POUR UNE VÉRITABLE ENTRÉE

DANS LA GÉOMÉTRIE

EN CLASSE DE QUATRIÈME

FRANCIS REYNÈS

Collège Grand Air Arcachon

Groupe "Langage et Mathématique"

I.R.E.M. D'AQUITAINE

JUIN 1997

SOMMAIRE

Tu sais donc qu'ils se servent de figures visibles et raisonnent sur elles en pensant, non pas à ces figures, mais aux originaux qu'elles reproduisent ; leurs raisonnements portent sur le carré en soi et la diagonale en soi, non sur la diagonale qu'ils tracent, et ainsi du reste ; des choses qu'ils modèlent ou dessinent, et qui ont leurs ombres et leurs reflets dans les eaux, ils se servent comme autant d'images pour chercher à voir ces choses en soi qu'on ne voit autrement que par la pensée.

PLATON

—

Si l'on réduit la science à n'être qu'un ensemble de recettes qui marchent, on n'est pas intellectuellement dans une situation supérieure à celle du rat qui sait que lorsqu'il appuie sur un levier, la nourriture va tomber dans son écuelle.

René THOM
(Médaille Fields 1958)

Critiquer les mathématiques pour leur abstraction, c'est passer complètement à côté. L'abstraction, c'est ce qui fait marcher les mathématiques.

Ian STEWART

Nous avons des yeux pour voir ce que nous pensons.

Boris CYRULNIK

PRÉAMBULE

Au-delà des réformes, des changements de programmes, des réorganisations de "cycles", perdure un problème fondamental et incontournable : le rapport des élèves au savoir mathématique.

Après un quart de siècle de pratique réfléchie et critique ainsi qu'une dizaine d'années de recherches, d'échanges — voire de confrontations — et d'expérimentations, il nous apparaît clairement que la classe de quatrième constitue toujours une étape cruciale dans l'évolution de ce rapport, et que cette évolution doit s'opérer sur un mode qualitatif beaucoup plus que quantitatif : l'apprentissage du calcul algébrique et celui de la démonstration supposent en effet une maturité d'esprit suffisante pour pouvoir appréhender la spécificité des "objets mathématiques" et des règles du jeu qui régissent leurs interactions. Certes, on peut s'efforcer bravement d'ingérer un catalogue de "recettes" de calcul que l'on tentera d'"appliquer" avec ... application. Mais cette absence de méthode laissera cruellement démuni devant un problème de géométrie : même avec l'aide (?) d'une belle figure, on ne "verra" quasiment rien ... Car il ne s'agit pas de voir mais de concevoir et de prévoir.

Lorsqu'ils quittent la classe de cinquième, la majorité des élèves "savent" pas mal de choses. Nous dirions plutôt "croient savoir", car il est aisé de constater qu'ils ne savent pas comment ni pourquoi ils savent : leur "savoir" ressortit beaucoup plus à la croyance qu'à la connaissance. Certains se débrouillent plutôt bien grâce à un savoir-faire efficace ; mais leurs techniques opératoires ont forcément des champs d'application limités, éparpillés et, la plupart du temps, disjoints. Cela ne suffit évidemment pas pour fonder la construction d'un "esprit scientifique", même si ce dernier, ne conduisant pas à une utilisation professionnelle, doit participer "seulement" d'une certaine culture.

Loin de nous l'idée d'invalider les acquisitions antérieures ou la manière dont elles se sont construites : il ne s'agit pas de remettre en question des connaissances, il s'agit au contraire de les mobiliser pour pouvoir les questionner d'une manière qui conduise à les (re)placer dans une perspective d'enracinement du sens et de la cohérence : dans l'esprit d'une "progression en hélice" de la constitution des connaissances — revenir sur ce que l'on sait, mais en effectuant un pas dans l'approfondissement, car "savoir plus" c'est aussi (surtout ?) "savoir mieux" — la classe de quatrième nous offre un moment privilégié pour effectuer ce "retour vers le futur".

Ce que nous présentons ici n'est pas une "théorie de l'enseignement de la géométrie en quatrième" : nous sommes avant tout praticien et le reconnaissons bien volontiers. Cependant la pratique n'implique pas l'absence — encore moins le mépris — de toute théorie ni de mûres réflexions sur les tenants et les aboutissants de cette pratique : nous ne présentons donc pas davantage un florilège de recettes éprouvées ... Disons simplement qu'un nombre suffisant de collègues dignes d'estime et de foi nous ont assuré de la valeur de notre approche et de l'intérêt de la faire connaître plus largement. Qu'ils en soient ici chaleureusement remerciés.

Les mathématiques occupent parmi les sciences une place unique de par leur objet, leur "essence" — «*L'essence des mathématiques, c'est la liberté*» proclamait Cantor — et leur enseignement non seulement ne peut pas occulter cette singularité, mais doit en tirer sa force, sa fierté et sa saveur. Il faut "tordre le cou" à cette peur de l'abstraction qui ne peut mener qu'à la démission de la pensée et que certains tentent de répandre sous couvert d'"arguments" de simplicité ou d'utilité pratique qui ne résistent pas à la moindre analyse épistémologique : on sait depuis Bachelard que le simple n'est que du simplifié, que ce n'est pas le concret qui éclaire l'abstrait mais l'abstrait qui permet d'appréhender le concret.

«Il est étrange de constater qu'à l'aube du XXIè siècle, alors que la notion de réalité classique perd chaque jour du terrain au profit du virtuel, de l'imaginaire et du conceptuel, l'idée même de conceptuel soit si mal perçue par le public et soit dénigrée par beaucoup de ceux qui prétendent appartenir à l'élite intellectuelle.

Ce retour au «concret» est particulièrement frappant à l'école, avec l'évolution des programmes de mathématiques. (...)

Pourtant la perception de notre environnement est de moins en moins directe, physique, et passe de plus en plus par des représentations abstraites, (...)

La pensée de tous les jours emprunte de plus en plus aux mathématiques, et l'abstrait d'hier est devenu le concret d'aujourd'hui. (...)

Est-ce-que «abstrait» ne voudrait simplement pas dire «nouveau» et «concret» «bien compris, bien assimilé» ? (...)

Est-il nécessaire de rappeler quelques évidences à tous ceux qui ont réfléchi cinq minutes dans leur vie ? Que l'expérience brute, sans outil théorique, n'existe pas, et qu'inversement ces outils théoriques n'existent et ne se développent qu'à travers l'expérience ? (...)

L'un des rôles de l'école républicaine est sûrement de permettre aux jeunes générations de comprendre le monde, et cela exige des outils théoriques.»
(Pierre Schapira, professeur de mathématiques à l'université Pierre-et-Marie-Curie, *Le Monde* du 26/04/96).

On ne peut pas feindre d'ignorer — et donc laisser ignorer — que les mathématiques innervent toutes les "sciences dures" et au premier chef la physique. Il ne faut donc pas craindre de faire de la physique en cours de maths et surtout de dissiper le flou et l'ambiguïté qui entourent certaines activités : découper des morceaux de carton, manipuler, effectuer des mesures de longueurs ou d'angles, c'est faire des expériences physiques, et il n'y a aucune honte à cela ! Cela participe pleinement de cette dialectique concret-abstrait qui est à la base de «la formation de l'esprit scientifique», cela permet de générer la notion si importante de **modèle** (descriptif et surtout prédictif).

Nous proposons donc quelques points d'appui qui nous semblent fondamentaux dans la mesure où ils constituent des fondations sans lesquelles toute construction est vouée à la fragilité, à l'instabilité : le statut des "objets géométriques", le concept d'égalité, la pratique de la reformulation, la notion de "mesure exacte" ...

La progression qui est exposée correspond grosso modo à celle que nous avons pratiquée, mais il est fatal qu'un exposé impose une rigidité linéaire qui ne peut refléter la souplesse d'une pratique. Elle n'est donc évidemment pas à prendre au pied de la lettre et chacun peut la moduler au gré de ses choix de cohérence.

Dans le même ordre d'idées, les fiches-élèves que nous reproduisons ne doivent être considérées que comme une sorte d'ossature à laquelle il faut donner de la chair. Nous avons, bien entendu, proposé d'autres exercices et il est loisible de ... jouer toute variation sur les thèmes abordés (les IREM en proposent un éventail d'une étonnante richesse).

1 OBJETS REPRÉSENTATIONS DESSIN INFORMATIONS

Cela fait un certain nombre d'années que nous utilisons "La trahison des images" de René Magritte comme moyen de prendre conscience de la différence de niveau entre un objet et une représentation de cet objet (et un certain nombre de collègues, autour de nous, l'ont adopté). Peu à peu nous avons affiné la progresion, et nous avons pu également effectuer un petit travail interdisciplinaire avec l'utilisation, en cours de français — et sous la forme qui plaît au professeur — des deux textes présentés ci-après. Passé le premier sourire, il ne fait de doute pour personne que le dessin d'une "chose" n'est pas cette chose. L'explication du titre permet aux élèves de proposer un certain nombre de synonymes du mot "trahison" : infidélité, inexactitude, tromperie, leurre, duperie, mystification ... La deuxième étape consiste à se rendre compte que l'on peut dessiner des "objets imaginaires" : les élèves pensent assez spontanément aux B.D. ou aux films de science-fiction, aux images virtuelles, et lorsqu'on leur demande : quand on veut fabriquer une nouvelle voiture ou un nouvel avion, est-ce qu'on commence par souder des morceaux de tôle ? ils répliquent : on commence par faire des plans ! Pour passer au domaine mathématique, nous avons finalement choisi une image du nombre π : d'une part c'est un nombre un peu mystérieux — pour ne pas dire mythique — sur lequel il n'est pas inintéressant de (re)venir, d'autre part c'est sans doute, à ce niveau-là, la première rencontre avec un nombre non rationnel (on ne peut pas prévoir quelles seront les décimales, et les questions fusent sur la façon de les trouver, sur l'intérêt d'en calculer un million, etc.). L'image qui est fournie aux élèves frappe un peu leur imagination ... ce qui est le but recherché. La dernière étape, le passage à l'image d'un cercle, est la plus difficile : alors qu'il n'y a évidemment pas la moindre rupture conceptuelle, la pratique du travail sur les «figures géométriques» les a rendues tellement prégnantes qu'une forte résistance se manifeste contre leur changement de statut — non plus «objet» d'étude, mais moyen pour l'étude d'autres "objets" inaccessibles aux sens (essentiellement la vue). Et le langage n'arrange pas les choses : comme pour la pipe, la "trahison des images" se double d'une trahison de la parole, car devant le dessin d'un cercle personne ne dira "c'est un rond", encore moins "c'est un dessin d'un cercle" !

Pour déstabiliser cette confiance aveugle en la perception visuelle (je crois ce que je vois ...), nous proposons une réflexion sur la valeur des informations fournies par une image, assortie d'un retour aux sources des "règles du jeu géométrique". Les deux sont en effet intimement liés : on ne peut pas comprendre que les informations sont fournies uniquement par un texte (ou un codage) si l'on n'a pas compris que les objets sur lesquels on travaille sont imaginaires, donc invisibles, et qu'il n'est donc pas question de les "contempler". Quant à "observer" leurs images (les figures ...) comme un naturaliste ou un physicien pour en "découvrir des propriétés", il ne faudrait pas oublier que toute observation à visée scientifique présuppose un hypothèse.

«Qu'est-ce que la science ? Vous savez tous ce que c'est : évidemment, puisque vous l'enseignez ! Cela tombe sous le sens. Que puis-je donc vous dire de

plus ? D'ailleurs, si vous l'ignorez, reportez-vous à la préface du premier manuel venu ; ils contiennent tous un exposé complet de la question. Vous y trouverez la quintessence, délayée et déformée, des idées de Francis Bacon, idées qui à l'époque, il y a plusieurs siècles, passaient pour le nec plus ultra *de la philosophie des sciences. Pourtant, l'un des plus grands expérimentateurs de l'époque, William Harvey, disait déjà que la science vue par Bacon n'était que la science du ministre qu'il était. Car Bacon, qui parlait sans cesse d'observations à faire, n'oubliait qu'une seule chose, pourtant essentielle : la nécessité de porter d'abord un jugement sur ce qui vaut la peine ou pas d'être observé, sur ce à quoi il faut prêter attention.»* (Richard Feynman : la nature de la physique) — On peut, sans grand risque, remplacer "Bacon" par quelques noms plus actuels ...

Il est de l'essence même des objets géométriques d'être indissociables de certains axiomes et certaines définitions : les notions de point et de droite n'ont pas un sens "sui generis" ; elles n'en prennent un que par un axiome définissant leur interaction. Et il est primordial de réaliser qu'à partir du moment où l'on accepte que par deux points il passe une droite et une seule, alors certaines situations deviennent "obligatoires" et d'autres "impossibles". Autrement dit on change totalement de domaine et par conséquent de critères d'évaluation de la "vérité" : il ne s'agit plus de "regarder ce qui marche" mais de réfléchir à ce qui est valide parce que logiquement cohérent. (C'est bien pour cela qu'il est possible de "raisonner juste sur une figure fausse" ! Car toutes les figures sont fausses, "par définition", même s'il y en a d'un peu plus fausses que d'autres ...).

Il ne faut pas sous-estimer la grande difficulté de ce changement de système de références. Même si des amorces de démonstrations ont été effectuées en 5ème, l'écrasante majorité des élèves a beaucoup de mal à adopter ce nouveau point de vue, et cela se comprend aisément. Il convient donc d'être très patient et de rappeler inlassablement les fondements de ce nouveau système. Comme il est évidemment hors de question de (re)démontrer tout ce qui a été vu en 6ème et 5ème, nous avons choisi de revenir une seule fois en arrière — et très exactement au tout début — mais d'y revenir avec force en insistant sur le fait que ce qu'il faut mobiliser c'est l'imagination et la réflexion. Amusez-vous à demander quelle est la forme d'un point : on vous répondra que c'est rond, et il faudra batailler ferme pour faire comprendre que la question posée n'a pas de sens ... Il n'est pas interdit non plus de mobiliser l'esprit critique ...

Pour renforcer cette prise de distance vis-à-vis de la "figure" indispensable à l'installation du raisonnement — car si la perception emporte la conviction, alors il n'y a plus de place pour la réflexion, et cela n'est pas vrai seulement de la géométrie : pensez, par exemple, aux images de la télévision ... — nous proposons des fiches qui aident à relativiser la qualité des informations fournies pas un dessin. Entendons-nous bien : il n'est pas question de vouloir faire faire de la géométrie sans une figure ; nos capacités de représentation mentale sont, hélas, tragiquement limitées ! Dès que la situation cesse d'être simple on ne peut plus se passer d'un dessin pour espérer pouvoir l'appréhender. Le problème est que cette figure ne soit pas opaque, qu'elle ne fasse pas écran à la réflexion, qu'elle ne bloque pas le raisonnement. Il faut mettre en place une sorte de partage des rôles : à la figure revient celui de la représentation ainsi que de l'aide à la conjecture, et remarquons bien qu'une figure "en soi", c'est-à-dire sans connaissance sous-jacente, n'a absolument pas de sens.

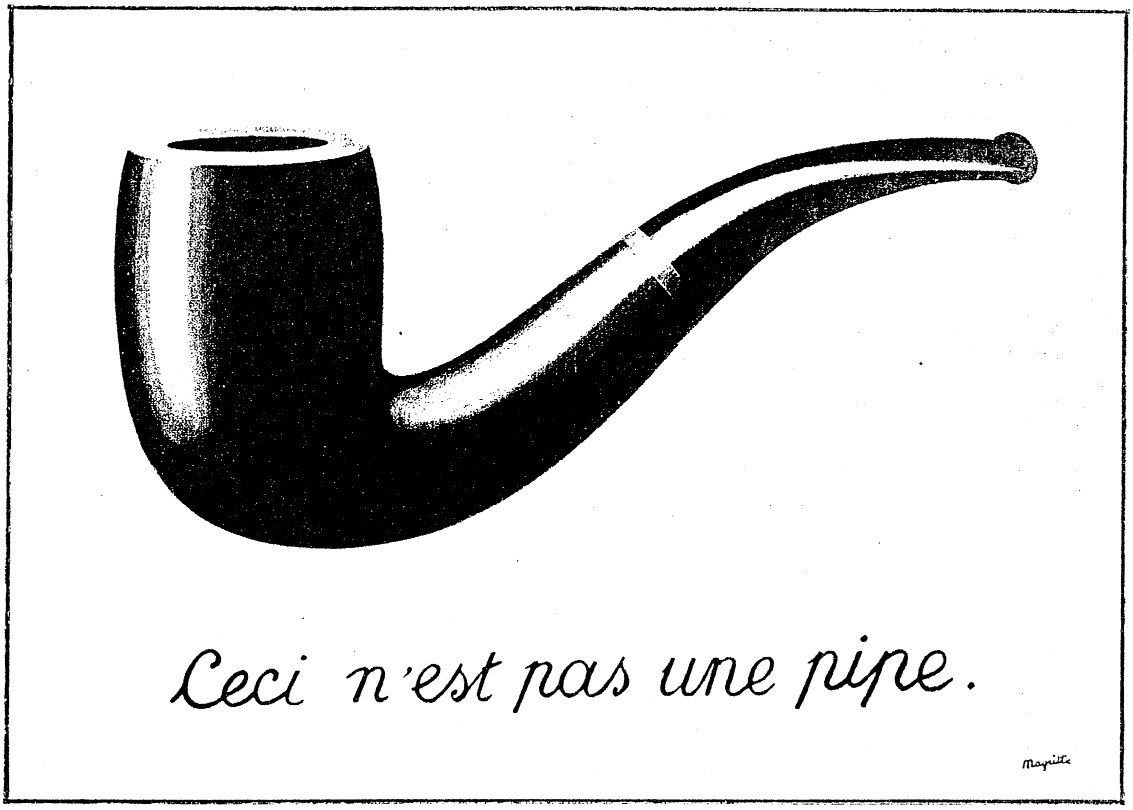
Bien des expressions ou des tournures que nous, professeurs, employons tranquillement ne sont pas comprises des élèves ; par exemple il va de soi pour nous qu'une droite est définie par la donnée de deux de ses points "puisque" (!) par deux points il ne passe qu'une seule droite. Ce lien n'est absolument pas fait par les élèves, et le sens mathématique du mot "définir" leur est étranger. Et force est d' admettre qu'il est rien moins qu'évident d'imaginer que l'on puisse connaître totalement un ensemble — qui plus est infini — en connaissant seulement deux de ses éléments : cela heurte même violemment le "bon sens" : est-ce que je connais tous les élèves du collège parce que je connais mes camarades de classe ?! Et pourtant ce n'est pas la formulation "par deux points il passe une droite et une seule" qui sera forcément la plus pertinente, la plus performante : par exemple si j'arrive à prouver que A et B sont deux points de la médiatrice de [K L], ce n'est pas en me disant "par A et B il ne passe qu'une droite" que je pourrai comprendre que (AB) **est** la médiatrice de [K L], mais en me disant "je connais deux points de la médiatrice, donc je connais (toute) cette médiatrice !" ... (reformulation ...).

