UNIVERSITÉ DE BORDEAUX I

I.R.E.M. DE BORDEAUX

Nadine et Guy BROUSSEAU

RATIONNELS et DÉCIMAUX dans la scolarité obligatoire

***

— comptes rendus d'observations de situations et de processus didactiques à l'école Jules Michelet de TALENCE —

Document pour les enseignants
et pour les formateurs

1987

Les leçons étaient conçues et commentées par Guy, préparées par l'équipe et critiquées pour tous ceux, étudiants ou visiteurs, qui fréquentaient les séminaires de l'I.R.E.M. à Michelet.

Nadine a dédigé les différentes versions de chacune des fiches didactiques qui composent cet ouvrage.

Les auteurs ont travaillé au sein d'une équipe dont la composition a varié. Cette équipe comprenait d'abord les enseignantes qui faisaient les leçons : Nadine, et dans la classe parallèle : Maguy Llorens de 1973 à 1977, puis Denise Greslard qui a donné beaucoup à ce travail de 1977 à 1987.

Marie-José Lacave et Samuel Stéphanini ont essayé ces leçons au cours moyen première année.

L'équipe comprenait aussi le responsable du niveau, un professeur d'Ecole Normale dont la tâche consistait à aider les maîtres à maintenir l'expérience dans le cadre prévu et à la rendre compatible avec les nécessités du programme et du bon fonctionnement de la classe : Christian Prouteau, Gérard Vinrich, Joël Briand, René Berthelot et Mireille Lamant se sont succédés à ce poste. René Berthelot et les maîtres d'application de l'Ecole Normale de Pau ont répliqué ces leçons et donné des rétractions intéressantes.

Pierre Raymond a réalisé les enregistrements audio-visuels sans lesquels les analyses n'auraient pas été possibles.

Harrisson Ratsimba-Rajohn a collaboré aux recherches et aux traitements statistiques.

Que tous soient remerciés pour leur dévouement aux enfants et au projet, pour leur compétence et leur professionnalisme dans ce travail et surtout pour la chaleur de leur amitié.

* * *

S O M M A I R E

* * *

.../...

.../...

.../...

.../...

.../...

.../...

.../...

.../...

.../...

---/---

MODULE 15 : DECOMPOSITION DES APPLICATIONS RATIONNELLES. IDENTIFICATION DES RATIONNELS ET DES APPLICATIONS LINEAIRES RATIONNELLES

.../...

INTRODUCTION

Cet ouvrage s'adresse aux formateurs de maîtres de la scolarité obligatoire et principalement à ceux qui y participent en travaillant eux-mêmes avec des classes : maîtres d'application, conseillers pédagogiques, inspecteurs départementaux, professeurs d'écoles normales.

Il est composé de deux parties.

La première décrit le déroulement de 65 leçons : consignes, comportements des élèves, stratégies du maître, résultats, remarques diverses, tout ce qui concerne la reproduction de situations comparables. Ces soixante cinq leçons ont toutes été réalisées au moins une fois, et presque toutes chaque année de 1973 à 1987 à l'école Jules Michelet de TALENCE à l'occasion de recherches en didactique des mathématiques.

La description qui en est donnée ici tente d'intégrer les observatins faites au cours de ces recherches, aussi bien par les maîtres que par les observateurs.

La deuxième partie est composée de deux articles traitant des problèmes de l'enseignement et de la didactique des décimaux (publiés dans la revue Recherches en Didactique des Mathématiques 1980-1981). Ces articles commentent les observations et indiquent quelques-uns des concepts de didactique mis en évidence au cours des recherches. Les réflexions mathématiques, épistémologiques et didactiques qui ont précédé le choix des conditions et du processus d'apprentissage y sont présentées de façon succincte ainsi que les objectifs des séquences.

Nous avons pensé que ces commentaires pouvaient être utiles au lecteur en attendant un texte plus élaboré et plus complet.

.../...

