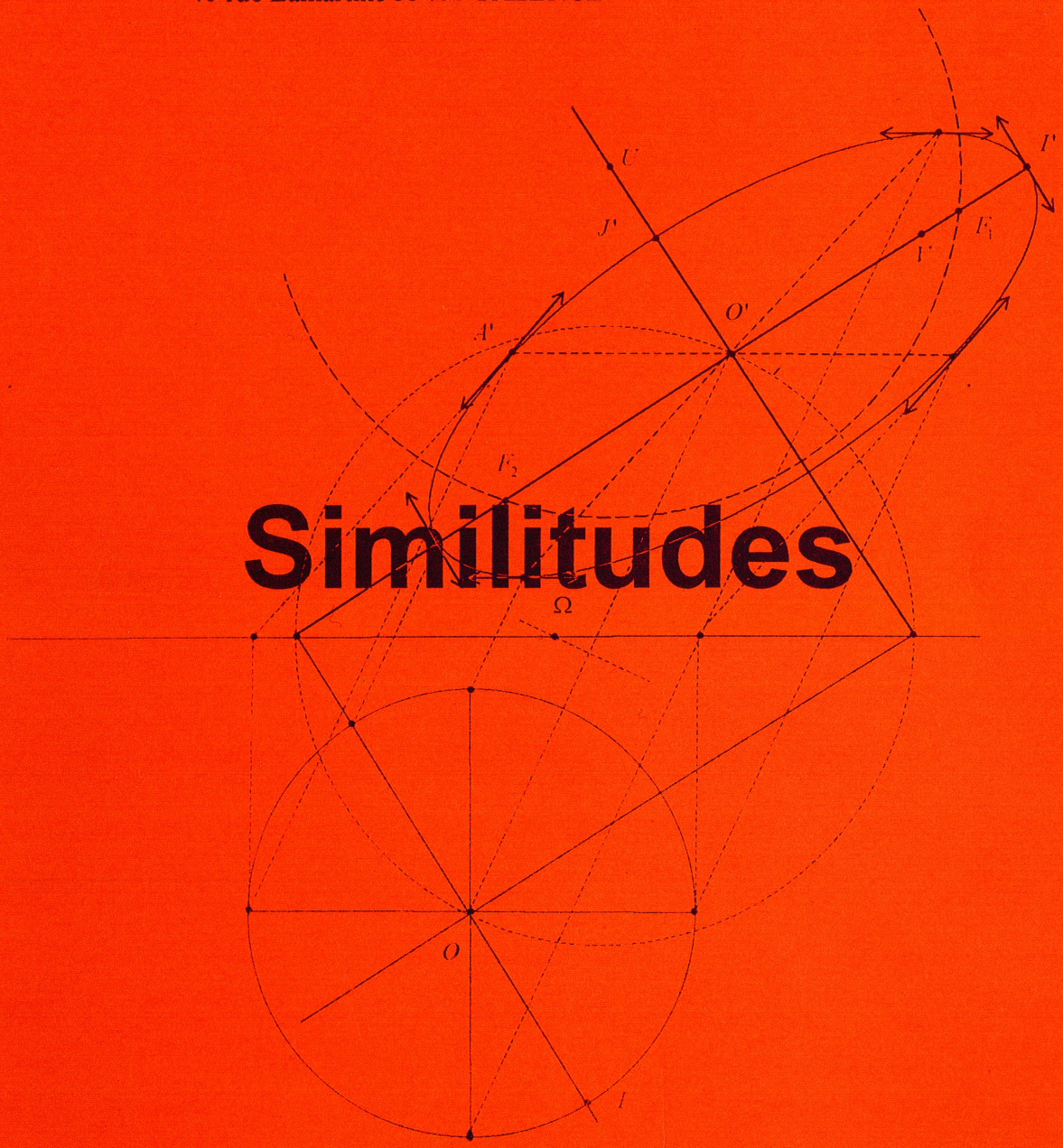
Université Bordeaux I

Institut de Recherche
pour l'Enseignement des Mathématiques

40 rue Lamartine 33400 TALENCE



Similitudes

Groupe Arithmétique et Géométrie

BORDEAUX 1999

SOMMAIRE

Ce fascicule comporte cinq chapitres portant les titres suivants, plus un chapitre 0 rappelant des résultats supposés connus :

[1] Notion d'application affine – Application vectorielle associée – 5

[2] Isométries planes 41

[3] Similitudes planes 53

[4] Droites isogonales - Points isogonaux 107

[5] Coniques : problèmes de tangence 121

Au départ, les chapitres [1], [2] et [3] se voulaient destinés aux élèves des classes de terminales C et E. Ils sont donc construits en prenant appui sur les acquis des élèves en fin de classe de 1ère S dans le domaine des transformations géométriques planes (voir chapitre 0).

Dans le chapitre [1], on dégage la notion d'*application affine* en établissant que les projections, les translations, les homothéties, les réflexions et les rotations agissant dans un plan $\mathscr{P}$ conservent le coefficient de colinéarité d'un vecteur à un autre vecteur.

On introduit ensuite la notion d'*application vectorielle* associée à une *application affine*. Pour ce faire, on identifie le plan vectoriel $\overrightarrow{\mathscr{P}}$ (ensemble des vecteurs des bipoints de $\mathscr{P}$) au plan $\mathscr{P}$ muni d'un point origine O (plan pointé $\mathscr{P}_O$).

On convient de noter par une lettre minuscule surmontée d'une flèche le vecteur représenté par le point de $\mathscr{P}_O$ désigné par la lettre majuscule du même nom et vice-versa.
(Voir fascicule 1 "l'enseignement des vecteurs" publié par l'IREM d'Aquitaine.)

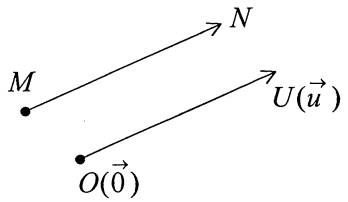


Fig. 1

$\vec{u}$ est le vecteur des bipoints (O,U) et (M,N)

$$\vec{u} = \overrightarrow{OU} = \overrightarrow{MN}$$

Ceci fait, on met en place les théorèmes généraux concernant les *applications affines* et leurs associées vectorielles (le strict minimum). On peut alors entreprendre une étude plus approfondie des transformations planes connues ainsi que de leurs composées avant de résoudre des exercices de géométrie plane.

Différentes solutions sont données. L'utilisation des transformations vectorielles permet souvent de proposer des solutions simples et expéditives.

En annexe à ce chapitre, nous avons présenté les *affinités planes*. Ces transformations ne faisant pas partie du programme des classes de lycée, tout est à découvrir. Leur étude se fait donc suivant un processus différent. On montre que ces transformations sont des bijections affines. Leur effet sur les figures élémentaires (droites, segments), sur les barycentres, le parallélisme sont étudiées en conséquence.

Le chapitre [2] est consacré aux isométries planes.

Les isométries de $\mathscr{P}$ sont des applications de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ qui conservent les distances. On montre qu'elles sont affines. Leurs associées vectorielles conservent la norme et le produit scalaire.

On commence par faire l'inventaire des différents types d'isométries du plan vectoriel $\overrightarrow{\mathscr{P}}$ avant de dresser celui des isométries de $\mathscr{P}$.

Le chapitre [3] est consacré aux similitudes.

Dans ce chapitre, nous prenons quelques "*distances*" avec le libellé du programme concernant ces transformations.

- Une similitude de $\mathscr{P}$, de rapport λ $(\lambda \in \mathbb{R}_+^*)$ est une application de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ qui multiplie les distances par λ.
- La propriété fondamentale :

  "*toute similitude de $\mathscr{P}$, de rapport λ, se réduit à la composée d'une homothétie de rapport λ, et d'une isométrie*"

  fait des similitudes de $\mathscr{P}$ des *bijections affines* de ce plan.

Suivent alors les alinéas.

◊ Étude des similitudes de $\overrightarrow{\mathscr{P}}$.

Ces similitudes sont de deux types :

* les similitudes dites *directes*. Chacune d'elles est la composée d'une homothétie positive et d'une rotation ;
* les similitudes dites *inverses*. Chacune d'elles est la composée d'une homothétie positive et d'une réflexion.

◊ Étude des similitudes de $\mathscr{P}$.

Nous avons encore deux types de similitudes.

On dit qu'une similitude de $\mathscr{P}$ est *directe* (resp. *inverse*) pour signifier que son associée vectorielle est une similitude *directe* (resp. *inverse*) de $\overrightarrow{\mathscr{P}}$.

Ces deux types de similitude sont traités sur un "*pied d'égalité*". Une très large place est donc faite ici aux similitudes inverses alors que, à notre connaissance, les ouvrages mathématiques traitant du sujet leurs consacrent en moyenne une petite page.

Tel quel, ce chapitre ne s'adresse plus à l'heure actuelle aux élèves de la classe terminale scientifique. Néanmoins, au cours de ces dernières années, la partie concernant les similitudes directes a fait l'objet d'expérimentations dans différentes classes de terminale C et nous tenions à dire que ces expériences se sont, à l'usage, avérées positives.

Les deux derniers chapitres s'adressent, de façon spécifique, aux étudiants, professeurs stagiaires, enseignants qui souhaiteraient aborder d'un point de vue élémentaire quelques problèmes de tangence concernant les coniques.

Villefranque, janvier 99

CHAPITRE 0

Rappels des résultats supposés connus concernant les réflexions, les translations, les homothéties et les rotations

1. Propriétés générales

On est censé connaître :

- leur action sur un point
- leur effet sur les figures élémentaires (droites, demi-droites, segments, demi-plan, cercles ...)
- leur effet sur la distance, le parallélisme, l'orthogonalité, les angles.

2. Propriétés spécifiques

2.1. Réflexion

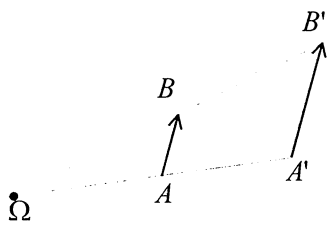
- Étant donné deux points distincts A et A', il existe une unique réflexion qui transforme A en A'. On la note $s_{A\mapsto A'}$. Son axe est la médiatrice du segment $[AA']$.
- La composée de deux réflexions d'axes parallèles est une translation.
- La composée de deux réflexions d'axes sécants est une rotation.

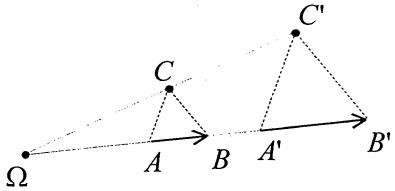
2.2. Translation

La composée de deux translations est une translation. Plus précisément $t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}} = t_{\vec{u}+\vec{v}}$.

2.3. Homothéties

- Étant donné trois points distincts Ω, A, A' alignés, il existe une unique homothétie de centre Ω qui transforme A en A'. On la note $h_{\Omega, A\mapsto A'}$. Son rapport est le coefficient de colinéarité du vecteur $\overrightarrow{\Omega A'}$ au vecteur $\overrightarrow{\Omega A}$ ($\overrightarrow{\Omega A'} = k\overrightarrow{\Omega A}$).
- Étant donné deux points distincts A et A', un nombre $k \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$, il existe une unique homothétie de rapport k qui transforme A en A'. On la note $h_{A\mapsto A',k}$. Son centre est le barycentre de $\begin{array}{c|c} A & A' \\ \hline k & -1 \end{array}$.
- Étant donné quatre points distincts A, B, A' et B', tels que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B'}$ soient distincts et colinéaires, il existe une unique homothétie qui transforme le bipoint (A,B), en le bipoint (A',B'), à savoir $h_{A\mapsto A',k}$ où k est le coefficient de colinéarité de $\overrightarrow{A'B'}$ à $\overrightarrow{AB}$. Son centre est le barycentre Ω de $\begin{array}{c|c} A & A' \\ \hline k & -1 \end{array}$ (car $k\overrightarrow{\Omega A} - \overrightarrow{\Omega A'} = \vec{0}$). La construction de Ω est indiquée dans chacune des figures ci-après.

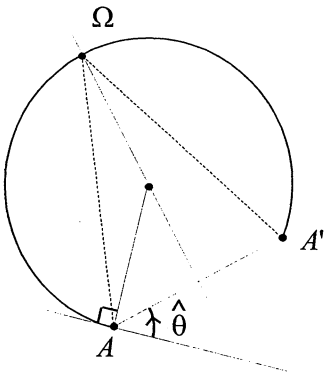




2.4. Rotation

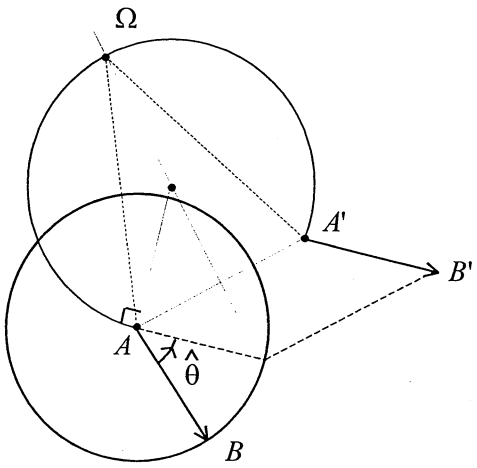
- Étant donné des points Ω, A, A' tels que $\Omega \neq A$ et $\Omega A = \Omega A'$, il existe une unique rotation de centre Ω qui transforme A en A'.

  On la note $r_{\Omega, A \mapsto A'}$. Son angle est $(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega A'})$.



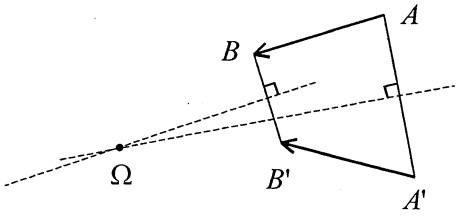
- Étant donné deux points distincts A et A', et un angle $\hat{\theta}$, il existe une unique rotation d'angle $\hat{\theta}$ qui transforme A en A'. On la note $r_{A \mapsto A', \hat{\theta}}$. Son centre est le point d'intersection de la médiatrice de $[AA']$ et de la ligne de niveau $(A, A')_{\hat{\theta}}$.

- Étant donné quatre points distincts A, B, A' et B', tels que $AB = A'B'$ et $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{A'B'}$, il existe une unique rotation qui transforme le bipoint (A, B), en le bipoint (A', B'), à savoir $r_{A \mapsto A', \hat{\theta}}$ où $\hat{\theta} = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})$. Son centre Ω peut-être obtenu comme dans l'alinéa précédent. Mais il y a plus simple.

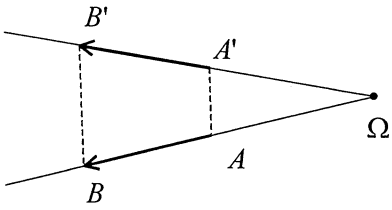


On distingue deux cas :

1. les droites (AA') et (BB') ne sont pas parallèles.
   Alors Ω est le point d'intersection des médiatrices de $[AA']$ et $[BB']$.



2. les droites (AA') et (BB') sont parallèles.
   Alors Ω est le point d'intersection des droites (AB) et $(A'B')$.



CHAPITRE 1

Notion d'application affine
Application vectorielle associée à une application affine
Détermination, composition de transformations "planes "

Dans tout ce chapitre $\mathscr{P}$ désigne un plan de l'espace $\mathscr{E}$. Dès lors que ce plan est muni d'un point origine O, le plan vectoriel $\overrightarrow{\mathscr{P}}$ qui lui est associé est identifié au plan pointé $\mathscr{P}_O$.
Par transformations usuelles agissant dans $\mathscr{P}$, nous entendons ici celles qui ont déjà été introduites, à savoir : les projections, les translations, les homothéties, les réflexions et les rotations.

1. Notion d'application affine, associée vectorielle

1.1 Propriété commune aux transformations usuelles agissant dans un plan $\mathscr{P}$

Dans chacun des différents alinéas qui suivent A, B, M et N sont des points de $\mathscr{P}$ satisfaisant à la relation : $\overrightarrow{MN} = x\overrightarrow{AB}$. On note A', B', M', N' leurs transformés respectifs par la transformation qu'on y considère.

1.1.1 Projection sur une droite

Soit C le point de $\mathscr{P}$ tel que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{MN}$
et C' son transformé par la projection p.

Nous avons,

- d'une part : $\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{M'N'}$ car une projection transforme deux bipoints de même vecteur en deux bipoints de même vecteur.
- d'autre part, sachant que $\overrightarrow{AC} = x\overrightarrow{AB}$, il vient : $\overrightarrow{A'C'} = x\overrightarrow{A'B'}$ (propriété de Thalès).
  Il s'ensuit que : $\overrightarrow{M'N'} = x\overrightarrow{A'B'}$.

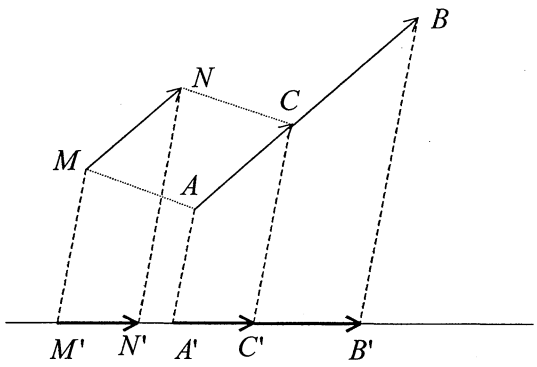


Fig. 2

1.1.2 Translation

On sait qu'une translation transforme un bipoint quelconque en un bipoint de même vecteur.

Par suite, de $\overrightarrow{MN} = x\overrightarrow{AB}$

on déduit : $\overrightarrow{M'N'} = x\overrightarrow{A'B'}$

car $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$.

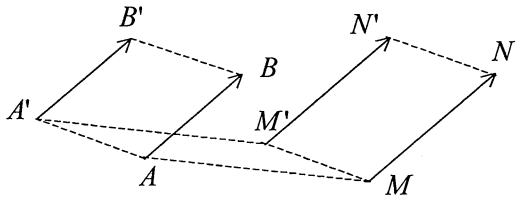


Fig. 3

1.1.3 Homothétie

On sait que toute homothétie de rapport λ – indépendamment de son centre – transforme un quelconque bipoint (P,Q) en un bipoint (P',Q') tel que $\overrightarrow{P'Q'} = \lambda \overrightarrow{PQ}$.

Par suite, de $\overrightarrow{MN} = x\overrightarrow{AB}$ on déduit que :

$$\lambda\overrightarrow{MN} = \lambda\left(x\overrightarrow{AB}\right) = x\left(\lambda\overrightarrow{AB}\right)$$

c'est-à-dire : $\overrightarrow{M'N'} = x\overrightarrow{A'B'}$.

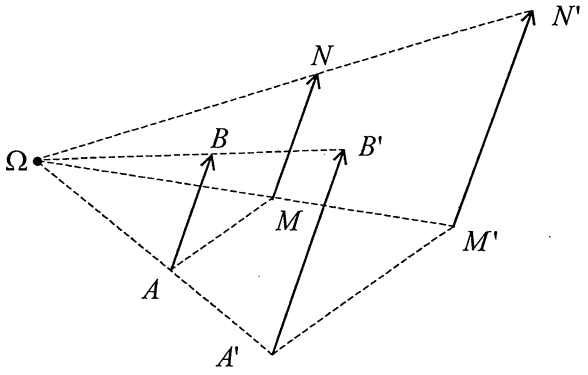


Fig. 4

1.1.4 Réflexion

Soit C le point de $\mathscr{P}$ tel que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{MN}$ et C' son transformé par la réflexion de droite Δ.

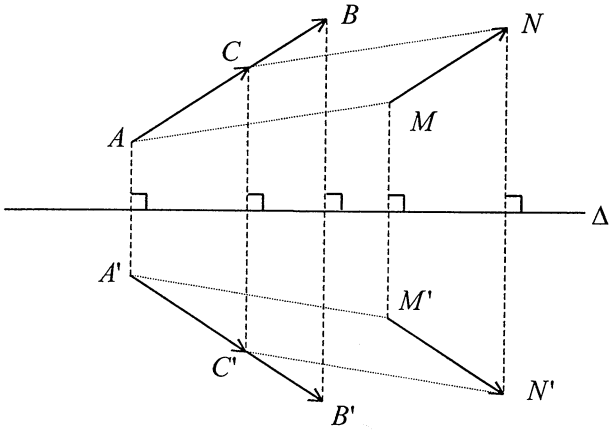


Fig. 5

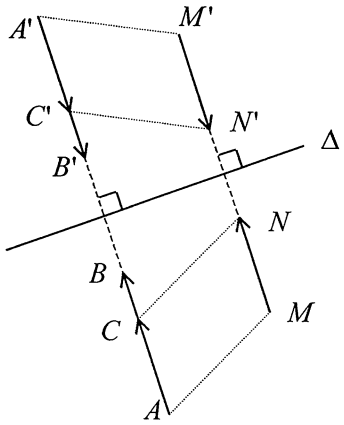


Fig. 6

Nous avons alors :

- d'une part $\overrightarrow{AC} = x\overrightarrow{AB}$ compte tenu de l'hypothèse $\overrightarrow{MN} = x\overrightarrow{AB}$.

  On en déduit : $\overrightarrow{A'C'} = x\overrightarrow{A'B'}$ d'après la propriété de Thalès – voir figure 5 – et l'effet de la symétrie de centre I – voir figure 6 –.

- d'autre part, $[AN]$ et $[CM]$ ont même milieu puisque $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{MN}$.

  On en déduit : $[A'N']$ et $[C'M']$ ont même milieu, car la réflexion s_Δ conserve le milieu d'un segment.

  En langage vectoriel, ceci se traduit par $\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{M'N'}$.

Il en résulte finalement que : $\overrightarrow{M'N'} = x\overrightarrow{A'B'}$.

1.1.5 Rotation

On sait que toute rotation se "factorise" en la composée de deux réflexions.

Adoptons les notations de la figure ci-contre où $r_{\Omega,\alpha} = s_{\Delta_2} \circ s_{\Delta_1}$.

Alors, de $\overrightarrow{MN} = x\,\overrightarrow{AB}$, on en déduit d'abord :

$\overrightarrow{M_1N_1} = x\,\overrightarrow{A_1B_1}$ ... effet de s_{Δ_1}

puis :

$\overrightarrow{M'N'} = x\,\overrightarrow{A'B'}$ ... effet de s_{Δ_2}.

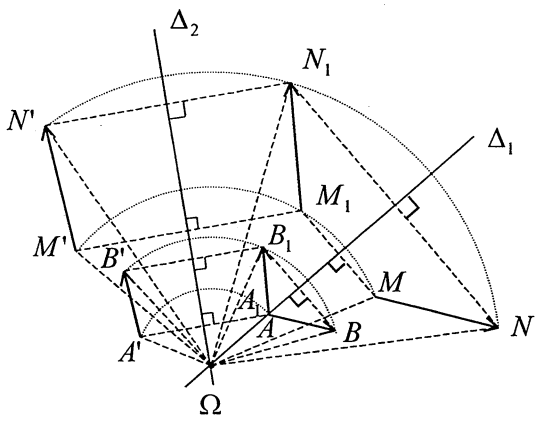


Fig. 7

Au terme de cette étude, on peut donc énoncer :

les projections, les translations les homothéties, les réflexions et les rotations "conservent" le coefficient de colinéarité d'un vecteur à un autre vecteur.

1.2 Notion d'application affine. Bijection affine

1.2.1 Définition

- *On appelle application affine de $\mathscr{P}$ toute application de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ qui conserve le coefficient de colinéarité d'un vecteur à un autre vecteur.*

  Ainsi, dire que f est une *application affine* signifie que :

  quels que soient les points A, B, M, N de $\mathscr{P}$; s'il existe un réel x tel que $\overrightarrow{MN} = x\,\overrightarrow{AB}$ alors $\overrightarrow{f(M)f(N)} = x\,\overrightarrow{f(A)f(B)}$.

1.2.2 Conséquence

Il découle de cette définition que : (cas où $x = 1$)

Toute application affine transforme deux bipoints de même vecteur en deux bipoints de même vecteur.

1.2.3 Exemples

- Les projections agissant dans un plan $\mathscr{P}$ sont des applications affines de ce plan.
- Les translations, les homothéties, les réflexions et les rotations agissant dans un plan $\mathscr{P}$ sont des bijections affines de ce plan.

1.2.4 Un contre exemple

Il est facile de "fabriquer " des applications non affines.

En voici un exemple.
Étant donné, dans un plan $\mathscr{P}$, une droite Δ et un point Ω de cette droite, on considère l'application φ de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ définie par :

$\varphi(Q) = Q$ lorsque Q appartient à Δ

et

$\varphi(Q) = Q'$ où Q' est le point vérifiant la relation $\overrightarrow{\Omega Q'} = 2\overrightarrow{\Omega Q}$ lorsque Q n'appartient à Δ.

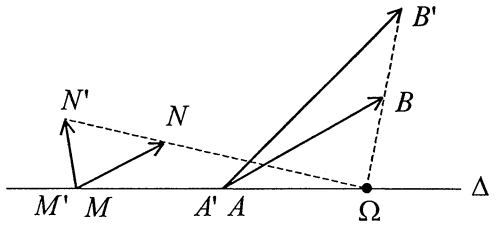


Fig. 8

Il est clair que φ n'est pas une application affine de $\mathscr{P}$. En effet, sur la figure précédente, les points A, B, M, N vérifient la relation $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, et leurs images respectives A', B', M', N' ne vérifient pas la relation $\overrightarrow{M'N'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{A'B'}$.

1.3 Application vectorielle associée à une application affine

Soit f une application affine agissant dans un plan $\mathscr{P}$ muni d'un point origine O ; $\vec{u}$ un vecteur de $\overrightarrow{\mathscr{P}}$.

On sait que f transforme tous les bipoints de vecteur $\vec{u}$ en des bipoints de même vecteur – voir 1.2.2 –

L'application $\tilde{f} : \overrightarrow{\mathscr{P}} \longrightarrow \overrightarrow{\mathscr{P}}$
$\vec{u} \mapsto \overrightarrow{f(O)f(U)}$

ne dépend donc que de f et non du choix du point origine O dans $\mathscr{P}$.

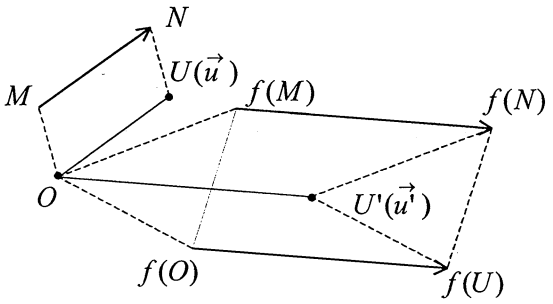


Fig. 9

On l'appelle associée vectorielle de f ou plus simplement associée de f. On la note $\tilde{f}$ (lire "f tilde").

Il importe de retenir que :

- Pour tout couple (M,N) de points de $\mathscr{P}$, on a : $\tilde{f}(\overrightarrow{MN}) = \overrightarrow{f(M)f(N)}$.

  Autrement dit, l'image par $\tilde{f}$ du vecteur d'un bipoint (M,N) est le vecteur du bipoint $(f(M), f(N))$.

- $\tilde{f}(\vec{0}) = \vec{0}$, (cas où $M = N$).

1.4 Associées des applications affines usuelles de $\mathscr{P}$

1.4.1 Associée d'une projection

Soit Δ et $\mathscr{D}$ deux droites sécantes de $\mathscr{P}$, $\vec{i}$ et $\vec{j}$ des vecteurs directeurs de ces droites, p la projection de $\mathscr{P}$ sur Δ selon $\mathscr{D}$, $\tilde{p}$ son associée vectorielle, $\vec{u}$ un vecteur de $\overrightarrow{\mathscr{P}}$, $\vec{u'}$ le transformé de $\vec{u}$ par $\tilde{p}$.

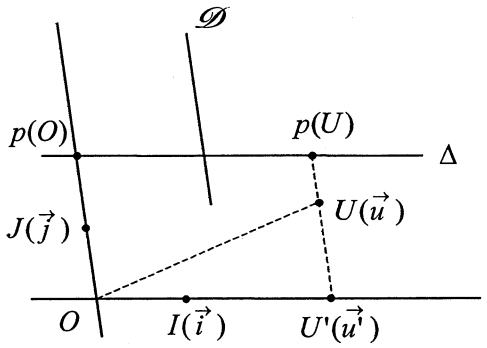


Fig. 10

On sait alors que :

$$\vec{u'} = \overrightarrow{OU'} = \overrightarrow{p(O)p(U)}.$$

Donc $\vec{u'} \in \mathbb{R}\vec{i}$.

En outre, on en déduit :

$$\overrightarrow{p(U)U'} = \overrightarrow{p(O)O}$$

d' où $\vec{u'} - \vec{u} = \overrightarrow{UU'} = \overrightarrow{Up(U)} + \overrightarrow{p(U)U'}$

$$= \overrightarrow{Up(U)} + \overrightarrow{p(O)O}.$$

Donc $\vec{u'} - \vec{u} \in \mathbb{R}\vec{j}$ car $\overrightarrow{Up(U)}$ et $\overrightarrow{p(O)O}$ sont des éléments de la droite vectorielle $\mathbb{R}\vec{j}$.

Ainsi $\tilde{p}$ est l'application qui au vecteur $\vec{u}$ associe $\vec{u'}$, avec $\vec{u'} \in \mathbb{R}\vec{i}$ et $\vec{u'} - \vec{u} \in \mathbb{R}\vec{j}$.

Dans le plan pointé $\mathscr{P}_O$, $\tilde{p}$ s'identifie à la projection de $\mathscr{P}$ sur (OI) selon (OJ).

L'application $\tilde{p}$ est appelée projection de $\overrightarrow{\mathscr{P}}$ sur $\mathbb{R}\vec{i}$ selon $\mathbb{R}\vec{j}$.

1.4.2 Associée d'une translation

Soit t une translation agissant dans $\mathscr{P}$, $\tilde{t}$ son associée vectorielle, $\vec{u}$ un vecteur de $\overrightarrow{\mathscr{P}}$, $\vec{u'}$ le transformé de $\vec{u}$ par $\tilde{t}$. On sait que :

$$\begin{cases} \vec{u'} = \overrightarrow{OU'} = \overrightarrow{t(O)t(U)} \\ \overrightarrow{OU} = \overrightarrow{t(O)t(U)} \end{cases}$$

car une translation transforme un quelconque bipoint en un bipoint de même vecteur.

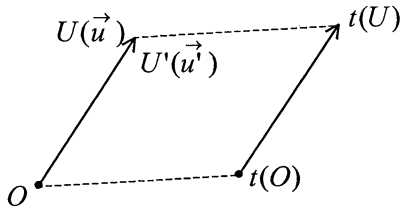


Fig. 11

Il s'ensuit : $\overrightarrow{OU'} = \overrightarrow{OU}$, c'est-à-dire $\vec{u'} = \vec{u}$.

Donc toutes les translations agissant dans $\mathscr{P}$ ont pour associée l'application identique de $\overrightarrow{\mathscr{P}}$. Cette application est notée $\tilde{I}$.

1.4.3 Associée d'une homothétie

Soit h une homothétie de rapport λ agissant dans $\mathscr{P}$, $\widetilde{h}$ son associée vectorielle, $\vec{u}$ un vecteur de $\overrightarrow{\mathscr{P}}$, $\vec{u'}$ le transformé de $\vec{u}$ par $\widetilde{h}$. On sait que :

$$\begin{cases} \vec{u'} = \overrightarrow{OU'} = \overrightarrow{h(O)h(U)} \\ \overrightarrow{h(O)h(U)} = \lambda \overrightarrow{OU} \end{cases}$$

(propriété fondamentale)

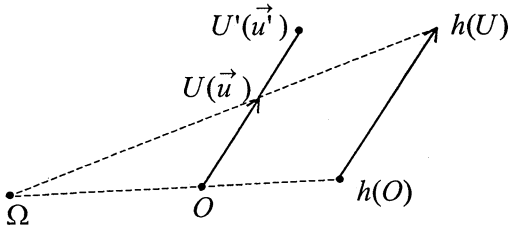


Fig. 12

Il s'ensuit que $\overrightarrow{OU'} = \lambda \overrightarrow{OU}$ c'est-à-dire $\vec{u'} = \lambda \vec{u}$.

Donc toutes les homothéties de rapport λ agissant dans $\mathscr{P}$ ont pour associée l'application de $\overrightarrow{\mathscr{P}}$ dans $\overrightarrow{\mathscr{P}}$

$\vec{u} \mapsto \lambda \vec{u}$.

Cette application est notée $\lambda \widetilde{I}$ puisque $\lambda \widetilde{I}(\vec{u}) = \lambda \vec{u}$.

Dans le plan pointé $\mathscr{P}_O$, $\lambda \widetilde{I}$ s'identifie à l'homothétie de centre O et de rapport λ.

L'application $\lambda \widetilde{I}$ est appelée homothétie vectorielle de rapport λ.

1.4.4 Associée d'une réflexion

Soit s une réflexion de droite Δ dirigée par un vecteur $\vec{k}$, $\widetilde{s}$ son associée vectorielle, $\vec{u}$ un vecteur non nul de $\overrightarrow{\mathscr{P}}$, $\vec{u'}$ le transformé de $\vec{u}$ par $\widetilde{s}$.On sait que :

$$\begin{cases} \vec{u'} = \overrightarrow{OU'} = \overrightarrow{s(O)s(U)} \\ s(O)s(U) = OU \end{cases}$$

et $(\vec{k}, \overrightarrow{s(O)s(U)}) = -(\vec{k}, \overrightarrow{OU})$

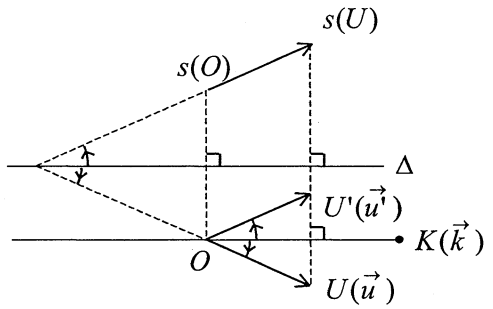


Fig. 13

ainsi : $(\vec{k}, \vec{u'}) = -(\vec{k}, \vec{u})$ et $\|\vec{u'}\| = \|\vec{u}\|$.

Donc, toutes les réflexions agissant dans $\mathscr{P}$ dont les droites sont dirigées par le vecteur $\vec{k}$ ont pour associée l'application :

$$\begin{aligned} \widetilde{s}_{\vec{k}} : \overrightarrow{\mathscr{P}} &\longrightarrow \overrightarrow{\mathscr{P}} \\ \vec{u} &\mapsto \vec{u'} \end{aligned}$$

avec pour $\vec{u} \neq \vec{0}$, $(\vec{k}, \vec{u'}) = -(\vec{k}, \vec{u})$, $\|\vec{u'}\| = \|\vec{u}\|$ et $\widetilde{s}_{\vec{k}}(\vec{0}) = \vec{0}$.

Dans le plan pointé $\mathscr{P}_O$, $\widetilde{s}_{\vec{k}}$ s'identifie à la réflexion de droite (OK).

L'application $\widetilde{s}_{\vec{k}}$ est appelée réflexion vectorielle de droite $\mathbb{R}\vec{k}$.

1.4.5 Associée d'une rotation

Soit r une rotation d'angle $\hat{\alpha}$ agissant dans $\mathscr{P}$, $\tilde{r}$ son associée vectorielle, $\vec{u}$ un vecteur non nul de $\overrightarrow{\mathscr{P}}$, $\vec{u'}$ le transformé de $\vec{u}$ par $\tilde{r}$. On sait que :

$$\begin{cases} \vec{u'} = \overrightarrow{OU'} = \overrightarrow{r(O)r(U)} \\ r(O)r(U) = OU \end{cases}$$

$$\text{et } (\overrightarrow{OU}, \overrightarrow{r(O)r(U)}) = \hat{\alpha}$$

ainsi : $(\vec{u}, \vec{u'}) = \hat{\alpha}$ et $\|\vec{u'}\| = \|\vec{u}\|$.

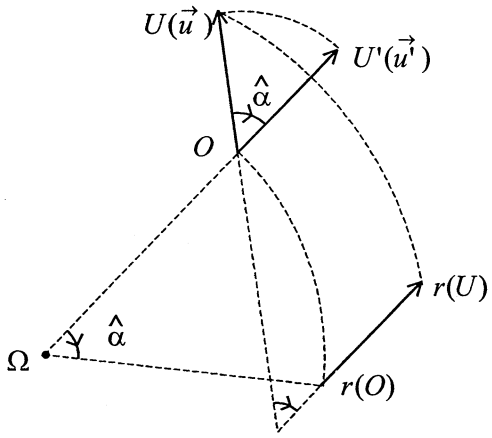


Fig. 14

Donc toutes les rotations d'angle $\hat{\alpha}$ agissant dans $\mathscr{P}$ ont pour associée l'application

$$\tilde{r}_{\hat{\alpha}} : \overrightarrow{\mathscr{P}} \longrightarrow \overrightarrow{\mathscr{P}}, \quad \vec{u} \mapsto \vec{u'}$$

avec pour $\vec{u} \neq \vec{0}$, $(\vec{u}, \vec{u'}) = \hat{\alpha}$ et $\|\vec{u'}\| = \|\vec{u}\|$, et $\tilde{r}_{\hat{\alpha}}(\vec{0}) = \vec{0}$.

Dans le plan pointé $\mathscr{P}_O$, $\tilde{r}_{\hat{\alpha}}$ s'identifie à la rotation de centre O et d'angle $\hat{\alpha}$. L'application $\tilde{r}_{\hat{\alpha}}$ est appelée rotation vectorielle d'angle $\hat{\alpha}$.

2. Théorèmes généraux concernant les applications affines et leurs associées

2.1 Propriétés des applications affines

2.1.1 Composée de deux applications affines

Théorème 1 *La composée de deux applications affines est une application affine.*

Démonstration :

Soit f et g deux applications affines agissant dans le plan $\mathscr{P}$, A, B, M, N des points de ce plan, A', B', M', N' leurs images par f ; A'', B'', M'', N'' les images de ces derniers points par g.

Si $\overrightarrow{MN} = x\overrightarrow{AB}$ alors $\overrightarrow{M'N'} = x\overrightarrow{A'B'}$ car f est affine, puis $\overrightarrow{M''N''} = x\overrightarrow{A''B''}$ car g est affine.

$g \circ f$ conserve donc le coefficient de colinéarité d'un vecteur à un autre vecteur.

Autrement dit : $g \circ f$ est une application affine de $\mathscr{P}$.

2.1.2 Réciproque d'une bijection affine

Théorème 2 *La réciproque d'une bijection affine est une bijection affine.*

Démonstration :

Soit f une bijection affine de $\mathscr{P}$, A, B, M, N des points de ce plan, A', B', M', N' leurs transformés respectifs par f^{-1}. Supposons que l'on ait : $\overrightarrow{MN} = x\overrightarrow{AB}$.

Il s'agit alors d'établir que $\overrightarrow{M'N'} = x\overrightarrow{A'B'}$.

Pour cela, introduisons le point N'' tel que $\overrightarrow{M'N''} = x\,\overrightarrow{A'B'}$.

On a : $\overrightarrow{f(M')f(N'')} = x\,\overrightarrow{f(A')f(B')}$ car, par hypothèse, f est affine, c'est-à-dire :

$$\overrightarrow{Mf(N'')} = x\,\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MN}.$$

On en déduit : $f(N'') = N$ puis : $N'' = f^{-1}(N) = N'$.

Donc, on a effectivement : $\overrightarrow{M'N'} = x\,\overrightarrow{A'B'}$.

2.2 Propriétés des associées vectorielles

2.2.1 Linéarité

Soit f une application affine de $\mathscr{P}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\overrightarrow{\mathscr{P}}$, x un réel.

Posons : $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$ et $\vec{t} = x\vec{u}$.

Nous avons, d'une part,

$$\begin{aligned}\tilde{f}(\overrightarrow{OU}) &= \tilde{f}(\overrightarrow{VW}) = \overrightarrow{f(V)f(W)}\\ &= \overrightarrow{f(O)f(W)} - \overrightarrow{f(O)f(V)}\\ &= \tilde{f}(\overrightarrow{OW}) - \tilde{f}(\overrightarrow{OV})\end{aligned}$$

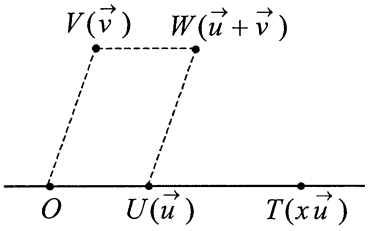


Fig. 15

On en déduit :

$$\tilde{f}(\overrightarrow{OW}) = \tilde{f}(\overrightarrow{OU}) + \tilde{f}(\overrightarrow{OV})$$

C'est-à-dire :

$$\tilde{f}(\vec{w}) = \tilde{f}(\vec{u}) + \tilde{f}(\vec{v}) \qquad (1)$$

Nous avons, d'autre part : $\tilde{f}(\overrightarrow{OT}) = \overrightarrow{f(O)f(T)} = x\,\overrightarrow{f(O)f(U)}$
car f est affine et $\overrightarrow{OT} = x\,\overrightarrow{OU}$.

On en déduit : $\tilde{f}(\overrightarrow{OT}) = x\,\tilde{f}(\overrightarrow{OU})$, c'est-à-dire : $\tilde{f}(x\vec{u}) = x\,\tilde{f}(\vec{u})$ (2)

On adopte alors la définition suivante :

Pour signifier que $\tilde{f}$ vérifie les relations (1) et (2) on dit que $\tilde{f}$ est une *application linéaire* de $\overrightarrow{\mathscr{P}}$.

Dès lors, on peut énoncer :

Théorème 3 *L'associée d'une application affine de $\mathscr{P}$ est une application linéaire de $\overrightarrow{\mathscr{P}}$.*

À titre d'exercice, on établira l'équivalence des propositions :

i) $\tilde{f}$ est une application linéaire.

ii) Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et tous réels λ, μ : $\tilde{f}(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) = \lambda\tilde{f}(\vec{u}) + \mu\tilde{f}(\vec{v})$.

2.2.2 Associée de la composée de deux applications affines

Théorème 4 *L'associée de la composée de deux applications affines est la composée des associées de ces applications. En d'autres termes :*

$$\widetilde{g \circ f} = \tilde{g} \circ \tilde{f}$$

Démonstration :

Soit $\vec{u}$ un vecteur et (M,N) un bipoint de vecteur $\vec{u}$. Compte tenu du fait que f, g et donc $g\circ f$ sont affines, on a :

$$\widetilde{g\circ f}(\vec{u}) = \widetilde{g\circ f}(\overrightarrow{MN}) = \overrightarrow{g\circ f(M)g\circ f(N)} = \tilde{g}[\overrightarrow{f(M)f(N)}] = \tilde{g}[\tilde{f}(\overrightarrow{MN})] = \tilde{g}[\tilde{f}(\vec{u})].$$

Ainsi $\widetilde{g\circ f}$ et $\tilde{g}\circ\tilde{f}$ ont même action sur n'importe quel vecteur de $\overrightarrow{\mathscr{P}}$.

Donc $\widetilde{g\circ f} = \tilde{g}\circ\tilde{f}$.

2.2.3 Associée d'une bijection affine, de sa réciproque

Théorème 5 *L'associée d'une bijection affine de $\mathscr{P}$ est une bijection de $\overrightarrow{\mathscr{P}}$ (sur $\overrightarrow{\mathscr{P}}$). De plus, l'associée de la réciproque d'une bijection affine est la réciproque de l'associée de cette bijection. En d'autres termes :*

$\widetilde{f^{-1}} = (\tilde{f})^{-1}$.

Démonstration :

Soit $\vec{u}$ un vecteur de $\overrightarrow{\mathscr{P}}$. Nous avons : $\tilde{f}[\widetilde{f^{-1}}(\vec{u})] = \tilde{f}\circ\widetilde{f^{-1}}(\vec{u}) \overset{*}{=} \widetilde{(f\circ f^{-1})}(\vec{u}) = \tilde{I}(\vec{u}) = \vec{u}$ (*)
d'après le théorème 4.

Donc $\tilde{f}\circ\widetilde{f^{-1}} = \widetilde{(f\circ f^{-1})} = \tilde{I}$.

Il apparaît que la réciproque de $\tilde{f}$ est $\widetilde{f^{-1}}$. Autrement dit, on a : $\widetilde{f^{-1}} = (\tilde{f})^{-1}$.

2.3 Détermination d'une application affine

Théorème 6 (Important) *Soit f et g des applications affines et A un point de $\mathscr{P}$, si f a même action que g sur le point A et si f a même associée vectorielle que g (*i.e. $f(A) = g(A)$ *et* $\tilde{f} = \tilde{g}$*), alors* $f = g$.

Démonstration :

Posons $A' = f(A) = g(A)$. Alors, pour tout point M de $\mathscr{P}$, nous avons:

$$\overrightarrow{A'f(M)} = \overrightarrow{f(A)f(M)} = \tilde{f}(\overrightarrow{AM}) \overset{*}{=} \tilde{g}(\overrightarrow{AM}) = \overrightarrow{g(A)g(M)} = \overrightarrow{A'g(M)} \qquad (*) \text{ car } \tilde{f} = \tilde{g}.$$

On en déduit : $f(M) = g(M)$.

Dans $\mathscr{P}$, f fait donc le même travail que g. Autrement dit : $f = g$.

Il découle du théorème 6 le résultat suivant :

Théorème 7 *Toute application affine de $\mathscr{P}$ est déterminée lorsqu'on connaît son associée vectorielle et son action sur un point.*

Démonstration :

Supposons que f transforme A en A' (A et A' donnés), et que $\tilde{f}$ soit connue.

Alors, pour tout point M de $\mathscr{P}$, on a :

$$\overrightarrow{A'f(M)} = \overrightarrow{f(A)f(M)} = \widetilde{f}(\overrightarrow{AM})$$

Le point $f(M)$est donc le transformé du point A' par la translation $t_{\vec{u}'}$ où $\vec{u}' = \widetilde{f}(\overrightarrow{AM})$ est un vecteur connu.

On connaît ainsi l'action de f sur chaque point du plan $\mathscr{P}$.

L'application f est donc parfaitement déterminée.

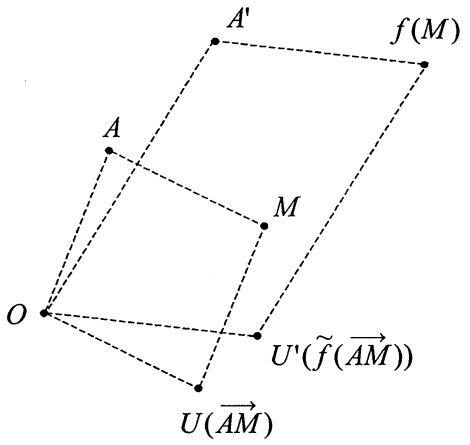


Fig. 16

3. Détermination des bijections affines "usuelles" du plan $\mathscr{P}$

3.1 Détermination d'une translation, d'une homothétie

Théorème 8 *Si f est une application affine de $\mathscr{P}$ qui transforme A en A' (A et A' des points donnés), $\widetilde{f} = \lambda \widetilde{I}$ (λ réel non nul donné), alors :*

- *f est la translation $t_{(A,A')}$ lorsque $\lambda = 1$;*
- *f est l'homothétie de rapport λ qui transforme A en A' lorsque $\lambda \neq 1$.*

Le centre de cette homothétie est le barycentre des points $\begin{array}{c|c} A & A' \\ \hline \lambda & -1 \end{array}$.

Démonstration

Deux cas sont à envisager :

- $\lambda = 1$

  Dans ce cas, compte tenu que la translation $t_{(A,A')}$ envoie A sur A' et a même associée que f, il vient d'après le théorème 6 que $f = t_{(A,A')}$.

- $\lambda \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$

  Dans ce cas, l'homothétie de rapport λ qui envoie A sur A', a même associée que f. Donc f est cette homothétie.

  Le centre Ω de f vérifie l'égalité : $\overrightarrow{\Omega A'} = \lambda \overrightarrow{\Omega A}$

  soit encore : $\lambda \overrightarrow{\Omega A} - \overrightarrow{\Omega A'} = \vec{0}$,

  ce qui prouve que Ω est le barycentre de $\begin{array}{c|c} A & A' \\ \hline \lambda & -1 \end{array}$.

3.2 Détermination d'une rotation

Théorème 9 *Si f est une application affine de $\mathscr{P}$, qui transforme A en A' (A et A' deux points donnés), et si $\widetilde{f}$ est la rotation vectorielle d'angle $\hat{\alpha}$ ($\hat{\alpha}$ angle non nul donné), alors :*

f est la rotation d'angle $\hat{\alpha}$ qui transforme A en A'.

Le centre de cette rotation est le point A lorsque $A = A'$, sinon c'est le point commun à la médiatrice de $[A\,A']$ et à la ligne de niveau $(A, A')_{\hat{\alpha}}$.

Démonstration

La rotation d'angle $\hat{\alpha}$ qui envoie A sur A' a :

* même action que f sur le point A
* même associée que f

Donc f est cette rotation.

Le centre de f est A lorsque $A = A'$ car, dans ce cas, f fixe A.

Sinon, en désignant par Ω le centre de f, on doit avoir

- d'une part : $\Omega A = \Omega A'$, donc Ω appartient à la médiatrice du segment $[AA']$,
- d'autre part : $(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega A'}) = \hat{\alpha}$, donc Ω appartient à la ligne de niveau $\hat{\alpha}$ – notée $(A, A')_{\hat{\alpha}}$ – de l'application $M \mapsto (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MA'})$.

Ce qui justifie le résultat annoncé.

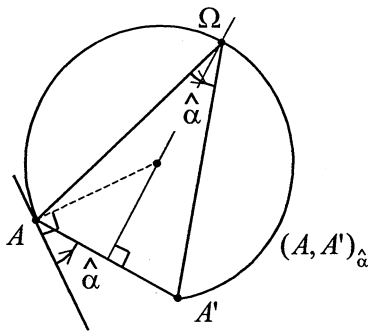


Fig. 17

3.1 Détermination d'une réflexion, d'une réflexion glissée

3.1.1 Étude préliminaire

Étant donné des points A et A' du plan $\mathscr{P}$ et un vecteur non nul $\vec{k}$ de $\overrightarrow{\mathscr{P}}$, on se propose de déterminer la nature de l'application affine f de $\mathscr{P}$ qui envoie A sur A' et admet pour associée la réflexion vectorielle $\widetilde{s}_{\vec{k}}$ de droite $\mathbb{R}\vec{k}$.

- **Cas particulier** : les vecteurs $\overrightarrow{AA'}$ et $\vec{k}$ sont orthogonaux – voir figure 18 –

On peut alors conjecturer que f est la réflexion s_Δ ayant pour axe la droite Δ dirigé par $\vec{k}$ et qui passe par le milieu G du segment $[AA']$.

Le contrôle de la véracité de cette conjecture est immédiat. En effet, f a :
– même action que s_Δ sur le point A
– même associée que s_Δ.

Donc $f = s_\Delta$ (c.f. théorème 6).

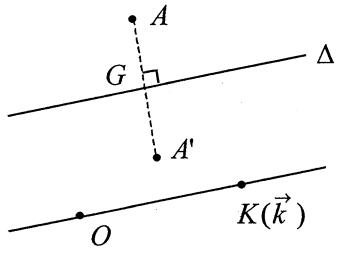


Fig. 18

- **Cas général** : les vecteurs $\overrightarrow{AA'}$ et $\vec{k}$ ne sont pas orthogonaux.

Pour avoir $\widetilde{f} = \widetilde{s}_{\vec{k}}$, on peut s'attendre que f soit la composée d'une réflexion d'axe Δ dirigé par $\vec{k}$, suivie d'une translation $t_{\vec{u}}$ (car l'associée de $t_{\vec{u}}$ est $\widetilde{I}$).

S'il en est ainsi, $t_{\vec{u}} \circ s_\Delta$ doit envoyer le point A sur le point A'. Cette dernière condition rend le vecteur $\vec{u}$ tributaire du choix de Δ. Voir figures 19, 20 et 21.

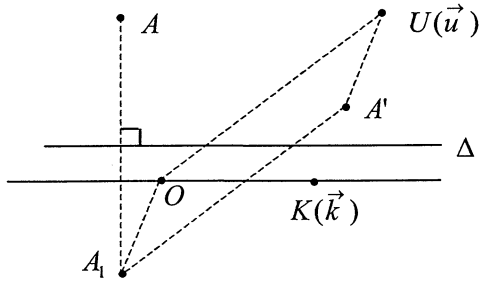


Fig. 19

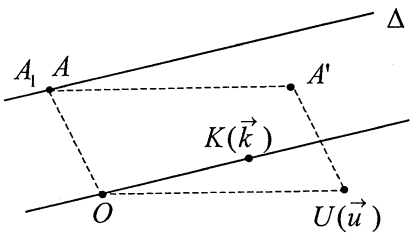


Fig. 20

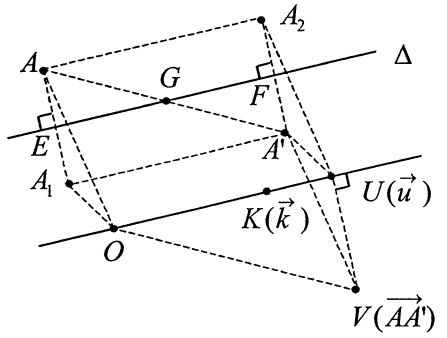


Fig. 21

Afin d'englober le cas particulier, vu précédemment, on décide que s_Δ sera la réflexion ayant pour axe la droite Δ dirigé par $\vec{k}$ et passant par le milieu G du segment $[AA']$ – voir figure 21 –

Dès lors, la translation $t_{\vec{u}}$ qui fait suite à s_Δ est parfaitement déterminée puisqu'elle doit envoyer le point A_1 – transformé de A par s_Δ – sur le point A'.

Donc $\vec{u} = \overrightarrow{A_1A'} = 2\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{EF}$. Ainsi $\vec{u}$ est aussi un vecteur directeur de Δ.

Plus précisément, $\vec{u}$ est la composante dans $\mathbb{R}\vec{k}$ du vecteur $\overrightarrow{AA'}$.

Revenons maintenant à l'application f cherchée. Il est clair qu'elle est égale à la composée $t_{\vec{u}} \circ s_\Delta$ puisque elle a même action que cette composée sur le point A et même associée vectorielle.

Cela dit, notons A_2 le transformé de A par $t_{\vec{u}}$ – voir figure 21 – Le quadrilatère $AA_1A'A_2$ est manifestement un rectangle admettant la droite Δ pour axe de symétrie. Il en découle que l'application $s_\Delta \circ t_{\vec{u}}$ envoie aussi A sur A'. Comme son associée est encore $\vec{f}$, on a donc : $f = s_\Delta \circ t_{\vec{u}}$.

Ainsi, en décidant de faire passer Δ par le milieu de $[AA']$, on a :

$$f = s_\Delta \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}} \circ s_\Delta$$

$\vec{u}$ étant la composante dans la droite $\mathbb{R}\vec{k}$ du vecteur $\overrightarrow{AA'}$.

Remarque. Le choix précédent est nécessaire si l'on veut que $t_{\vec{u}}$ et s_Δ soient commutables.
En effet : $s_\Delta \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}} \circ s_\Delta$ entraîne $s_\Delta \circ t_{\vec{u}}(\Delta) = t_{\vec{u}} \circ s_\Delta(\Delta)$, c'est-à-dire $t_{\vec{u}}(\Delta) = s_\Delta[t_{\vec{u}}(\Delta)]$. On en déduit : $t_{\vec{u}}(\Delta) = \Delta$ puisque $t_{\vec{u}}(\Delta)$ est une droite parallèle à Δ invariante par s_Δ. Donc l'hypothèse $s_\Delta \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}} \circ s_\Delta$ impose que $\vec{u}$ soit un vecteur directeur de Δ.
Dans le problème qui nous préoccupe, le triangle AA_1A' est alors nécessairement rectangle en A_1. La médiatrice Δ de $[AA_1]$ passe ainsi par le milieu du segment $[AA']$. Décider de faire passer Δ par le milieu de $[AA']$ s'avère donc être un choix pertinent.

3.1.2 Réflexion glissée

L'étude précédente nous conduit à adopter la définition qui suit.

Une droite Δ et un vecteur directeur $\vec{u}$ de cette droite étant donnés, on appelle réflexion glissée d'axe Δ et de vecteur $\vec{u}$ la composée de la réflexion d'axe Δ suivie, ou précédée de la translation de vecteur $\vec{u}$.

Cette transformation est notée $s_{\Delta,\vec{u}}$.

On pourra éventuellement considérer une réflexion d'axe Δ comme étant une réflexion glissée d'axe Δ et de vecteur nul.

3.1.3 Énoncé du résultat obtenu

Théorème 10 *Si f est une application affine de $\mathscr{P}$ qui transforme A en A', (A et A' points donnés), et $\widetilde{f}$ est la réflexion vectorielle de droite $\mathbb{R}\vec{k}$, ($\vec{k}$ vecteur non nul donné) alors f est une réflexion glissée.*

De façon plus précise,

- *lorsque $\overrightarrow{AA'}$ et $\vec{k}$ sont orthogonaux, f est la réflexion qui* échange *A et A'.*
- *Sinon, f est la réflexion glissée d'axe dirigé par $\vec{k}$ qui* envoie *A sur A'.*

L'axe de cette réflexion glissée passe par le milieu de $[AA']$.

Son vecteur est la composante dans la droite vectorielle $\mathbb{R}\vec{k}$ du vecteur $\overrightarrow{AA'}$.

3.1.4 Autre détermination d'une réflexion glissée

Le résultat qui suit est un corollaire du théorème 10.

Corollaire *Étant donné des points A, B, A', B' tels que $A \neq B$ et $A'B' = AB$, il existe une et une seule réflexion glissée qui transforme A en A', et B en B'.*

L'axe de cette réflexion passe par les milieux de $[AA']$ et de $[BB']$ (si ces milieux sont confondus, l'axe est orthogonal à (AB)).

Son vecteur est celui du projeté orthogonal sur Δ du bipoint (AA') ou (BB').

Indication pour une démonstration

- **Analyse** : S'il existe une réflexion glissée qui envoie A sur A' et B sur B' son associée vectorielle ne peut être que ...
- **Synthèse** : Soit f la réflexion glissée qui envoie A sur A' et qui admet pour associée la réflexion $\widetilde{s}_{\vec{k}}$ de droite $\mathbb{R}\vec{k}$.

On a : $\overrightarrow{A'f(B)} = ...$

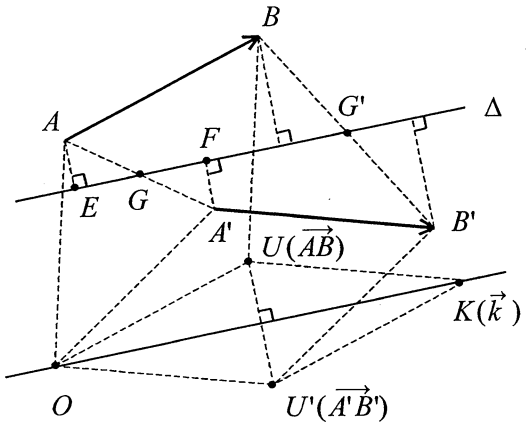


Fig. 22

4. Composées de bijections affines "usuelles" d'un plan $\mathscr{P}$

Les théorèmes précédents vont nous permettre de statuer sur la nature de la composée de bijections affines prises parmi les translations, les homothéties, les réflexions et les rotations agissant dans un même plan $\mathscr{P}$.

Cette composée sera **entièrement déterminée** en prenant en compte son action sur un point de $\mathscr{P}$ (on aura intérêt à choisir ce point de façon judicieuse).

Il est totalement inutile de mémoriser les résultats qui vont suivre. On se contentera de retenir les méthodes mises en jeu.

4.1 Composée d'une translation et d'une homothétie, de deux homothéties

4.1.1 Composée d'une translation et d'une homothétie

On suppose ici de t et h sont autres que l'application identique de $\mathscr{P}$. Cela dit, en désignant par λ le rapport de h, on sait que :

$h \circ t$ est affine	(théorème 1)	$t \circ h$ est affine	(théorème 1)
$\widetilde{h \circ t} = \widetilde{h} \circ \widetilde{t} = \lambda \widetilde{I} \circ \widetilde{I} = \lambda \widetilde{I}$	(théorème 4)	$\widetilde{t \circ h} = \widetilde{t} \circ \widetilde{h} = \widetilde{I} \circ \lambda \widetilde{I} = \lambda \widetilde{I}$	(théorème 4)

Il s'ensuit que $h \circ t$ et $t \circ h$ sont des **homothéties de rapport λ** (théorème 8).

Attention, on a : $h \circ t \neq t \circ h$ (il suffit de regarder leurs actions sur le centre de h).

Pour déterminer le centre de chacune de ces homothéties, il suffit de connaître le transformé d'un point de $\mathscr{P}$ judicieusement choisi.

Exercice résolu :

Étant donné trois points Ω, A, B du plan $\mathscr{P}$, on note h l'homothétie de centre Ω et de rapport 1/2 et t la translation de bipoint (A,B). Déterminer les applications $h \circ t$ et $t \circ h$.

Solution :

- $t \circ h$ est l'homothétie de rapport 1/2 qui transforme Ω en $\Omega' = t(\Omega)$. Son centre est donc le barycentre Ω_1 de $\begin{array}{c|c} \Omega & \Omega' \\ \hline 1/2 & -1 \end{array}$.

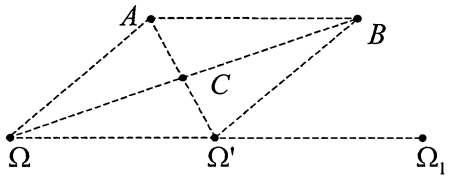


Fig. 23

- $h \circ t$ est l'homothétie de rapport 1/2 qui transforme A en $C = h(B)$. Son centre est donc le barycentre de $\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline 1/2 & -1 \end{array}$ ou encore $\begin{array}{c|c} A & \Omega' \\ \hline 0 & -1 \end{array}$.

car C est le barycentre de $\begin{array}{c|c} A & \Omega' \\ \hline -1 & -1 \end{array}$. Le centre de $h \circ t$ est donc Ω'.

4.1.2 Composée de deux homothéties

Notons :

h_1 l'homothétie de centre Ω_1 et de rapport λ_1, $(\lambda_1 \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\})$

h_2 l'homothétie de centre Ω_2 et de rapport λ_2, $(\lambda_2 \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\})$

A' le transformé de A par $h_2 \circ h_1$, où A est un point de $\mathscr{P}$ choisi arbitrairement.

On sait alors que :

$h_2 \circ h_1$ est affine, (théorème 1),

$\widetilde{h_2 \circ h_1} = \lambda_2 \widetilde{I} \circ \lambda_1 \widetilde{I} = \lambda_2 \lambda_1 \widetilde{I}$ (théorème 4).

Il s'ensuit que $h_2 \circ h_1$ est :

- La translation $t_{(A,A')}$ lorsque $\lambda_2 \lambda_1 = 1$,
- l'homothétie de rapport $\lambda_2 \lambda_1$ qui transforme A en A' lorsque $\lambda_2 \lambda_1 \neq 1$.

Attention : $h_1 \circ h_2$ et $h_2 \circ h_1$ sont des homothétie de même rapport $\lambda_1 \lambda_2$, en général distinctes.

Exercice 1

Étant donné :

- l'homothétie h_1 de centre Ω_1 et de rapport λ_1, $(\lambda_1 \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\})$
- l'homothétie h_2 de centre Ω_2 et de rapport λ_2, $(\lambda_2 \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\})$

Montrer que $h_1 \circ h_2 = h_2 \circ h_1$ si et seulement si $\Omega_1 = \Omega_2$.

Exercice 2

Étant donné deux points A et B du plan $\mathscr{P}$, déterminer les transformations $h_2 \circ h_1$ et $h_1 \circ h_2$ dans les cas suivants :

1. $h_1 = h_{A,2}$ et $h_2 = h_{B,1/2}$
2. $h_1 = h_{A,2}$ et $h_2 = h_{B,-1/2}$.

4.2 Composée de deux rotations

Notons :

r_1 la rotation de centre Ω_1 et d'angle $\hat{\alpha}_1$, $(\hat{\alpha}_1 \neq \hat{0})$,

r_2 la rotation de centre Ω_2 et d'angle $\hat{\alpha}_2$, $(\hat{\alpha}_2 \neq \hat{0})$,

A' le transformé de A par $r_2 \circ r_1$; où A est un point de $\mathscr{P}$ choisi arbitrairement.

On sait alors que :

$r_2 \circ r_1$ est affine, (théorème 1),

$\widetilde{r_2 \circ r_1} = \widetilde{r_2} \circ \widetilde{r_1}$ (théorème 4).

Comme dans $\mathscr{P}_O$, $\widetilde{r_1}$ et $\widetilde{r_2}$ sont identifiables aux rotations (ponctuelles) $r_{O,\hat{\alpha}_1}$ et $r_{O,\hat{\alpha}_2}$, on est conduit à l'alternative suivante :

1. Lorsque $\hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2 = \hat{0}$, on a : $\widetilde{r_2} \circ \widetilde{r_1} = \widetilde{I}$. Dans ce cas, $r_2 \circ r_1$ est la **translation** $t_{(A,A')}$.
2. Lorsque $\hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2 \neq \hat{0}$, on a : $\widetilde{r_2} \circ \widetilde{r_1} = \widetilde{r}_{\hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2}$. Dans ce cas, $r_2 \circ r_1$ est la **rotation** (ponctuelle) d'angle $\hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2$, qui envoie A sur A'.

Attention : $r_1 \circ r_2$ et $r_2 \circ r_1$ sont des rotations de même angle $\hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2$, en général distinctes.

Exercice 1

Étant donné :

- la rotation r_1 de centre Ω_1 et d'angle $\hat{\alpha}_1$, $(\hat{\alpha}_1 \neq \hat{0})$,
- la rotation r_2 de centre Ω_2 et d'angle $\hat{\alpha}_2$, $(\hat{\alpha}_2 \neq \hat{0})$,

Montrer que $r_1 \circ r_2 = r_2 \circ r_1$ si et seulement si $\Omega_1 = \Omega_2$.

Exercice 2

On note $\hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$ les angles $\widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})}$ et $\widehat{(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})}$ d'un triangle ABC donné, r_1 et r_2 les rotations $r_{A,\hat{\alpha}}$ et $r_{B,\hat{\beta}}$.

Déterminer la transformation $r_2 \circ r_1$.

Indication. Deux cas sont à considérer suivant que le triangle ABC est isocèle en C ou non.

4.3 Composée de trois réflexions

4.3.1 Composée de trois réflexions d'axes concourants

Soit s_1, s_2, s_3 trois réflexions dont les axes Δ_1, Δ_2, Δ_3 concourent en un point Ω.

On se propose d'étudier la transformation

$$f = s_3 \circ s_2 \circ s_1.$$

L'idée qui conduit au résultat est simple : on décompose la rotation $s_3 \circ s_2$ de façon judicieuse sous la forme $s \circ s_1$ – voir figure ci-contre où s est la réflexion de droite Δ –

On a alors : $f = s_3 \circ s_2 \circ s_1 = s$

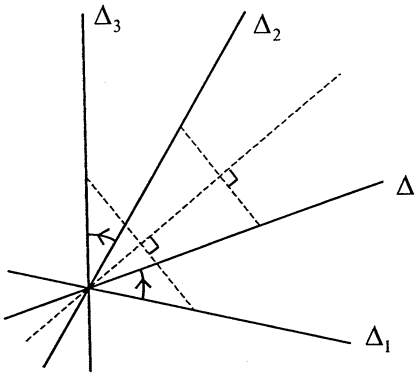


Fig. 24

Ainsi :

La composée de trois réflexions d'axes concourants en un point Ω est une réflexion dont l'axe passe par Ω.

Remarque

Pour déterminer l'axe Δ de la réflexion $f = s_3 \circ s_2 \circ s_1$, on construit le point A' transformé par f d'un point A de Δ_1 autre que Ω.

Δ est alors la médiatrice de $[AA']$.

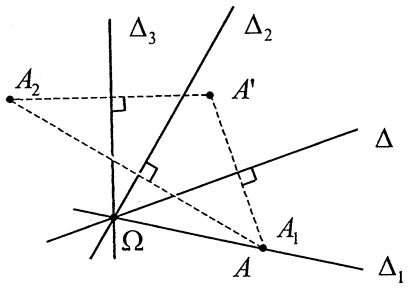


Fig. 25

4.3.2 Composée de trois réflexions d'axes non concourants

Notons :

- f la composée de trois réflexions s_1, s_2, s_3 prises dans cet ordre ;
- Δ_1, Δ_2, Δ_3 les axes de ces réflexions ;
- $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ des vecteurs directeurs de Δ_1, Δ_2, Δ_3 ;
- A' le transformé par f d'un point A arbitrairement choisi dans $\mathscr{P}$.

On sait alors que f est affine et que $\widetilde{f} = \widetilde{s}_3 \circ \widetilde{s}_2 \circ \widetilde{s}_1$, où $\widetilde{s}_1$, $\widetilde{s}_2$, $\widetilde{s}_3$ sont respectivement les réflexions vectorielles de droites $\mathbb{R}\vec{e}_1$, $\mathbb{R}\vec{e}_2$, $\mathbb{R}\vec{e}_3$.

Dans $\mathscr{P}_O$ ces réflexions sont identifiables aux réflexions de droites (OE_1), (OE_2) et (OE_3). En vertu du résultat précédent, leur composée est la réflexion de droite (OI) (voir figure 26).