La notation "(AB)" dérive aussi de cet axiome et, elle non plus, n'est pas bien assimilée : tout d'abord — et plus largement — certains élèves "oublient" encore qu'un nom ne doit pas désigner plusieurs objets et notent ainsi "(A)" une droite passant par A. Ensuite — on voit surgir cela lors des exemples géométriques de l'égalité — lorsqu'ils disposent de trois points alignés A, B, C, certains élèves notent (ABC) la droite passant par ces trois points. Il y a bien sûr une certaine logique dans cette idée, pourtant il faut bien comprendre que c'est la contrainte de n'avoir à utiliser que deux points dans la notation qui oblige à changer de désignation, et que c'est cette variété de désignations qui permet le mouvement de la pensée et la circulation du sens : les contraintes de la notation codée se transmuent ainsi en un véhicule du sens parce que le codage dérive de certaines propriétés.

Voilà pouquoi nous insistons "lourdement" sur ce premier axiome : d'abord pour faire comprendre que c'est un choix, une décision comportant à la fois une part d'arbitraire et une part de désir de simplification : après tout, entre deux clous on peut bien tendre plusieurs fils et, comme des élèves nous l'ont fait remarquer plusieurs fois, puisque l'on imagine une droite d'épaisseur nulle il est facile d'imaginer que l'on peut en "superposer" autant qu'on veut sans que ça change l'épaisseur ! Il est bon que de telles remarques éclosent dans la classe. Ensuite parce qu'on retrouve le même problème à propos du nombre possible de points communs à deux droites (distinctes) : a priori on peut en imaginer autant qu'on veut puisqu'un point a pour dimension zéro. On ne pourra ramener l'imagination à la raison que parce qu'il y a une raison : l'axiome admis pour régler la question du nombre de droites passant par deux points. Enfin parce que le type de raisonnement utilisé est très caractéristique d'une méthode couramment employée : la disjonction des cas en deux éventualités qui s'excluent mutuellement — quitte à redisjoindre l'une des deux possibilités, ce qui sera utilisé pour la définition des droites parallèles.

Nous revenons ensuite sur la définition des droites sécantes pour, d'une part faire réfléchir à ce qu'on appelle en mathématique une définition, montrer d'autre part en quoi une définition mathématique est "opératoire", c'est-à-dire en quoi elle permet de réfléchir, en quoi elle constitue un outil de raisonnement : si je suis capable d'expliquer ce que signifie «deux droites sont sécantes», alors je suis aussi capable d'expliquer ce que veut dire «deux droites ne sont pas sécantes» — à noter que l'on utilise ici implicitement le fait que lorsque deux propositions sont équivalentes, leurs négations le sont aussi — . Noter aussi que ne pas avoir une pièce de 1F dans sa poche n'empêche pas d'y avoir un billet de 100F, autrement dit que la négation de «il y a un seul point commun» est «le nombre de points communs n'est pas un» ... et non pas «il n'y a pas un seul point commun» !

Nous terminons ce "flash back" par l'axiome d'Euclide en nous permettant d'évoquer l'existence de géométries non euclidiennes où la somme des mesures des angles d'un triangle n'est plus égale à 180° ...



I) La photocopie ci-dessus est celle d'une reproduction d'un tableau du peintre René MAGRITTE. Il a intitulé ce tableau : *"La trahison des images"*.

1°) Que penses-tu de ce tableau ?

2°) Pourquoi, à ton avis, le peintre a-t-il choisi ce titre ?

La Trahison des images, 1928/29

L'«image de la pipe», réalisée durant son séjour à Paris dans la série de ses tableaux ayant pour thème le problème du langage, est l'une des œuvres les plus riches et les plus connues de René Magritte. Peinte avec minutie et lucidité comme une reproduction dans un livre scolaire, une pipe (en tant qu'objet de tous les jours) flotte devant un fond jaune pâle, garnie d'un sous-titre calligraphique affirmant d'une façon lapidaire et absurde au premier coup d'œil que "ceci n'est pas une pipe". Ce qui d'emblée semble paradoxal s'avère exact, étant donné qu'une reproduction n'est bien entendu pas identique à un objet tangible. Cette assertion banale et en même temps complexe rappelle ironiquement que les images, qui ne renferment que deux dimensions, ont une autre valeur que la réalité. Magritte démasque avec *La Trahison des images* une faute d'inattention de la pensée bien connue et s'efforce de nous rendre conscients de nos mécanismes de perception bien ancrés. La préoccupation de l'artiste est d'inviter le spectateur, à l'aide de ses pièges astucieux posés à la pensée, à repenser la complexité de la réalité.

Sabine D.LEHNER

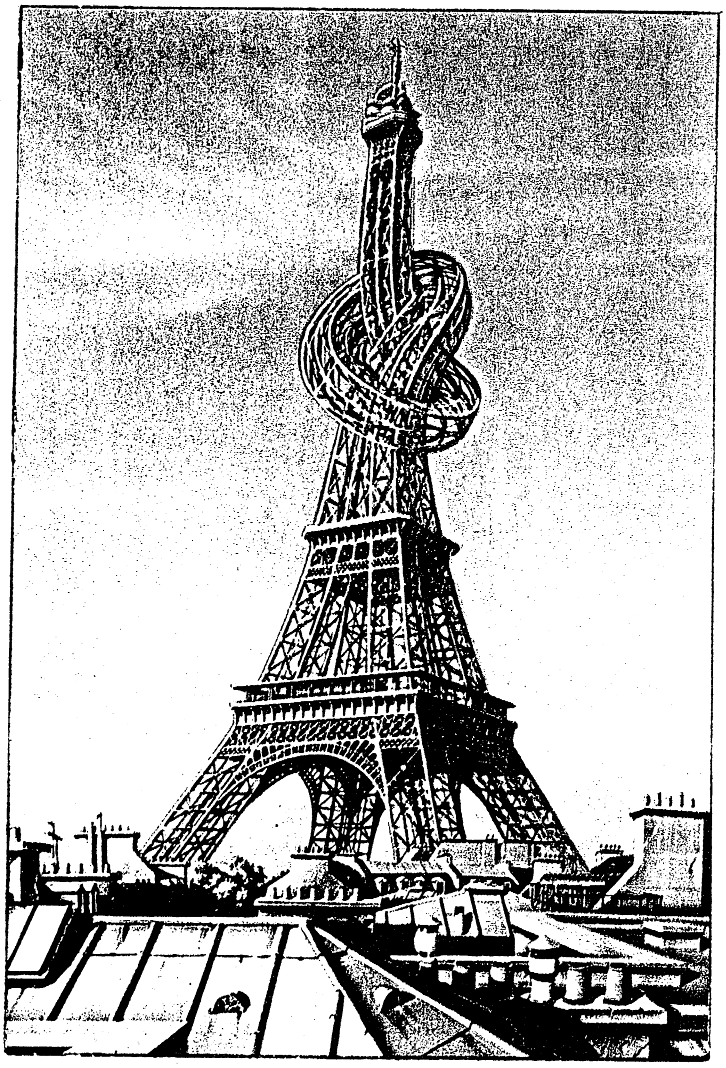
Magie de l'image

Dans une ruelle bordée de vieilles baraques, où les singes «sacrés» montaient sur les murs et les balcons dépenaillés, une ruelle particulièrement puante, particulièrement nauséeuse — odeur de crémation, de curry et de merde —, Wifredo, souverain et distrait, tient l'œil dans l'objectif de sa Beaulieu 16 mm. Je considère à nouveau la ruelle mais, où que je me tourne, je ne vois qu'un grand désastre de poussière, des vieillards et des enfants rachitiques, cette catastrophe pullulante à laquelle je commence à m'habituer. Surpris, et comme électrisé soudain à l'idée qu'il y ait quelque chose de spécial à filmer là, je demande à Wifredo de me prêter sa caméra, pour «voir». Et regardant ce qu'il regardait, je fais cette découverte sensationnelle : à la place de murs couverts d'une crasse suintante de graisse, je vois dans l'oculaire une image parfaitement cadrée, beige, gris-rose, jaune et noir, où les vêtements jettent des flammes rouges et orange, et où les singes ajoutent une note «poétique» et fantasque extraordinaire. N'en croyant plus mes yeux, j'écarte mon œil de l'oculaire, et je me retrouve dans cette infecte ruelle de bidonville, à se flinguer trois fois par jour ... La caméra est un instrument *occidental*, qui métamorphose la saleté en *couleurs*, et le chaos en *tableau*. Menteuse, elle transforme la réalité en un spectacle esthétique — lisse et aseptisé — absolument *contraire* à la démesure de l'Inde.

L'Orient a produit le pullulement et la répétition, l'Occident a inventé le cadre, la perspective et la *distance*. Entre ces deux pôles, il y a un hiatus qui n'a pas été mesuré, où toutes les tricheries, toutes les falsifications de traducteurs-reporters-cinéastes sont possibles. Il m'a fallu quelques secondes, cette Beaulieu en main, pour le saisir avec l'évidence de l'éclair. Je n'en suis pas encore revenu.

ALAIN JOUFFROI,
Lettre de l'Inde,
Ed. C. Bourgois

II) Et que penses-tu du tableau ci-contre ?



III) Et que penses-tu du "tableau" ci-contre ?

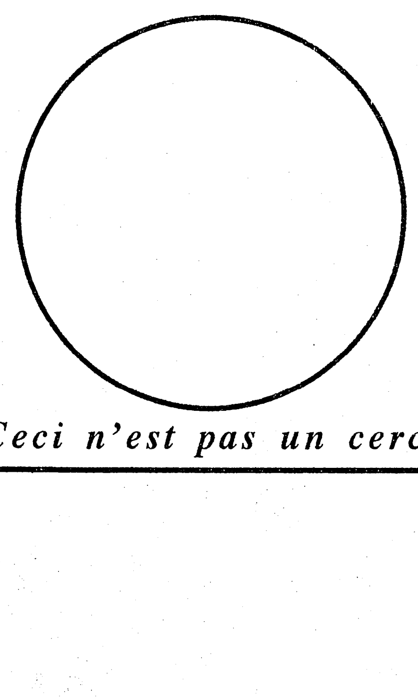
Pourrait-on aussi l'intituler "La Trahison des images" ?

Pourquoi ?

3,14159	26535	89793	23846	26433	83279	50288	41971	69399	37510
58209	74944	59230	78164	06286	20899	86280	34825	34211	70679
82148	08651	32823	06647	09384	46095	50582	23172	53594	08128
48111	74502	84102	70193	85211	05559	64462	29489	54930	38196
44288	10975	66593	34461	28475	64823	37867	83165	27120	19091
45648	56692	34603	48610	45432	66482	13393	60726	02491	41273
72458	70066	06315	58817	48815	20920	96282	92540	91715	36436
78925	90360	01133	05305	48820	46652	13841	46951	94151	16094
33057	27036	57595	91953	09218	61173	81932	61179	31051	18548
07446	23799	62749	56735	18857	52724	89122	79381	83011	94912
98336	73362	44065	66430	86021	39494	63952	24737	19070	21798
60943	70277	05392	17176	29317	67523	84674	81846	76694	05132
00056	81271	45263	56082	77857	71342	75778	96091	73637	17872
14684	40901	22495	34301	46549	58537	10507	92279	68925	89235
42019	95611	21290	21960	86403	44181	59813	62977	47713	09960
51870	72113	49999	99837	29780	49951	05973	17328	16096	31859
50244	59455	34690	83026	42522	30825	33446	85035	26193	11881
71010	00313	78387	52886	58753	32083	81420	61717	76691	47303
59825	34904	28755	46873	11595	62863	88235	37875	93751	95778
18577	80532	17122	68066	13001	92787	66111	95909	21642	01989
38095	25720	10654	85863	27886	59361	53381	82796	82303	01952
03530	18529	68995	77362	25994	13891	24972	17752	83479	13151
55748	57242	45415	06959	50829	53311	68617	27855	88907	50983
81754	63746	49393	19255	06040	09277	01671	13900	98488	24012
85836	16035	63707	66010	47101	81942	95559	61989	46767	83744
94482	55379	77472	68471	04047	53464	62080	46684	25906	94912
93313	67702	89891	52104	75216	20569	66024	05803	81501	93511
25338	24300	35587	64024	74964	73263	91419	92726	04269	92279
67823	54781	63600	93417	21641	21992	45863	15030	28618	29745
55706	74983	85054	94588	58692	69956	90927	21079	75093	02955
32116	53449	87202	75596	02364	80665	49911	98818	34797	75356
63698	07426	54252	78625	51818	41757	46728	90977	77279	38000
81647	06001	61452	49192	17321	72147	72350	14144	19735	68548
16136	11573	52552	13347	57418	49468	43852	33239	07394	14333
45477	62416	86251	89835	69485	56209	92192	22184	27255	02542
56887	67179	04946	01653	46680	49886	27232	79178	60857	84383
82796	79766	81454	10095	38837	86360	95068	00642	25125	20511
73929	84896	08412	84886	26945	60424	19652	85022	21066	11863
06744	27862	20391	94945	04712	37137	86960	95636	43719	17287
46776	46575	73962	41389	08658	32645	99581	33904	78027	59009
94657	64078	95126	94683	98352	59570	98258	22620	52248	94077
26719	47826	84826	01476	99090	26401	36394	43745	53050	68203
49625	24517	49399	65143	14298	09190	65925	09372	21696	46151
57098	58387	41059	78859	59772	97549	89301	61753	92846	81382
68683	86894	27741	55991	85592	52459	53959	43104	99725	24680
84598	72736	44695	84865	38367	36222	62609	91246	08051	24388
43904	51244	13654	97627	80797	71569	14359	97700	12961	60894
41694	86855	58484	06353	42207	22258	28488	64815	84560	28506
01684	27394	52267	46767	88952	52138	52254	99546	66727	82398
64565	96116	35488	62305	77456	49803	55936	34568	17432	41125

Ceci n'est pas le nombre π

IV) Et que penses-tu du "tableau" ci-contre ? Pourrait-on aussi l'intituler "La Trahison des images" ? Pourquoi ?



Ceci n'est pas un cercle

POINTS ET DROITES
DES IMAGES POUR IMAGINER

Un tout petit rond noir

Une représentation d'un point

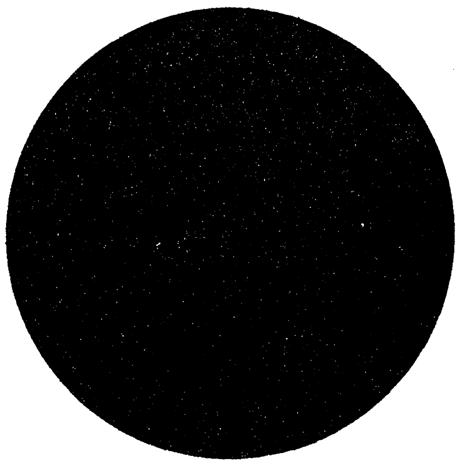
On agrandit 10 fois :

Le tout petit rond noir

La représentation du point

On agrandit encore 10 fois :

Le tout petit rond noir



La représentation du point

Il y a 2 300 ans, Euclide disait : "*Un point est ce qui n'a pas de partie.*"
De nos jours on dit : "*Un point n'a pas de dimension.*"

Qu'est-ce qu'on essaie de faire imaginer lorsqu'on dit cela ?

Un objet physique : un trait rectiligne

Une représentation d'un segment de droite

On agrandit 5 fois :

Le trait rectiligne 5 fois plus grand

La représentation d'un segment 5 fois plus grand

Qu'est-ce qu'on essaie de faire imaginer lorsqu'on dit : "*Une droite n'a pas d'épaisseur*" ?

En Mathématique, on décide d'imaginer et de concevoir que :

1) Un segment est constitué par une accumulation innombrable de points. Entre deux points il y en a toujours un autre.