Nous avons joint aux 65 leçons effectives un certain nombre de leçons additionnelles qui sont en cours d'expérimentation. Elles sont proposées à la réflexion et à l'expérimentation des lecteurs. Elles ne sont pas toutes indispensables au niveau du CM 2, mais trouveraient leur place si ces cours étaient utilisés en 6ème ou en 5ème.

Cet ouvrage a pour objet de communiquer aux enseignants qui voudraient les reproduire les situations qui nous ont permis de provoquer chez nos élèves des processus d'apprentissages passionnants pour eux à vivre et pour nous, à observer.

A cet effet, nous avons essayé de rapporter de chaque leçon, non pas son déroulement, son histoire, avec tout ce qu'elle a de vivant, d'inattendu, donc d'unique, mais au contraire, sa logique, sa nécessité et ce qu'elle peut reproduire. Et pour éviter de propager quelques scénarios imaginaires de plus, nous n'avons retenu que des faits attestés et reproduits.

Le choix de définitions un peu originales pour les maîtres et le souci de leur associer des situations fondamentales soignées du point de vue pédagogique et mathématique, donnent l'occasion d'introduire de façon concrète les concepts fondamentaux de la didactique, les notions mathématiques de rationnel et de décimal ainsi que l'étude des situations didactiques et celle enfin des stratégies du maitre. Cet ouvrage devrait être un bon instrument de formation des maîtres car on y trouve, outre la leçon et les conditions didactiques de son déroulement, une analyse des connaissances visées et un inventaire des représentations des élèves.

Les leçons elles-mêmes suivent des "modèles" et des styles assez variés : situations d'action, de communication, de recherche, de preuves, cours, exercices... etc. Si certaines sont classiques, la plupart sont des exemples de processus fondamentalement nouveaux où sont utilisés les résultats des recherches fondamentales en psychologie et en didactique.

Si des maîtres avertis (c'est-à-dire formés en didactique) et entourés d'une équipe peuvent désormais entreprendre de produire les apprentissages décrits ici, et probablement les améliorer, il nous faut préciser que nous ne considérons pas ce processus comme un modèle pour l'ensemble des classes, ni comme un outil simple et commode pour atteindre sans effort les objectifs minimaux du cours moyen. Nous serons satisfaits si nous avons pu favoriser une réflexion fondée sur l'observation en vue de la formation de tous les maîtres.

Bien sûr, tout peut être modifié dans ce cours, mais nous devons aussi mettre en garde les enseignants contre des modifications, même légères, dont les conséquences n'auraient pas été assez sérieusement examinées, ou contre des emprunts superficiels de nos leçons, injectées dans un processus classique. La qualité des résultats dépend beaucoup de la cohérence de l'ensemble.

Nous espérons pouvoir bientôt mettre entre les mains des lecteurs, des ouvrages qui prolongeront celui-ci :

qui donneront l'ensemble des leçons du cours moyen: géométrie, mesures, etc...

qui décriront la dernière étape de la construction en 4ème : la formalisation et l'axiomatisation des décimaux et des rationnels

qui exposeront de façon plus systématique les concepts fondamentaux de la didactique et leur aplication dans la didactique, dans l'épistémologie, et dans l'histoire des décimaux.

MODULE 1.

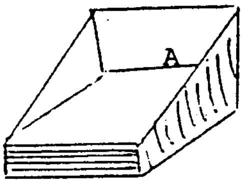
LES NOMBRES RATIONNELS : CONSTRUCTION

1.1 - EPAISSEUR D'UNE FEUILLE DE PAPIER

1.1.1 - Préparation du matériel et des lieux

L'enseignant a disposé :

- sur une table devant les enfants : 5 tas d'environ 200 feuilles de même format, de même couleur, mais d'épaisseurs différentes (par exemple, des feuilles de polycopie, de bristol etc...) placés dans un ordre quelconque. Certaines différences d'épaisseur ne doivent pas pouvoir être appréciées au simple toucher. L'enseignant ne cherche pas à "savoir" ces épaisseurs à l'avance : il n'y a pas de "bonne mesure" à découvrir.