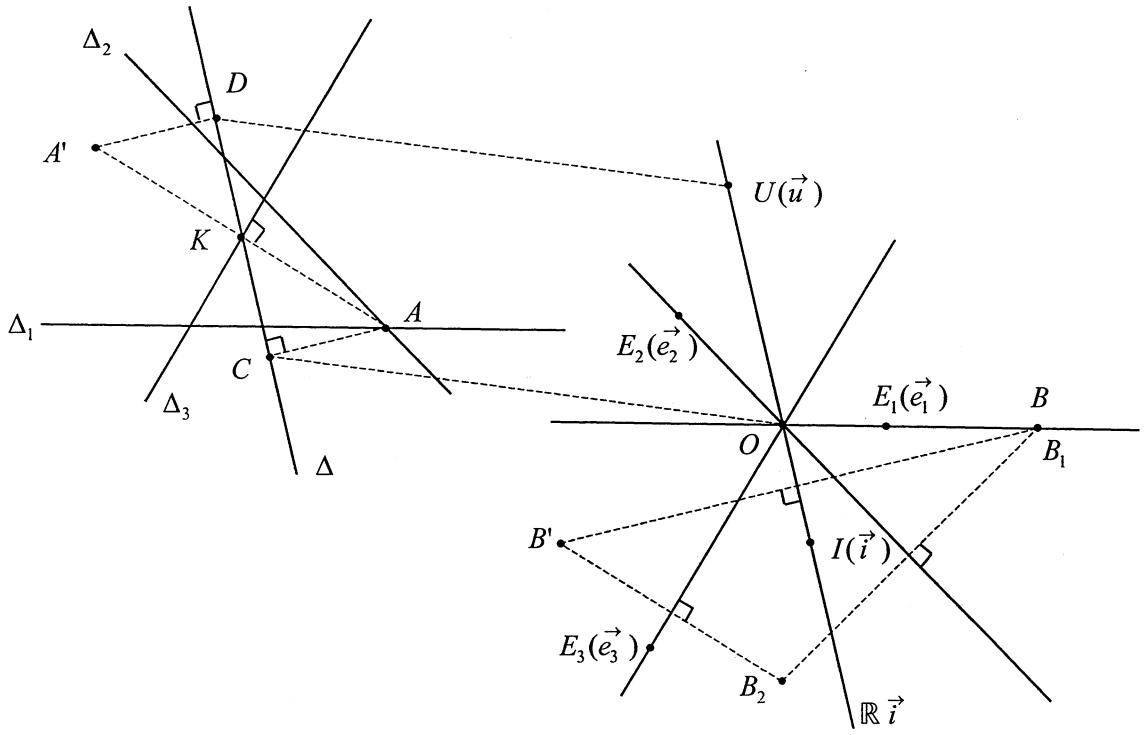


Fig. 26 - 27

$\widetilde{f}$ est alors la réflexion vectorielle de droite $\mathbb{R}\vec{i}$. Il en découle immédiatement que f est la **réflexion glissée d'axe dirigé par $\vec{i}$ qui transforme A en A'** – voir théorème 10 –

Rappelons que l'axe Δ de cette réflexion passe par le milieu K de $[AA']$ et que son vecteur est celui du bipoint (C,D) projeté orthogonal de (A,A') sur Δ.

En conclusion à cette étude, il semble utile de retenir que :

Théorème 11 *La composée de trois réflexions d'axes non concourants est une réflexion glissée.*

Exercice

Les notations sont celles précédemment utilisées.

Étant donné trois droites Δ_1, Δ_2, Δ_3 dans un plan $\mathscr{P}$, déterminer la transformation $f = s_3 \circ s_2 \circ s_1$ dans les cas suivants :

1. Δ_1, Δ_2, Δ_3 sont parallèles.
2. Δ_1 et Δ_2 sont parallèles.
3. Δ_2, et Δ_3 sont parallèles.
4. Δ_3 et Δ_1 sont parallèles.

4.4 Autres composées (étude sommaire)

Les transformations mises en jeu sont toutes autres que l'application identique de $\mathscr{P}$.

4.4.1 Composées d'une translation *t* et d'une rotation *r*

On sait que :

$r \circ t$ et $t \circ r$ sont affines,

$\widetilde{r \circ t} = \widetilde{r} \circ \widetilde{I} = \widetilde{r}$ et $\widetilde{t \circ r} = \widetilde{I} \circ \widetilde{r} = \widetilde{r}$.

Donc $r \circ t$ et $t \circ r$ sont des **rotations** de même angle que la rotation r.

Exercice

Montrer que $r \circ t \neq t \circ r$.

4.4.2 Composées d'une translation *t* et d'une réflexion *s*

1ère méthode

On sait que :

$s \circ t$ et $t \circ s$ sont affines,

$\widetilde{s \circ t} = \widetilde{s} \circ \widetilde{I} = \widetilde{s}$ et $\widetilde{t \circ s} = \widetilde{I} \circ \widetilde{s} = \widetilde{s}$.

Donc $s \circ t$ et $t \circ s$ sont des *réflexions glissées* d'axes parallèles à celui de la réflexion s.

2ème méthode

On factorise la translation t en la composée des deux réflexions d'axes parallèles. On est alors ramené à étudier la composée de trois réflexions d'axes non concourants.

On retrouve ainsi la même conclusion que précédemment.

Exercice

Montrer que $s \circ t = t \circ s$ si et seulement si le vecteur de t est un vecteur directeur de l'axe de s.

4.4.3 Composées d'une homothétie *h* et d'une rotation *r*

Les composées $r \circ h$ et $h \circ r$ sont appelées **similitudes directes**. Un chapitre leur sera spécifiquement consacré.

4.4.4 Composées d'une homothétie *h* et d'une réflexion *s*

Les composées $s \circ h$ et $h \circ s$ sont appelées *similitudes inverses*. Ces transformations ne font pas actuellement partie du programme des classes de l'enseignement secondaire. Néanmoins, il nous est apparu intéressant d'aborder leur étude conjointement à celle des similitudes directes.

5. Utilisation des nombres complexes

La partie du programme consacrée aux nombres complexes est ici supposée connue.

5.1 Les trois aspects d'un plan $\mathscr{P}$ muni d'un repère orthonormal direct (*O*, *I*, *J*)

Le point O joue ici un double rôle : il est à la fois l'origine du plan $\mathscr{P}$ et celle du repère (O, I, J). En pareille situation, le plan $\mathscr{P}$ peut revêtir trois aspects suivant que l'on se place dans l'un ou l'autre des domaines suivants :

a) Le domaine géométrique

$\mathscr{P}$ est vu comme un ensemble de points géométriques. C'est son aspect premier. Il est sous-jacent aux deux autres.

b) Le domaine vectoriel

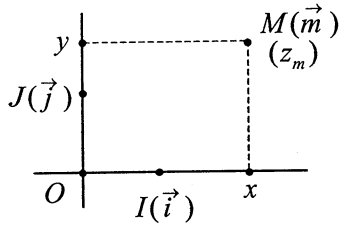
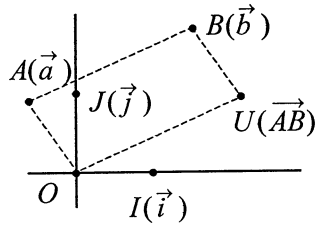
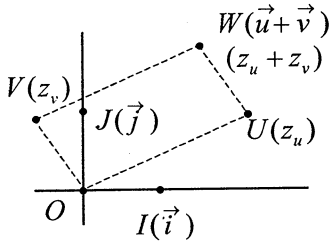
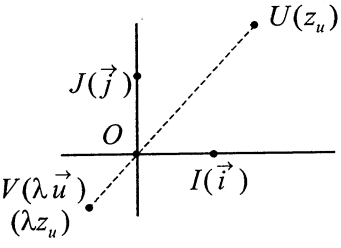
$\mathscr{P}$ est vu comme représentation de l'ensemble $\overrightarrow{\mathscr{P}}$ des vecteurs des couples de points de $\mathscr{P}$. Il porte alors le nom de **plan vectoriel**.

c) Le domaine numérique

$\mathscr{P}$ est vu comme représentation de l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes. Il porte alors le nom de **plan complexe.**

5.2 Transcriptions d'un domaine à l'autre

Elles sont, pour l'essentiel, données dans le tableau suivant :

Configuration	Langage "Configuration"	Langage vectoriel	Langage "complexe"
 Fig. 28	M est l'**image** • du vecteur $\vec{m}$ • du complexe $x+\mathrm{i}y$	• $\vec{m}=x\vec{i}+y\vec{j}$ • $\vec{m}$ est le vecteur **image** du complexe $x+\mathrm{i}y$	• $z_M=x+\mathrm{i}y$ est **l'affixe** du point M (ou du vecteur $\vec{m}$)
 Fig. 29	U est l'**image** • du vecteur $\overrightarrow{AB}$ • du complexe z_B-z_A	• $\vec{u}=\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$ • $\vec{u}$ est l'**image** du complexe z_B-z_A.	• $z_U=z_B-z_A$ est **l'affixe** du point U (ou du vecteur $\overrightarrow{AB}$)
 Fig. 30	$W=t_{\vec{u}}(V)=t_{\vec{v}}(U)$	$\vec{w}=\vec{u}+\vec{v}$	$z_W=z_U+z_V$
 Fig. 31	V est le transformé de U par l'homothétie de centre O et de rapport λ	$\vec{v}=\lambda\vec{u}$ (λ réel)	$z_v=\lambda z_u$ (λ réel)

En identifiant les ensembles $\overrightarrow{\mathscr{P}}$ et $\mathbb{C}$ on fait "coïncider" l'addition des vecteurs et l'addition des complexes ainsi que la multiplication d'un vecteur par un réel et la multiplication d'un complexe par un réel.

6. Exercices résolus

6.1 Exercice (1)

Dans le plan complexe $\mathscr{P}$, on donne trois points A, B et C d'affixes respectives a, b, c. Montrer que le triangle ABC est équilatéral direct si, et seulement si, on a : $a+bj+cj^2=0$.

Solution

Les propositions suivantes sont équivalentes :

- Le triangle ABC est équilatéral direct
- $\overrightarrow{BA} = \widetilde{r}_{\pi 3}(\overrightarrow{BC})$ où $\widetilde{r}_{\pi 3}$ désigne la rotation vectorielle d'angle de mesure $\pi/3$.
- $a-b=-j^2(c-b)$ ... en rappelant que $-j^2 = e^{i\pi/3}$
- $a+b(-1-j^2)+cj^2=0$
- $a+bj+cj^2=0$ ... en rappelant que $1+j+j^2=0$.

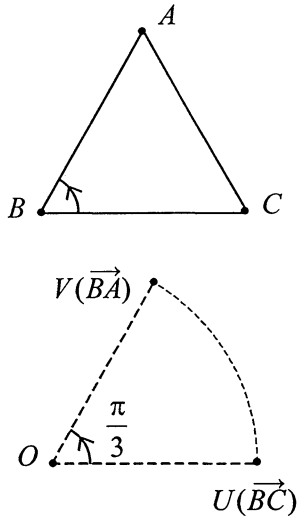


Fig. 32

Commentaire

Ce résultat est à retenir. Il pourra être utilisé pour montrer qu'un triangle est équilatéral.

6.2 Exercice (2)

Dans un plan orienté $\mathscr{P}$, les triangles OAB, OCD et OEF sont équilatéraux directs ; P, Q et R sont les milieux respectifs des segments $[FA]$, $[BC]$ et $[DE]$. Montrer que le triangle PQR est équilatéral direct.

Solution

Dans le plan complexe d'origine O, on désigne par a, b, ..., r les affixes des points A, B, ..., R.

En appliquant le résultat de l'exercice (1) aux triangles OAB, OCD et OEF, on a :

$$\begin{cases} a+bj=0 \\ cj+dj^2=0 \\ ej^2+f=0 \end{cases}$$

On en déduit, par addition membre à membre :

$$a+f+(b+c)j+(d+e)j^2=0$$

c'est à dire

$$2(p+qj+rj^2)=0.$$

Égalité qui prouve que le triangle PQR est équilatéral direct.

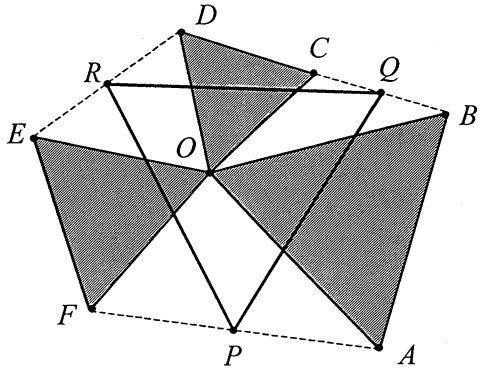


Fig.33

6.3 Exercice (3)

Dans un plan orienté $\mathscr{P}$ on construit, à partir d'un quadrilatère $ABCD$ donné, les triangles équilatéraux directs BAP, BCQ, DCR, et DAS. Montrer que $PQRS$ est un parallélogramme.

1ère solution

Nous allons établir, en utilisant les nombres complexes que les segments $[PR]$ et $[QS]$ ont même milieu. On se place donc dans le plan complexe a, b, ..., s désignent ici les affixes des points A, B , ..., S.

Compte tenu des données, nous avons :

d'une part :

$$\begin{cases} p+bj+aj^2=0 \\ r+dj+cj^2=0 \end{cases}$$

d'autre part :

$$\begin{cases} q+bj+cj^2=0 \\ s+dj+aj^2=0 \end{cases}$$

On en déduit :

$$p+r+(b+d)j+(a+c)j^2=0$$

et

$$q+s+(b+d)j+(a+c)j^2=0$$

d'où on tire : $p+r=q+s$.

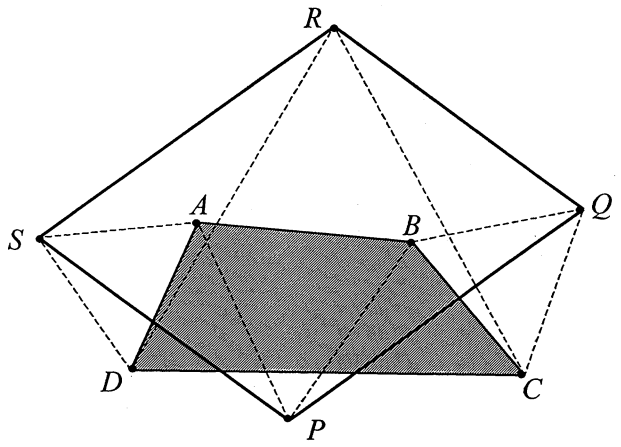


Fig. 34

Ainsi $[PR]$ et $[QS]$ ont même milieu. Le quadrilatère $PQRS$ est donc un parallélogramme.

2ème solution

Nous allons maintenant utiliser des transformations. La démarche est la suivante : on compose deux rotations (transformations liées à la configuration "triangle équilatéral") pour obtenir une translation (transformation liée à la configuration "parallélogramme").

Posons : $r_1 = r_{A,\pi/3}$; $r_2 = r_{C,-\pi/3}$ et $f = r_2 \circ r_1$.

Nous avons,

d'une part :

$$f(P)=Q \text{ et } f(S)=R$$

d'autre part :

$$\vec{f} = \vec{r}_{-\pi/3} \circ \vec{r}_{\pi/3} = \vec{I}.$$

f est donc la translation qui envoie P sur Q et S sur R.

On a donc : $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS}$ ce qui prouve que $PQRS$ est un parallélogramme.

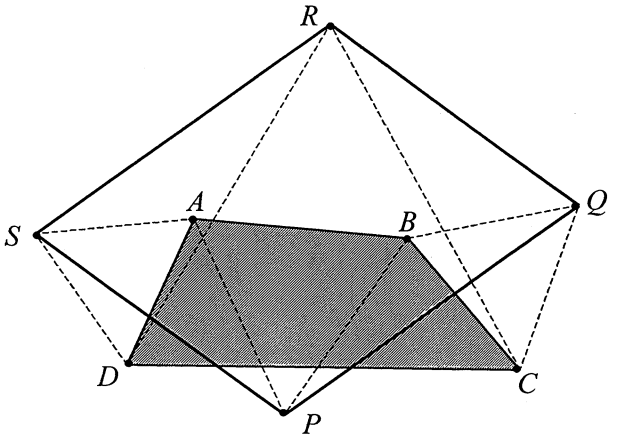


Fig. 35

6.4 Exercice (4)

Dans un plan orienté $\mathscr{P}$ on construit, à partir d'un triangle ABC donné, les carrés directs $CBDE$, $ACFG$, $BAHP$ puis les parallélogrammes $ECFQ$ et $DBPR$. Montrer que le triangle AQR est rectangle isocèle en A et que le centre Ω du carré $CBDE$ est le milieu de $[QR]$.

Pour parvenir à la conclusion attendue on va établir que les triangles $Q\Omega A$ et $A\Omega R$ sont rectangles et isocèles en Ω.

1ère solution

On peut remarquer que la composé « $t_{(E,C)}$ suivie de $r_{C,\pi/2}$ » transforme Q en A.

Reste à montrer que cette composée se réduit à la rotation de centre Ω et d'angle de mesure $\pi/2$.

Pour ce faire, on va décomposer judicieusement (c'est là que réside la difficulté) la translation $t_{(E,C)}$ et la rotation $r_{C,\pi/2}$ en "produit" de réflexions.

En notant d la parallèle à (BC) passant par Ω, nous avons :

$$r_{C,\pi/2} \circ t_{(E,C)} = (s_{(CD)} \circ s_{(CB)}) \circ (s_{(CB)} \circ s_d),$$

et donc :

$$r_{C,\pi/2} \circ t_{(E,C)} = s_{(CD)} \circ s_d = r_{\Omega,\pi/2}.$$

Ainsi, la rotation $r_{\Omega,\pi/2}$ transforme Q en A.

Le triangle $Q\Omega A$ est donc rectangle isocèle en Ω.

La deuxième partie de la démonstration est laissée aux bons soins du lecteur.

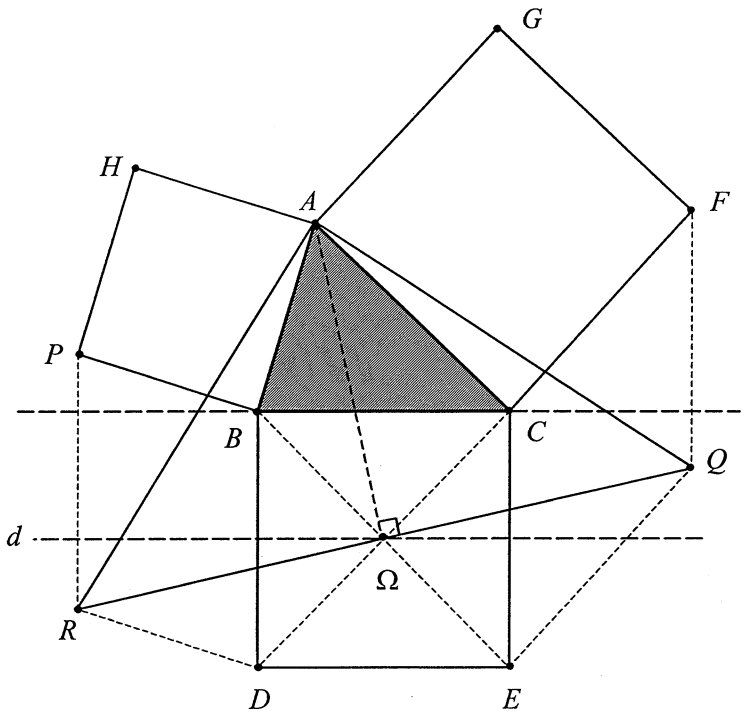


Fig. 36

2ème solution

On utilise ici la rotation vectorielle $\tilde{r}$ d'angle de mesure $\pi/2$. Il s'agit d'établir que

$$\tilde{r}(\overrightarrow{\Omega Q}) = \overrightarrow{\Omega A}$$

Pour cela, du fait que $\tilde{r}$ est linéaire, on va décomposer le vecteur $\overrightarrow{\Omega Q}$ en une somme de vecteurs dont on connaît les transformés par $\tilde{r}$.

On obtient ainsi :

$$\tilde{r}(\overrightarrow{\Omega Q}) = \tilde{r}(\overrightarrow{\Omega E} + \overrightarrow{CF}) = \tilde{r}(\overrightarrow{\Omega E}) + \tilde{r}(\overrightarrow{CF})$$
$$= \overrightarrow{\Omega C} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{\Omega A}$$

Le triangle $Q\Omega A$ est donc rectangle isocèle en A. (Le lecteur est invité à terminer la démonstration).

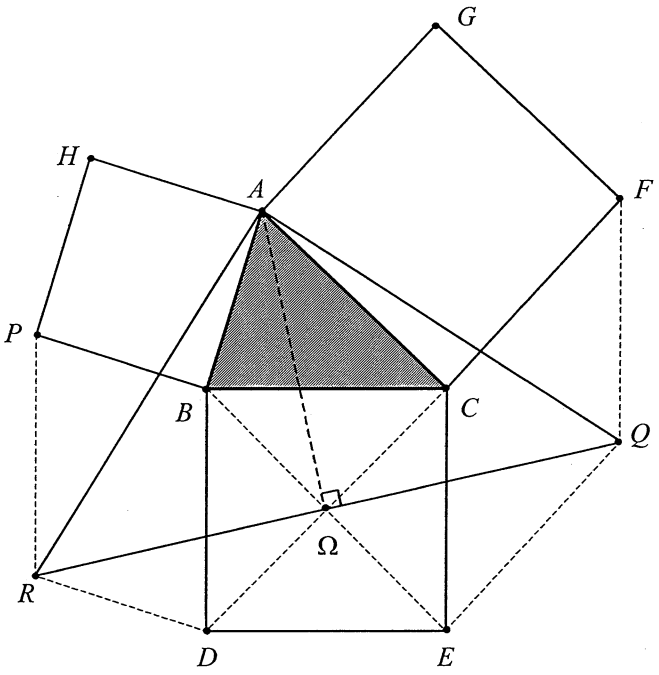


Fig. 37

3ème solution

On utilise maintenant les nombres complexes. Pour simplifier les calculs, il paraît judicieux de se placer dans le plan complexe d'origine Ω. Il s'agit alors d'établir que $z_A = \mathrm{i} z_Q$.

Pour expliciter notre démarche, nous allons donner "en parallèle" la transcription en langage vectoriel des diverses égalités utilisées.

Nous avons : (voir figure 37)

$$\begin{aligned} z_A &= z_C + (z_A - z_C) \\ &= \mathrm{i}z_E + \mathrm{i}(z_F - z_C) \\ &= \mathrm{i}z_E + \mathrm{i}(z_Q - z_E) \\ &= \mathrm{i}(z_E + z_Q - z_E) = \mathrm{i}z_Q \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\Omega A} &= \overrightarrow{\Omega C} + \overrightarrow{CA} \\ &= \widetilde{r}(\overrightarrow{\Omega E}) + \widetilde{r}(\overrightarrow{CF}) \\ &= \widetilde{r}(\overrightarrow{\Omega E}) + \widetilde{r}(\overrightarrow{EQ}) \\ &= \widetilde{r}(\overrightarrow{\Omega E} + \overrightarrow{EQ}) = \widetilde{r}(\overrightarrow{\Omega Q}) \end{aligned}$$

On parvient ainsi à la même conclusion que précédemment.

Commentaire

Il apparaît clairement que les solutions (2) et (3) sont conçues de la même façon. Par ailleurs elles se distinguent de la solution (1) par leur concision et leur simplicité.

6.5 Exercice (5)

Soit un triangle ABC non rectangle en A, les pieds B_1 et C_1 de ses hauteurs issues de B et C, les symétriques D et E de C et B par rapport à B_1 et C_1 ; les projetés orthogonaux H, K, P et Q de B, C, D et E sur la droite (B_1C_1).

Montrer que $BD = CE$ et que les segments $[B_1C_1]$, $[HK]$ et $[PQ]$ ont même milieu.

Solution (utilisant les composées de réflexions)

Il s'agit ici de remarquer que la composée

$$f = s_{(CA)} \circ s_{(BC)} \circ s_{(AB)}$$

transforme D en C et B en E.

On sait alors que f est une réflexion glissée.

Son axe passe par les milieux B_1 et C_1 de $[BE]$ et $[DC]$. Son vecteur est

$$\vec{u} = 2\overrightarrow{HB_1} = 2\overrightarrow{C_1K} = 2\overrightarrow{PC_1} = 2\overrightarrow{B_1Q}$$

Ceci dit, on a : $BD = CE$ car f conserve la distance.

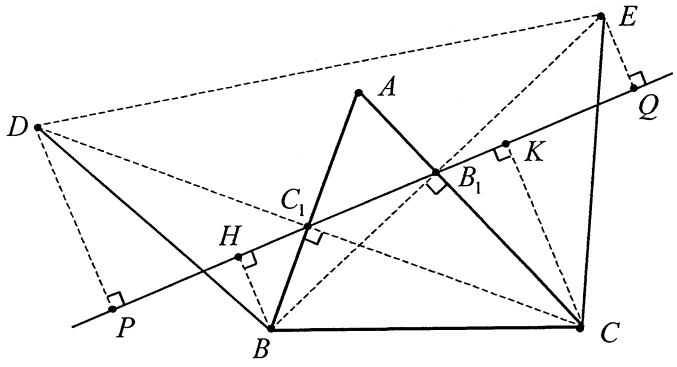


Fig. 38

Par ailleurs

- L'égalité $\overrightarrow{HB_1} = \overrightarrow{C_1K}$ équivaut à $[HK]$ et $[B_1C_1]$ ont même milieu.
- L'égalité $\overrightarrow{PC_1} = \overrightarrow{B_1Q}$ équivaut à $[PQ]$ et $[HK]$ ont même milieu.

Autre solution

Les points B, C, B_1, C_1 sont sur le cercle de diamètre $[BC]$. Le milieu I de $[BC]$ se projette orthogonalement sur (B_1C_1) au milieu de $[B_1C_1]$ d'une part et de $[HK]$ d'autre part. D'où $\overrightarrow{HB_1} = \overrightarrow{C_1K}$.

7. Compléments sur les composées d'homothéties

7.1 Composée de deux homothéties de même centre

Soit h_1 et h_2 deux homothéties de même centre Ω et de rapports respectifs λ_1 et λ_2. Étudions les composées $h_1 \circ h_2$ et $h_2 \circ h_1$.

Nous avons :

$$h_2 \circ h_1(\Omega) = h_1 \circ h_2(\Omega) = \Omega$$

$$\widetilde{h_2 \circ h_1} = \widetilde{h_1 \circ h_2} = \lambda_1 \lambda_2 \widetilde{I}.$$

Ces résultats nous conduisent à la conclusion suivante :

- *lorsque* $\lambda_1 \lambda_2 \neq 1$, $\quad h_2 \circ h_1 = h_1 \circ h_2 = h_{\Omega, \lambda_1 \lambda_2}$
- *lorsque* $\lambda_1 \lambda_2 = 1$, $\quad h_2 \circ h_1 = h_1 \circ h_2 = t_{(\Omega,\Omega)} = I = h_{\Omega,1}$

Ce qui nous permet d'énoncer :

Théorème 12 *La composée de deux homothéties de même centre est l'homothétie ayant pour centre le centre commun et pour rapport le produit des rapports des deux homothéties initiales (elle ne dépend pas de l'ordre dans lequel on compose ces homothéties).*

Exemple d'application de ce résultat

On donne un parallélogramme $ABCD$. Une droite d_1 parallèle à (AB) coupe (AD) en E et (BC) en F ; une droite d_2 parallèle à (AD) coupe (AB) en G et (CD) en H. Montrer que les droites (EH), (GF) et (AC) sont soit concourantes, soit parallèles.

Solution

Deux éventualités sont à considérer :

1. (EH) coupe (AC) en Ω.

Dans ce cas, on considère les homothéties h_1 et h_2 de centre Ω qui transforment respectivement H en E et A en C ; leur composée est notée h.

On a alors :

$$h(d_2) = h_2 \circ h_1(d_2) = h_2((AD)) = (BC)$$

$$h((AB)) = h_1 \circ h_2((AB)) = h_1((DC)) = d_1$$

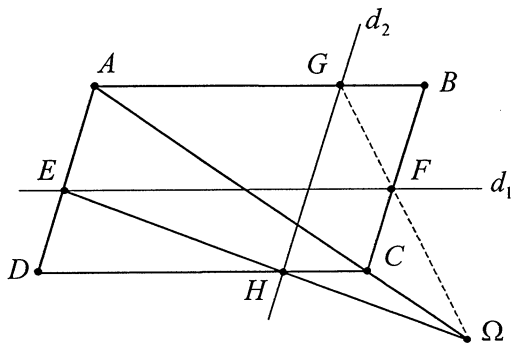


Fig. 39

Ceci étant, comme G appartient à d_2 et (AB), son transformé $h(G)$ appartient à la fois à (BC) et d_1. Donc $h(G) = F$. Par suite, h étant une homothétie de centre Ω, les points G, F et Ω sont alignés. Autrement dit les droites (EH), (AC) et (GF) sont concourantes.

2. (EH) est parallèle à (AC).

Dans ce cas, supposons que (GF) coupe (AC) en un point Ω.

Alors, on établirait comme précédemment que Ω appartient à la droite (EH) ce qui est contraire à l'hypothèse (EH) parallèle à (AC). La droite (GF) est donc parallèle à (AC).

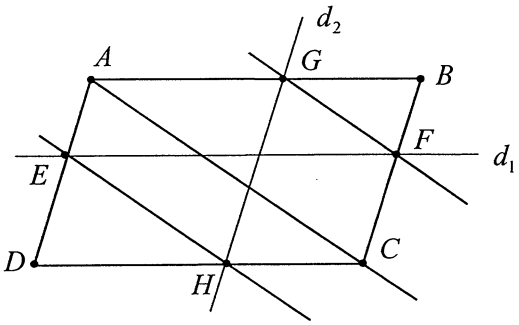


Fig. 40

7.2 Composée de deux homothéties de centres distincts

On sait déjà que la composée de deux homothéties est soit une homothétie, soit une translation. Le théorème qui suit permet de statuer sur la nature de cette composée lorsqu'on connaît son action sur un point n'appartenant pas à la droite des centres des deux homothéties données.

Théorème 13 *Soit h_1 et h_2 deux homothéties autres que Id_P de centres respectifs Ω_1 et Ω_2, un point A n'appartenant pas à la "droite des centres" $(\Omega_1 \Omega_2)$; le transformé A' de A par la composée $h_2 \circ h_1$.*
Alors cette composée $h_2 \circ h_1$ est :

- *l'homothétie de centre Ω qui transforme A en A' si, et seulement si, les droites (AA') et $(\Omega_1\Omega_2)$ sont sécantes, Ω étant le point commun de ces deux droites.*
- *la translation $t_{(A,A')}$ si, et seulement si, les droites (AA') et $(\Omega_1\Omega_2)$ sont parallèles.*

Démonstration

Observons d'abord que :

- les points A et A' sont distincts car, du fait que A n'appartient pas à $(\Omega_1\Omega_2)$, le point A' ne peut appartenir à $(\Omega_1 A)$ – voir figure ci-contre –
- la droite $(\Omega_1\Omega_2)$ est globalement invariante par $h_2 \circ h_1$ puisqu'elle est globalement invariante par h_1 et par h_2.

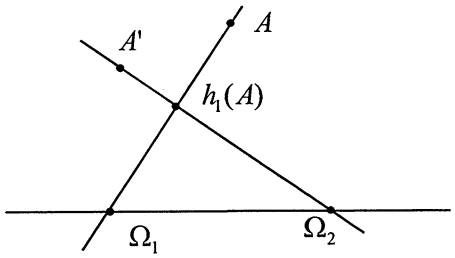


Fig. 41

Ceci dit, deux éventualités sont à envisager :

1. $h_2 \circ h_1$ est une homothétie.

   Dans ce cas, son centre Ω appartient à la fois à $(\Omega_1\Omega_2)$ (car cette droite est invariante par $h_2 \circ h_1$) et à (AA') (car un point, son transformé et le centre d'homothétie sont alignés).

2. $h_2 \circ h_1$ est une translation.

   Dans ce cas, son vecteur $\overrightarrow{AA'}$ est colinéaire à $\overrightarrow{\Omega_1\Omega_2}$ car la droite $(\Omega_1\Omega_2)$ est invariante par $h_2 \circ h_1$.

   Donc, si $h_2 \circ h_1$ est une translation, alors les droites (AA') et $(\Omega_1\Omega_2)$ sont parallèles. Autrement dit, si les droites (AA') et $(\Omega_1\Omega_2)$ sont sécantes, alors $h_2 \circ h_1$ n'est pas une translation. Il s'ensuit que $h_2 \circ h_1$ ne peut être qu'une homothétie.

Le résultat qui suit est une conséquence directe du théorème 13.

7.3 Le théorème de Menelaüs

Théorème 14 *Soit un triangle ABC et P, Q, R trois points autres que A, B et C appartenant respectivement aux droites (BC), (CA) et (AB).*

On note :

- *h_R l'homothétie de centre R qui transforme B en A*
- *h_Q l'homothétie de centre Q qui transforme A en C*
- *h_P l'homothétie de centre P qui transforme B en C.*

Les points P, Q, R sont alignés si, et seulement si, $h_Q \circ h_R = h_P$.

Démonstration

- Si P, Q et R sont alignés, alors la droite (BC) coupe la droite (QR) en P. Dans ce cas, la composée $h_Q \circ h_R$ est l'homothétie de centre P qui envoie B sur C.
- Si $h_Q \circ h_R = h_P$ alors le centre P de h_P appartient à la droite des centres Q et R des homothéties h_Q et h_R. Donc P, Q et R sont alignés.

Voir figures page suivante.

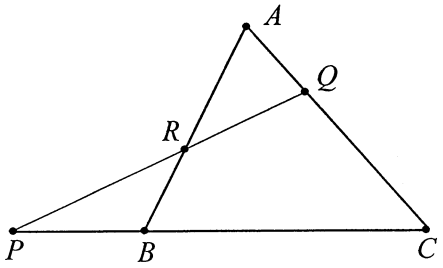


Fig. 42

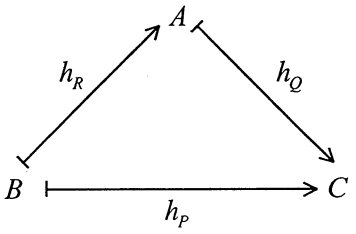


Fig. 43

Exemple d'application du théorème de Menelaüs

Soit un triangle ABC, Q et R les pieds de ses bissectrices intérieures issues de B et C.

1. Montrer que les droites (QR) et (BC) sont parallèles si et seulement si le triangle ABC est isocèle en A.
2. On suppose le triangle ABC non isocèle en A. Que représente le point P commun aux droites (QR) et (BC) ?

Solution

Posons : $BC = a$, $CA = b$ et $AB = c$.

1. On sait que :

R est barycentre du système de points $\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline a & b \end{array}$ et donc de $\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 1 & b/a \end{array}$, $(a \neq 0)$.

Q barycentre d du système de points $\begin{array}{c|c} C & A \\ \hline c & a \end{array}$ et donc de $\begin{array}{c|c} C & A \\ \hline 1 & a/c \end{array}$, $(c \neq 0)$.

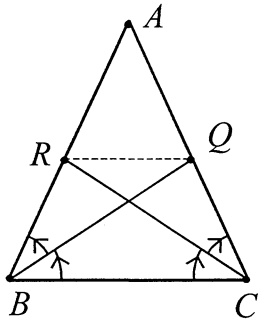


Fig. 44

On a donc : $\overrightarrow{RA} = -b/a\,\overrightarrow{RB}$ et $\overrightarrow{QC} = -a/c\,\overrightarrow{QA}$. Autrement dit, les homothéties h_R et h_Q, ont respectivement pour rapports $k_R = -b/a$ et $k_Q = -a/c$.

Il vient alors :

(QR) // $(BC) \Leftrightarrow h_Q \circ h_R$ est une translation $\Leftrightarrow k_R \cdot k_Q = 1 \Leftrightarrow b/c = 1 \Leftrightarrow$ le triangle ABC est isocèle en A.

2. Lorsque le triangle ABC n'est pas isocèle en A, $h_Q \circ h_R$ est l'homothétie h_P son rapport est $k_Q \cdot k_R = b/c$.

On a donc : $\overrightarrow{PC} = b/c\,\overrightarrow{PB}$

soit : $c\,\overrightarrow{PC} - b\,\overrightarrow{PB} = \vec{0}$

P est donc le barycentre du système de points $\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline b & c \end{array}$, et on sait que ce point est le pied de la bissectrice extérieure issue de A du triangle ABC.

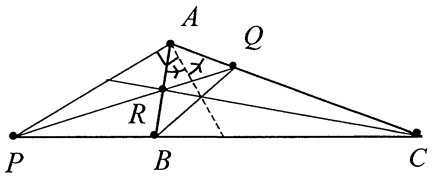


Fig. 45

On peut résumer cette étude par l'énoncé suivant :

Dans un triangle non isocèle, le pied d'une bissectrice extérieure est aligné avec les pieds des bissectrices intérieures issues des deux autres sommets.

7.4 Le théorème de Céva

Théorème 15 *Soit un triangle ABC et des points P, Q, R autres que A, B et C appartenant respectivement aux droites (BC), (CA) et (AB).*

On note :

- *h_R l'homothétie de centre R qui transforme A en B*
- *h_Q l'homothétie de centre Q qui transforme A en C*
- *h_C l'homothétie de centre C qui transforme B en P*
- *h_B l'homothétie de centre B qui transforme C en P.*

Les droites (AP), (BQ) et (CR) sont concourantes si, et seulement si, $h_C \circ h_R$ est une homothétie et $h_C \circ h_R = h_B \circ h_Q$.

Les droites (AP), (BQ) et (CR) sont parallèles si, et seulement si, $h_C \circ h_R$ est une translation et $h_C \circ h_R = h_B \circ h_Q$.

Démonstration

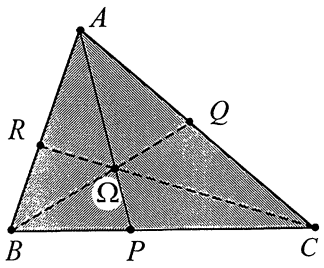


Fig. 46

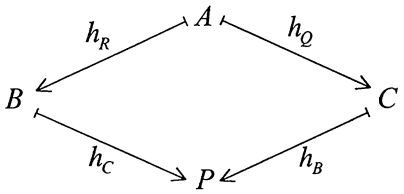


Fig. 47

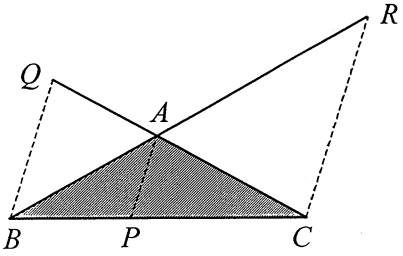


Fig. 48

1. **Étude directe**

- On suppose les droites (AP), (BQ) et (CR) concourantes en un point Ω.

  En appliquant le théorème de Ménélaüs

  – au triangle ABP coupé par la transversale $(C\Omega R)$

  – au triangle ACP coupé par la transversale $(B\Omega Q)$

  On obtient :

  $h_C \circ h_R = h_{\Omega, A \mapsto P}$

  $h_B \circ h_Q = h_{\Omega, A \mapsto P}$

  Donc $h_C \circ h_R$ est la même homothétie que $h_B \circ h_Q$.

- On suppose maintenant les droites (AP), (BQ) et (CR) parallèles.

  On a dans ce cas :

  $h_C \circ h_R = t_{(A,P)}$ car (AP) et (CR) sont parallèles

  $h_B \circ h_Q = t_{(A,P)}$ car (AP) et (BQ) sont parallèles.

  Donc $h_C \circ h_R$ est la même translation que $h_B \circ h_Q$.

2. **Étude réciproque**

- Si $h_C \circ h_R$ est la même homothétie que $h_B \circ h_Q$ alors cette homothétie transforme A en P et, par conséquent, son centre appartient à la droite (AP) ainsi qu'aux droites (CR) et (BQ). Ces trois droites sont donc concourantes.

- Si $h_C \circ h_R$ est la même translation que $h_B \circ h_Q$ alors cette translation transforme A en P et, par conséquent, la droite (AP) est parallèle à chacune des droites (CR) et (BQ). Ces trois droites sont donc parallèles.

Exemple d'application du théorème de Céva

Montrer que les droites qui passent par les sommets d'un triangle et les points de contact du côté opposé avec le cercle inscrit dans ce triangle sont concourantes.

Solution

Posons : $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ et $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$.

Il est alors immédiat de vérifier que :

$AP = AR = p - a$; $BP = BR = p - b$ et
$CP = CR = p - c$.

– voir figure 49 –

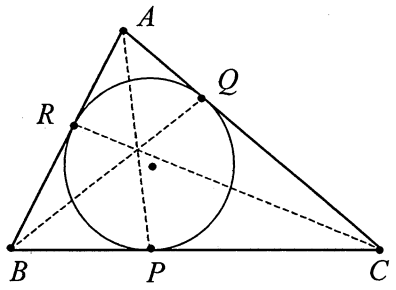


Fig. 49

Cela dit, les homothéties figurant dans le schéma ci-contre ont pour rapports :

$$\begin{cases} k_R = -\dfrac{p-b}{p-a} \\ k_C = \dfrac{p-c}{a} \end{cases} \text{ et } \begin{cases} k_q = -\dfrac{p-c}{p-a} \\ k_B = \dfrac{p-b}{a} \end{cases}$$

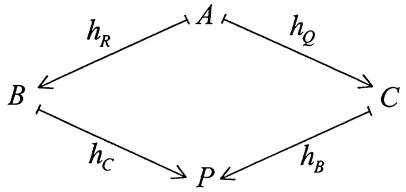


Fig. 50

On peut alors remarquer que :

* $k_C \cdot k_R = k_B \cdot k_Q$
* ce produit est manifestement négatif, donc différent de 1.

Par conséquent, la composée $h_C \circ h_R$ se réduit à la même **homothétie** que $h_B \circ h_Q$. Les droites (AP), (BQ) et (CR) sont donc **concourantes**.

8. Annexe : affinités planes

8.1 Définition et premières propriétés

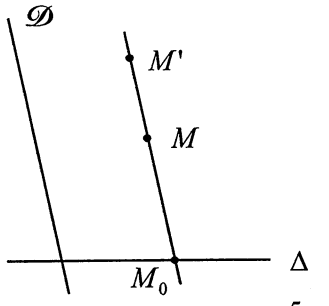
8.1.1 Définition

Étant donné deux droites sécantes Δ et $\mathscr{D}$ du plan $\mathscr{P}$, et un réel non nul λ on appelle *affinité de droite* Δ (ou d'axe Δ) selon $\mathscr{D}$ (ou parallèlement à $\mathscr{D}$), de *rapport* λ l'application de $\mathscr{P}$ dans lui-même qui, à tout point M associe le point M' défini par la relation :

$$\overrightarrow{M_0M'} = \lambda \overrightarrow{M_0M}$$

où M_0 est le projeté de M sur Δ selon $\mathscr{D}$, (ou parallèlement à $\mathscr{D}$).

(Voir figure ci-contre.)



(figure réalisée avec $\lambda = \frac{5}{3}$)

Fig. 51

Notons φ cette affinité. Il est clair que :

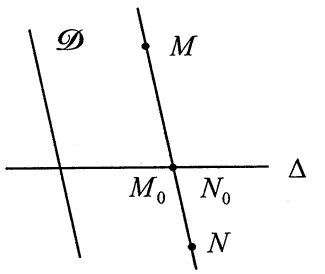
- Lorsque $\lambda = 1$, φ est l'application identique de $\mathscr{P}$
- Lorsque $\lambda \neq 1$, φ fixe chaque point de Δ et seulement les points de cette droite.

8.1.2 Bijection réciproque d'une affinité

Les données précédentes étant conservées, soit φ l'affinité de droite Δ selon $\mathscr{D}$, de rapport λ, M et N deux points de $\mathscr{P}$, M_0 et N_0 leurs projetés respectifs sur Δ selon $\mathscr{D}$. Alors :

$$\begin{aligned}\varphi(N) = M &\Leftrightarrow \left(N_0 = M_0 \quad \text{et} \quad \overrightarrow{M_0M} = \lambda \overrightarrow{M_0N}\right)\\ &\Leftrightarrow \left(N_0 = M_0 \quad \text{et} \quad \overrightarrow{M_0N} = 1/\lambda \overrightarrow{M_0M}\right)\\ &\Leftrightarrow N = \psi(M)\end{aligned}$$

où ψ est l'affinité de droite Δ selon $\mathscr{D}$, de rapport $1/\lambda$. (Voir figure ci-contre.)



(figure réalisée avec $\lambda = -2$)

Fig. 52

Ainsi, M est l'image par φ du point $\psi(M)$ et seulement de ce point. En outre : $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi = Id_{\mathscr{P}}$.

Concluons

Toute affinité agissant dans $\mathscr{P}$ est une bijection de $\mathscr{P}$ sur lui-même.

La bijection réciproque de l'affinité de droite Δ selon $\mathscr{D}$, de rapport λ est l'affinité de droite Δ selon $\mathscr{D}$, de rapport $\frac{1}{\lambda}$.

8.2 Propriété fondamentale

8.2.1 Lemme 1

Si des points A, B, C vérifient la relation $\overrightarrow{AC} = x\overrightarrow{AB}$ alors leurs images respectives A', B', C' par une affinité vérifient la relation $\overrightarrow{A'C'} = x\overrightarrow{A'B'}$.

Démonstration

Soit φ une affinité de droite Δ selon $\mathscr{D}$ et de rapport λ. Observons deux cas :

- La droite (AB) n'est pas parallèle à $\mathscr{D}$

  Exprimons $\overrightarrow{C_0C}$ en fonction de $\overrightarrow{A_0A}$ et de $\overrightarrow{B_0B}$.

  Il vient :

  $$\begin{aligned}\overrightarrow{C_0C} &= \overrightarrow{C_0A_0} + \overrightarrow{A_0A} + \overrightarrow{AC} \\ &= -x\overrightarrow{A_0B_0} + \overrightarrow{A_0A} + x\overrightarrow{AB} \\ &= -x\overrightarrow{A_0B_0} + \overrightarrow{A_0A} + x(\overrightarrow{AA_0} + \overrightarrow{A_0B_0} + \overrightarrow{B_0B})\end{aligned}$$

  soit : $\overrightarrow{C_0C} = (1-x)\overrightarrow{A_0A} + x\overrightarrow{B_0B}$

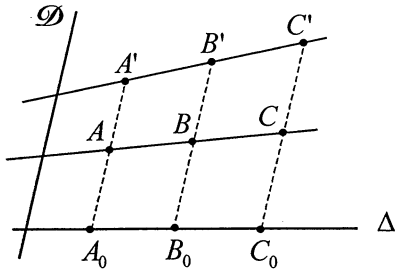


Fig. 53

  Désignons maintenant par C'' le point d'intersection de la droite $(A'B')$ et de la parallèle à $\mathscr{D}$ passant par C. On a alors $\overrightarrow{A'C''} = x\overrightarrow{A'B'}$ (propriété de Thalés). Par ailleurs, on établit comme précédemment que : $\overrightarrow{C_0C''} = (1-x)\overrightarrow{A_0A'} + x\overrightarrow{B_0B'}$. On en déduit : $\overrightarrow{C_0C''} = \lambda\left[(1-x)\overrightarrow{A_0A} + x\overrightarrow{B_0B}\right] = \lambda\overrightarrow{C_0C} = \overrightarrow{C_0C'}$, puis $C' = C''$ et enfin $\overrightarrow{A'C'} = x\overrightarrow{A'B'}$.

- La droite (AB) est parallèle à $\mathscr{D}$

  Dans ce cas, voir figure ci-contre (réalisée avec $\lambda = 2/3$), on a encore $\overrightarrow{A'C'} = x\overrightarrow{A'B'}$ par effet de l'homothétie de centre I et de rapport λ.

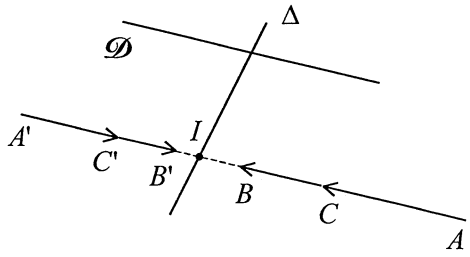


Fig. 54

8.2.2 Lemme 2

Toute affinité agissant dans $\mathscr{P}$ conserve le milieu de deux points.

Ce résultat est une conséquence du lemme 1 en prenant $x = 1/2$.

8.2.3 La propriété fondamentale

Toute affinité agissant dans $\mathscr{P}$ est une bijection affine de $\mathscr{P}$ sur lui-même.

Démonstration

Soit des points de $\mathscr{P}$ A, B, M et N satisfaisant à la relation $\overrightarrow{MN} = x\overrightarrow{AB}$, C le point défini par l'égalité $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{MN}$, A', B', C', M' et N' les transformés respectifs par une affinité φ (de rapport λ) agissant dans $\mathscr{P}$.

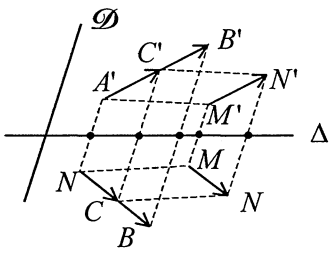


Fig. 55

Nous avons alors :

- d'une part $\overrightarrow{A'C'} = x\overrightarrow{A'B'}$ (lemme 1)
- d'autre part : $[AN]$et $[CM]$ ont le même milieu

On en déduit : $[A'N']$et $[C'M']$ ont le même milieu (lemme 2), autrement dit $\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{M'N'}$.

Finalement, on obtient : $\overrightarrow{M'N'} = x\,\overrightarrow{A'B'}$, φ est donc affine.

8.2.4 Associée vectorielle d'une affinité agissant dans $\mathscr{P}$

Soit φ une affinité de droite Δ selon $\mathscr{D}$, de rapport λ agissant dans un plan $\mathscr{P}$ muni d'un point origine O ; $\vec{i}$ et $\vec{j}$ des vecteurs directeurs des droites Δ et $\mathscr{D}$; $\tilde{\varphi}$ l'associée vectorielle de φ, $\vec{u}$ un vecteur de $\overrightarrow{\mathscr{P}}$, $\vec{u}'$ le transformé de $\vec{u}$ par $\tilde{\varphi}$.

On sait alors que :

$\vec{u}' = \overrightarrow{OU'} = \overrightarrow{\varphi(O)\varphi(U)}$ – voir § 1.3 –

Désignons maintenant par p la projection de $\mathscr{P}$ sur Δ selon $\mathscr{D}$ et par $\tilde{p}$ son associée vectorielle.

Nous avons alors :

$$\overrightarrow{\varphi(O)\varphi(U)} = \overrightarrow{\varphi(O)p(O)} + \overrightarrow{p(O)p(U)} + \overrightarrow{p(U)\varphi(U)}$$

c'est-à-dire :

$$\overrightarrow{OU'} = \lambda\overrightarrow{Op(O)} + \overrightarrow{OU''} + \lambda\overrightarrow{Up(U)}$$

On en déduit :

$$\overrightarrow{OU'} = \lambda\left(\overrightarrow{Op(O)} + \overrightarrow{p(U)U}\right) = \lambda\left(\overrightarrow{U''p(U)} + \overrightarrow{p(U)U}\right)$$
$$= \overrightarrow{U''U}$$

ce qui se traduit par : $\vec{u}' - \tilde{p}(\vec{u}) = \lambda\left(\vec{u} - \tilde{p}(\vec{u})\right)$.

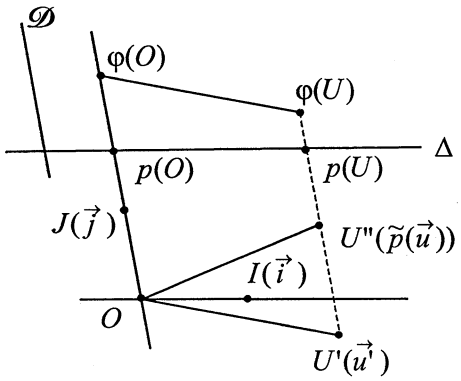


Fig. 56

(Figure réalisée avec $\lambda = -1/2$.)

*Donc **toutes** les affinités agissant dans $\mathscr{P}$, dont les droites sont dirigées par un vecteur $\vec{i}$, selon une droite $\mathscr{D}$ dirigée par un vecteur $\vec{j}$, de rapport λ, ont pour associée vectorielle l'application :*

$$\tilde{\varphi} : \overrightarrow{\mathscr{P}} \longrightarrow \overrightarrow{\mathscr{P}}$$
$$\vec{u} \mapsto \tilde{p}(\vec{u}) + \lambda(\vec{u} - \tilde{p}(\vec{u}))$$

Dans le plan pointé $\mathscr{P}_O$, $\tilde{\varphi}$ s'identifie à l'affinité de droite (OI) selon (OJ), de rapport λ.

*L'application $\tilde{\varphi}$ est appelée **affinité vectorielle** de droite $\mathbb{R}\vec{i}$ selon $\mathbb{R}\vec{j}$, de rapport λ.*

8.3 Conséquences de la propriété fondamentale

Dans tout cet alinéa, φ désigne une affinité de droite Δ, selon $\mathscr{D}$, de rapport λ.

8.3.1 Image d'une droite, d'un segment

Étant donné deux points A et B de $\mathscr{P}$, la droite (AB) (resp. le segment $[AB]$) est l'ensemble des points M de $\mathscr{P}$ vérifiant la relation $\overrightarrow{AM} = x\,\overrightarrow{AB}$ pour x décrivant l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels (resp. le segment $[0,1]$ de $\mathbb{R}$).

Dès lors, φ étant une bijection affine, on a : $\overrightarrow{\varphi(A)\varphi(M)} = x\,\overrightarrow{\varphi(A)\varphi(B)}$.

Le point $\varphi(M)$ décrit donc :

- la droite $(\varphi(A)\varphi(B))$ lorsque M décrit la droite (AB), car x décrit $\mathbb{R}$
- le segment $[\varphi(A)\varphi(B)]$ lorsque M décrit le segment $[AB]$, car x décrit $[0,1]$.

L'image par φ de la droite (AB) (resp. du segment $[AB]$ est donc la droite $(\varphi(A)\varphi(B))$ (resp. le segment $[\varphi(A)\varphi(B)]$).

Il importe de retenir qu'une affinité transforme une droite en une droite, un segment en un segment.

Remarque

Soit d une droite de $\mathscr{P}$.

Deux éventualités peuvent se présenter et deux seulement :

1. d coupe Δ (en A)

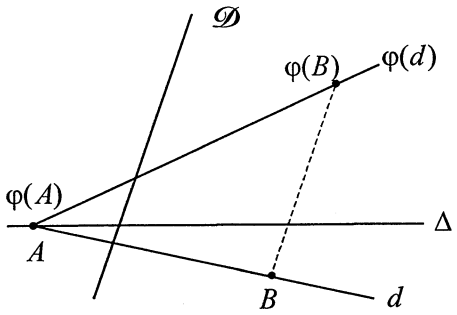


Fig. 57

Alors $\varphi(d)$ coupe Δ (en A).

2. d est parallèle à Δ

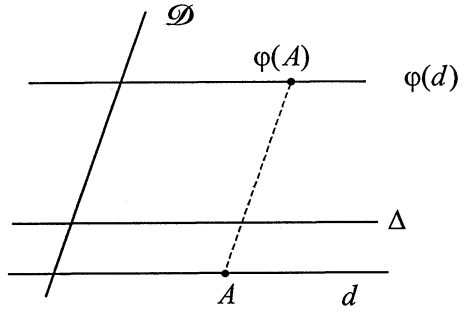


Fig. 58

Alors $\varphi(d)$ est parallèle à Δ. (*)

(*) En effet, dans le deuxième cas, $\varphi(d)$ ne peut couper Δ sinon $\varphi^{-1}[\varphi(d)]$ c'est-à-dire d couperait Δ.

8.3.2 Droites de $\mathscr{P}$ globalement invariantes

Soit d une droite de $\mathscr{P}$ autre que Δ et M un point de cette droite n'appartenant pas à Δ.

- d est globalement invariante par φ seulement si $\varphi(M)$ est un point de d, donc si et seulement si d est parallèle à $\mathscr{D}$.
- Réciproquement, si d est parallèle à $\mathscr{D}$ alors il est clair que $\varphi(d) = d$.

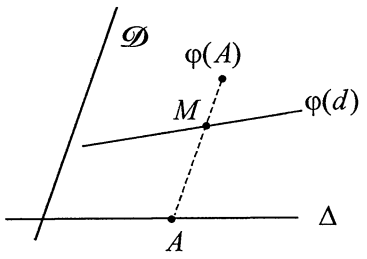


Fig. 59

*Ainsi hormis Δ qui est **point par point** invariante par φ, les seules droites de $\mathscr{P}$ globalement invariantes par φ sont les parallèles à $\mathscr{D}$.*

8.3.3 Conservation des barycentres

Soit n points A_1, A_2, ..., A_n affectés de coefficients réels α_1, α_2, ..., α_n de somme non nulle, le barycentre G des points $(A_i, \alpha_i)_{1 \le i \le n}$.

On a alors : $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$.

On en déduit : $\vec{\varphi}\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i}\right) = \vec{\varphi}(\vec{0})$, puis : $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{\varphi}\left(\overrightarrow{GA_i}\right) = \vec{0}$, car $\vec{\varphi}$ est linéaire.

C'est-à-dire : $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{\varphi(G)\varphi(A_i)} = \vec{0}$, égalité qui prouve que le point $\varphi(G)$ est le barycentre des points pondérés $(\varphi(A_i), \alpha_i)_{1 \le i \le n}$.

On traduit cette propriété en disant que "**une affinité conserve les barycentres**".

8.4 Caractérisation d'une affinité

Dans le plan $\mathscr{P}$, étant donné une droite Δ et deux points A et A' de $\mathscr{P} \setminus \Delta$ tels que la droite (AA') coupe Δ, il existe une et une seule affinité de droite Δ qui envoie A sur A' : l'affinité de droite Δ selon (AA'), de rapport λ où λ est le coefficient de colinéarité du vecteur $\overrightarrow{A_1A'}$ au vecteur $\overrightarrow{A_1A}$ ($\overrightarrow{A_1A'} = \lambda \overrightarrow{A_1A}$).

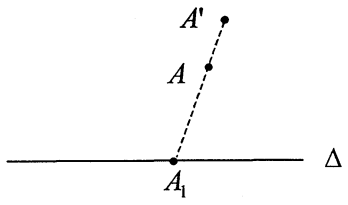


Fig. 60

Cette affinité est notée $\varphi_{\Delta, A \mapsto A'}$.

8.5 Construction de l'image d'un point

Les données sont celles de l'alinéa précédent. Il s'agit de construire l'image d'un point M par l'affinité $\varphi_{\Delta, A \mapsto A'}$ dans chacun des cas suivants :

a) M n'appartient pas à la droite (AA') et la droite (AM) coupe Δ.

b) La droite (AM) est parallèle à Δ.

c) M appartient à la droite (AA').

a) (AM) coupe Δ en I

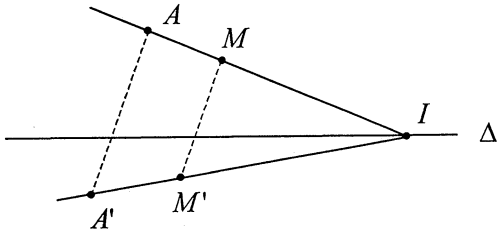


Fig. 61

M' est le point d'intersection de la droite $(A'I)$ et de la parallèle à (AA') passant par M.

b) (AM) est parallèle à Δ

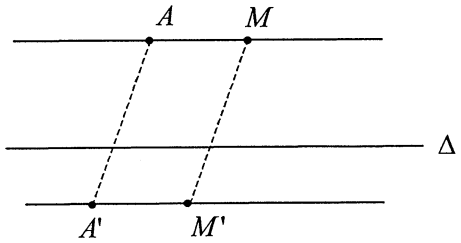


Fig. 62

M' est le point d'intersection de la parallèle à Δ passant par A' et de la parallèle à (AA') passant par M

c) Le point M appartient à (AA')

On se ramène à l'un des deux cas précédent en construisant le transformé C' d'un point C n'appartenant pas à (AA'). Ceci fait, M' est le transformé de M par l'affinité $\varphi_{\Delta, C \mapsto C'}$.

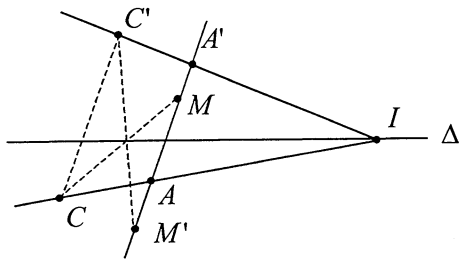


Fig. 63

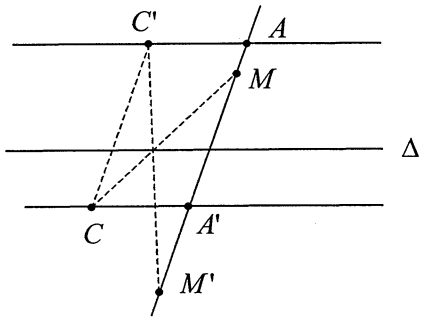


Fig. 64

8.6 Image de deux droites parallèles

Soit, dans un plan $\mathscr{P}$, deux droites parallèles (AB) et (CD), et φ une affinité agissant dans ce plan.

En désignant par x le coefficient de colinéarité du vecteur $\overrightarrow{CD}$ au vecteur $\overrightarrow{AB}$ ($\overrightarrow{CD} = x\,\overrightarrow{AB}$), il vient :

$$\overrightarrow{\varphi(C)\varphi(D)} = x\,\overrightarrow{\varphi(A)\varphi(B)}$$

car φ est une application affine.

Les droites $(\varphi(A)\varphi(B))$ et $(\varphi(C)\varphi(D))$ images par φ des droites (AB) et (CD) sont donc parallèles.

On traduit ce résultat en disant que :

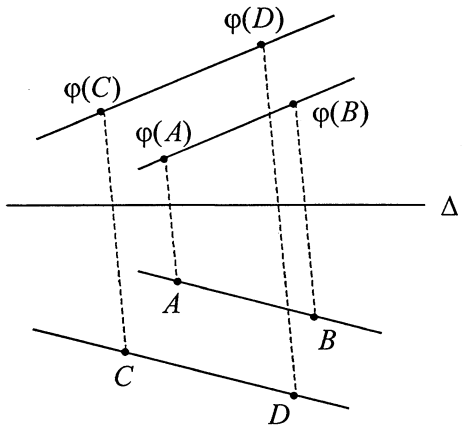


Fig. 65

Une affinité conserve le parallélisme.

N.B. : Les propriétés des paragraphes a) et c) sont communes à toutes les applications affines. Les démonstrations des paragraphes a) et c) sont valables pour toute application affine.

8.7 Exercices

1. On note $\hat{\alpha}$ l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ d'un triangle équilatéral ABC donné.

   a) On désigne par $\tilde{r}$ la rotation vectorielle d'angle $\hat{\alpha}$. Quelles sont les transformés des vecteurs $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{AC}$ par $\tilde{r}$? (Justifier vos réponses.)

   b) On désigne par r_A, r_B et r_C les rotations de centre A, B, C et d'angle $\hat{\alpha}$.
   Déterminer les transformations suivantes :

   $r_C \circ r_B \circ r_A$; $r_C \circ r_A \circ r_B$; $r_B \circ r_A \circ r_C$; $r_B \circ r_C \circ r_A$; $r_A \circ r_C \circ r_B$; $r_A \circ r_B \circ r_C$; $r_A \circ r_B$; $r_A \circ r_B^{-1}$; $r_C \circ r_A \circ r_B^{-1}$; $r_A \circ r_B^{-1} \circ r_C$.

2. Dans un plan orienté $\mathscr{P}$ on construit, à partir d'un triangle ABC donné, les triangles équilatéraux directs BCD, ACE et BAF.

   Montrer que le quadrilatère $AEDF$ est un parallélogramme.

3. Soit, dans un plan orienté, un triangle ABC direct ; A', B', C' les milieux respectifs des côtés $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$; D le transformé de C par la rotation $r_{B',\pi/2}$; E celui de A par la rotation $r_{C',\pi/2}$.

   a) Montrer que le triangle $A'DE$ est rectangle isocèle en A'.

   b) On note F le transformé de B par la rotation $r_{A',\pi/2}$. Montrer que la droite (DB) est une hauteur du triangle DEF, puis que les droites (DB), (EC) et (FA) sont concourantes.

4. Construire, dans un même plan, deux triangles ABC et ADE isocèles en C et D et tels que :

   $$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$$

   On désigne par I le point tel que $CADI$ soit un parallélogramme.

   Montrer que le triangle BIE est isocèle en I.

5. Soit un triangle ABC, un point E de la droite (AC) autre que A et C, un point F de la droite (AB) autre que A et B. La parallèle à (CF) passant par E coupe (AB) en G, La parallèle à (BE) passant par F coupe (AC) en H.

   Montrer que les droites (GH) et (BC) sont parallèles.

6. Soit un quadrilatère convexe $ABCD$, la parallèle à (BC) passant par A coupe (BD) en M, la parallèle à (AD) passant par B coupe (AC) en N.

   Montrer que les droites (MN) et (CD) sont parallèles.

7. Montrer que les pieds des bissectrices extérieures d'un triangle sont alignés.

8. Montrer que les milieux P, Q, R des diagonales $[AC]$, $[BD]$, $[EF]$ d'un quadrilatère complet $ABCDEF$ sont alignés.

   Indications

   1ère méthode : On note B', C', E' les milieux de $[CE]$, $[EB]$ et $[BC]$. On peut alors appliquer "Menelaüs" aux triangles BCE et $B'C'E'$.

   2ème méthode : On peut commencer par montrer que les transformés des points P, Q, R par l'homothétie $h_{A,2}$ sont alignés.

9. Soit, dans un plan $\mathscr{P}$, deux triangles ABC et $A'B'C'$ de sommets distincts dont les côtés homologues sont sécants. On désigne par I, J, K les points d'intersection de (AB) et $(A'B')$, de (BC) et $(B'C')$, de (CA) et $(C'A')$.

   Montrer que les points I, J, K sont alignés si, et seulement si, les droites (AA'), (BB') et (CC') sont soit concourantes, soit parallèles.

   Indication.

   On pourra mettre en jeu les homothéties :

   $$h_A = h_{A,I\mapsto B} \text{ et } h_C = h_{C,B\mapsto J} \text{ ; } h_{A'} = h_{A',I\mapsto B'} \text{ et } h_{C'} = h_{C',B'\mapsto J}$$

   puis montrer que la composée $h_{C'}^{-1} \circ h_C$ se réduit à la même application – notée φ – que $h_{A'}^{-1} \circ h_A$.

   N. B. : Dans la littérature mathématique, ce résultat est connu sous le nom de "Théorème de **Desargues**".

10. Montrer que les droites qui passent par les sommets d'un triangle et les points de contacts du côté opposé avec un cercle exinscrit à ce triangle sont concourantes.

11. Soit un triangle ABC, les milieux A', B', C' de $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$, trois points P, Q, R situés respectivement sur (BC), (CA), (AB), et tels que les droites (AP), (BQ), (CR) soient concourantes ou parallèles. On désigne par P_1, Q_1, R_1 les points d'intersection de (AP) et $(B'C')$, de (BQ) et $(C'A')$, de (CR) et $(A'B')$.

    Montrer que les droites $(A'P_1)$, $(B'Q_1)$ et $(C'R_1)$ sont :

    - concourantes lorsque (AP), (BQ), (CR) sont concourantes ;
    - parallèles lorsque (AP), (BQ), (CR) sont parallèles.

CHAPITRE 2

Isométries planes

Dans tout ce chapitre $\mathscr{P}$ désigne un plan de l'espace $\mathscr{E}$. Dès lors que ce plan est muni d'un point origine O, le plan vectoriel $\overrightarrow{\mathscr{P}}$ qui lui est associé est identifié au plan pointé $\mathscr{P}_O$.

1. Isométries de $\mathscr{P}$

1.1 Définitions

On appelle **isométrie** de $\mathscr{P}$ toute application f de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ qui "**conserve la distance**", expression qui signifie que :

quels que soient les points M et N de $\mathscr{P}$, $f(M)f(N) = MN$.

Il découle de cette définition :

si f et g sont des isométries de $\mathscr{P}$, alors $g \circ f$ est aussi une isométrie de $\mathscr{P}$.

Exemples

Les translations, les rotations, les réflexions et les réflexions glissées agissant dans $\mathscr{P}$ sont des isométries de ce plan.

1.2 Un résultat important

Théorème 1 *Toute isométrie de $\mathscr{P}$ est une application affine de $\mathscr{P}$.*

Démonstration

Dans ce qui suit f désigne une isométrie de $\mathscr{P}$. Les transformées par f des points A, B, ... seront respectivement notés A', B', ...

La démonstration se fait en quatre étapes.

a) f conserve ''le milieu d'un segment''

En effet, si Ω est le milieu de $[AB]$ alors on a : $A\Omega = \Omega B$ et $A\Omega + \Omega B = AB$.

On en déduit : $A'\Omega' = \Omega' B'$ et $A'\Omega' + \Omega' B' = A'B'$ car f conserve la distance.

De ces deux dernières égalités, il découle que Ω' est le milieu de $[A'B']$.

b) f conserve ''l'égalité des vecteurs''

En effet, si $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AK}$ alors les segments $[MK]$ et $[NA]$ ont le même milieu.

Par suite, d'après le a), les segments $[M'K']$ et $[N'A']$ ont le même milieu Ω' ce qui, en langage vectoriel, s'exprime par $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{A'K'}$.

c) f vérifie la propriété : ''si $\overrightarrow{AK} = x\overrightarrow{AB}$ alors $\overrightarrow{A'K'} = x\overrightarrow{A'B'}$''

Pour le justifier, trois éventualités sont à envisager :

- $x \in [0,1]$ – Dans ce cas, on a :

$AK = x\,AB$ et $AK + KB = AB$

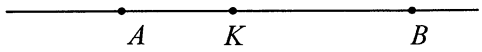


Fig. 66-a

On en déduit : $A'K' = x\,A'B'$ et $A'K' + K'B' = A'B'$ car f conserve la distance. Autrement dit, on a : $A'K' = x\,A'B'$ et $K' \in [A'B']$ ... ce qui, en langage vectoriel s'exprime par : $\overrightarrow{A'K'} = x\,\overrightarrow{A'B'}$.

- $x \in]1, +\infty[$ – Dans ce cas, on a :

Fig. 66-b

$AK = x\,AB$ et $AK + KB = AB$

On en déduit : $A'K' = x\,A'B'$ et $A'B' + B'K' = A'K'$ car f conserve la distance. Autrement dit, on a : $A'K' = x\,A'B'$ et $B' \in [A'K']$ ... ce qui, en langage vectoriel s'exprime par : $\overrightarrow{A'K'} = x\,\overrightarrow{A'B'}$.