2) Une droite est comme un segment indéfiniment allongé : contrairement à un segment, une droite n'a donc pas d'extrêmités.

***

Deux petits ronds : ● ●

Un trait rectiligne passant par deux petits ronds :

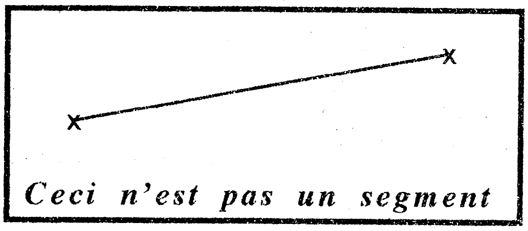
Deux traits rectilignes passant par deux petits ronds :

Pourquoi est-il commode de <u>décider</u> que <u>par deux points il passe une droite et une seule</u> ?

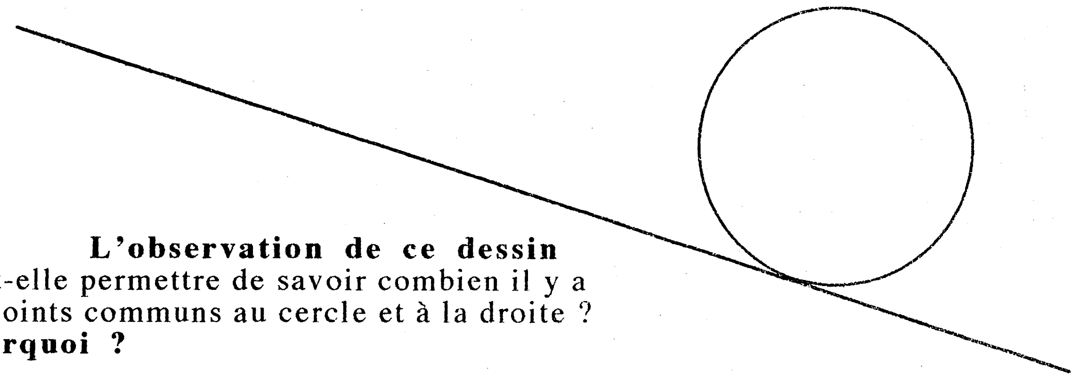
OBJETS GÉOMÉTRIQUES et REPRESENTATIONS

I) Regarde le "tableau" ci-contre :

Pourrait-on intituler ce tableau "la trahison des images" ? **Pourquoi ?**



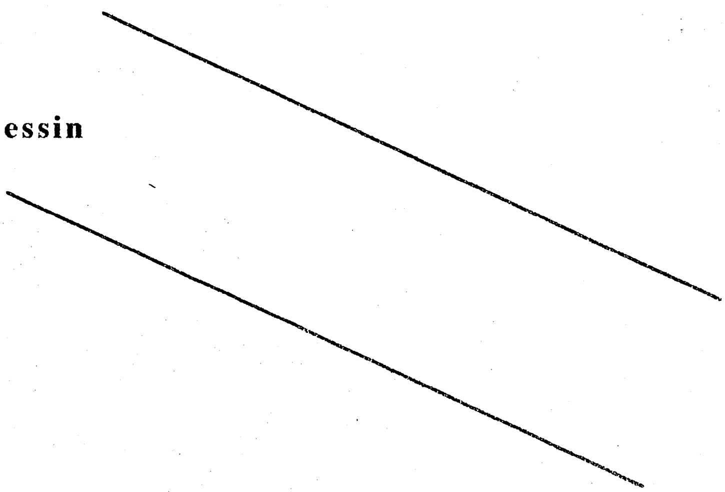
II) Le dessin ci-dessous représente une droite et un cercle :



L'observation de ce dessin peut-elle permettre de savoir combien il y a de points communs au cercle et à la droite ? **Pourquoi ?**

III) Le dessin ci-contre représente deux droites :

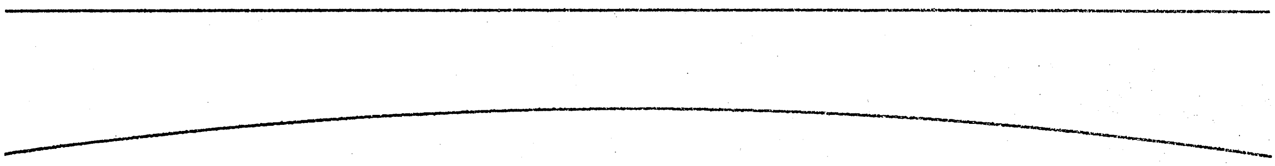
L'observation de ce dessin peut-elle permettre de savoir si ces deux droites sont parallèles ? **Pourquoi ?**



DESSIN INFORMATION

I) Ci-dessous sont représentés deux "objets géométriques" : un segment de droite et un arc d'un cercle de rayon 60 centimètres.

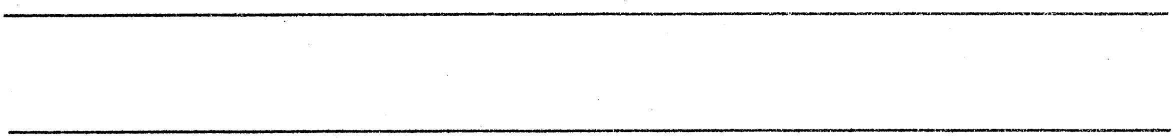
Regarde attentivement les deux dessins :



L'observation de ces deux dessins peut-elle permettre de reconnaître celui qui représente un segment ? Pourquoi ?

II) Ci-dessous sont représentés deux "objets géométriques" : un segment de droite et un arc d'un cercle de rayon 50 mètres.

Regarde attentivement les deux dessins :



L'observation de ces deux dessins peut-elle permettre de reconnaître celui qui représente un segment ? Pourquoi ?

Si l'observation ne suffit pas, alors de quoi faudrait-il disposer pour pouvoir faire la distinction ?

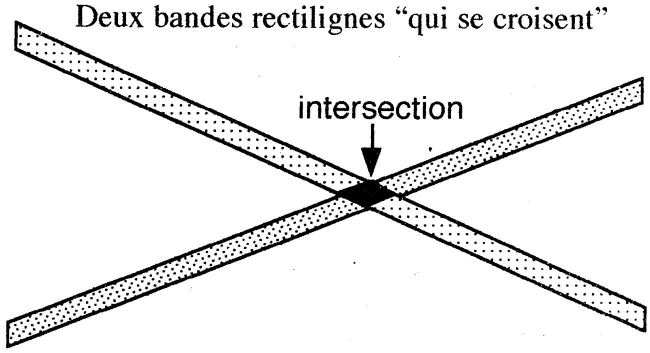
RAPPEL :

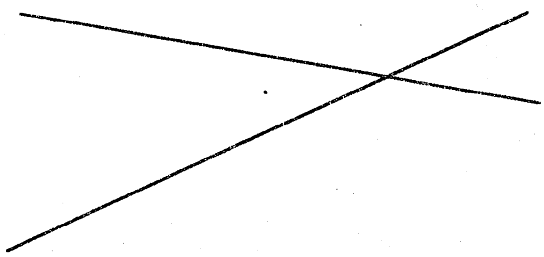
Par deux points il passe une droite et une seule. ***autrement dit*** **Une droite est définie par la donnée de deux de ses points.**

Deux points, appelés A et B, étant donnés, LA droite passant par ces deux points est désignée par la notation "(AB)". **"(AB)" se lit : "la droite A, B".**

On a décidé d'adopter cette propriété car elle permet
1°) de relier l'idée de point à l'idée de droite,
2°) de dépasser la "trahison des images" et de <u>raisonner</u>.

Utilisation : l'intersection de deux droites.





<u>QUESTION</u> :

lorsque deux droites se coupent, combien y a-t-il de point(s) commun(s) ?

1°) Un dessin peut-il fournir la réponse et la certitude ? .... Pourquoi ?

2°) Alors que faut-il faire ? ....

<u>On sait</u> qu'il y a **au moins** .... point commun, alors quelles sont les différentes possibilités ?

DEFINITION : **lorsque deux droites ont un seul point commun on dit qu'elles sont sécantes. Leur point commun est appelé leur point d'intersection.**

CONSEQUENCE : **un point peut être défini par l'intersection de deux droites sécantes. C'est pour cela que, sur les dessins géométriques, un point est souvent représenté par : ×**

PROBLEME : D désigne une droite ; Δ désigne une droite ; **on sait** que D et Δ ne sont pas sécantes. Quelles sont alors les différentes possibilités ?

DEFINITION :

Lorsque D et Δ ne sont pas sécantes, on dit qu'elles sont parallèles.

La phrase "**D est parallèle à Δ**" s'écrit, en langage mathématique : **D // Δ**

et signifie : "**ou bien**

ou bien

Récapitulation de tous les cas, suivant le nombre de points communs :

un	**deux** (et donc tous !)	**zéro**
D et Δ sont	**D et Δ sont**	**D et Δ sont**
Dessin :	Dessin :	Dessin :

dans l'un ou l'autre de ces deux cas on dit que

D et Δ sont

L'AXIOME D'EUCLIDE

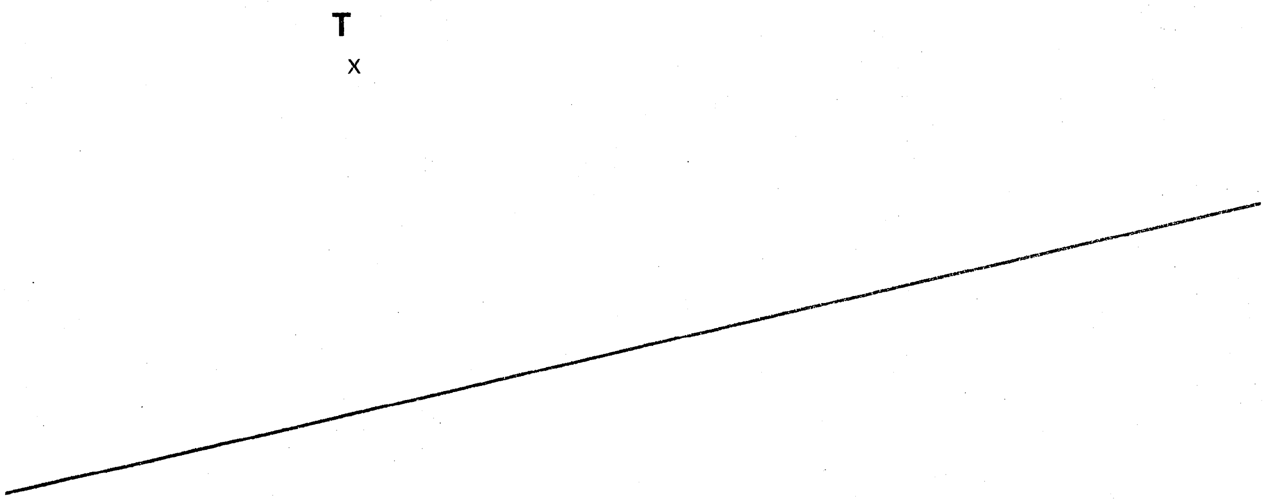
1°) Etant donné un point A, peut-on dénombrer les droites qui passent par A ? Pourquoi ?

2°) Etant donné une droite Δ, peut-on dénombrer les droites parallèles à Δ ? Pourquoi ?

3°) Si l'on se donne une droite D et un point T, parmi toutes les droites passant par T et toutes les droites parallèles à D, combien y en a-t-il qui soient communes ? Euclide, pour "fabriquer" sa géométrie, a fait le choix suivant :

> **Etant donné une droite D et un point T, il y a une droite et une seule qui passe par T en étant parallèle à D.**

Cette droite est appelée "la parallèle à D passant par T".



On a longtemps cru que ce choix était "naturel" et le seul possible. Ce n'est qu'au siècle dernier que des mathématiciens ont eu l'audace et le génie d'imaginer d'autres choix, inventant ainsi des "géométries non euclidiennes".

2 Questions de langage

«La langue tire la science.»

«La question du langage ne doit en aucun cas être confondue avec celle des écritures symboliques ou des terminologies systématiques.»

(Jean-Marc Lévy-Leblond : La pierre de touche)

Nous avons regroupé ici quelques activités se référant à deux concepts très généraux, l'égalité et l'équivalence logique, appliquées plus spécifiquement au cadre géométrique. Il n'y a certes pas de moment impérativement fixé pour les insérer dans la progression, mais nous pensons cependant qu'elles doivent être abordées suffisamment tôt. D'autre part il est bien évident qu'il faut harmoniser leur utilisation avec la progression qui sera adoptée en Algèbre.

L'égalité peut être revisitée dès qu'ont été installés : 1) la distinction entre objets et représentations ; 2) le statut des "objets mathématiques" en tant qu'objets idéels, "imaginaires".

Son utilisation en géométrie requiert que soient employées à bon escient les diverses notations de segment, droite, distance, et en retour elle permet de comprendre la nécessité de discriminer ces notations : [A B] = [A C] n'a en effet pas du tout la même signification que (AB) = (AC) ou AB = AC !

Nous employons depuis longtemps des "Q.C.M." tels que ceux présentés ici : il est assurément important de savoir distinguer une dénomination d'objet d'une phrase ; or l'expérience montre que, durablement, nombre d'élèves prennent une expression telle que "la parallèle à D passant par A" pour une phrase et, réciproquement, sont incapables de reconnaître la présence d'un verbe dans le signe "=".

La "redénomination" d'un objet est un procédé très couramment employé dans les démonstrations et qui est évidemment lié à l'égalité. Par exemple, pour démontrer que "L est le milieu de [A B]", il est banal que l'on "pose" : soit I le milieu de [A B], ce qui transforme la proposition à démontrer en : "L = I".

La "reformulation" est tout aussi importante. L'expérience prouve à satiété que la plupart des "blocages" de la pensée proviennent d'une incapacité à changer de point de vue, à modifier la forme de l'expression sans altérer son contenu, à traduire une information dans un langage adapté au contexte et à la question posée, bref à remplacer une proposition par une proposition équivalente. Il n'est certes pas innocent que les textes abondent en locutions du genre "c'est-à-dire", "ou encore", "en d'autres termes", "autrement dit". Un entraînement à la reformulation nous semble donc indispensable pour acquérir cette mobilité d'esprit sans laquelle on se sent "perdu", désarmé devant un problème à résoudre — et cela reste valable bien au-delà du champ mathématique ! — ne sachant pas "par quel bout le prendre". Prendre conscience du fait que la "simple" reformulation d'une question peut suffire à apporter l'éclairage adéquat à sa réponse nous paraît constituer un objectif majeur, non seulement pour la réussite en mathématique, mais plus largement pour une bonne structuration de la pensée : ne pas (se) poser les bonnes questions est effectivement le plus sûr moyen d'échouer, que ce soit dans la résolution d'un problème de maths ou ... dans la "vie de tous les jours".

DENOMINATIONS EGALES

Le nombre "douze" — dans la tête

DEUX dénominations — sur le papier

5 + 7   3 x 4

Les deux dénominations "5 + 7" et "3 x 4" désignent <u>LE même</u> nombre : on dit qu'elles sont <u>égales et on traduit</u> : 5 + 7 = 3 x 4.

UN "objet mathématique" — dans la tête

DEUX dénominations — sur le papier

truc   machin

La phrase "truc = machin" <u>se lit</u> : ***truc est égal à machin*** **<u>et signifie</u> :** ***les deux dénominations*** **truc** ***et*** **machin** ***désignent <u>un seul</u> et même objet.***

Le signe "=" veut donc dire : **"désigne le même objet que".**

Mode d'emploi : propriété de substitution

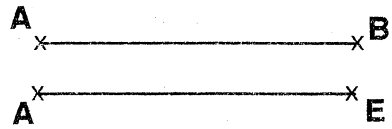
Puisque deux dénominations égales désignent <u>LE même</u> objet :

On peut toujours remplacer une dénomination par une dénomination égale.

<u>Exemples</u> : 3 x 4 = 12 , donc 3 x 4 + 57 = 12 + 57
11 = 10 + 1 , donc 26 x 11 = 26x(10 + 1)

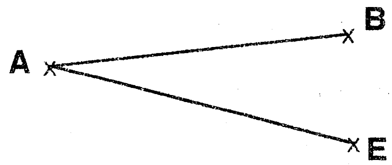
Egalité Trois exemples géométriques

<u>1er exercice</u> : faire un dessin qui traduise l'information : [AB] = [AE]



En quatrième encore, des élèves dessinent ceci :

Faire alors compter le nombre de lettres citées.

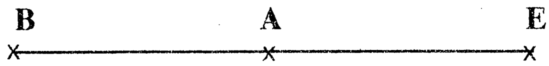


Le plus souvent on trouve le dessin ci-contre :

Dans presque tous les cas les deux segments ont la même longueur. Parfois ils sont perpendiculaires.

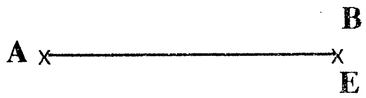
Demander alors : de combien de segment(s) parle-t-on dans cette histoire ?

Certains élèves dessinent alors ceci :



Faire compter le nombre de segments représentés.

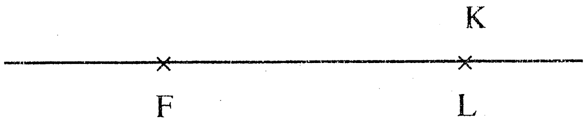
Après être arrivé à



faire trouver la conséquence : B = E.