- sur une autre table au fond de la classe 5 autres tas de 200 feuilles des mêmes types de papier placés dans un ordre différent qui servira pendant la phase 2.
- 10 pieds à coulisse en plastique (2 par groupe de 5 enfants)
- Un rideau ou un paravent permet de partager la classe en 2.

1.1.2 - 1ère Phase : Recherche d'un code (durée 20 à 25 mn).

L'enseignant place les enfants par équipes de quatre ou cinq.

a) Présentation de la situation - Consigne.

● "Voyez ces feuilles que j'ai préparées dans ces boîtes A, B, C, D, E. Dans un même tas, toutes les feuilles ont la même épaisseur mais d'un tas à l'autre, les épaisseurs ne sont peut-être pas les mêmes. Pouvez-vous sentir ces différences ?"

Quelques feuilles de chaque tas circulent dans la classe - les enfants les touchent, les comparent.

"Comment fait-on dans le commerce pour distinguer les différentes qualités de papiers ? (d'après le poids)

● Objectif didactique

"Vous allez essayer d'inventer un autre moyen pour désigner et reconnaître ces différents types de papier, et pour les distinguer seulement d'après leur épaisseur.

Vous êtes groupés par équipes concurrentes.

Chaque équipe va réfléchir pour trouver un moyen de désigner les épaisseurs des feuilles. Dès que vous en aurez trouvé un, vous l'essaierez dans un jeu de communication.

Vous pouvez faire des essais avec le papier et ces instruments appelés "pieds à coulisse" (les doubles décimètres suffiraient mais le pied à coulisse a été déjà utilisé).

b) Déroulement et remarques.

Les enfants essaient presque tous de mesurer l'épaisseur d'une seule feuille afin d'obtenir immédiatement la désignation cherchée.

Ils font des remarques du genre : "c'est beaucoup trop fin, une feuille n'a pas d'épaisseur" ou "c'est beaucoup plus petit qu'un millimètre", ou "ce n'est pas possible de mesurer une feuille !"

Il y a souvent à ce moment-là une phase de désarroi, de découragement même des enfants. Puis ils demandent à la l'enseignant s'ils peuvent prendre plusieurs feuilles. Très vite alors, ils font des essais de mesure avec 5 feuilles, 10 feuilles, jusqu'à ce qu'ils obtiennent une épaisseur suffisante pour la mesurer au pied à coulisse ou avec le double décimètre. Alors, ils échangent des systèmes de désignation tels que :

. 10 feuilles 1 mm
60 feuilles 7 mm
ou .31 = 2 mm (*) ....

Dans l'une des équipes, les enfants ont refusé le pied à coulisse et ont établi ce système de désignation:

A = TG
B = TF
D = M

A,B,D étant le nom des différents types de papier,
TG, TF, M voulant dire : très gros, très fin, moyen.

Dans cette phase le maître intervient le moins possible. Il ne fait de remarques que s'il s'aperçoit, que, dans les groupes, les enfants ne respectent pas - ou simplement ont oublié - la consigne.

Les enfants peuvent se lever, aller chercher des feuilles, les changer, etc...

Lorsque la plupart des équipes a trouvé un système de désignation (et que les cinq enfants de chacune sont d'accord avec ce système ou ce code) ou si le temps est écoulé;

(*) Cet emploi du signe égal n'est pas correct, l'enseignant le fera remarquer lors de la discussion l'enseignant passe à la phase suivante : le jeu de ocmmunication, et ceci même si toutes les équipes n'ont pas encore trouvé.

1.1.3 - 2ème phase : jeu de communication (15 à 10 mn)

a) Présentation de la situation - consigne.