- $x \in]-\infty, 0[$ – Dans ce cas, on a :

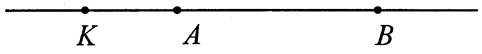


Fig. 66-c

$AK = (-x)AB$ et $KA + AB = KB$

On en déduit : $A'K' = (-x)A'B'$ et $K'A' + A'B' = K'B'$ car f conserve la distance. Autrement dit, on a : $A'K' = (-x)A'B'$ et $A' \in [K'B']$ ... ce qui, en langage vectoriel s'exprime par : $\overrightarrow{A'K'} = x\,\overrightarrow{A'B'}$.

Donc, pour x décrivant $\mathbb{R}$, si $AK = x\,AB$ alors $\overrightarrow{A'K'} = x\,\overrightarrow{A'B'}$.

d) f conserve le coefficient de colinéarité d'un vecteur à un autre vecteur.

En effet, supposons que $\overrightarrow{MN} = x\,\overrightarrow{AB}$ $(x \in \mathbb{R})$.

En considérant le point K défini par :

$\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{MN} = x\,\overrightarrow{AB}$ il vient :

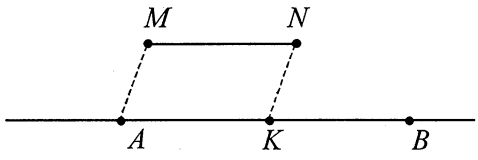


Fig. 66

* $\overrightarrow{A'K'} = \overrightarrow{M'N'}$ d'après le b)

* $\overrightarrow{A'K'} = \overrightarrow{M'N'}$ d'après le b)

On en déduit immédiatement : $\overrightarrow{M'N'} = x\,\overrightarrow{A'B'}$.

Conclusion : f est une application affine de $\mathscr{P}$.

2. Isométries de $\mathscr{P}$

2.1 Définition d'une isométrie de $\overrightarrow{\mathscr{P}}$

Les isométries de $\mathscr{P}$ étant des applications affines, chacune d'elles admet une associée qui est une **application linéaire** de $\overrightarrow{\mathscr{P}}$. Intuitivement, on pressent que ces transformations de $\overrightarrow{\mathscr{P}}$ conservent la norme.

En voici la justification.

Soit f une isométrie de $\mathscr{P}$, $\tilde{f}$ son associée vectorielle, $\vec{u}$ un vecteur de $\overrightarrow{\mathscr{P}}$ et (M, N) un bipoint de vecteur $\vec{u}$. On a :

$$\left\|\tilde{f}(\vec{u})\right\| = \left\|\tilde{f}(\overrightarrow{MN})\right\| = \left\|\overrightarrow{f(M)f(N)}\right\| = f(M)f(N) \overset{*}{=} MN$$

$(*)$ car f conserve la distance.

On a donc : $\left\|\tilde{f}(\vec{u})\right\| = \|\vec{u}\|$.

On adopte alors la définition suivante :

On appelle **isométrie** de $\overrightarrow{\mathscr{P}}$ toute **application linéaire** $\tilde{f}$ de $\overrightarrow{\mathscr{P}}$ dans $\overrightarrow{\mathscr{P}}$ qui conserve la norme, expression qui signifie que, pour tout vecteur $\vec{u}$ de $\overrightarrow{\mathscr{P}}$, $\left\|\tilde{f}(\vec{u})\right\| = \|\vec{u}\|$.

Dès lors, on peut énoncer :

Théorème 2 *L'associée d'une isométrie de $\mathscr{P}$ est une isométrie de $\overrightarrow{\mathscr{P}}$.*

Ainsi, les rotations et les réflexions de $\overrightarrow{\mathscr{P}}$ sont des isométries de ce plan.

2.2 Propriétés caractéristique des isométries de $\overrightarrow{\mathscr{P}}$

On a le résultat suivant :

Théorème 3 *Pour une application linéaire $\tilde{f}$ de $\overrightarrow{\mathscr{P}}$ les propositions suivantes sont équivalentes :*

i) *$\tilde{f}$ conserve la norme ($\tilde{f}$ est une isométrie de $\overrightarrow{\mathscr{P}}$)*

ii) *$\tilde{f}$ conserve le produit scalaire..(expression qui signifie que quels que soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\overrightarrow{\mathscr{P}}$, $\tilde{f}(\vec{u})\cdot\tilde{f}(\vec{v})=\vec{u}\cdot\vec{v}$).*

Démonstration

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\overrightarrow{\mathscr{P}}$. Rappelons d'abord que :

$$2\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2.$$

Ceci dit,

◊ Supposons que $\tilde{f}$ conserve la norme. Alors :

$$2\tilde{f}(\vec{u})\cdot\tilde{f}(\vec{v})=\left\|\tilde{f}(\vec{u})+\tilde{f}(\vec{v})\right\|^2-\left\|\tilde{f}(\vec{u})\right\|^2-\left\|\tilde{f}(\vec{v})\right\|^2 \quad \text{voir rappel précédent}$$

$$=\left\|\tilde{f}(\vec{u}+\vec{v})\right\|^2-\left\|\tilde{f}(\vec{u})\right\|^2-\left\|\tilde{f}(\vec{v})\right\|^2 \quad \text{car } \tilde{f} \text{ est linéaire}$$

$$2\tilde{f}(\vec{u})\cdot\tilde{f}(\vec{v})=\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2 \quad \text{car } \tilde{f} \text{ conserve la norme}$$

$$=2\vec{u}\cdot\vec{v} \quad \text{voir rappel précédent}$$

Donc $\tilde{f}$ conserve le produit scalaire.

◊ Supposons maintenant que $\tilde{f}$ conserve le produit scalaire. Alors,

$$\left\|\tilde{f}(\vec{u})\right\|^2=\tilde{f}(\vec{u})\cdot\tilde{f}(\vec{u})\overset{*}{=}\vec{u}\cdot\vec{u}=\|\vec{u}\|^2$$

(∗) car $\tilde{f}$ conserve le produit scalaire.

On en déduit : $\left\|\tilde{f}(\vec{u})\right\|=\|\vec{u}\|$. Donc $\tilde{f}$ conserve la norme.

D'où le résultat annoncé.

3. Inventaire des différents types d'isométries de $\overrightarrow{\mathscr{P}}$

3.1 Théorèmes préliminaires concernant les applications linéaires de $\overrightarrow{\mathscr{P}}$ (dans $\overrightarrow{\mathscr{P}}$)

Théorème 4 *Soit f et g deux applications linéaires de $\overrightarrow{\mathscr{P}}$.*
Si $\tilde{f}$ a même action que $\tilde{g}$ sur une base de $\overrightarrow{\mathscr{P}}$ alors $\tilde{f}=\tilde{g}$.

Démonstration

Soit $\vec{u}$ un vecteur de $\overrightarrow{\mathscr{P}}$; (x,y) le couple de ses coordonnées dans une base $(\vec{i},\vec{j})$ de ce plan. Alors :

$$\widetilde{f}(\vec{u}) = \widetilde{f}(x\vec{i} + y\vec{j}) \overset{*}{=} x\widetilde{f}(\vec{i}) + y\widetilde{f}(\vec{j}) \overset{**}{=} x\widetilde{g}(\vec{i}) + y\widetilde{g}(\vec{j}) \overset{***}{=} \widetilde{g}(x\vec{i} + y\vec{j}) = \widetilde{g}(\vec{u})$$

(*) car $\widetilde{f}$ est linéaire (**) par hypothèse (***) car $\widetilde{g}$ est linéaire.

Dans $\overrightarrow{\mathscr{P}}$, $\widetilde{f}$ fait donc le même travail que $\widetilde{g}$. Autrement dit : $\widetilde{f} = \widetilde{g}$.

Théorème 5 *Toute application linéaire agissant dans le plan $\overrightarrow{\mathscr{P}}$ est déterminée lorsqu'on connaît son action sur une base de ce plan..*

Démonstration

Soit $\widetilde{f}$ une application linéaire et $\vec{u}$ un vecteur de $\overrightarrow{\mathscr{P}}$; (x,y) le couple des coordonnées de $\vec{u}$ dans une base $(\vec{i},\vec{j})$ de ce plan. $\widetilde{f}$ étant linéaire, on a :

$$\widetilde{f}(\vec{u}) = \widetilde{f}(x\vec{i} + y\vec{j}) = x\widetilde{f}(\vec{i}) + y\widetilde{f}(\vec{j}).$$

Le vecteur $\widetilde{f}(\vec{u})$ est donc parfaitement déterminé dès lors qu'on connaît les vecteurs $\widetilde{f}(\vec{i})$ et $\widetilde{f}(\vec{j})$.

3.2 Les deux types d'isométries vectorielles

Soit $\widetilde{f}$ une isométrie agissant dans $\overrightarrow{\mathscr{P}}$. Compte tenu des résultats précédemment acquis, trois éventualités sont à envisager :

a) $\widetilde{f}$ fixe au moins deux vecteurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\overrightarrow{\mathscr{P}}$

Dans ce cas, $\widetilde{f}$ a même action que $\widetilde{I}$ sur la base $(\vec{u},\vec{v})$ de $\overrightarrow{\mathscr{P}}$.

Donc, on a : $\widetilde{f} = \widetilde{I}$ (voir théorème 4).

b) $\widetilde{f}$ fixe un vecteur non nul $\vec{u}$ de $\overrightarrow{\mathscr{P}}$

Soit $\vec{v}$ un vecteur non nul orthogonal à $\vec{u}$. Alors,

– d'une part : $\left\|\widetilde{f}(\vec{v})\right\| = \|\vec{v}\|$ car $\widetilde{f}$ conserve la norme

– d'autre part :
$$\begin{aligned} \vec{u}\cdot\widetilde{f}(\vec{v}) &= \widetilde{f}(\vec{u})\cdot\widetilde{f}(\vec{v}) && \text{car } \widetilde{f} \text{ fixe } \vec{u} \\ &= \vec{u}\cdot\vec{v} && \text{car } \widetilde{f} \text{ conserve le produit scalaire} \\ &= 0 && \text{car } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont orthogonaux.} \end{aligned}$$

Ainsi $\widetilde{f}(\vec{v})$ est un vecteur colinéaire à $\vec{v}$ et de même norme que $\vec{v}$.

Deux éventualités et deux seulement sont donc à envisager :

- $\widetilde{f}(\vec{v}) = \vec{v}$

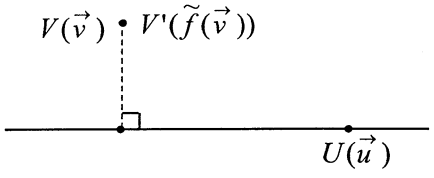


Fig. 67

Dans ce cas, on a : $\widetilde{f} = \widetilde{I}$ car $\widetilde{f}$ fixe deux vecteurs non colinéaires de $\overrightarrow{\mathscr{P}}$ – voir a) –

- $\widetilde{f}(\vec{v}) = -\vec{v}$

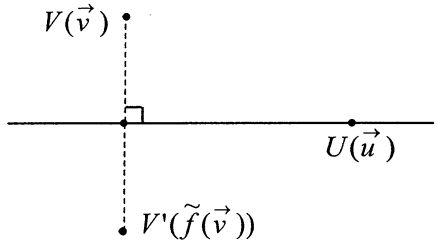


Fig. 68

Dans ce cas $\widetilde{f}$ a même action que la réflexion $\widetilde{s}_{\vec{u}}$ sur la base $(\vec{u},\vec{v})$ de $\overrightarrow{\mathscr{P}}$.

Donc $\widetilde{f} = \widetilde{s}_{\vec{u}}$ – voir théorème 4 –

Ainsi, il existe une et une seule isométrie de $\overrightarrow{\mathscr{P}}$ autre que $\widetilde{I}$ qui fixe un vecteur non nul $\vec{u}$ donné : la réflexion de droite $\mathbb{R}\vec{u}$

c) $\widetilde{f}$ ne fixe aucun vecteur non nul

Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul, $\vec{u}'$ son transformé par $\widetilde{f}$;
$\widetilde{\sigma}$ la réflexion qui échange $\vec{u}$ et $\vec{u}'$.

L'isométrie $\widetilde{\sigma} \circ \widetilde{f}$ fixe alors le vecteur $\vec{u}$.

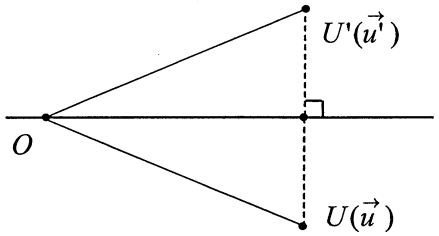


Fig. 69

Il s'ensuit que :

- soit $\widetilde{\sigma} \circ \widetilde{f} = \widetilde{I}$
- soit $\widetilde{\sigma} \circ \widetilde{f} = \widetilde{s}_{\vec{u}}$ – voir b –

  ($\widetilde{s}_{\vec{u}}$ réflexion de droite $\mathbb{R}\vec{u}$).

En composant à gauche par $\widetilde{\sigma}$, il vient :

- soit $\widetilde{f} = \widetilde{I}$ (1)
- soit $\widetilde{f} = \widetilde{\sigma} \circ \widetilde{s}_{\vec{u}}$ (2)

Or le cas (1) est à rejeter car, par hypothèse, $\widetilde{f}$ ne fixe aucun vecteur non nul. Reste le cas (2) où $\widetilde{f}$ est une rotation vectorielle. Cette éventualité est acceptable puisque l'on sait qu'une rotation vectorielle, à condition qu'elle soit d'angle non nul, ne fixe aucun vecteur hormis le vecteur nul.

Ainsi les isométries de $\overrightarrow{\mathscr{P}}$ qui, en dehors du vecteur nul ne fixent aucun vecteur, sont les rotations d'angle non nul.

En matière d'inventaire, du fait que $\widetilde{I}$ peut être considérée comme une rotation vectorielle d'angle nul, on peut conclure par le résultat suivant qu'on retiendra :

Théorème 6 *Les isométries du plan vectoriel $\overrightarrow{\mathscr{P}}$ sont soit des rotations, soit des réflexions.*

Remarque

Les isométries de $\overrightarrow{\mathscr{P}}$ sont donc des bijections de $\overrightarrow{\mathscr{P}}$ sur lui-même.

4. Inventaire des différents types d'isométries de $\mathscr{P}$

On sait qu'une application affine agissant dans $\mathscr{P}$ est déterminée lorsqu'on connaît son action sur un point et son associée vectorielle. Cette associée étant une application linéaire de $\overrightarrow{\mathscr{P}}$ on sait qu'elle est à son tour déterminée lorsqu'on connaît son action sur une base de $\overrightarrow{\mathscr{P}}$.

Il suffit donc de connaître l'action d'une application affine sur trois points non alignés A, B et C de $\mathscr{P}$ pour qu'elle soit parfaitement définie. En effet, on connaît dans ce cas son action sur le point A et l'action de son associée sur la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ de $\overrightarrow{\mathscr{P}}$.

Nous allons mettre cette remarque à profit pour dresser l'inventaire des différents types d'isométries agissant dans le plan $\mathscr{P}$.

4.1 Les trois types d'isométries de $\mathscr{P}$

Soit f une isométrie de $\mathscr{P}$. Quatre éventualités sont à envisager :

a) f fixe au moins trois points non alignés A, B et C

Cela se traduit par : $f(A) = A$ et $\widetilde{f} = \widetilde{I}$ car $\widetilde{f}$ fixe la base $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ de $\overrightarrow{\mathscr{P}}$ (voir § 3.2 a).

On en déduit : $f = t_{(A,A)} = id_{\mathscr{P}}$ (application identique de $\mathscr{P}$)

b) f fixe deux points distincts A et B

Cela se traduit par

On en déduit que f est soit l'application identique de $\mathscr{P}$ soit la réflexion ponctuelle de droite (AB).

c) f fixe un et un seul point A

Cela se traduit par

On en déduit que f est une rotation ponctuelle de centre A.

d) f ne fixe aucun point

Dans ce cas $\widetilde{f}$ ne peut être une rotation vectorielle d'angle non nul sinon f serait une rotation ponctuelle (d'angle non nul) ce qui est impossible vu que, par hypothèse, f ne fixe aucun point. Reste donc deux possibilité pour $\widetilde{f}$:

- soit $\widetilde{f} = \widetilde{I}$
- soit $\widetilde{f}$ est une réflexion

– voir théorème 6 –

Dès lors f ne peut être que soit une translation de vecteur non nul soit une réflexion glissée de vecteur non nul. On notera que ces deux éventualités sont acceptables puisque f ne fixe alors aucun point de $\mathscr{P}$.

En ce qui concerne l'inventaire des types d'isométries de $\mathscr{P}$, on obtient le résultat suivant :

Théorème 7 Les isométries du plan ponctuel $\mathscr{P}$ sont :

- *soit des translations*
- *soit des rotations*

} *éventuellement $id_{\mathscr{P}}$*

- *soit des réflexions ou des réflexions glissées*

Remarque

On sait que les translations, les rotations, les réflexions sont des bijections de $\mathscr{P}$ sur lui-même. Les réflexions glissées – qui sont les composées de deux de ces bijections – sont aussi des bijections de $\mathscr{P}$ sur lui-même.

Donc les isométries de $\mathscr{P}$ sont des bijections de $\mathscr{P}$ sur lui-même qui conservent la distance.

4.2 Propriétés géométriques des isométries de $\mathscr{P}$

On sait déjà que les translations, les rotations, les réflexions transforment les droites en droites, les cercles en cercles, ... ; conservent le parallélisme, l'orthogonalité, le contact (courbes sécantes, tangentes), les barycentres. On connaît par ailleurs leur effet sur les angles, le déterminant d'un couple de vecteurs, les mesures des aires, ...

Les propriétés géométriques des réflexions glissées s'en déduisent immédiatement puisque ces transformations sont des composées d'une réflexion et d'une translation.

5. Déplacements, antidéplacements

5.1 Classification des isométries agissant dans $\mathscr{P}$

On a vu que les isométries agissant dans le plan vectoriel $\overrightarrow{\mathscr{P}}$ sont de deux types : les rotations et les réflexions.

Cela nous incite à répartir les isométries de $\mathscr{P}$ en deux classes suivant la nature de leur associée vectorielle.

On adopte alors la définition suivante :

On appelle **déplacement** (resp. **antidéplacement**) toute isométrie de $\mathscr{P}$ qui a pour associée une rotation (resp. une réflexion) de $\overrightarrow{\mathscr{P}}$.

En se référant à l'inventaire des différents types d'isométries agissant dans $\mathscr{P}$, on peut énoncer :

Théorème 8

- *Tout déplacement de $\mathscr{P}$ est soit une translation soit une rotation.*
- *Tout antidéplacement de $\mathscr{P}$ est une réflexion ou une réflexion glissée.*

5.2 Propriété caractéristique d'un déplacement, d'un antidéplacement

Le résultat qui suit découle de la définition ou du théorème 8.

Théorème 9 *Une isométrie de $\mathscr{P}$ est :*

- *Un déplacement si, et seulement si, elle conserve les angles*
- *Un antidéplacement si et seulement si elle change les angles en leurs opposés.*

5.3 Propriétés algébriques

Il s'agit ici de statuer sur la nature de la composée de deux isométries f et g de $\mathscr{P}$ ($g \circ f$ est-elle un déplacement ou un antidéplacement ?) ainsi que sur la nature de la réciproque d'une de ces isométries.

Sachant que : $\widetilde{g \circ f} = \tilde{g} \circ \tilde{f}$ et $\tilde{f}^{-1} = \left(\tilde{f}\right)^{-1}$ l'affaire est immédiate.

Ainsi, par exemple, la composée d'un déplacement et d'un antidéplacement a pour associée la composée d'une rotation et d'une réflexion de $\overrightarrow{\mathscr{P}}$.

Cette associée étant une réflexion de $\overrightarrow{\mathscr{P}}$ il s'ensuit que la composée d'un déplacement et d'un antidéplacement de $\mathscr{P}$ est un antidéplacement de $\mathscr{P}$

On obtient de façon analogue les résultats suivants qu'on peut ne pas mémoriser tant il est facile et rapide de les obtenir.

La composée soit de deux déplacements, soit de deux antidéplacements est un déplacement.

La réciproque d'un déplacement (resp. d'un antidéplacement) est un déplacement (resp. un antidéplacement).

5.4 Détermination géométrique d'un déplacement

Soit A, B, A' et B' des points du plan $\mathscr{P}$ tels que : $A \neq B$ et $AB = A'B'$.

◊ S'il existe un déplacement d qui transforme A en A' et B en B' son application vectorielle associée $\tilde{d}$ ne peut être que la rotation de $\overrightarrow{\mathscr{P}}$ qui envoie $\overrightarrow{AB}$ sur $\overrightarrow{A'B'}$.

Deux éventualités sont à distinguer :

1. $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$ – Dans ce cas : $\tilde{d} = r\hat{o} = \hat{I}$ et d ne peut être que la translation t(A , A') .
2. $\overrightarrow{A'B'} \neq \overrightarrow{AB}$ – Dans ce cas l'angle de la rotation $\tilde{d}$ est non nul et d ne peut être que la rotation d'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})$ qui envoie A sur A'.

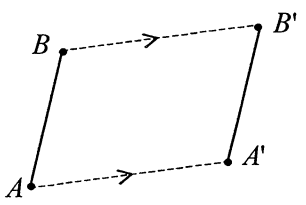


Fig. 70

◊ Reste à vérifier que le déplacement d pressenti lors de l'analyse précédente envoie effectivement B sur B'.

Ceci est immédiat car on a :

$$\overrightarrow{A'd(B)} = \overrightarrow{d(A)d(B)} = \tilde{d}(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{A'B'}$$

Donc $d(B) = B'$.

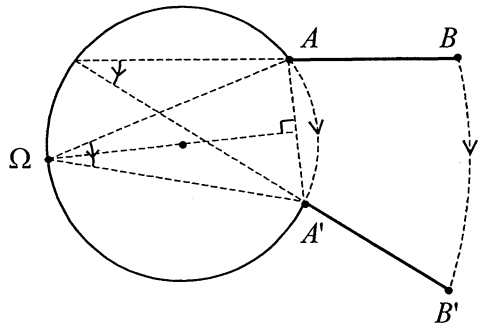


Fig. 71

En conclusion, on peut donc énoncer :

Théorème 10 *Étant donné des points A, B, A' et B' tels que $A \neq B$ et $A'B' = AB$, il existe un déplacement et un seul qui transforme A en A' et B en B'.*

Ce déplacement est :

- *la translation $t_{(A,A')}$ lorsque $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$*
- *la rotation d'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})$ qui envoie A sur A' dans le cas contraire.*

Un déplacement est donc déterminé par la donnée d'un bipoint (A,B) et de son transformé (A',B') avec $A \neq B$ et $A'B' = AB$.

6. Exercices résolus

6.1 Exercice (1)

Dans le plan $\mathscr{P}$ sont donnés deux segments $[AB]$ et $[CD]$ vérifiant $A \neq B$ et $CD = AB$. Déterminer l'ensemble I des isométries de $\mathscr{P}$ qui transforment $[AB]$ en $[CD]$.

La première solution que nous allons proposer pour cet exercice relève d'un cas plus général que nous exposons ci-après.

Étant donné deux figures $\mathscr{F}$ et $\mathscr{F}'$ de $\mathscr{P}$, s'il existe une isométrie i de ce plan qui transforme $\mathscr{F}$ en $\mathscr{F}'$ alors on obtient l'ensemble $\mathscr{I}$ des isométries qui envoient $\mathscr{F}$ sur $\mathscr{F}'$ en composant (à gauche) i par chacun des éléments de l'ensemble $\mathscr{I}'$ des isométries de $\mathscr{P}$ qui laissent la figure $\mathscr{F}'$ globalement invariante.

En voici la preuve :

- Soit g une isométrie de $\mathscr{I}'$. Alors : $g \circ i(\mathscr{F}) = g(\mathscr{F}') = \mathscr{F}'$

Donc toute isométrie de la forme $g \circ i$ est un élément de I.

- Réciproquement, soit φ une isométrie de $\mathscr{I}$. On a : $\varphi \circ i^{-1}(\mathscr{F}') = \varphi(\mathscr{F}) = \mathscr{F}'$.

Donc $\varphi \circ i^{-1}$ est une isométrie de $\mathscr{I}'$. Notons g cette isométrie. De $g = \varphi \circ i^{-1}$, en composant à droite par i, on déduit : $\varphi = g \circ i$.

Autrement dit, tout élément de $\mathscr{I}$ est la composée de i suivie d'une isométrie de $\mathscr{I}'$.

Ainsi se trouve établi le résultat annoncé.

Revenons maintenant à notre problème.

1ère solution

On a vu qu'il existe un (unique) déplacement d de $\mathscr{P}$ qui transforme A en C et B en D – voir théorème 10 – Donc pour obtenir toutes les isométries qui transforment $[AB]$ en $[CD]$, il suffit de composer (à gauche) d par chacun des éléments de l'ensemble $\mathscr{T}'$ des isométries de $\mathscr{P}$ qui laisse $[CD]$ globalement invariant.

Si φ est une de ces isométries alors φ fixe le milieu $\mathscr{T}$ de $[CD]$. Donc φ ne peut être que soit une rotation de centre I soit une réflexion d'axe passant par I.

Il est alors facile de dresser la liste des isométries de l'ensemble $\mathscr{T}'$.

- $id_{\mathscr{P}}$ (rotation $r_{I,\hat{0}}$)
- s_I symétrie de centre I (demi-tour de centre I)
- $s_{(CD)}$ réflexion d'axe (CD)
- s_Δ réflexion d'axe Δ, où Δ est la médiatrice du segment $[CD]$.

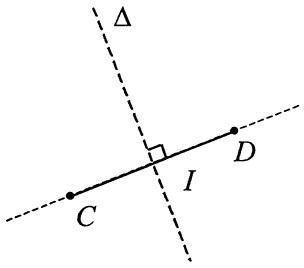


Fig. 72

L'ensemble $\mathscr{T}$ des isométries transformant $[AB]$ en $[CD]$ est alors :

$$\left\{d, s_I \circ d, s_{(CD)} \circ d, s_\Delta \circ d\right\}$$

Il y a donc quatre isométries qui transforment $[AB]$ en $[CD]$. Pour les connaître de façon explicite, on commence par déterminer le déplacement d (qui dépend des deux segments donnés) puis on détermine les éléments caractéristiques des composées $s_I \circ d$; $s_{(CD)} \circ d$; $s_\Delta \circ d$.

2ème solution

Le théorème 10 nous permet d'affirmer que l'ensemble I est non vide. Cela dit, toute isométrie appartenant à $\mathscr{T}$ est déterminée lorsqu'on connaît son action sur le point A et son associée vectorielle.

La stratégie développée dans cette solution consiste donc en premier lieu à déterminer les associées vectorielles des isométries de $\mathscr{T}$. On procédera ensuite à la détermination des isométries de $\mathscr{T}$ en prenant appui sur les théorèmes du paragraphe 3 du chapitre précédent.

a) **Détermination des isométries vectorielles associées aux éléments de $\mathscr{E}$**

Soit f une isométrie appartenant à $\mathscr{T}$. Deux éventualités sont à considérer :

- $f(A) = C$. Dans ce cas : $\tilde{f}(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{CD}$ car $f(B) = D$.
- $f(A) = D$. Dans ce cas : $\tilde{f}(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{DC}$ car $f(B) = C$.

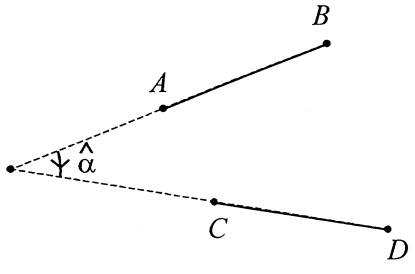


Fig. 73

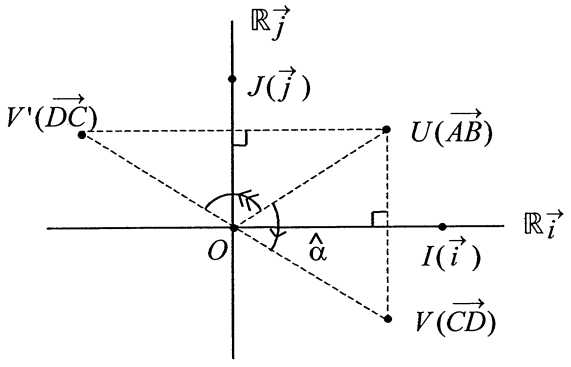


Fig. 74

Ceci dit, il y a exactement : – voir figure ci-dessus –

- Deux isométries vectorielles qui transforment $\overrightarrow{AB}$ en $\overrightarrow{CD}$ à savoir :

- la rotation vectorielle d'angle $\hat{\alpha}$ avec $\hat{\alpha} = \widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})}$
- la réflexion vectorielle de droite $\mathbb{R}\vec{i}$

- deux isométries vectorielles qui transforment $\overrightarrow{AB}$ en $\overrightarrow{DC}$ à savoir :
  - la rotation vectorielle d'angle $\hat{\alpha} + \hat{\pi}$
  - la réflexion vectorielle de droite $\mathbb{R}\vec{j}$

Il est par ailleurs facile de justifier que les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont orthogonaux. Ainsi il y a quatre isométries vectorielles associées aux éléments de I.

b) Inventaire des isométries appartenant à $\mathscr{T}$

Compte tenu de l'étude ci-dessus les éléments de $\mathscr{T}$ sont :

- la rotation r_1 d'angle $\hat{\alpha}$ qui envoie A sur C lorsque $\hat{\alpha} \neq \hat{0}$ ou la translation $t_{(A,C)}$ lorsque $\hat{\alpha} = \hat{0}$, c'est-à-dire lorsque $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$
- La réflexion glissée σ_1 d'axe dirigé par $\vec{i}$ qui envoie A sur C
- la rotation r_2 d'angle $\hat{\alpha} + \hat{\pi}$ qui envoie A sur D lorsque $\hat{\alpha} + \hat{\pi} \neq \hat{0}$ ou la translation $t_{(A,D)}$ lorsque $\hat{\alpha} + \hat{\pi} = \hat{0}$ c'est-à-dire lorsque $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$
- La réflexion glissée σ_2 d'axe dirigé par $\vec{j}$ qui envoie A sur D.

c) Détermination des éléments caractéristiques des isométries appartenant à $\mathscr{T}$

On se place ici dans le cas général : A, B, C, D sont des points donnés tels que $AB = CD \neq 0$, $\widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})} \neq \hat{0}$ et $\widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})} \neq \hat{\pi}$.

1. Construction des centres Ω_1 et Ω_2 des rotations r_1 et r_2.

Ω_1 est le point commun à :
- la médiatrice de $[AC]$
- la ligne de niveau $(A,C)_{\hat{\alpha}}$.

Ω_2 est le point commun à :
- la médiatrice de $[AD]$
- la ligne de niveau $(A,D)_{\hat{\alpha}+\hat{\pi}}$.

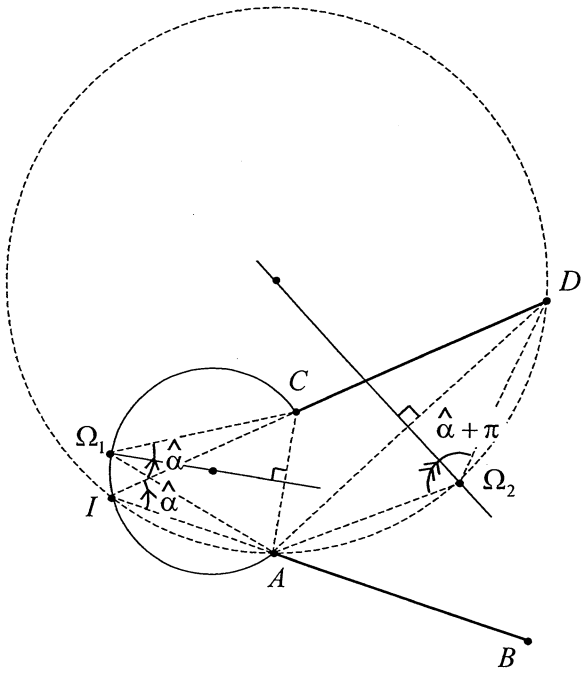


Fig. 75

2. Construction des axes Δ_1 et Δ_2, et détermination des vecteurs des réflexions glissées σ_1 et σ_2.

L'axe Δ_1 de σ_1 passe par les milieux de $[AC]$ et $[BD]$.

Le vecteur de σ_1 est $\overrightarrow{A_1C_1}$.

L'axe Δ_2 de σ_2 passe par les milieux de $[AD]$ et $[BC]$.

Le vecteur de σ_2 est $\overrightarrow{A_2D_2}$.

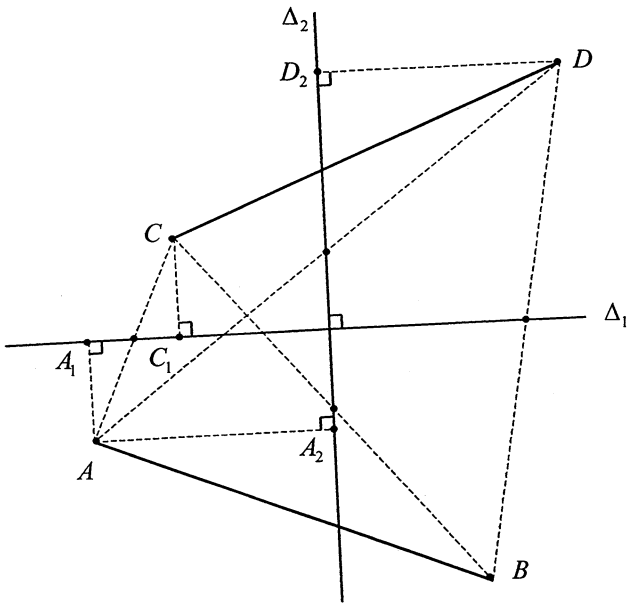


Fig. 76

N.B. : Nous laissons au lecteur le soin d'examiner les deux cas particuliers non traités : cas où $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ et cas où $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

6.2 Exercice (2)

Soit, dans un plan orienté $\mathscr{P}$, un triangle ABC équilatéral direct. Trouver toutes les isométries agissant dans $\mathscr{P}$ qui laissent ce triangle globalement invariant.

Solution

Si une isométrie f laisse le triangle ABC globalement invariant elle laisse aussi l'ensemble $\{A,B,C\}$ globalement invariant. Par conséquent f fixe l'isobarycentre G des points A, B et C. Ainsi f ne peut être que soit une rotation de centre G, soit une réflexion d'axe passant par G qui laissent, l'une et l'autre, l'ensemble $\{A,B,C\}$ globalement invariant.

Examinons les différents cas possibles :

- Si f est une rotation alors :

  – Soit $f(A) = A$. Dans ce cas f ne peut être que la rotation de centre G et d'angle nul, c'est-à-dire l'application identique de $\mathscr{P}$.

  – Soit $f(A) = B$. Dans ce cas f ne peut être que la rotation de centre G et d'angle $2\pi/3$.

  – Soit $f(A) = C$. Dans ce cas f ne peut être que la rotation de centre G et d'angle $-2\pi/3$.

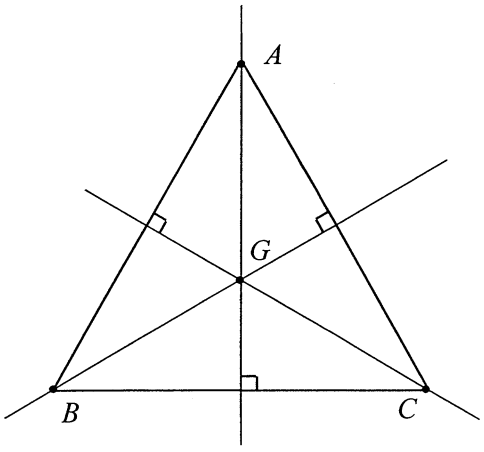


Fig. 77

- Si f est une réflexion alors :

  – Soit $f(A) = A$. Dans ce cas f ne peut être que la réflexion d'axe (GA).

  – Soit $f(A) = B$. Dans ce cas f ne peut être que la réflexion d'axe (GC).

– Soit $f(A) = C$. Dans ce cas f ne peut être que la réflexion d'axe (GB).

Ceci dit, il est facile de vérifier que ces six isométries conviennent.

En conclusion, le problème posé admet six solutions.

Prolongement

On note D le point $\mathscr{P}$ tel que $BACD$ soit un losange. Déterminer toutes les isométries $\mathscr{P}$ qui transforment le triangle BCD en le triangle ABC.

Indication : on pourra utiliser la méthode développée dans la première solution de l'exercice précédent.

Autre exercice

Montrer que toute isométrie agissant dans un plan $\mathscr{P}$ se décompose d'une façon et d'une seule en une isométrie fixant un point Ω donné ''suivie'' d'une translation.

CHAPITRE 3

Similitudes (géométrie plane)

Dans tout ce chapitre $\mathscr{P}$ désigne un plan de l'espace $\mathscr{E}$. Dès lors que ce plan est muni d'un point origine O, le plan vectoriel $\overrightarrow{\mathscr{P}}$ qui lui est associé est identifié au plan pointé $\mathscr{P}_O$.
Toutes les transformations ponctuelles (resp. vectorielles) mises en jeu agissent dans le plan $\mathscr{P}$ (resp. dans le plan $\overrightarrow{\mathscr{P}}$).

Enfin, par angle, nous entendons ici "**angle d'un couple de vecteurs non nuls de $\overrightarrow{\mathscr{P}}$**".

1. Similitudes de $\mathscr{P}$

1.1 Introduction : figures semblables

Il est d'usage courant de dire que deux objets sont **semblables** lorsque, indépendamment de leur taille, ils ont la même forme.

Cela étant, pour obtenir dans un plan $\mathscr{P}$ une figure semblable à une figure $\mathscr{F}$ donnée, on peut à l'évidence [1] employer la stratégie suivante :

- Agrandir ou rapetisser la figure $\mathscr{F}$ sans modifier sa forme.
  Pour faire ce travail, on dispose des homothéties.
- "Transporter tout azimut" la figure $\mathscr{F}'$ ainsi obtenue sans changer ni sa forme, ni sa taille. Les isométries de $\mathscr{P}$ sont alors des outils adéquats pour effectuer ce genre de transport.

Ainsi, les triangles ABC, $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ et $A_3B_3C_3$ représentés ci-dessous sont semblables.

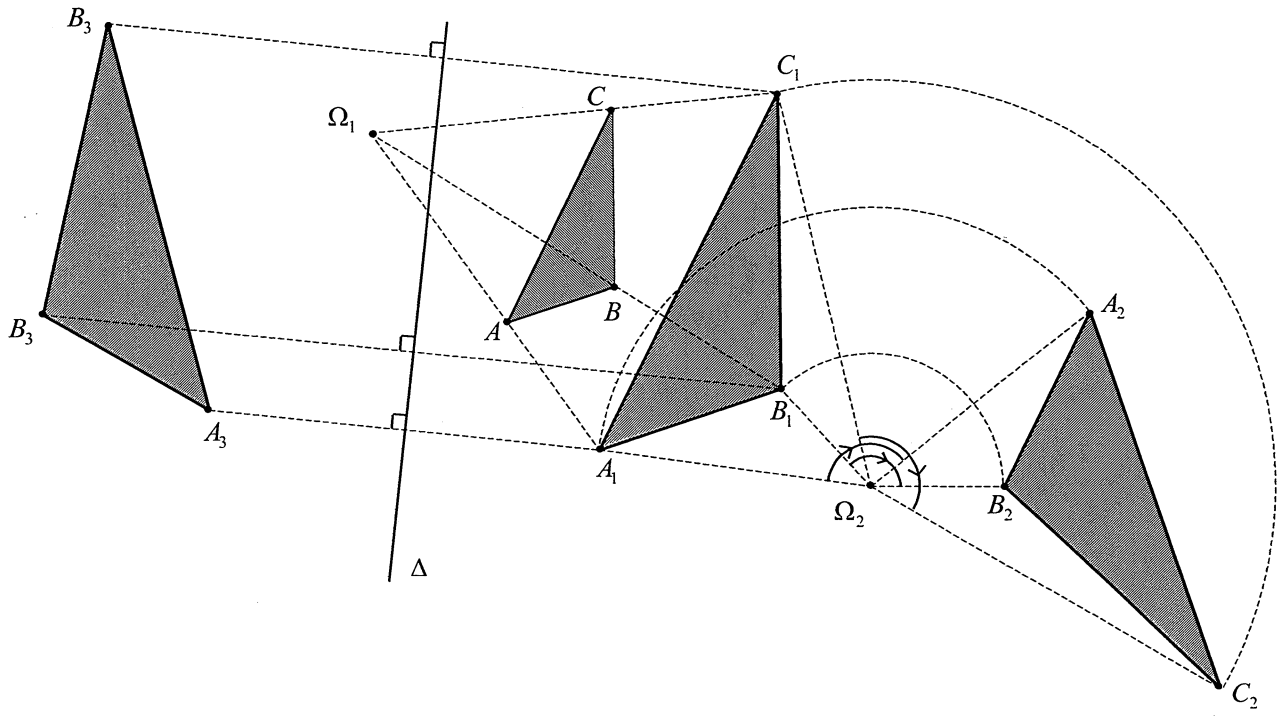


Fig. 78

[1] À ce niveau, on connaît l'effet global sur une figure d'une homothétie, d'une isométrie.

On observera que le rapport des distances de points "homologues" de **deux** figures semblables ne dépend pas du choix de ces points.

Par exemple, on a :

$$\frac{A_2B_2}{AB} = \frac{B_2C_2}{BC} = \frac{C_2A_2}{CA}$$

L'objet du présent chapitre est d'étudier les propriétés des applications de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ qui multiplient les distances par un nombre strictement positif.

1.2 Similitudes de $\mathscr{P}$

1.2.1 Définition

Un réel strictement positif λ étant donné, on appelle **similitude de $\mathscr{P}$ – de rapport λ** – toute application de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ qui multiplie les distances par le réel λ.

Cette expression signifie que, quels que soient les points M et N de $\mathscr{P}$, leurs transformés respectifs M' et N' sont tels que $M'N' = \lambda MN$.

1.2.2 Exemples

Connaissant les effets sur les distances des homothéties et des isométries agissant dans $\mathscr{P}$, on est en mesure d'affirmer que :

- Les homothéties de rapport k ($k \in \mathbb{R}^*$) sont des similitudes de rapport $|k|$.
- Les isométries sont des similitudes de rapport 1
- La composée d'une homothétie de rapport k suivie – ou précédée – d'une isométrie est une similitude de rapport $|k|$.

1.3 Propriété fondamentale des similitudes

On a le résultat suivant :

Toute similitude de $\mathscr{P}$, de rapport λ, se réduit à la composée d'une homothétie positive de rapport λ et d'une isométrie.

Démonstration

Soit s une similitude de $\mathscr{P}$, λ son rapport.

Pour toute homothétie positive h de rapport λ agissant dans le plan $\mathscr{P}$, les applications i_1 et i_2 définies par :

$$i_1 = s \circ h^{-1} \text{ et } i_2 = h^{-1} \circ s$$

sont des isométries de $\mathscr{P}$ puisque, de façon évidente, elles conservent les distances. Ceci dit, on a :

$$i_1 \circ h = (s \circ h^{-1}) \circ h = s \circ (h^{-1} \circ h) \quad \text{c'est-à-dire} \quad s = i_1 \circ h$$

$$h \circ i_2 = h \circ (h^{-1} \circ s) = (h \circ h^{-1}) \circ s \quad \text{c'est-à-dire} \quad s = h \circ i_2$$

d'où le résultat annoncé.

1.4 Conséquences de ce résultat

1.4.1 Propriétés géométriques des similitudes de $\mathscr{P}$

On connaît séparément l'action d'une homothétie et d'une isométrie sur les figures élémentaires ; l'effet respectif de ces deux transformations sur ces figures, sur le parallélisme, l'orthogonalité, les barycentres, les contacts, les mesures des aires, ...

Les propriétés géométriques des similitudes s'en déduisent immédiatement puisque l'on sait qu'une similitude est la composée d'une homothétie positive et d'une isométrie. Ainsi :

Une similitude s *de rapport λ transforme une droite en une droite, un cercle de centre Ω et de rayon R en le cercle de centre $s(\Omega)$ et de rayon λR, etc ...*

Elle conserve le parallélisme, l'orthogonalité, les barycentres, les contacts.

Elle multiplie les mesures des aires par λ^2.

1.4.2 Autre propriété

*Toute similitude de $\mathscr{P}$ est une **bijection affine** de $\mathscr{P}$ sur lui-même.*

D'après la propriété fondamentale une similitude de $\mathscr{P}$ est le composée de deux bijections affines de $\mathscr{P}$. D'où le résultat annoncé.

1.4.3 Remarque

La propriété fondamentale permet d'obtenir ici, sous forme de propriété caractéristique, la traditionnelle définition géométrique des similitudes :

On appelle similitude de $\mathscr{P}$ toute bijection de $\mathscr{P}$ sur lui-même qui conserve les rapports de distances.

La démonstration comporte deux étapes.

- Soit s est une similitude de rapport λ (au sens de la définition que nous avons adoptée). Alors s est une bijection de $\mathscr{P}$ sur $\mathscr{P}$ (voir propriété ci-dessus).

  En outre, quels que soient les points M, N, P, Q de ce plan, on a lorsque P et Q sont distincts :

  – $s(P) \neq s(Q)$ car s est bijective

  – $\dfrac{s(M)s(N)}{s(P)s(Q)} = \dfrac{\lambda \cdot MN}{\lambda \cdot PQ} = \dfrac{MN}{PQ}$ ce qui se traduit par s conserve les rapports de distances.

- Réciproquement, soit s une bijection de $\mathscr{P}$ sur $\mathscr{P}$ conservant les rapports de distances ; A et B **deux** points fixés dans $\mathscr{P}$. Alors :

  – d'une part $s(A)$ et $s(B)$ sont deux points fixes de $\mathscr{P}$, et le nombre $\dfrac{s(A)s(B)}{AB}$ est un réel strictement positif fixé,

  – d'autre part, quels que soient les points distincts M et N de $\mathscr{P}$, compte tenu de l'hypothèse, on a :

  $$\frac{s(M)s(N)}{s(A)s(B)} = \frac{MN}{AB} \quad \text{d'où on tire :} \quad \frac{s(M)s(N)}{MN} = \frac{s(A)s(B)}{AB}.$$

  C'est-à-dire : $s(M)s(N) = \lambda\, MN$, en posant $\lambda = \dfrac{s(A)s(B)}{AB}$.

  Au sens où nous l'entendons, s est donc une similitude de $\mathscr{P}$ – de rapport λ –

Commentaire

La définition géométrique "traditionnelle" des similitudes de $\mathscr{P}$ permet de présenter ces transformations sans introduire au départ la notion de rapport de similitude. Théoriquement, elle s'avère donc – sur ce point – plus satisfaisante que celle que nous avons adoptée.

Mais cette définition traditionnelle,

- ne prend pas suffisamment appui sur le vécu des élèves concernant l'effet sur les figures d'une homothétie, d'une isométrie.

- fait d'une similitude une bijection du plan sur lui-même.

Cette option pourrait se justifier si, dans l'étude qui doit lui faire suite, on pouvait espérer — comparativement à notre exposé – une amélioration sensible tant du point de vue de la longueur que de celui de la clarté.

Pour ce qui concerne la longueur de l'exposé, le gain paraît minime car la bijectivité des similitudes est une conséquence directe de la propriété fondamentale de ces transformations. Quant au bénéfice "clarté" on ne peut pas objectivement le garantir.

Le lecteur comprendra aisément que ce sont ces deux objections qui ont prévalu lorsqu'il a fallu opter pour une présentation des similitudes.

1.5 Sur la manière d'obtenir des similitudes

1.5.1 Ordre de composition

La similitude obtenue en composant une homothétie positive et une isométrie données n'est pas en général la même suivant que l'isométrie suit ou précède l'homothétie. Les illustrations suivantes en apportent la preuve.

Les transformations mises en oeuvre sont :

- dans la figure 79, l'homothétie h de centre Ω, de rapport 2 et la rotation r de centre ω et d'angle $\hat{\alpha}$;
- dans la figure 80, l'homothétie h de centre Ω, de rapport 2 et la réflexion s de droite Δ.

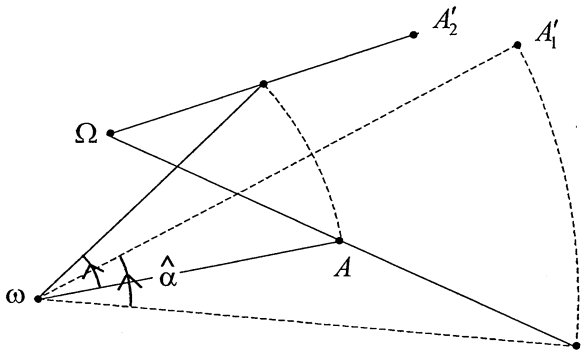


Fig. 79

$r \circ h(A) = A_1'$ et $h \circ r(A) = A_2'$

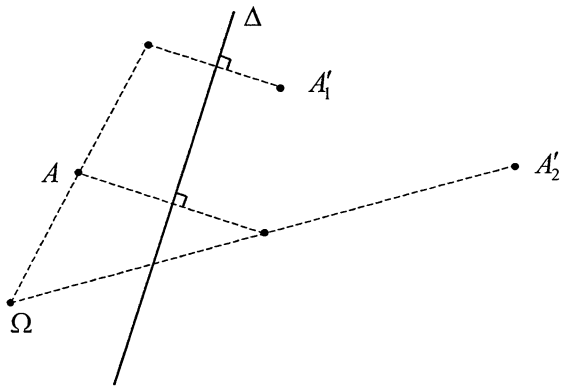


Fig. 80

$s \circ h(A) = A_1'$ et $h \circ s(A) = A_2'$

1.5.2 Pluralité des décompositions d'une similitude donnée

Nous savons qu'une similitude s de rapport λ est la composée d'une homothétie positive de rapport λ et d'une isométrie (propriété fondamentale).

Supposons que l'on ait $s = i \circ h$ où h est une homothétie positive et i une isométrie connues. Alors on peut trouver d'autres décompositions de s.

Pour y parvenir le processus est simple : il faut et il suffit que la composée cherchée ait même action que $i \circ h$ sur un point donné de $\mathscr{P}$ et même associée vectorielle. Dans les dessins suivants sont illustrées deux décompositions de s .

- Premier cas : $s = i \circ h$ avec $h = h_{\Omega,2}$ et $i = r_{\omega,\hat{\alpha}}$

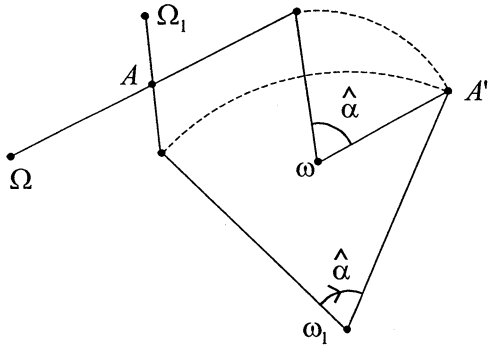


Fig. 81

On a aussi : $s = r_{\omega_1,\hat{\alpha}} \circ h_{\Omega_1,2}$

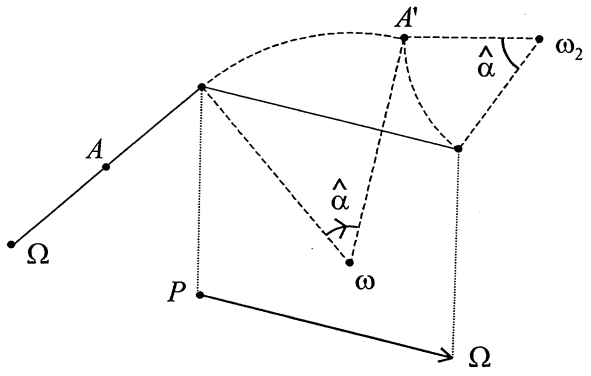


Fig. 82

On a encore : $s = r_{\omega_2,\hat{\alpha}} \circ t_{(P,Q)} \circ h_{\Omega,2}$ (P et Q donnés).

- Deuxième cas : $s = i \circ h$ avec $h = h_{\Omega,2}$ et $i = s_{\Delta}$

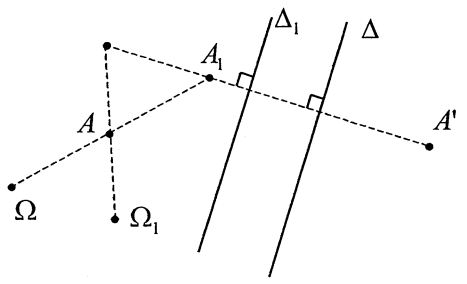


Fig. 83

On a aussi : $s = s_{\Delta_1} \circ h_{\Omega_1,2}$

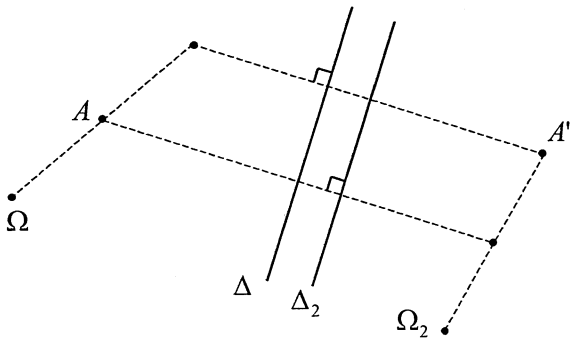


Fig. 84

On a encore : $s = h_{\Omega_2,2} \circ s_{\Delta_2}$

Au vu de ces exemples, le lecteur comprendra qu'on peut obtenir une infinité de décompositions d'une similitude donnée. Certes, abondance de "biens" ne nuit pas, mais il faut avouer que cela crée un certain désordre. Pour tenter de voir plus clair dans ce fatras, et si possible en tirer profit, nous allons faire un détour par le plan vectoriel $\overrightarrow{\mathscr{P}}$ afin d'étudier les composées d'homothéties et d'isométries de ce plan.

2. Similitudes de $\overrightarrow{\mathscr{P}}$

2.1 Composées d'homothéties et d'isométries de $\overrightarrow{\mathscr{P}}$

2.1.1 Ordre de composition

Soit $\lambda\widetilde{I}$ une homothétie de $\overrightarrow{\mathscr{P}}$ ($\lambda \in \mathbb{R}^*$), $\widetilde{f}$ une isométrie et $\vec{u}$ un vecteur de ce plan. Nous avons :

$$\widetilde{f} \circ \lambda\widetilde{I}(\vec{u}) = \widetilde{f}(\lambda\vec{u}) \overset{(*)}{=} \lambda\widetilde{f}(\vec{u}) = \lambda\widetilde{I}\left[\widetilde{f}(\vec{u})\right] = \lambda\widetilde{I} \circ \widetilde{f}(\vec{u}) \qquad ((*) \text{ car } \widetilde{f} \text{ est linéaire})$$

ce qui prouve que : $\widetilde{f} \circ \lambda\widetilde{I} = \lambda\widetilde{I} \circ \widetilde{f}$.

Premier constat

Dans $\overrightarrow{\mathscr{P}}$, la composée d'une homothétie et d'une isométrie ne dépend pas de l'ordre dans lequel on fait intervenir ces transformations.

Voici une illustration de ce résultat :

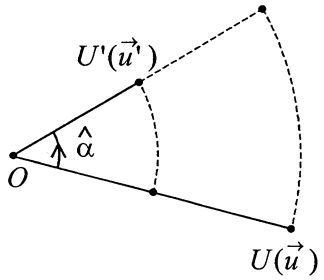


Fig. 85

Légende : $\lambda\widetilde{I} = 1/2\widetilde{I}$ et $\widetilde{f} = \widetilde{r}_{\hat{\alpha}}$

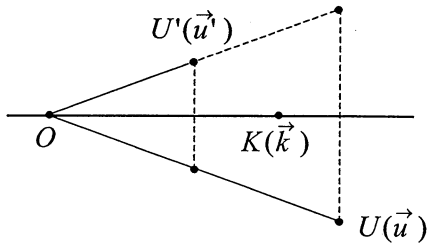


Fig. 86

Légende : $\lambda\widetilde{I} = 1/2\widetilde{I}$ et $\widetilde{f} = \widetilde{s}_{\vec{k}}$

2.1.2 Cas des homothéties négatives

Soit $(-\lambda)\widetilde{I}$ une homothétie négative de $\overrightarrow{\mathscr{P}}$ ($\lambda \in \mathbb{R}_+^*$) et $\widetilde{f}$ une isométrie de ce plan.

Nous avons : $\widetilde{f} \circ (-\lambda)\widetilde{I} = \widetilde{f} \circ \left[(-\widetilde{I}) \circ \lambda\widetilde{I}\right] = \left[\widetilde{f} \circ (-\widetilde{I})\right] \circ \lambda\widetilde{I} = \widetilde{g} \circ \lambda\widetilde{I}$

où $\widetilde{g} = \widetilde{f} \circ (-\widetilde{I})$ est une isométrie, et $\lambda\widetilde{I}$ une homothétie positive de $\overrightarrow{\mathscr{P}}$.

Deuxième constat

La composée d'une homothétie négative et d'une isométrie du plan $\overrightarrow{\mathscr{P}}$ peut se ramener à la composée d'une homothétie positive et d'une isométrie de ce plan.

Si on veut aller plus avant dans cette affaire, deux éventualités sont à considérer suivant que l'isométrie $\widetilde{f}$ considérée est une rotation ou une réflexion vectorielle.

1er cas : $\widetilde{f} = \widetilde{r}_{\hat{\alpha}}$

On a alors :

$$\begin{aligned}\widetilde{r}_{\hat{\alpha}} \circ (-\lambda)\widetilde{I} &= \widetilde{r}_{\hat{\alpha}} \circ \left[(-\widetilde{I}) \circ \lambda\widetilde{I}\right] \\ &= \left[\widetilde{r}_{\hat{\alpha}} \circ (-\widetilde{I})\right] \circ \lambda\widetilde{I} \\ &= \left[\widetilde{r}_{\hat{\alpha}} \circ \widetilde{r}_{\hat{\pi}}\right] \circ \lambda\widetilde{I} \\ &= \widetilde{r}_{\hat{\alpha}+\hat{\pi}} \circ \lambda\widetilde{I}\end{aligned}$$

2ème cas : $\widetilde{f} = \widetilde{s}_{\vec{k}}$

On a alors :

$$\begin{aligned}\widetilde{s}_{\vec{k}} \circ (-\lambda)\widetilde{I} &= \widetilde{s}_{\vec{k}} \circ \left[(-\widetilde{I}) \circ \lambda\widetilde{I}\right] \\ &= \left[\widetilde{s}_{\vec{k}} \circ (-\widetilde{I})\right] \circ \lambda\widetilde{I} \\ &\overset{(*)}{=} \left[\widetilde{s}_{\vec{k}} \circ (\widetilde{s}_{\vec{k}} \circ \widetilde{s}_{\vec{\ell}})\right] \circ \lambda\widetilde{I} \\ &= \widetilde{s}_{\vec{\ell}} \circ \lambda\widetilde{I}\end{aligned}$$

(*) $\vec{\ell}$ étant un vecteur non nul orthogonal à $\vec{k}$.

Voici une illustration de ces deux résultats.

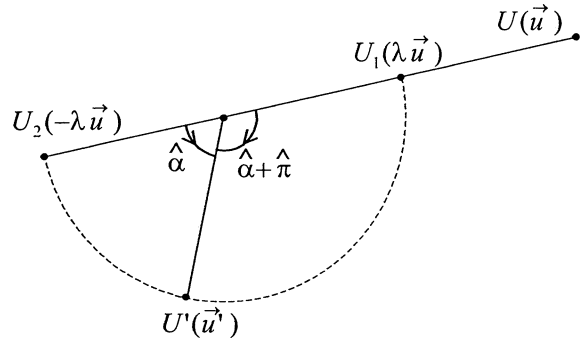


Fig. 87 (légende : $(-\lambda)\widetilde{I} = -1/2\widetilde{I}$)

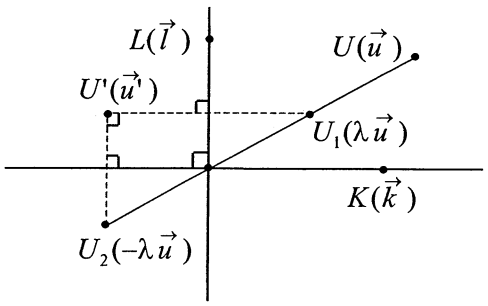


Fig. 88 (légende : $(-\lambda)\widetilde{I} = -1/2\widetilde{I}$)

2.1.3 Unicité

Troisième constat

La composée d'une homothétie positive et d'une isométrie de $\overrightarrow{\mathscr{P}}$ est unique en son genre. Nous entendons par là que :

quels que soient les réels strictement positifs λ et μ,

quels que soient les isométries $\widetilde{f}$ et $\widetilde{g}$ de $\overrightarrow{\mathscr{P}}$,

si $\widetilde{f} \circ \lambda \widetilde{I} = \widetilde{g} \circ \mu \widetilde{I}$ alors $\lambda = \mu$ et $\widetilde{f} = \widetilde{g}$.

En effet :

si $\widetilde{f} \circ \lambda \widetilde{I} = \widetilde{g} \circ \mu \widetilde{I}$ alors, en composant à gauche par $\widetilde{g}^{-1}$ puis à droite par $1/\lambda \widetilde{I}$, on obtient : $\widetilde{g}^{-1} \circ \widetilde{f} = \mu/\lambda \widetilde{I}$

Cette dernière égalité montre que :

- $\lambda = \mu$ car $\widetilde{g}^{-1} \circ \widetilde{f}$ est une isométrie de $\overrightarrow{\mathscr{P}}$
- $\widetilde{f} = \widetilde{g}$ car $\widetilde{g}^{-1} \circ \widetilde{f} = \widetilde{I}$.

On peut donc se montrer satisfait de notre ''voyage'' dans le plan vectoriel $\overrightarrow{\mathscr{P}}$.

Là, tout n'est qu'ordre et beauté,

Luxe, calme et ... simplicité.

2.2 Similitudes, similitudes directes, similitudes inverses de $\overrightarrow{\mathscr{P}}$

Les différents constats établis dans le paragraphe précédent nous permettent d'introduire les définitions suivantes :

2.2.1 Similitudes de $\overrightarrow{\mathscr{P}}$

Définition

La composée d'une homothétie positive de $\overrightarrow{\mathscr{P}}$ suivie – ou précédée – d'une isométrie de ce plan est appelée similitude de $\overrightarrow{\mathscr{P}}$.

2.2.2 Similitudes directes, similitudes inverses de $\overrightarrow{\mathscr{P}}$

Les isométries de $\overrightarrow{\mathscr{P}}$ sont réparties en deux classes : rotations et réflexions. Ceci nous conduit à répartir aussi les similitudes de $\overrightarrow{\mathscr{P}}$ en deux classes : similitudes directes et similitudes inverses.

Définitions

- La composée de l'homothétie positive $\lambda \widetilde{I}$ suivie – ou précédée – de la rotation $\widetilde{r}_{\hat{\alpha}}$ est appelée similitude vectorielle directe de rapport λ et d'angle $\hat{\alpha}$. On la note $\widetilde{S}_{\lambda,\hat{\alpha}}$.
- La composée de l'homothétie positive $\lambda \widetilde{I}$ suivie – ou précédée – de la réflexion $\widetilde{s}_{\vec{k}}$ est appelée similitude vectorielle inverse de rapport λ et de droite – ou d'axe – $\mathbb{R}\vec{k}$. On la note $\widetilde{S}_{\lambda,\vec{k}}$.

De ces définitions et des résultats obtenus plus haut concernant les homothéties négatives, il découle que :

$$\widetilde{r}_{\hat{\alpha}} \circ (-\lambda)\widetilde{I} = \widetilde{S}_{\lambda,\hat{\alpha}+\hat{\pi}} \text{ et } \widetilde{s}_{\vec{k}} \circ (-\lambda)\widetilde{I} = \widetilde{S}_{\lambda,\vec{\ell}} \text{ avec } \begin{cases} \vec{\ell} \neq \vec{0} \\ \vec{\ell} \perp \vec{k} \end{cases}$$

2.3 Détermination d'une similitude de $\overrightarrow{\mathscr{P}}$

Théorème 1 *Étant donné deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ de $\overrightarrow{\mathscr{P}}$, il existe une et une seule similitude directe (resp. inverse) de ce plan qui transforme $\vec{u}$ en $\vec{u}'$.*

Démonstration

- S'il existe une similitude de $\overrightarrow{\mathscr{P}}$ qui transforme $\vec{u}$ et $\vec{u}'$, son rapport ne peut être que le réel strictement positif $\lambda = \dfrac{\|\vec{u}'\|}{\|\vec{u}\|}$.

Deux éventualités sont maintenant à examiner suivant que la similitude envisagée est directe ou inverse.

1. Pour une similitude directe, son angle ne peut être que l'angle $\hat{\alpha}$ du couple $(\vec{u},\vec{u}')$.

$$\hat{\alpha} = \widehat{(\vec{u},\vec{u}')}$$

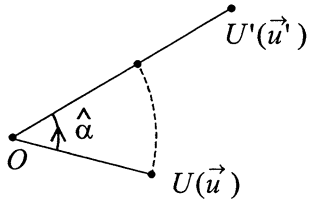


Fig. 89

2. Pour une similitude inverse, son axe ne peut être que la droite vectorielle $\mathbb{R}\vec{k}$ représentée dans le plan pointé $\mathscr{P}_0$ par la bissectrice (OK) des demi-droites $[OU)$ et $[OU')$.

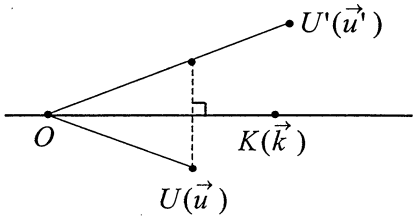


Fig. 90

En définitive, s'il existe une similitude directe (resp. inverse) de $\overrightarrow{\mathscr{P}}$ qui transforme $\vec{u}$ en $\vec{u}'$ ce ne peut être que $\widetilde{S}_{\lambda,\hat{\alpha}}$ (resp. $\widetilde{S}_{\lambda,\vec{k}}$).

- Cela dit, il est clair que les similitudes $\widetilde{S}_{\lambda,\hat{\alpha}}$ et $\widetilde{S}_{\lambda,\vec{k}}$ envoient $\vec{u}$ sur $\vec{u}'$. D'où le résultat annoncé.

Ainsi une similitude directe (resp. inverse) de $\overrightarrow{\mathscr{P}}$ est déterminée par la donnée d'un vecteur non nul et de son transformé.

Remarque

Étant donné deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ de $\overrightarrow{\mathscr{P}}$, il existe deux similitudes de $\overrightarrow{\mathscr{P}}$ qui transforment $\vec{u}$ en $\vec{u}'$: l'une est directe, l'autre est inverse.

3. Étude des similitudes directes de $\mathscr{P}$

3.1 Similitudes directes de $\mathscr{P}$

3.1.1 Définition

Une similitude de $\mathscr{P}$ est dite directe si, et seulement si, son associée vectorielle est une similitude directe de $\overrightarrow{\mathscr{P}}$.

3.1.2 Conséquences

De cette définition et de la propriété fondamentale des similitudes de $\mathscr{P}$, il découle que :

- Une similitude directe de $\mathscr{P}$ se réduit à la composée d'une homothétie positive et d'un déplacement.
- La réciproque d'une similitude directe de $\mathscr{P}$ est une similitude directe de $\mathscr{P}$.
- Une similitude directe de $\mathscr{P}$ "conserve" les angles.

3.1.3 Figures directement semblables

Une figure de $\mathscr{P}$ et sa transformée par une similitude directe sont dites directement semblables. Par exemple, dans le dessin du § 1.1, les triangles ABC et $A_2B_2C_2$ sont directement semblables.

3.2 Caractérisation d'une similitude directe de $\mathscr{P}$: forme canonique

3.2.1 Exposé du problème

Étant donné des points A et A' de $\mathscr{P}$, un réel strictement positif λ et un angle $\hat{\alpha}$, on se propose de déterminer l'application affine f de $\mathscr{P}$ qui envoie A sur A' et admet pour associée la similitude vectorielle directe $\widetilde{S}_{\lambda,\hat{\alpha}}$ de rapport λ et d'angle $\hat{\alpha}$.

1. Rappel des cas particuliers déjà étudiés

   Nous énumérons dans cet alinéa les résultats déjà acquis.

   - Lorsque $\lambda = 1$ et $\hat{\alpha} = \hat{0}$, on a : $\widetilde{f} = \widetilde{S}_{1,\hat{0}} = \widetilde{I}$ .Dans ce cas f est la translation $t_{(A,A')}$.
   - Lorsque $\lambda \neq 1$ et $\hat{\alpha} = \hat{0}$, on a : $\widetilde{f} = \widetilde{S}_{\lambda,\hat{0}} = \lambda\widetilde{I}$. Dans ce cas f est l'homothétie (positive) de rapport λ qui envoie A sur A'.
   - Lorsque $\hat{\alpha} = \hat{\pi}$, on a : $\widetilde{f} = \widetilde{S}_{\lambda,\hat{\pi}} = \widetilde{r}_{\hat{\pi}} \circ \lambda\widetilde{I} = -\widetilde{I} \circ \lambda\widetilde{I} = (-\lambda)\widetilde{I}$. Dans ce cas f est l'homothétie (négative) de rapport $-\lambda$ qui envoie A sur A'.
   - Lorsque $\lambda = 1$ et $2\hat{\alpha} \neq \hat{0}$, on a : $\widetilde{f} = \widetilde{S}_{1,\hat{\alpha}} = \widetilde{r}_{\hat{\alpha}}$. Dans ce cas f est la rotation d'angle $\hat{\alpha}$ qui envoie A sur A'.

2. Étude du cas général : $\lambda \neq 1$ et $2\hat{\alpha} \neq \hat{0}$ ($\hat{\alpha}$ ni nul, ni plat)

   L'associée de f étant une similitude vectorielle directe, on peut conjecturer que f est une similitude directe de $\mathscr{P}$. En outre, à l'instar de ce qui se passe dans $\overrightarrow{\mathscr{P}}$, il paraît naturel de se demander si :

   - f peut se réduire à la composée d'une homothétie positive suivie d'une rotation de même centre.
   - Ces deux transformations sont commutables.