<u>2ème exercice</u> : faire un dessin qui traduise l'information : (FK) = (KL)

Par analogie avec ce qui précède, on voit souvent ceci :



Bonne occasion de revenir sur la distinction entre droite et segment.

Si la droite qui passe par F et K est la même que la droite qui passe par K et L, cela n'oblige pas K et L à désigner le même point.

<u>Traduction à connaître : F, K et L sont **alignés**</u>.

Faire trouver les deux autres égalités équivalentes.

<u>3ème exercice</u> : faire un dessin qui traduise l'information : MA = MB

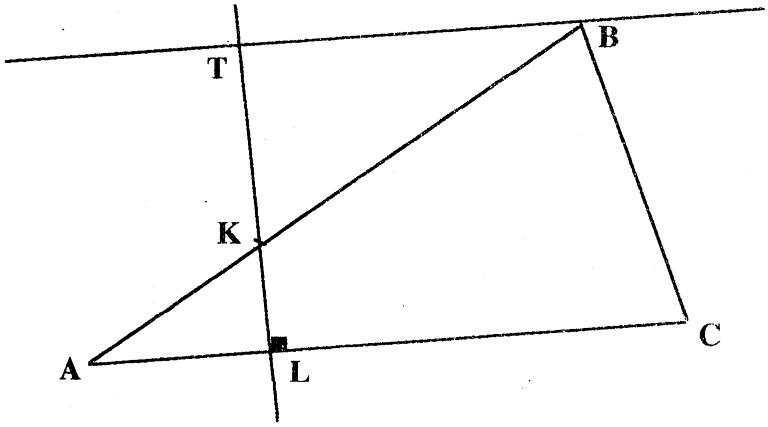
Au début, confusions dues à l'ignorance du sens de la notation

Ensuite, on constate très souvent l'"attraction du milieu".

Demander dans ce cas de représenter d'autres points vérifiant la même condition (amorce d'une révision de la médiatrice).

Regarde les informations et le dessin ci-dessous, puis complète le tableau en marquant une croix dans la case qui convient :

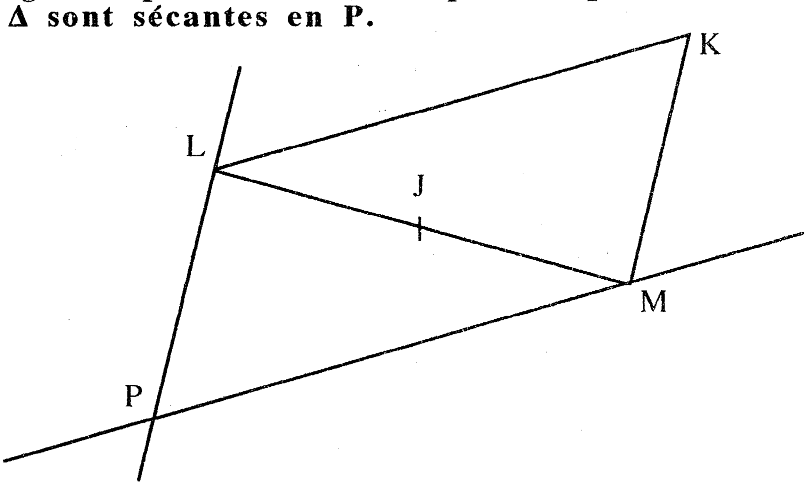
ABC désigne un triangle quelconque.
K désigne un point du segment [A B].
Δ désigne la parallèle à (AC) passant par B.
D désigne la perpendiculaire à (AC) passant par K.
D coupe (AC) en L et Δ en T.



	Désigne un objet	Est une phrase vraie	Est une phrase fausse	Est inepte ou incorrect
K				
K ∈ [A B]				
(AK) ≠ (KB)				
[A K] + [K B]				
AB				
AK + KB = AB				
AB + BC = AC				
La parallèle à (AC)				
La parallèle à (AC) passant par B				
Δ = (BT)				
L ∉ [A C]				
(AL) = (AC)				
La perpendiculaire à (AC)				
La perpendiculaire à (AC) passant par L				
L ∈ D				
T ∉ D				
(KT) = (LT)				
D ≠ (KL)				
T, K et L sont perpendiculaires à (AC)				

Regarde les informations et le dessin ci-dessous, puis complète le tableau en marquant une croix dans la case qui convient :

(K,L,M) désigne un triangle quelconque. J désigne le milieu de[LM].
D désigne la parallèle à (KL) passant par M.
Δ désigne la parallèle à (KM) passant par L.
D et Δ sont sécantes en P.



	Désigne un objet	Est une phrase vraie	Est une phrase fausse	Est inepte ou incorrect
Le milieu de [L M]				
J L = J M				
[J L] = [J M]				
Le milieu de (LM)				
[L K] + [K M]				
LK + KM				
LK + KM = LM				
La parallèle à (LK)				
La parallèle à (LK) passant par M				
(MP) = D				
P ∈ Δ et P ∈ D				
D // Δ				
Le quadrilatère (M,K,L,P)				
(MK) // (LP) et (KL) // (PM)				
(M,K,L,P) est un parallélogramme				
J n'est pas le milieu de [K P]				
J est le milieu de K P				
(M,K,L,P) est un parallélogramme donc KL = MP				
(M,K,L,P) est un parallélogramme donc MK = PL				

PROPOSITIONS EQUIVALENTES

"le triangle RST est rectangle en R" — dans la tête

DEUX traductions — sur le papier

(RS) $\perp$ (RT) $\qquad \widehat{SRT} = 90°$

> Les deux propositions "(RS) $\perp$ (RT)" et "$\widehat{SRT}$ = 90°" décrivent **la même** situation : on dit qu'**elles sont équivalentes** .

"ABKL est un parallélogramme" — dans la tête

DEUX traductions — sur le papier

[AK] et [BL] ont le même milieu $\qquad$ (AB)//(KL) et (BK)//(LA)

> Les deux propositions "[AK] et [BL] ont le même milieu" et "(AB)//(KL) et (BK)//(LA)" décrivent **la même** situation : on dit qu'**elles sont équivalentes**.

UNE "situation" — dans la tête

DEUX traductions — sur le papier

Enoncé un $\qquad$ Enoncé deux

> "Enoncé un *équivaut à* Enoncé deux" **signifie** :
> *les deux propositions* Enoncé un *et* Enoncé deux *expriment la même idée, correspondent à la même situation.*

Mode d'emploi : propriété de substitution

Puisque deux propositions équivalentes expriment LA même idée

> *On peut toujours remplacer une proposition par une proposition équivalente.*

☞ Dans un texte, "*équivaut à*" peut être traduit par "*autrement dit*", ou "*en d'autres termes*", ou "*c'est-à-dire*", ou "*ou encore*".

Exemples :

Les points A, B, E sont alignés *équivaut à* $A \in (BE)$, *autrement dit* (AB) = (BE) , *ou encore* (AB) passe par E.

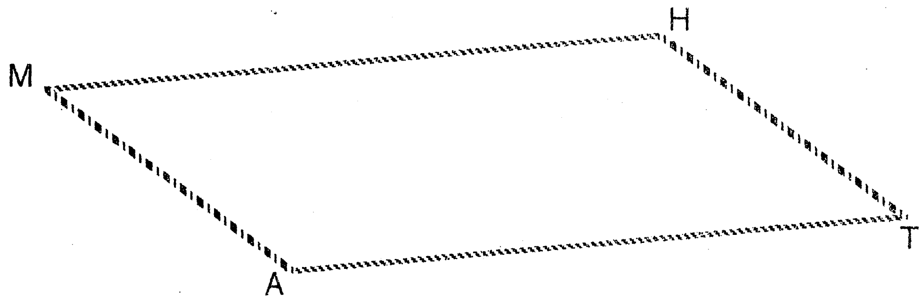
T est le milieu du segment [K F] *équivaut à* TK = TF et $T \in [K F]$, *c'est-à-dire* T est le centre du cercle de diamètre [K F].

☞ On a ici une bonne occasion de "réviser" quelques propriétés utiles pour la suite, en particulier celles du parallélogramme.

Une propriété importante est à faire remarquer et comprendre : lorsque plusieurs propositions sont équivalentes, alors dès l'instant où l'on sait que l'**une** quelconque d'entre elles est vraie on est assuré que **toutes** les autres le sont.

Beaucoup d'élèves croient par exemple que pour démontrer qu'un quadrilatère est un parallélogramme il faut démontrer qu'il satisfait à toutes les "propriétés" d'un parallélogramme qu'ils connaissent. En établissant une liste de propositions équivalentes on donne ainsi un choix de méthodes de démonstrations (les fameuses "conditions nécessaires et suffisantes").

Pour notre part nous utilisons la liste suivante :



Les propositions suivantes sont toutes équivalentes :

Le quadrilatère (M,A,T,H) est un parallélogramme.

Les côtés opposés du quadrilatère (M,A,T,H) sont deux à deux parallèles.

(MA) // (TH) <u>et</u> (MH) // (AT)

Le quadrilatère (M,A,T,H) est non croisé et ses côtés opposés ont deux à deux la même mesure.

(M,A,T,H) est non croisé <u>et</u> MA = HT <u>et</u> MH = AT

Le quadrilatère (M,A,T,H) est non croisé et <u>deux</u> côtés sont <u>à la fois</u> parallèles et de même mesure.

(M,A,T,H) est non croisé <u>et</u> (MA) // (TH) <u>et</u> MA = TH

Les angles opposés du quadrilatère (M,A,T,H) ont deux à deux la même mesure.

$\widehat{TAM} = \widehat{MHT}$ **<u>et</u>** $\widehat{HTA} = \widehat{AMH}$

Les diagonales du quadrilatère (M,A,T,H) ont le même milieu.

Le milieu de [M T] = le milieu de [A H] .

3 La démonstration

Vaste problème, assurément, et qui n'a pas fini de faire couler de l'encre, de la salive, de la sueur et des larmes. Rassurez-vous, nous n'offrons pas ici la ... panacée universelle ! Une piste, tout juste défrichée, encore bien étroite et cahoteuse, mais que nous jugeons prometteuse. Au fil de nos diverses tentatives, quelques "lignes de forces" se sont esquissées, quelques balises ont pu être posées pour cette "traversée du désert" de la nécessité de la démonstration — on a connu les "îlots déductifs" (dans quel océan ?), nous préférons pour notre part la métaphore de l'oasis ...

On entend souvent dire qu'il ne faut pas demander aux élèves de démontrer des résultats qui semblent "évidents". Si cette pétition de principe part sans doute d'un bon sentiment, il nous semble qu'elle se fonde sur des prémices sujettes à caution et qu'elle provoque des effets pervers. Ce n'est sans doute pas avec des bons sentiments que l'on fait de la bonne didactique ...

«*L'évidence est la matière empoisonnée de la "vérité" ou de ce que nous ressentons comme telle. L'évidence est élusive et dangereuse, c'est elle que manipule la rhétorique pour en tirer des conclusions arbitraires sous les apparences de la rigueur.*» (Abraham A. Moles : les sciences de l'imprécis)

D'où peut provenir, en effet, cette conviction d'évidence sinon de la perception d'une "figure" représentant la situation ? Or le but n'est-il pas, précisément, de se dégager de la prégnance de cette figure, d'apprendre à se méfier de sa perception, de comprendre que le "terrain de jeu" n'est plus — n'est pas ! — la feuille de papier, que les "outils" ne sont pas la règle (graduée) et le compas, le crayon ou le rapporteur, et que, de ce fait, plus rien n'est évident ? La source de la conviction doit changer de camp, changer de champ : elle ne doit plus provenir d'une espèce de révélation, d'acte de foi, mais de la confiance accordée à la **validité d'un raisonnement**. Il nous semble donc dangereux de maintenir une ambiguïté qui ne peut que générer des amalgames désastreux. D'ailleurs avec quels critères fiables tracer la frontière entre ce qui est "évident" et ce qui ne l'est pas ?

Pour notre part nous avons tenté le pari inverse : comment ne pas mettre en doute un petit dessin effectué sur un format A4 ridiculement petit avec des instruments grossiers ?! Certes, il arrive que le dessin semble refléter assez bien la réalité géométrique, et c'est tant mieux : sans cela comment pourrait-il aider à trouver des conjectures ? Si cela se produit, ce n'est évidemment pas par hasard mais parce qu'existe une certaine adéquation entre la théorie et la pratique : la géométrie euclidienne est un excellent modèle local de l'espace qui nous entoure. Mais si, par exemple, nous conjecturons qu'une droite est tangente à un cercle, cela ne provient-il pas d'une part de l'"écrasement" perceptif provoqué par un petit format, d'autre part — et bien davantage — de la connaissance d'une certaine "réalité géométrique" qui nous rend aptes à la projeter sur la situation en question, tant il est vrai que l'on ne peut reconnaître que ce que l'on connaît ? Or il est clair que la notion de "point de contact" est totalement irréaliste, qu'aucun dessin ne permettra jamais de compter le nombre de points communs à une droite et un cercle et que la distinction entre les cas "deux points communs" et "un point commun" est purement du domaine de l'imaginaire, ce qui ne veut pas dire ici de l'irrationnel.

De même, si nous empilons des feuilles de format A4, A5, ... en faisant coïncider un coin et les deux bords de ce coin, il est "évident" que les coins diagonalement opposés sont merveilleusement alignés ... ce qui évacue radicalement le problème de l'irrationalité de $\sqrt{2}$! Pourquoi donc, alors, s'embêter à faire des démonstrations si le but de la manœuvre est simplement que "ça marche visiblement bien" ? Parce que la question est ailleurs, d'une autre essence, d'une autre nature, précisément : conceptuelle, oui, n'ayons pas peur des mots.

Il nous semble essentiel de désamalgamer les domaines, de les distinguer tout en clarifiant les liens qui les unissent et qui sont précisément responsables des confusions possibles : empiler des feuilles de papier et "voir" un alignement de coins, c'est faire une expérience de physique ; l'explication du résultat de cette expérience passe par une modélisation mathématique de la situation : ce sont les conclusions des raisonnements effectués sur le modèle qui éclairent les résultats obtenus — mieux : qui permettent de les prévoir ! — La géométrie est ainsi un instrument privilégié de modélisation (Henri Poincaré déclarait : «*La géométrie n'est pas vraie, elle est utile.*») et cette notion de modèle nous semble très importante, très riche et très éclairante. Voilà pourquoi nous avons intitulé certaines fiches : «De la théorie à la pratique». Retrouver "au compas et à la règle" l'emplacement du centre d'un dessin d'arc de cercle requiert l'utilisation de résultats théoriques sur le "cercle circonscrit à un triangle".

Faut-il vraiment rappeler qu'il est exclu de "tout démontrer" ? Mais est-il si difficile, lorsqu'on ne démontre pas une assertion, d'insister un peu sur le fait que d'autres l'ont démontrée et qu'on peut leur faire toute confiance ?

Nous commençons par un exercice très simple qui assure d'une part la continuité avec la phase précédente de "déstabilisation de la perception du dessin", d'autre part la révision de quelques théorèmes normalement bien connus, et qui présente en outre l'intérêt de pouvoir être résolu de deux façons, ce qu'il ne faut pas se priver de faire. La résolution de cet exercice est présentée sous la forme d'un "organigramme de déduction" qui devient ensuite prétexte à une réflexion sur la méthode utilisée : source des informations, traitement des informations, outils utilisés, résultats obtenus. Cela débouche sur la "fiche méthodologique" « Comment déduire ? » qui est analysée avec la classe — explication du mot "adéquation" — et immédiatement suivie d'un nouvel exemple présenté encore sous forme d'organigramme. Nous ne craignons pas de nous répéter en demandant ensuite la rédaction de la démonstration trouvée avec l'organigramme. Pour la chronologie de cette rédaction — car, hélas, on ne peut pas écrire deux phrases à la fois, même si on a deux idées présentes en même temps à l'esprit — nous avons adopté l'ordre : informations–outil–conséquence, car les informations constituent les données premières et, même s'il faut les trier et les reformuler en fonction d'une certaine idée du but à atteindre, ce sont quand même elles qui induisent l'appel à un théorème, une propriété ou une définition.

Nous revenons ensuite rapidement — mais fermement — sur le concept de médiatrice car il est incontournable, toujours pas maîtrisé à ce niveau, l'occasion de montrer l'intérêt des formulations équivalentes — à savoir faire des liens avec d'autres conceps (cercle, triangle isocèle, symétrie axiale) — source d'exercices intéressants pour montrer l'importance du choix de la formulation d'une définition ou d'une propriété, illustrer le fonctionnement de l'organigramme de déduction, réutiliser des notions fondamentales (égalité, parallélisme, orthogonalité). On arrive enfin à la question du cercle passant par trois points, où l'on constate immanquablement un blocage : les élèves sont, en écrasante majorité, incapables de se servir du résultat connu pour deux points. Pourquoi ? Mais parce que 2 ce n'est pas 3 ! Donc ils ne peuvent pas faire de lien. Pour pouvoir faire ce lien il faut changer de point de vue et concevoir un rapport d'inclusion : si j'ai trois points je peux en prendre deux — ce à quoi ils ne sont absolument pas habitués.