"Pour éprouver le code que vous venez de trouver, vous allez faire un jeu de communication. Vous verrez au cours de ce jeu, si la désignation des épaisseurs de feuilles que vous avez inventée vous permet de reconnaître le type de feuille désignée".

b) Déroulement

. Les enfants d'une même équipe vont se séparer en 2 groupes (de 2 émetteurs et de 3 récepteurs) suivant qu'ils sont 4 ou 5 dans l'équipe) : 1 groupe d'émetteurs et un groupe de récepteurs.

. Tous les groupes émetteurs vont se placer d'un même côté du rideau. Tous les groupes récepteurs de l'autre.

. Les émetteurs vont choisir un des types de papier placés sur la première table (A ou B, ou C ou D ou E) (que les récepteurs ne voient pas grâce au rideau). Ils vont envoyer à leurs récepteurs un message qui devra permettre à ceux-ci de trouver le type de papier choisi. Les récepteurs utilisent les tas de papier disposés sur la deuxième table au fond de la classe pour trouver le type de papier choisi par les récepteurs.

Quand les récepteurs ont trouvé, ils deviennent émetteurs (après vérification avec les émetteurs). Des points seront attribués aux équipes dont les récepteurs auront bien trouvé le type de papier choisi par les émetteurs".

Dès le début du jeu, l'enseignant met en place le rideau qui sépare émetteurs et récepteurs.

Il
- fait passer les messages des émetteurs au récepteurs
- reçoit les réponses des récepteurs
- va contrôler que cette réponse est conforme au choix des émetteurs et constate, avec toute l'équipe, l'échec ou la réussite.

Tous les messages sont écrits sur une même feuille - que nous pourrions appeler ici "carnet de messages" (fig. 1) - qui

.../...

circule entre les émetteurs et les récepteurs d'une même équipe - cette feuille porte le numéro de l'équipe. De plus, les émetteurs notent sur une autre feuille - que nous pourrions appeler "fiche de contrôle" - et qu'ils gardent, le type de papier qu'ils ont choisi à chaque jeu afin que la maîtresse puisse constater la réussite ou l'échec.

c) <u>Remarque</u> : Il est clair que l'enseignant n'a pas introduit de vocabulaire superflu comme "carnet de messages""fiche de contrôle... ni d'exigences formelles à propos de la présentation des messages - que les enfants devraient apprendre à respecter. Il n'y a pas eu de consigne générale à ce sujet, seulement des aides et des corrections particulières auprès des enfants mal inspirés.

(1)

N° de l'équipe	I	
1er jeu : message émis	E : 10 = 1 mm	
Réponse	R : D	réussi
2ème jeu : message émis	E : 21 = 1 mm	
Réponse	R : B	réussi
3ème jeu : message émis	E : 8 = 2 mm	
	R : A	réussi

"carnet de messages"

	I	
1er jeu	1	D
3ème jeu	3	A

"feuille de contrôle"

Si certaines équipes n'étaient pas arrivées à faire des messages efficaces, l'enseignant aurait organisé une nouvelle phase de concertation, par équipe, pour la recherche d'un code (même consigne que dans la 1ère phase).

Mais ce fait ne s'est jamais produit (sur 8 expériences identiques). Les enfants sont arrivés à faire 2 ou 3 parties de jeu.

d) <u>Comportements</u>.

Pendant ce jeu, on observe 3 attitudes différentes chez les enfants :

. certains choisissent un nombre de feuilles dont ils mesurent l'épaisseur
. certains choisissent une épaisseur et comptent le nombre de feuilles
. d'autres cherchent au hasard épaisseur et nombre de feuilles.

On remarque aussi que les enfants choisissent de préférence les types de feuilles d'épaisseur extrême : les plus fines ou les plus épaisses pour faciliter le travail de leurs correspondants.

../. .

1.1.4 - 3ème phase - Résultat des jeux et confrontation des codes-(20 à 25 mn)

a) Présentation de la situation et consigne.