   Il est clair alors que la réalisation de ces deux éventualités nécessite que f fixe un point de $\mathscr{P}$.

   On va donc commencer par chercher si f fixe des points de $\mathscr{P}$. Dans l'affirmative, il restera à contrôler si les deux éventualités envisagées sont satisfaites ou non.

   L'étude qui suit s'articule comme il vient d'être dit.

   ♦ **Recherche des points de $\mathscr{P}$ invariant par f**

   Suivant la donnée des points A et A', deux situations sont à examiner :

   - $A' = A$. Dans ce cas, A est le seul point de $\mathscr{P}$ invariant par f. En effet, Ω désignant un point de $\mathscr{P}$, nous avons :

$$\Omega = f(\Omega) \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega A} = \overrightarrow{f(\Omega)f(A)} = \widetilde{f}(\overrightarrow{\Omega A}) = \widetilde{S}_{\lambda,\hat{\alpha}}(\overrightarrow{\Omega A})$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega A} = \vec{0} \text{ (car } \widetilde{S}_{\lambda,\hat{\alpha}} \text{ fixe le vecteur nul, et uniquement ce vecteur)}$$

$$\Leftrightarrow \Omega = A.$$

- $A' \neq A$. Dans ce cas, nous avons :

$$\Omega = f(\Omega) \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega A'} = \overrightarrow{f(\Omega)f(A)} = \tilde{f}(\overrightarrow{\Omega A})$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega A'} = \tilde{S}_{\lambda,\hat{\alpha}}(\overrightarrow{\Omega A})$$
$$\Leftrightarrow ||\overrightarrow{\Omega A'}|| = \lambda ||\overrightarrow{\Omega A}|| \text{ et } (\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega A'}) = \hat{\alpha}$$
$$\Leftrightarrow \Omega \in L_\lambda \cap (A, A')_{\hat{\alpha}}$$

où L_λ est l'ensemble des points M de $\mathscr{P}$ tels que $\dfrac{MA'}{MA} = \lambda$ et

$(A, A')_{\hat{\alpha}}$ l'ensemble des points M de $\mathscr{P}$ tels que $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MA'}) = \hat{\alpha}$.

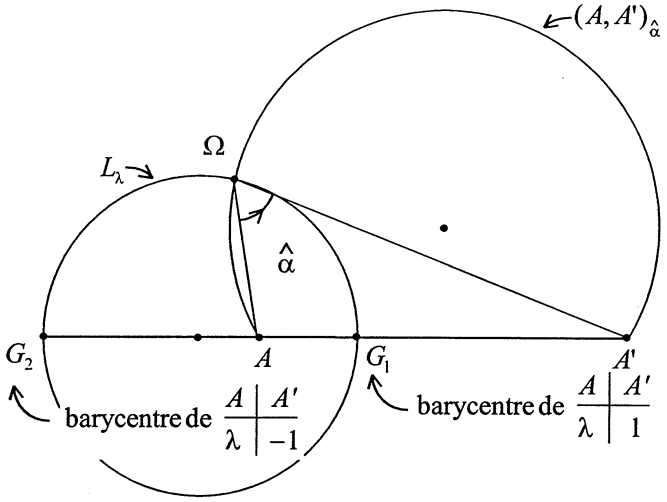


Fig. 91

L'existence et l'unicité du point Ω résulte alors du fait que les ensembles L_λ et $(A, A')_{\hat{\alpha}}$ ont un unique point commun (voir figure 91).

Notre étude peut donc se poursuivre comme prévu.

♦ **Validation de la conjecture**

Désignons par h l'homothétie de $\mathscr{P}$ de centre Ω et de rapport λ, et par r la rotation de $\mathscr{P}$ de centre Ω et d'angle $\hat{\alpha}$.

Nous avons alors :

– d'une part : $r \circ h(\Omega) = \Omega$ et $\widetilde{r \circ h} = \tilde{r} \circ \tilde{h} = \tilde{S}_{\lambda,\hat{\alpha}}$

– d'autre part : $h \circ r(\Omega) = \Omega$ et $\widetilde{h \circ r} = \tilde{h} \circ \tilde{r} = \tilde{S}_{\lambda,\hat{\alpha}}$

égalités qui montrent que chacune des composées $r \circ h$ et $h \circ r$ a même action que f sur le point Ω et même associée vectorielle.

Donc : $f = r \circ h = h \circ r$.

En résumé, dans tous les cas envisageables – et envisagés – f est une similitude directe de $\mathscr{P}$ de rapport λ qui, hormis le cas où $\tilde{f} = \tilde{I}$, fixe un unique point de $\mathscr{P}$.

3.2.2 Le résultat

Théorème 2 et définition

Si f est une application affine de $\mathscr{P}$ qui transforme A en A' (A et A' points donnés), et si $\tilde{f}$ est la similitude ***directe*** *de $\overrightarrow{\mathscr{P}}$, de rapport λ et d'angle $\hat{\alpha}$ (λ et $\hat{\alpha}$ donnés),*

alors *f est une similitude directe de $\mathscr{P}$ de rapport λ qui envoie A sur A'.*

Plus précisément,

* *f est la translation $t_{(A,A')}$ lorsque $\tilde{f} = \tilde{I}$*

* ***Sinon*** *f fixe un unique point Ω de $\mathscr{P}$, à savoir :*

- *lorsque* $A = A'$, *alors* $\Omega = A$
- *lorsque* $A \neq A'$, *alors* Ω *est le point commun à :*
  - *la ligne de niveau* λ *– notée* L_λ *– de l'application* $M \mapsto \dfrac{MA'}{MA}$
  - *la ligne de niveau* $\hat{\alpha}$ *– notée* $(A, A')_{\hat{\alpha}}$ *– de l'application* $M \mapsto (\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}})$

L'application f se réduit dans ce cas à la composée de l'homothétie positive $h_{\Omega,\lambda}$ *de centre* Ω *et de rapport* λ *suivie – ou précédée – de la rotation* $r_{\Omega,\hat{\alpha}}$ *de centre* Ω *et d'angle* $\hat{\alpha}$.

Le point Ω, *l'angle* $\hat{\alpha}$ *sont respectivement appelés* ***centre*** *et* ***angle*** *de la similitude directe f.*

Le lecteur pourra s'assurer que cet énoncé prend en compte les cas particuliers envisagés lors de la résolution du problème posé.

3.2.3 Détermination d'une similitude directe de $\mathscr{P}$

Théorème 3 *Une similitude directe S de* $\mathscr{P}$ *– autre qu'une translation – est déterminée lorsqu'on connaît son centre* Ω, *son rapport* λ *et son angle* $\hat{\alpha}$. *On peut alors la noter* $S_{\Omega,\lambda,\hat{\alpha}}$.

Preuve :

Dans cette situation on connaît d'une part son action sur le point Ω et d'autre part son associée vectorielle, à savoir $\widetilde{S}_{\lambda,\hat{\alpha}}$.

3.3 Autre détermination d'une similitude directe de $\mathscr{P}$

Théorème 4 *Étant donné des points A, B, A' et B' de* $\mathscr{P}$ *tels que* $AB \neq 0$ *et* $A'B' \neq 0$, *il existe une et une seule similitude directe de ce plan qui transforme A en A' et B en B'.*

Démonstration

En traduisant le problème posé en ces termes : « Combien peut-on trouver de similitudes directes de $\mathscr{P}$ qui envoient A sur A' et qui admettent comme associée la similitude directe de $\overrightarrow{\mathscr{P}}$ qui transforme $\overrightarrow{AB}$ en $\overrightarrow{A'B'}$? » On obtient immédiatement la réponse, à savoir : une et une seule. En effet, une similitude directe de $\mathscr{P}$ est déterminée dès lors qu'on connaît son action sur un point et son associée vectorielle, ce qui est le cas ici.

Lorsque les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B'}$ sont distincts la similitude cherchée est à centre car son associée vectorielle n'est pas l'application identique de $\overrightarrow{\mathscr{P}}$. La construction du centre de cette similitude sera abordée au cours d'un exercice figurant page 65.

Cas particulier

En prenant $B = B' = \Omega$ dans le théorème 4, on obtient le **corollaire** suivant :

Étant donné des points Ω, *A, A' de* $\mathscr{P}$ *tels que* $\Omega A \neq 0$ *et* $\Omega A' \neq 0$, *il existe une et une seule similitude directe de ce plan, ayant pour centre* Ω *et qui envoie A sur A'. On peut la noter* $S_{\Omega,A \mapsto A'}$.

Ainsi une similitude directe de $\mathscr{P}$ est déterminée lorsqu'on connaît :

- Soit un bipoint et son transformé.
- Soit son centre, un point et son transformé.

4. Trois résultats importants concernant les similitudes directes de $\mathscr{P}$

4.1 Configuration des cercles sécants et similitude directe

4.1.1 La configuration

Dans le plan $\mathscr{P}$, elle est constituée de deux cercles $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ sécants en A et B ainsi que des centres respectifs O_1 et O_2 de ces deux cercles.

4.1.2 Le résultat

Théorème 5 *Dans la configuration des cercles sécants, la similitude directe de $\mathscr{P}$, $S_{A,O_1\mapsto O_2}$, transforme :*

i) le cercle $\mathscr{C}_1$ en le cercle $\mathscr{C}_2$

ii) Tout point M de $\mathscr{C}_1$ en le point M', si possible autre que B, de l'intersection de la droite[2] (MB) et du cercle $\mathscr{C}_2$.

Démonstration

Désignons par S la similitude directe $S_{A,O_1\mapsto O_2}$.

1. $S(\mathscr{C}_1)$ est le cercle de centre $S(O_1)$ qui passe par le point $S(A)$. Donc $S(\mathscr{C}_1)=\mathscr{C}_2$. Ceci étant, le transformé par S d'un point M de $\mathscr{C}_1$ est un point M' de $\mathscr{C}_2$.
2. Trois cas sont à examiner :

- M est un point de $\mathscr{C}_1$ autre que B et $S^{-1}(B)$

Alors : $2\,(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BA}) = (\overrightarrow{O_1M},\overrightarrow{O_1A})$

$= (\overrightarrow{O_2M'},\overrightarrow{O_2A})$ (effet de S)

$= 2\,(\overrightarrow{BM'},\overrightarrow{BA})$.

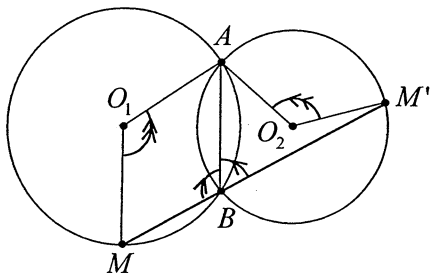


Fig. 92

Les vecteurs $\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{BM'}$ sont donc colinéaires.
Autrement dit, les points M, B, M' sont alignés.

- $M = S^{-1}(B)$

Alors : $M' = S(M) = B$ et on a :

$2\,(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BA}) = (\overrightarrow{O_1M},\overrightarrow{O_1A})$

$= (\overrightarrow{O_2B},\overrightarrow{O_2A})$ (effet de S)

La droite (BM) est donc tangente en B à $\mathscr{C}_2$.

Le résultat annoncé est encore vérifié.

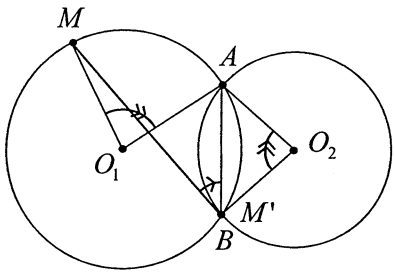


Fig. 93

[2] Lorsque $H = B$, on convient que la droite (MB) est la tangente en B au cercle $\mathscr{C}_1$.

- $M = B$

  Alors, on a d'une part :

  $$2(\overrightarrow{BM'}, \overrightarrow{BA}) = (\overrightarrow{O_2M'}, \overrightarrow{O_2A})$$

  d'autre part :

  $$(\overrightarrow{O_2M'}, \overrightarrow{O_2A}) = (\overrightarrow{O_1B}, \overrightarrow{O_1A}) \text{ (effet de } S^{-1})$$

  On en déduit : $2\ (\overrightarrow{BM'}, \overrightarrow{BA}) = (\overrightarrow{O_1B}, \overrightarrow{O_1A})$ ce qui prouve que la droite (BM') est tangente en B au cercle $\mathscr{C}_1$ ... d'où le résultat annoncé.

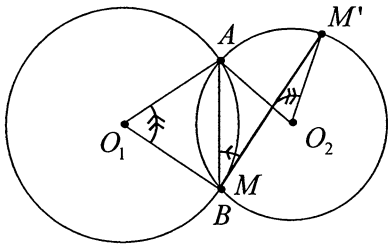


Fig. 94

4.2 Composée de deux similitudes directes

Il importe de retenir le résultat qui suit et davantage encore la manière de l'obtenir.

Théorème 6 *Si S_1 (resp. S_2) est une similitude directe de $\mathscr{P}$ de rapport λ_1 (resp. λ_2) et d'angle $\hat{\alpha}_1$ (resp. $\hat{\alpha}_2$) alors $S_2 \circ S_1$ est une similitude directe de $\mathscr{P}$ de rapport $\lambda_1\lambda_2$ et d'angle $\hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2$.*

Démonstration :

Il est clair que $S_2 \circ S_1$ est une bijection affine de $\mathscr{P}$.

$$S_2 \widetilde{\circ} S_1 = \widetilde{S}_{\lambda_2,\hat{\alpha}_2} \circ \widetilde{S}_{\lambda_1,\hat{\alpha}_1} = \left(\widetilde{r}_{\hat{\alpha}_2} \circ \lambda_2 \widetilde{I}\right) \circ \left(\lambda_1 \widetilde{I} \circ \widetilde{r}_{\hat{\alpha}_1}\right) = \widetilde{r}_{\hat{\alpha}_2} \circ \left(\lambda_2 \widetilde{I} \circ \lambda_1 \widetilde{I}\right) \circ \widetilde{r}_{\hat{\alpha}_1}$$

$$= \widetilde{r}_{\hat{\alpha}_2} \circ \left(\lambda_2\lambda_1 \widetilde{I} \circ \widetilde{r}_{\hat{\alpha}_1}\right) = \widetilde{r}_{\hat{\alpha}_2} \circ \left(\widetilde{r}_{\hat{\alpha}_1} \circ \lambda_2\lambda_1 \widetilde{I}\right) = \left(\widetilde{r}_{\hat{\alpha}_2} \circ \widetilde{r}_{\hat{\alpha}_1}\right) \circ \lambda_2\lambda_1 \widetilde{I} = \widetilde{r}_{\hat{\alpha}_2+\hat{\alpha}_1} \circ \lambda_2\lambda_1 \widetilde{I} = \widetilde{S}_{\lambda_1\lambda_2,\hat{\alpha}_1+\hat{\alpha}_2}$$

Ainsi l'associée de $S_2 \circ S_1$ est la similitude directe de $\overrightarrow{\mathscr{P}}$, de rapport $\lambda_1\lambda_2$ et d'angle $\hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2$. D'où le résultat annoncé.

Commentaires

Le théorème 6 énonce un résultat d'ordre général. Lorsque les similitudes directes S_1 et S_2 sont entièrement définies, la similitude directe $S_2 \circ S_1$ est parfaitement déterminée puisque, dans ce cas, on connaît :

- Son associée vectorielle.
- Son action sur un point de $\mathscr{P}$.

Par ailleurs, on retrouve facilement ce résultat en utilisant les écritures complexes de S_1 et S_2 (voir § 8).

4.3 Centre commun pour deux similitudes directes de $\mathscr{P}$

Théorème 7 *Soit A, B, A' et B' quatre points de $\mathscr{P}$ tels que $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{A'B'}$. Alors :*

***la** similitude directe S_1 qui envoie A sur A' et B sur B' et*

***la** similitude directe S_2 qui envoie A sur B et A' sur B'*

*sont des similitudes à centre, ayant le **même centre**.*

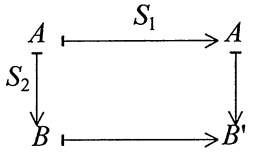


Fig.95

Démonstration

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B'}$ étant distincts, on est assuré que la similitude directe S_1 ne se réduit pas à une translation car son associée n'est pas $\widetilde{I}$, S_1 est donc une similitude à centre.

Considérons maintenant les composées $S_2 \circ S_1$ et $S_1 \circ S_2$.

Le schéma ci-contre fait apparaître que ces composées ont même action sur le point A.

Par ailleurs, il est clair qu'elles ont même associée vectorielle (voir théorème 6).

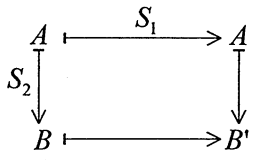


Fig. 96

Donc : $S_2 \circ S_1 = S_1 \circ S_2$.

En désignant par Ω le centre de S_1, de l'égalité précédente il découle que :

$$S_2 \circ S_1(\Omega) = S_1 \circ S_2(\Omega) \text{ soit } S_2(\Omega) = S_1[S_2(\Omega)].$$

On en déduit : $S_2(\Omega) = \Omega$ car, dans $\mathscr{P}$, S_1 fixe uniquement le point Ω.

Ainsi S_2 est une similitude directe de $\mathscr{P}$ autre que l'application identique qui fixe le point Ω. Donc S_2 est une similitude à centre ... et de centre Ω.

5. Exercices résolus

Dans ces exercices seront notamment utilisés les trois théorèmes du paragraphe précédent.

5.1 Exercice 1

Dans un plan $\mathscr{P}$ sont donnés deux cercles $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ sécants en A et B. On note O_1 et O_2 leurs centres respectifs. Une droite Δ passant par B, distincte de (AB), recoupe $\mathscr{C}_1$ en M et $\mathscr{C}_2$ en N. Montrer que la médiatrice $\mathscr{D}$ du segment $[MN]$ passe par un point fixe lorsque Δ pivote autour de B.

a) Pour se faire une idée

Considérons deux droites particulières Δ_0 et Δ_1. Les médiatrices $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ des segments $[M_0 N_0]$ et $[M_1 N_1]$ se coupent en un point K qui ne peut être que le point fixe cherché.

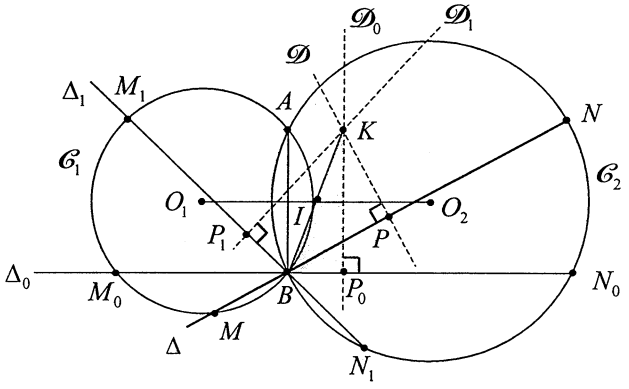


Fig. 97

Montrer que toutes les droites $\mathscr{D}$ passent par K, du fait que BPK est généralement un triangle rectangle en le milieu P de $[MN]$, revient quasiment à montrer que le point P appartient à un cercle fixe passant par B. Au vu de la figure, on peut conjecturer que ce cercle est centré en I le milieu du segment fixe $[O_1 O_2]$.

b) Validation de cette conjecture

- La similitude directe S de centre A qui transforme O_1 en O_2 envoie M sur N (c. f. théorème 5).

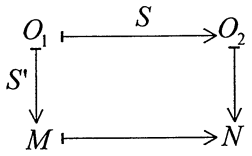


Fig. 98

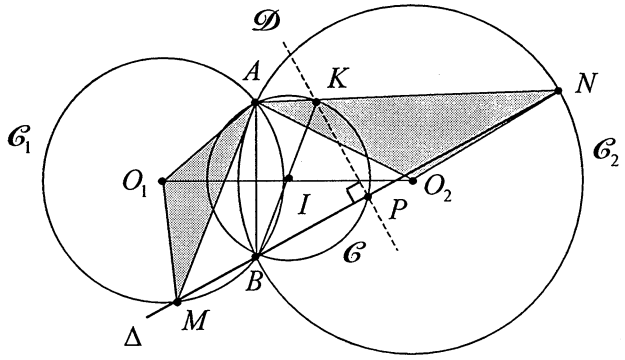


Fig. 99

Par suite, la similitude directe S' qui transforme O_1 en M et O_2 en N – voir schéma ci-dessus – a pour centre A car S' a le même centre que S – c. f. théorème 7 – Par ailleurs, cette similitude transforme le milieu I de $[O_1O_2]$ en le milieu P de $[MN]$ ... (conservation des barycentres).

Donc la similitude directe Σ qui transforme O_1 en I et M en P a pour centre A car Σ a le même centre que S' – c. f. théorème 7 –

En d'autres termes, **la similitude directe Σ de centre A** qui transforme O_1 en I envoie M sur P.

Le lieu de P est donc le transformé du lieu de M par $\Sigma = S_{A,O_1 \mapsto I}$.

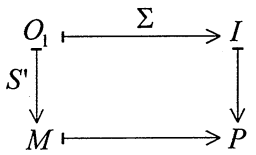


Fig. 100

- Cela dit, lorsque Δ pivote autour de B, le point M décrit l'ensemble $\mathscr{C}_1 \setminus \{A\}$. Or $\Sigma(\mathscr{C}_1)$ est le cercle $\mathscr{C}$ de centre I ($I = \Sigma(O_1)$) qui passe par le point A ($A = \Sigma(A)$). Ce cercle passe aussi par B car son centre I appartient à la médiatrice (O_1O_2) du segment $[AB]$.

En résumé, lorsque Δ pivote autour de B, le milieu P de $[MN]$ décrit l'ensemble $\mathscr{C} \setminus \{A\}$ où $\mathscr{C}$ est le cercle de centre I passant par B.

- Pour tout point P de $\mathscr{C} \setminus \{A,B\}$, la droite $\mathscr{D}$ qui est orthogonale en P à la droite Δ passe donc par le point (fixe) K diamétralement opposé à B sur le cercle $\mathscr{C}$.

- Reste à établir que, pour $P = B$, la droite $\mathscr{D}$ passe encore par K.

Dans ce cas, désignons par μ le transformé de B par Σ^{-1}. Le théorème 6 appliqué aux cercles $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}$, du fait que le point $\Sigma(\mu)$ est confondu avec B prouve que la droite Δ passant par μ est tangente à $\mathscr{C}$ en B.

Par suite la droite $\mathscr{D}$ orthogonale en B à Δ passe par le point K diamétralement opposé à B sur le cercle $\mathscr{C}$, ce qui achève la solution du problème.

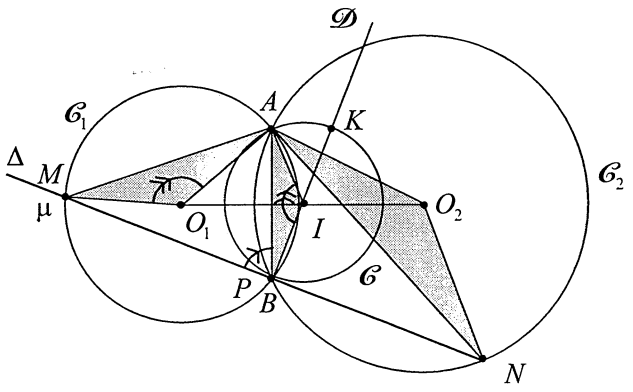


Fig. 101

5.2 Exercice 2

a) Étant donné quatre points distincts A, B, A', B' d'un plan $\mathscr{P}$ tels que $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{A'B'}$, construire le centre de la similitude directe Σ qui transforme le bipoint (A,B) en le bipoint (A',B').

b) Étant donné un quadrilatère complet $ABCDEF$, montrer que les cercles $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_3$ et $\mathscr{C}_4$ circonscrits aux triangles EAB, ECD, FAD et FBC ont un point commun.

a) On évacue d'abord deux cas particuliers.

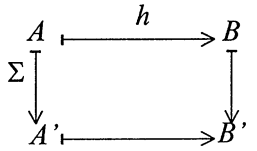
Premier cas : $(A'B') // (AB)$

La similitude directe Σ est ici une homothétie. La construction du centre de cette homothétie a déjà été abordée.

Deuxième cas : $(BB') // (AA')$

On note Ω le point d'intersection des droites (AB) et $(A'B')$. Alors, de façon évidente, B' est l'image de A' par l'homothétie h de centre Ω qui envoie A sur B ($h = h_{\Omega, A \mapsto B}$).

La similitude directe Σ a le même centre que h (c. f. théorème 7).



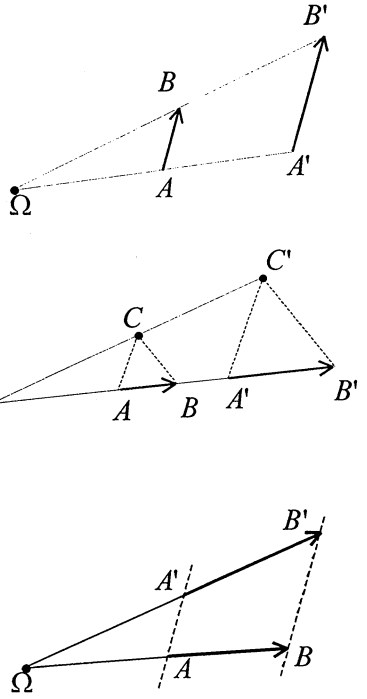
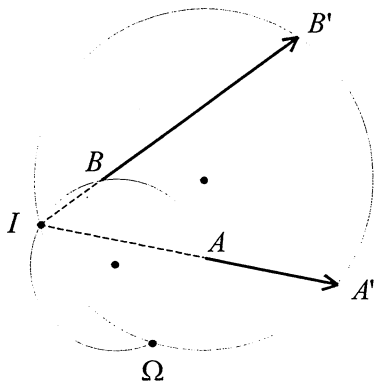


Fig. 102

Cas général :

On note I le point d'intersection des droites (AA') et (BB'). Pour obtenir la solution du problème on construit l'*exemplaire* de la configuration des cercles sécants qui "intègre" les points alignés I, A, A' et I, B, B'. Le centre de la similitude directe Σ est alors le point commun, distinct de I, de ces deux cercles sécants (c. f. théorème 5).

Remarque. Lorsque $AB = A'B'$, la similitude directe Σ est une rotation. Son centre est le point d'intersection des médiatrices des segments $[AA']$ et $[BB']$.



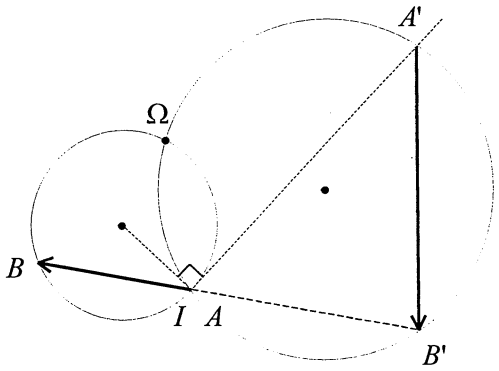


Fig. 103

b) Considérons les similitudes directes S et Σ définies au moyen du schéma ci-dessous :

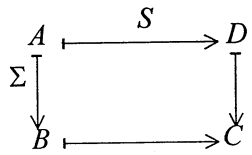


Fig. 104

On sait alors que :

- Le centre de S est le point autre que E de l'intersection des cercles (EAB) et (EDC).
- Le centre de Σ est le point autre que F de l'intersection des cercles (FAD) et (FBC).

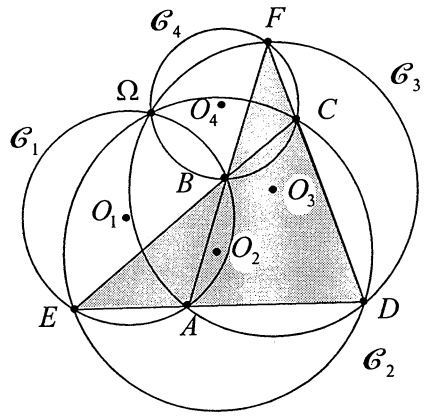


Fig. 105

Les similitudes S et Σ ont le même centre – théorème 5 –

Il s'ensuit que ces quatre cercles ont un point commun : le centre Ω des similitudes S et Σ.

Prolongement :

i) Montrer que les projetés orthogonaux P, Q, R, S de Ω sur les côtés (AB), (BC), (CD) et (DA) du quadrilatère complet sont alignés.

Indication : On pourra utiliser la propriété suivante : « les projetés orthogonaux d'un point sur les côtés d'un triangle sont alignés si et seulement si ce point appartient au cercle circonscrit à ce triangle ».

ii) Montrer que les centres O_1, O_2, O_3, O_4 des cercles $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_3$, $\mathscr{C}_4$ et le point Ω sont cocycliques.

Indication : On pourra considérer les symétriques de Ω par rapport aux côtés du triangle $O_1O_2O_3$, puis du triangle $O_2O_3O_4$.

5.3 Exercice 3

Soit, dans un plan orienté $\mathscr{P}$, un triangle ABC équilatéral, de sens direct ; Δ la parallèle à (BC) passant par A ; M un point de (BC) autre que B et C.

La parallèle à (AB) passant par M coupe (AC) en D et Δ en N.

La parallèle à (AC) passant par M coupe (AB) en E et Δ en P.

Montrer que les centres de gravité I, J, K, des triangles ABC, ADN et APE sont les sommets d'un triangle équilatéral direct.

Nous allons établir que la rotation r de centre I et d'angle $\pi/3$ transforme J en K.

- Observons d'abord que :

$$\overrightarrow{NA} = \overrightarrow{MB} \text{ et } \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{CM}$$

Par suite :

$$\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CB}$$

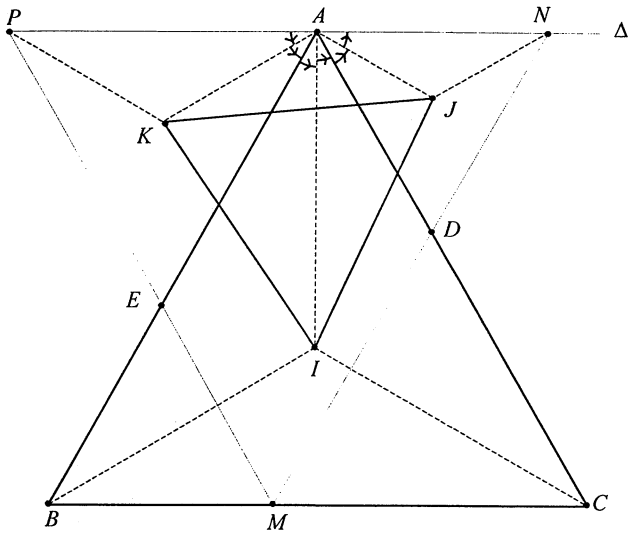


Fig. 106

- Considérons maintenant le schéma :

$$J \xrightarrow{S_A} N \xrightarrow{t_{\overrightarrow{CB}}} P \xrightarrow{\Sigma_A} K$$

Il est clair que :

– la similitude directe S de centre A qui envoie J sur N a pour rapport $\sqrt{3}$ et pour angle $\pi/6$.

– la similitude directe Σ de centre A qui envoie P sur K a pour rapport $\sqrt{3}/3$ et pour angle $\pi/6$.

La composée $f = \Sigma \circ t_{\overrightarrow{CB}} \circ S$ a donc pour associée :

$$\widetilde{f} = \widetilde{S}_{\sqrt{3},\pi/6} \circ \widetilde{I} \circ \widetilde{S}_{\sqrt{3}/3,\pi/6} = \widetilde{S}_{\sqrt{3},\pi/6} \circ \widetilde{S}_{\sqrt{3}^{-1},\pi/6} = \widetilde{S}_{1,\pi/3}$$

Il en résulte que f est la rotation d'angle $\pi/3$ qui envoie J sur K.

Par ailleurs, nous avons :

$$f(I) = \Sigma \circ t_{\overrightarrow{CB}} \circ S(I) = \Sigma \circ t_{\overrightarrow{CB}}(C) = \Sigma(B) = I$$

Par conséquent, f est la rotation de centre I et d'angle $\pi/3$.

Comme $f(J) = K$, le triangle IJK est équilatéral direct.

6. Étude des similitudes inverses de $\mathscr{P}$

6.1 Similitudes inverses de $\mathscr{P}$

6.1.1 Définition

Une similitude de $\mathscr{P}$ est dite ***inverse*** *si, et seulement si, son associée vectorielle est une similitude inverse de $\overrightarrow{\mathscr{P}}$.*

6.1.2 Conséquences

De cette définition et de la propriété fondamentale des similitudes de $\mathscr{P}$ il découle que :

- Une similitude inverse de $\mathscr{P}$ se réduit à la composée d'une homothétie positive et d'un antidéplacement.
- La réciproque d'une similitude inverse de $\mathscr{P}$ est une similitude inverse de $\mathscr{P}$
- Une similitude inverse de $\mathscr{P}$ change les angles en leurs opposés.

6.1.3 Figures inversement semblables

Une figure de $\mathscr{P}$ et sa transformée par une similitude inverse agissant dans ce plan sont dites ***inversement semblables.***

Par exemple, dans la figure 78, les triangles ABC et $A_3B_3C_3$ sont inversement semblables.

6.2 Caractérisation d'une similitude inverse de $\mathscr{P}$: Forme canonique

6.2.1 Exposé du problème

Étant donné des points A et A' de $\mathscr{P}$, un réel strictement positif λ et un vecteur non nul $\vec{k}$ de $\overrightarrow{\mathscr{P}}$, on se propose de déterminer l'application affine f de $\mathscr{P}$ qui envoie A sur A' et admet pour associée la similitude vectorielle inverse $\widetilde{S}_{\lambda,\vec{k}}$ de rapport λ et de droite $\mathbb{R}\vec{k}$.

1. **Rappel du cas particulier déjà étudié** :

Lorsque $\lambda = 1$, on a : $\widetilde{f} = \widetilde{S}_{1,\vec{k}}$. Autrement dit, $\widetilde{f}$ est la réflexion vectorielle $\widetilde{s}_{\vec{k}}$ de droite $\mathbb{R}\vec{k}$.

Dans ce cas f est, suivant que les vecteurs $\overrightarrow{AA'}$ et $\vec{k}$ sont orthogonaux ou non.

- Soit la réflexion qui échange les points A et A'.
- Soit la réflexion glissée d'axe dirigé par $\vec{k}$ qui transforme A en A'.

2. **Étude du cas général** : $(\lambda \neq 1)$

L'associée de f étant une similitude inverse de $\overrightarrow{\mathscr{P}}$, on peut raisonnablement penser que f est une similitude inverse de $\mathscr{P}$.

En outre, vu qu'une similitude vectorielle inverse est la composée d'une homothétie vectorielle positive suivie – ou précédée – d'une réflexion vectorielle, il est naturel de se demander si :

- f peut se réduire à la composée d'une homothétie positive suivie d'une réflexion dont l'axe passe par le centre d'homothétie
- ces deux transformations sont commutables.

Ceci dit, il est clair que la réalisation de ces deux éventualités nécessite que f fixe un point de $\mathscr{P}$.

On va donc commencer par chercher si f fixe des points de $\mathscr{P}$. Dans l'affirmative, restera à tester si les deux éventualités envisagées sont satisfaites ou non.

♦ **Recherche des points de $\mathscr{P}$ invariants par f**

Suivant la donnée des points A et A', deux situations sont à examiner :

- $A = A'$. Dans ce cas A est le seul point de $\mathscr{P}$ invariant par f. En effet, Ω désignant un point de $\mathscr{P}$, nous avons :

$$\Omega = f(\Omega) \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega A} = \overrightarrow{f(\Omega)f(A)} = \widetilde{f}(\overrightarrow{\Omega A}) = \widetilde{S}_{\lambda,\vec{k}}(\overrightarrow{\Omega A})$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega A} = \vec{0} \text{ (car } \widetilde{S}_{\lambda,\vec{k}} \text{ fixe le vecteur nul, et uniquement ce vecteur)}$$

$$\Leftrightarrow \Omega = A.$$

• $A \neq A'$. Dans ce cas, nous avons :

$\Omega = f(\Omega) \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega A'} = \overrightarrow{f(\Omega)f(A)} = \widetilde{f}(\overrightarrow{\Omega A})$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega A'} = \widetilde{S}_{\lambda,\vec{k}}(\overrightarrow{\Omega A})$

$\overset{*}{\Leftrightarrow} \|\overrightarrow{\Omega A'}\| = \lambda \|\overrightarrow{\Omega A}\|$ et $\widehat{(\overrightarrow{\Omega A}, \vec{k})} = \widehat{(\vec{k}, \overrightarrow{\Omega A'})}$

$\Leftrightarrow \Omega \in L_\lambda$ et la bissectrice des demi-droites $[\Omega A)$ et $[\Omega A')$ est dirigée par $\vec{k}$

(L_λ ensemble des points M de $\mathscr{P}$ tels que $\frac{MA'}{MA} = \lambda$)

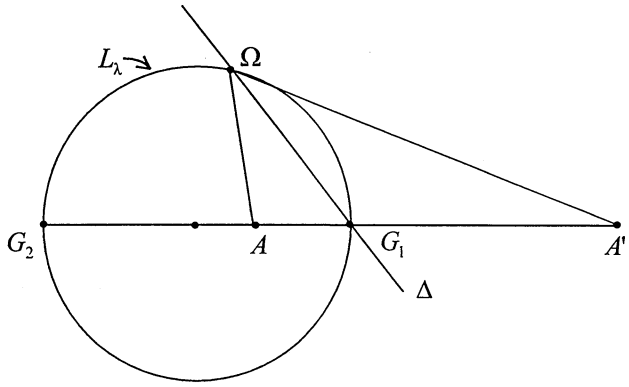


Fig. 107

$\Leftrightarrow \Omega$ est le point, si possible autre que G_1 (**), de l'intersection du cercle L_λ de diamètre $[G_1, G_2]$ et de la droite Δ passant par G_1 et dirigée par $\vec{k}$. (G_1 et G_2 étant respectivement les barycentres de $\begin{array}{c|c} A & A' \\ \hline \lambda & 1 \end{array}$ et de $\begin{array}{c|c} A & A' \\ \hline \lambda & -1 \end{array}$.)

(**) En effet, $f(G_1) = G_1 \Leftrightarrow 2\,\widehat{(\overrightarrow{G_1A}, \vec{k})} = \widehat{(\overrightarrow{G_1A}, \vec{k})} + \widehat{(\vec{k}, \overrightarrow{G_1A'})} = \widehat{(\overrightarrow{G_1A}, \overrightarrow{G_1A'})} = \hat{\pi}$ (voir (*))

$\Leftrightarrow \overrightarrow{G_1A}$ et $\vec{k}$ sont orthogonaux

$\Leftrightarrow \Delta$ est la tangente au cercle L_λ en G_1.

Ainsi f fixe un et un seul point Ω de $\mathscr{P}$. Reste à tester si les éventualités envisagées sont satisfaites ou non.

♦ **Validation de la conjecture.**

Désignons par h l'homothétie de $\mathscr{P}$ de centre Ω et de rapport λ et par s la réflexion d'axe Δ, Δ étant la droite dirigée par $\vec{k}$ et passant par Ω.

Nous avons alors :

d'une part : $s \circ h(\Omega) = \Omega$ et $\widetilde{s \circ h} = \widetilde{s} \circ \widetilde{h} = \widetilde{S}_{\lambda,\vec{k}}$,

d'autre part : $h \circ s(\Omega) = \Omega$ et $\widetilde{h \circ s} = \widetilde{h} \circ \widetilde{s} = \widetilde{S}_{\lambda,\vec{k}}$

égalités qui montrent que chacune des composées $s \circ h$ et $h \circ s$ a même action que f sur le point Ω, et même associée vectorielle.

Donc : $f = s \circ h = h \circ s$.

6.2.2 Le résultat

Théorème 8 et définition *Si f est une application affine de $\mathscr{P}$ qui transforme A en A' (A et A' points donnés), si $\widetilde{f}$ est la similitude inverse de $\overrightarrow{\mathscr{P}}$ de rapport λ et d'axe $\mathbb{R}\vec{k}$ (λ et $\vec{k}$ donnés)*

***alors** f est une similitude inverse de $\mathscr{P}$ de rapport λ qui envoie A sur A'.*

Plus précisément,

* *lorsque $\widetilde{f}$ se réduit à une réflexion ($\lambda = 1$) alors f est, suivant que les vecteurs $\overrightarrow{AA'}$ et $\vec{k}$ sont orthogonaux ou non, soit la réflexion qui échange A et A', soit la réflexion glissée d'axe dirigé par $\vec{k}$ qui transforme A en A'.*

* *Sinon f fixe un unique point Ω de $\mathscr{P}$. En désignant par G_1 et G_2 les barycentres de* $\begin{array}{c|c} A & A' \\ \hline \lambda & 1 \end{array}$ *et* $\begin{array}{c|c} A & A' \\ \hline \lambda & -1 \end{array}$, Ω *est le point – si possible autre que G_1 – de l'intersection du cercle de diamètre $[G_1, G_2]$ et de la droite Δ passant par G_1 et dirigée par $\vec{k}$*

L'application f se réduit alors à la composée de l'homothétie positive $h_{\Omega,\lambda}$ de centre Ω et de rapport λ suivie – ou précédée – de la réflexion s_Δ d'axe Δ.

Le point Ω, la droite Δ sont respectivement appelées **centre** *et* **axe** *de la similitude inverse f.*

6.2.3 Détermination d'une similitude inverse de $\mathscr{P}$

Théorème 9 *Une similitude inverse S de $\mathscr{P}$ – autre qu'une réflexion glissée ou non – est déterminée lorsqu'on connaît son centre Ω son rapport λ et son axe Δ. On peut alors la noter $S_{\Omega,\lambda,\Delta}$.*

Preuve

Dans cette situation, on connaît d'une part l'action de S sur le point Ω et d'autre part l'associée vectorielle de S, à savoir $\widetilde{S}_{\lambda,\vec{k}}$ où $\vec{k}$ est un vecteur directeur de Δ.

6.3 Autre détermination d'une similitude inverse de $\mathscr{P}$

Théorème 10 *Étant donné des points A, B, A' et B' de $\mathscr{P}$ tels que $AB \neq 0$ et $A'B' \neq 0$, il existe une et une seule similitude inverse de ce plan qui transforme A en A' et B en B'.*

La démonstration est analogue à celle proposée pour les similitudes directes.

Dans la figure 108 (page suivante), nous avons construit le centre Ω et l'axe Δ de la similitude inverse S qui transforme le bipoint (A,B) en le bipoint (A',B').

On connaît au départ le rapport λ de la similitude S : $\lambda = \dfrac{A'B'}{AB}$. Le point C est tel que $BC = A'B'$.

On l'utilise pour construire le barycentre G de $\begin{array}{c|c} A & A' \\ \hline \lambda & 1 \end{array}$.

Le point D est tel que $A'D = AB$. On l'utilise pour construire le barycentre G' de $\begin{array}{c|c} B & B' \\ \hline \lambda & 1 \end{array}$.

On sait alors que : (voir § 5.2)

- L'axe Δ de la similitude S passe par G et par G'. Donc $\Delta = (G,G')$.
- Le centre Ω de S appartient à Δ. Il s'ensuit que Ω est le point d'intersection des droites Δ et $(A's_\Delta(A))$.

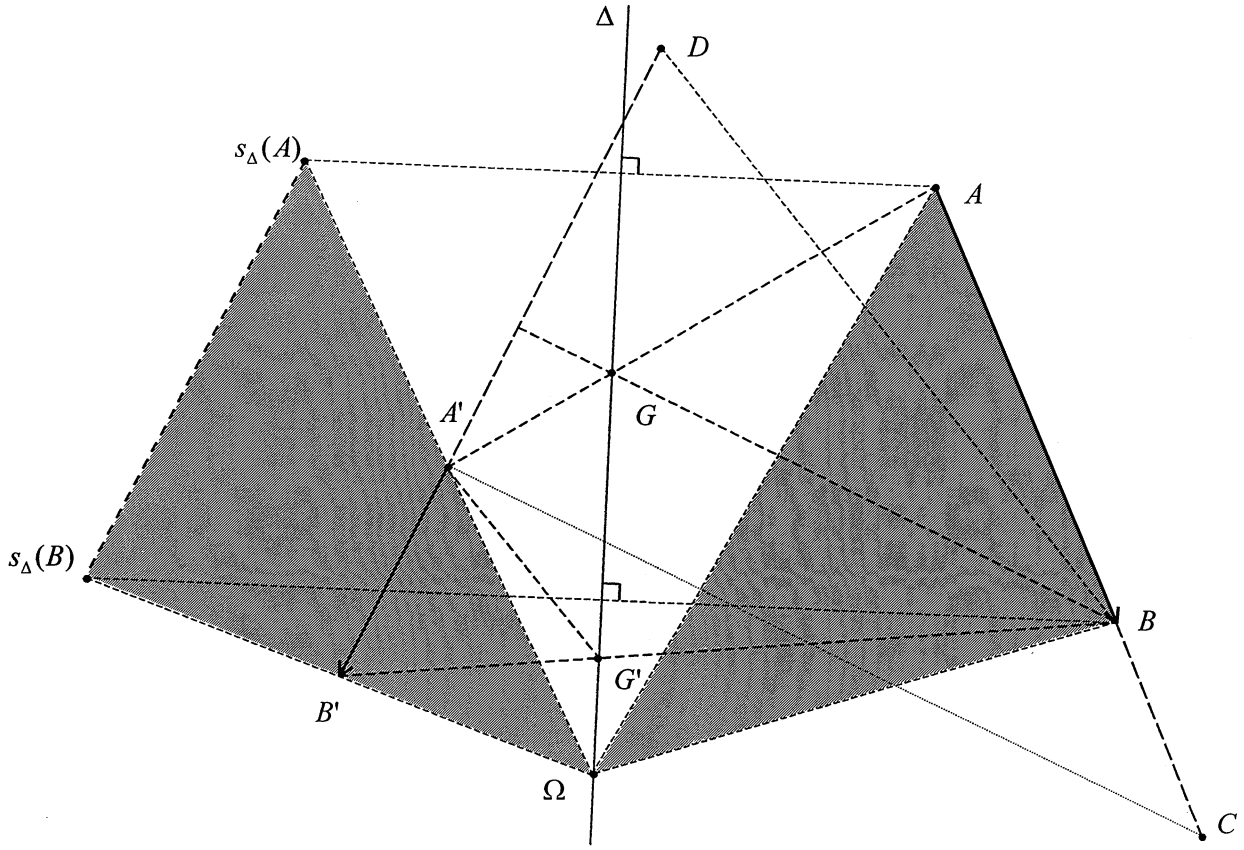


Fig. 108

Cas particulier

En prenant $B = B' = \Omega$ dans le théorème 10, on obtient le corollaire suivant :

Étant donné des points Ω, A et A' de $\mathscr{P}$ tels que $\Omega A \neq 0$ et $\Omega A' \neq 0$, il existe une et une seule similitude ***inverse*** *de ce plan ayant pour centre Ω et qui envoie A sur A'. On peut la noter $\overline{S}_{\Omega, A \mapsto A'}$.*

7. Deux résultats importants concernant les similitudes inverses

7.1 Configuration des droites sécantes et similitude inverse

7.1.1 La configuration

Dans le plan $\mathscr{P}$, elle est constituée de deux droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sécantes en un point Ω et deux points A et A' – autres que Ω – appartenant respectivement à $\mathscr{D}$ et à $\mathscr{D}'$.

7.1.2 Le résultat

Théorème 11 *Dans la configuration des droites sécantes, la similitude inverse S de centre Ω qui envoie A sur A' ($S = \overline{S}_{\Omega, A \mapsto A'}$).*

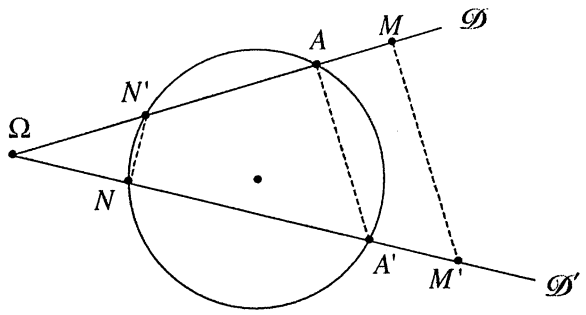


Fig. 109

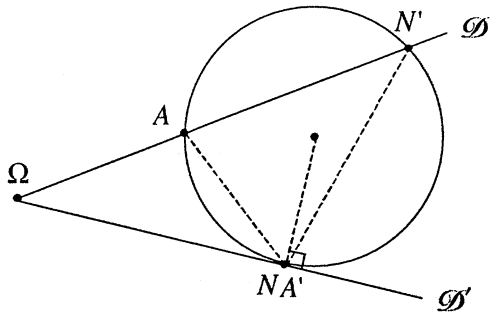


Fig. 110

i) Échange les demi-droites $[\Omega, A)$ *et* $[\Omega, A')$*, resp. les droites* $\mathscr{D}$ *et* $\mathscr{D}'$.

ii) Transforme tout point M de $\mathscr{D}$ *en le point M' de l'intersection de* $\mathscr{D}'$ *et de la parallèle à* (AA') *passant par M.*

iii) Transforme tout point N de $\mathscr{D}'$ *en le point N' de* $\mathscr{D}$ *défini par :* $\overrightarrow{\Omega N'} \cdot \overrightarrow{\Omega A} = \overrightarrow{\Omega N} \cdot \overrightarrow{\Omega A'}$.

Autrement dit, N' est le point d'intersection, si possible autre que A, de la droite $\mathscr{D}$ *et du cercle*[1] *NA'A.*

Démonstration

Désignons par :

* h l'homothétie de centre Ω et de rapport $\dfrac{\Omega A'}{\Omega A}$

* s la réflexion ayant pour axe **la** bissectrice des **demi-droites** $[\Omega, A)$ et $[\Omega, A')$.

Alors : $S = s \circ h$. Ceci étant :

- Nous avons : $S([\Omega, A)) = s \circ h([\Omega, A)) = s([\Omega, A)) = [\Omega, A')$

  $S([\Omega, A')) = s \circ h([\Omega, A')) = s([\Omega, A')) = [\Omega, A)$.

  La similitude S échange ainsi les demi-droites $[\Omega, A)$ et $[\Omega, A')$. Elle échange donc les droites (Ω, A) et (Ω, A') c'est-à-dire les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$.

- Soit M un point de $\mathscr{D}$ autre que Ω, x le coefficient de colinéarité du vecteur $\overrightarrow{\Omega M}$ au vecteur $\overrightarrow{\Omega A}$. Alors :

  $$\overrightarrow{\Omega M'} = \overrightarrow{S(\Omega)S(M)} = \vec{S}(\overrightarrow{\Omega M}) = \vec{S}(x\overrightarrow{\Omega A}) = x\vec{S}(\overrightarrow{\Omega A}) = x\overrightarrow{S(\Omega)S(A)} = x\overrightarrow{\Omega A'}.$$

  On en déduit : $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{\Omega M'} - \overrightarrow{\Omega M} = x(\overrightarrow{\Omega A'} - \overrightarrow{\Omega A}) = x\overrightarrow{AA'}$ ... ce qui montre que la droite (MM') est parallèle à la droite (AA').

- Soit N un point de $\mathscr{D}'$ autre que Ω, N' son image par S. Posons : $\lambda = \dfrac{\Omega A'}{\Omega A}$.

[1] Lorsque $N = A'$, on convient que le cercle $NA'A$ est celui passant par A et tangent en A' à la droite $\mathscr{D}'$.

On peut alors observer que :

- N' est un point de $\mathscr{D}$ car $S(\mathscr{D}') = \mathscr{D}$
- $\widetilde{S} = \widetilde{s} \circ \lambda \widetilde{I}$ et $\widetilde{S}^{-1} = \frac{1}{\lambda} \widetilde{I} \circ \widetilde{s}$.

Il s'ensuit que :

$$\overrightarrow{\Omega N'} \cdot \overrightarrow{\Omega A} = \widetilde{S}(\overrightarrow{\Omega N}) \cdot \widetilde{S}^{-1}(\overrightarrow{\Omega A'}) = \lambda \widetilde{s}(\overrightarrow{\Omega N}) \cdot \frac{1}{\lambda} \widetilde{s}(\overrightarrow{\Omega A'}) = \widetilde{s}(\overrightarrow{\Omega N}) \cdot \widetilde{s}(\overrightarrow{\Omega A'}) = \overrightarrow{\Omega N} \cdot \overrightarrow{\Omega A'}$$

car la réflexion vectorielle $\widetilde{s}$ conserve le produit scalaire ce qui achève la démonstration.

7.1.3 Remarque

Étant donné un trapèze $ABB'A'$ de bases $[A,A']$ et $[B,B']$, la similitude inverse S qui transforme le bipoint (A,B) en le bipoint (A',B') est :

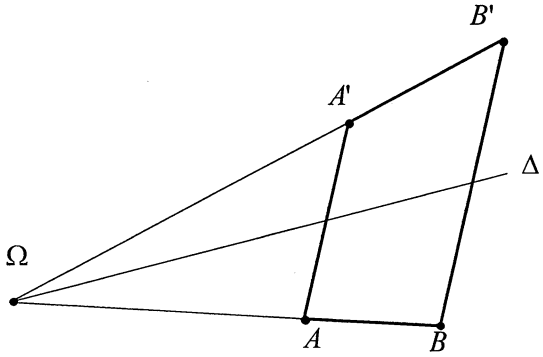


Fig. 111

$\overline{S}_{\Omega, A \mapsto A'}$ lorsque les droites (AB) et $(A'B')$ sont sécantes en Ω.

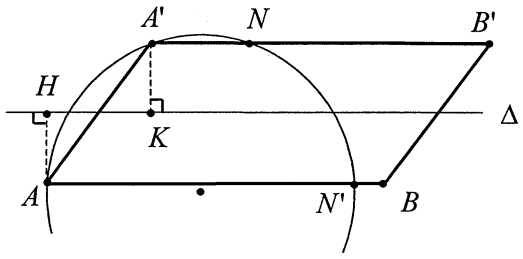


Fig. 112

La réflexion glissée $S_{\Delta, \overrightarrow{HK}}$ lorsque les droites (AB) et $(A'B')$ sont parallèles[2], c'est-à-dire lorsque $ABB'A'$ est un parallélogramme.

7.2 Composée de similitudes

7.2.1 Composée de similitudes inverses

Théorème 12 *Si S_1 (resp. S_2) est une similitude **inverse** de $\mathscr{P}$ de rapport λ_1 (resp. λ_2) et d'axe Δ_1 (resp. Δ_2) alors $S_2 \circ S_1$ est une similitude **directe** de rapport $\lambda_1 \lambda_2$ et d'angle $2(\widehat{\vec{\delta}_1, \vec{\delta}_2})$, où $\vec{\delta}_1$ (resp. $\vec{\delta}_2$) désigne un vecteur directeur de Δ_1 (resp. Δ_2).*

Démonstration

La démarche est la même que celle développée pour la composition des similitudes directes. Outre l'associativité de la composition des applications, on utilise le fait que l'homothétie vectorielle commute avec n'importe quelle application linéaire de $\overrightarrow{\mathscr{P}}$.

On a ainsi, en notant $\widetilde{s}_{\vec{\delta}_1}$ (resp. $\widetilde{s}_{\vec{\delta}_2}$) la réflexion vectorielle de droite $\mathbb{R}\vec{\delta}_1$ (resp. $\mathbb{R}\vec{\delta}_2$) :

$$S_2 \widetilde{\circ} S_1 = \left(\widetilde{s}_{\vec{\delta}_2} \circ \lambda_2 \widetilde{I}\right) \circ \left(\widetilde{s}_{\vec{\delta}_1} \circ \lambda_1 \widetilde{I}\right) = \left(\widetilde{s}_{\vec{\delta}_2} \circ \widetilde{s}_{\vec{\delta}_1}\right) \circ \lambda_1 \lambda_2 \widetilde{I} = \widetilde{S}_{\lambda_1 \lambda_2, \alpha} \text{ avec } \alpha = 2(\widehat{\vec{\delta}_1, \vec{\delta}_2})$$

d'où le résultat annoncé.

---

[2] Dans ce cas encore, l'image par S d'un point N de $(A'B')$ est le point N', si possible autre que A, de l'intersection de (AB) et du cercle $NA'A$. (On laisse au lecteur le soin de justifier ces résultats).

Une remarque utile

*Le carré $S \circ S$ – noté S^2 – d'une similitude inverse S de centre Ω et de rapport λ est l'**homothétie** h_{Ω,λ^2} de centre Ω et de rapport λ^2.*

Démonstration

Soit $\vec{k}$ un vecteur directeur de l'axe de S. Alors :

– d'une part S^2 fixe le point Ω

– d'autre part $\widetilde{S^2} = \widetilde{S} \circ \widetilde{S} = \widetilde{S}_{\lambda^2,\beta}$ avec $\beta = 2\,\widehat{(\vec{k},\vec{k})}$, et donc $\widetilde{S^2} = \lambda^2 \widetilde{I}$.

Les applications affines S^2 et h_{Ω,λ^2} ont donc même action sur le point Ω et même associée vectorielle.

Conclusion : $S^2 = h_{\Omega,\lambda^2}$.

7.2.2 Composée d'une similitude directe et d'une similitude inverse

Soit S (resp. Σ) une similitude directe (resp. inverse)

$\widetilde{S}$ est la composée d'une rotation vectorielle $\widetilde{r}$ et d'une homothétie $\lambda \widetilde{I}$

$\widetilde{\Sigma}$ est la composée d'une réflexion vectorielle $\widetilde{s}$ et d'une homothétie $\mu \widetilde{I}$

Il en découle que

$\widetilde{S \circ \Sigma} = \widetilde{S} \circ \widetilde{\Sigma} = (\widetilde{r} \circ \widetilde{s}) \circ \lambda\mu \widetilde{I}$ et $\widetilde{\Sigma \circ S} = \widetilde{\Sigma} \circ \widetilde{S} = (\widetilde{s} \circ \widetilde{r}) \circ \lambda\mu \widetilde{I}$.

Comme $\widetilde{r} \circ \widetilde{s}$ et $\widetilde{s} \circ \widetilde{r}$ sont des réflexions vectorielles, on peut conclure par l'énoncé suivant :

Théorème 13 *La composée d'une similitude directe et d'une similitude inverse est une similitude inverse.*

7.3 Exercices résolus

Exercice 1

Étant donné un triangle PQR, rappelons que la symédiane issue de P de ce triangle est la symétrique de la médiane (PM) par rapport à l'une ou à l'autre des bissectrices des droites (PQ) et (PR).

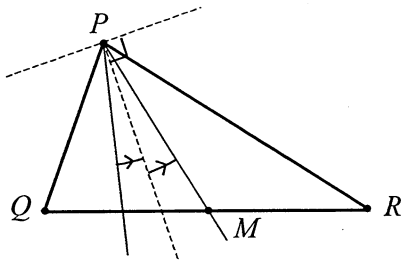


Fig. 113

1) Soit un cercle $\mathscr{C}$ et un point Ω n'appartenant pas à ce cercle. Deux droites Δ_1 et Δ_2 passant par Ω coupent le cercle $\mathscr{C}$, la première en A et C, la deuxième en B et D. Montrer que la médiane issue de Ω d'un des triangles ΩAB et ΩCD est une symédiane de l'autre.

2) Application au triangle rectangle

Soit un triangle ABC rectangle en A ; A' le milieu de $[BC]$; H le projeté orthogonal de A sur (BC) ; I et J les projetés orthogonaux de H sur (CA) et (AB).

Montrer que :

• les points B, C, I et J sont cocycliques ;

• la droite (AH) est à la fois hauteur et symédiane du triangle ABC ;

• les droites (AA') et (IJ) sont orthogonales.

Solution

1) Considérons la similitude inverse S de centre Ω qui envoie A sur D ($S = \overline{S}_{\Omega, A \mapsto D}$)

Cette similitude envoie B sur C – voir théorème 11 – et donc transforme le milieu M de $[AB]$ en celui, M' de $[CD]$.

Le schéma : $(\Omega M) \xrightarrow{S} (\Omega M')$ montre que les droites (ΩM) et $(\Omega M')$ sont symétriques par rapport à la bissectrice Δ des demi-droites $[\Omega A)$ et $[\Omega D)$.

Autrement dit, la médiane issue de Ω d'un des triangles ΩAB et ΩCD est symédiane de l'autre.

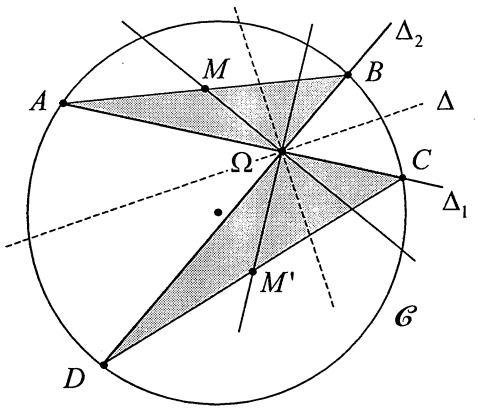


Fig. 114

2) ◆ Nous avons :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH} \quad \text{car} \quad (JH)\perp(AB)$$
$$= \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AH} \quad \text{car} \quad (BC)\perp(AH)$$
$$= \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AI} \quad \text{car} \quad (HI)\perp(AC)$$

Les points B, J, I, C sont donc cocycliques.

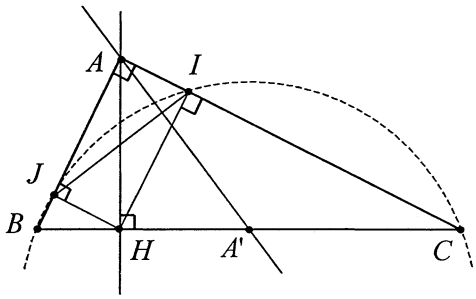


Fig. 115

◆ Le triangle ABC étant rectangle en A fait que le quadrilatère $AIHJ$ est un rectangle. Il est alors manifeste que la diagonale (AH) de ce rectangle est une médiane du triangle AIJ.

Appliquons maintenant le résultat de la première question aux triangles ABC et AIJ :

– En premier lieu, la médiane (AH) du triangle AIJ est symédiane du triangle ABC. Autrement dit, pour le triangle ABC rectangle en A, la droite (AH) est à la fois hauteur et symédiane.

– En second lieu, la médiane (AA') du triangle ABC est symédiane du triangle AIJ. Comme le triangle AIJ est rectangle en A, sa symédiane (AA') est aussi une de ses hauteurs. Les droites (AA') et (IJ) sont donc orthogonales.

Exercice 2 (d'après Lebossé-Hémery)

Soit un triangle ABC ; A_1, B_1, C_1 les pieds de ses hauteurs sur (BC), (CA) et (AB) ; P et Q les projetés orthogonaux de B et C sur une droite Δ donnée passant par A et autre que (AA_1).

1) Comparer les triangles ABC et A_1PQ.

2) Comparer les triangles PBB_1 et QC_1C.

Solution

1) Désignons par S la similitude inverse qui envoie B sur P et C sur Q. Observons alors que : (voir figures ci-après).

- S est la réflexion ayant pour axe la médiatrice commune des segments $[BP]$ et $[CQ]$ lorsque les droites Δ et (BC) sont parallèles.
- Sinon S a pour centre le point de concours Ω des droites Δ et (BC).

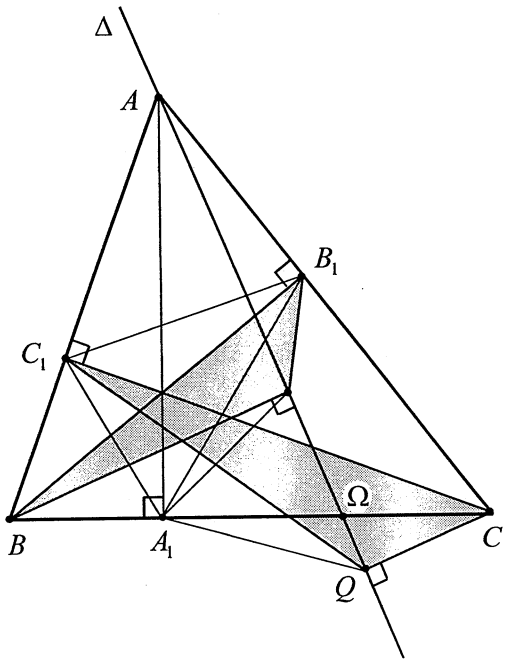


Fig. 116

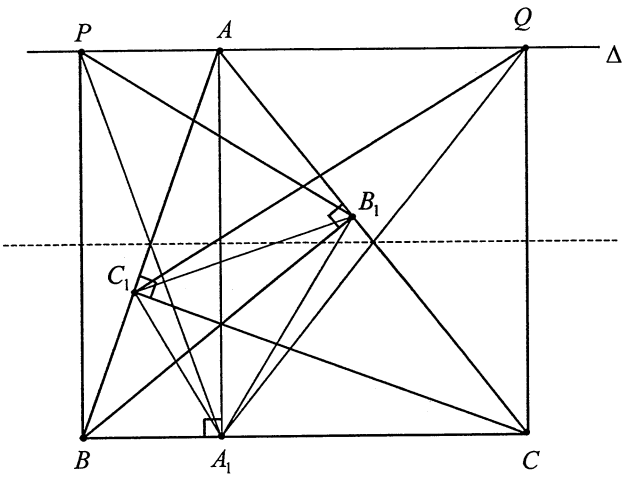


Fig. 117

Dans chacun de ces cas, la cocyclicité évidente des points A, B, P et A_1 entraîne que $S(A) = A_1$. Les triangles ABC et A_1PQ sont donc inversement semblables.

2) Compte tenu de la cocyclicité des points C, A, C_1, A_1 d'une part et A, B, A_1, B_1 d'autre part, on est en mesure d'affirmer :

- La similitude inverse S_1 de centre B qui envoie A sur A_1 envoie aussi C sur C_1.
- La similitude inverse S_2 de centre C qui envoie A sur A_1 envoie aussi B sur B_1.

Il en découle les schémas suivants :

$$(A,B,C) \overset{S_1}{\longmapsto} (A_1,B,C_1) \text{ et } (A,B,C) \overset{S_2}{\longmapsto} (A_1,B_1,C)$$

qui montrent que les triangles A_1BC_1 et A_1B_1C sont inversement semblables au triangle ABC.

En résumé, les triangles A_1PQ, A_1BC_1 et A_1B_1C sont inversement semblables au triangle ABC. Ces trois triangles sont donc[3] **directement semblables**.

Par suite, la similitude **directe** Σ de centre A_1 qui envoie P sur Q ($\Sigma = S_{A_1, P \mapsto Q}$) transforme B en C_1 et B_1 en C, d'où le schéma :

$(P,B,B_1) \overset{\Sigma}{\longmapsto} (Q,C_1,C)$. Les triangles PBB_1 et QC_1C sont donc directement semblables.

Remarque

Nous avons : $(A_1,P,B,B_1) \overset{\Sigma}{\longmapsto} (A_1,Q,C_1,C)$. Il s'ensuit que le triangle ayant pour sommets trois points de l'ensemble $\{A_1,P,B,B_1\}$ est directement semblable au triangle dont les sommets sont les images, par Σ, des trois point choisis.

---

[3] Nous avons, par exemple : $(A_1,P,Q) \overset{S^{-1}}{\longmapsto} (A,B,C) \overset{S_1}{\longmapsto} (A_1,B,C_1)$. Les triangles A_1PQ et A_1BC_1 sont alors directement semblables car la composée $S_1 \circ S^{-1}$ est une similitude directe (voir théorème 12).

Exercice 3

Soit un triangle ABC ; A_1, B_1 et C_1 les pieds de ses hauteurs sur (BC), (CA) et (AB). Montrer que les hauteurs (AA_1), (BB_1) et (CC_1) du triangle ABC sont des bissectrices du triangle $A_1B_1C_1$.

Solution

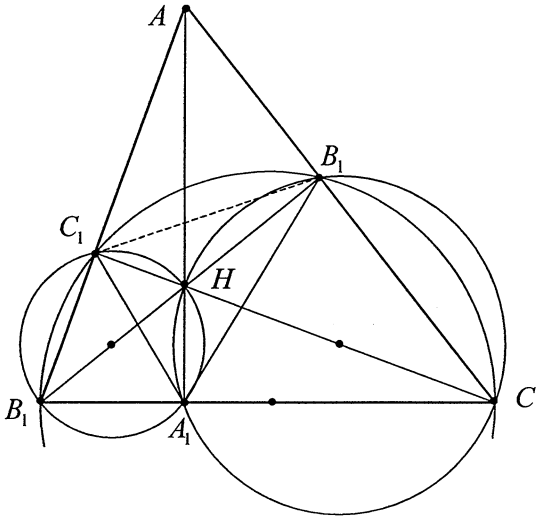


Fig. 118

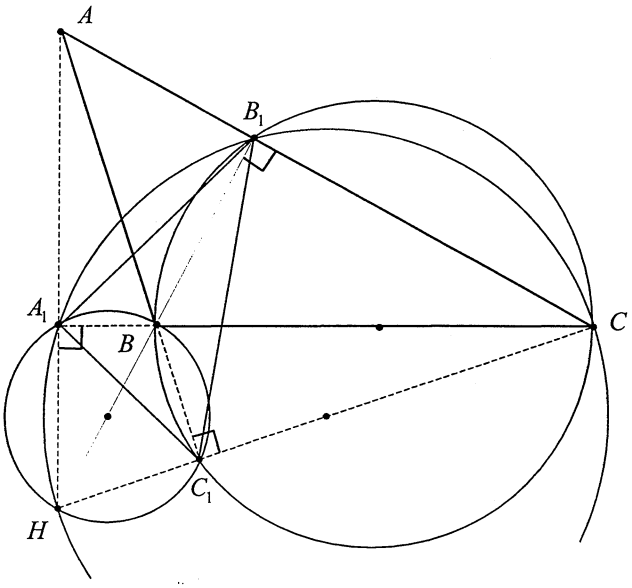


Fig. 119

Les cocyclicités (facile à justifier) des points marqués sur chacune des deux figures permettent d'élaborer le schéma suivant dans lequel sont affichées des droites et leurs transformées.

$$(A_1,B_1) \xmapsto{\bar{S}_{A,A_1\mapsto C}} \begin{cases}(C,H)\\ \text{ou encore}\\ (CC_1)\end{cases} \xmapsto{\bar{S}_{A,C\mapsto B}} \begin{cases}(B,B_1)\\ \text{ou encore}\\ (BH)\end{cases} \xmapsto{\bar{S}_{A,B\mapsto A_1}} (A_1,C_1)$$

Or, la composée de ces trois similitudes **inverses** est une similitude **inverse** S qui fixe les points A et A_1. S est donc la réflexion de droite (AA_1).

