimer.

c- Ce n'est pas le maître qui transmet un savoir écrit par avance, mais c'est l'élève qui construit son savoir à partir de ses expériences dans le monde. Le travail du maître consiste donc à amener l'élève hors de l'école, ou au contraire à amener le monde extérieur dans l'école, et à laisser faire les choses naturellement en surveillant et conseillant. Depuis l'Emile de Rousseau, puis "les pédagogies nouvelles" de Freinet ou de Decroly de nombreuses expériences ont été faites, dont les professeurs peuvent s'inspirer avec profit.

d- Le professeur organise une situation d'enseignement de sorte que les élèves soient confrontés à un problème qui provoque un déséquilibre. Ils devront alors construire un savoir nouveau pour retrouver un équilibre. La théorie d'un apprentissage par rééquilibration est dû au psychologue Jean Piaget. La didactique des mathématiques s'en inspire, mais en s'éloignant d'une psychogenèse qui introduit des stades de développement selon l'âge. Sur ce point, les pédagogies de Wallon ou de Vigotsky nous semblent mieux rendre compte de la réalité.

3- La pédagogie différenciée et l'hétérogénéité des élèves.

a- La pédagogie différenciée n'est pas ce que certains pensent. Elle ne consiste :

- ni à regrouper ensemble tous les élèves ayant les mêmes difficultés- on dit parfois les mêmes besoins - Cela n'est pas exclu ponctuellement mais une pédagogie qui procéderait toujours ainsi se baserait sur une conception de l'apprentissage qui pourrait se décrire par la métaphore de l'élève comme un vase vide que le professeur remplit de savoir. Or les élèves ont des connaissances diverses, il ne s'agit pas pour nous de remplir mais de restructurer.

- ni à gérer plusieurs progressions simultanées, avec des objectifs et des exercices différents selon chaque élèves ou même selon des groupes d'élèves. Dans une classe de niveau donné, le savoir à acquérir est le **projet commun de la classe**, et le professeur le réalise à travers divers **objectifs explicites et fixés** et qui sont les mêmes pour tous les élèves.

b- La pédagogie différenciée doit permettre à chaque élève d'exprimer sa différence. On est étonné de la richesse et de l'imagination que peuvent avoir les enfants quand on leur donne la parole. Mais il ne s'agit pas de donner la parole dans n'importe quelle condition, laisser les élèves parler pour ne rien dire ou même dire tout et n'importe quoi, ce qui ne manquera pas d'arriver si le maître ne prépare pas cette prise de parole.

La pédagogie différenciée consiste :

- à varier le plus possible les méthodes d'enseignement: exposé oral du professeur ou d'un élève avec prise de notes pour les autres, avec tableau noir, rétroprojecteur ou ordinateur utilisé par le professeur, travail en petits groupes des élèves sur table ou avec l'ordinateur, travail sur fiches individuelles préparées à l'avance par le maître.....

- à travailler sur des situations problèmes telles que nous les proposons de sorte que l'élève puisse manifester ses conceptions, ses méthodes, ses erreurs. Le professeur ne fournit pas

les réponses. Il est quelquefois difficile pour lui de résister, mais c'est à ce prix que la pédagogie sera différenciée. Ce sera possible car les élèves produiront un résultat dans un temps raisonnable si la situation arrive au bon moment dans une progression pensée. Chacun doit pouvoir déterminer, grâce à la situation et à ses acquis, les différents attributs^{1 7} du concept étudié et ses liens avec les connaissances antérieures. Par exemple la médiatrice d'un segment n'est pas seulement perpendiculaire au segment et ne passe pas seulement par son milieu. C'est une droite qui a les deux attributs. **L'erreur n'est pas considérée par le professeur comme une faute, mais comme témoin d'une étape dans le processus d'apprentissage, qui révèle au professeur quelle représentation ou quelle procédure l'élève a mise en oeuvre, qui sera le point de départ d'une nouvelle procédure.**

- à arriver avec tous au bilan prévu, objectif du maître. Le savoir institutionnalisé, le bilan que nous donnons, est formulé par les élèves. Le professeur s'adapte à leur formulation, mais en même temps la guide et introduit le vocabulaire utile pour construire le répertoire commun.

- à proposer des exercices en classe puis à la maison, variés selon le niveau de difficulté et le point de vue qu'ils activent:

- des exercices d'application directe pour l'acquisition du concept
- des exercices qui contrôlent la maîtrise de ce concept
- des exercices pour se débarrasser du contexte de l'apprentissage, **décontextualiser** pour que le concept soit mobilisable dans n'importe quelle situation, que le **transfert** s'opère.

Ce que nous venons de dire peut se résumer dans le tableau suivant qui peut servir pratiquement de guide à celui qui utilisera notre travail:

<u>Rôle de l'élève</u>	<u>Rôle du maître</u>
1- Résoudre en classe le problème posé, seul ou en groupe (action)	1- Choisir la situation motivante en fonction d'un objectif-obstacle, accessible aux élèves et décisif pour l'apprentissage - Amener les élèves à prendre en charge le problème. - Les observer au travail, repérer les styles d'apprentissage, les stratégies, les conceptions de chacun.
2- Exposer sa solution ou celle de son groupe, approuver ou contester les solutions d'autrui.	2- Favoriser l'expression de chaque élève, de ses stratégies, de ses conceptions, de ses erreurs
3- Formuler un bilan	3- Faire formuler le bilan soit par écrit pour chaque élève et ensuite une synthèse avec débat sur les formulations soit par maïeutique, s'assurer de la compréhension du plus grand nombre, voir le niveau d'expression des élèves, fournir le vocabulaire
4- Faire fonctionner la notion nouvelle dans des problèmes variés	4- Choisir des exercices non répétitifs en variant les niveaux de difficulté, les points de vue, les contextes, les liens avec les connaissances antérieures, les cadres, les registres.

^{1 7} - *L'apprentissage de l'abstraction* - Britt- Mari Barth- RETZ-Pédagogie (1987)

c- Une objection fréquente des professeurs n'ayant jamais ou très peu travaillé de cette façon est le manque de temps pour terminer les programmes. Pour nous travailler ainsi ne nous a jamais empêché de terminer les programmes car le temps "perdu" se rattrape vite. En effet les exercices répétitifs à la maison ou en séance de travail dirigé et leurs corrections fastidieuses pour ceux qui ont réussi et inutiles pour les autres disparaissent, les élèves ayant réellement fait des mathématiques en classe pendant les cours et non écouté ou copié au tableau,. Le professeur qui en doute peut choisir des notions qu'il estime cruciales et pour lesquelles il travaillera ainsi, tout en continuant un cours plus traditionnel pour le reste. De la sorte quelques situations clés au moins fourniront des repères dans le savoir et la mémoire de la classe, et le professeur et les élèves pourront s'y référer en cas d'erreurs récidivantes.

TABLE DES MATIERES

Titres	Pages
Introduction	5
Guide pratique.....	8
Progression.....	9
1- Segments-longueurs- mesures.....	11
2- Cercle.....	21
3- Médiatrice d'un segment, triangle isocèle.....	28
4- Droites parallèles et perpendiculaires.....	35
5- Périmètres- aires- produit des décimaux.....	41
6- Cube- Pavé.....	47
7- Notion d'angle et de mesure d'angle.....	51
8- Symétrie orthogonale.....	63
9- Initiation aux fonctions et aux graphiques à partir de l'aire du rectangle.....	69
10- Lectures de programmes de construction- dessin à main levée.....	71
Quelques notions théoriques.....	75