«Les mathématiques ce sont des idées, *et plus précisément l'analyse des relations entre ces idées et leurs prolongements. Les mathématiciens tentent de répondre à ce type de question, en élaguant tout ce qui est accessoire et en pénétrant au cœur même du problème. Il ne s'agit pas tant de trouver la bonne réponse, que de comprendre pourquoi il y a une réponse et pourquoi elle prend telle ou telle forme.»*

«La bonne mathématique c'est celle qui enrichit le sujet, qui ouvre des vues nouvelles, qui résoud de vieux problèmes, qui comble des vides, qui complète harmonieusement les connaissances antérieures ou qui établit des liens entre des domaines jusque là indépendants.» (Ian Stewart : les mathématiques)

«Les mathématiques sont un langage plus le raisonnement, comme une logique ajoutée au langage. Les mathématiques sont un outil pour le raisonnement. C'est en fait la collecton de tous les résultats d'une réflexion et d'un raisonnement précis. Les mathématiques permettent de relier un énoncé à un autre.»

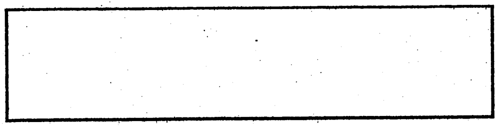
«Je voudrais faire quelques remarques sur le rapport des mathématiques et de la physique. Les mathématiciens ne s'occuppent que de la structure du raisonnement et ne s'intéressent pas vraiment à ce dont ils parlent. Ils n'ont même pas besoin de connaître *ce dont ils parlent, ou, comme ils le disent eux-mêmes, de savoir si ce qu'ils disent est vrai. Je vais expliquer cela. Vous commencez par énoncer les axiomes, ceci est comme ci, celà est comme ça. Et puis la logique peut fonctionner sans qu'on sache ce que signifient les mots «ceci» et «cela». Si les axiomes sont énoncés de façon suffisamment soigneuse et complète, celui qui fait le raisonnement n'a pas besoin de connaître le sens des mots pour en tirer des conclusions dans le même langage. Si j'utilise le mot triangle dans l'un des axiomes, il y aura un énoncé sur les triangles dans les conclusions, bien que celui qui fait le raisonnement puisse ignorer ce qu'est un triangle. Mais je peux reprendre le raisonnement au début, me dire ; «un triangle, ce n'est qu'un machin à trois côtés, qui est comme ça et comme ça», et je comprends alors ses résultats finaux. Autrement dit, les mathématiciens préparent des résultats abstraits tout prêts à être utilisés si vous avez un ensemble d'axiomes pour le monde réel. Mais le physicien donne un sens à chacune de ses phrases. C'est une chose très importante mais beaucoup de gens qui viennent à la physique par le biais des mathématiques ne le saisissent pas. La physique n'est pas les mathématiques, les mathématiques ne sont pas la physique. L'une aide l'autre. Mais en physique vous devez comprendre le lien entre les mots et le monde réel. Ce que vous avez obtenu, vous devez à la fin le traduire en français, en réel, en appareils de cuivre et de verre avec lesquels vous allez faire les expériences. Ce n'est que comme ça que vous pourrez vérifier vos résultats. Et ce problème n'est pas du tout un problème mathématique.»*

(Richard Feynman : la nature de la physique)

S'il est patent que nous ne pouvons pas ne pas faire de la physique pendant nos cours, que nous nous devons de le faire pour que les mathématiques n'apparaissent pas comme trop désincarnées, desséchées, ne l'est-il pas tout autant que lorsque nous le faisons nous devons le dire clairement — faut-il ajouter "sans peur et sans reproche" — et mettre en relief, autant que faire se peut, ce qui les relie et ce qui les différencie ? Les deux sciences n'ont-elles pas, l'une comme l'autre, l'une avec l'autre, tout à y gagner — et nos élèves avec ?

DESSIN INFORMATION PREUVE

I) Voici un dessin :



A quel genre de quadrilatère fait penser ce dessin ?

Peut-on être certain que ce dessin représente effectivement un tel quadrilatère ? Pourquoi ?

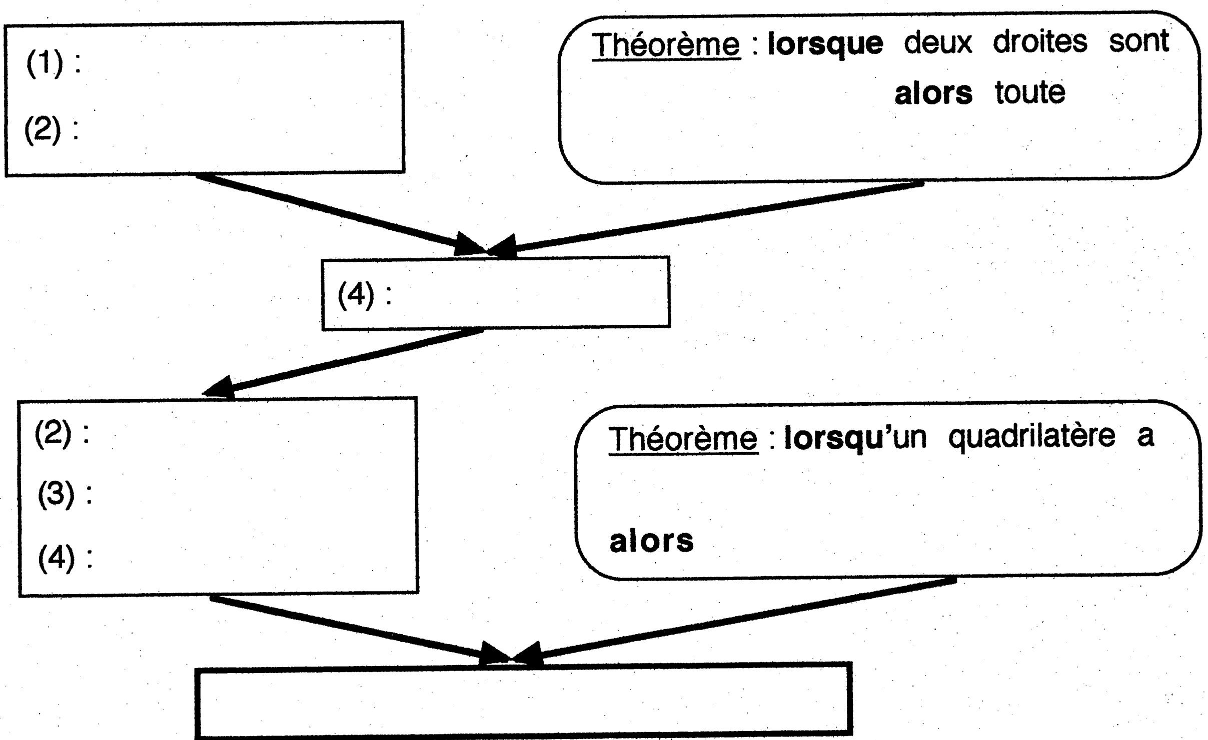
II) La situation est décrite par les informations suivantes :

(M,A,T,H) désigne un quadrilatère tel que :

(1) : (MA) // (TH) , (2) : (AT) $\perp$ (TH) , (3) : (MH) $\perp$ (TH).

Etablir en quoi ces informations sont suffisantes pour devenir sûr et certain que le quadrilatère (M,A,T,H) est indubitablement un rectangle.

Première façon :



RAPPEL DES DONNEES :

(M,A,T,H) désigne un quadrilatère tel que :

(1) : (MA) // (TH) , (2) : (AT) $\perp$ (TH) , (3) : (MH) $\perp$ (TH).

Deuxième façon :

(2) :

(3) :

Théorème : **lorsque** deux droites sont

alors

(4) :

(1) :

(4) :

Théorème : **lorsqu'**un quadrilatère a

alors c'est un

(M,A,T,H) est un

(M,A,T,H) est un

(2) :

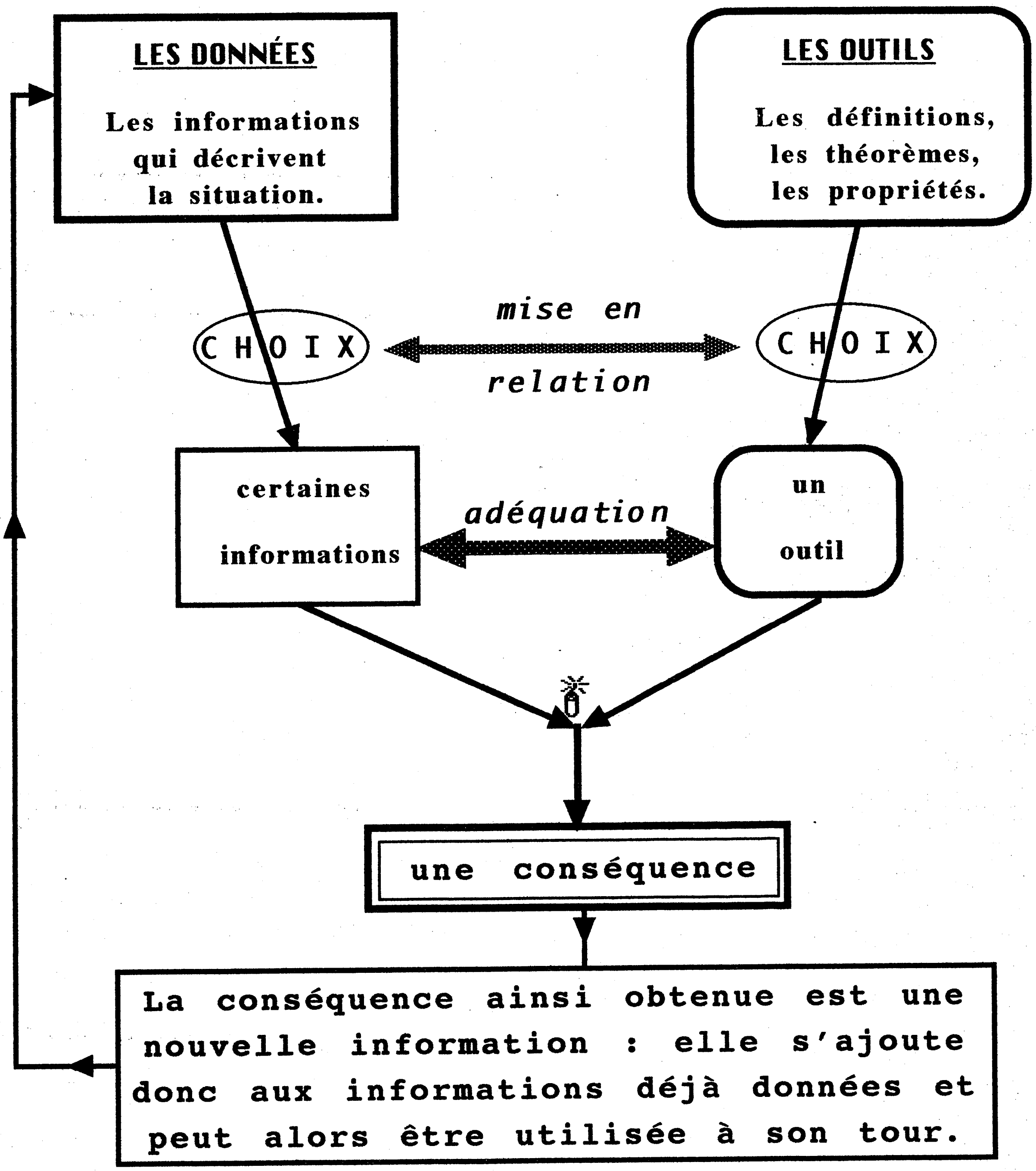
Théorème : **lorsqu'**un parallélogramme

a un

alors c'est un

DÉMONSTRATION

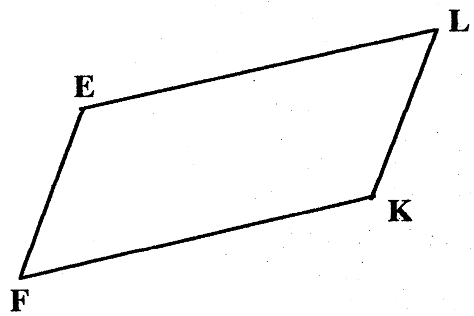
COMMENT DÉDUIRE ?

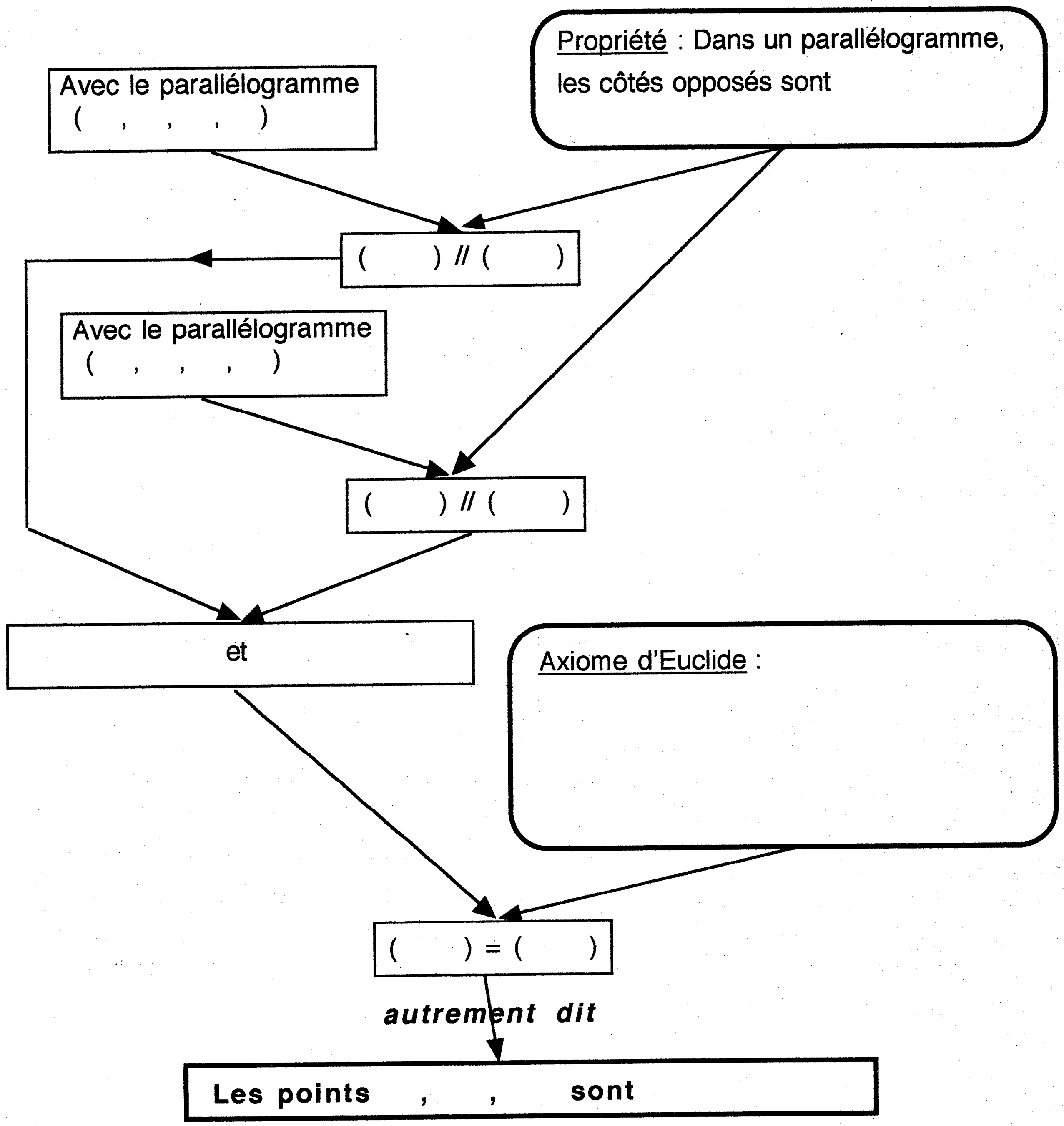


FAIRE DES DÉDUCTIONS

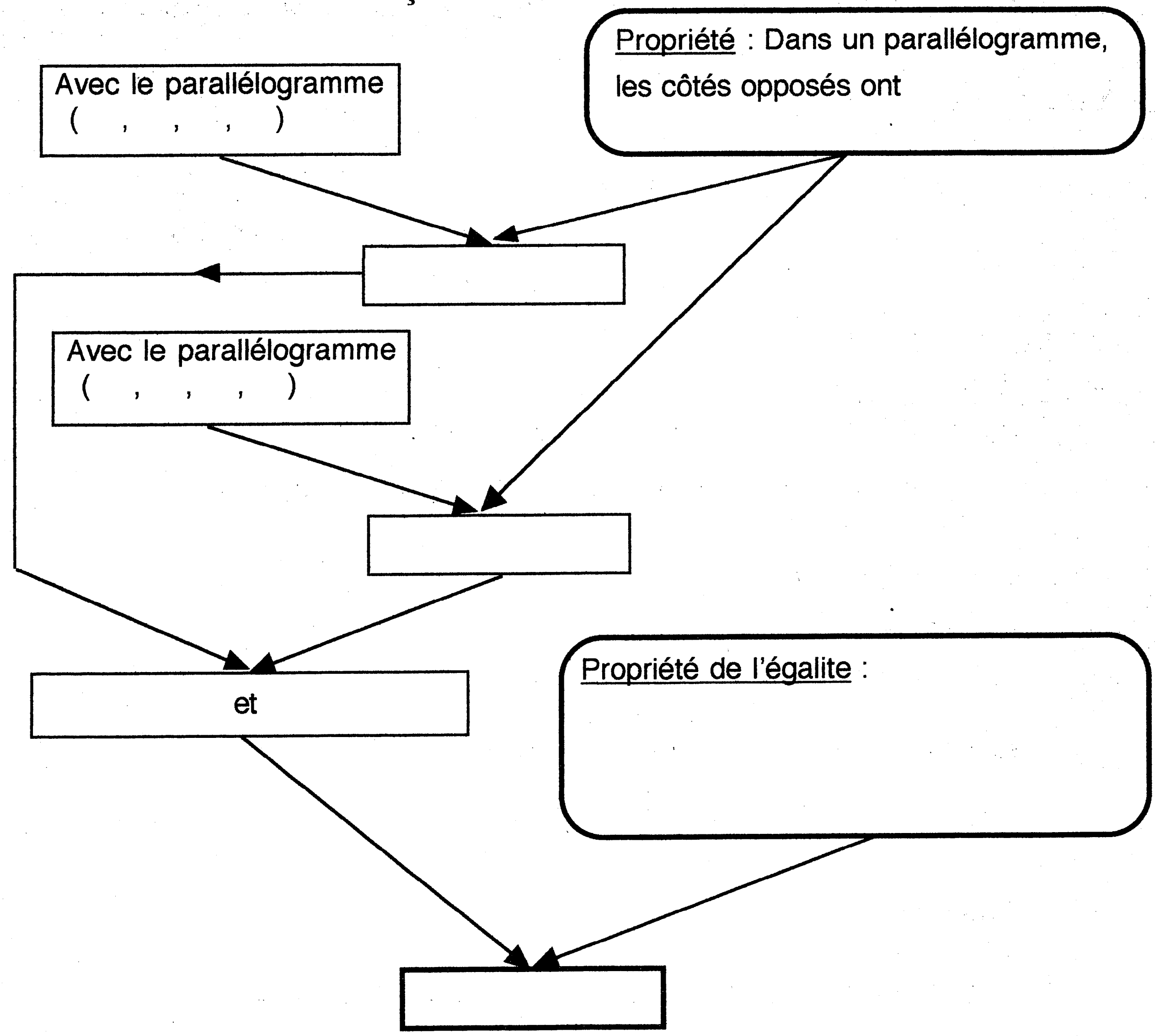
SITUATION : **(E,F,K,L)** et **(F,K,E,M) désignent deux parallélogrammes.**