Récapitulons : la réflexion de droite (AA_1) transforme la droite (A_1B_1) en la droite (A_1C_1). Ce qui peut se traduire par :

« la hauteur (AA_1) du triangle ABC est une des deux bissectrices des droites (A_1B_1) et (A_1C_1) c'est-à-dire une des deux bissectrices issues de A_1 du triangle $A_1B_1C_1$ ».

Il va de soit qu'on obtient un résultat analogue pour les hauteurs (BB_1) et (CC_1) du triangle ABC.

Exercice 4 : Caractérisation barycentrique du pied d'une symédiane.

Soit un triangle ABC ; a, b et c les mesures des côtés $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$.

1) Montrer que le pied A_1 de la symédiane issue de A du triangle ABC est le barycentre des points $\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline b^2 & c^2 \end{array}$.

2) En déduire que les symédianes d'un triangle sont concourantes.

Solution

1. a) **Construction de la symédiane issue de A**

La similitude inverse $\overline{S}_{A,B\mapsto C}$ transforme (B,C) en (C,D) et corollairement transforme le milieu A' de $[BC]$ en celui M de $[CD]$.

Donc la droite (AM) est la symédiane issue de A du triangle ABC.

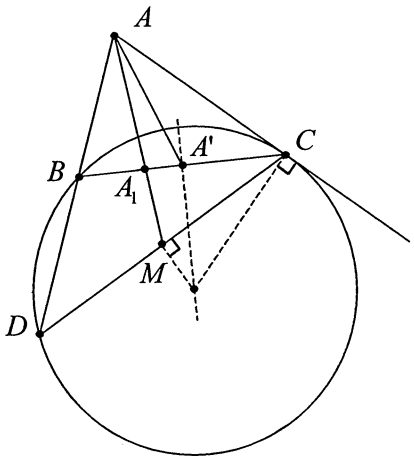


Fig. 120

b) **Caractérisation barycentrique de A_1**

Nous avons :

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{\overline{S}^2(A)\overline{S}^2(B)}=\left(\widetilde{\overline{S}}\right)^2\left(\overrightarrow{AB}\right)=\frac{b^2}{c^2}\overrightarrow{AB}$$

car $\left(\widetilde{\overline{S}}\right)^2=\frac{b^2}{c^2}\widetilde{I}$ (voir remarque page 77)

Ceci étant, il vient :

$$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{b^2}{c^2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{2c^2}\left(b^2\overrightarrow{AB}+c^2\overrightarrow{AC}\right)$$

Le vecteur $\overrightarrow{AA_1}$ étant non nul et colinéaire à $\overrightarrow{AM}$, il existe un réel non nul λ tel que $\overrightarrow{AA_1}=\lambda\left(b^2\overrightarrow{AB}+c^2\overrightarrow{AC}\right)$.

Le pied A_1 de la symédiane issue de A du triangle ABC est donc le barycentre des points $\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline b^2 & c^2 \end{array}$.

2. **Point de concours des symédianes**

Les pieds B_1 et C_1 des symédianes issues de B et de C du triangle ABC sont respectivement les barycentres de $\begin{array}{c|c} C & A \\ \hline c^2 & a^2 \end{array}$ et $\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline a^2 & b^2 \end{array}$.

Considérons maintenant le barycentre L des points $\begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline a^2 & b^2 & c^2 \end{array}$.

L est barycentre de $\begin{array}{c|c} A & A_1 \\ \hline a^2 & b^2+c^2 \end{array}$, $\begin{array}{c|c} B & B_1 \\ \hline b^2 & c^2+a^2 \end{array}$ et de $\begin{array}{c|c} C & C_1 \\ \hline c^2 & a^2+b^2 \end{array}$.

L appartient donc aux droites (AA_1), (BB_1) et (CC_1).

Autrement dit, les symédianes d'un triangle ABC sont concourantes en le point L, barycentre de $\begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline a^2 & b^2 & c^2 \end{array}$.

N.B. L est appelé **point de Lemoine** du triangle ABC.

Exercice 5

Deux demi-droites d'origine Ω_1 coupent deux demi-droites d'origine Ω_2 suivant quatre points A, B, C et D.

Montrer que les bissectrices de ces demi-droites sont orthogonales si, et seulement si les points A, B, C et D sont cocycliques.

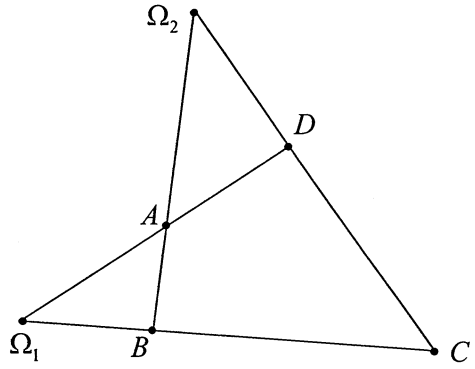


Fig. 121

Solution :

Considérons les similitudes inverses : $S_1 = \overline{S}_{\Omega_1, A \mapsto B}$ et $S_2 = \overline{S}_{\Omega_2, B \mapsto C}$. Leurs axes sont respectivement les bissectrices Δ_1 et Δ_2 des demi-droites $[\Omega_1 A)$ et $[\Omega_1 B)$ d'une part, $[\Omega_2 B)$ et $[\Omega_2 C)$ d'autre part.

♦ Si les points A, B, C et D sont cocycliques, alors on a :

$$(A,C) \xmapsto{S_2 \circ S_1} (C,A)$$

La similitude directe $S_2 \circ S_1$ est donc la symétrie centrale qui échange A et C.

En désignant par $\vec{\delta}_1$ (resp. $\vec{\delta}_2$) un vecteur directeur de Δ_1 (resp. Δ_2) on a : $2\,\widehat{(\vec{\delta}_2, \vec{\delta}_1)} = \hat{\pi}$ ... (voir théorème 12).

Autrement dit, les droites Δ_1 et Δ_2 sont orthogonales.

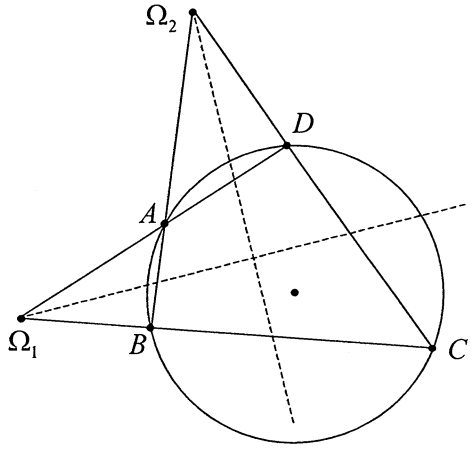


Fig. 122

♦ Si les droites Δ_1 et Δ_2 sont orthogonales, alors on a :

$$2\,\widehat{(\vec{\delta}_2, \vec{\delta}_1)} = \hat{\pi}\ .$$

La similitude directe $S_1 \circ S_2$ est donc une homothétie négative. Ceci dit, désignons par E le transformé de C par S_1, F celui de A par S_2^{-1}.

Le cercle ABC – noté Γ – passe donc par E et F.

On a alors : $(B,F) \xmapsto{S_1 \circ S_2} (E,B)$ sachant que $S_1 \circ S_2$ est une homothétie, les droites (BF) et (BE) sont parallèles. Les points B, E, F sont donc alignés et cocycliques ce qui ne peut se produire que dans le cas où $E = F = D$. Ainsi $D \in \Gamma$.

Autrement dit : les points A, B, C et D sont cocycliques.

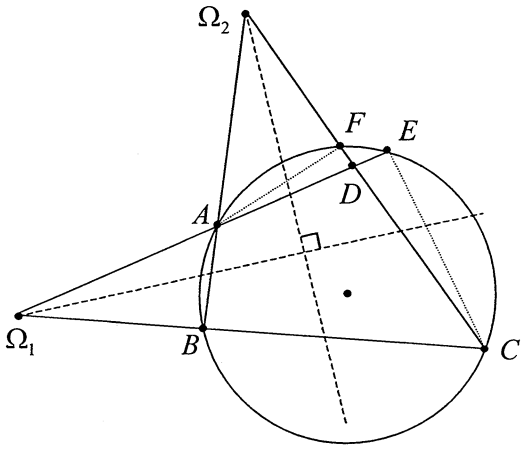


Fig. 123

PROBLÈME (résolu)

PREMIÈRE PARTIE

Dans un plan $\mathscr{P}$ muni d'une unité de longueur, on considère un triangle ABC. On note a, b, c les mesures des segments $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$.

1. On désigne par :

   D le point d'intersection, si possible autre que B, de la droite (BC) et du cercle Γ_1, tangent en A, à la droite (AC) et passant par B.

   E le point d'intersection, si possible autre que C, de la droite (BC) et du cercle $\mathscr{C}_1$, tangent en A, à la droite (AB) et passant par C.

   a) Montrer que les triangles DAC et EBA sont directement semblables.

   b) Positionner le centre I de la similitude directe qui transforme le triangle DAC en le triangle EBA.

   c) Justifier que la droite (IA) est :

   - la bissectrice des demi-droites $[IB)$ et $[IC)$;
   - la symédiane issue de A du triangle ABC

   d) Examiner le cas particulier où le triangle ABC est rectangle en A.

2. On désigne par :

   F le point d'intersection, si possible autre que C, de la droite (CA) et du cercle Γ_2 tangent en D à la droite (AD) et passant par C.

   G le point d'intersection, si possible autre que B, de la droite (AB) et du cercle $\mathscr{C}_2$ tangent en E à la droite (AE) et passant par B.

   Montrer que :

   a) Les triangles FAD et GEA sont directement semblables au triangle ABC.

   b) Les triangles FAD et GEA sont isométriques.

   c) Les points D, A, E, G et F sont cocycliques.

3. a) Positionner le centre J de la similitude directe qui transforme le triangle ABC en le triangle FAD.

   b) Montrer que le cercle AFJ – noté Γ_3 – est tangent en A et F aux droites (AB) et (FD).

   c) Positionner le centre K de la similitude directe qui transforme le triangle ABC en le triangle GEA puis montrer que le cercle AGK – noté $\mathscr{C}_3$ – est tangent en A et G à deux droites que l'on précisera.

4. Montrer que :

   a) les paires de demi-droites $[AB)$, $[AC)$ et $[AJ)$, $[AK)$ ont la même bissectrice.

   b) les paires de demi-droites $[BC)$, $[BA)$ et $[BJ)$, $[BK)$ ont la même bissectrice.

   c) les paires de demi-droites $[CA)$, $[CB)$ et $[CJ)$, $[CK)$ ont la même bissectrice.

5. Montrer que :

   a) $\widehat{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AK})} = \widehat{(\overrightarrow{AJ},\overrightarrow{AC})} = \widehat{(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BK})} = \widehat{(\overrightarrow{BJ},\overrightarrow{BA})} = \widehat{(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CK})} = \widehat{(\overrightarrow{CJ},\overrightarrow{CB})}$

   b) les points J et K sont intérieurs au triangle ABC.

6. On suppose le triangle ABC non isocèle en B et en C :

   a) Montrer que la droite (IA) est une bissectrice des droites (IJ) et (IK).

   b) Examiner les cas où le triangle ABC est isocèle en B ou en C.

DEUXIÈME PARTIE

On désigne par P, Q et R les symétriques du point K par rapport aux droites (AB), (BC) et (CA).

1. Montrer que :

   a) le triangle PQR est directement semblable au triangle ABC ;

   b) le centre du cercle PQR est le point J ;

   c) les points J et K sont les foyers d'une ellipse $\mathscr{E}$ tangente aux trois côtés du triangle ABC. On note A', B' et C' les points de contact de l'ellipse $\mathscr{E}$ avec les droites (BC), (CA) et (AB).

2. Montrer que les points B' et C' appartiennent respectivement aux droites (DJ) et (EK).

3. Montrer que les points A', B' et C' sont les pieds des symédianes issues de A, B et C du triangle ABC.

SOLUTION DE LA PREMIÈRE PARTIE

1. a) Étude des triangles *DAC* et *EBA*

Le schéma – établi en s'appuyant sur le théorème (11) –

$$(D,A,C) \xmapsto{\bar{S}_{C,A\mapsto B}} (A,B,C) \xmapsto{\bar{S}_{B,C\mapsto A}} (E,B,A)$$

nous montre que les triangles *DAC* et *EBA* sont **directement** semblables.

b) Position du centre *I* de la similitude : $(D,A,C) \xmapsto{S_I} (E,B,A)$

Désignons par $\hat{\theta}$ l'angle de cette similitude. Nous avons :

$$2\hat{\theta} = 2\ \widehat{(\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IB})} = 2\ \widehat{(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{EB})} \overset{(*)}{=} 2\ \widehat{(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB})} \qquad (*) \text{ colinéarité de } \overrightarrow{EB} \text{ et } \overrightarrow{DB}$$

$$2\hat{\theta} = 2\ \widehat{(\overrightarrow{IC},\overrightarrow{IA})} = 2\ \widehat{(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{EA})} \overset{(*)}{=} 2\ \widehat{(\overrightarrow{EC},\overrightarrow{EA})} \qquad (*) \text{ colinéarité de } \overrightarrow{DC} \text{ et } \overrightarrow{EC}$$

Dès lors, les égalités :

$$2\ \widehat{(\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IB})} = 2\ \widehat{(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB})}$$

$$2\ \widehat{(\overrightarrow{IC},\overrightarrow{IA})} = 2\ \widehat{(\overrightarrow{EC},\overrightarrow{EA})}$$

traduisent respectivement que *I* appartient aux cercles *DAB* et *ECA* c'est-à-dire aux cercles Γ_1 et $\mathscr{C}_1$. En outre, on ne peut avoir $I = A$ car *A* n'est pas un point fixe de la similitude directe S_I. Donc *I* est le point d'intersection, autre que *A*, des cercles Γ_1 et $\mathscr{C}_1$.

c) Particularités de la droite (IA)

- De $\hat{\theta} = \widehat{(\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IB})} = \widehat{(\overrightarrow{IC},\overrightarrow{IA})}$ on déduit que la droite (IA) est la bissectrice des demi-droites $[IB)$ et $[IC)$.
- Le point d'intersection A_1 de (IA) et (BC) est, on le sait, barycentre du système $\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline IC & IB \end{array}$, soit $\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline 1 & IB/IC \end{array}$.

Or, $\dfrac{IB}{IC} = \dfrac{IB}{IA} \times \dfrac{IA}{IC} = \left(\dfrac{AB}{AC}\right)^2$ car chacun des quotients $\dfrac{IB}{IA}$, $\dfrac{IA}{IC}$, et $\dfrac{AB}{AC}$ expriment le rapport de la similitude S_I.

A_1 est donc le barycentre de $\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline 1 & c^2/b^2 \end{array}$, soit $\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline b^2 & c^2 \end{array}$, ce qui prouve que A_1 est le pied de la symédiane issue de *A* du triangle *ABC*.

La droite (IA) est donc la symédiane issue de *A* du triangle *ABC*.

d) Cas où le triangle *ABC* est rectangle en *A*

Les points *D*, *E* et *I* sont confondus avec le projeté orthogonal *H* de *A* sur la droite (BC) (voir figure 125).

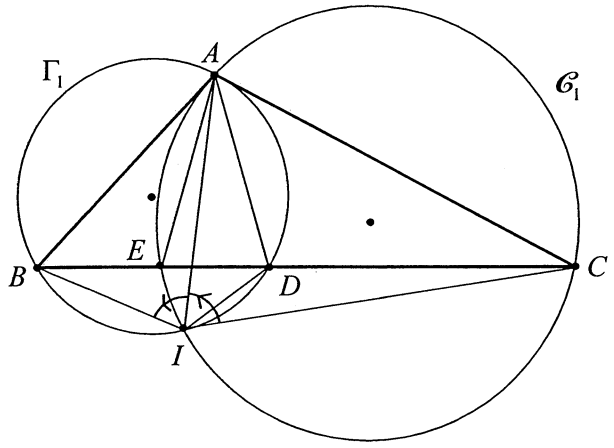


Fig. 124

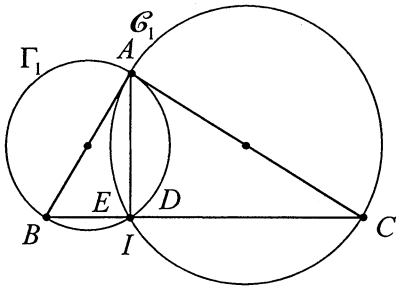


Fig. 125

2. a) Étude des triangles *ABC*, *FAD* et *GEA*

Le schéma – établi en s'appuyant sur le théorème 11 –

$$(F,A,D) \xmapsto{\bar{S}_{A,D\mapsto C}} (D,A,C) \xmapsto{\bar{S}_{C,A\mapsto B}} (A,B,C) \xmapsto{\bar{S}_{B,C\mapsto A}} (E,B,A) \xmapsto{\bar{S}_{A,B\mapsto E}} (G,E,A)$$

$$\xrightarrow{\qquad\qquad S_I \qquad\qquad}$$

nous montre que les triangles *ABC*, *FAD* et *GEA* sont **directement** semblables.

b) Étude particulière des triangles *FAD* et *GEA*

Lorsque le triangle *ABC* est rectangle en *A*, on a banalement : $AD = AE$.

Sinon, on obtient :

$$2\,\widehat{(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DE})} = 2\,\widehat{(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC})} \qquad \text{colinéarité de } \overrightarrow{DE} \text{ et } \overrightarrow{DC}$$

$$= 2\,\widehat{(\overrightarrow{EB},\overrightarrow{EA})} \qquad \text{effet de } S_I \text{ ... voir schéma ci-dessus.}$$

$$= 2\,\widehat{(\overrightarrow{ED},\overrightarrow{EA})}$$

On est donc assuré que le triangle *DAE* est isocèle en *A*. Autrement dit l'égalité $AD = AE$ est encore vérifiée.

Ceci étant, le côtés homologues $[AD]$ et $[EA]$ des triangles directement semblables *FAD* et *GEA* ont même mesure. Il s'ensuit que ces triangles sont isométriques.

La composée des quatre similitudes inverses mises en jeu dans le schéma précédent est la rotation qui envoie *A* sur *E* et *D* sur *A*. Son centre est celui du cercle (*DAE*).

c) Cocyclicité des points *D*, *A*, *E*, *G* et *F*

L'appartenance des points *F* et *G* au cercle (*DAE*) résulte des égalités suivantes :

- $2\,\widehat{(\overrightarrow{FA},\overrightarrow{FD})} = -2\,\widehat{(\overrightarrow{EB},\overrightarrow{EA})}$ effet de $S_I \circ \bar{S}_{A,D\mapsto C}$ (voir schéma ci-dessus)

$$= 2\,\widehat{(\overrightarrow{EA},\overrightarrow{EB})}$$

$$= 2\,\widehat{(\overrightarrow{EA},\overrightarrow{ED})} \qquad \text{colinéarité de } \overrightarrow{EB} \text{ et } \overrightarrow{ED}$$

- $2\ \widehat{(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DE})} = 2\ \widehat{(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC})}$ colinéarité de $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{DC}$

$= -2\ \widehat{(\overrightarrow{GE},\overrightarrow{GA})}$ effet de $\overline{S}_{A,B\mapsto E} \circ S_I$ (voir schéma ci-dessus)

$= 2\ \widehat{(\overrightarrow{GA},\overrightarrow{GE})}$

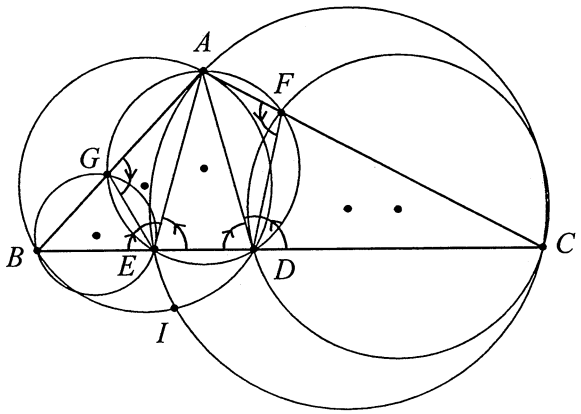


Fig.126

3. a) Position du centre J de la similitude directe : $(A,B,C) \longmapsto^{S_J} (F,A,D)$

Désignons par $\hat{\varepsilon}$ l'angle de la similitude S_J. Nous avons :

- $2\hat{\varepsilon} = 2\ \widehat{(\overrightarrow{JB},\overrightarrow{JA})} = 2\ \widehat{(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{AD})} = 2\ \widehat{(\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DA})}$ colinéarité de $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{DB}$; $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{DA}$.

L'égalité $2\ \widehat{(\overrightarrow{JB},\overrightarrow{JA})} = 2\ \widehat{(\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DA})}$ nous dit que J appartient au cercle BAD c'est-à-dire à Γ_1.

- $2\hat{\varepsilon} = 2\ \widehat{(\overrightarrow{JC},\overrightarrow{JD})} = 2\ \widehat{(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{AD})} = 2\ \widehat{(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DA})}$ colinéarité de $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{DC}$; $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{DA}$.

L'égalité $2\ \widehat{(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC})} = 2\ \widehat{(\overrightarrow{JD},\overrightarrow{JC})}$ qui en découle nous dit que A appartient à la tangente en D au cercle (DJC). Autrement dit J appartient au cercle Γ_2. Dès lors, il est clair que J est le point d'intersection, autre que D, des cercles Γ_1 et Γ_2. En effet, on ne peut avoir $J = D$ car $D = S_J(C)$.

b) Particularités du cercle (AFJ)

Nous avons encore :

d'une part : $2\hat{\varepsilon} = 2\ \widehat{(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{AF})} = 2\ \widehat{(\overrightarrow{JA},\overrightarrow{JF})}$.

Cette égalité nous dit que B appartient à la tangente en A au cercle (AFJ),

d'autre part : $2\hat{\varepsilon} = 2\ \widehat{(\overrightarrow{JA},\overrightarrow{JF})} = 2\ \widehat{(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{FD})} \overset{(*)}{=} 2\ \widehat{(\overrightarrow{FA},\overrightarrow{FD})}$ (*) colinéarité de $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{FA}$.

L'égalité $2\ \widehat{(\overrightarrow{FD},\overrightarrow{FA})} = 2\ \widehat{(\overrightarrow{JF},\overrightarrow{JA})}$ qui en découle nous dit que D appartient à la tangente en F au cercle (AFJ).

Autrement dit, le cercle (AFJ) – noté Γ_3 – est tangent en A, à la droite (AB), et en F à la droite (FD).

c) Particularités du cercle (AGK)

On montre comme précédemment que :

- K est le point d'intersection, autre que E, des cercles $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.
- Le cercle (AGK) – noté $\mathscr{C}_3$ – est tangent en A à (AC) et en G à (GE).

4. a) Particularité des paires de demi-droites $[AB)$, $[AC)$ et $[AJ)$, $[AK)$

Nous avons :

$$2\,\widehat{(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BG})} = 2\,\widehat{(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})} \overset{(*)}{=} 2\,\widehat{(\overrightarrow{EA},\overrightarrow{EG})} \qquad (*) \text{ effet de } S_{K,A\mapsto G}$$

$$= 2\,\widehat{(\overrightarrow{FA},\overrightarrow{FG})} \qquad \text{cocyclicité des points } A, G, E, F$$

$$= 2\,\widehat{(\overrightarrow{FC},\overrightarrow{FG})} \qquad \text{colinéarité de } \overrightarrow{FA} \text{ et } \overrightarrow{FC}.$$

Il s'ensuit que les points B, C, F, G sont cocycliques. On peut alors dresser le schéma suivant (voir théorème 11) :

$$(A,B,F) \overset{\bar{S}_{A,B\mapsto C}}{\longmapsto} (A,C,G)$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{cercle passant par } A \text{ et } B\\ \text{tangent à } (AF)\end{array}\right\} \quad \Gamma_1 \longmapsto \mathscr{C}_1 \quad \left\{\begin{array}{l}\text{cercle passant par } A \text{ et } C\\ \text{tangent à } (AG)\end{array}\right.$$

$$\Gamma_3 \longmapsto \mathscr{C}_3$$

$$\text{d' où l' on tire :} \quad \{A,J\} = \Gamma_1 \cap \Gamma_3 \longmapsto \mathscr{C}_1 \cap \mathscr{C}_3 = \{A,K\}$$

$$\text{puis :} \quad J \longmapsto K$$

Les demi-droites $[AB)$, $[AC)$ et $[AJ)$, $[AK)$ ont donc la même bissectrice.

b) Étude des paires de demi-droites $[BC)$, $[BA)$ et $[BJ)$, $[BK)$

Nous avons (voir théorème 11) :

$$(B,A,D,C) \overset{\bar{S}_{B,C\mapsto A}}{\longmapsto} (B,E,G,A)$$

$$\text{on en déduit :} \quad \Gamma_1 \longmapsto \mathscr{C}_2$$

$$\Gamma_2 \longmapsto \mathscr{C}_3$$

$$\text{puis :} \quad \{D,J\} = \Gamma_1 \cap \Gamma_2 \longmapsto \mathscr{C}_2 \cap \mathscr{C}_3 = \{G,K\}$$

$$\text{et enfin :} \quad J \longmapsto K$$

Les demi-droites $[BC)$, $[BA)$ et $[BJ)$, $[BK)$ ont la même bissectrice.

c) Étude des paires de demi-droites $[CA)$, $[CB)$ et $[CJ)$, $[CK)$

De même :

$$(C,F,D,A) \overset{\bar{S}_{C,A\mapsto B}}{\longmapsto} (C,E,A,B)$$

$$\text{on en déduit :} \quad \Gamma_2 \longmapsto \mathscr{C}_1$$

$$\Gamma_3 \longmapsto \mathscr{C}_2$$

$$\text{puis :} \quad \{F,J\} = \Gamma_2 \cap \Gamma_3 \longmapsto \mathscr{C}_1 \cap \mathscr{C}_2 = \{E,K\}$$

$$\text{et enfin :} \quad J \longmapsto K$$

Les paires de demi-droites $[CA)$, $[CB)$ et $[CJ)$, $[CK)$ ont la même bissectrice.

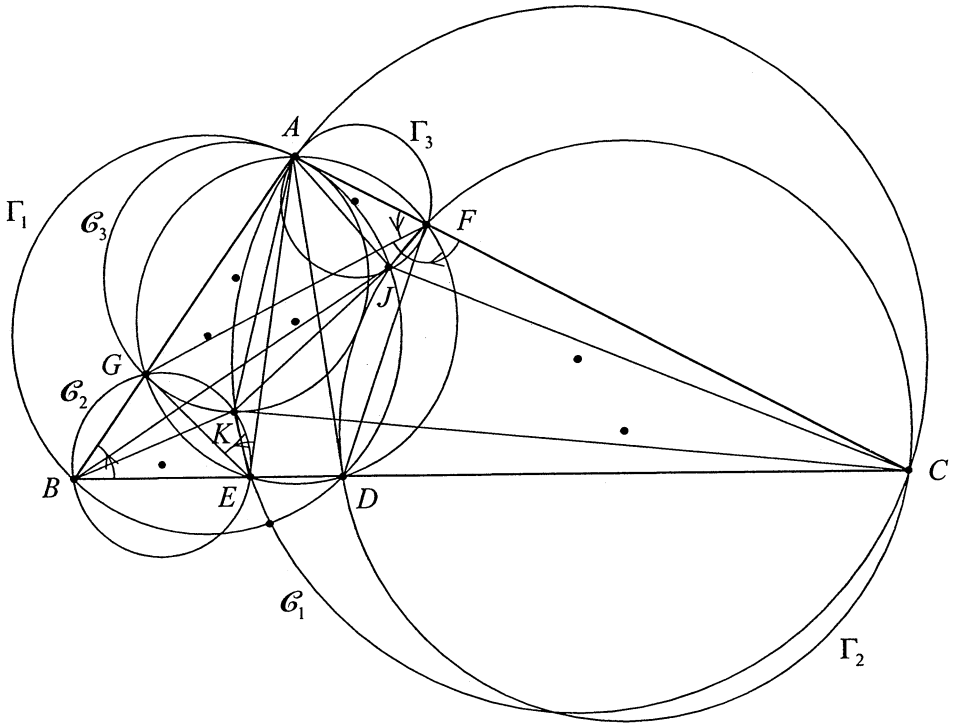


Fig.127

5. a) Égalité des angles : $\widehat{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AK})}$, $\widehat{(\overrightarrow{AJ},\overrightarrow{AC})}$, $\widehat{(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BK})}$, $\widehat{(\overrightarrow{BJ},\overrightarrow{BA})}$, $\widehat{(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CK})}$, $\widehat{(\overrightarrow{CJ},\overrightarrow{CB})}$

Nous avons successivement :

$\widehat{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AK})} = \widehat{(\overrightarrow{AJ},\overrightarrow{AC})}$ d'après le 4. a)

$\widehat{(\overrightarrow{AJ},\overrightarrow{AC})} = \widehat{(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BK})}$ effet de $\overline{S}_{C,A\mapsto B}$

$\widehat{(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BK})} = \widehat{(\overrightarrow{BJ},\overrightarrow{BA})}$ d'après le 4. b)

$\widehat{(\overrightarrow{BJ},\overrightarrow{BA})} = \widehat{(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CK})}$ effet de $\overline{S}_{A,B\mapsto C}$

$\widehat{(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CK})} = \widehat{(\overrightarrow{CJ},\overrightarrow{CB})}$ d'après le 4. c)

b) Localisation des points *J* et *K*

- De l'appartenance du point J au cercle Γ_1 privé du point A découle son appartenance au demi-plan ouvert de frontière (AC) contenant B.
- L'égalité : $2\,\widehat{(\overrightarrow{CJ},\overrightarrow{CB})} = 2\,\widehat{(\overrightarrow{AJ},\overrightarrow{AC})}$ justifie que le cercle (JAC) est tangent en C à la droite (BC) . On est ainsi assuré que le point J appartient au demi-plan ouvert de frontière (BC) contenant A.
- L'égalité : $2\,\widehat{(\overrightarrow{BJ},\overrightarrow{BA})} = 2\,\widehat{(\overrightarrow{CJ},\overrightarrow{CB})}$ justifie que le cercle (BJC) est tangent en B à la droite (AB). On est ainsi assuré que le point J appartient au demi-plan ouvert de frontière (AB) contenant C.

Il s'ensuit que le point J est un point **intérieur au triangle** ABC. On établit de façon analogue que K est intérieur au triangle ABC .

6. a) Autre particularité de la droite (*IA*)

On suppose ici le triangle *ABC* non isocèle en *B* et en *C* (voir Fig. 128).

Dans ce cas on a :

$2\ \widehat{(\overrightarrow{IJ},\overrightarrow{IA})} = 2\ \widehat{(\overrightarrow{BJ},\overrightarrow{BA})}$ cocyclicité des points *J, A, I, B*

$= 2\ \widehat{(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CK})}$ effet de $S_{A,B\mapsto C}$

$= 2\ \widehat{(\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IK})}$ cocyclicité des points *A, K, ,C, I.*

ce qui prouve que la droite (*IA*) est une bissectrice des droites (*IJ*) et (*IK*) (voir Fig. 128).

b) Cas d'exception

- Lorsque le triangle *ABC* est isocèle en *B*, on a : $C = E = F$; $\mathscr{C}_1 = \Gamma_3$ et $I = J$ (voir Fig. 133 page 93).
- Lorsque le triangle *ABC* est isocèle en *C*, on a : $B = D = G$; $\mathscr{C}_3 = \Gamma_1$ et $I = K$ (voir Fig. 132 page 93).

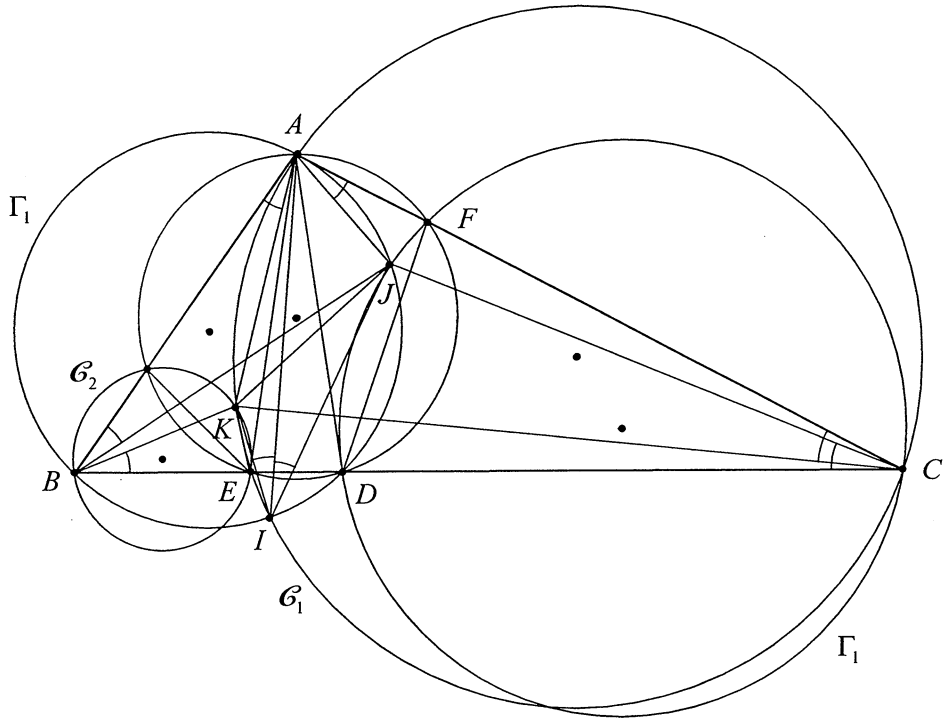


Fig.128

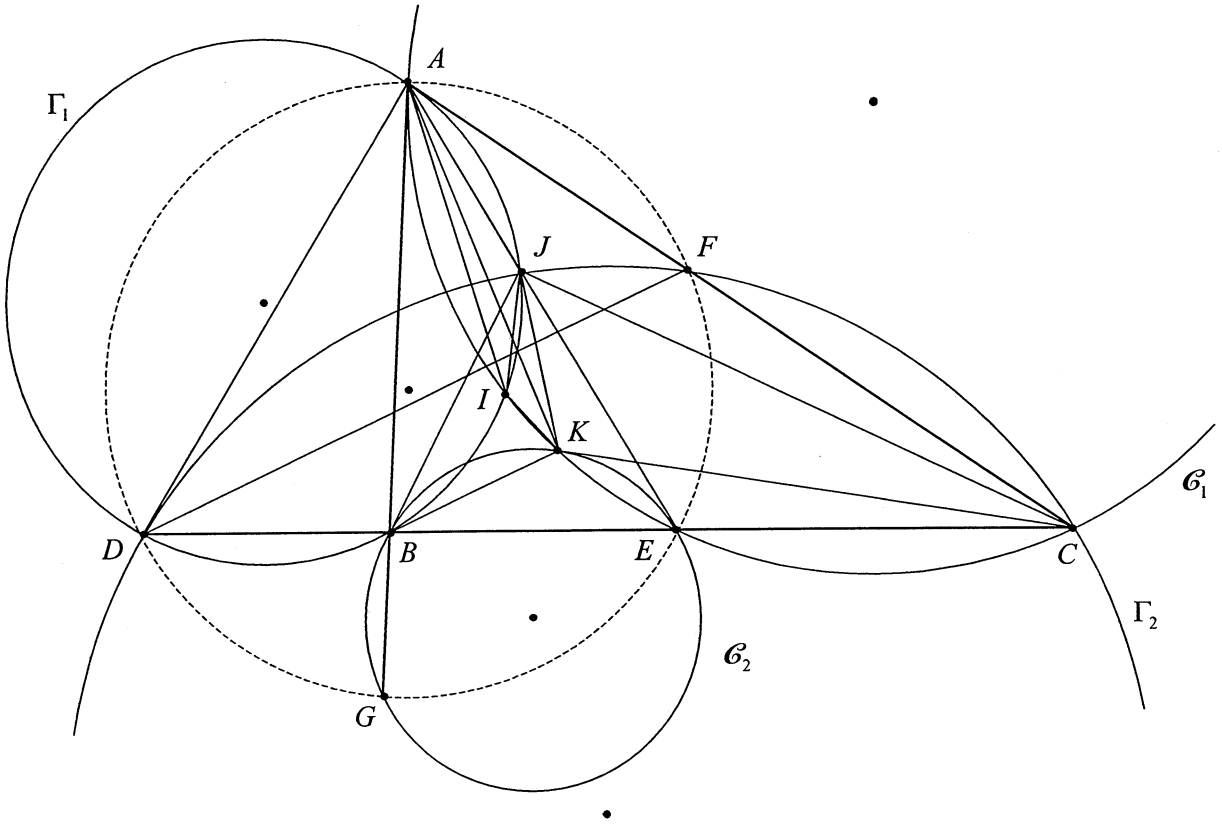


Fig.129

SOLUTION DE LA DEUXIÈME PARTIE

1. a) Étude du triangle *PQR*

Du schéma, $(A,B,C) \overset{S_{K,A\mapsto G}}{\longmapsto} (G,E,A)$ on déduit :

- **d'une part** :

  la similitude directe qui envoie A sur B et G sur E a pour centre K (théorème 7).

  Cette similitude transforme P symétrique de K par rapport à (AG) en le symétrique de K par rapport à (BE) c'est-à-dire en Q.

  On a donc : $(A,P) \overset{S_{K,G\mapsto E}}{\longmapsto} (B,Q)$.

  Il s'ensuit que la similitude directe qui envoie A sur P et B sur Q a encore pour centre K.

  Autrement dit : $B \overset{S_{K,A\mapsto P}}{\longmapsto} Q$

- **d'autre part** :

  la similitude directe qui envoie A sur C et G sur A, a pour centre K (théorème 7).

  Cette similitude transforme P symétrique de K par rapport à (AG) en le symétrique de K par rapport à (CA) c'est-à-dire en R.

  On a donc : $(A,P) \overset{S_{K,G\mapsto A}}{\longmapsto} (C,R)$.

  Il s'ensuit que la similitude directe qui envoie A sur P et C sur R a encore pour centre K.

  Autrement dit : $C \overset{S_{K,A\mapsto P}}{\longmapsto} R$.

Conclusion : le triangle PQR est directement semblable au triangle ABC.

b) Centre du cercle *PQR*

Désignons par $\mathcal{D}$ la bissectrice des demi-droites $[BC)$ et $[BA)$, et par $\vec{d}$ un vecteur directeur de cette droite.

$\mathcal{D}$ est aussi la bissectrice de $[BK)$ et $[BJ)$ (voir 4. b).

Des schémas :

$$(BQ) \xmapsto{s_{(BC)}} (BK) \xmapsto{s_{\mathscr{D}}} (BJ)$$

$$(BJ) \xmapsto{s_{\mathscr{D}}} (BK) \xmapsto{s_{(BC)}} (BP)$$

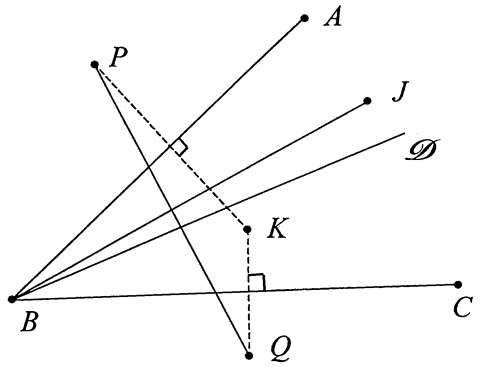


Fig. 130

On a :

$$BQ = BK = BP$$

$$\widehat{(\overrightarrow{BQ}, \overrightarrow{BJ})} = 2\ \widehat{(\overrightarrow{BC}, \vec{d})}$$

$$\widehat{(\overrightarrow{BJ}, \overrightarrow{BP})} = 2\ \widehat{(\vec{d}, \overrightarrow{BA})}$$

Or $\widehat{(\overrightarrow{BC}, \vec{d})} = \widehat{(\vec{d}, \overrightarrow{BA})}$ car $\mathscr{D}$ est la bissectrice des demi-droites $[BC)$ et $[BA)$.

Par suite, on a : $\widehat{(\overrightarrow{BQ}, \overrightarrow{BJ})} = \widehat{(\overrightarrow{BJ}, \overrightarrow{BP})}$.

La droite (BJ) est donc la bissectrice intérieure issue de B du triangle PBQ isocèle en B. Elle est donc la médiatrice du segment (PQ).

On établit de la même manière que la droite (CJ) est la médiatrice du segment $[QR]$.

Conclusion : le cercle (PQR) a donc pour centre le point J.

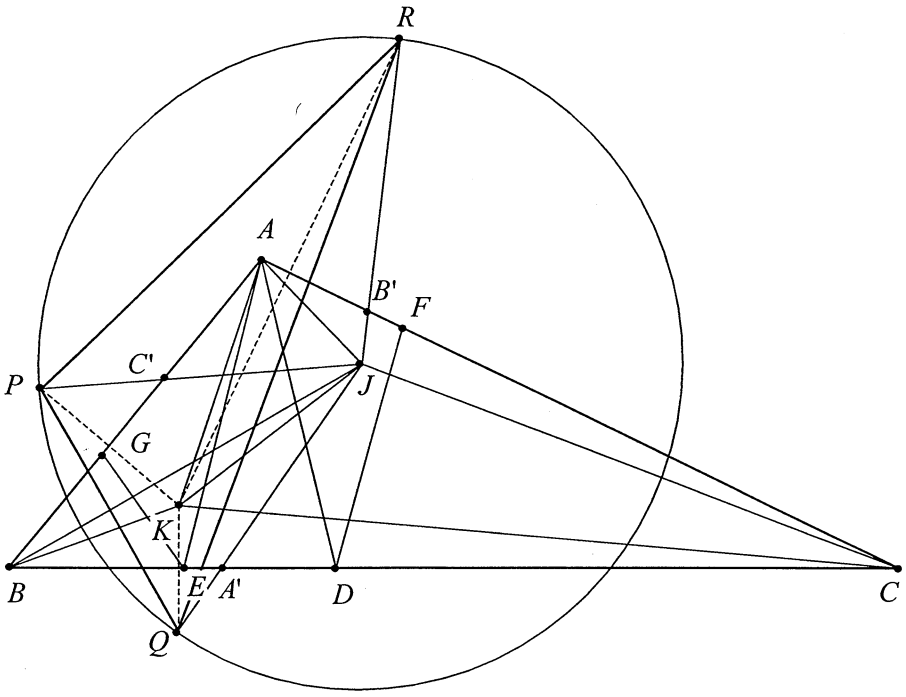


Fig.131

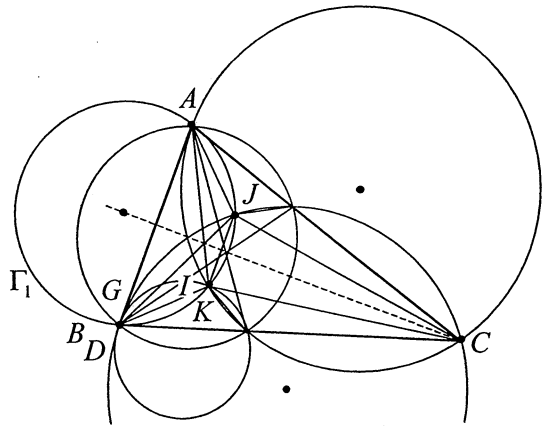


Fig.132

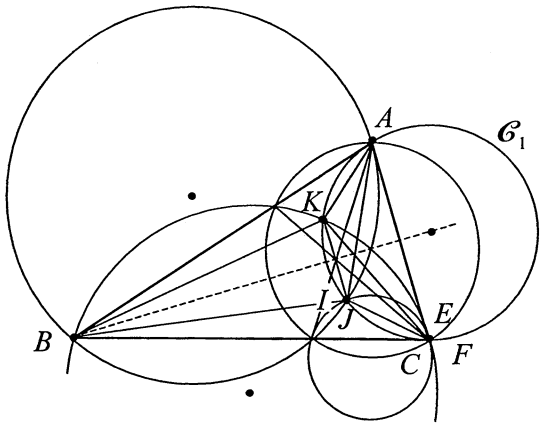


Fig.133

c) L'ellipse $\mathscr{E}$

Les points J et K étant intérieurs au triangle ABC, on est assuré que J et K sont dans le même demi-plan de frontière (BC), droite qui est médiatrice de $[KQ]$. Il s'ensuit que : $JK < JQ$.

Considérons alors l'ellipse $\mathscr{E}$ de foyers J et K admettant le cercle PQR comme cercle directeur. On sait alors que :

- les droites (BC), (CA) et (AB) sont tangentes à $\mathscr{E}$.
- les points de contacts A', B' et C' sont respectivement les points d'intersection des droites (BC) et (JQ), (CA) et (JR), (AB) et (JP).

2. a) Alignement des points *D*, *J* et *B'*

Nous avons d'une part :

$2\,\widehat{(\overrightarrow{JC},\overrightarrow{JR})} = \widehat{(\overrightarrow{JQ},\overrightarrow{JR})}$ car (JC) est la bissectrice des demi-droites $[JQ)$ et $[JR)$

$= 2\,\widehat{(\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PR})}$ car J est le centre du cercle (PQR)

d'autre part :

$2\,\widehat{(\overrightarrow{JC},\overrightarrow{JD})} = 2\,\widehat{(\overrightarrow{FC},\overrightarrow{FD})}$ cocyclicité des points C, D, J, F

$= 2\,\widehat{(\overrightarrow{FA},\overrightarrow{FD})}$ colinéarité de $\overrightarrow{FC}$ et $\overrightarrow{FA}$

or $\widehat{(\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PR})} = \widehat{(\overrightarrow{FA},\overrightarrow{FD})}$ car les triangles PQR et FAD sont directement semblables au triangle ABC.

Dès lors, l'égalité $2\,\widehat{(\overrightarrow{JC},\overrightarrow{JR})} = 2\,\widehat{(\overrightarrow{JC},\overrightarrow{JD})}$ qui en découle nous prouve que les vecteurs $\overrightarrow{JR}$ et $\overrightarrow{JD}$ sont colinéaires. Les droites (DJ) et (JR) sont donc confondues. Par suite, les points D, J et B' sont alignés.

b) Alignement des points *E*, *K* et *C'*

Considérons les points P', Q' et R' symétriques de J par rapport aux côtés (CA), (AB) et (BC) du triangle ABC.

Le cercle $(P'Q'R')$ est le cercle directeur de l'ellipse $\mathscr{E}$ relatif au foyer K.

Le point de contact C' de $\mathscr{E}$ et (AB) appartient donc à la droite (KQ').

On établit alors comme précédemment que les droites (EK) et (KQ') sont confondues. L'alignement des points E, K et C' en découle banalement.

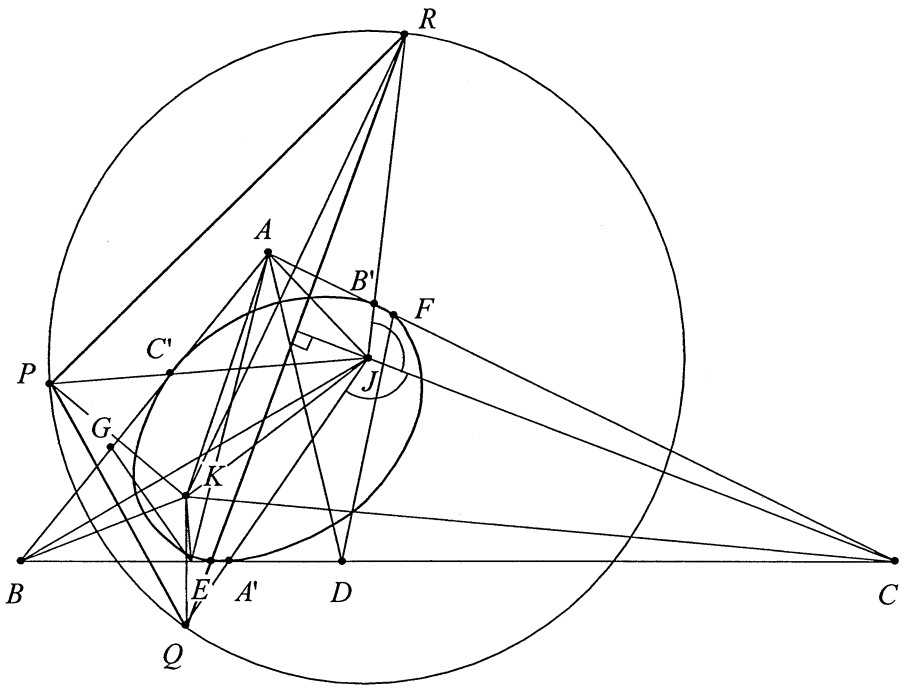


Fig.134

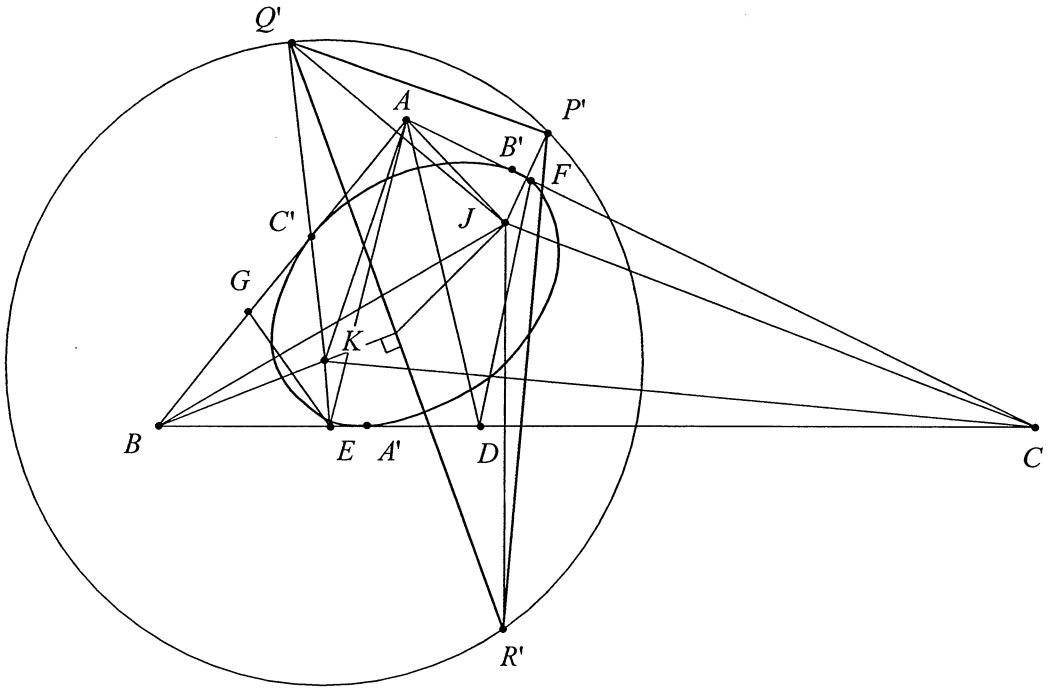


Fig.135

3. Identification des points de contacts A', B' et C'

a) Nature du point A'

• Observons d'abord que les droites (BQ) et (CJ) sont parallèles.

En effet, nous avons :

$$2\,\widehat{(\overrightarrow{BQ},\overrightarrow{BC})} = \widehat{(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BK})} \qquad \text{effet de } s_{(BC)}$$

$$= 2\,\widehat{(\overrightarrow{CJ},\overrightarrow{CB})} \qquad \text{voir 5. a) première partie}$$

$$= 2\,\widehat{(\overrightarrow{CJ},\overrightarrow{BC})}$$

d'où la colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{BQ}$ et $\overrightarrow{CJ}$.

Ceci étant, considérons la similitude inverse $\overline{S}_{A',K\mapsto J}$

On a : $\overline{S}_{A',K\mapsto J} = h_{A',Q\mapsto J} \circ s_{(BC)}$.

On en déduit : $\overline{S}_{A',K\mapsto J}(B) = h_{A',Q\mapsto J}(B) = C$ car l'image de B par l'homothétie (négative) $h_{A',Q\mapsto J}$ appartient à la droite $(A'B)$ et à la parallèle à (BQ) passant par J c'est-à-dire à (CJ).

La similitude inverse $\overline{S}_{A',K\mapsto J}$ envoie donc (B,K) sur (C,J).

Or, le schéma :

$$(B,K) \xmapsto{\overline{S}_{B,A\mapsto C}} (B,J) \xmapsto{\overline{S}_{A,B\mapsto C}} (C,K) \xmapsto{\overline{S}_{C,B\mapsto A}} (C,J)$$

nous montre que : $\overline{S}_{A',K\mapsto J} = \overline{S}_{C,B\mapsto A} \circ \overline{S}_{A,B\mapsto C} \circ \overline{S}_{B,A\mapsto C}$.

Le rapport de $\overline{S}_{A',K\mapsto J}$ est donc égal à $\dfrac{BC}{BA}\times\dfrac{AC}{AB}\times\dfrac{CA}{CB} = \dfrac{a}{c}\times\dfrac{b}{c}\times\dfrac{b}{a} = \dfrac{b^2}{c^2}$

Celui de l'homothétie $h_{A',Q\mapsto J}$ est alors égal à $-\dfrac{b^2}{c^2}$.

Comme cette homothétie transforme B en C, on a : $\overrightarrow{A'C} = -\dfrac{b^2}{c^2}\overrightarrow{A'B}$ ou encore $c^2\overrightarrow{A'C} + b^2\overrightarrow{A'B} = \vec{0}$.

Le point A' est donc le barycentre de $\begin{array}{c|c} C & B \\ \hline c^2 & b^2 \end{array}$. Autrement dit A' est le pied de la symédiane issue de A du triangle ABC.

b) Nature des points B' et C'

On établit de la même manière que B' et C' sont les pieds des symédianes issues de B et C du triangle ABC [1]. Par exemple, pour B, on considère la similitude inverse $\overline{S}_{B',K\mapsto J}$.

On a : $\overline{S}_{B',K\mapsto J} = h_{B',R\mapsto J} \circ s_{(CA)}$.

On établit que cette similitude transforme (C,K) en (A,J) de sorte que $\overline{S}_{B',K\mapsto J} = \overline{S}_{A,C\mapsto B} \circ \overline{S}_{B,C\mapsto A} \circ \overline{S}_{C,B\mapsto A}$.

Son rapport est égal à $\dfrac{CA}{CB}\times\dfrac{BA}{BC}\times\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{b}{a}\times\dfrac{c}{a}\times\dfrac{c}{b} = \dfrac{c^2}{a^2}$.

Celui de l'homothétie $h_{B',R\mapsto J}$ est alors égal à $-\dfrac{c^2}{a^2}$, d'où $\overrightarrow{B'A} = -\dfrac{c^2}{a^2}\overrightarrow{B'C}$ soit encore $a^2\overrightarrow{B'A} + c^2\overrightarrow{B'C} = \vec{0}$.

---

[1] Il suffit de procéder par "permutation circulaire".

Le point B' est le barycentre de $\begin{array}{c|c} C & A \\ \hline c^2 & a^2 \end{array}$.

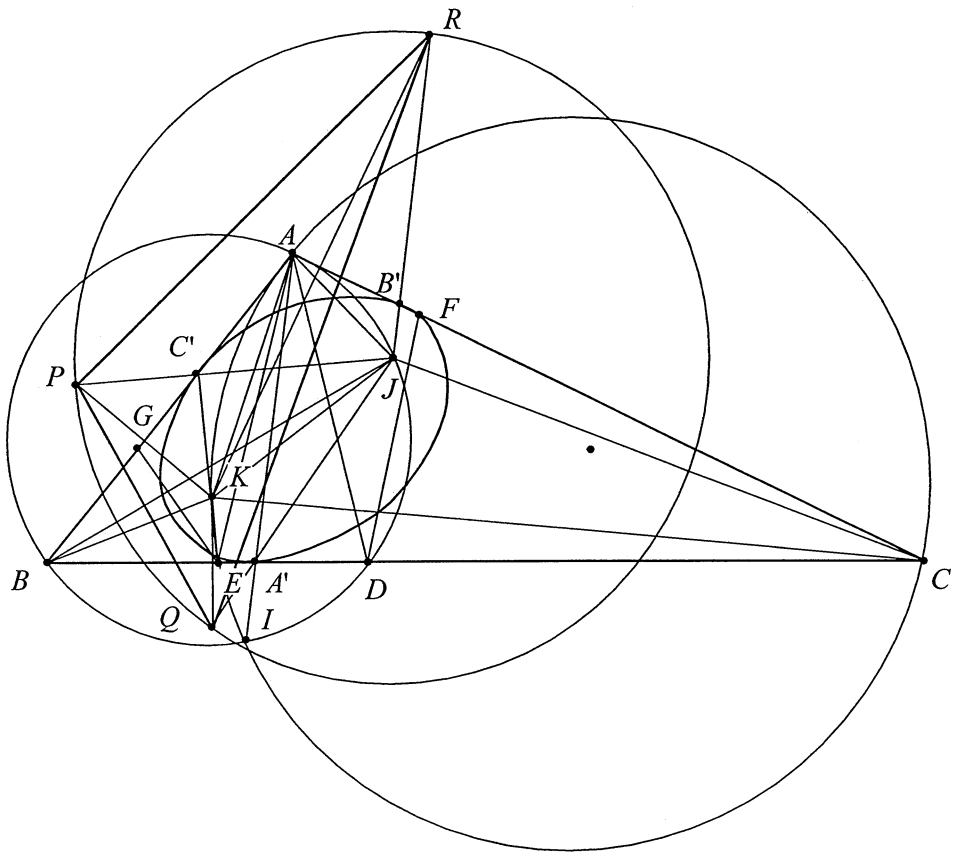


Fig. 136

Remarque. Les points I, A, A' sont alignés puisque la droite (AI) est la symédiane issue de A du triangle ABC.

8. Écriture complexe des similitudes

Dans tout ce paragraphe, le plan $\mathscr{P}$ est muni d'un repère orthonormal direct (O,I,J), ce qui permet l'identification des ensembles $\mathscr{P}$, $\overrightarrow{\mathscr{P}}$ et $\mathbb{C}$.

8.1 Écriture complexe d'une similitude directe de $\overrightarrow{\mathscr{P}}$

Une similitude directe $\tilde{S}$ de $\overrightarrow{\mathscr{P}}$ est déterminée par la donnée du transformé $\vec{i}\,'$ du vecteur $\vec{i}$. Numériquement, cette similitude est donc déterminée par la donnée de l'affixe a du vecteur $\vec{i}\,'$ ($a \in \mathbb{C}^*$).

Son rapport est alors $\dfrac{\|\vec{i}\,'\|}{\|\vec{i}\|}$ c'est-à-dire $|a|$ et son angle $(\widehat{\vec{i},\vec{i}\,'})$ est tel que : mes $(\widehat{\vec{i},\vec{i}\,'}) = \arg(a)\,[2\pi]$.

Ceci dit, soit $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ des vecteurs de $\overrightarrow{\mathscr{P}}$ d'affixes respectives Z et Z'.

$$\vec{u}' = \tilde{S}(\vec{u}) \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\|\vec{u}'\|}{\|\vec{u}\|} = |a| \\ \text{mes}(\widehat{\vec{u}',\vec{u}}) = \arg(a)\,[2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{|Z'|}{|Z|} = |a| \\ \arg\dfrac{Z'}{Z} = \arg(a)\,[2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow Z' = aZ$$

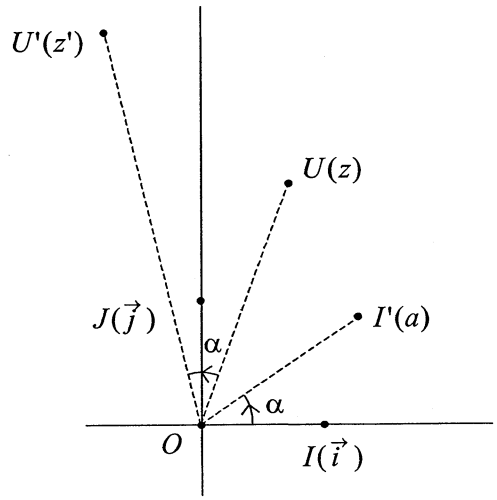


Fig. 137

L'application $\tilde{S} \mapsto a$ de l'ensemble des similitudes directes de $\overrightarrow{\mathscr{P}}$ dans l'ensemble $\mathbb{C}^*$ étant banalement bijective, on peut énoncer :

Théorème 14 et définition

- *L'application* $\tilde{S} : \overrightarrow{\mathscr{P}} \longrightarrow \overrightarrow{\mathscr{P}}$, $\vec{u}(Z) \mapsto \vec{u}'(Z')$ *est une similitude* ***directe*** *de* $\overrightarrow{\mathscr{P}}$ *si, et seulement si, il existe un nombre complexe a non nul tel que* $Z' = aZ$.

- *La relation* $Z' = aZ$ *est appelée* ***écriture complexe*** *de la similitude directe* $\tilde{S}$.

On retiendra que :

- *La similitude directe* $\tilde{S}$ *d'écriture complexe* $Z' = aZ$ *a pour rapport* $|a|$. *Son angle* $\hat{\alpha}$ *est défini par :* $\text{mes}(\hat{\alpha}) = \arg(a)\,[2\pi]$.

- *Réciproquement, la similitude directe* $\tilde{S}_{\lambda,\hat{\alpha}}$ *a pour écriture complexe* $Z' = \lambda e^{i\alpha} Z$ *où* α *est une mesure (en radians) de* $\hat{\alpha}$.

8.2 Écriture complexe d'une similitude directe de $\mathscr{P}$

Une **application affine** S de $\mathscr{P}$ est déterminée lorsqu'on connaît son action sur un point de $\mathscr{P}$ et son associée vectorielle.

Soit M et M' des points de $\mathscr{P}$ d'affixes respectives z et z'. En notant b l'affixe du point O' transformé de O par S, on a :

$$M(z) \xmapsto{S} M'(z') \text{ si, et seulement si } \overrightarrow{OM}(z) \xmapsto{\vec{S}} \overrightarrow{O'M'}(z'-b).$$

Ceci étant, il vient :

S est une similitude directe de $\mathscr{P}$ si, et seulement si, $\vec{S}$ est une similitude directe de $\vec{\mathscr{P}}$.

Ce qui est équivalent à l'existence d'un complexe a, non nul, tel que $z'-b=az$.

d'où le résultat suivant :

Théorème 15 et définition

- *L'application* $S : \mathscr{P} \longrightarrow \mathscr{P}$, $M(z) \mapsto M'(z')$ *est une* ***similitude directe*** *de* $\mathscr{P}$ *si, et seulement si, il existe deux nombres complexes a et b (a non nul) tels que* $z' = az+b$.
- *La relation* $z' = az+b$ *est appelée* ***écriture complexe*** *de la similitude directe S.*

L'étude conduite pour les similitudes vectorielles directes nous permet de conclure que :

* Si $a=1$ alors $\vec{S}=\vec{I}$ et donc S est la translation de vecteur $\vec{b}$ d'affixe b.

* Sinon S est la similitude directe :

- de centre Ω d'affixe $\dfrac{b}{1-a}$ (l'affixe ω de Ω est solution de l'équation : $z=az+b$)
- de rapport $|a|$
- d'angle $\hat{\alpha}$ est défini par : $\text{mes}(\hat{\alpha}) = \arg(a)[2\pi]$.

  Cette similitude "dégénère"

  - en rotation lorsque $|a|=1$
  - en homothétie lorsque a est un réel (non nul).

Remarque

L'équivalence des schémas

$$M(z) \xmapsto{S_{\Omega,\lambda,\hat{\alpha}}} M'(z')$$

et

$$\overrightarrow{\Omega M}(z-\omega) \xmapsto{\vec{S}_{\lambda,\hat{\alpha}}} \overrightarrow{\Omega M'}(z'-\omega)$$

fait que l'écriture complexe de la similitude directe $S_{\Omega,\lambda,\hat{\alpha}}$ de $\mathscr{P}$ est : $z'-\omega = \lambda e^{i\alpha}(z-\omega)$, ou ω est l'affixe de Ω, et α une mesure (en radians) de l'angle $\hat{\alpha}$.

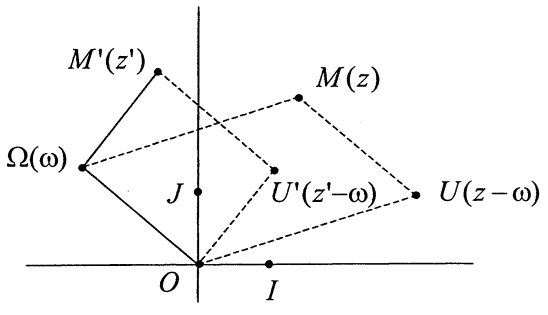


Fig. 138

8.3 Un exemple d'application immédiate de ces résultats

Dans un plan $\mathscr{P}$ supposé orienté, on donne un cercle $\mathscr{C}$ et deux points A et B de ce cercle. À tout point M de $\mathscr{C}$ on associe les points C et D définis par :

$\begin{cases} C=M & \text{lorsque } M=A \\ D=M & \text{lorsque } M=B \end{cases}$ sinon les triangles MCA et MBD sont rectangles isocèles en M et de sens direct.

Déterminer le lieu du milieu N du segment $[CD]$.

Soit O le milieu de $[AB]$ et B' le point tel que le triplet (O,B,B') puisse être considéré comme un repère orthonormal direct du plan $\mathscr{P}$.

L'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes peut alors être identifié à $\mathscr{P}$. L'affixe du point de $\mathscr{P}$ déjà désigné par une lettre majuscule sera notée avec la lettre minuscule du même nom.

Par exemple : $a=-1$, $b=1$, $b'=\mathrm{i}$.

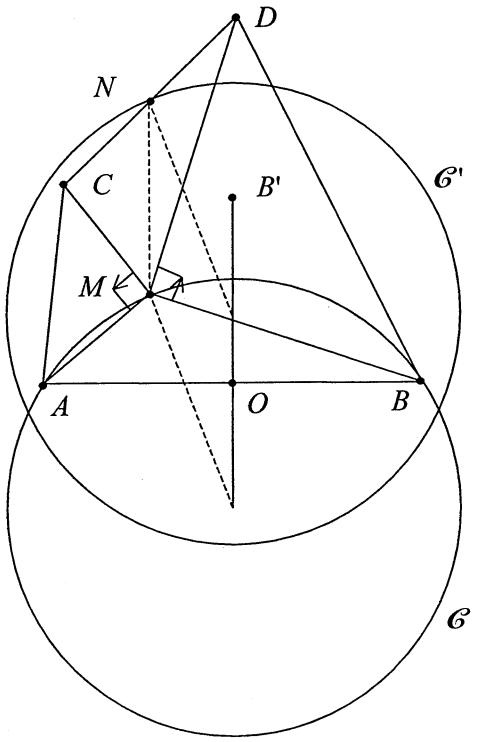


Fig. 139

a) Calcul de *n*

Considérons les similitudes vectorielles directes :

$$\tilde{S}_1 = \tilde{S}_{\sqrt{2},\pi/4} \text{ et } \tilde{S}_2 = \tilde{S}_{\sqrt{2},-\pi/4}$$

Nous avons : $\begin{cases} \overrightarrow{AC} = \tilde{S}_1(\overrightarrow{AM}) \\ \overrightarrow{BD} = \tilde{S}_2(\overrightarrow{BM}) \end{cases}$

égalités qui se traduisent numériquement par :

$$\begin{cases} c+1 = (1+\mathrm{i})(m+1) \\ d-1 = (1-\mathrm{i})(m-1) \end{cases}$$

Par addition membre à membre, on a : $c+d = 2m+2\mathrm{i}$, d'où : $n = \frac{1}{2}(c+d) = m+\mathrm{i}$.

b) Lieu de *N*

L'égalité $n = m+\mathrm{i}$ se traduit géométriquement par $N = t_{(0,B')}(M)$.

Le lieu de N est donc le cercle $\mathscr{C}'$ transformé du cercle $\mathscr{C}$ par la translation $t_{(0,B')}$.

8.4 Écriture complexe d'une similitude inverse de $\overrightarrow{\mathscr{P}}$

Une similitude inverse $\tilde{S}$ de $\overrightarrow{\mathscr{P}}$ est numériquement déterminée par la donnée de l'affixe a du transformé $\vec{i}\,'$ du vecteur $\vec{i}$.

Son rapport est $|a|$ et son axe $\mathbb{R}\vec{k}$ est représenté par la bissectrice (OK) des demi-droites $[OI)$ et $[OI')$.

Ceci dit, soit $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ des vecteurs de $\overrightarrow{\mathscr{P}}$ d'affixes respectives Z et Z'.

$$\vec{u}' = \tilde{S}(\vec{u}) \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\|\vec{u}'\|}{\|\vec{u}\|} = |a| \\ (\hat{\vec{i}},\hat{\vec{u}}') + (\hat{\vec{i}},\hat{\vec{u}}) = 2(\hat{\vec{i}},\hat{\vec{k}}) = (\hat{\vec{i}},\hat{\vec{i}}') \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{|Z'|}{|Z|} = |a| \\ \arg Z' + \arg Z = \arg(a)\,[2\pi] \end{cases}$$

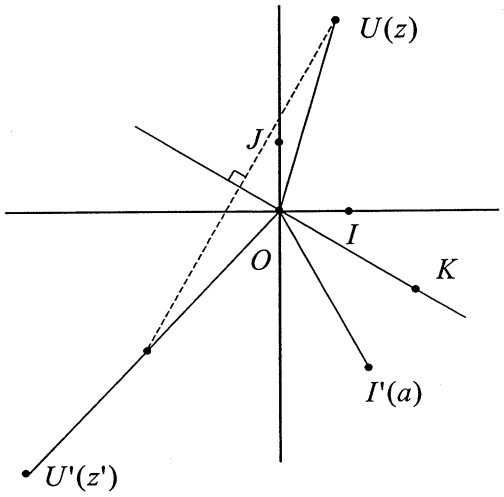


Fig. 140

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{|Z'|}{|\overline{Z}|} = |a| \\ \arg \dfrac{Z'}{\overline{Z}} = \arg(a)\,[2\pi] \end{cases} \qquad \text{car} \quad \begin{cases} |\overline{Z}| = |Z| \\ \arg \overline{Z} = -\arg Z\,[2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow Z' = a\overline{Z}$$

L'application $\tilde{S} \mapsto a$ de l'ensemble des similitudes inverses de $\overrightarrow{\mathscr{P}}$ dans l'ensemble $\mathbb{C}^*$ étant banalement bijective, on peut énoncer :

Théorème 16 et définition

- *L'application* $\begin{array}{rcl} \tilde{S} : \overrightarrow{\mathscr{P}} & \longrightarrow & \overrightarrow{\mathscr{P}} \\ \vec{u}(Z) & \mapsto & \vec{u}'(Z') \end{array}$ *est une similitude* ***inverse*** *de* $\overrightarrow{\mathscr{P}}$ *si, et seulement si, il existe un nombre complexe a non nul tel que* $Z' = a\overline{Z}$.

- *La relation* $Z' = a\overline{Z}$ *est appelée* ***écriture complexe*** *de la similitude inverse* $\tilde{S}$.

On retiendra que :

- *La similitude inverse* $\tilde{S}$ *d'écriture complexe* $Z' = a\overline{Z}$ *a pour rapport* $|a|$, *son axe* $\mathbb{R}\vec{k}$ *est défini par :* 2 *mes* $(\widehat{\vec{i}, \vec{k}}) = \arg(a)\,[2\pi]$

- *Réciproquement, la similitude inverse* $\tilde{S}_{\lambda,\vec{k}}$ *a pour écriture complexe* $Z' = \lambda e^{i2\theta}\overline{Z}$, *où* θ *est une mesure (en radians) de l'angle* $(\widehat{\vec{i}, \vec{k}})$.

8.5 Écriture complexe d'une similitude inverse de $\mathscr{P}$

Soit S une application affine de $\mathscr{P}$, M et M' des points de ce plan d'affixes respectives z et z'. En notant b l'affixe du transformé O' du point origine O, on a :

$$M(z) \xmapsto{S} M'(z') \text{ si, et seulement si, } \overrightarrow{OM}(z) \xmapsto{\tilde{S}} \overrightarrow{O'M'}(z' - b).$$

Ceci étant, il vient :

S est une similitude inverse de $\mathscr{P}$ si, et seulement si, $\tilde{S}$ est une similitude inverse de $\overrightarrow{\mathscr{P}}$.

Ce qui est équivalent à l'existence d'un complexe a, non nul, tel que $z' - b = a\overline{z}$.

d'où le résultat suivant :

Théorème 17 et définition

- *L'application* $\begin{array}{rcl} S : \mathscr{P} & \longrightarrow & \mathscr{P} \\ M(z) & \mapsto & M'(z') \end{array}$ *est une* ***similitude inverse*** *de* $\mathscr{P}$ *si, et seulement si, il existe deux nombres complexes a et b (a non nul) tels que* $z' = a\overline{z} + b$.

- *La relation* $z' = a\overline{z} + b$ *est appelée* ***écriture complexe*** *de la similitude inverse S.*

L'étude conduite pour les similitudes vectorielles inverses nous permet de conclure que :

* Si $|a| = 1$ alors $\tilde{S}$ est la réflexion vectorielle d'axe dirigé par un vecteur $\vec{k}$ défini par :
2 mes $(\widehat{\vec{i}, \vec{k}}) = \arg(a)\,[2\pi]$.

S est donc la réflexion glissée :

– dont l'axe est dirigé par le vecteur $\vec{k}$ et passe le point d'affixe $\frac{b}{2}$ milieu de $[OO']$.

Cette réflexion glissée peut éventuellement se réduire à une simple réflexion.

* Sinon S est la similitude inverse :

– de centre Ω d'affixe ω solution de l'équation : $z = a\bar{z} + b$

– de rapport $|a|$

– d'axe Δ, la droite Δ étant la bissectrice des demi-droites $[\Omega O)$ et $[\Omega O')$.

À toutes fins utiles, on notera que :

- le centre Ω appartient au cercle ensemble des points $M(z)$ tels que $\frac{|z-b|}{|z|} = |a|$
- l'axe Δ est dirigé par le vecteur $\vec{k}$ précédemment défini et passe par le point d'affixe $\frac{b}{1+|a|}$, barycentre de $\begin{array}{c|c} O & O' \\ \hline |a| & 1 \end{array}$.

Remarque

L'équivalence des schémas

$$M(z) \longmapsto M'(z') \qquad S_{\Omega,\lambda,\vec{k}}$$

$$\overrightarrow{\Omega M}(z-\omega) \longmapsto \overrightarrow{\Omega M'}(z'-\omega) \qquad \widetilde{S}_{\lambda,\vec{k}}$$

fait que l'écriture complexe de la similitude inverse $S_{\Omega,\lambda,\vec{k}}$ de $\mathscr{P}$ est :

$$\boxed{z' - \omega = \lambda e^{i2\theta}(\bar{z} - \overline{\omega})}$$

où :

ω est l'affixe de Ω et

θ une mesure (en radians) de $(\vec{i}, \vec{k})$.

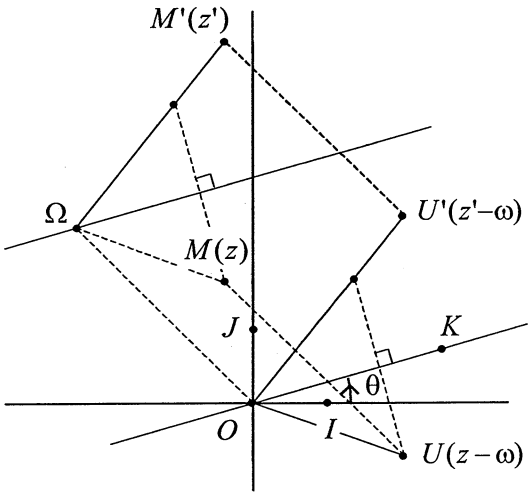


Fig. 141

8.6 Un exercice d'application immédiate de ces résultats

Dans un plan $\mathscr{P}$, sur un cercle Γ, de centre Ω, les points O et O' sont diamétralement opposés et les points A et B sont tels que le triangle $AO'B$ soit équilatéral. On note $\mathscr{C}$ le cercle de centre O qui passe par A et S la similitude inverse qui envoie O sur O' et A sur B.

À chaque point M de $\mathscr{C}$ on associe le point N milieu du segment $[MM']$ où $M' = S(M)$. L'objet de l'exercice est de déterminer le lieu $\mathscr{E}$ des points N.

Solution

Soit T le point du cercle $\mathscr{C}$ tel que le triplet (O,Ω,T) puisse être considéré comme un repère orthonormal direct de $\mathscr{P}$. On peut alors identifier les plans $\mathscr{P}$ et $\overrightarrow{\mathscr{P}}$ et l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes. Dans ce qui suit, les affixes des points A, B, M, N, ... seront notées a, b, m, n, ...

1. Expression de m' et de n en fonction de m.

Soit $Z' = a\bar{Z}$ l'écriture complexe de l'associée $\widetilde{S}$ de la similitude inverse S.

- L'égalité : $\overrightarrow{O'B} = \tilde{S}(\overrightarrow{OA})$ se traduit numériquement par : $-j-2=-aj$ d'où l'on tire : $a=1+2j^2=-i\sqrt{3}$.
- L'égalité : $\overrightarrow{O'M'} = \tilde{S}(\overrightarrow{OM})$ se traduit numériquement par : $m'-2=-i\sqrt{3}\,\overline{m}$

On en déduit : $\boxed{m'=-i\sqrt{3}\,\overline{m}+2}$ (1) et $\boxed{n=\frac{1}{2}m-i\frac{\sqrt{3}}{2}\overline{m}+1}$ (2)

2. Construction géométrique de quelques points de l'ensemble $\mathscr{E}$.

En langage "transformation" l'égalité (1) se traduit par :

« Le point M' est le transformé du point M par la composée de la réflexion s d'axe (OO') suivie de la **similitude directe** Σ de centre B qui envoie O sur O'. »

On dispose ainsi d'un procédé géométrique pour construire quelques points de l'ensemble $\mathscr{E}$ cherché. Le mode d'emploi est le suivant :

- On construit le transformé $\overline{M}$ du point M par la réflexion s d'axe (OO').
- On construit le transformé M' du point $\overline{M}$ par la similitude **directe** Σ

  Rappelons à cet effet que M' est le point d'intersection, si possible autre que A, de la droite $(\overline{M}A)$ et du cercle $\mathscr{C}'$ transformé de $\mathscr{C}$ par Σ. ($\mathscr{C}'$ est donc le cercle de centre O' qui passe par le point $\Sigma(B)$ c'est-à-dire par B).
- On construit le milieu N du segment $[MM']$.

Dans la figure suivante, nous avons construit les transformés par l'application $\varphi: M \mapsto N$ des points M_k d'affixe $e^{i\frac{2k\pi}{12}}$, $k \in \{0,1,2,\ldots,11\}$.

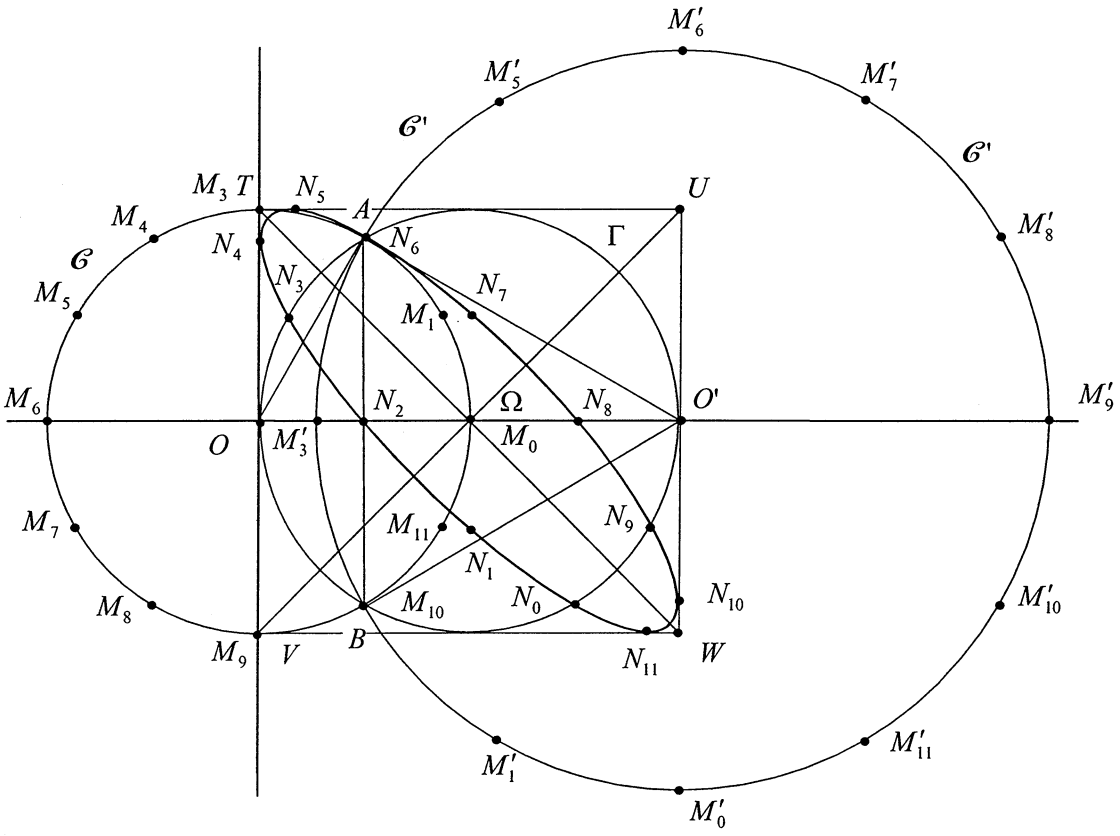


Fig.142

Au vu de la figure 142, on peut conjecturer que l'ensemble $\mathscr{E}$ cherché est une ellipse de centre Ω inscrite dans le carré *UTVW*.

3. Vérification de cette conjecture.

Notons (x,y) et (X,Y) les couples des coordonnées des points M et N dans le repère (O,Ω,T).

L'égalité (2) se traduit analytiquement par :

$$\begin{cases} X-1=\dfrac{1}{2}\left(x-\sqrt{3}\,y\right) \\ Y=\dfrac{1}{2}\left(-\sqrt{3}\,x+y\right) \end{cases}$$

Désignons maintenant par (x',y') le couple des coordonnées de N dans le repère (Ω,U,T). Nous avons :

$$\overrightarrow{\Omega U}=\vec{\omega}+\vec{t} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\Omega T}=-\vec{\omega}+\vec{t}$$

Il s'ensuit que :

$$\begin{cases} \overrightarrow{\Omega N}=(X-1)\vec{\omega}+Y\vec{t} \\ \overrightarrow{\Omega N}=x'\overrightarrow{\Omega U}+y'\overrightarrow{\Omega T}=(x'-y')\vec{\omega}+(x'+y')\vec{t} \end{cases} \quad \text{d'où on tire} \quad \begin{cases} X-1=x'-y' \\ Y=x'+y' \end{cases}$$

puis : $\begin{cases} x'=\dfrac{1}{2}\left[(X-1)+Y\right] \\ y'=\dfrac{1}{2}\left[(1-X)+Y\right] \end{cases}$ et enfin : $\begin{cases} x'=\dfrac{1-\sqrt{3}}{4}(x+y) \\ y'=\dfrac{1+\sqrt{3}}{4}(-x+y) \end{cases}$

Autrement dit : $\left(1+\sqrt{3}\right)^2 x'^2+\left(1-\sqrt{3}\right)^2 y'^2=\dfrac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)=\dfrac{1}{2}$

Soit encore :

$$\boxed{\frac{x'^2}{\left(\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)^2}+\frac{y'^2}{\left(\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)^2}=1}$$

ce qui prouve que $\mathscr{E}$ est bien une ellipse de centre Ω.

Reste maintenant à vérifier que l'ellipse $\mathscr{E}$ est tangente aux côtés du carré *UTVW*. Dans ce but on peut, par exemple, chercher l'ensemble des points M du cercle $\mathscr{C}$ tel que $\varphi(M)$ soit élément de la droite (OT).

En se référant au repère (O,Ω,T), les notations étant celles précédemment adoptées, on a :

$$M(x,y)\longmapsto^{\varphi} N\left(1/2(x-\sqrt{3}\,y+2),\ 1/2(-\sqrt{3}\,x+y)\right)$$

Par suite, $\begin{cases} \varphi(M)\in(OT) \\ M\in\mathscr{C} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-\sqrt{3}\,y+2=0 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\sqrt{3}\,y-2 \\ 4y^2-4\sqrt{3}\,y+3=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\sqrt{3}\,y-2 \\ \left(2y-\sqrt{3}\right)^2=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-1/2 \\ y=\sqrt{3}/2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow M=M_4$$

L'ellipse $\mathscr{E}$ a donc un point commun avec la droite (OT) et un seul. $\mathscr{C}'$ est N_4. Autrement dit, $\mathscr{E}$ est tangente à (OT) en N_4.

On laisse au lecteur le soin d'achever cette vérification.

Exercice 1

Soit un triangle ABC rectangle en A, H le projeté orthogonal de A sur (BC), I et J les projetés orthogonaux de H sur (CA) et (AB).

Montrer que :

1. les cercles (HIC) et (HJB) sont respectivement tangents en I et J à la droite (IJ) ;
2. les points B, J, I et C sont cocycliques.

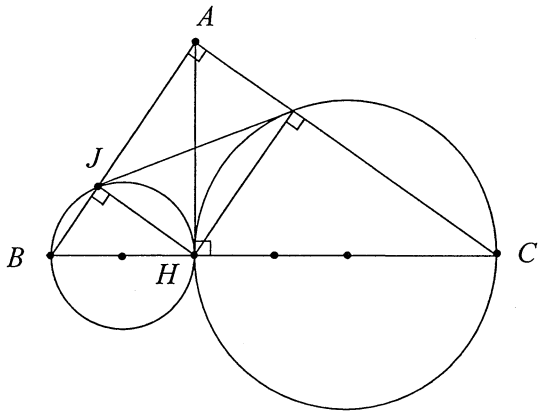


Fig.143

Exercice 2

Dans un plan $\mathscr{P}$ sont donnés deux segments $[AB]$ et $[CD]$.

1. Montrer que les deux similitudes inverses qui transforment $[AB]$ en $[CD]$ ont le même rapport et des axes orthogonaux (donner deux démonstrations).
2. On désigne par :

   Δ_1 l'axe de la similitude inverse qui transforme (A,B) en (C,D)

   Δ_2 l'axe de la similitude inverse qui transforme (A,B) en (D,C)

   Δ_1 coupe (AC) en I et (BD) en K ; Δ_2 coupe (AD) en J et (BC) en L.

   Montrer que le quadrilatère $IJKL$ est un losange dont les supports des côtés sont parallèles à (AB) et (CD).
3. Examiner le cas particulier où $A = C$.

Exercice 3

Soit un triangle ABC, H le projeté orthogonal de A sur (BC) ; I et J les projetés orthogonaux de H sur (CA) et (AB). La droite (IJ) recoupe le cercle (CIH) en D et le cercle (BJH) en E.

1. Montrer que :
   a) Les droites (CI) et (HE) d'une part ; (BJ) et (HD) d'autre part sont parallèles.
   b) Les droites (BE), (CD) et (AH) sont concourantes. On note K ce point de concours.
2. On désigne par P le point commun des droites (HI) et (CK) ; et par Q celui des droites (HJ) et (BK). Montrer que :
   a) le quadrilatère $HPKQ$ est un parallélogramme ;
   b) les droites (BC) (IJ) et (PQ) sont concourantes.

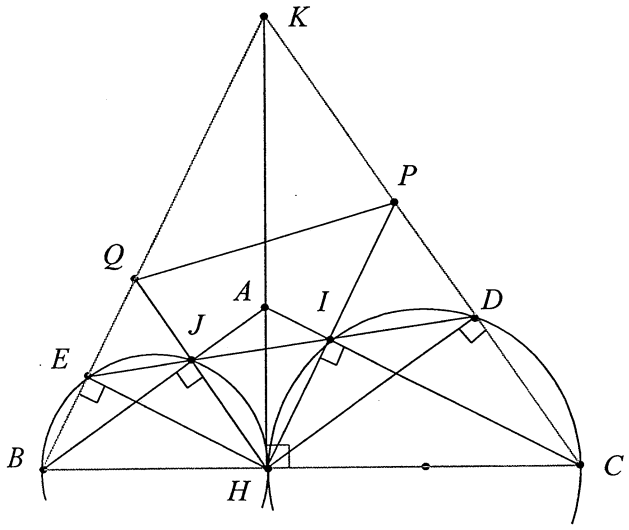


Fig.144

Exercice 4

Deux cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ de centre O et O' sont sécants en A et B. On note S la similitude inverse qui transforme O en O' et A en B.

1. Montrer que $S(\mathscr{C}) = \mathscr{C}'$ et que le centre Ω de S est le point d'intersection de la tangente en A, à $\mathscr{C}$ et de la tangente en B à $\mathscr{C}'$.
2. Soit Σ la similitude directe de centre B qui envoie O' sur O.
   a) Exprimer $\Sigma \circ S$ sous forme canonique.
   b) En déduire un procédé géométrique simple pour construire le transformé $S(M)$ d'un point M de $\mathscr{C} \setminus \{A\}$
3. Une droite Δ passant par Ω – autre que (ΩB) – coupe $\mathscr{C}$ en **deux** points P et Q.

   Les droites (PB) et (QB) recoupent $\mathscr{C}'$ en P_1 et Q_1. On désigne par P' et Q' les symétriques de P_1 et Q_1 par rapport à (OO').

   Montrer que les points Ω, P' et Q' sont alignés et que les droites (P,P')et (Q,Q') sont parallèles.

CHAPITRE 4

Droites isogonales – points isogonaux

1. Droites isogonales par rapport à deux droites sécantes données

1.1 Définitions et conséquences immédiates

1.1.1 Définitions

On dit que des droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont isogonales par rapport à deux droites sécantes Δ_1 et Δ_2 données pour signifier que les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ ont les mêmes bissectrices que les droites Δ_1 et Δ_2.

Les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ passent donc par le point d'intersection de Δ_1 et Δ_2.

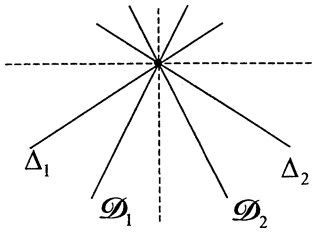


Fig. 145

1.1.2 Droites isogonales et similitudes inverses

Deux droites sécantes Δ_1 et Δ_2 étant données dans un plan $\mathscr{P}$, on considère deux droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ de ce plan passant par le point d'intersection K de Δ_1 et Δ_2. Deux propriétés régissent alors l'emploi des similitudes inverses :

- Si $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont isogonales par rapport à Δ_1 et Δ_2 alors **toute** similitude inverse qui **échange** Δ_1 et Δ_2 **échange** aussi $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$.
- S'il existe une similitude inverse **échangeant** Δ_1 et Δ_2 qui transforme $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ alors $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont isogonales par rapport à Δ_1 et Δ_2.

Démonstration

Observons d'abord que, réflexions mises à part, toute similitude inverse $\overline{S}$ qui échange Δ_1 et Δ_2 a pour centre K. Cela résulte des trois "points" suivants : $\overline{S}^2(\Delta_1)=\Delta_1$, $\overline{S}^2(\Delta_2)=\Delta_2$ et $\overline{S}^2$ est une homothétie de même centre que $\overline{S}$.

De plus, toute similitude inverse $\overline{S}$ qui échange Δ_1 et Δ_2 – réflexions comprises – a pour axe l'une ou l'autre des bissectrices $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ de Δ_1 et Δ_2.

Ceci étant :

1. Si $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont isogonales par rapport à Δ_1 et Δ_2 alors $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ sont aussi des bissectrices de $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$. D'où le premier résultat annoncé.
2. S'il existe une similitude inverse $\overline{S}$ échangeant Δ_1 et Δ_2 qui transforme $\mathscr{D}_1$ en $\mathscr{D}_2$ alors $\overline{S}$ a pour axe soit $\mathscr{B}$ soit $\mathscr{B}'$.

   L'égalité $\overline{S}(\mathscr{D}_1)=\mathscr{D}_2$ prouve ensuite que $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ sont aussi les bissectrices de $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$. D'où le second résultat annoncé.

1.1.3 Autre conséquence

Deux droites sécantes Δ_1 et Δ_2 étant données dans un plan $\mathscr{P}$, pour toute droite $\mathscr{D}$ de ce plan passant par le point d'intersection K de Δ_1 et Δ_2 il existe une et une seule droite $\mathscr{D}'$ de $\mathscr{P}$ telle que $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ soient isogonales par rapport à Δ_1 et Δ_2.

En effet,

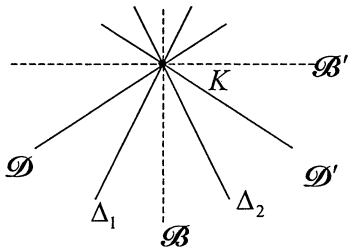


Fig. 146

- $\mathscr{D}'$ ne peut être que la transformée de $\mathscr{D}$ par la réflexion ayant pour axe soit l'une soit l'autre des bissectrices $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ de Δ_1 et Δ_2.
- Si $\mathscr{D}' = s_{\mathscr{B}}(\mathscr{D})$ ou $\mathscr{D}' = s_{\mathscr{B}'}(\mathscr{D})$ alors il est clair que $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont isogonales par rapport à Δ_1 et Δ_2.

Pour traduire cette situation, on dit que $\mathscr{D}'$ est l'isogonale de $\mathscr{D}$ par rapport à Δ_1 et Δ_2.

1.2 Caractérisations angulaires des isogonales de deux droites sécantes données

Deux droites sécantes Δ_1 et Δ_2 étant données dans un plan $\mathscr{P}$, on considère des droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ de ce plan passant par le point d'intersection K de Δ_1 et Δ_2. On désigne par $\vec{\delta}_1$, $\vec{\delta}_2$, $\vec{d}_1$, $\vec{d}_2$ des vecteurs directeurs de Δ_1, Δ_2, $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$.

Les propositions suivantes sont alors équivalentes :

(1) *$\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont isogonales par rapport à Δ_1 et Δ_2*

(2) $2\,\widehat{(\vec{d}_1,\vec{\delta}_1)} = 2\,\widehat{(\vec{\delta}_2,\vec{d}_2)}$

(3) $2\,\widehat{(\vec{d}_1,\vec{\delta}_2)} = 2\,\widehat{(\vec{\delta}_1,\vec{d}_2)}$

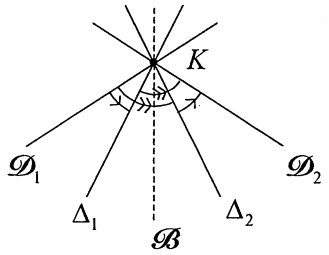


Fig. 147

Démonstration

Soit $\mathscr{B}$ une bissectrice de Δ_1 et Δ_2 ; s la réflexion de droite $\mathscr{B}$.

1ère étape : (1) entraîne (2)

Si $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont isogonales par rapport à Δ_1 et Δ_2 alors $s(\mathscr{D}_1) = \mathscr{D}_2$.

Par suite : $2\,\widehat{(\vec{d}_1,\vec{\delta}_1)} = -2\,\widehat{(\vec{d}_2,\vec{\delta}_2)}$ effet de s.

$= 2\,\widehat{(\vec{\delta}_2,\vec{d}_2)}$

2ème étape : (2) entraîne (3) par permutation des termes "moyens".

3ème étape : (3) entraîne (1)

Désignons par $\vec{d}$ un vecteur directeur de la droite $s(\mathscr{D}_1)$. Nous avons :

$2\,\widehat{(\vec{d}_1,\vec{\delta}_2)} = -2\,\widehat{(\vec{d},\vec{\delta}_1)} = 2\,\widehat{(\vec{\delta}_1,\vec{d})}$, ... effet de s.

Compte tenu de l'égalité (3), il vient : $2\,\widehat{(\vec{\delta}_1,\vec{d}_2)} = 2\,\widehat{(\vec{\delta}_1,\vec{d})}$, égalité qui prouve que le vecteur $\vec{d}_2$ est colinéaire à $\vec{d}$.

Par suite : $\mathscr{D}_2 = s(\mathscr{D}_1)$ et donc $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont isogonales par rapport à Δ_1 et Δ_2.

1.3 Un exemple classique de droites isogonales

Soit un triangle ABC, Ω le centre de son cercle circonscrit, alors la hauteur de ce triangle issue de A et la droite $(A\Omega)$ sont isogonales par rapport aux droites (AB) et (AC).

Démonstration

Désignons par :

- I le point diamétralement opposé à A sur le cercle Γ circonscrit au triangle ABC.
- A_1 le pied sur (BC) de la hauteur issue de A.
- $\mathscr{C}$ le cercle de diamètre $[AB]$.

Alors A_1 appartient à $\mathscr{C}$ et la similitude **directe** S de centre A qui transforme $\mathscr{C}$ en Γ envoie B sur I et A_1 sur C.

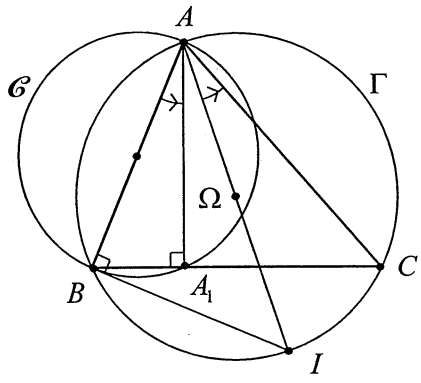


Fig. 148

On a donc : $2(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AA_1}) = 2(\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AC})$

$= 2(\overrightarrow{A\Omega},\overrightarrow{AC})$

Par conséquent, les droites (AA_1) et $(A\Omega)$ sont isogonales par rapport à (AB) et (AC).

Remarque

Lorsque le triangle ABC est rectangle en A la droite $(A\Omega)$ est la médiane issue de A du triangle ABC. La hauteur (AA_1) est alors la symédiane issue de A de ce triangle. On retrouve ainsi un résultat déjà établi.

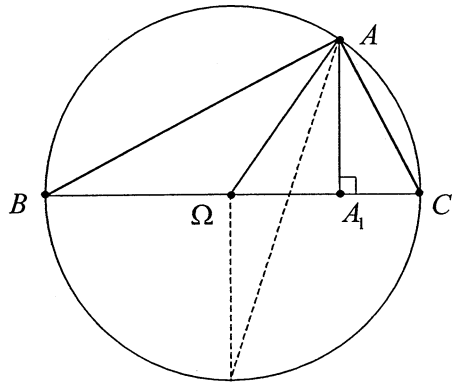


Fig. 149

1.4 Autres caractérisations des isogonales de deux droites sécantes données

Deux droites sécantes Δ_1 et Δ_2 étant données dans un plan $\mathscr{P}$, on considère deux points M et N de ce plan autres que le point d'intersection K de Δ_1 et Δ_2. On désigne par M_1 et M_2 (resp. N_1 et N_2) les projetés orthogonaux de M (resp. N) sur Δ_1 et Δ_2.

Les propositions suivantes sont alors équivalentes

(1) les droites (KM) et (KN) sont isogonales par rapport à Δ_1 et Δ_2.

(2) $(KN)\perp(M_1M_2)$ (2 bis) $(KM)\perp(N_1N_2)$

(3) les points M_1, M_2, N_1, N_2 sont cocycliques.
(Le centre du cercle portant ces quatre points est le milieu de $[MN]$.)

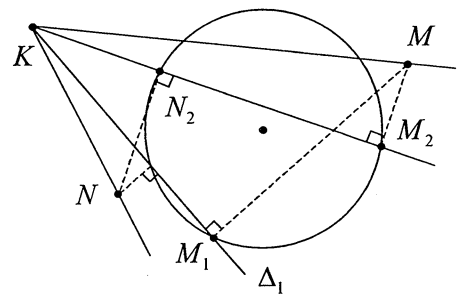


Fig. 150

Démonstration

Désignons par Δ_1' et Δ_2' les orthogonales en K aux droites Δ_1 et Δ_2.

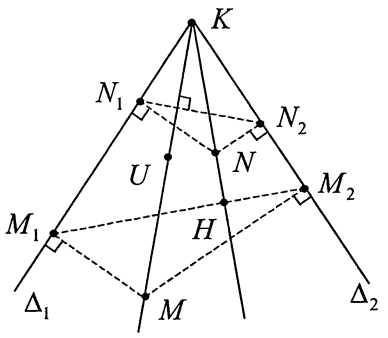


Fig. 151

1ère étape : (1) entraîne (2)

- Lorsque M n'appartient pas à $\Delta_1' \cup \Delta_2'$ les points K, M_1, M_2 sont non alignés. Le centre U du cercle (KM_1M_2) est le milieu de $[KM]$.

  L'isogonale de (KM) – autrement dit de (KU) – par rapport à Δ_1 et Δ_2 est, on le sait, la hauteur (KH) du triangle KM_1M_2 – voir §(1.3) –

  Dès lors, si les droites (KM) et (KN) sont isogonales par rapport à Δ_1 et Δ_2 (proposition (1)) alors $(KN)=(KH)$ et donc (KN) est orthogonale à (M_1M_2).

- Lorsque M appartient à Δ_1' (resp. à Δ_2'), si la proposition (1) est vérifiée alors N appartient à Δ_2' (resp. à Δ_1'). Il s'ensuit que la proposition (2) est banalement vérifiée (voir par exemple figure 152 où M appartient à Δ_1')

  On établit de façon analogue que (1) entraîne (2 bis).

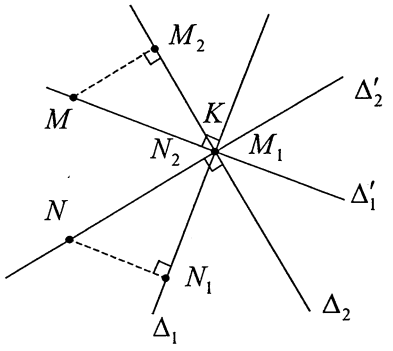


Fig. 152

2ème étape : (2) entraîne (3)

Supposons que : $(KN)\perp(M_1M_2)$.

Nous avons alors : (voir Fig. 151 et Fig. 152)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{KM_1}\cdot\overrightarrow{KN_1} &= \overrightarrow{KM_1}\cdot\overrightarrow{KN} \quad \text{car} \quad \overrightarrow{NN_1}\perp\overrightarrow{KM_1}\\ &= \overrightarrow{KM_2}\cdot\overrightarrow{KN} \quad \text{car} \quad \overrightarrow{M_1M_2}\perp\overrightarrow{KN}\\ &= \overrightarrow{KM_2}\cdot\overrightarrow{KN_2} \quad \text{car} \quad \overrightarrow{NN_2}\perp\overrightarrow{KM_2}\end{aligned}$$

(On établit de façon analogue que (2 bis) entraîne (3).)

L'égalité $\overrightarrow{KM_1}\cdot\overrightarrow{KN_1}=\overrightarrow{KM_2}\cdot\overrightarrow{KN_2}$ prouve que les points M_1, M_2, N_1, N_2 sont cocycliques.

3ème étape : (3) entraîne (1)

Désignons par :

d_1 et d_1' les orthogonales à Δ_1 passant par M_1 et N_1

d_2 et d_2' les orthogonales à Δ_2 passant par M_2 et N_2

Sous l'hypothèse : « M_1, M_2, N_1, N_2 sont cocycliques », considérons la similitude inverse $\overline{S}$ de centre K qui transforme (M_1,M_2) en (N_2,N_1).[1]

[1] La donnée du transformé N_2 de M_1 ne suffit pas à déterminer cette similitude car pour M élément de Δ_1' on a $M_1 = N_2 = K$ (voir figure 152).

De proche en proche, on peut dresser le schéma suivant :

$$(\Delta_1,\Delta_2) \overset{s}{\longmapsto} (\Delta_2,\Delta_1)$$
$$(d_1,d_2) \longmapsto (d_2',d_1')$$
$$d_1 \cap d_2 \longmapsto d_1' \cap d_2'$$
$$M \longmapsto N$$
$$(KM) \longmapsto (KN)$$

ce qui nous prouve que les droites (KM) et (KN) sont isogonales par rapport à Δ_1 et Δ_2.

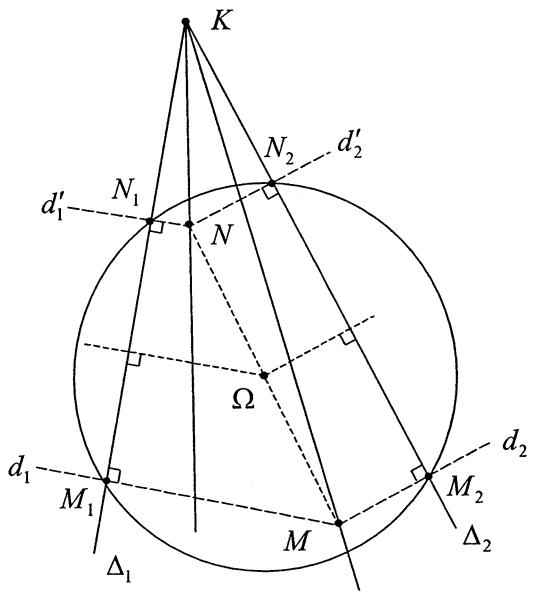


Fig. 153

Remarque

Lorsque $M_1 \neq N_1$ et $M_2 \neq N_2$, les médiatrices des segments $[M_1N_1]$ et $[M_2N_2]$ passent par le milieu Ω du segment $[MN]$ car les projections "conservent les milieux".

Le centre du cercle portant les points M_1, M_2, N_1 et N_2 est donc le milieu Ω de $[MN]$.

Ce résultat est conservé lorsque $M_1 = N_1$ ou $M_2 = N_2$.

Par exemple, pour $M_1 = N_1$ et $M_2 \neq N_2$, le cercle $(M_1M_2N_2)$ est tangent en M_1 à Δ_1 Son centre Ω appartient à la médiatrice de $[M_2N_2]$ et à l'orthogonale en M_1 à Δ_1 – voir figure ci-contre –

Ω est encore le milieu de $[MN]$.

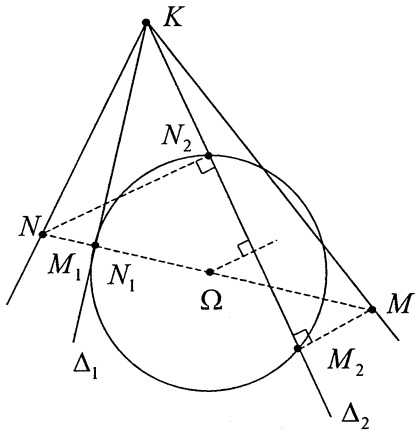


Fig. 154

2. Points isogonaux par rapport à un triangle donné

Leur "intronisation" est programmée dans l'exercice qui suit.

2.1 Problème résolu

Soit, dans un plan $\mathscr{P}$, un triangle ABC et un point M autre que A, B et C.

On note : P, Q, R les projetés orthogonaux de M sur les droites (BC), (CA) et (AB),

$\mathscr{D}_1$ l'isogonale de (AM) par rapport à (AB) et (AC)

$\mathscr{D}_2$ l'isogonale de (BM) par rapport à (BC) et (BA)

$\mathscr{D}_3$ l'isogonale de (CM) par rapport à (CA) et (CB).

1. Montrer que $\mathscr{D}_1$, $\mathscr{D}_2$ et $\mathscr{D}_3$ sont parallèles si, et seulement si, M appartient au cercle Γ circonscrit au triangle ABC.
2. On suppose maintenant que M n'appartient pas au cercle Γ.
   a) Montrer que les droites $\mathscr{D}_1$, $\mathscr{D}_2$ et $\mathscr{D}_3$ sont concourantes.

b) On note M' le point de concours de ces droites et f l'application de $\mathscr{P} \setminus \Gamma$, dans $\mathscr{P}$ qui au point M associe le point M'. Quelle est l'image par f de l'ensemble $(BC) \setminus \{B,C\}$? de l'ensemble $(CA) \setminus \{C,A\}$? de l'ensemble $(AB) \setminus \{A,B\}$?

3. On note $\mathscr{L}$ l'ensemble $\mathscr{P} \setminus \left[\Gamma \cup (BC) \cup (CA) \cup (AB)\right]$. Montrer que : $f(\mathscr{L}) \subset \mathscr{L}$.

4. On note φ l'application de $\mathscr{L}$ dans $\mathscr{L}$ qui au point M associe le point M'. Montrer que φ est involutive.

Solution :

Le point M étant distinct de A, B et C, les points P, Q et R sont deux à deux distincts.

On sait alors que :

$\mathscr{D}_1$ est l'orthogonale à (QR) passant par A

$\mathscr{D}_2$ est l'orthogonale à (RP) passant par B

$\mathscr{D}_3$ est l'orthogonale à (PQ) passant par C.

1. $\mathscr{D}_1$, $\mathscr{D}_2$ et $\mathscr{D}_3$ parallèles $\Leftrightarrow P$, Q et R alignés

$\Leftrightarrow M \in \Gamma \setminus \{A,B,C\}$

(voir droite de Simson de M relative au triangle ABC).

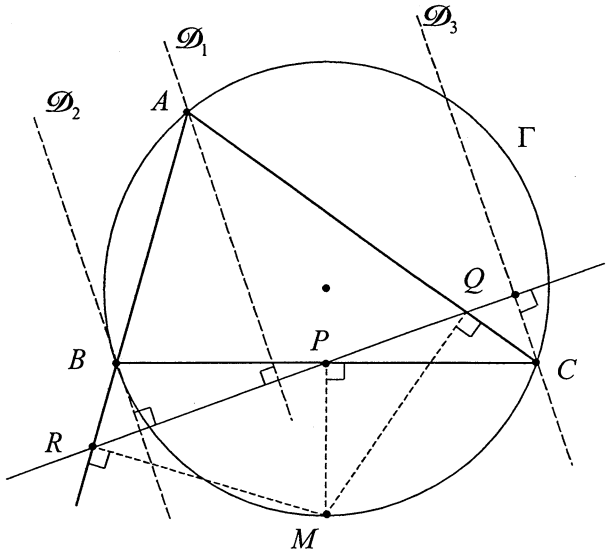


Fig. 155

2. On suppose maintenant que M n'appartient pas à Γ.

a) Les points Q et R appartiennent manifestement au cercle de diamètre $[MA]$. Par suite la médiatrice Δ_1 de $[QR]$ passe par le milieu de $[MA]$.

On établit de même que les médiatrices Δ_2 de $[RP]$ et Δ_3 de $[PQ]$ passent respectivement par les milieux de $[MB]$ et $[MC]$.

Dès lors les droites $\mathscr{D}_1$, $\mathscr{D}_2$, $\mathscr{D}_3$ sont les images des médiatrices Δ_1, Δ_2, Δ_3 du triangle PQR par l'homothétie $h_{M,2}$ de centre M et de rapport 2.

Les droites $\mathscr{D}_1$, $\mathscr{D}_2$, $\mathscr{D}_3$ sont donc concourantes en un point – noté M' – image du centre Ω du cercle (PQR) par l'homothétie $h_{M,2}$.

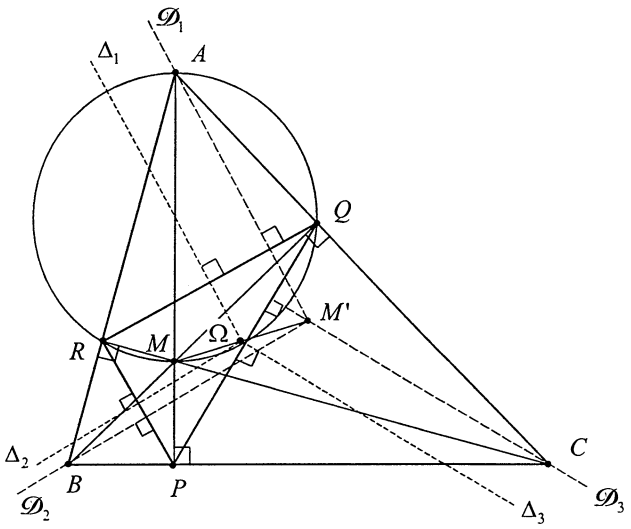


Fig. 156

b) On considère l'application f de $\mathscr{P} \setminus \Gamma$ dans $\mathscr{P}$ qui à M associe M'.

Pour tout point M de $(BC) \setminus \{B,C\}$, on a : $\mathscr{D}_2 = (BA)$ et $\mathscr{D}_3 = (CA)$.

Le point M' de $\mathscr{D}_2 \cap \mathscr{D}_3$ est donc confondu avec le point A.

Autrement dit : $f[(BC) \setminus \{B,C\}] = \{A\}$

On établit de même que :

$f[(CA) \setminus \{C,A\}] = \{B\}$

$f[(AB) \setminus \{A,B\}] = \{C\}$

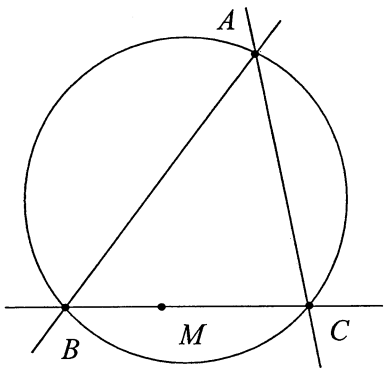


Fig. 157

3. Soit M un point de $\mathscr{L}$ ($\mathscr{L} = \mathscr{P} \setminus [\Gamma \cup (BC) \cup (CA) \cup (AB)]$)

- Notons que, comme M n'est pas élément de l'ensemble $(BC) \cup (CA) \cup (AB)$, la droite $\mathscr{D}_1$ est distincte de (AB) et (AC) et la droite $\mathscr{D}_2$ est distincte de (BC) et (BA).

  Par suite, le point M' de $\mathscr{D}_1 \cap \mathscr{D}_2$ ne peut appartenir à l'ensemble $(BC) \cup (CA) \cup (AB)$.

- Reste à montrer que le point M' n'appartient pas à $\Gamma \setminus \{A,B,C\}$.

  Désignons par P', Q', R' les projetés orthogonaux du point M' sur (BC), (CA) et (AB) et par Ω le milieu du segment $[M,M']$.

  Les droites (AM) et (AM') étant isogonales par rapport à (AB) et (AC), les points Q, Q', R' sont éléments du cercle Γ' centré en Ω et passant par le point R (voir § 1. 4).

  De même les droites (BM) et (BM') étant isogonales par rapport à (BC) et (BA), les points R', P et P' sont éléments du cercle Γ'.

  Ainsi les points P, Q, R, P', Q', R' sont cocycliques.

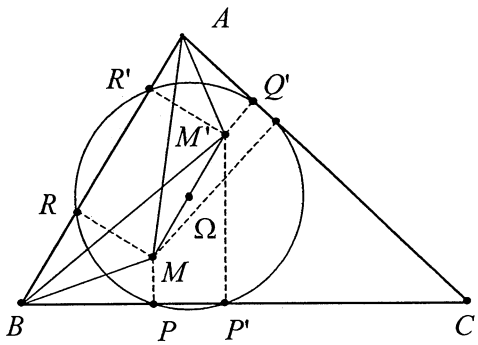


Fig. 158

Cela dit, le point M' ne peut appartenir à l'ensemble $\Gamma \setminus \{A,B,C\}$, sinon P', Q' et R' seraient des points distincts et alignés ce qui n'est pas puisque ces points sont éléments du cercle (PQR).

Concluons : Si $M \in \mathscr{L}$ alors $f(M) \in \mathscr{L}$. Autrement dit : $f(\mathscr{L}) \subset \mathscr{L}$.

4. On note φ l'application de $\mathscr{L}$ dans $\mathscr{L}$ qui à M associe M'.

   Il est clair que, pour tout M de $\mathscr{L}$: $\varphi \circ \varphi(M) = \varphi(M') = M$.

   Ainsi : $\varphi \circ \varphi = id_{\mathscr{L}}$ (application identique de $\mathscr{L}$). L'application φ est donc une involution de $\mathscr{L}$ dans $\mathscr{L}$.

2.2 Points isogonaux par rapport à un triangle *ABC* donné

Les notations du paragraphe précédent sont conservées.

2.2.1 Définitions

- *Lorsque le point M est élément de l'ensemble $\mathscr{L}$, le point M' (de $\mathscr{L}$) est appelé* ***isogonal*** *de M par rapport au triangle ABC.*
- *Comme l'isogonal de M' par rapport au triangle ABC est le point M, on dit que les points M et M' sont* ***isogonaux*** *par rapport à ce triangle.*

2.2.2 Propriété caractéristique de points isogonaux

M et *M' sont isogonaux par rapport au triangle ABC* $\Leftrightarrow$ *les projetés orthogonaux de M et M' sur les côtés du triangle ABC sont cocycliques*

L'équivalence de ces deux propositions résulte de l'équivalence des propositions (1) et (3) du § 1.4 concernant les droites isogonales.

2.3 Points isogonaux usuels par rapport à un triangle *ABC* donné

En plus des notations déjà utilisées, en ce qui concerne le triangle *ABC*, on désigne par :

- O le centre de son cercle circonscrit,
- H son orthocentre, G son centre de gravité,
- I le centre de son cercle inscrit,
- I_A, I_B et I_C les centres des cercles exinscrits dans les secteurs $\widehat{BAC}$, $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$.

2.3.1 Lorsque $M = O$

Les droites $\mathscr{D}_1$, $\mathscr{D}_2$, $\mathscr{D}_3$ sont respectivement les hauteurs issues de A, B et C du triangle ABC – voir § 1.3 –

Donc $M' = H$.

Les points P, Q, R sont les milieux des côtés $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$ du triangle ABC.

Les points P', Q', R' sont les pieds des hauteurs de ce triangle.

Le cercle Γ_a qui porte ces six points est le *cercle d'Euler* du triangle ABC.

2.3.2 Lorsque $M = G$

Les droites $\mathscr{D}_1$, $\mathscr{D}_2$, $\mathscr{D}_3$ sont respectivement les symédianes issues de A, B et C du triangle ABC. Ces symédianes sont donc concourantes. Leur point de concours – noté L – est appelé *point de Lemoine* du triangle ABC.

2.3.3 Lorsque $M = I$

Les droites $\mathscr{D}_1$, $\mathscr{D}_2$, $\mathscr{D}_3$ sont les bissectrices intérieures du triangle ABC. On a donc $M' = I$. Par suite : $P = P'$, $Q = Q'$ et $R = R'$.

Le cercle Γ_I est alors le cercle inscrit dans le triangle ABC.

2.3.4 Lorsque $M = I_A$

$\mathscr{D}_1$ est la bissectrice intérieure issue de A du triangle ABC, $\mathscr{D}_2$ et $\mathscr{D}_3$ sont les bissectrices extérieures issues de B et C.

On a donc : $M' = I_A$.

Le cercle Γ_{I_A} est alors le cercle exinscrit dans le secteur $\widehat{BAC}$.

On obtient des résultats analogues lorsque $M = I_B$ ou $M = I_C$.

L'application $\varphi : \mathscr{L} \to \mathscr{L}$, $M \mapsto M'$ échange donc les points O et H, G et L et fixe les points I, I_A, I_B et I_C.

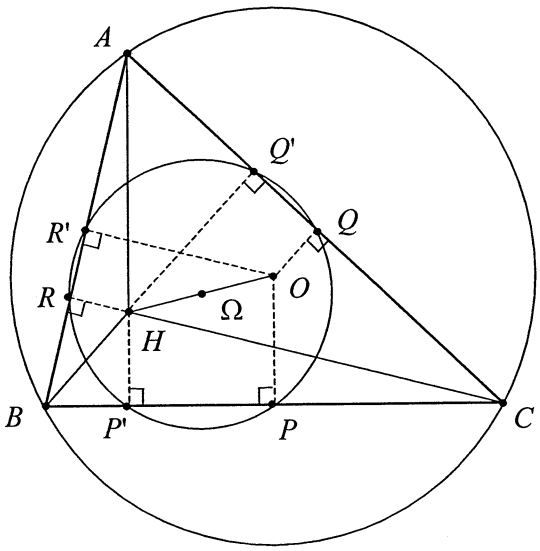


Fig. 159

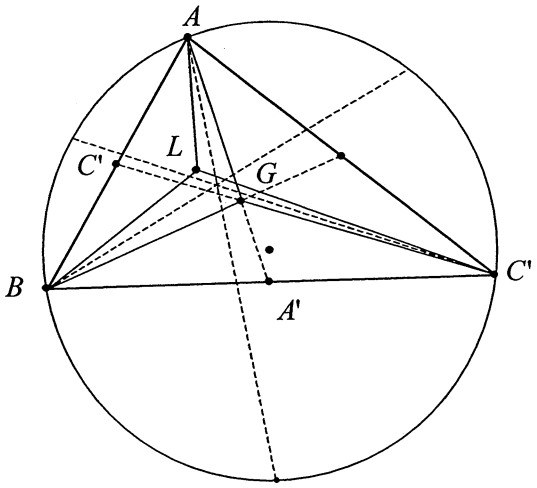


Fig. 160

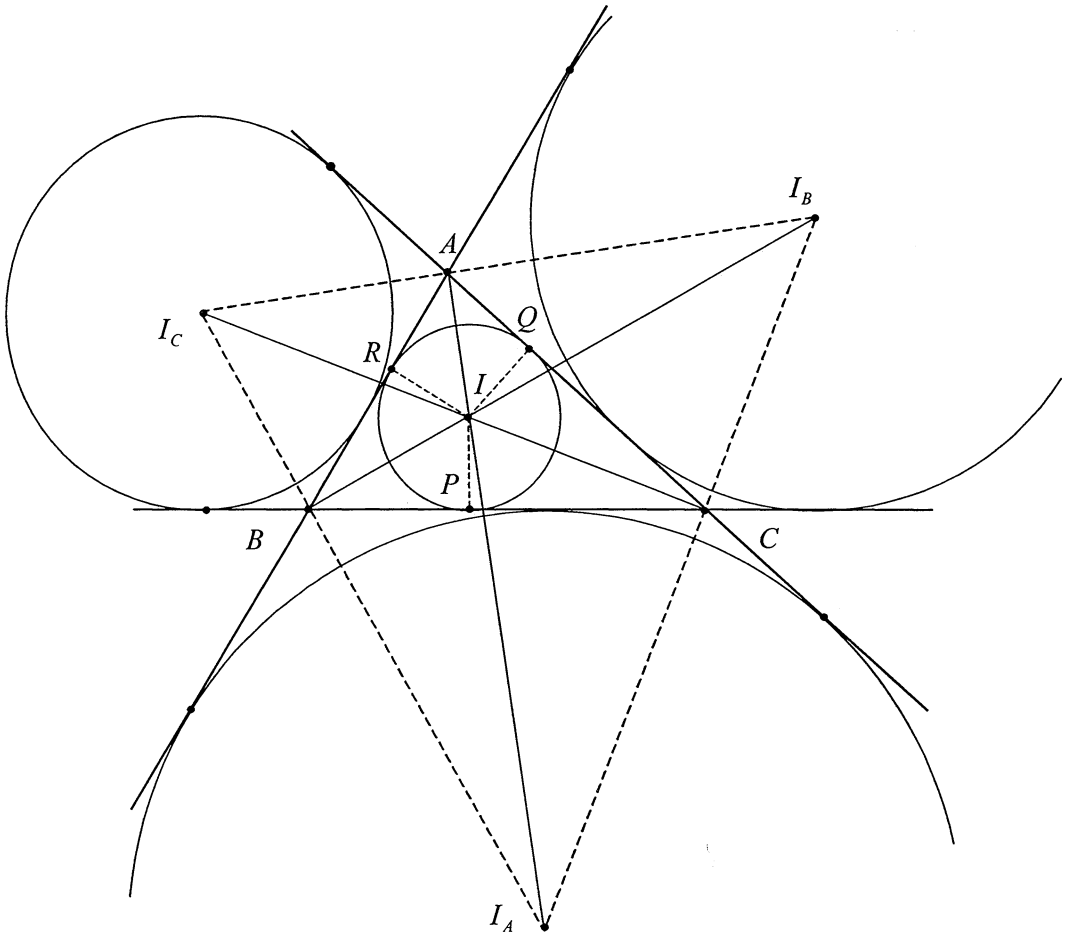


Fig. 161

3. Positions relatives des points isogonaux par rapport à un triangle donné

3.1 Exposé du problème

Un triangle ABC étant donné dans un plan $\mathscr{P}$, on désigne encore par :

Γ le cercle circonscrit à ce triangle

$\mathscr{L}$ l'ensemble $\mathscr{P} \setminus \left[\Gamma \cup (BC) \cup (CA) \cup (AB)\right]$

φ l'application involutive de $\mathscr{L}$ dans $\mathscr{L}$ qui à un point M associe son isogonal par rapport au triangle ABC.

L'objectif du problème consiste à "localiser" le point $\varphi(M)$ suivant le choix du point M dans $\mathscr{L}$.

Quelques constructions de points $\varphi(M)$ "sur le terrain" faites pour avoir une petite idée sur le résultat nous conduisent à considérer successivement un recouvrement et une partition de l'ensemble $\mathscr{L}$.

3.2 Découpage de l'ensemble $\mathscr{L}$

On désigne ici par $\widehat{BAC}$ l'intersection du demi-plan **ouvert** de frontière (AB) contenant C et du demi-plan ouvert de frontière (AC) contenant B.

- On considère d'abord les parties suivantes de l'ensemble $\mathscr{L}$

  $\mathscr{A} = \mathscr{L} \cap [\, \widehat{BAC} \cup s_A(\widehat{BAC}) \,]$ où s_A désigne la symétrie de centre A.

  $\mathscr{B} = \mathscr{L} \cap [\, \widehat{CBA} \cup s_B(\widehat{CBA}) \,]$

  $\mathscr{C} = \mathscr{L} \cap [\, \widehat{ACB} \cup s_B(\widehat{ACB}) \,]$

  Il est clair que $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ réalisent un **recouvrement** de l'ensemble $\mathscr{L}$.

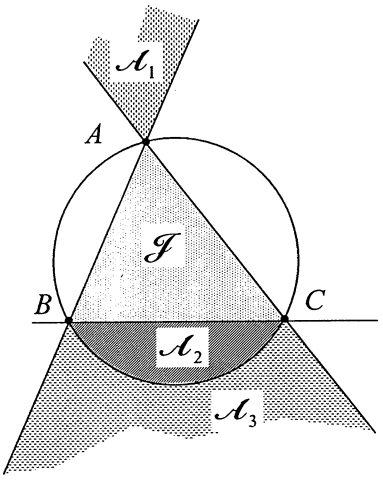


Fig. 162

- On subdivise ensuite chacun des ensembles $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ en quatre morceaux comme – par exemple – la figure ci-contre le montre pour l'ensemble $\mathscr{A}$.

  $$\mathscr{A} = \mathscr{A}_1 \cup \mathscr{J} \cup \mathscr{A}_2 \cup \mathscr{A}_3$$

  On procède de la même façon pour les ensembles $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$.

  $$\mathscr{B} = \mathscr{B}_1 \cup \mathscr{J} \cup \mathscr{B}_2 \cup \mathscr{B}_3$$

  $$\mathscr{C} = \mathscr{C}_1 \cup \mathscr{J} \cup \mathscr{C}_2 \cup \mathscr{C}_3.$$

Il est clair que les sous-ensembles $\mathscr{J}$, $\mathscr{A}_1$, $\mathscr{A}_2$, $\mathscr{A}_3$, $\mathscr{B}_1$, $\mathscr{B}_2$, $\mathscr{B}_3$, $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$ réalisent une **partition** de $\mathscr{L}$.

3.3 Détermination des ensembles $\varphi(\mathscr{A})$, $\varphi(\mathscr{B})$ et $\varphi(\mathscr{C})$

3.3.1 Détermination de $\varphi(\mathscr{A})$

Soit M un point de $\mathscr{A}$. La droite (AM) est alors contenue dans l'ensemble $\mathscr{A}' \cup \{A\}$ où $\mathscr{A}'$ désigne l'ensemble $\overset{\frown}{BAC} \cup s_A(\overset{\frown}{BAC})$.

La réflexion ayant pour axe la bissectrice des demi-droites $[AB)$ et $[AC)$ transforme (AM) en son isogonale Δ' par rapport aux droites (AB) et (AC).

Comme cette réflexion laisse l'ensemble $\mathscr{A}' \cup \{A\}$ globalement invariant, on est assuré que Δ' est aussi incluse dans $\mathscr{A}' \cup \{A\}$. Dès lors :

de $\varphi(M) \in \mathscr{L} \cap \Delta'$ et $\mathscr{L} \cap \Delta' \subset \mathscr{L} \cap \mathscr{A}' = \mathscr{A}$

on tire : $\varphi(M) \in \mathscr{A}$.

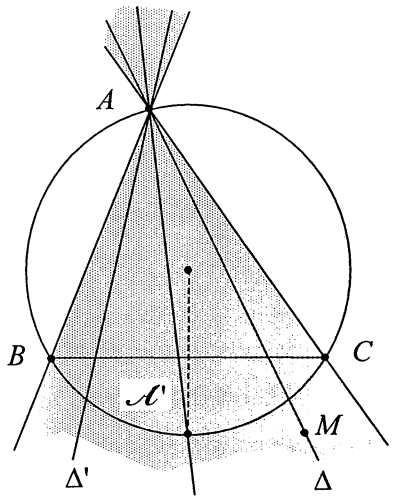


Fig. 163

Ainsi, nous venons d'établir que : $\varphi(\mathscr{A}) \subset \mathscr{A}$ (i)

Ceci étant, on obtient : $\varphi[\varphi(\mathscr{A})] \subset \varphi(\mathscr{A})$ c'est-à-dire : $\mathscr{A} \subset \varphi(\mathscr{A})$ (ii)

Pour terminer, des inclusions (i) et (ii), il découle que : $\varphi(\mathscr{A}) = \mathscr{A}$

3.3.2 Détermination de $\varphi(\mathscr{B})$ et de $\varphi(\mathscr{C})$

On établit de la même manière que : $\varphi(\mathscr{B}) = \mathscr{B}$ et $\varphi(\mathscr{C}) = \mathscr{C}$.

3.4 Détermination des ensembles $\varphi(\mathscr{A}_1)$ et $\varphi(\mathscr{A}_2)$

3.4.1 Lemme préliminaire

Soit Δ une droite passant par A et incluse dans $\mathscr{A}' \cup \{A\}$, Δ' son isogonale par rapport aux droites (AB) et (AC), D le point d'intersection autre que A de Δ' et du cercle Γ, Σ la réflexion ayant pour axe la bissectrice des demi-droites $[BC)$ et $[BA)$; E l'image de D par Σ.
Alors les droites (BE) et Δ sont parallèles.

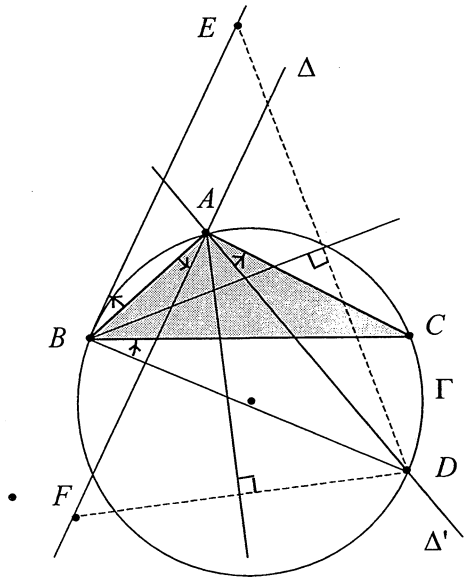


Fig. 164

Démonstration

Désignons par s la réflexion ayant pour axe la bissectrice des demi-droites $[AB)$ et $[AC)$, et par F l'image de D par s. Il est clair que F appartient à Δ. Ceci dit, nous avons :

$2\ (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BE}) = 2\ (\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BC})$ effet de Σ

$= 2\ (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC})$ cocyclicité de D, C, B et A.

$= 2\ (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AF})$ effet de s.

Les vecteurs $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{AF}$ sont donc colinéaires. Autrement dit, les droites (BE) et Δ sont parallèles.

3.4.2 L'inclusion : $\varphi(\mathscr{A}_1) \subset \mathscr{A}_2$

Soit M un point de $\mathscr{A}_1$. Pour récupérer les notations du lemme précédent, appelons Δ la droite (AM).

Alors : $M \in \Delta \cap \mathscr{A}_1$.

Par suite :

- La droite (BM) est contenue dans l'ensemble $\mathscr{P}_1 \cup \{B\}$ où $\mathscr{P}_1 = \overset{\frown}{ABE} \cup s_B(\overset{\frown}{ABE})$.
  ($\mathscr{P}_1$ est la partie grisée de la figure 165.)
- L'isogonale $\mathscr{D}'$ de (BM) par rapport aux droites (BA) et (BC) est donc contenue dans l'ensemble $\mathscr{P}_2 \cup \{B\}$ où $\mathscr{P}_2 = \Sigma(\mathscr{P}_1) = \overset{\frown}{CBD} \cup s_B(\overset{\frown}{CBD})$.
  ($\mathscr{P}_2$ est la partie hachurée de la figure 165.)
- Le point $\varphi(M)$ étant le point d'intersection des droites $\mathscr{D}'$ et Δ' appartient donc à $\mathscr{P}_2 \cap \Delta'$, c'est-à-dire à $\mathscr{A}_2 \cap \Delta'$.

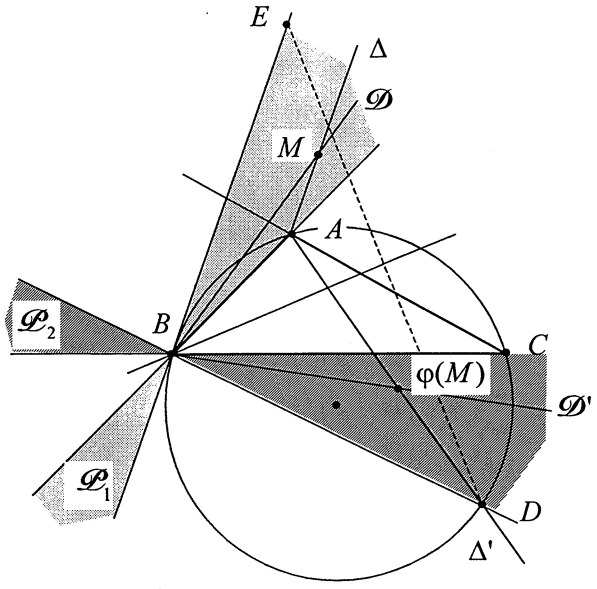


Fig. 165

Il en résulte banalement que : $\varphi(M) \in \mathscr{A}_2$. L'inclusion : $\varphi(\mathscr{A}_1) \subset \mathscr{A}_2$ se trouve ainsi démontrée.

3.4.3 L'inclusion : $\varphi(\mathscr{A}_2) \subset \mathscr{A}_1$

Soit M un point de $\mathscr{A}_2$. Pour récupérer les notations du lemme préliminaire et de l'alinéa 3.4.2, appelons Δ' la droite (AM).

Alors : $M \in \mathscr{A}_2 \cap \Delta'$ c'est-à-dire $M \in \mathscr{P}_2 \cap \Delta'$.

Par suite :

- La droite (BM) est contenue dans $\mathscr{P}_2 \cup \{B\}$.
- Son isogonale $\mathscr{D}$ par rapport aux droites(BC) et (BA) est contenue dans $\mathscr{P}_1 \cup \{B\}$.
- Le point $\varphi(M)$ étant le point d'intersection des droites $\mathscr{D}$ et Δ appartient à $\mathscr{P}_1 \cap \Delta$ c'est-à-dire à $\mathscr{A}_1 \cap \Delta$.

Il en résulte banalement que : $\varphi(M) \in \mathscr{A}_1$. Ainsi se trouve établie l'inclusion : $\varphi(\mathscr{A}_2) \subset \mathscr{A}_1$.

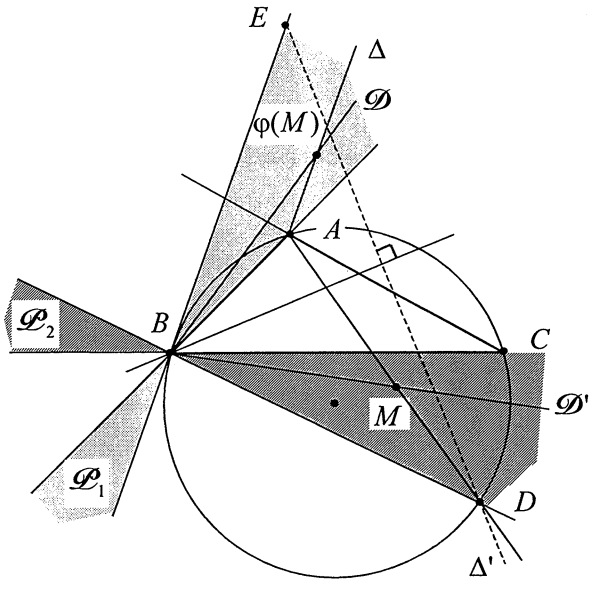


Fig. 166

3.4.4 Détermination des ensembles $\varphi(\mathscr{A}_1)$ et $\varphi(\mathscr{A}_2)$

De la relation $\varphi(\mathscr{A}_2) \subset \mathscr{A}_1$ on tire : $\varphi[\varphi(\mathscr{A}_2)] \subset \varphi(\mathscr{A}_1)$ c'est-à-dire $\mathscr{A}_2 \subset \varphi(\mathscr{A}_1)$.

Dès lors, de $\varphi(\mathscr{A}_1) \subset \mathscr{A}_2$ et $\mathscr{A}_2 \subset \varphi(\mathscr{A}_1)$ il découle que : $\varphi(\mathscr{A}_1) = \mathscr{A}_2$ puis : $\varphi(\mathscr{A}_2) = \varphi[\varphi(\mathscr{A}_1)]$ c'est-à-dire : $\varphi(\mathscr{A}_2) = \mathscr{A}_1$.

3.5 Détermination de l'ensemble $\varphi(\mathscr{T})$

Nous avons : $\mathscr{T} = \mathscr{A} \cap \mathscr{B}$.

On en déduit : $\varphi(\mathscr{T}) = \varphi(\mathscr{A} \cap \mathscr{B}) \overset{*}{=} \varphi(\mathscr{A}) \cap \varphi(\mathscr{B}) = \mathscr{A} \cap \mathscr{B} = \mathscr{T}$ (* car φ est injective).

Ainsi : $\varphi(\mathscr{T}) = \mathscr{T}$.

3.6 Détermination de l'ensemble $\varphi(\mathscr{A}_3)$

Soit M un point de $\mathscr{A}_3$. On sait alors que le point $\varphi(M)$ appartient à $\mathscr{A}$ car $\varphi(\mathscr{A}) = \mathscr{A}$.

Ceci dit on ne peut avoir :

- $\varphi(M)$ élément de $\mathscr{T}$ sinon M serait élément de $\varphi(\mathscr{T})$ c'est-à-dire de $\mathscr{T}$ ce qui contredit l'hypothèse.
- $\varphi(M)$ élément de $\mathscr{A}_1$ (resp. de $\mathscr{A}_2$) sinon M serait un élément de $\varphi(\mathscr{A}_1)$ (resp. de $\varphi(\mathscr{A}_2)$) c'est-à-dire de $\mathscr{A}_2$ (resp. de $\mathscr{A}_1$) ce qui contredit encore l'hypothèse.

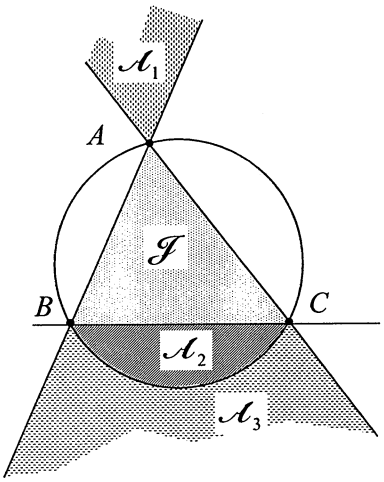


Fig. 167

Dès lors, $\varphi(M)$ appartient nécessairement à l'ensemble $\mathscr{A} \setminus (\mathscr{T} \cup \mathscr{A}_1 \cup \mathscr{A}_2)$ c'est-à-dire à $\mathscr{A}_3$.