DESSIN : à compléter





De la même façon :



En réunissant les deux résultats obtenus :

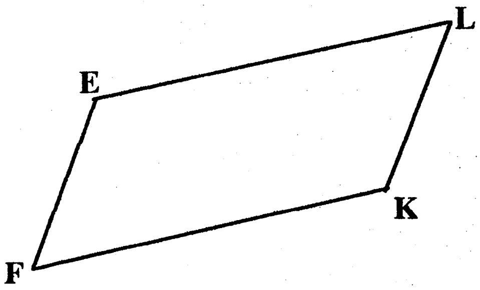
Les points sont et =

autrement dit

REDIGER UNE DEMONSTRATION

SITUATION : (E,F,K,L) et (F,K,E,M) désignent deux parallélogrammes.

DESSIN : à compléter



QUESTION : E est-il ....

DEMONSTRATION :

1°) a) Information : (E,F,K,L) est un parallélogramme.

Théorème : dans un parallélogramme, les côtés opposés ...

Conséquence :

b) De même

c) Informations : ( ) // ( ) **et** ( ) // ( )

Axiome d' :

Conséquence :

autrement dit les points ...

2°) a) Information : (E,F,K,L) est un parallélogramme.

Théorème : dans un parallélogramme, les côtés opposés ...

Conséquence :

b) De même

c) Puisque = **et** = **, alors ...**

3°) Conclusion : les points sont **et** =

équivaut à : E est

CERCLES PASSANT PAR DEUX POINTS

Ci-dessous sont représentés deux points E et K. On sait que EK = 6,23 cm.

1°) Représenter cinq cercles passant par E et K ainsi que leurs centres.

2°) Quel est le plus petit rayon d'un cercle passant par E et K ? Pourquoi ?
Représenter ce cercle.

3°) Où sont situés tous les centres des cercles passant par E et K ?
Représenter cet ensemble de points.

Médiatrice d'un segment

Trois définitions équivalentes

La médiatrice du segment [AB], c'est :

1°) L'ensemble de tous les points qui sont équidistants de A et de B.

2°) L'ensemble de tous les centres des cercles passant par A et par B.

3°) La droite perpendiculaire à (AB) qui passe par le milieu de [AB].

Cinq phrases équivalentes

1) $\boxed{MA = MB.}$

2) M est équidistant de A et de B.

3) $\boxed{\text{M est un point de la médiatrice de [AB].}}$

4) M est le centre d'un cercle passant par A et B.

5) M est le sommet principal d'un triangle isocèle de base [A B] ou bien M est le milieu de [A B].

On sait qu'une droite est déterminée par la donnée de <u>deux</u> de ses points.
Si K et L sont équidistants de A et de B, c'est-à-dire si KA = KB <u>et</u> LA = LB,
alors K et L sont deux points de la médiatrice de [AB], autrement dit
(KL) <u>est</u> la médiatrice de [AB].

D'où la méthode de "construction au compas et à la règle" pour représenter la médiatrice de [AB] : représenter deux points équidistants de A et de B puis la droite passant par ces deux points.

Ax

xB

Un exercice d'application

La situation est la suivante : C désigne le cercle de centre E et de rayon 28,1 mm.
Γ désigne le cercle de centre K et de rayon 35,9 mm.
C et Γ se coupent en deux points appelés R et S.

1°) Complète le dessin qui représente cette situation :

2°) Que penses-tu des droites (EK) et (RS) ?

Elles ont l'air d'être ....

3°) Comment en être certain ? En exploitant les informations dont on dispose !

a) ER = ... **et** ES = ... , **donc** ...... = ... , **autrement dit** **E est ...**

b) KR = ... **et** KS = ... , **donc** ...., **autrement dit** **K ...**

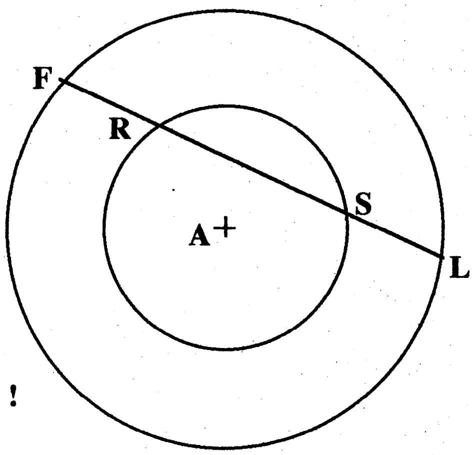
c) Une droite étant définie par .... de ses points, il résulte de ce qui précède que **(EK) est ...**

d) Une conséquence de cela est que (EK) est ...

EXERCICES

I) La situation est la suivante :

C et Γ désignent deux cercles concentriques de centre A.
Une droite coupe C en F et L, et Γ en R et S.
D désigne la médiatrice de [F L].
Δ désigne la médiatrice de [R S].
QUESTION : comparer D et Δ.



1°) Dessin à compléter :

2°) Conjecture : le dessin donne une idée ; laquelle ?

Il va falloir prouver que cette idée est bonne !

3°) Preuve

a) Que sait-on de D ?

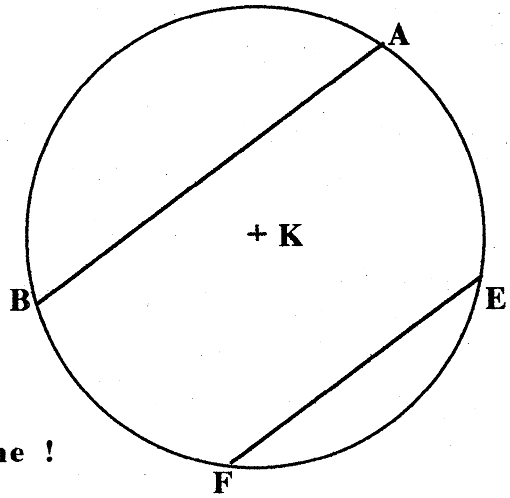
b) Que sait-on de Δ ?

c) Quelles propriétés (théorèmes, axiomes, définitions) va-t-on utiliser pour établir des conséquences des informations dont on dispose ?

II) La situation est la suivante :

C désigne un cercle de centre K.
[A B] et [E F] sont deux cordes parallèles.
D désigne la médiatrice de [A B].
Δ désigne la médiatrice de [E F].

QUESTION : comparer D et Δ.



1°) Dessin à compléter :

2°) <u>Conjecture</u> : le dessin donne une idée ; laquelle ?

Il va falloir prouver que cette idée est bonne !

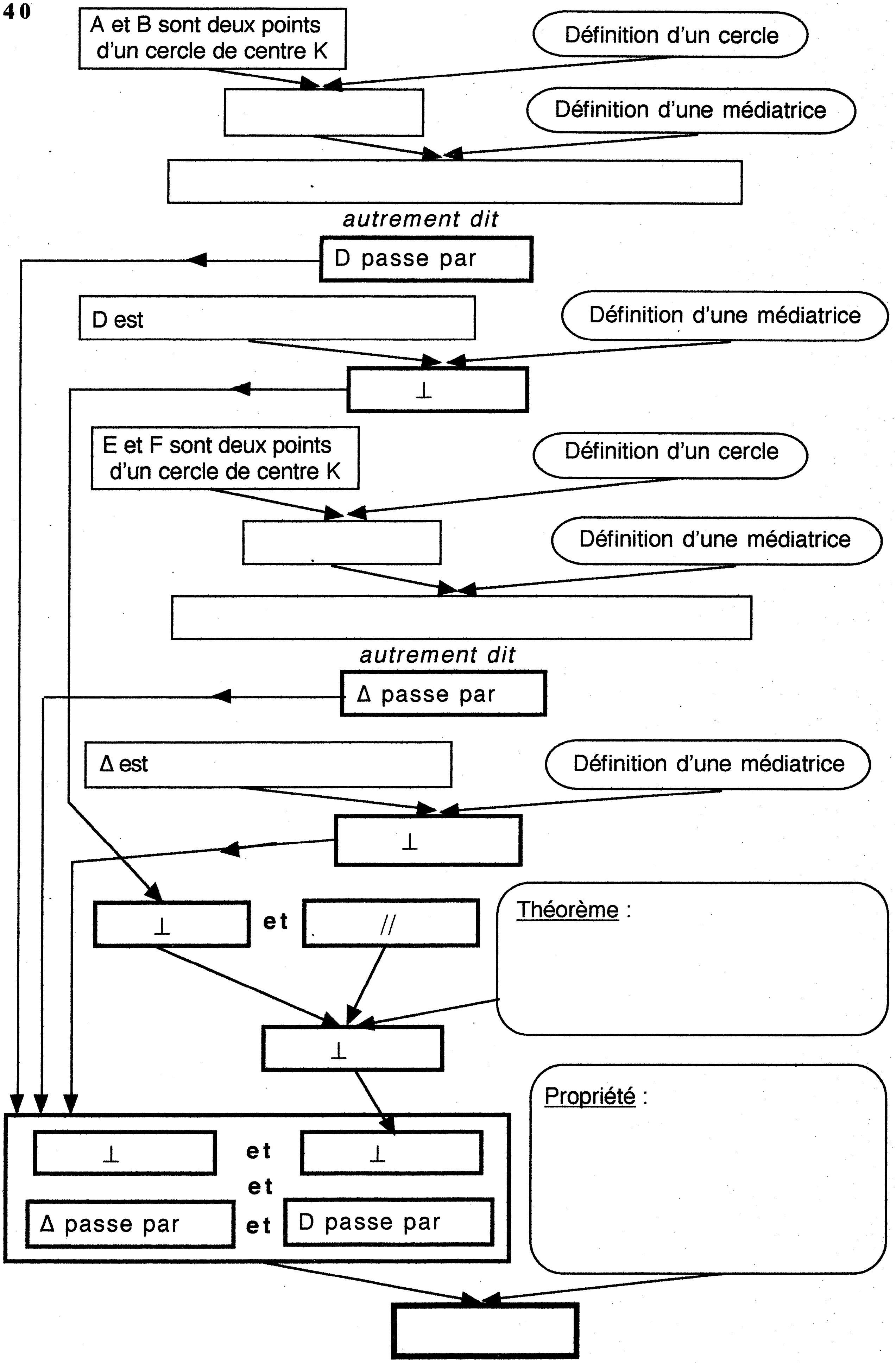
3°) <u>Preuve</u>

a) Que sait-on de D ?

b) Que sait-on de Δ ?

c) Que sait-on de (AB) et (EF) ?

d) Quelles propriétés (théorèmes, axiomes, définitions) va-t-on utiliser pour établir des conséquences des informations dont on dispose ?


A et B sont deux points d'un cercle de centre K
Définition d'un cercle
Définition d'une médiatrice
autrement dit
D passe par
D est
Définition d'une médiatrice
⊥
E et F sont deux points d'un cercle de centre K
Définition d'un cercle
Définition d'une médiatrice
autrement dit
Δ passe par
Δ est
Définition d'une médiatrice
⊥
⊥
et
//
Théorème :
⊥
Propriété :
⊥
et
⊥
et
Δ passe par
et
D passe par

CERCLE PASSANT PAR TROIS POINTS

RAPPEL : étant donné deux points A et B, il y a une infinité de cercles qui passent par A et B. Leurs centres forment

1ère situation : A, B, C désignent trois points **alignés.**

Dessin :

A	B	C
x	x	x

QUESTION : combien y a-t-il de cercle passant à la fois par ces trois points ? POURQUOI ?

REPONSE et JUSTIFICATION :

☞ SAVOIR SE SERVIR DE CE QUE L'ON SAIT !

<u>2ème situation</u> : A, B, C désignent trois points <u>non alignés.</u>

Dessin :

B
A x
x

x C

<u>QUESTION</u> : combien y a-t-il de cercle passant à la fois par ces trois points ? POURQUOI ?

<u>REPONSE et JUSTIFICATION</u> :

☞ **SAVOIR SE SERVIR DE CE QUE L'ON SAIT !**

BILAN

1) Par deux points A et B il passe une infinité de cercles. Leurs centres constituent la

2) Par trois points alignés il ne passe

3) Par trois points non alignés il passe

autrement dit :

Les trois d'un triangle sont et leur point de concours est le du "

CONSÉQUENCES :

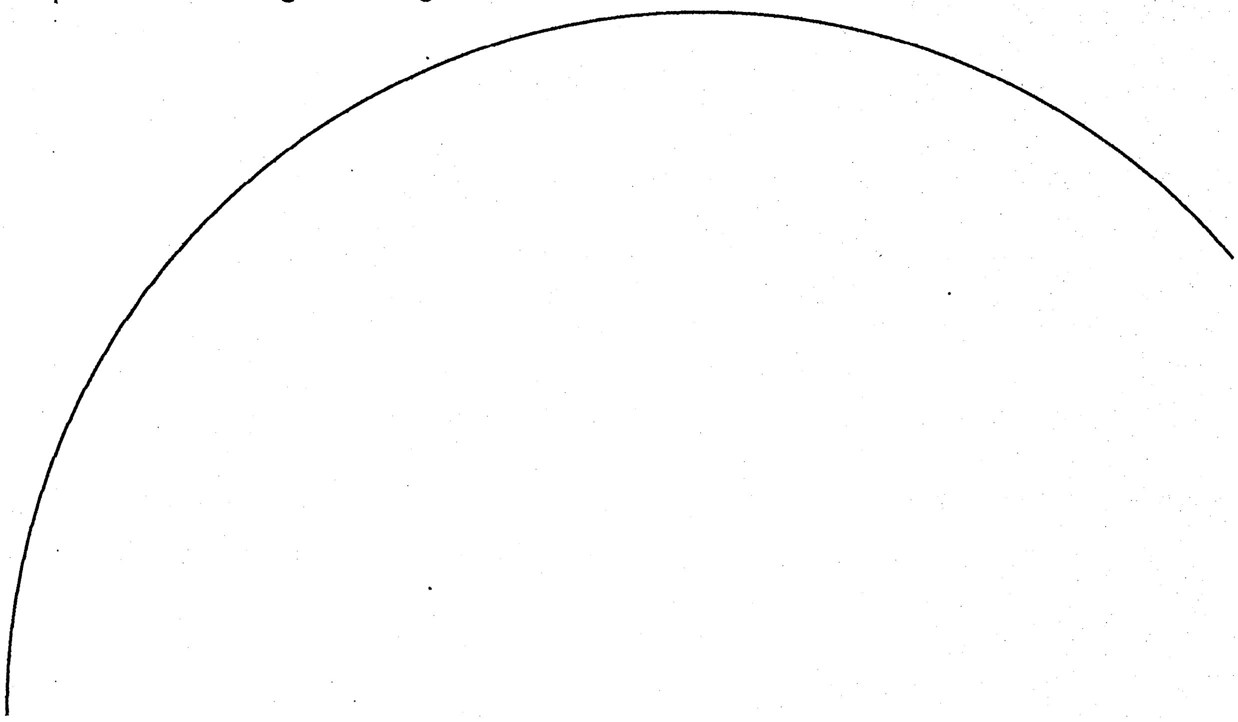
1°) Un cercle et une droite peuvent-ils avoir trois points communs ? Pourquoi ?

2°) Deux cercles peuvent-ils avoir trois points communs ? Pourquoi ?

DE LA THÉORIE À LA PRATIQUE

1°) Ci-dessous est représenté un arc de cercle.

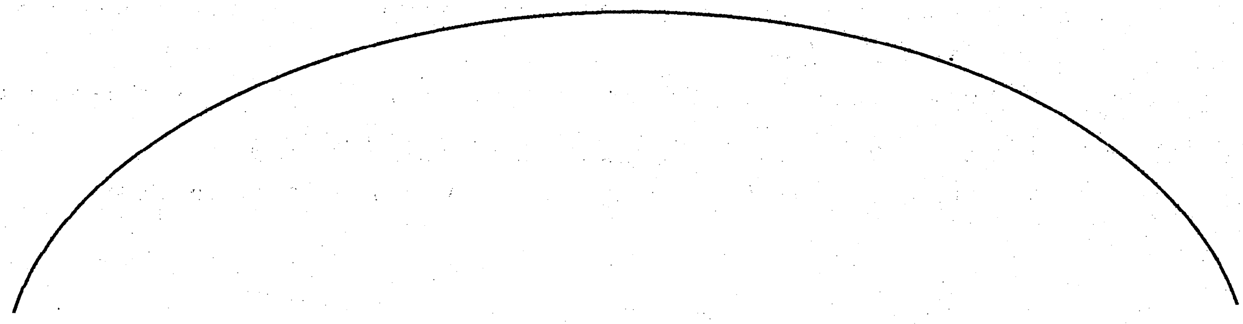
Retrouver géométriquement le centre de ce cercle : expliquer par quelle(s) propriété(s) on peut le définir, puis réaliser la représentation au compas et à la règle non graduée.



2°) Ci-dessous est représenté un arc d'une certaine courbe.

Utiliser un moyen graphique pour savoir si cette courbe peut raisonnablement être considérée comme un cercle.

Expliquer et justifier.



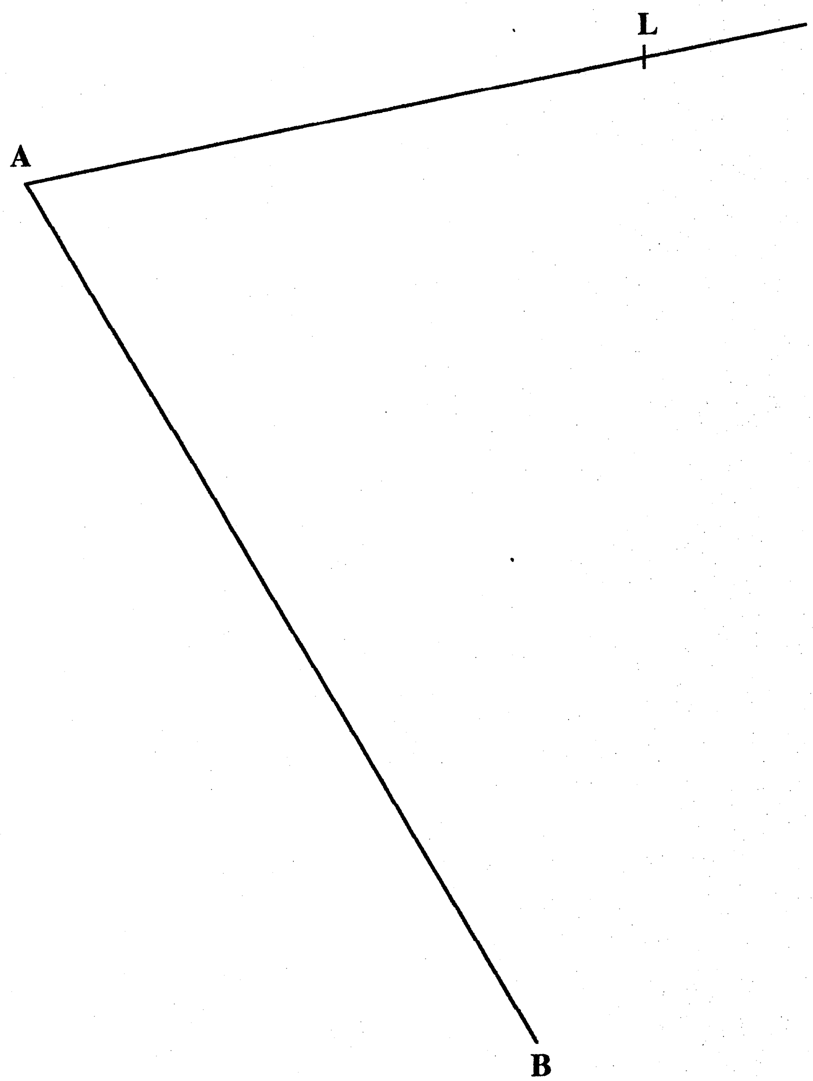
DE LA THÉORIE À LA PRATIQUE, SUITE

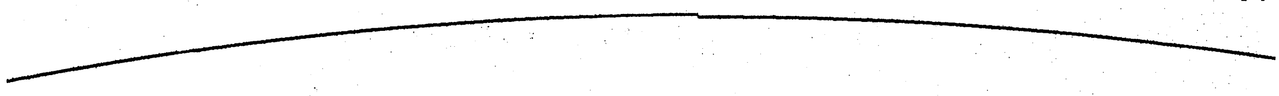
3°) **Le triangle ABC n'a pas pu être entièrement représenté sur cette feuille mais on connait le milieu de [A C] : c'est le point L.**

On voudrait déterminer géométriquement le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

Trouve un procédé qui permette de faire cela mais attention : <u>sans sortir des limites de cette feuille de papier.</u>

Explique ta méthode et illustre-la en complétant le dessin.





4°) **Ci-dessus est représenté un arc de cercle.**
On demande d'évaluer le rayon de ce cercle.

Explique ta méthode et les propriétés géométriques que tu utilises.

Avec quelle précision penses-tu avoir obtenu ton résultat ?

☞ Il faut coller une deuxième feuille au bas de celle-ci pour obtenir l'intersection des tracés de deux médiatrices ... Un certain nombre d'élèves n'y pensent pas ! Ce n'est certes pas interdit, mais ... ce n'est pas dit.

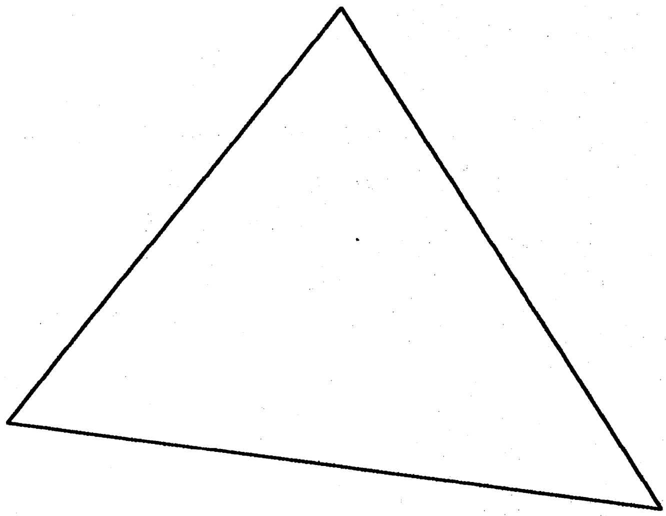
La longueur des traits provoque une imprécision qui n'est absolument pas soupçonnée. Il faut récolter tous les résultats obtenus et les afficher : les élèves sont stupéfaits de la "largeur de la fourchette". Bonne occasion, bien sûr, de faire réfléchir au problème, de poursuivre avec un peu de statistique (quel sens donner à la "valeur moyenne" ?).

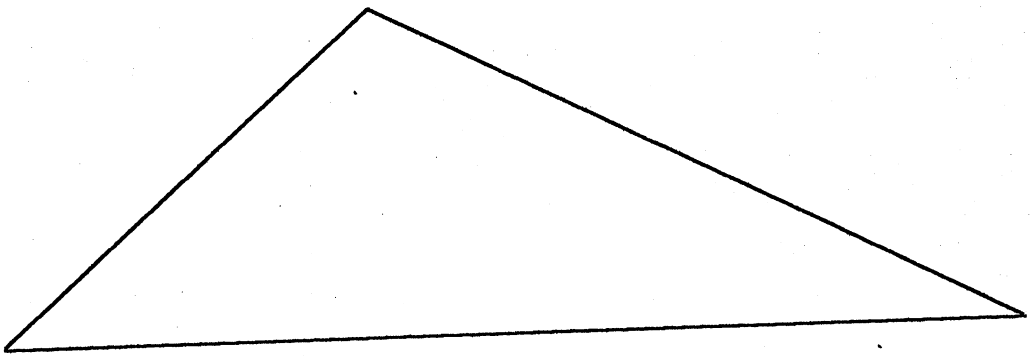
HAUTEURS D'UN TRIANGLE

I) DESSINS :

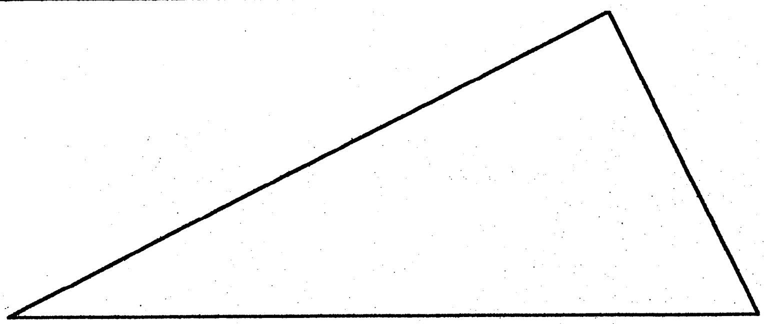
Dessiner en rouge les trois hauteurs de chacun des triangles représentés ci-dessous.

Coder les angles droits.





CAS PARTICULIER : TRIANGLE RECTANGLE



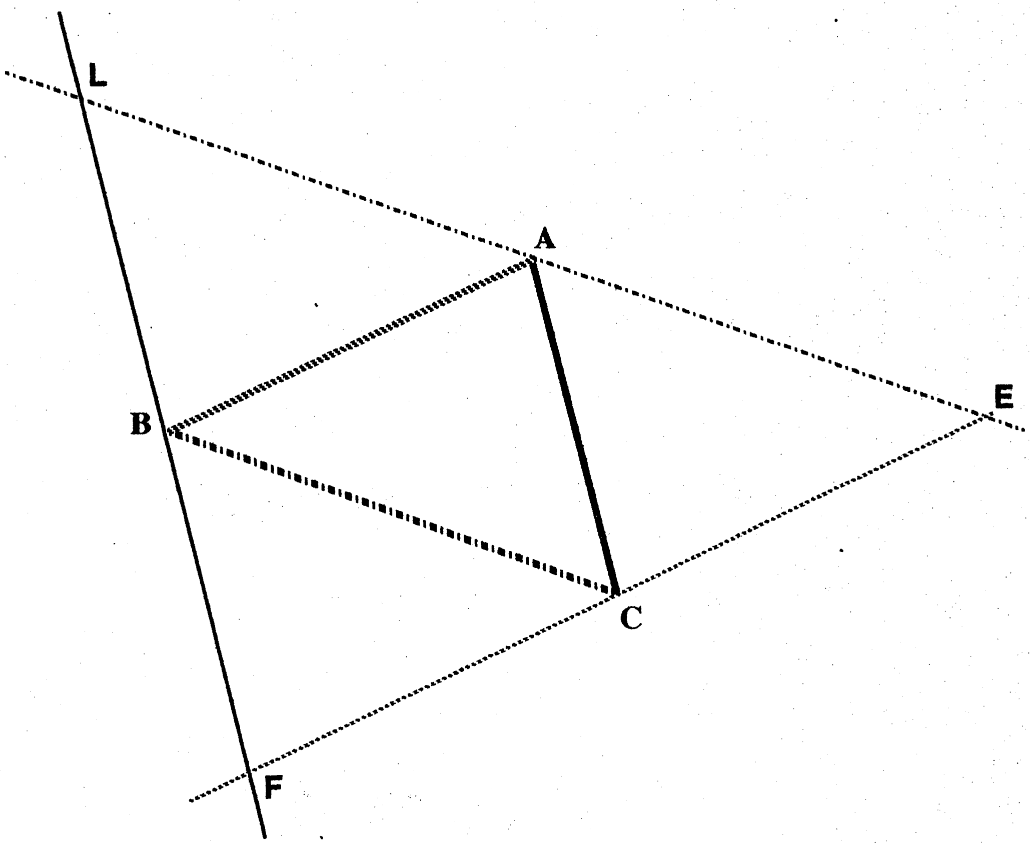
Les deux côtés de l'angle droit sont aussi

II) CONJECTURE :

III) PREUVE :

SITUATION : ABC désigne un triangle quelconque.
La parallèle à (AB) passant par C coupe la parallèle à (BC) passant par A en E.
La parallèle à (AC) passant par B coupe la parallèle à (AB) passant par C en F.
La parallèle à (BC) passant par A coupe la parallèle à (AC) passant par B en L.

1°) Trouver des parallélogrammes dans la situation.
2°) En déduire ce que sont A, B, C pour le triangle EFL.
3°) Comparer les hauteurs du triangle ABC et les médiatrices du triangle EFL.
4°) Qu'en déduire pour les hauteurs du triangle ABC ?



1°)

a) ( ) // ( ) et ( ) // ( ), donc est un

Conséquences : = et = .

b) ( ) // ( ) et ( ) // ( ), donc est un

Conséquences : = et = .

c) ( ) // ( ) et ( ) // ( ), donc est un

Conséquences : = et = .

2°)

a) = et = , donc = , et comme les points ,

et sont , cela signifie que

b) = et = , donc = , et comme les points ,

et sont , cela signifie que

c) = et = , donc = , et comme les points ,

et sont , cela signifie que

3°)

a) Soit Δ_1 la hauteur issue de A du triangle ABC. Alors $\Delta_1 \perp$ ( ). Or on sait que

( ) // ( ). Donc Δ_1 , et comme A est , il en

résulte que Δ_1 est

b) Soit Δ_2 la hauteur issue de B du triangle ABC. Alors $\Delta_2 \perp$ ( ). Or on sait

que ( ) // ( ). Donc Δ_2 , et comme B est , il en

résulte que Δ_2 est

c) Soit Δ_3 la hauteur issue de C du triangle ABC. Alors $\Delta_3 \perp$ ( ). Or on sait que

( ) // ( ). Donc Δ_3 , et comme C est , il en

résulte que Δ_3 est

4°) On sait que les d'un triangle sont . Δ_1, Δ_2

et sont donc puisque ce sont les du
triangle .

Or Δ_1, et sont aussi les du triangle .

<u>CONCLUSION</u> :

Les trois d'un triangle sont .

Leur point de est appelé l' du triangle.

EXERCICES D'APPLICATION :

1) Les points R, S et H sont donnés et représentés ci-dessous. Définir le point T tel que H soit l'orthocentre du triangle RST.

Illustrer en représentant la construction du point T.

R x

x S

x H

☞ On a ici une belle occasion de montrer l'intérêt de la reformulation : une hauteur doit être conçue non seulement comme une perpendiculaire à un côté passant par le sommet opposé, mais aussi comme une droite passant par un sommet et l'orthocentre ou encore passant par l'orthocentre et perpendiculaire à un côté.

2) Les points P, L et Y sont donnés et représentés ci-dessous. Définir le point M tel que Y soit l'orthocentre du triangle PLM.

Illustrer en représentant la construction du point M.

L x

P x

x Y

4 La mesure exacte, utopie géométrique ou nécessité numérique ?

☞ En 6è et 5è, les activités de mesurage sont monnaie courante puisqu'il faut "partir du concret". Mais on est censé faire des maths, pas de la physique : le problème de la précision des mesures est donc purement et simplement évacué ; on s'arrange pour que les situations proposées éludent la question et **on fait comme si la mesure était exacte, sans savoir ce que cela veut dire**, ce que cela sous-entend et implique. Bien entendu, cet implicite, ce "non dit", est générateur de confusions dont les effets néfastes resurgissent violemment en 4è lorsqu'on commence à essayer de pratiquer la géométrie avec une certaine rigueur (cf. le fameux "*on voit sur la figure*"). L'utilisation, comme données aussi bien que comme résultats, de mesures comportant, au pire, un chiffre après la virgule, ne fait que renforcer ce malaise. En voici deux exemples :

1) Ci-dessous est représenté un segment [A B] tel que AB = 12,4978 cm :

A ———————————————————————— B

Réaction de plusieurs élèves : ils prennent leur double décimètre, mesurent et protestent : "*Non, le segment fait douze centimètres et demi !* "...

2) Représenter ci-dessous un segment [K L] tel que KL = 13,216 cm.

Réaction de nombreux élèves : "*C'est impossible !* "

Questions : Qu'est-ce qu'un segment ?
Que signifie "représenter" ?
La représentation d'un segment est-elle ce segment ?
Que mesure-t-on avec un double décimètre, un segment ou une représentation d'un segment ?
Effectuer une mesure avec un double décimètre, est-ce faire des mathématiques ?

☞ En 5è le nombre π est introduit pour la mesure de la circonférence d'un cercle et la question "π, *ça fait combien* ? " est inévitable.