Nous venons donc d'établir que : $\varphi(\mathscr{A}_3) \subset \mathscr{A}_3$.

On en déduit immédiatement que : $\varphi[\varphi(\mathscr{A}_3)] \subset \varphi(\mathscr{A}_3)$ c'est-à-dire $\mathscr{A}_3 \subset \varphi(\mathscr{A}_3)$.

De la conjonction de ces deux inclusions, il découle que : $\varphi(\mathscr{A}_3) = \mathscr{A}_3$.

3.7 Conclusion

En résumé, on retiendra que :

Étant donné un triangle ABC, M un point de l'ensemble $\mathscr{L}$, M' son isogonal par rapport au triangle ABC.

Si M est élément de $\mathscr{A}_1$ alors M' est élément de $\mathscr{A}_2$.

Si M est élément de $\mathscr{A}_2$ alors M' est élément de $\mathscr{A}_1$.

Si M est élément de $\mathscr{T}$ alors M' est élément de $\mathscr{T}$.

Si M est élément de $\mathscr{A}_3$ alors M' est élément de $\mathscr{A}_3$.

Évidemment, on a des résultats similaires pour les parties $\mathscr{B}_1$, $\mathscr{B}_2$, $\mathscr{B}_3$ de $\mathscr{B}$ et celles $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_3$ de $\mathscr{C}$.

CHAPITRE 5

Coniques : problèmes de tangence

Deux pôles d'intérêt font l'objet de ce chapitre :

- Étude de propriétés des tangentes à une conique donnée issues d'un point donné.
- Étude des coniques tangentes aux trois côtés d'un triangle.

Sa lecture nécessite quelques connaissances sur les coniques. Nous en faisons un bref rappel en début de chapitre. Pour plus de détails, on pourra se reporter aux ouvrages traditionnellement utilisés au lycée dans les années "50 ou 60".

1. Tangentes à une conique : théorèmes de Poncelet

1.1 Sommaire d'une présentation des coniques

On considère ici que les coniques sont des courbes planes définies comme suit :

1.1.1 Parabole

Étant donné, dans un plan $\mathscr{P}$, une droite $\mathscr{D}$ et un point F n'appartenant pas à $\mathscr{D}$, on appelle *parabole de foyer F et de directrice $\mathscr{D}$* l'ensemble des points M de $\mathscr{P}$ équidistants de F et $\mathscr{D}$.

La droite Δ passant par F et orthogonale à $\mathscr{D}$ est appelée *axe focal* de la parabole.

- Le point S de Δ tel que $SF = d(S,\mathscr{D})$ est appelé *sommet* de la parabole.
  ($d(S,\mathscr{D})$ désigne la distance de S à $\mathscr{D}$.)
- L'ensemble des points N de $\mathscr{P}$ tels que $d(N,F) > d(N,\mathscr{D})$ est appelé *extérieur* de la parabole (partie grisée de la figure ci-contre).

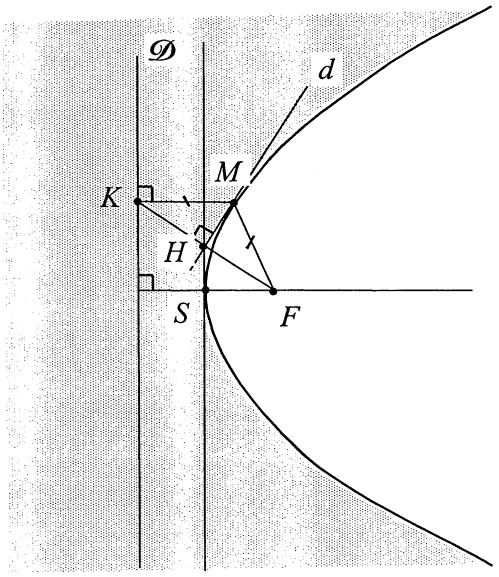


Fig. 168

Construction d'un point : on choisit K sur $\mathscr{D}$.

On trace :

– l'orthogonale en K à $\mathscr{D}$

– la médiatrice du segment $[FK]$.

Il est alors clair que le point d'intersection de ces deux droites est un point de la parabole puisqu'il est équidistant de F et de $\mathscr{D}$.

1.1.2 Ellipse et hyperbole

Étant donné deux points F et F' d'un plan $\mathscr{P}$ et un nombre réel a vérifiant $2a > FF'$, on appelle *ellipse de foyers F et F'*, et de *paramètre a* l'ensemble des points M de $\mathscr{P}$ tels que $MF + MF' = 2a$.

L'ensemble des points N de $\mathscr{P}$ tels que $NF + NF' > 2a$ est appelé *extérieur* de l'ellipse (partie grisée de la figure 169).

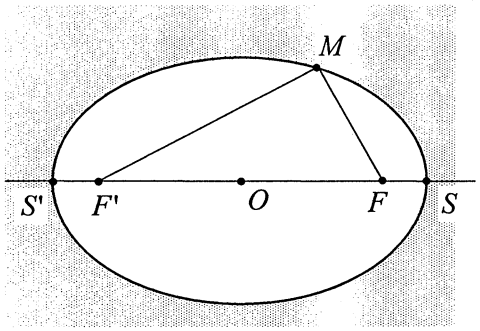


Fig. 169

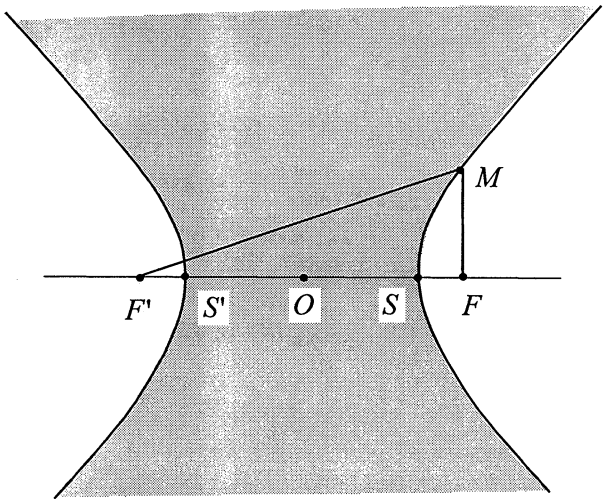


Fig. 170

Étant donné deux points F et F' d'un plan $\mathscr{P}$ et un nombre réel a vérifiant $0 < 2a < FF'$, on appelle hyperbole de foyers F et F' et de paramètre a l'ensemble des points M de $\mathscr{P}$ tels que $|MF - MF'| = 2a$.

L'ensemble des points N de $\mathscr{P}$ tels que $|NF - NF'| < 2a$ est appelé *extérieur* de l'hyperbole (partie grisée de la figure 170).

On montre facilement que le milieu O du segment $[FF']$ est centre de symétrie pour l'ellipse et l'hyperbole. Ces deux coniques sont appelées *coniques à centre*.

Pour une *conique à centre*,

- le cercle de centre O et de rayon a est appelé cercle principal.
- les cercles centrés en F et F', et de rayon $2a$ sont appelés cercles directeurs.

1.2 Rappel des propriétés supposées connues concernant les tangentes à une conique

a) Les coniques admettent une tangente en chacun de leurs points.

b) Pour qu'une droite d soit tangente à une parabole, il faut et il suffit que l'une ou l'autre des deux conditions suivantes soit vérifiée :

- Le projeté orthogonal du foyer F de la parabole sur d appartient à la tangente au sommet de cette courbe.
- Le symétrique K du foyer F de la parabole par rapport à d appartient à la directrice $\mathscr{D}$ de cette courbe (voir figure 168).

Si tel est le cas, le point de contact de la tangente d avec la parabole appartient à l'orthogonale en K à la directrice $\mathscr{D}$.

c) Pour qu'une droite d soit tangente à une conique à centre, il faut et il suffit que l'une ou l'autre des conditions suivantes soit vérifiée :

- Le projeté orthogonal sur d d'un des deux foyers de la conique appartient au cercle principal de cette conique.
- Le symétrique par rapport à d d'un des deux foyers de la conique appartient au cercle directeur de cette conique qui est centré en son autre foyer.

Si tel est le cas, le point de contact de la tangente d avec la conique appartient à la droite passant par ce symétrique et le centre du cercle directeur.

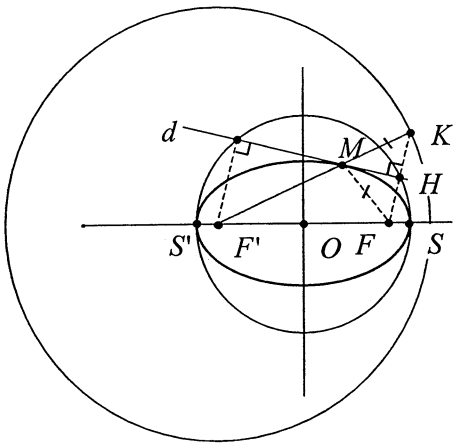
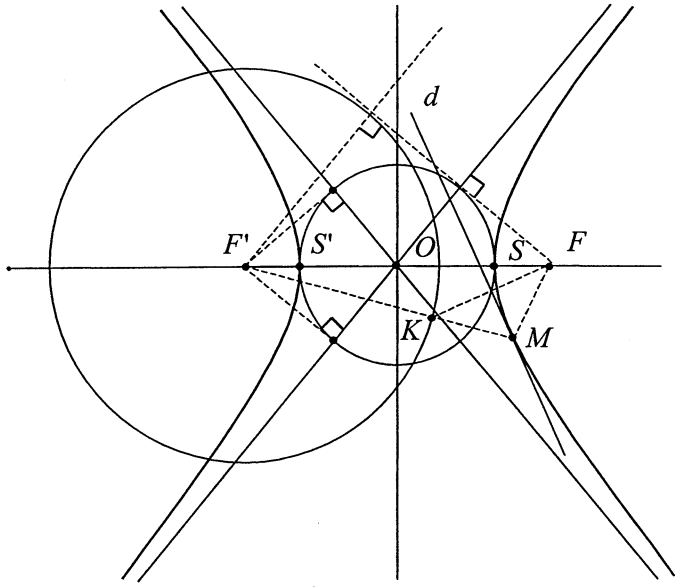


Fig. 171



bv

Fig. 172

d) Par un point extérieur à une conique, on peut mener deux tangentes à cette conique, y compris pour l'hyperbole à condition toutefois de considérer ses asymptotes comme des tangentes (le point de contact est pour chacune de ces droites rejeté à l'infini).

1.3 Construction des tangentes à une conique donnée issues d'un point donné

Dans tout cet alinéa, étant donné une conique $\mathscr{C}$ et un point A extérieur à cette conique, on désigne par d_1 et d_2 les deux tangentes à $\mathscr{C}$ issues de A, par T_1 et T_2 leurs points de contact avec cette courbe, par H_1 et H_2 les projetés orthogonaux du foyer F de $\mathscr{C}$ sur d_1 et d_2, par K_1 et K_2 les symétriques de ce foyer par rapport à d_1 et d_2.

Alors :

a) Les points H_1 et H_2 appartiennent

d'une part au cercle de diamètre $[AF]$,

d'autre part

- à la tangente au sommet de $\mathscr{C}$ lorsque $\mathscr{C}$ est une parabole ;
- au cercle principal de $\mathscr{C}$ lorsque $\mathscr{C}$ est une conique à centre.

Il s'ensuit que H_1 et H_2 sont les points d'intersection des ensembles précités d'où la construction des tangentes d_1 et d_2.

b) Le point T_1 (resp. T_2) est le point d'intersection de d_1 (resp. d_2) et de

- l'orthogonale à $\mathscr{D}$ passant par K_1 (resp. K_2) lorsque $\mathscr{C}$ est une parabole
- la droite $(F'K_1)$ (resp. $(F'K_2)$) lorsque $\mathscr{C}$ est une conique à centre dont l'autre foyer est noté F'.

– Voir figures 173 – 174 – 175 –

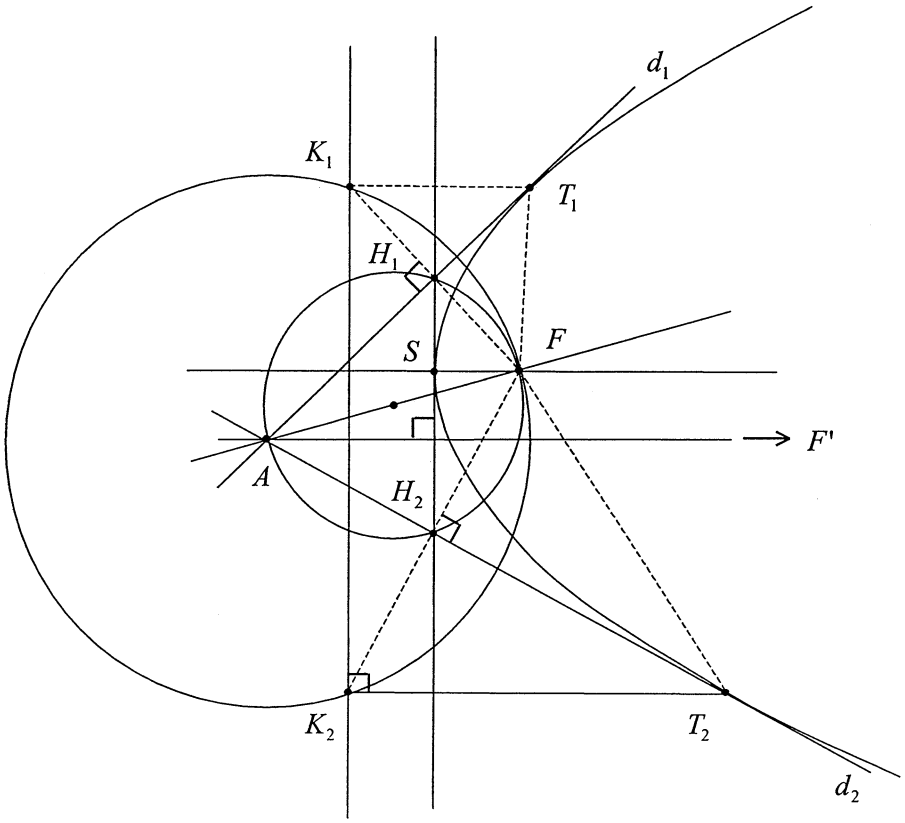


Fig. 173

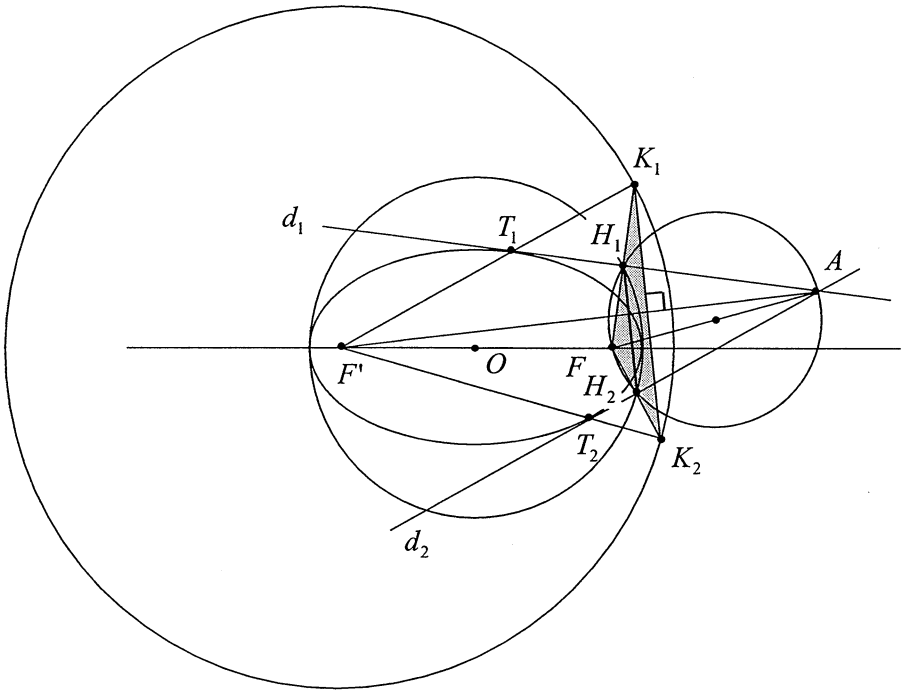


Fig. 174

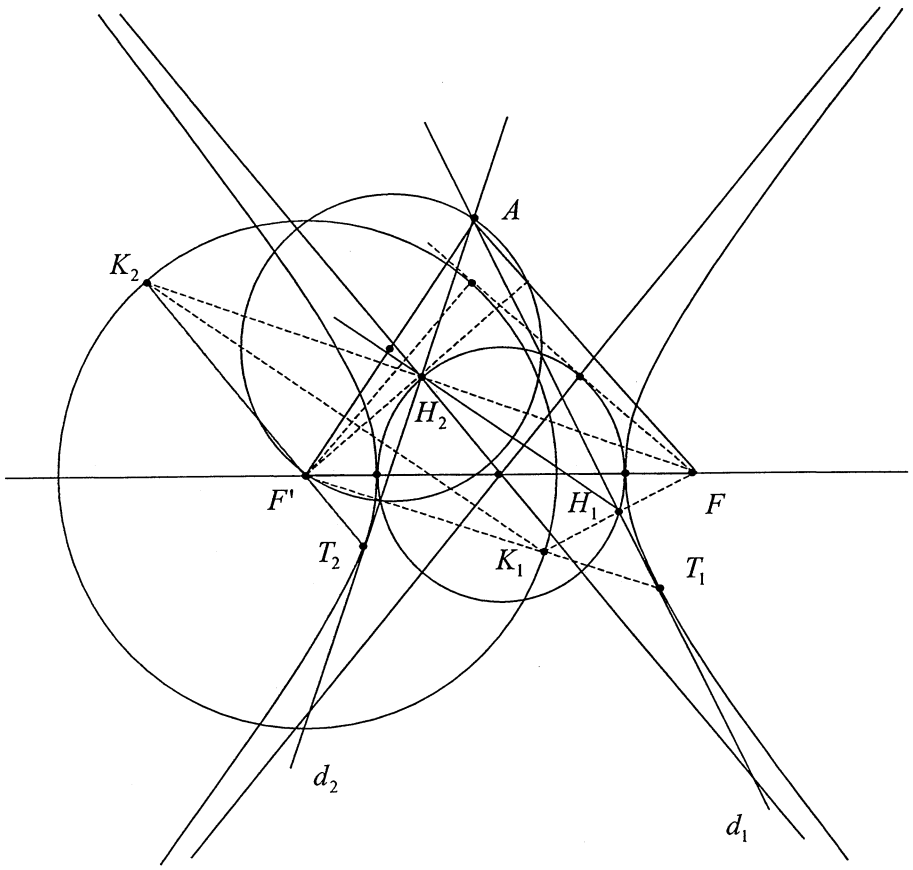


Fig. 175

1.4 Propriétés des tangentes à une conique donnée issues d'un point donné

Les données ainsi que les notations sont celles de l'alinéa précédent.

1.4.1 Premier théorème de Poncelet

Les droites (AF) *et* (AF') *sont isogonales par rapport aux droites* (AT_1) *et* (AT_2) *(en convenant que, pour une parabole, la droite* (AF') *désigne la parallèle, passant par A, à l'axe focal).*

Démonstration

Le résultat annoncé découle immédiatement d'une des propriétés caractéristiques des isogonales à deux droites sécantes données. En effet, la droite (AF') est orthogonale à la droite (H_1H_2).

- Pour la parabole ceci est évident.
- Pour une conique à centre, A est le point d'intersection des médiatrices d_1 et d_2 des segments $[FK_1]$ et $[FK_2]$. Le point A est donc équidistant des points K_1 et K_2. Par ailleurs, il est clair que le point F' est aussi équidistant de ces deux points car K_1 et K_2 appartiennent au cercle directeur centré en F' de la conique considérée. Dès lors la droite (AF') est médiatrice du segment $[K_1K_2]$. À ce titre, elle est orthogonale à la droite (H_1H_2) qui est parallèle à (K_1K_2).

1.4.2 Deuxième théorème de Poncelet

La droite (FA) *(resp. la droite* $(F'A)$ *pour une conique à centre) est une des deux bissectrices des droites* (FT_1) *et* (FT_2) *(resp. des droites* $(F'T_1)$ *et* $(F'T_2)$*).*

Démonstration

- **Pour une parabole** :

  Considérons la composée des trois réflexions s_{d_1} suivie de $s_{(AF')}$ suivie de s_{d_2}. C'est une réflexion qui fixe les points A et F. Ceci dit, le schéma :

$$[FT_1) \xmapsto{s_{d_1}} [K_1T_1) \xmapsto{s_{(AF')}} [K_2T_2) \xmapsto{s_{d_2}} [FT_2)$$
$$\text{et } [FT_1) \xmapsto{s_{(FA)}} [FT_2)$$

  montre que la droite (FA) est la bissectrice des demi-droites $[FT_1)$ et $[FT_2)$. D'où le résultat annoncé.

- **Pour une conique à centre** :

  Nous savons que $(F'A)$ est la médiatrice du segment $[K_1K_2]$ – voir démonstration du théorème précédent –

  Comme le triangle $F'K_1K_2$ est isocèle en F', la droite $(F'A)$ est donc la bissectrice des demi-droites $[F'K_1)$ et $[F'K_2)$. Or les points T_1 et T_2 appartiennent aux droites $(F'K_1)$ et $(F'K_2)$. Il s'ensuit immédiatement que $(F'A)$ est **une** bissectrice des droites $(F'T_1)$ et $(F'T_2)$.

  On établit de façon analogue que (FA) est une bissectrice des droites (FT_1) et (FT_2).

Remarques

- **Pour une ellipse**, la droite $(F'A)$ est **la** bissectrice des **demi-droites** $[F'T_1)$ et $[F'T_2)$ car ces demi-droites sont respectivement égales à $[F'K_1)$ et $[F'K_2)$.

  On établit de même que la droite (FA) est **la** bissectrice des demi-droites $[FT_1)$ et $[FT_2)$.

- **Pour une hyperbole**, l'affaire est peu plus compliquée. Par exemple la droite (FA) est la bissectrice des demi-droites $[FT_1)$ et $[FT_2)$ si, et seulement si le point A appartient à la partie grisée de l'extérieur de l'hyperbole (voir figure ci-contre). Les asymptotes à l'hyperbole font partie de cet ensemble.

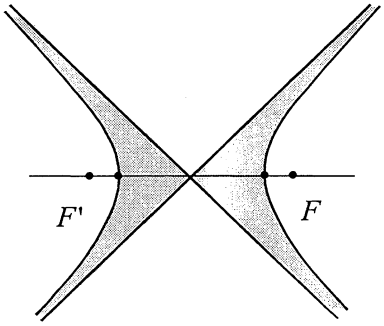


Fig. 176

Nous laissons au lecteur le soin de justifier ces résultats.

1.4.3 Exercice d'application

Dans un plan $\mathscr{P}$, étant donné un cercle $\mathscr{C}$ de centre I et deux points A et A' extérieurs à $\mathscr{C}$, on désigne par T_1 et T_2 ; T_1' et T_2' les points de contact des tangentes à $\mathscr{C}$ menées de A et A'. On suppose ici que A' n'appartient pas aux droites (AT_1), (AT_2), (AI) ainsi qu'au cercle de centre I passant par A.

On note B_1 (resp. B_2) le point d'intersection de (AT_1) et $(A'T_1)$ (resp. de (AT_2) et $(A'T_2)$).

Montrer que :

1) Les points A et A' sont les foyers d'une conique passant par B_1 et B_2.
2) Les points B_1 et B_2 sont les foyers d'une conique passant par A et A'.
3) Ces deux coniques sont soit une ellipse et une hyperbole, soit deux hyperboles.

2. Coniques tangentes aux trois côtés d'un triangle

2.1 Exposé du problème

En géométrie analytique, par conique on entend l'un des ensembles suivants : « parabole, ellipse, hyperbole, réunion de deux droites sécantes ou parallèles ». Le cercle est considéré comme une ellipse dont les foyers sont confondus.

Une équation de conique comporte six coefficients numériques définis à un facteur multiplicatif près. Par suite, une conique est déterminée dès lors qu'on lui impose de vérifier cinq conditions indépendantes, soit ponctuelles, soit tangentielles. Par exemple, une conique est déterminée lorsqu'on lui impose de passer par **cinq points** coplanaires donnés.

Autre exemple : un triangle ABC étant donné dans un plan $\mathscr{P}$, considérons les coniques dites non dégénérées (paraboles, ellipses, hyperboles) tangentes aux trois côtés de ce triangle. Il existe une infinité de telles coniques car elles ne sont astreintes à vérifier que trois conditions tangentielles indépendantes. Parmi ces coniques, il y en a une et une seule qui admette un point F donné de $\mathscr{P} \setminus [(BC) \cup (CA) \cup (AB)]$ comme foyer car le choix du foyer – en dehors des tangentes – fournit les deux conditions tangentielles manquantes pour garantir l'existence et l'unicité d'une telle conique.

Ceci dit, il n'est pas nécessaire de connaître ces résultats pour aborder l'étude des coniques tangentes aux trois côtés d'un triangle donné. La preuve en est fournie dans les alinéas suivants.

Pour conduire notre étude, et la mener à terme, nous allons prendre appui sur :

- les propriétés caractéristiques des tangentes à une conique – voir § 1.2 –
- la propriété caractéristique des points isogonaux par rapport à un triangle (ici le triangle ABC donné) – voir § 2.2 –

2.2 Paraboles tangentes aux trois côtés d'un triangle

2.2.1 Choix du foyer

Supposons qu'il existe une parabole $\mathscr{C}$ tangente aux trois côtés d'un triangle ABC donné.

Alors les symétriques de son foyer F par rapport aux côtés (BC), (CA) et (AB) sont alignés sur sa directrice $\mathscr{D}$. Le foyer F de $\mathscr{C}$ **ne peut être qu'un** point – autre que A, B et C – du cercle Γ circonscrit au triangle ABC. En outre, la directrice $\mathscr{D}$ de $\mathscr{C}$ **ne peut être que** la droite de Steiner du point F relative au triangle ABC.

2.2.2 Existence et unicité

Soit F un point de $\Gamma \setminus \{A,B,C\}$, $\mathscr{D}$ la droite de Steiner du point F relative au triangle ABC et $\mathscr{C}$ la parabole de foyer F et de directrice $\mathscr{D}$.

Alors, les symétriques P_1, Q_1, R_1 de F par rapport aux droites (BC), (CA) et (AB) appartiennent banalement à la directrice $\mathscr{D}$. Il s'ensuit que les droites (BC), (CA) et (AB) sont des tangentes à la paraboles $\mathscr{C}$ (propriété caractéristique).

Autrement dit, la parabole $\mathscr{C}$ de foyer F et de directrice $\mathscr{D}$ est tangente aux trois côtés du triangle ABC.

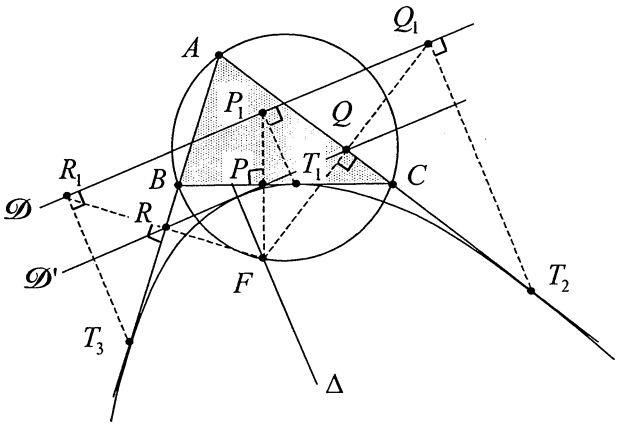


Fig. 177

Conclusion :

Dans un plan $\mathscr{P}$, étant donné un triangle ABC et son cercle circonscrit Γ, pour tout point F de $\Gamma \setminus \{A,B,C\}$, et seulement pour les points de cet ensemble, il existe une parabole de foyer F et une seule tangente aux trois côtés du triangle ABC.

Sa directrice $\mathscr{D}$ est la droite de Steiner du point F relative au triangle ABC.

Remarques :

- Les points de contact de la parabole $\mathscr{C}$ avec les côtés (BC), (CA) et (AB) appartiennent respectivement aux orthogonales en P_1, Q_1 et R_1 à la directrice $\mathscr{D}$.
- La tangente au sommet de la parabole $\mathscr{C}$ est la droite de Simson du point F relative au triangle ABC. Cette droite est, rappelons-le, la transformée de la directrice $\mathscr{D}$ par l'homothétie de centre F et de rapport $\frac{1}{2}$.

2.3 Coniques à centre tangentes aux trois côtés d'un triangle

2.3.1 Choix du foyer

Supposons que, dans un plan $\mathscr{P}$, il existe une conique à centre $\mathscr{C}$ tangente aux trois côtés d'un triangle ABC donné.

Alors les projetés orthogonaux de ses foyers F et F' sur les côtés du triangle ABC appartiennent au cercle principal de cette conique et, de ce fait, sont cocycliques. Par suite, Γ désignant le cercle circonscrit au triangle ABC, les foyers F et F' de $\mathscr{C}$ ne peuvent être que des points de l'ensemble $\mathscr{P} \setminus \left[\Gamma \cup (BC) \cup (CA) \cup (AB)\right]$ –noté $\mathscr{L}$ – **isogonaux** par rapport au triangle ABC (voir propriété caractéristique chapitre 4).

Autrement dit, s'il existe une conique à centre $\mathscr{C}$ de foyer F tangente aux trois côtés du triangle ABC, alors F ne peut être qu'un point de l'ensemble $\mathscr{L}$. En outre, le cercle principal de $\mathscr{C}$ ne peut être que le cercle passant par les projetés orthogonaux P, Q, R de F sur les droites (BC), (CA) et (AB).

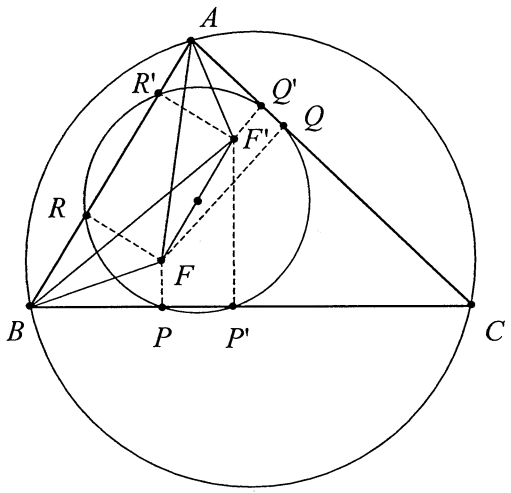


Fig. 178

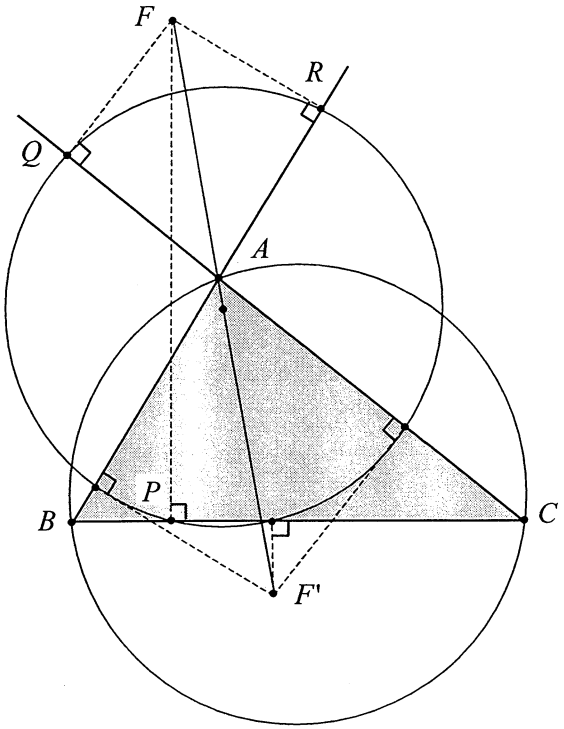


Fig. 179

2.3.2 Existence et unicité

Soit F un point de l'ensemble $\mathscr{L}$, Γ' le cercle passant par les projetés orthogonaux P, Q et R de F sur les droites (BC), (CA) et (AB), et enfin $\mathscr{C}$ la conique (à centre) de foyer F et de cercle principal Γ'.

Alors les projetés orthogonaux de F sur les côtés du triangle ABC appartiennent banalement au cercle principal de $\mathscr{C}$. Il s'ensuit que les droites (BC), (CA) et (AB) sont des tangentes à la conique $\mathscr{C}$.

Autrement dit, la conique $\mathscr{C}$ de foyer F et de cercle principal Γ' est tangente aux trois côtés du triangle ABC.

Conclusion :

Dans un plan $\mathscr{P}$, étant donné un triangle ABC et son cercle circonscrit Γ, pour tout point F de l'ensemble $\mathscr{L}$ ($\mathscr{L} = \mathscr{P} \setminus [\Gamma \cup (BC) \cup (CA) \cup (AB)]$), et seulement pour les points de cet ensemble, il existe une conique à centre de foyer F et une seule tangente aux trois côtés du triangle ABC. Son cercle principal Γ' est le cercle passant par les projetés orthogonaux de F sur les côtés du triangle.

Remarques :

- Le second foyer de $\mathscr{C}$ est l'isogonal F' de F par rapport au triangle ABC.
- Les points de contact de $\mathscr{C}$ avec les côtés (BC), (CA) et (AB) appartiennent respectivement aux droites (FP_1), (FQ_1) et (FR_1) où P_1, Q_1 et R_1 sont les symétriques de F par rapport aux droites (BC), (CA) et (AB).

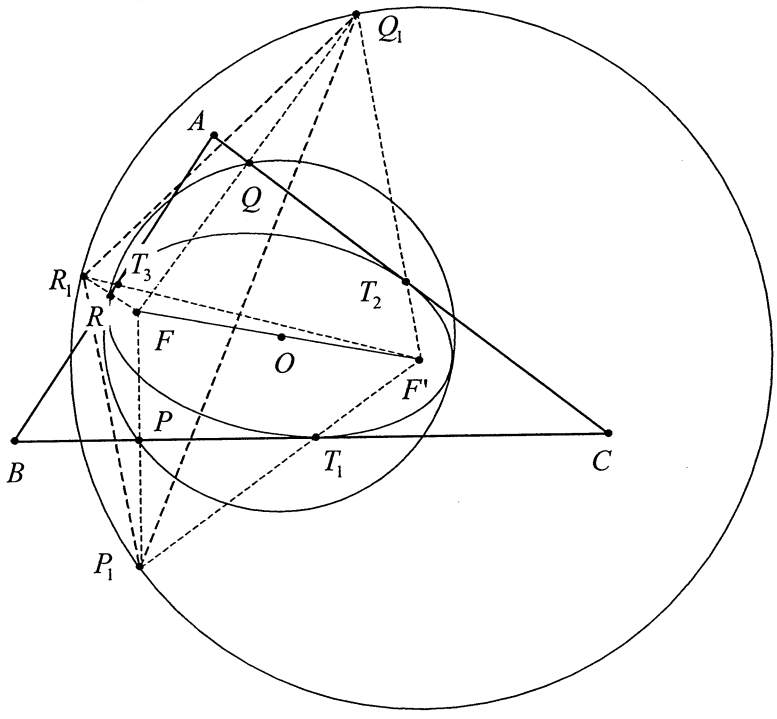


Fig. 180

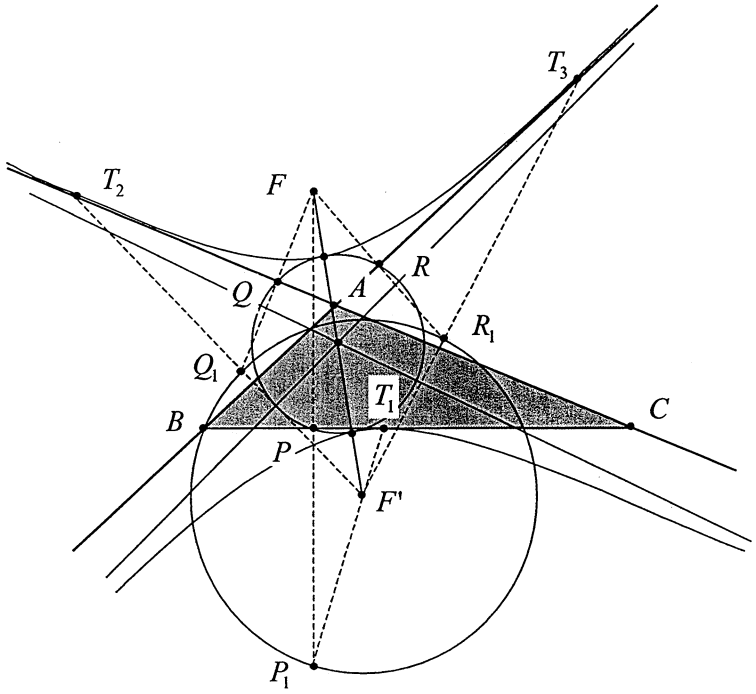


Fig.181

2.4 Nature de la conique à centre suivant le choix de F dans l'ensemble $\mathscr{L}$

Dans un plan $\mathscr{P}$, étant donné un triangle ABC et son cercle circonscrit Γ, soit F un point de l'ensemble $\mathscr{L}$, $\mathscr{C}$ **la** conique à centre de foyer F tangente aux trois côtés du triangle ABC, F' l'autre foyer de cette conique.

On sait que F' est l'isogonal de F par rapport au triangle ABC. Par conséquent, pour déterminer la nature de la conique $\mathscr{C}$ suivant le choix de F dans $\mathscr{L}$, nous sommes conduits à reconsidérer la partition $\mathscr{T}$, $\mathscr{A}_1$, $\mathscr{A}_2$, $\mathscr{A}_3$, $\mathscr{B}_1$, $\mathscr{B}_2$, $\mathscr{B}_3$, $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$ de $\mathscr{L}$ mise en place lors de l'étude de la position relative des points isogonaux par rapport à un triangle.

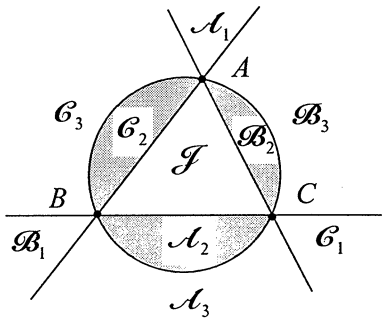


Fig.182

Dans chacune des éventualités suivantes, on désigne par a le paramètre de la conique $\mathscr{C}$ et par P_1 le symétrique de F par rapport à la droite (BC). On rappelle que P_1 appartient au cercle directeur de $\mathscr{C}$ centré en F'.

a) On choisit F dans $\mathscr{T}$

Dans ce cas F' est aussi dans $\mathscr{T}$.

F' est donc situé du même côté que F par rapport à la médiatrice (BC) du segment $[FP_1)$.

Il s'ensuit que : $FF' < F'P_1$

c'est-à-dire : $FF' < 2a$.

La conique $\mathscr{C}$ est alors une **ellipse**.

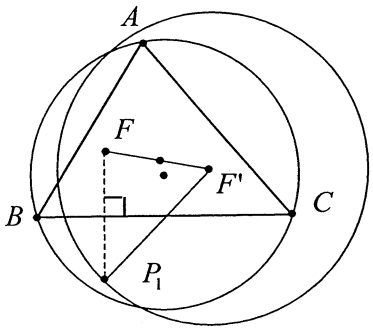


Fig. 183

b) On choisit F dans $\mathscr{A}_1$

Dans ce cas F' appartient à $\mathscr{A}_2$.

F' est donc situé du même côté que P_1 par rapport à la médiatrice (BC) du segment $[FP_1]$.

Il s'ensuit que : $FF' > F'P_1$

c'est-à-dire : $FF' > 2a$.

La conique $\mathscr{C}$ est alors une **hyperbole**.

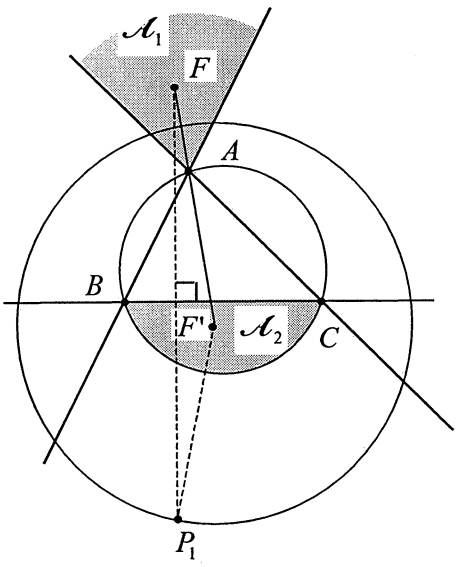


Fig. 184

c) On choisit F dans $\mathscr{A}_2$

Dans ce cas F' appartient à $\mathscr{A}_1$.

On retrouve une configuration analogue à la précédente en permutant F et F'.

La conique $\mathscr{C}$ est encore une **hyperbole**.

d) On choisit F dans $\mathscr{A}_3$

Dans ce cas F' appartient à $\mathscr{A}_3$.

F' est donc situé du même côté que F par rapport à la médiatrice (BC) du segment $[FP_1]$.

Il s'ensuit que : $FF' < F'P_1$

c'est-à-dire : $FF' < 2a$.

La conique $\mathscr{C}$ est alors une **ellipse**.

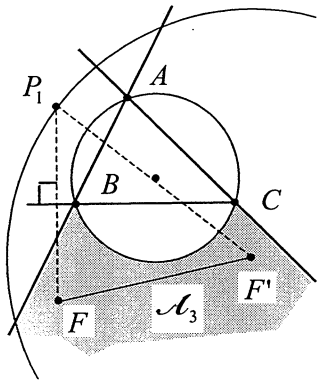


Fig. 185

e) Autres éventualités

On établit de façon analogue que :

- Si F est élément de $\mathscr{B}_1$ ou $\mathscr{B}_2$, ou $\mathscr{C}_1$ ou $\mathscr{C}_2$ alors la conique $\mathscr{C}$ est une **hyperbole**.
- Si F est élément de $\mathscr{B}_3$ ou $\mathscr{C}_3$ alors la conique $\mathscr{C}$ est une **ellipse**.

2.5 Détermination des points de contact : troisième théorème de Poncelet

Ce théorème fournit, entre autres, un procédé de construction des points de contact de la conique avec les côtés du triangle.

Dans un plan $\mathscr{P}$, étant donné un triangle ABC et un point F pris en dehors de ses côtés, soit T_1, T_2, T_3 les points de contact sur $(BC),(CA)$ et (AB) de la conique $\mathscr{C}$ de foyer F tangente aux trois côtés du triangle.

Alors :

Le point T_1 appartient à l'isogonale de (FA) par rapport aux droites (FB) et (FC)

Le point T_2 appartient à l'isogonale de (FB) par rapport aux droites (FC) et (FA)

Le point T_3 appartient à l'isogonale de (FC) par rapport aux droites (FA) et (FB).

Démonstration

Nous allons distinguer deux éventualités

a) La conique $\mathscr{C}$ est une parabole

Nous avons : (avec les notations habituelles)

$$2\,\widehat{(\overrightarrow{FT_1},\overrightarrow{FB})} = 2\,\widehat{(\overrightarrow{FT_1},\overrightarrow{FR})} + 2\,\widehat{(\overrightarrow{FR},\overrightarrow{FB})}$$

$$= 2\,\widehat{(\overrightarrow{FT_1},\overrightarrow{FR})} + 2\,\widehat{(\overrightarrow{PR},\overrightarrow{PB})}$$

(cocyclicité de R, B, F et P)

$$= 2\,\widehat{(\overrightarrow{FT_1},\overrightarrow{FR})} + 2\,\widehat{(\overrightarrow{P_1T_1},\overrightarrow{P_1P})}$$

(car $\overrightarrow{P_1T_1} \perp \overrightarrow{PR}$ et $\overrightarrow{P_1P} \perp \overrightarrow{PB}$)

$$= 2\,\widehat{(\overrightarrow{FT_1},\overrightarrow{FR})} + 2\,\widehat{(\overrightarrow{FP},\overrightarrow{FT_1})}$$

(effet de $s_{(BC)}$)

$$= 2\,\widehat{(\overrightarrow{FP},\overrightarrow{FR})}$$

$$= 2\,\widehat{(\overrightarrow{BP},\overrightarrow{BR})}$$ (cocyclicité de R, B, F et P)

$$= 2\,\widehat{(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})} = 2\,\widehat{(\overrightarrow{FC},\overrightarrow{FA})}$$ (cocyclicité de A, B, C et F).

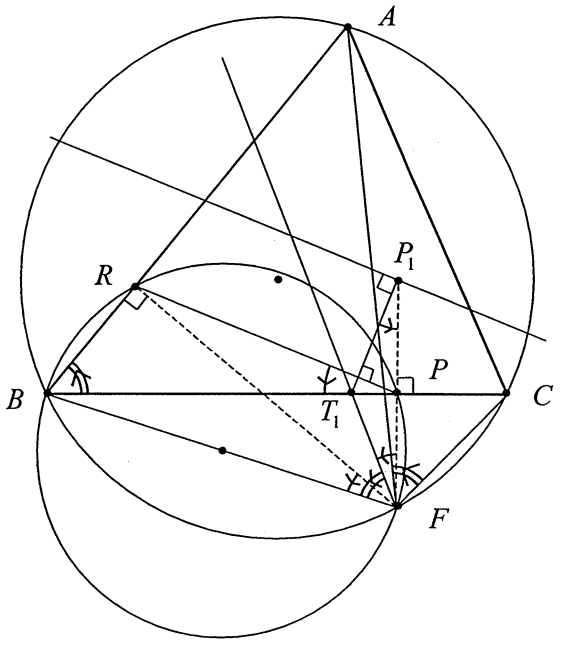


Fig. 186

Dès lors, l'égalité : $2\,\widehat{(\overrightarrow{FT_1},\overrightarrow{FB})} = 2\,\widehat{(\overrightarrow{FC},\overrightarrow{FA})}$ prouve que (FT_1) est l'isogonale de (FA) par rapport aux droites (FB) et (FC).

Les autres résultats annoncés s'établissent de la même manière.

b) La conique $\mathscr{C}$ est à centre

Soit F' l'autre foyer de la conique $\mathscr{C}$; P', Q', R' ses projetés orthogonaux sur (BC), (CA), (AB) ; P_1', Q_1', R_1' ses symétriques par rapport à ces mêmes droites.

Commençons par rappeler que : (voir figure 187).

- Les points P', Q', R' sont sur le cercle principal de la conique $\mathscr{C}$.
- Les points P_1', Q_1', R_1' sont sur le cercle directeur centré en F de la conique $\mathscr{C}$.
- Le point de contact T_1 de $\mathscr{C}$ et de la droite (BC) appartient à la droite (FP_1').
- L'homothétie de centre F' et de rapport 2 transforme la médiatrice du segment $[Q'R']$ en l'isogonale (AF) de (AF') par rapport à (AB) et (AC) (ce résultat a été établi dans le problème introductif des points isogonaux par rapport à un triangle – voir §(1.1) question (2-a) –

Or cette homothétie transforme le triangle $P'Q'R'$ en le triangle $P_1'Q_1'R_1'$.

Il s'ensuit que (AF) est une médiatrice du triangle $P_1'Q_1'R_1'$ (celle du segment $[Q_1'R_1']$).

On établit de même que (FB) est la médiatrice du segment $[R_1'P_1']$ et (FC) celle du segment $[P_1'Q_1']$ de sorte que les projetés orthogonaux I et J du point P_1' sur (FB) et (FC) sont les pieds de ces médiatrices. Il s'ensuit que la droite (IJ) est parallèle à la droite $(Q_1'R_1')$ – voir aussi figures 188 et 189 –

Cela dit, l'isogonale de (FP_1') par rapport aux droites (FB) et (FC) est l'orthogonale à la droite (IJ) passant par F (propriété caractéristique).

Cette isogonale est donc la droite (FA) car la médiatrice (FA) de $[Q_1'R_1']$ est banalement orthogonale à la parallèle (IJ) à la droite $(Q_1'R_1')$.

Dès lors, le point de contact T_1 de la conique $\mathscr{C}$ avec la droite (BC) étant un point de (FP_1') ; on peut donc énoncer : « T_1 appartient à l'isogonale de (FA) par rapport aux droites (FB) et (FC) ».

- Les deux autres résultats annoncés s'établissent de la même manière.

Remarque :

Le deuxième théorème de Poncelet découle du troisième.

La preuve en est faite page suivante.

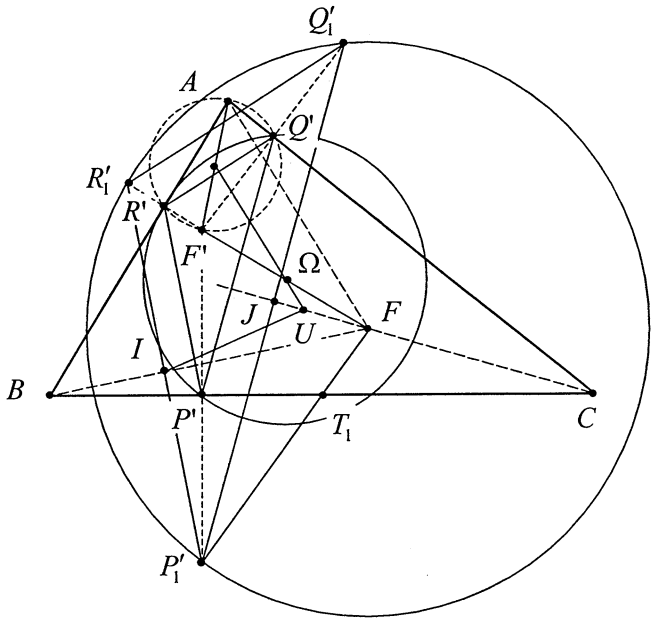
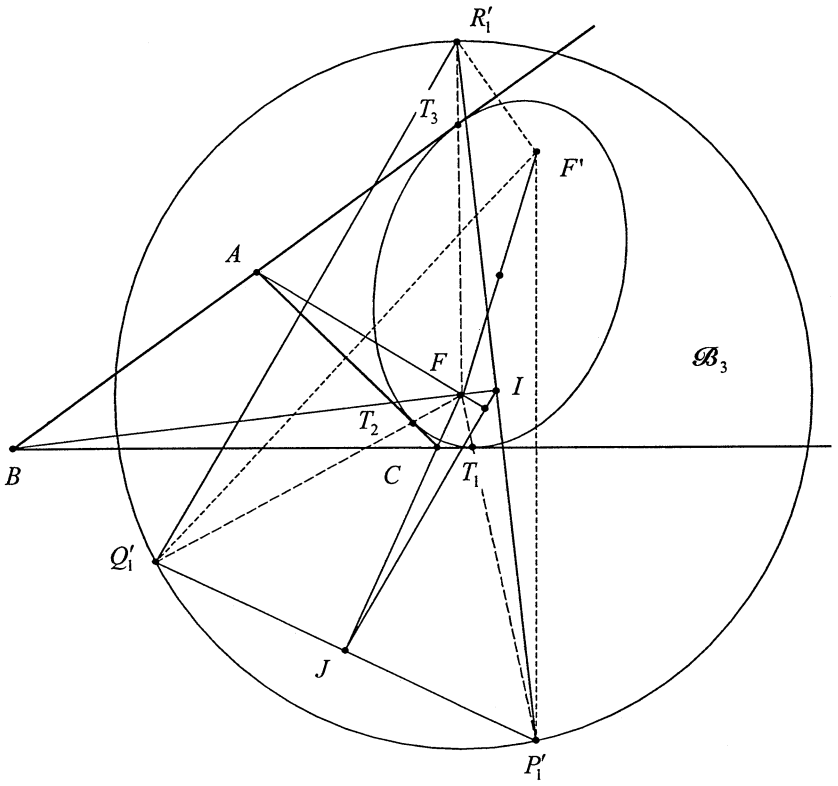


Fig. 187

L'isogonale (AF) de (AF') par rapport à (AB) et (AC) est une médiatrice du triangle $P_1'Q_1'R_1'$.



F appartient à $\mathscr{B}_3$.

La conique $\mathscr{C}$ est une ellipse.

Fig. 188

F appartient à $\mathscr{A}_1$.

La conique $\mathscr{C}$ est une hyperbole.

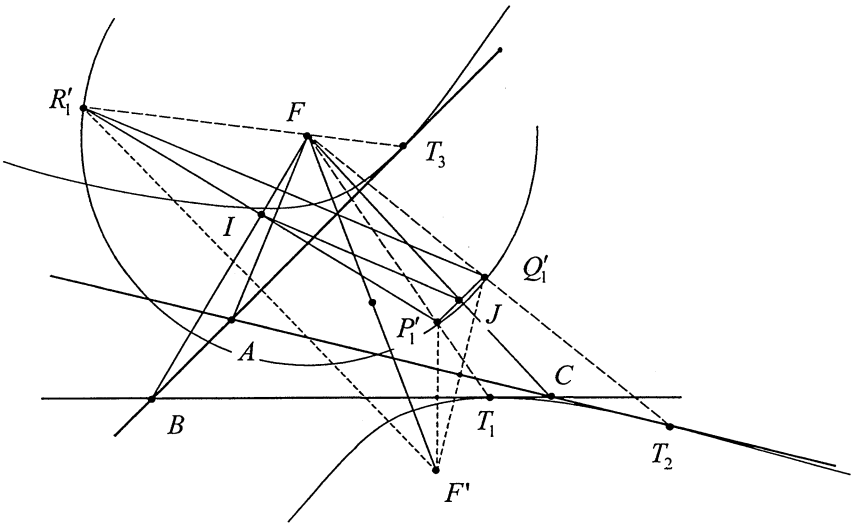


Fig. 189

Soit une conique $\mathscr{C}$ de foyer F, un point A extérieur à cette conique ; T et T' les points de contact des tangentes à $\mathscr{C}$ issues de A.

Une troisième tangente à $\mathscr{C}$ coupe (AT) en C et (AT') en B. Alors :

- (FT) est l'isogonale de (FB) par rapport à (FC) et (FA) d'où : $2\,\widehat{(\overrightarrow{FT},\overrightarrow{FC})} = 2\,\widehat{(\overrightarrow{FA},\overrightarrow{FB})}$ (1)

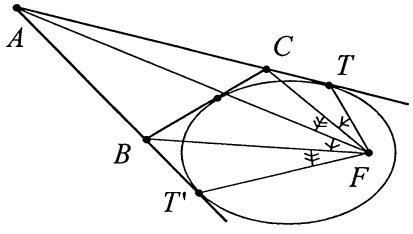


Fig. 190

- (FT') est isogonale de (FC) par rapport à (FA) et (FB) d'où $2\ \widehat{(\overrightarrow{FC},\overrightarrow{FA})} = 2\ \widehat{(\overrightarrow{FB},\overrightarrow{FT'})}$ (2)

En ajoutant membre à membre les égalités (1) et (2) on obtient :

$$2\ \widehat{(\overrightarrow{FT},\overrightarrow{FA})} = 2\ \widehat{(\overrightarrow{FA},\overrightarrow{FT'})}$$

égalité qui prouve que (FA) est une bissectrice des droites (FT) et (FT').

2.6 Résumé des principaux résultats acquis

Dans un plan $\mathscr{P}$, étant donné un triangle ABC de cercle circonscrit Γ :

1. Pour tout point F de l'ensemble $\mathscr{P} \setminus \left[(BC)\cup(CA)\cup(AB)\right]$ il existe une conique $\mathscr{C}$ de foyer F et une seule tangente aux trois côtés du triangle ABC.

2. Soit T_1, T_2 et T_3 les points de contact de $\mathscr{C}$ sur (BC), (CA) et (AB). Alors :

   T_1 appartient à isogonale de (FA) par rapport aux droites (FB) et (FC)

   T_2 appartient à isogonale de (FB) par rapport aux droites (FC) et (FA)

   T_3 appartient à isogonale de (FC) par rapport aux droites (FA) et (FB)

3. La nature de la conique $\mathscr{C}$ dépend du choix de F dans $\mathscr{P} \setminus \left[(BC)\cup(CA)\cup(AB)\right]$.

   Les notations utilisées étant celles mentionnées dans la figure 191 :

   - Si F est élément de $\Gamma \setminus \{A,B,C\}$ alors $\mathscr{C}$ est la *parabole* ayant pour directrice la droite de Steiner de F relative au triangle ABC.
   - Si F est élément de $\mathscr{T}\cup\mathscr{A}_3\cup\mathscr{B}_3\cup\mathscr{C}_3$ alors $\mathscr{C}$ est l'*ellipse* ayant pour *cercle principal* celui passant par les projetés orthogonaux de F sur les droites (BC), (CA), et (AB).
   - Si F est élément de $\mathscr{A}_1\cup\mathscr{A}_2\cup\mathscr{B}_1\cup\mathscr{B}_2\cup\mathscr{C}_1\cup\mathscr{C}_2$ alors $\mathscr{C}$ est l'*hyperbole* ayant pour *cercle principal* celui passant par les projetés orthogonaux de F sur les droites (BC), (CA), et (AB).

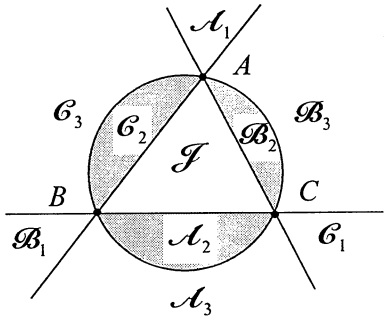


Fig. 191

Note du rédacteur :

Pour harmoniser ces résultats on pourrait appeler "*cercle de Simson du point F relatif au triangle ABC*" le cercle passant par les projetés orthogonaux de F sur les côtés du triangle ABC.

3. Transformé d'un cercle par affinité

3.1 Objectif de cette étude – Stratégie adoptée

3.1.1 Objectif

Dans un plan $\mathscr{P}$, étant donné un cercle $\mathscr{C}$, on cherche à déterminer la nature de la courbe $\mathscr{C}'$ image de $\mathscr{C}$ par une affinité agissant dans $\mathscr{P}$.

3.1.2 Stratégie

Soit O le centre du cercle $\mathscr{C}$; Δ_0 et Δ deux droites disjointes, Δ_0 passant par O ; φ_0 et φ deux affinités ayant respectivement pour droites Δ_0 et Δ, dirigées par la même droite d et ayant le même rapport λ.

Il est clair que φ_0 et φ ont la même associée vectorielle ($\widetilde{\varphi}_0 = \widetilde{\varphi}$).

(Dans le plan pointé $\mathscr{P}_0$ cette affinité vectorielle s'identifie à l'affinité φ_0.)

En posant $O' = \varphi(O)$, pour tout point M de $\mathscr{P}$, nous avons :

$$\overrightarrow{O'\varphi(M)} = \overrightarrow{\varphi(0)\varphi(M)} = \widetilde{\varphi}\left(\overrightarrow{OM}\right) = \widetilde{\varphi}_0\left(\overrightarrow{OM}\right) \text{ car } \widetilde{\varphi} = \widetilde{\varphi}_0$$
$$= \overrightarrow{O\varphi_0(M)}$$

On en déduit : $\overrightarrow{O'O} = \overrightarrow{\varphi(M)\varphi_0(M)}$.

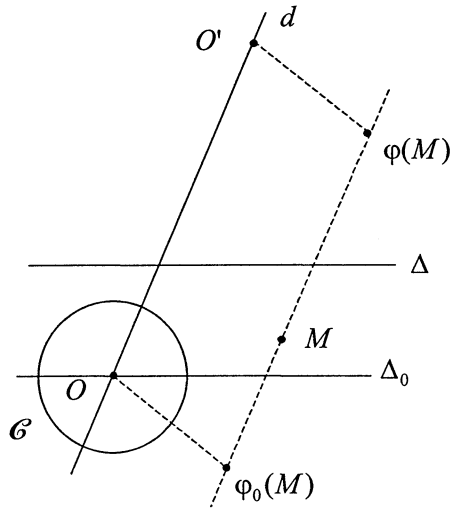


Fig. 192

Légende : la figure est réalisée avec $\lambda = -2$.

Le schéma :

$$M \xmapsto{\varphi} \varphi(M) \xmapsto{t_{\overrightarrow{O'O}}} \varphi_0(M)$$
$$\varphi_0$$

se traduit alors par l'égalité $\varphi_0 = t_{\overrightarrow{O'O}} \circ \varphi$. En particulier, nous avons : $\varphi_0(\mathscr{C}) = t_{\overrightarrow{O'O}}[\varphi(\mathscr{C})]$.

Les translations ne changeant pas la nature des courbes, pour connaître celle de la courbe $\mathscr{C}'$ image d'un cercle $\mathscr{C}$ de centre O par une affinité agissant dans son plan, il **suffit** de déterminer la nature de la courbe $\varphi(\mathscr{C})$ lorsque φ est une affinité dont la droite Δ ne passe pas par O.

Dans la suite de ce paragraphe, étant donné dans un plan $\mathscr{P}$ un cercle $\mathscr{C}$ de centre O, l'affinité φ sera **délibérément** déterminée par la donnée de sa droite Δ (Δ ne passant pas par O) et par celle, dans $\mathscr{P} \setminus \Delta$ du point O' image de O.

Ceci dit, la résolution de ce problème nécessite quelques étapes. Nous les programmons ci-après.

3.2 Construction de quelques points de $\mathscr{C}'$ et des tangentes en ces points.

Nous admettons ici qu'une affinité conserve les contacts. Dès lors, en prenant appui sur les résultats précédemment acquis – voir chapitre I § 8 – on peut construire quelques points de $\mathscr{C}'$ ainsi que les tangentes en ces points. Par exemple – c.f. figure 193 – le point A' est l'image par φ du point A de $\mathscr{C}$ et la tangente à $\mathscr{C}'$ en A' est l'image par φ de la tangente en A à $\mathscr{C}$.

Après avoir réalisé quelques constructions similaires, on peut aisément conjecturer que la courbe $\mathscr{C}'$ est une ellipse de centre O'. Nous allons maintenant nous efforcer de valider cette conjecture.

3.3 Centre, diamètres de $\mathscr{C}'$

Considérons l'application composée $\varphi \circ s \circ \varphi^{-1}$ où s désigne la symétrie de centre O. Nous avons :

$$\begin{cases} \varphi \circ s \circ \varphi^{-1}(O') = O' \\ \varphi \circ \widetilde{s} \circ \varphi^{-1} = \left(\widetilde{\varphi} \circ -\widetilde{I}\right) \circ \widetilde{\varphi^{-1}} = \left(-\widetilde{I} \circ \widetilde{\varphi}\right) \circ \widetilde{\varphi}^{-1} = -\widetilde{I} \circ \left(\widetilde{\varphi} \circ \widetilde{\varphi}^{-1}\right) = -\widetilde{I} \end{cases}$$

ce qui prouve que $\varphi \circ s \circ \varphi^{-1}$ est la symétrie de centre O'.

En outre : $\varphi \circ s \circ \varphi^{-1}(\mathscr{C}') = \mathscr{C}'$. Donc le point O' est un centre de symétrie de $\mathscr{C}'$.

Cela dit, $\mathscr{C}'$ ne peut pas avoir d'autres centres de symétrie sinon elle serait invariante par translation et donc non "finie" ce qui est exclu.

On dira alors que :

- O' est le *centre* de $\mathscr{C}'$
- Toute droite passant par O' est un *diamètre* de $\mathscr{C}'$.

3.4 Diamètres conjugués de $\mathscr{C}'$

On se propose maintenant de porter réponse à la question suivante :

Étant donné un diamètre d_1' de $\mathscr{C}'$, peut-on trouver un autre diamètre d_2' de $\mathscr{C}'$ et un réel λ de $\mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ tels que l'affinité φ de droite d_1' selon d_2', de rapport λ laisse la courbe $\mathscr{C}'$ globalement invariante ?

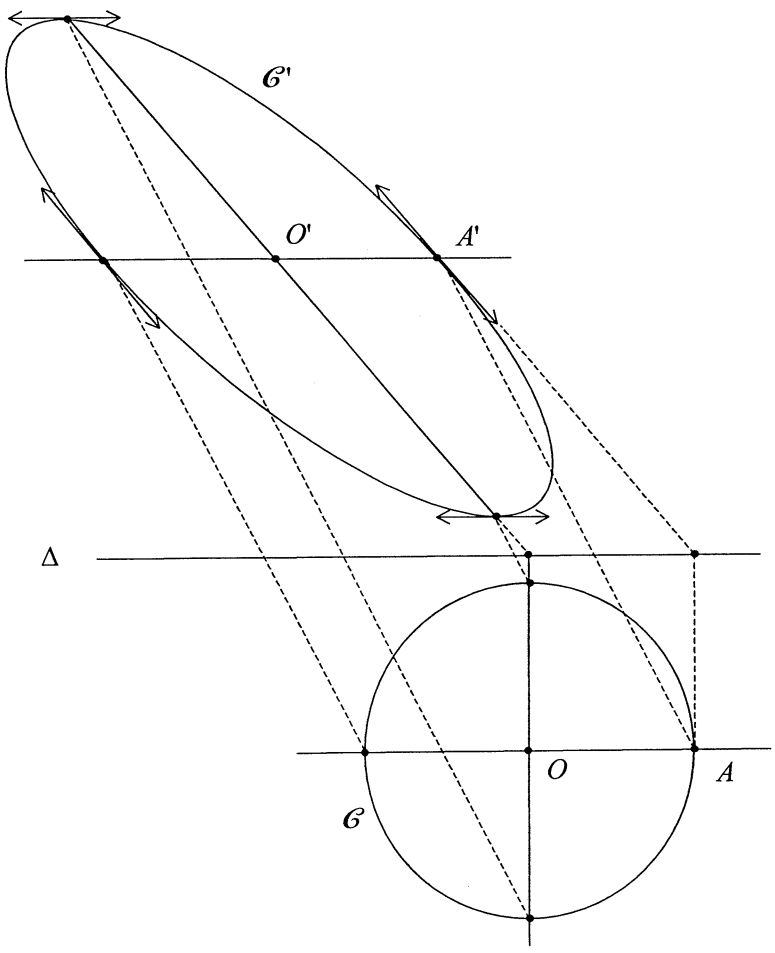


Fig. 193

Notre recherche prendra appui sur la propriété suivante que nous rappelons :

« si des applications affines f et g agissant dans un plan $\mathscr{P}$ ont même action sur trois points non alignés de ce plan, alors on a : $f = g$. »

a) Supposons que cette affinité *f* existe

Posons : $d_1 = \varphi^{-1}(d_1')$ et $d_2 = \varphi^{-1}(d_2')$. Alors il est facile de vérifier que la composée $\varphi^{-1} \circ f \circ \varphi$ – notée ψ – est une application affine qui laisse

- le diamètre d_1 de $\mathscr{C}$ **point par point** invariant
- le diamètre d_2 de $\mathscr{C}$ globalement invariant
- le cercle $\mathscr{C}$ globalement invariant

ψ fixe donc les points O et I – voir figure ci-contre – et transforme J en K sinon ψ fixerait le triplet (O,I,J) et on aurait $\psi = id_{\mathscr{P}}$ (application identique de $\mathscr{P}$), puis : $f = \varphi \circ \psi \circ \varphi^{-1} = id_{\mathscr{P}}$ ce qui est contraire à l'hypothèse.

ψ est donc une application affine agissant dans $\mathscr{P}$ qui a même action sur le triplet (O,I,J) que l'affinité de droite d_1, selon d_2, de rapport -1. L'application ψ est donc cette affinité.

En outre, comme $\psi(\mathscr{C}) = \mathscr{C}$, ψ ne peut être que l'affinité de droite d_1 selon d_2 avec $d_2 \perp d_1$ autrement dit ψ est la **réflexion** de droite d_1 (les seules affinités conservant un cercle sont l'identité et les réflexions).

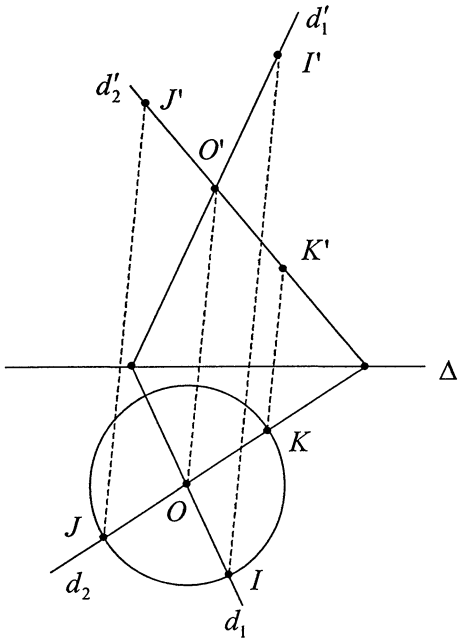


Fig. 194

En rappelant que $f = \varphi \circ \psi \circ \varphi^{-1}$, la situation se résume ainsi :

Si f existe, alors f ne peut être que la composée $\varphi \circ \psi \circ \varphi^{-1}$ où ψ est une réflexion ayant pour axe un diamètre de $\mathscr{C}$.

b) Preuve de l'existence de *f*

Soit d_1' un diamètre de $\mathscr{C}'$; d_1 le diamètre de $\mathscr{C}$ transformé de d_1' par φ^{-1}, d_2 le diamètre de $\mathscr{C}$ orthogonal à d_1 ; ψ la réflexion de droite d_1.

Posons : $d_2' = \varphi(d_2)$ et considérons l'application $f = \varphi \circ \psi \circ \varphi^{-1}$.

On vérifie facilement que :

- *f fixe chaque point du diamètre d_1'.*
- *f transforme chaque point du diamètre d_2' en son symétrique par rapport à O' car f conserve les milieux.*

f est donc une application affine agissant dans $\mathscr{P}$ qui a même action sur trois points non alignés de $\mathscr{P}$ que l'affinité de droite d_1' selon d_2', de rapport -1.

f est donc cette affinité, appelée *symétrie* de droite d_1' selon d_2'.