☞ En 4è, l'arrivée du théorème de Pythagore repose le problème historique de $\sqrt{2}$. L'interrogation récurrente "$\sqrt{2}$ *ça fait combien ?* " est l'exemple typique de la question mal posée à laquelle il est impossible de répondre d'emblée puisqu'il faut d'abord la reformuler en : "quel est le nombre qui donne la mesure de la diagonale d'un carré dont les côtés ont pour mesure 1 ?", problème qui, pour être résoluble, suppose que : 1) tout segment soit mesurable, 2) la mesure soit exacte, c'est-à-dire s'exprime par **un** nombre unique. Car on ne peut pas se poser la question de la "nature" de $\sqrt{2}$ si l'on n'a pas accepté la nécessité de son "existence". Et l'on ne peut accepter, pour le désigner, ce nouveau graphisme incommode et dérangeant que si l'on a compris qu'il n'y a pas moyen de faire autrement, parce que le nombre positif qui a pour carré 2 n'est, hélas, égal à aucun nombre rationnel. (Notons au passage que la compréhension du concept d'égalité, en rupture totale avec toute idée de précision ou d'approximation, est un autre préalable.)

Nous voyons donc ici **trois problèmes** :

I) Le statut des “objets géométriques” et de leur représentation matérielle.

II) La question de la mesure “abstraite” d’“objets abstraits”, en continuité ou plutôt en rupture avec la mesure physique d’objets matériels.

III) Le lien concret–abstrait, on pourrait dire le lien physique–mathématiques, plus précisément la relation “monde matériel”–“modèle conceptuel”.

Et un danger constant : l’amalgame implicite des domaines.

L’objet géométrique est un objet idéalisé, quasiment utopique ou onirique, donc idéel, conceptuel, et qui résulte non seulement d’un saut dans l’imaginaire (trait de plus en plus fin, alignement de plus en plus précis, etc.), mais encore d’une sorte de “passage à la limite” qui consacre définitivement la rupture avec le “monde réel” (ligne d’épaisseur nulle, ligne droite, etc.).

Conceptuellement épuré pour ne conserver que le minimum de propriétés garantissant son caractère opératoire, cet objet géométrique va pouvoir servir de modèle à des objets matériels.

C’est dans l’adéquation du modèle (idéel, donc idéal) au problème concret que se pose la question de la précision.

Pour savoir combien il me faut de moquette pour le salon, je mesure (physiquement) le plancher du dit salon et je choisis à partir de là le modèle géométrique qui me semble le plus adéquat (rectangle, trapèze, ...), je prends par précaution une “marge d’erreur” et je fais fonctionner le modèle pour calculer (rigoureusement) une aire théorique qui couvrira mes besoins réels.

C’est bien parce qu’un segment est un objet idéel et non matériel qu’on ne mesure pas un segment avec un double décimètre. Et c’est bien pour cette même raison que sa mesure pourra être admise comme parfaite (“la perfection n’est pas de ce monde”). Ce qu’on peut mesurer avec un double décimètre c’est, forcément et toujours, un objet tout aussi matériel que ce double décimètre !

En fait, un segment ne se mesure pas : ou bien sa mesure est donnée, connue ; ou bien sa mesure peut se déduire d’autres mesures déjà connues en utilisant des propriétés ad hoc.

Si l’on travaille sur des représentations, il faut que soit au préalable posé et partagé un système de normes qui dise sous quelles conditions on pourra considérer une représentation comme fiable, fidèle. Par exemple on demandera la précision du millimètre pour les longueurs mesurables avec un triple décimètre, du degré pour les angles mesurables au rapporteur. Et l’on s’accordera pour reconnaître l’autorité d’un “expert” (en principe le professeur ...) pour apprécier si ces normes sont respectées. Et il est essentiel de comprendre qu’il n’y a pas de différence de nature entre mesurer le plancher du salon et mesurer un dessin de quadrilatère sur son cahier : dans les deux cas on ne fait pas de mathématiques !

L’acceptation de la nécessité de la démonstration passe obligatoirement par la reconnaissance du caractère abstrait, de l’essence idéelle des objets mathématiques et par le découplage entre objets conceptuels et représentations matérielles.

QUESTIONS DE MESURE

I) Introduction

Dans les "sciences exactes" (physique, chimie, biologie, etc.) on mesure certaines *caractéristiques* d'**objets matériels** en utilisant des *instruments de mesure* (qui sont d'autres objets matériels). Par exemple on peut mesurer une masse avec une balance, une température avec un thermomètre, etc.

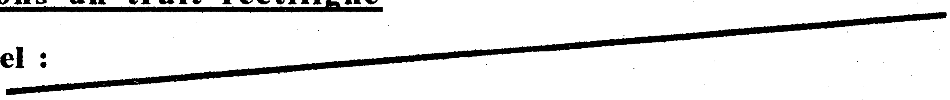
En Mathématique, la situation est tout autre : en effet, les "*objets mathématiques*" étant abstraits, imaginaires, il n'est pas possible de les "*mesurer*" au sens habituel, concret de ce mot ! La question de la mesure doit donc être posée autrement : puisque les "*objets*" à mesurer sont imaginaires, abstraits, alors les "*procédés de mesure*" doivent l'être aussi.

Nous allons essayer de comprendre cette distinction.

II) Activité : un peu de physique

A) Mesurons un trait rectiligne

Voici un objet matériel :



C'est un "trait rectiligne", fabriqué avec de l'encre. Il a une *longueur* et une *épaisseur.*

1°) Mesure de sa longueur

Prends une règle graduée et mesure sa longueur.

Ecris le résultat de ta mesure en prenant pour unité le millimètre : ....

Peux-tu être **absolument certain** que tu as trouvé la "*vraie*" mesure, la mesure "*exacte*" ? .... Pourquoi ?

A ton avis, entre quelles valeurs voisines peux-tu être certain que se trouve la "*mesure exacte*" ? Entre .... mm et .... mm.

Quel est l'écart entre les deux nombres ci-dessus ? ....

Cet écart est l'imprécision de la mesure.

Si on désigne par "w" la mesure exacte de cet objet on a : .... ≤ w ≤ ....

On obtient un **encadrement** à .... près.

.... s'appelle la **valeur approchée par défaut**.

.... s'appelle la **valeur approchée par excès**.

2°) Mesure de son épaisseur

Essaye maintenant de mesurer, avec ton double décimètre, l'épaisseur "e" du trait rectiligne de la page précédente et d'en trouver un encadrement.

.... $\leq$ e $\leq$ ....

Est-ce facile ? .... Pourquoi ?

Penses-tu que l'on puisse mesurer l'épaisseur d'un cheveu avec un double décimètre ? .... Pourquoi ?

Penses-tu que l'on puisse mesurer la distance de la Terre à la Lune avec un triple décimètre ? .... Pourquoi ?

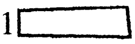
Conclusion :

B) Mesurons les côtés d'un dessin de quadrilatère

1°) Première étape

Voici un autre objet matériel :

L1

k1  k2

L2

On appelle k1, k2, L1, L2 la "valeur exacte" de la mesure de chaque côté. Effectue la mesure avec ton triple décimètre, puis écris un encadrement de la "valeur exacte" en prenant comme unité le millimètre :

$\leq$ L1 $\leq$ **$\leq$ L2 $\leq$**

$\leq$ k1 $\leq$ **$\leq$ k2 $\leq$**

Pour chaque dimension tu as obtenu un **encadrement** à .... près.

Les **valeurs approchées par défaut** sont :

pour L1 : .... ; pour L2 : .... ; pour k1 : .... ; pour k2 : ....

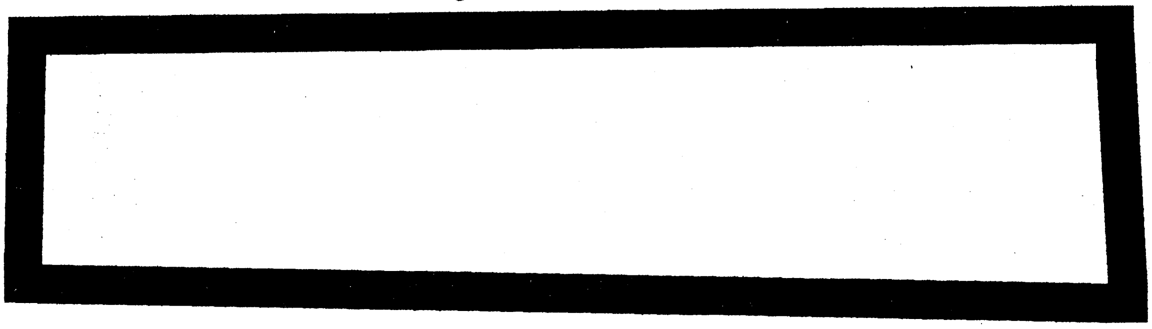
Les **valeurs approchées par excès** sont :

pour L1 : .... ; pour L2 : .... ; pour k1 : .... ; pour k2 : ....

2°) Deuxième étape

Dans l'espoir d'améliorer la précision des mesures, on fait un agrandissement de l'objet précédent. On a choisi un coefficient d'agrandissement de 10, **ce qui a pour effet de multiplier chaque dimension par 10.**

Voici le résultat de cet agrandissement :



Mesure chaque côté puis, en reprenant les noms que tu as donnés aux “valeurs exactes”, écris les encadrements pour l'agrandissement :

$\leq 10 \times L1 \leq$ $\qquad\qquad$ $\leq 10 \times L2 \leq$

$\leq 10 \times k1 \leq$ $\qquad\qquad$ $\leq 10 \times k2 \leq$

Enfin, en divisant tous les nombres par 10, écris les nouveaux encadrements de l'objet original :

$\leq$ **L1** $\leq$ $\qquad\qquad$ $\leq$ **L2** $\leq$

$\leq$ **k1** $\leq$ $\qquad\qquad$ $\leq$ **k2** $\leq$

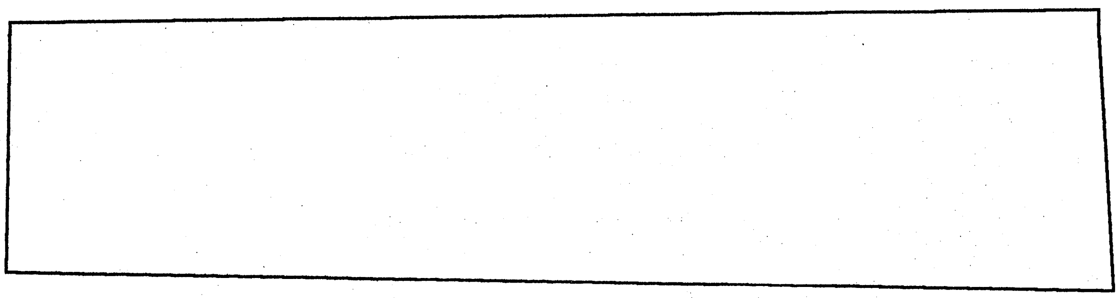
L'encadrement de L1 est à .... près. L'encadrement de L2 est à ....près.

L'encadrement de k1 est à .... près. L'encadrement de k2 est à .... près.

Faire un agrandissement a-t-il permis d'améliorer la précision des mesures ? Pourquoi ?

3°) Troisième étape

ALORS, IMAGINONS L'IMPOSSIBLE : imaginons que l'on agrandisse le dessin sans augmenter l'épaisseur des traits, ce qui est, évidemment, matériellement impossible ! On obtiendrait alors ceci :



Mesure puis donne les quatre encadrements des côtés :

$\leq 10 \times L1 \leq$ $\leq 10 \times L2 \leq$

$\leq 10 \times k1 \leq$ $\leq 10 \times k2 \leq$

En divisant par 10 tous les nombres, écris les nouveaux encadrements des mesures de l'objet original :

$\leq$ L1 $\leq$ **$\leq$ L2 $\leq$**

$\leq$ k1 $\leq$ **$\leq$ k2 $\leq$**

Tu as obtenu des encadrements à .... près. La précision est-elle meilleure ? .... Pourquoi ?

<u>4°) Quatrième étape</u> : Imagine que l'on agrandisse encore 10 fois le dernier dessin, toujours sans augmenter l'épaisseur des traits, et que les mesures donnent les résultats suivants :

$1453 \leq 100 \times L1 \leq 1454$ $1477 \leq 100 \times L2 \leq 1478$

$324 \leq 100 \times k1 \leq 325$ $368 \leq 100 \times k2 \leq 369$

En divisant par 100 (10 fois 10) tous les nombres, donne les nouveaux encadrements :

$\leq$ L1 $\leq$ **$\leq$ L2 $\leq$**

$\leq$ k1 $\leq$ **$\leq$ k2 $\leq$**

Tu as obtenu des encadrements à .... près. Que penses-tu de la précision obtenue ?

5°) Imagine maintenant que l'on répète <u>indéfiniment</u> les agrandissements : que deviendrait l'écart des encadrements ?

<u>III) Conclusions</u>

1) Mesurer un objet matériel avec un instrument, ce n'est pas faire des mathématiques (mais ça peut servir à en faire) !

2) Toute mesure d'un objet matériel à l'aide d'un instrument est <u>imprécise</u> et ne peut s'exprimer que par un <u>encadrement entre deux valeurs</u>.

3) En mathématique, <u>on imagine</u> que l'on peut parvenir à un écart nul (égal à zéro) car les "*objets mathématiques*" et les "*outils mathématiques*" sont imaginaires et on peut donc les imaginer parfaits.

<u>On conçoit donc une mesure parfaite, c'est-à-dire dont le résultat s'exprime par un nombre unique et non plus par un encadrement.</u>

Il n'y a pas — est-il vraiment besoin de le préciser ? — d'“exercices d'application” de cette notion. **Mais** elle sous-tend toutes les activités géométriques où intervient la mesure.

Par exemple, lorsqu'on demande : « soit un triangle ABC rectangle en C et tel que AB = 6 cm et AC = 4 cm. Construire ce triangle.», il doit être clair que, un dessin de ce triangle n'étant pas ce triangle, le trait (matériel) représentant le segment [A C] ne mesurera pas 4 cm, mais que, puisque l'**on sait** que AC = 4 cm, on n'a pas besoin de s'occupper de la longueur “réelle” du trait (inaccessible, impossible à définir !) : on peut donc “faire abstraction” de cette longueur et **faire comme si elle était exactement 4 cm** puisque celle du segment géométrique est précisément 4 cm. De même, lorsqu'on dessinera la perpendiculaire en C à (AC), on pourra (on devra !) faire abstraction de la mesure au rapporteur de “l'angle droit de l'équerre” et faire comme si elle valait exactement 90°, puisque l'on sait que l'“angle géométrique” mesure précisément 90°. C'est ce passage à l'abstraction, cet abandon des contingences matérielles au profit de la sécurisante simplicité de l'exactitude imaginée, qui ouvrent la porte au raisonnement rigoureux. Et cette rigueur deviendra une contrainte provocatrice lorsqu'on arrivera par exemple au problème de la mesure de la diagonale d'un carré de côté unité.

Lorsque le dessin est traité comme objet (matériel) d'étude, de manipulations, d'expériences physiques, il peut permettre de formuler une conjecture concernant la “réalité géométrique” qu'il représente plus ou moins fidèlement, conjecture qui, si elle est démontrée, permettra en retour de préciser ce dessin — en fournisssant par exemple une technique fiable pour le fabriquer.

Ainsi, reprenant l'exemple ci-dessus, si l'on demande ensuite : « Déterminer la mesure du segment [B C] », il sera clair qu'on ne parle pas de la mesure physique du trait représentant ce segment. Cela n'empêche assurément pas que cette dernière, si elle est effectuée avec soin, puisse fournir une “fourchette” raisonnable offrant ainsi un garde fou au résultat “théorique” obtenu par ailleurs !

On peut alors légitimement espérer que la consigne : « représenter un segment de longueur $\sqrt{20}$ » ne génèrera plus la réponse unanime : c'est impossible !

* * *

Depuis que nous utilisons cette approche et ce type d'activités, nous avons pu constater une très sensible régression du “ça se voit sur la figure” et de l'utilisation du mesurage du dessin comme élément de preuve, ainsi qu'un net changement d'attitude mentale vis-à-vis de la démonstration : même si sa mise en œuvre rencontre toujours de redoutables difficultés, sa légitimité, sa nécessité et sa fiabilité comme moyen de prouver la validité d'un énoncé sont beaucoup plus fortement perçues.

Si quelques collègues apprécient notre travail et s'en inspirent dans leur pratique à venir, nous serions très heureux qu'ils nous fassent connaître leur opinion et l'impact qu'ils auront pu constater sur l'attitude de leurs élèves.

BIBLIOGRAPHIE

BACHELARD Gaston : La formation de l'esprit scientifique. (J. Vrin)
Le rationalisme appliqué. (PUF)

FEYNMAN Richard : La nature de la physique. (Points Seuil)

LEVY-LEBLOND J-Marc : La pierre de touche. (Folio/Essais)

MOLES Abraham A. : Les sciences de l'imprécis. (Points Seuil)

POINCARE Henri : La science et l'hypothèse. (Champs Flammarion)

STEWART Ian : Les mathématiques. (Pour la Science Belin)
Dieu joue-t-il aux dés ? (Champs Flammarion)

THOM René : Prédire n'est pas expliquer. (Champs Flammarion)

WATZLAWICK Paul : (sous la direction de) L'invention de la réalité. (Ouvrage collectif) (Points Seuil)

On pourra également consulter les articles de Francis REYNES parus dans la revue "*Petit x*" :

Géométrie ou trahison des dessins ? (n° 26)
Le concept d'égalité : clef ou verrou ? (n° 35)
L'équivalence logique en Collège ... (n° 37)