En outre, il est clair que :

$$f(\mathscr{C}') = \varphi \circ \psi \circ \varphi^{-1}(\mathscr{C}') = \mathscr{C}'.$$

Ainsi la symétrie f de droite d_1' selon d_2' est effectivement une affinité de droite d_1' qui laisse la courbe $\mathscr{C}'$ globalement invariante.

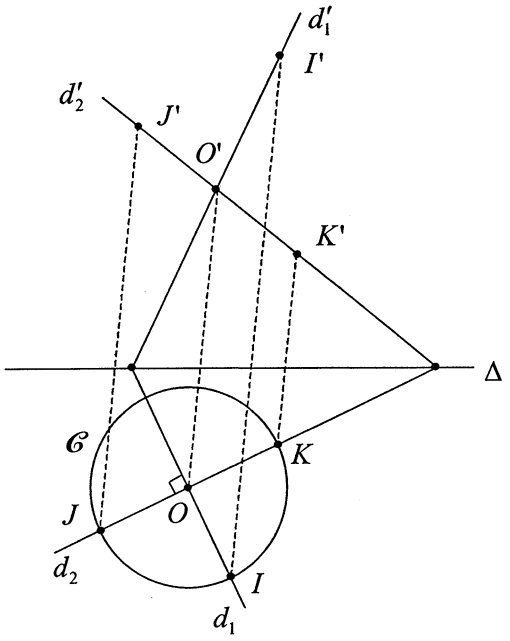


Fig. 195

c) Conclusion

Pour tout diamètre d_1' de $\mathscr{C}'$, il existe **une et une seule** affinité de droite d_1' qui laisse $\mathscr{C}'$ globalement invariante.

Elle est dirigée par le diamètre d_2' de $\mathscr{C}'$ image par f du diamètre d_2 de $\mathscr{C}$ orthogonal au diamètre $\varphi^{-1}(d_1')$. Son rapport est -1.

Le diamètre d_2' de $\mathscr{C}'$ est appelé diamètre conjugué du diamètre d_1'.

Par ailleurs, on vérifie facilement que la symétrie g de droite d_2' selon d_1' laisse aussi la courbe $\mathscr{C}'$ globalement invariante ($g = s_{O'} \circ f$).

Le diamètre d_1' de $\mathscr{C}'$ est donc le diamètre conjugué de d_1'.

Pour traduire cette situation, on dira que d_1' et d_2' sont deux diamètres conjugués de $\mathscr{C}'$. La donnée d'un de ces diamètres fixe l'autre.

3.5 Axes de réflexion de $\mathscr{C}'$: existence et construction

À ce stade de notre étude, l'existence de diamètres axes de réflexion de $\mathscr{C}'$ est manifestement équivalente à celle de diamètres conjugués de $\mathscr{C}'$ orthogonaux.

a) Supposons que d_1' et d_2' soient deux de ces diamètres.

Deux éventualités peuvent alors se produire.

1. L'un ou l'autre de ces diamètres est parallèle à Δ.

   Par exemple, si d_2' est parallèles à Δ.

   Alors on a :

   $$d_2 \,//\, \Delta \text{ puis } d_1 \perp \Delta \text{ et } d_1' \perp \Delta.$$

   Comme le point d'intersection de d_1 et Δ appartient à d_1', on en déduit que : $d_1' = d_1$.

   Cette éventualité ne peut donc se produire que si la droite (OO') qui dirige l'affinité φ est orthogonale à Δ.

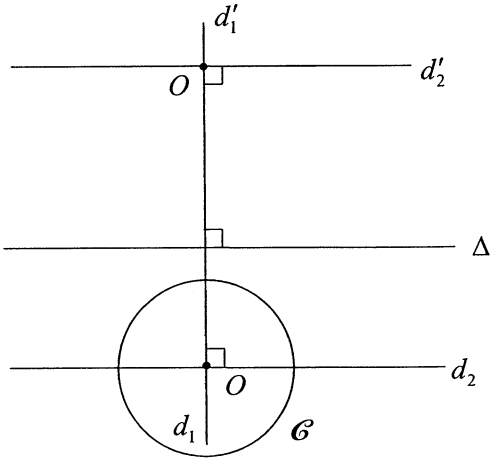


Fig. 196

2. d_1' et d_2' coupent Δ.

   Notons B_1 et B_2 ces points d'intersection. Ils appartiennent respectivement aux diamètres orthogonaux d_1 et d_2 du cercle $\mathscr{C}$.

   Les quatre points B_1, B_2, O et O' appartiennent donc au cercle de diamètre $[B_1 B_2]$.

Autrement dit, B_1 et B_2 sont les points d'intersection de la droite Δ et du cercle Γ passant par O et ayant pour centre le point d'intersection Ω de Δ et de la médiatrice du segment $[OO']$.

En résumé, la courbe $\mathscr{C}'$ ne peut admettre que au plus deux diamètres comme axes de réflexion.

b) Preuve de l'existence d'axes de réflexion pour $\mathscr{C}'$, construction de ces axes

Cette preuve se fait de façon banale. Deux cas sont à distinguer :

- La droite (OO') est orthogonale à Δ.

  (On dit alors que φ est l'affinité orthogonale de droite Δ qui envoie O sur O'). Il est clair que la droite (OO') et la perpendiculaire en O' à (OO') sont deux diamètres conjugués orthogonaux de $\mathscr{C}'$, donc deux axes de réflexion de cette courbe.

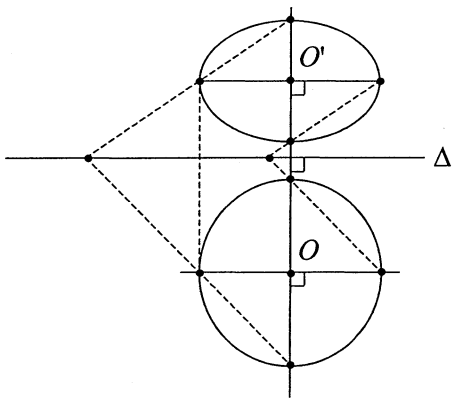


Fig. 197

- La droite (OO') n'est pas orthogonale à Δ.

  Soit Ω le point d'intersection de Δ et de la médiatrice du segment $[OO']$, Γ le cercle centré en Ω et passant par O, B_1 et B_2 les points d'intersection de Δ et de Γ.

  Les droites $(O'B_1)$ et $(O'B_2)$ sont alors les images par φ des diamètres orthogonaux (OB_1) et (OB_2) du cercle $\mathscr{C}$. À ce titre, ce sont des diamètres conjugués de la courbe $\mathscr{C}'$.

  Comme le cercle Γ passe aussi par O', les diamètres $(O'B_1)$ et $(O'B_2)$ sont orthogonaux et donc sont deux axes de réflexion de la courbe $\mathscr{C}'$.

  La construction des deux axes de réflexion de $\mathscr{C}'$, dans le cas où φ n'est pas une affinité orthogonale, découle immédiatement de celle des points d'intersection B_1 et B_2 du cercle Γ et de la droite Δ – voir de celle d'un de ces deux points –

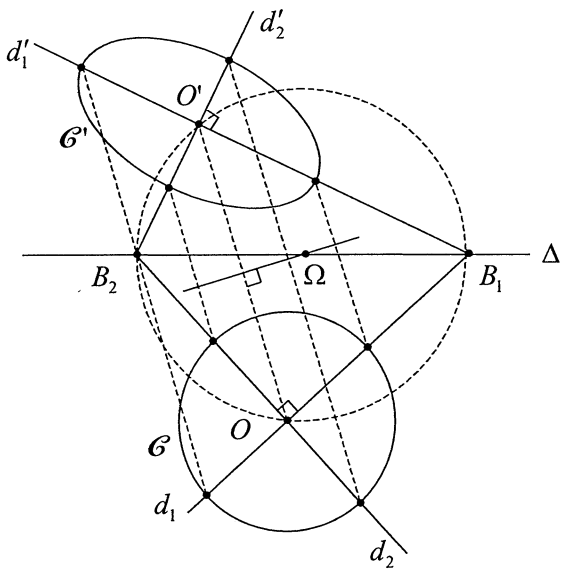


Fig. 198

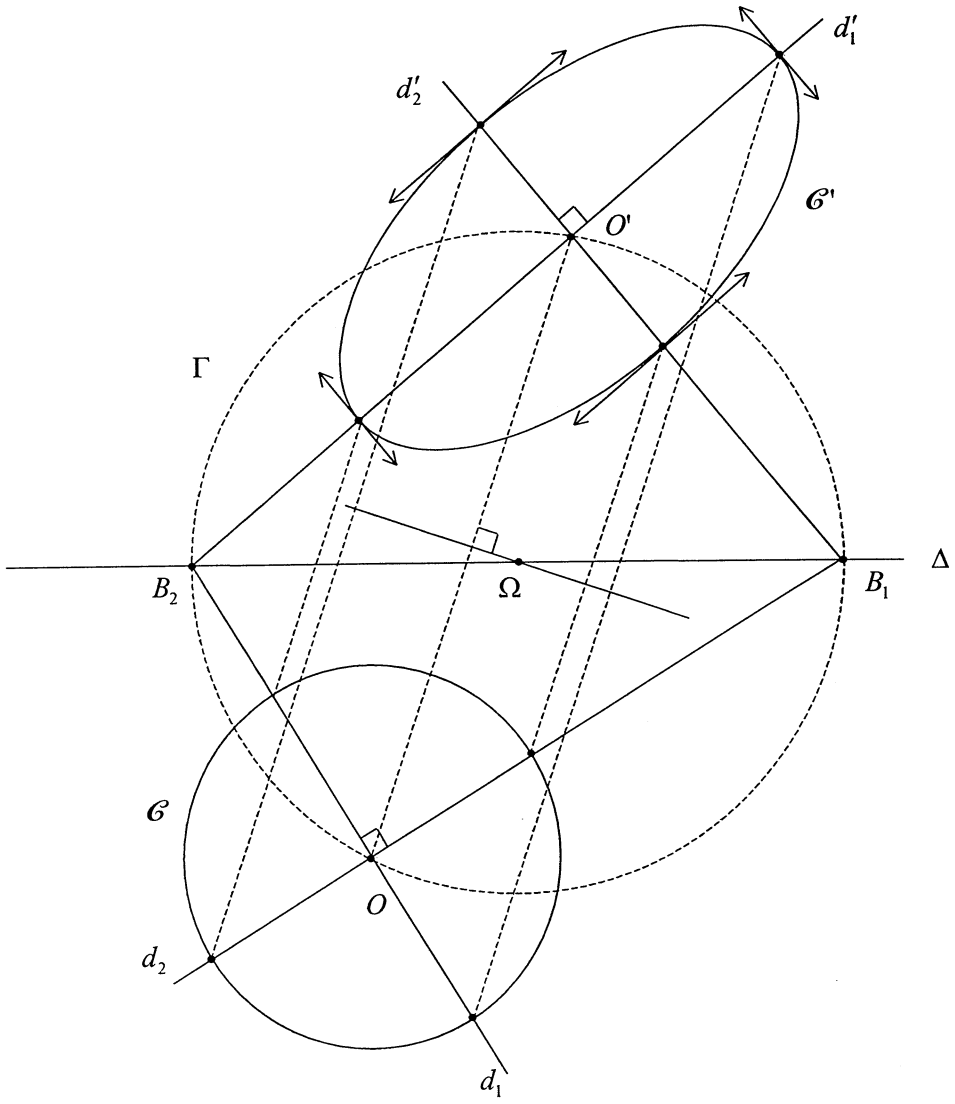


Fig. 199

3.6 Nature de la courbe $\mathscr{C}'$

Les notations utilisées sont celles de la figure 200. Les droites $(O'I')$ et $(O'J')$ sont les diamètres de $\mathscr{C}'$ axes de réflexion de cette courbe et on a : $O'I' \geq O'J'$. On choisit pour unité de longueur celle du segment $[OI]$. Les points U et V sont tels que le triplet (O',U,V) soit un repère orthonormal de $\mathscr{P}$.

En posant : $O'I' = a$ et $O'J' = b$, on a donc : $\overrightarrow{O'U} = \frac{1}{a}\overrightarrow{O'I'}$ et $\overrightarrow{O'V} = \frac{1}{b}\overrightarrow{O'J'}$.

Pour établir que $\mathscr{C}'$ est une ellipse, nous allons déterminer une équation de cette courbe dans le repère (O',U,V).

a) Relations entre les coordonnées $\begin{cases} \text{d' un point } M \text{ de } \mathscr{P} \text{ dans le repère } (O,I,J) \\ \text{du point } \varphi(M) \text{ dans le repère } (O',I',J') \end{cases}$

Soit M un point de $\mathscr{P}$, (x,y) son couple de coordonnées dans le repère orthonormal (O,I,J).

Nous avons :

$$\overrightarrow{O'\varphi(M)} = \overrightarrow{\varphi(O)\varphi(M)} = \tilde{\varphi}\left(\overrightarrow{OM}\right) = \tilde{\varphi}\left(x\overrightarrow{OI} + y\overrightarrow{OJ}\right) = x\tilde{\varphi}\left(\overrightarrow{OI}\right) + y\tilde{\varphi}\left(\overrightarrow{OJ}\right)$$

$$= x\overrightarrow{O'I'} + y\overrightarrow{O'J'}$$

car $\tilde{\varphi}$ est linéaire

Dans le repère **orthogonal** (O',I',J') le couple de coordonnées du point $\varphi(M)$ est encore (x,y).

b) Relations entre les coordonnées du point $\varphi(M)$ dans les repères (O',I',J') et (O',U,V)

Notons (X,Y) le couple des coordonnées de $\varphi(M)$ dans le repère (O',U,V).

Nous avons d'une part :

$$\overrightarrow{O'\varphi(M)} = x\overrightarrow{O'I'} + y\overrightarrow{O'J'}$$

d'autre part :

$$\overrightarrow{O'\varphi(M)} = X\overrightarrow{O'U} + Y\overrightarrow{O'V} = X\left(\frac{1}{a}\overrightarrow{O'I'}\right) + Y\left(\frac{1}{b}\overrightarrow{O'J'}\right) = \frac{X}{a}\overrightarrow{O'I'} + \frac{Y}{b}\overrightarrow{O'J'}$$

Comme $\left(\overrightarrow{O'I'},\overrightarrow{O'J'}\right)$ est une base du plan vectoriel $\overrightarrow{\mathscr{P}}$, on en déduit les égalités :

$$x = \frac{X}{a} \text{ et } y = \frac{Y}{b}.$$

c) Équations de la courbe $\mathscr{C}'$

$\varphi(M) \in \mathscr{C}' \Leftrightarrow M \in \mathscr{C}$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$ ——— équation de $\begin{cases} \text{de } \mathscr{C} \text{ dans le repère } \textbf{orthonormal } (O,I,J) \\ \text{de } \mathscr{C}' \text{ dans le repère } \textbf{orthogonal } (O',I',J') \end{cases}$

$\Leftrightarrow \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$ ——— équation de $\mathscr{C}'$ dans le repère **orthonormal** (O',U,V)

La courbe $\mathscr{C}'$ est donc une **ellipse** de centre O'.

d) Construction des foyers F_1 et F_2 de l'ellipse $\mathscr{C}'$

Nous avons :

$$\begin{cases} J'F_1 + J'F_2 = 2\,I'O' = 2a \\ J'F_1 = J'F_2 \end{cases}$$

d'où on tire :

$$J'F_1 = J'F_2 = I'O' = a.$$

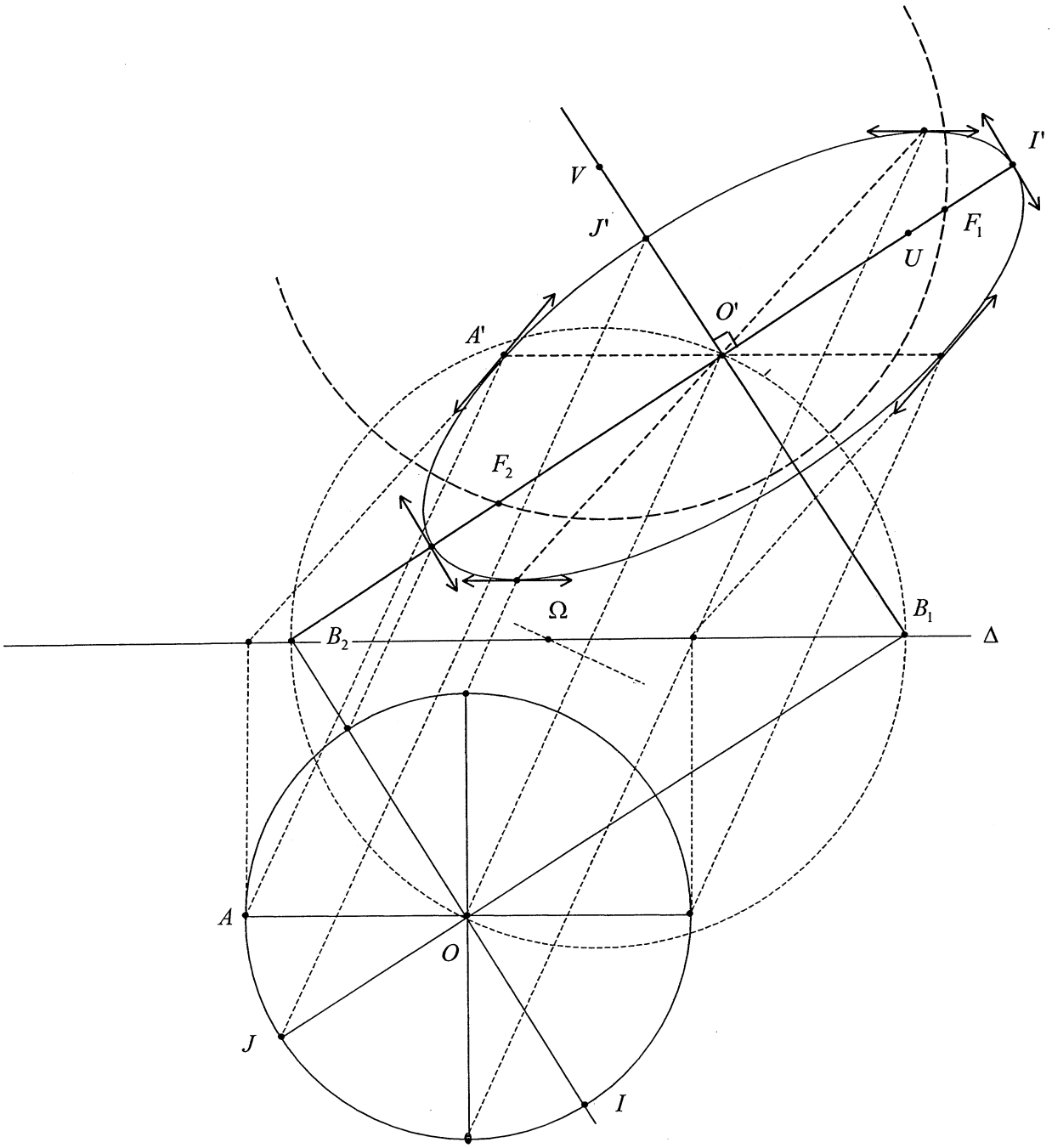


Fig. 200

Les foyers F_1 et F_2 de $\mathscr{C}'$ sont donc les points d'intersection de la droite $(O'I')$ et du cercle de centre V et de rayon a.

3.7 Résumé des principaux résultats acquis

- Toute affinité φ transforme un cercle $\mathscr{C}$ de centre O en une ellipse de centre $\varphi(O)$.
- Tout diamètre $\mathscr{D}$ de l'ellipse $\varphi(\mathscr{C})$ est l'axe d'une symétrie qui laisse $\varphi(\mathscr{C})$ globalement invariante. Cette symétrie est dirigée par le diamètre conjugué $\mathscr{L}$ de $\mathscr{D}$.

  Comme la symétrie d'axe $\mathscr{L}$ dirigée par $\mathscr{D}$ laisse aussi l'ellipse $\varphi(\mathscr{C})$ globalement invariante, pour construire $\mathscr{L}$ il suffit de tracer une corde non diamétrale de $\varphi(\mathscr{C})$ parallèle à $\mathscr{D}$. Alors $\mathscr{L}$ passe par le milieu de cette corde.

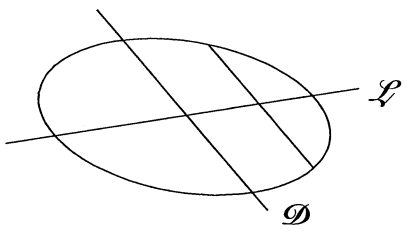


Fig. 201

4. Étude réciproque

On se propose ici de résoudre le problème suivant :

> Dans un plan $\mathscr{P}$, étant donné une ellipse $\mathscr{E}$ et une droite Δ, peut-on trouver une affinité Φ de droite Δ qui transforme l'ellipse $\mathscr{E}$ en un cercle ?

On note O' le centre de $\mathscr{E}$; d_1' et d_2' les diamètres axes de réflexion de $\mathscr{E}$.

4.1 Cas général : la droite Δ ne passe pas par O'

a) Supposons qu'il existe une telle affinité

Soit $\mathscr{C}$ le cercle $\Phi(\mathscr{E})$ et O le centre de ce cercle.

L'affinité Φ^{-1} de droite Δ qui envoie O sur O' transforme donc $\mathscr{C}$ en $\mathscr{E}$. On peut alors réinvestir les notations utilisées ainsi que les résultats acquis dans l'étude précédente – voir §3 et figures suivantes –

En outre, nous allons faire intervenir le diamètre de l'ellipse $\mathscr{E}$ parallèle à la droite $(I'J')$ et celui qui passe par le milieu du segment $[I'J']$.

Ces deux diamètres sont conjugués. On les notera $\mathscr{D}'$ et $\mathscr{L}'$, on posera :

$$\mathscr{D} = \Phi(\mathscr{D}') \text{ et } \mathscr{L} = \Phi(\mathscr{L}').$$

Cela dit, trois éventualités sont à envisager :

- Les diamètres d_1' et d_2' coupent Δ et,
  - soit les diamètres $\mathscr{D}'$ et $\mathscr{L}'$ coupent Δ (Figure 202 (1))
  - soit l'un des diamètres $\mathscr{D}'$ ou $\mathscr{L}'$ est parallèle à Δ. (Figure 203 (2))
- L'un des diamètres d_1' ou d_2' est parallèle à Δ. (Figure 204 (3))

Il est alors facile de justifier que :

1. Le centre O du cercle $\mathscr{C}$ appartient :
   - Dans le cas (1)

     $\begin{cases}\text{au cercle de diamètre } [B_1 B_2] \\ \text{au cercle de diamètre } [PQ] \text{ (car } \mathscr{D} \perp \mathscr{L})\end{cases}$

   - Dans le cas (2)

     $\begin{cases}\text{au cercle de diamètre } [B_1 B_2] \\ \text{à l' orthogonal en } \Omega \text{ à la droite } \Delta\end{cases}$

   - Dans le cas (3)

     $\begin{cases}\text{à l' orthogonal à la droite } \Delta \text{ passant par } O' \\ \text{au cercle de diamètre } [PQ] \text{ (car } \mathscr{D} \perp \mathscr{L})\end{cases}$

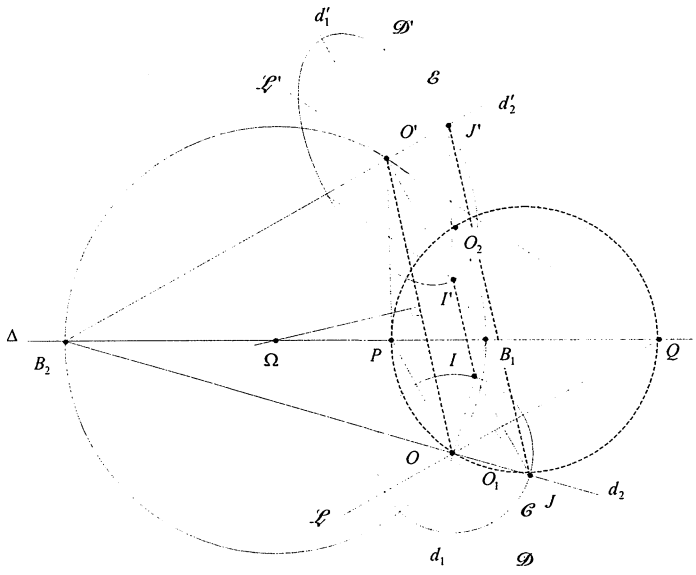


Fig. 202

2. Les deux ensembles cités dans chacun des cas précédents ont deux points communs O_1 et O_2 (on pourra remarquer dans chaque cas le quadruplé de points (B_1, B_2, P, Q) est harmonique, l'un de ces points pouvant être rejeté à l'infini).

   Ainsi, lorsque Δ ne passe pas par le centre O' de l'ellipse donnée $\mathscr{E}$, il ne peut exister que au plus deux affinités de droite Δ qui transforment $\mathscr{E}$ en un cercle, à savoir celle qui envoie O' sur O_1 et celle qui envoie O' sur O_2.

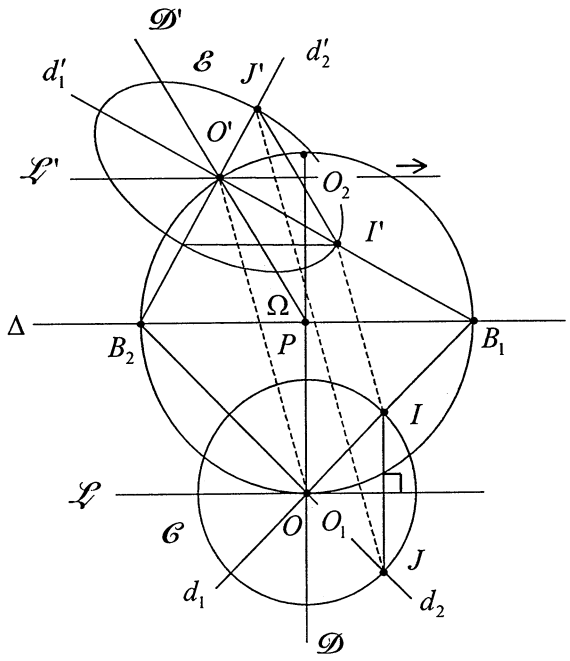


Fig. 203

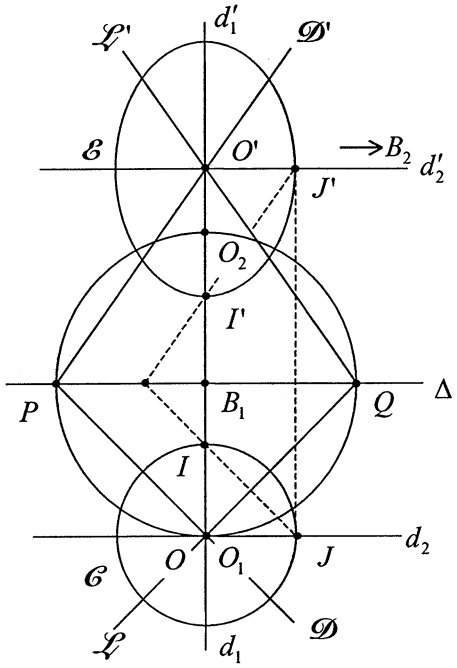


Fig. 204

b) Preuve de l'existence de deux affinités de droite Δ transformant $\mathscr{E}$ en un cercle

Soit O un des deux points O_1 et O_2 précédemment définis, Φ l'affinité de droite Δ qui envoie O' sur O ; I' (resp. J') un point commun à $\mathscr{E}$ et d_1' (resp. d_2') ; I et J les images de I' et J' par Φ.

On choisit comme unité de longueur pour le plan $\mathscr{P}$ celle du segment $[OI]$.

On note U et V les points des demi-droites $[O'I')$ et $[O'J')$ tels que $OU = OV = 1$ et on pose $O'I' = a$ et $O'J' = b$.

Pour les autres notations, on se reportera aux figures 205 à 208.

L'ellipse $\mathscr{E}$ a alors pour équation :

$\dfrac{X^2}{a^2} + \dfrac{Y^2}{b^2} = 1$ dans le repère **orthonormal** (O', U, V)

$x^2 + y^2 = 1$ dans le repère **orthogonal** (O', I', J')

$\widetilde{\Phi}$ étant linéaire, la courbe $\Phi(\mathscr{E})$ a donc pour équation :

$x^2 + y^2 = 1$ dans le repère (O, I, J)

Pour montrer que la courbe $\Phi(\mathscr{E})$ est un cercle reste donc à établir que le triplet (O, I, J) est un repère **orthonormal** de $\mathscr{P}$ et ceci dans tous les cas de figure envisageables.

- Le repère (O, I, J) est **orthogonal** du fait que :
  - $\begin{cases} I \in (O, B_1) \text{ et } J \in (O, B_2) \\ \text{le triangle } OB_1B_2 \text{ est rectangle en } O \end{cases}$ cas (1) et (2)
  - $(O, I) \perp \Delta$ et $(O, J) \parallel \Delta$ cas (3)

- Le repère (O,I,J) est **normal** du fait que :

$$\begin{cases} \mathscr{L} \text{ passe par le milieu de } [IJ] & \text{car } \Phi \text{ conserve les milieux} \\ \mathscr{D} \text{ est parallèle à } (I,J) & \text{car } \Phi \text{ conserve le parallélisme} \\ \mathscr{L} \perp \mathscr{D} & \text{car } \begin{cases} \text{le triangle } OPQ \text{ est rectangle en } O, & \text{cas (1) et (3)} \\ \mathscr{L} \,\backslash\backslash\, \Delta \text{ et } \Delta \perp \mathscr{D}, & \text{cas (2)} \end{cases} \end{cases}$$

La droite $\mathscr{L}$ est donc à la fois la médiane et la hauteur issue(s) de O du triangle OIJ. Par suite ce triangle est isocèle en O et on a : $OJ = OI = 1$.

Ainsi l'affinité Φ_1 (resp. Φ_2) de droite Δ qui envoie O' sur O_1 (resp. sur O_2) transforme l'ellipse $\mathscr{E}$ en un cercle de centre O_1 (resp. O_2).

Les rapports λ_1 et λ_2 de ces affinités sont opposés. En effet, nous avons :

$$\lambda_1 = -\frac{RO_1}{RO'} = -\frac{KO_1}{KH},\ \lambda_2 = \frac{SO_2}{SO'} = \frac{KO_2}{KH} \text{ et } KO_1 = KO_2$$

car O_1 et O_2 sont symétriques par rapport à Δ (voir figure 208).

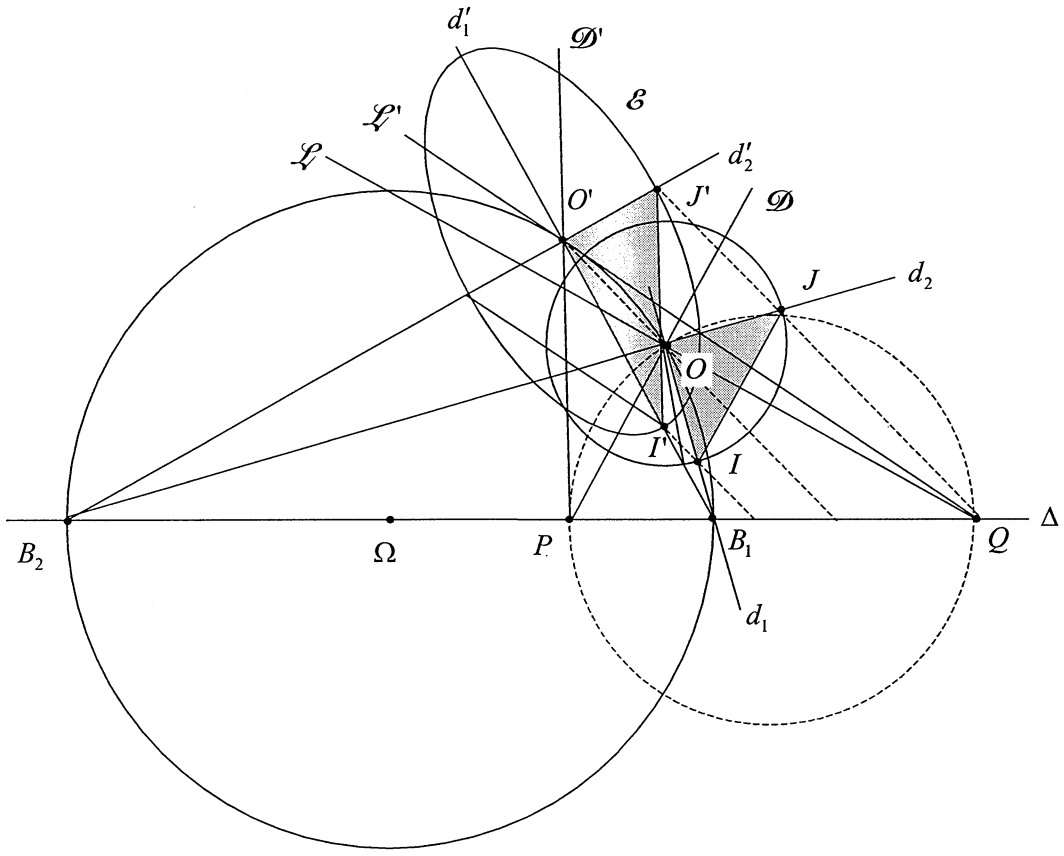


Fig. 205

cas (1)

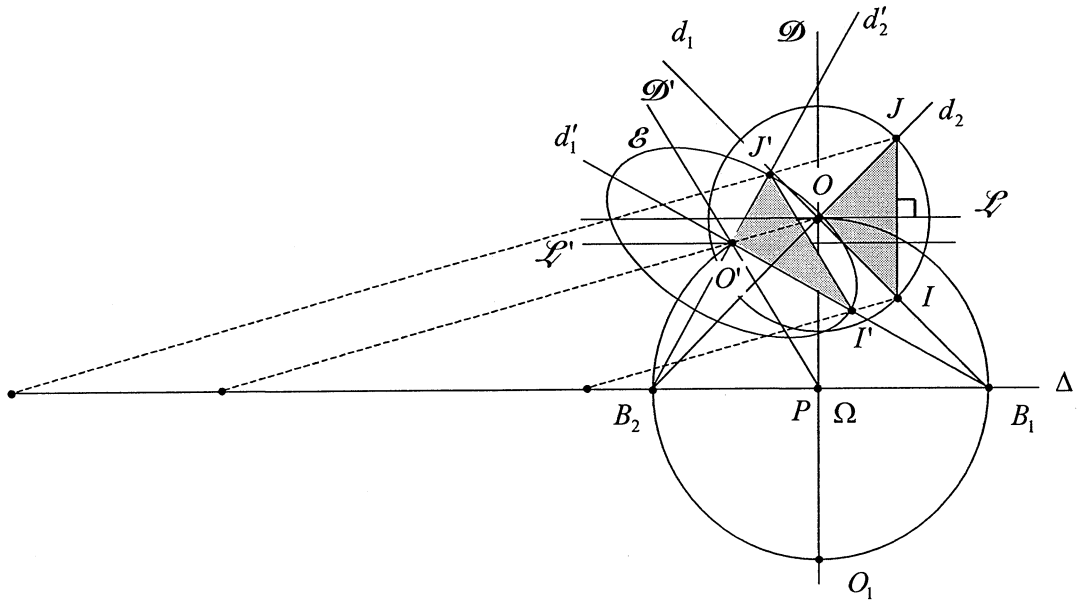


Fig. 206 cas (2)

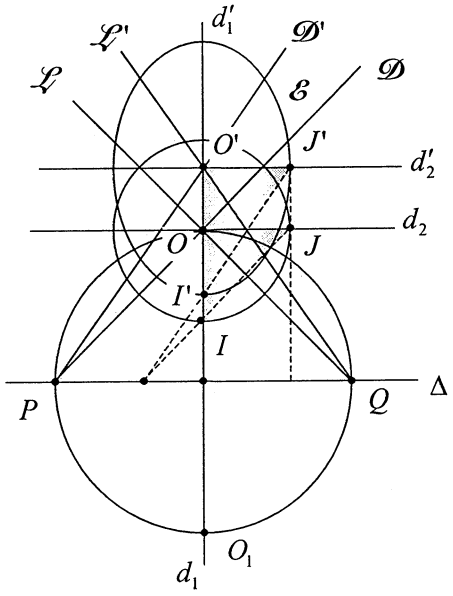


Fig. 207

cas (3)

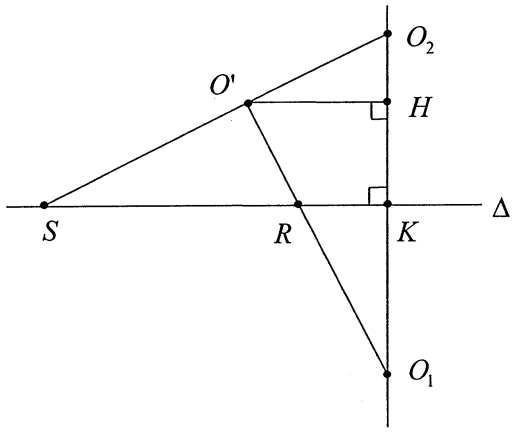


Fig. 208

Par ailleurs, les cercles $\Phi_1(\mathscr{E})$ et $\Phi_2(\mathscr{E})$ ont le même rayon. En effet, soit M' un point de l'ellipse $\mathscr{E}$ tel que la droite $(O'M')$ soit parallèle à Δ, M_1 et M_2 les images de M' par Φ_1 et Φ_2.

Alors M_1 et M_2 sont respectivement des points des cercles $\Phi_1(\mathscr{E})$ et $\Phi_2(\mathscr{E})$, et de manière évidente, on a – voir figure ci-contre –

$$\overrightarrow{O_1M_1} = \overrightarrow{O'M'} = \overrightarrow{O_2M_2}$$

Donc, a fortiori : $O_1M_1 = O_2M_2$.

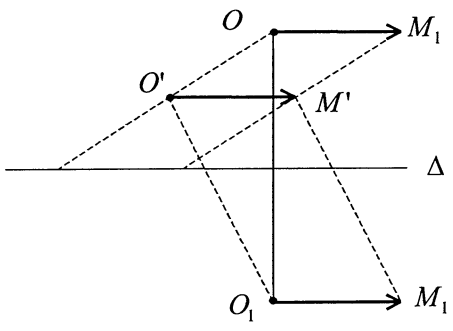


Fig. 209

4.2 Cas particuliers : la droite Δ passe par le centre O' de l'ellipse $\mathscr{E}$

Soit Δ' une droite disjointe de Δ, Φ et Ψ deux affinités de droites Δ et Δ' dirigées par la même droite et de même rapport.

Nous savons que – c.f. § 3.1 –

en posant $O = \Phi(O')$, on a :

$$\Psi = t_{\overrightarrow{OO'}} \circ \Phi$$

Il en résulte que :

$\Psi(\mathscr{E})$ est un cercle $\Leftrightarrow t_{\overrightarrow{OO'}}[\Phi(\mathscr{E})]$ est un cercle

$\Leftrightarrow \Phi(\mathscr{E})$ est un cercle

$\Leftrightarrow$ Φ est l' une des deux affinités Φ_1 ou Φ_2 qui transforme $\mathscr{E}$ en cercle

$\Leftrightarrow \Psi = \Psi_1 = t_{\overrightarrow{O_1O'}} \circ \Phi_1$ ou $\Psi = \Psi_2 = t_{\overrightarrow{O_2O'}} \circ \Phi_2$

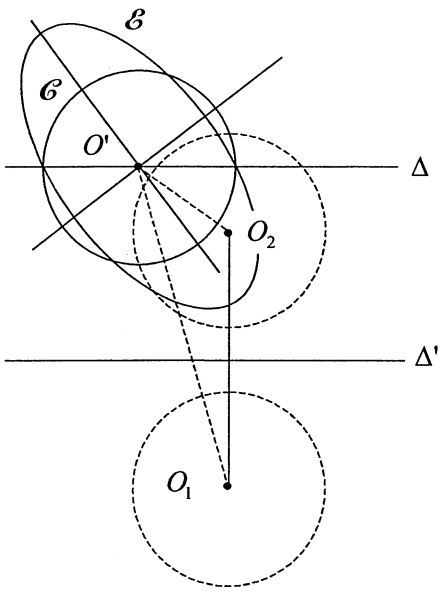


Fig. 210

Ainsi, lorsque Δ passe par le centre O' de l'ellipse $\mathscr{E}$, il existe encore exactement deux affinités Ψ_1 et Ψ_2 qui transforment $\mathscr{E}$ en un cercle.

Compte tenu des résultats précédemment établis, il est clair que :

- les affinités Ψ_1 et Ψ_2 ont des rapports opposés.
- $\Psi_1(\mathscr{E}) = \Psi_2(\mathscr{E})$.

Le cercle $\mathscr{C}$ ainsi obtenu est centré en O'. Les cordes diamétrales de $\mathscr{C}$ et de $\mathscr{E}$ portées par Δ sont confondues.

4.3 Résumé des principaux résultats acquis

Dans un plan $\mathscr{P}$, étant donné une ellipse $\mathscr{E}$ et une droite Δ, il existe exactement deux affinités de droite Δ qui transforment $\mathscr{E}$ en un cercle. Ces deux affinités ont des rapports opposés.

Conséquences

Dans un plan $\mathscr{P}$, pour toute ellipse $\mathscr{E}$, il existe au moins un cercle $\mathscr{C}$ et une affinité φ tels que $\varphi(\mathscr{E}) = \mathscr{C}$.

Dès lors, la propriété énoncée dans le paragraphe 3.7, et qui concerne l'ellipse transformée d'un cercle par affinité est à porter au crédit de n'importe quelle ellipse.

Tout diamètre $\mathscr{D}$ d'une ellipse $\mathscr{E}$ est l'axe d'une symétrie qui la laisse globalement invariante.

Cette symétrie est dirigée par le diamètre conjugué $\mathscr{L}$ de $\mathscr{D}$.

Pour construire $\mathscr{L}$ il suffit de tracer une corde non diamétrale de $\mathscr{E}$ parallèle à $\mathscr{D}$. Alors $\mathscr{L}$ passe par le milieu de cette corde.

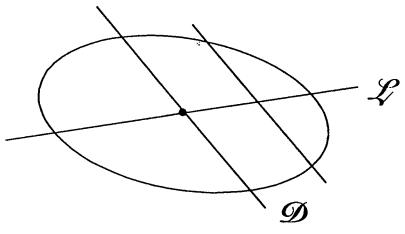


Fig. 211

Exercice 1

Montrer que, hormis les affinités citées dans le résultat précédent et l'application identique, il n'existe pas d'autres affinités planes laissant globalement invariante une ellipse donnée.

Exercice 2

Soit, dans un plan $\mathscr{P}$ une ellipse $\mathscr{E}$, un point A extérieur à $\mathscr{E}$, T_1 et T_2 les points de contact des tangentes à $\mathscr{E}$ issues de A.

Montrer que le diamètre de $\mathscr{E}$ passant par A passe aussi par le milieu de la corde $[T_1 T_2]$.

5. Ellipses inscrites dans un triangle : CHOIX DES POINTS DE CONTACT

5.1 Exposé du problème

On dispose maintenant de deux procédés pour construire une ellipse inscrite dans un triangle ABC donné dans un plan $\mathscr{P}$.

- **Procédé 1**

  On choisit un point F dans l'intérieur $\mathscr{T}$ du triangle ABC. On sait alors que l'ellipse de foyer F et de cercle principal PQR – où P, Q et R sont les projetés orthogonaux de F sur les droites (BC), (CA) et (AB) – est inscrite dans le triangle ABC. Sa construction point par point à partir de ces données est "classique".

- **Procédé 2**

  On choisit un point A' dans $\mathscr{P} \setminus [(BC) \cup \{A\}]$.

  On construit le cercle $\mathscr{C}$ inscrit dans le triangle $A'BC$.

  On construit ensuite l'image de $\mathscr{C}$ par l'affinité φ de droite (BC) qui envoie A' sur A.

  L'ellipse $\varphi(\mathscr{C})$ est alors inscrite dans le triangle ABC.

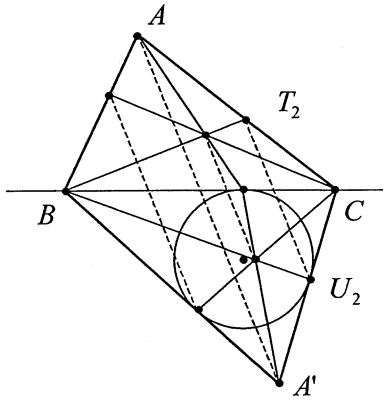


Fig. 212

Il est clair que l'une ou l'autre de ces façons d'opérer ne nous offre pas la possibilité de choisir les points de contact de l'ellipse sur les côtés du triangle. Pourtant, si l'on fait référence à la géométrie analytique, on sait qu'une conique est déterminée par cinq conditions tangentielles indépendantes. Le fait que l'ellipse soit inscrite dans le triangle ABC fournit trois de ces conditions. Reste à choisir deux points de contact – par exemple l'un sur $]BC[$, l'autre sur $]CA[$ – pour atteindre le quota imposé.

Cela dit, en usant du second procédé, il paraît possible de se démarquer des considérations analytiques pour traiter ce problème. En effet, on sait que les droites joignant un des sommets du triangle $A'BC$ au point de contact du cercle inscrit avec le côté opposé à ce sommet sont concourantes.[1]

L'affinité φ conservant les contacts, il s'ensuit que les droites joignant un des sommets du triangle ABC au point de contact de l'ellipse $\varphi(\mathscr{C})$ avec le côté opposé à ce sommet sont aussi concourantes. Le choix de deux points de contact fixe donc le troisième.

Dès lors, il reste à vérifier qu'on peut effectivement choisir de façon arbitraire deux des points de contact lorsque l'on veut inscrire une ellipse dans un triangle ABC.

---

[1] Voir chapitre 1 §7.4.

Ce qui nous conduit à résoudre le problème suivant :

Dans un plan $\mathscr{P}$, étant donné un triangle ABC, un point T_1 de $]BC[$, un point T_2 de $]CA[$, peut-on construire une ellipse $\mathscr{E}$ inscrite dans le triangle ABC, tangente en T_1 à (BC) et en T_2 à (CA) ?

5.2 Résolution

a) Supposons qu'une telle ellipse existe

Alors il existe une unique affinité négative Φ de droite (BC) qui transforme l'ellipse $\mathscr{E}$ en un cercle.[2] Ce cercle – noté $\mathscr{C}$ – est inscrit dans le triangle $A'BC$ où $A' = \Phi(A)$. Il est tangent à (BC) en T_1 et à (CA') en un point T_2' transformé de T_2 par Φ.

Notons T_3' le point de contact de $\mathscr{C}$ avec $(A'B)$, D le transformé de T_1 par l'homothétie $h_{C,T_2\mapsto A}$ et par E le symétrique de D par rapport à T_1.

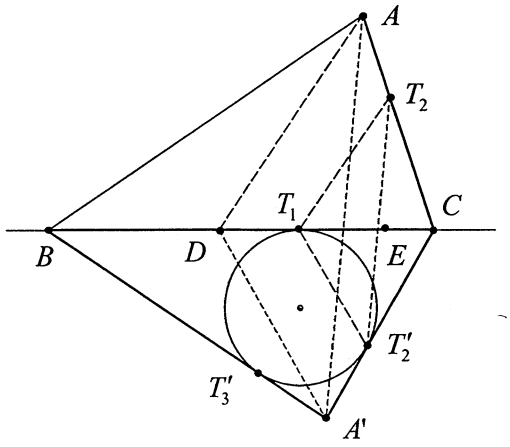


Fig. 213

- Du schéma :

$$(T_1, T_2') \xmapsto{h_{C,T_2\mapsto A}} (D, A')$$

Il découle que le triangle CDA' est homothétique au triangle CT_1T_2' isocèle en C. Le point A' appartient donc au cercle Γ_C de centre C passant par le point D.

- De $\begin{cases} BT_3' = BT_1 \\ T_3'A' = T_2'A' = T_1D = T_1E \end{cases}$

on tire : $BT_3' + T_3'A' = BT_1 + T_1E$

égalité qui se traduit ici par : $BA' = BE$.

Le point A' appartient donc au cercle Γ_B de centre B passant par le point E.

Concluons : Si l'ellipse $\mathscr{E}$ existe, alors cette ellipse ne peut être que la transformée du cercle inscrit dans le triangle $A'BC$ par l'affinité φ de droite (BC) qui envoie A' sur A ; A' étant le point d'intersection, dans le demi-plan de frontière (BC) ne contenant pas A, des cercles Γ_B et Γ_C précédemment définis.

b) Preuve de l'existence du point A' – constructions

- On place les points D et E précédemment définis.
- On trace les cercles Γ_B et Γ_C.

Il est clair que :

$$\begin{cases} D \text{ appartient à la demi - droite }]T_1 B) \\ E \text{ appartient à la demi - droite }]T_1 C) \end{cases}$$

Notons R_B et R_C les rayons des cercles Γ_B et Γ_C.

---

[2] On sait qu'il existe aussi une unique affinité positive de droite (BC) qui transforme l'ellipse $\mathscr{E}$ en un cercle. Nous lui avons préféré sa concurrente dans le seul but d'avoir des figures plus "lisibles ".

Nous avons alors :

- d'une part : $R_B > BT_1$ et $R_C > CT_1$.

  On en tire : $R_B + R_c > BC$.

- d'autre part :

$$\begin{aligned}|R_B - R_C| &= |(BT_1 + T_1E) - (CT_1 + T_1D)| \\ &= |BT_1 - T_1C| \text{ car } T_1E = T_1D \\ &< BT_1 + T_1C\end{aligned}$$

c'est à dire $|R_B - R_C| < BC$.

Les inégalités $|R_B - R_C| < BC < R_B + R_C$ prouvent que les cercles Γ_B et Γ_C sont sécants. L'existence et l'unicité du point A' dans le demi-plan de frontière (BC) ne contenant pas A sont donc établies.

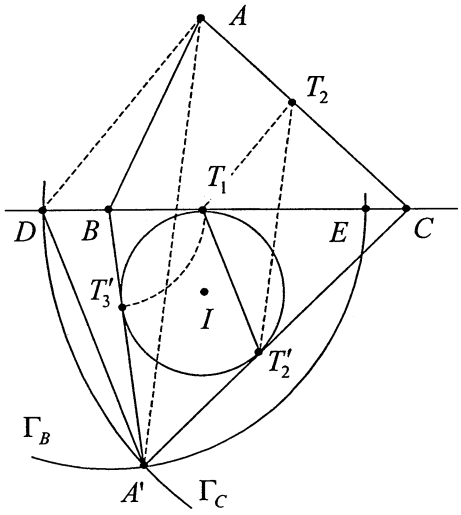


Fig. 214

c) Vérification de la conformité de figure aux conditions requises

Soit T_2' le transformé de T_2 par l'affinité Φ de droite (BC) qui envoie A sur A', T_3' le point du segment $[BA']$ vérifiant : $BT_3' = BT_1$ – voir figure 214 –

- Le cercle $\mathscr{C}_B$ de centre B qui passe par T_1 passe par T_3'.
- Du schéma : $(D, A') \xmapsto{h_{C,A\mapsto T_2}} (T_1, T_2')$ on déduit que le triangle CT_1T_2' est homothétique au triangle CDA' isocèle en C. Le cercle $\mathscr{C}_C$ de centre C passant par T_1 passe aussi par T_2'.
- Nous avons : $A'T_3' = BA' - BT_3' = BE - BT_1 = T_1E = DT_1 = A'T_2'$.

Le cercle $\mathscr{C}_{A'}$ de centre A' passant par T_2' passe aussi par T_3'.

Cela étant, les cercles $\mathscr{C}_B$, $\mathscr{C}_C$, $\mathscr{C}_{A'}$ sont deux à deux tangents extérieurement. Leur centre radical I appartient respectivement aux orthogonales en T_1 à (BC), en T_2' à (CA') et en T_3' à $(A'B)$ et on a : $IT_1 = IT_2' = IT_3'$.

Le cercle $\mathscr{C}$ de centre I passant par T_1 est donc tangent à (BC) en T_1, à (CA') en T_2' et à $(A'B)$ en T_3'.

Dès lors, l'affinité φ de droite (BC) qui envoie A' sur A transforme le cercle $\mathscr{C}$ en une ellipse $\mathscr{E}$ inscrite dans le triangle ABC et tangente en T_1 à (BC) et en T_2 à (CA).

d) Conclusion

Dans un plan $\mathscr{P}$, étant donné un triangle ABC, un point T_1 de $]BC[$ et un point T_2 de $]CA[$, il existe une et une seule ellipse $\mathscr{E}$ tangente aux trois côtés de ce triangle, et admettant T_1 et T_2 comme points de contact.

Le point de contact T_3 de $\mathscr{E}$ avec (AB) appartient à la droite (CD) où D est le point d'intersection des droites (AT_1) et (BT_2).

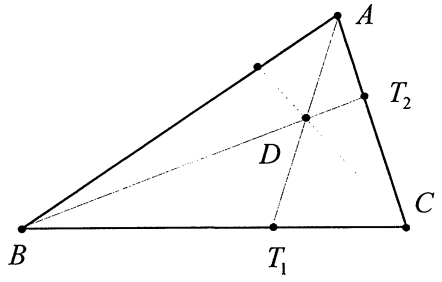


Fig. 215

Remarque :

Le point D étant élément des secteurs ouverts $\widehat{BAC}$ et $\widehat{CBA}$, le point T_3 appartient au segment "ouvert" $]AB[$.

6. Un problème de construction parmi d'autres

L'énoncé de chacun des problèmes de construction que nous proposons ici fait référence à un concept né de la constatation suivante :

Dans un plan $\mathscr{P}$, étant donné un triangle ABC et son cercle circonscrit Γ, à chaque point M de $\mathscr{P} \setminus \Gamma$ on peut faire correspondre le triangle IJK.

où

$$\begin{cases} I \text{ est le point d' intersection, autre que } A, \text{ de } (AM) \text{ et } \Gamma \\ J \text{ est le point d' intersection, autre que } B, \text{ de } (BM) \text{ et } \Gamma \\ K \text{ est le point d' intersection, autre que } C, \text{ de } (CM) \text{ et } \Gamma \end{cases}$$

Ce triangle IJK est appelé "*triangle circumpédal du point M pour le triangle ABC*".

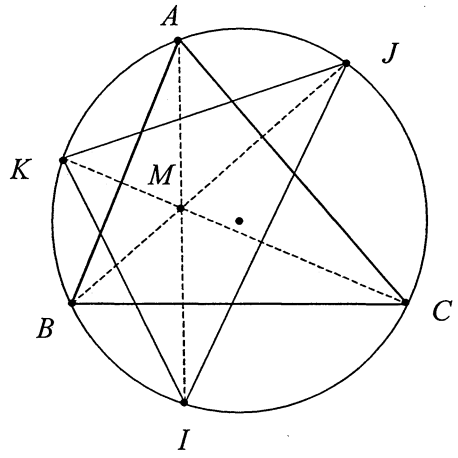


Fig. 216

Cela dit, à partir de ce concept, on peut bâtir un lot de problèmes plus ou moins musclés, ayant à une variante près le même énoncé :

Dans un plan $\mathscr{P}$, étant donné un triangle IJK, construire un triangle ABC sachant que le triangle IJK est le triangle circumpédal pour le triangle ABC d'un de ses points particuliers, par exemple :

du centre de son cercle circonscrit ;

- de son orthocentre ;
- de son centre de gravité ;
- du centre de son cercle inscrit ;
- du centre d'un de ses cercles exinscrit ;
- de son point de Lemoine (point de concours des symédianes) ;
- etc...

Parmi ces problèmes, nous avons choisi de résoudre celui où le point particulier du triangle ABC est son centre de gravité G.[3]

6.1 Caractérisation de *G* par rapport au triangle *IJK*

Le triangle ABC étant donné, désignons par :

A', B',C' les milieux de $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$

I', J', K' les milieux de $[JK]$, $[KI]$, $[IJ]$

[3] **Note du rédacteur** :

Ce problème m'a été proposé pour la première fois, dans les années 70, par le professeur Jean Colmez fondateur de l'IREM de Bordeaux. Il avait accompagné son énoncé du commentaire suivant : « j'aime mieux vous le dire tout de suite ce n'est pas de la bibine ». En clair, cela signifiait qu'il n'avait pas choisi le plus facile du lot. Par la suite Jacques Legrand, autre grand seigneur de l'IREM, l'a proposé à l'APMEP. À ma connaissance, deux solutions ont été publiées. L'une est l'oeuvre de Pierre Samuel (Orsay), l'autre de Charles Notari (Montant cap blanc).

♦ Le schéma suivant focalise l'action de la similitude inverse $\bar{s}_G$ de centre G qui envoie B sur K.

$$(B,C) \overset{\bar{S}_G}{\longmapsto} (K,J) \quad (i)$$
$$A' \longmapsto I' \quad (ii)$$

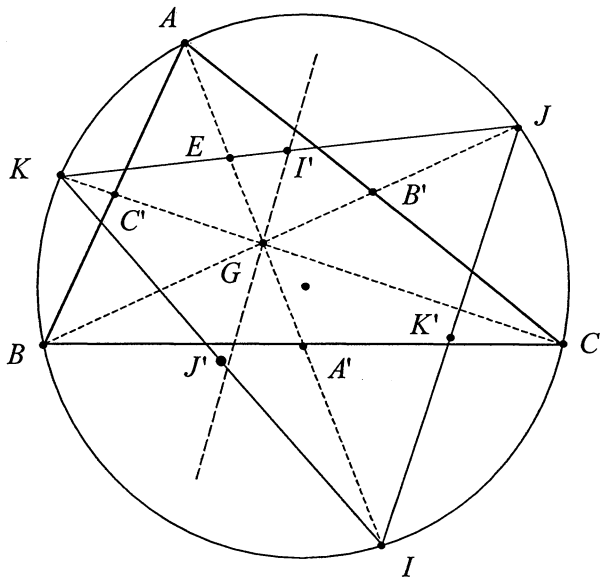


Fig. 217

(i) car B, C, K, J sont cocycliques (configuration fondamentale liée à la similitude inverse).

(ii) car $\bar{s}_G$ conserve les milieux.

(GI') est donc l'isogonale de (GA') par rapport aux droites (GB) et (GK).

Autrement dit :

(GI') est l'isogonale de (GI) par rapport aux droites (GJ) et (GK).

On établit de la même manière que :

(GJ') est l'isogonale de (GJ) par rapport aux droites (GK) et (GI).

(GK') est l'isogonale de (GK) par rapport aux droites (GI) et (GJ).

Dès lors, le troisième théorème de Poncelet permet d'affirmer que :

Les points de contact de la conique $\mathscr{C}$ de foyer G tangente aux trois côtés du triangle IJK sont les milieux I', J', K' des segments $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$.

♦ Désignons maintenant par E le point d'intersection des droites (IG) et (JK)

Le schéma $(G,I') \overset{\bar{S}_G}{\longmapsto} (G,E)$ montre que E est le pied de la symédiane issue de G du triangle GJK. Donc E appartient au segment $[JK]$. Par suite, la demi-droite $[IG)$ est continue dans le secteur ouvert $\widehat{JIK}$.

On établirait de même que la demi-droite $[JG)$ est contenue dans le secteur ouvert $\widehat{KJI}$ et donc que G est intérieur au triangle IJK. Par conséquent, la conique $\mathscr{C}$ de foyer G tangente aux trois côtés du triangle IJK est une ellipse. D'où la conclusion :

Soit dans un plan $\mathscr{P}$ un triangle ABC, *son centre de gravité G, le triangle circumpédal IJK de ce point pour le triangle ABC.*
Alors le point G est un des foyers de l'ellipse tangente aux côtés du triangle IJK et admettant les milieux de deux de ses côtés comme points de contact.

6.2 Condition nécessaire pour que le problème posé admette des solutions

De l'étude précédente, il découle que :

Dans un plan $\mathscr{P}$, **étant donné un triangle *IJK***, s'il existe un triangle ABC de centre de gravité G tel que le triangle circumpédal de G pour le triangle ABC soit le triangle IJK alors ***G* ne peut être que** l'un des foyers de l'ellipse tangente aux trois côtés du triangle IJK et admettant les milieux I' et J' des segments $[KJ]$ et $[KI]$ comme points de contact.

Le problème initialement posé admet donc **au plus** deux solutions.

6.3 Preuve de l'existence de solutions

Étant donné un triangle IJK et son cercle circonscrit Γ, soit G l'un des foyers de l'ellipse tangente aux trois côtés de ce triangle et admettant les milieux I' et J' des segments $[KJ]$ et $[KI]$ comme points de contact,

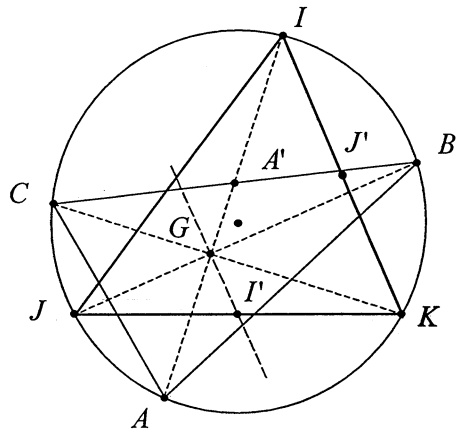


Fig. 218

A le point d'intersection, autre que I, de (IG) et Γ

B le point d'intersection, autre que J, de (JG) et Γ

C le point d'intersection, autre que K, de (KG) et Γ.

Alors : (3ème théorème de Poncelet)

(GI) est l'isogonale de (GI') par rapport à (GJ) et (GK).

Autrement dit

(GA) est la symédiane issue de G du triangle GJK. Il en découle que : (voir au besoin l'exercice 1 page ? ?)

(GA) est la médiane issue de G du triangle GCB transformé du triangle GJK par la similitude inverse de centre G qui envoie K sur B.

La droite (GA) passe donc par le milieu A' de $[BC]$. En d'autres termes la droite (GA) est une médiane du triangle ABC.

On établit de la même façon que la droite (GB) est une médiane du triangle ABC.

Conclusion

Le point G est le centre de gravité du triangle ABC et le triangle IJK est effectivement le triangle circumpédal de ce point pour le triangle ABC.

Le problème posé admet donc deux solutions hormis le cas où le triangle donné IJK est équilatéral. L'ellipse $\mathscr{E}$ est alors le cercle inscrit dans le triangle IJK. Dans ce cas, le problème admet une seule solution.

6.4 Construction des "figures-solution"

On utilise ici des résultats précédemment établis pour construire les foyers G_1 et G_2 de l'ellipse $\mathscr{E}$ tangente aux trois côtés du triangle IJK et admettant les milieux I' et J' des segments $[KJ]$ et $[KI]$ comme points de contact.

On sait en effet qu'il existe une unique affinité **négative** Φ de droite (JK) qui transforme $\mathscr{E}$ en un cercle. Ce cercle $\Phi(\mathscr{E})$ est inscrit dans le triangle $JK\Phi(I)$ et admet le milieu I' de $[KJ]$ et le milieu $\Phi(J')$ de $[K\Phi(I)]$ comme points de contact. Le triangle $JK\Phi(I)$ est donc équilatéral (I et $\Phi(I)$ étant de part et d'autre de la droite (JK)).

Le programme de construction est alors le suivant :

- On trace le triangle équilatéral $JK\Phi(I)$;
- Le cercle $\mathscr{C}$ inscrit dans ce triangle. Son centre est noté O ;
- Le point O' image de O par l'affinité Φ^{-1} – notée φ –
- Le point d'intersection Ω de $[KJ]$ et de la médiatrice du segment [OO'] ;
- Le cercle de centre Ω passant par O' – on note U et V les points d'intersection de ce cercle et de la droite (JK) –
- Les droites (OU), (OV), $(O'U)$ et $(O'V)$ – $(O'U)$ et $(O'V)$ sont les axes de réflexion de l'ellipse $\mathscr{E}$ $(\varphi(\mathscr{E})=\mathscr{E})$ –
- E_1 (resp. E_2) étant un des deux points communs de $\mathscr{C}$ et (OU) (resp. (OV)), on construit les points E_1' et E_2' de l'ellipse $\mathscr{E}$ définis par $E_1'=\varphi(E_1)$ et $E_2'=\varphi(E_2)$;
- Lorsque $O'E_1' \geq O'E_2'$ (resp. $O'E_1' < O'E_2'$) les points G_1 et G_2 sont les points d'intersection de $(O'U)$ et du cercle de centre E_2' et de rayon $O'E_1'$ (resp. de $(O'V)$ et du cercle de centre E_1' et de rayon $O'E_2'$).

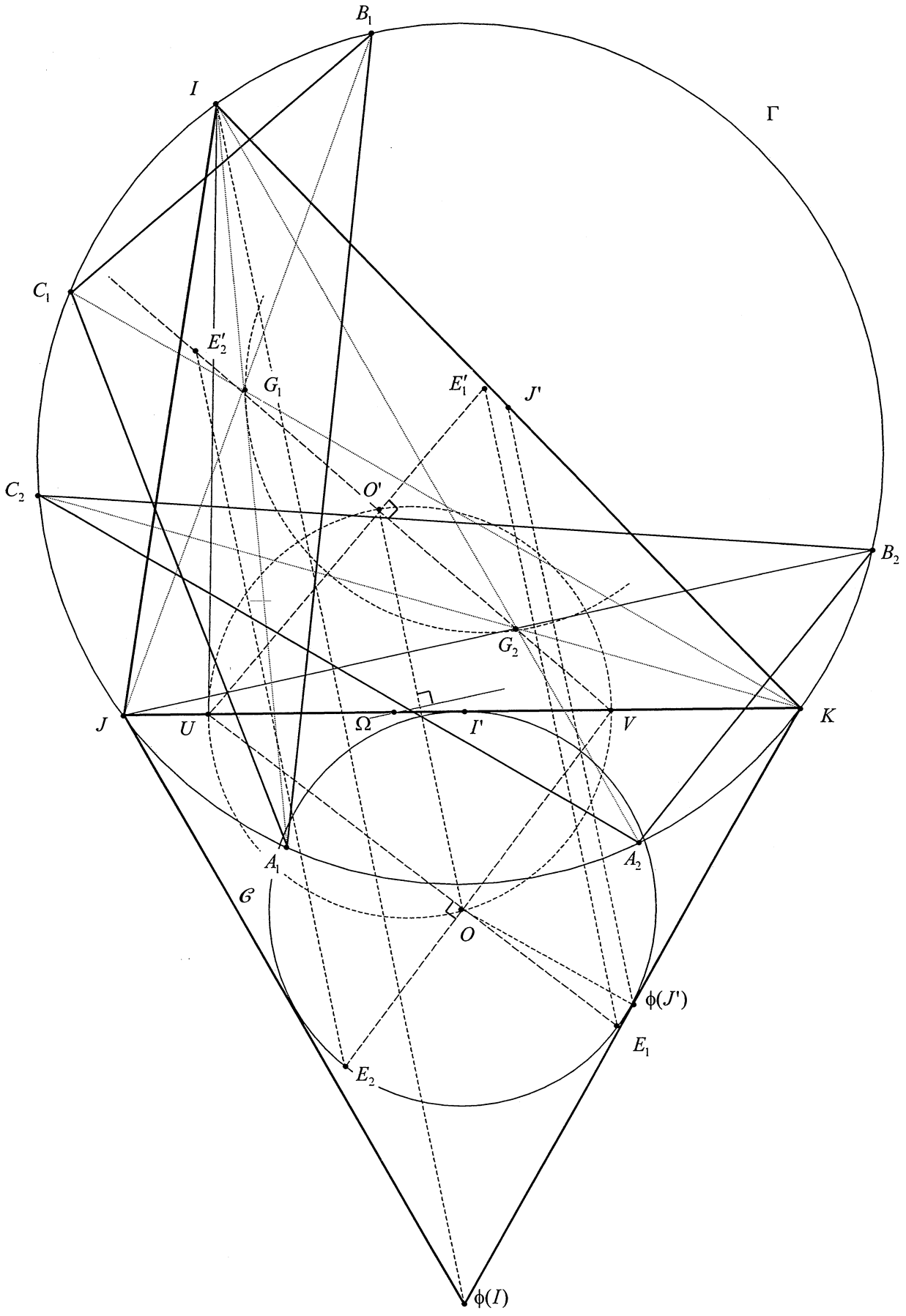


Fig. 219

Les deux "figures-solution" sont constituées l'une par le triangle *IJK*, le cercle Γ et le triangle $A_1B_1C_1$; l'autre par le triangle *IJK*, le cercle Γ et le triangle $A_2B_2C_2$.

IREM d'Aquitaine

Groupe de Géométrie et d'Arithmétique

Titre : Similitudes

Auteurs

BOUSCASSE Jean-Marie, CHAUMET Marie-Claude, DAMEY Pierre, GOUTEYRON Antoine, GOUTEYRON Claire, POMÈS Roland, PINET Bernard, PUYOU Jacques, ROBERT Yves.

Public concerné :

- ☞ enseignants des lycées ;
- ☞ formateurs IUFM ;
- ☞ préparataires aux CAPES interne et externe de mathématiques.

Résumé

Cet ouvrage est consacré à l'étude des transformations du plan qui multiplient les distances par un nombre λ ($\lambda \in \mathbb{R}_+^*$). Il rappelle les propriétés des réflexions , translations, homothéties et rotations, puis dégage les notions d'*applications affines et* d'*applications vectorielles* associées à une *application affine*. Il développe l'étude des isométries planes à partir de l'inventaire des différents types d'isométries du plan vectoriel.

Il consacre le chapitre central aux deux types de similitudes.

- ☞ Les similitudes directes. Chacune d'elles est la composée d'une homothétie positive et d'une rotation.
- ☞ Les similitudes inverses. Chacune d'elles est la composée d'une homothétie positive et d'une réflexion.

Les propriétés de ces transformations sont illustrées par des applications (points isogonaux, droites isogonales, problèmes de tangence concernant les coniques...)

Mots clefs

Application affine – Application vectorielle.

Réflexions, Translation, Rotation, Symétrie glissée, Isométrie, Homothétie, Similitude, Similitude directe, Similitude inverse, Affinité, Isogonales, Coniques.

Publication

IREM d'Aquitaine

40 rue Lamartine

33400 TALENCE

I.S.B.N. : 2- 85663 – 99 - 02