Pour cette phase, les enfants reprennent leur place en équipes de 5 comme pour la 1ère phase de la séance. L'enseignant annonce une comparaison des résultats et prépare le tableau à double entrée : - (équipes) X (types de papier) dans lequel il inscrira les messages échangés et les points obtenus par les équipes (voir tableau I CM_2 b 1977) au fur et à mesure de leur compte rendu.

b) Déroulement et remarques.

A tour de rôle, chaque équipe envoie un "représentant" qui lit les messages à haute voix, explique le code choisi et indique le résultat du jeu.

Les différents messages sont comparés et discutés par les enfants. Comme ils sont souvent très différents, l'enseignant leur demande d'adopter un code commun.

Exemple : 10 = 1 mm
TF
60 feuilles 7 mm

Après discussion, la classe entière a décidé de marquer :

10 f ; 1 mm
60 f ; 7 mm

Lorsque tous les messages sont inscrits, les enfants observent le tableau et font spontanément des remarques du type : "ça, ça ne va pas" ou "ici, c'est bien" etc...

Ces remarques pourraient être classées en 4 catégories :

1ère catégorie :

Si les feuilles sont de type différent, à un même nombre de feuilles doivent correspondre des épaisseurs différentes.

Exemples du tableau I :

19 f ; 3 mm	→	Type A	"ça ne va pas"
19 f ; 3 mm	→	Type B	
19 f ; 2 mm	-	Type C	"ça ne va pas"
19 f ; 2 mm	-	Type D	

2ème catégorie :

Pour un même type de feuilles, au même nombre de feuilles correspond la même épaisseur

. . . / . . .

Exemple du tableau I :

30 f ; 2 mm → Type C } "ça ne va pas"
30 f ; 3 mm → Type C }

3ème catégorie :

S'il y a 2 fois plus de feuilles, l'épaisseur est 2 fois plus grande.

Exemple du tableau I :

30 f ; 3 mm → Type C } "ça ne va pas" et les
15 f ; 1 mm → Type C } enfants rajoutent

"on aurait dû trouver" :

30 f ; 2 mm
15 f ; 1 mm

parce que x2 (15 f ; 1 mm / 30 f ; 2 mm) x2

4ème catégorie :

Des différences sur le nombre de feuilles ne doivent pas correspondre à des différences égales de mesures :

Exemple : 19 f ; 3 mm } "ça ne va pas parce qu'une feuille
20 f ; 4 mm } ne peut pas mesurer 1 mm"

A la fin de la séance, l'enseignant propose aux enfants de reprendre l'examen de ce tableau à la prochaine séance de vérifier collectivement les mesures par la manipulation et de les rectifier si c'est nécessaire.

c) Remarque : La présentation des opérations effectuées sur les nombres dans la recherche de couples équivalents à l'aide de flèches n'a aucun caractère formel ni obligatoire, c'est une "manifestation" familière de l'emploi des opérateurs naturels auquel les enfants sont habitués.

1.1.5 - Résultats didactiques.

Les enfants savent tous mesurer l'épaisseur d'un certain nombre de feuilles de papier, écrire le couple correspondant et rejeter un type de papier ne correspondant pas à une écriture qui leur est donnée. La plupart est alors capable de mettre en oeuvre une stratégie de comparaison et en conclusion d'accepter un type de papier comme correspondant à une mesure. Quelques-uns ont formulé cette stratégie. La plupart des enfants peut analyser un tableau de mesures et signaler des incohérences en se servant implicitement du modèle linéaire.

.../...

1.2 - COMPARAISON D'EPAISSEURS ET COUPLES EQUIVALENTS

1.2.1 - Préparation du matériel et des lieux.

Le matériel est le même que pour la séance 1 : les tas de feuilles disposés de la même manière, les pieds à coulisse.

1.2.2 - 1ère phase (25 à 30 mn)

a) Présentation de la situation - Consigne.

L'enseignant demande aux enfants de reprendre l'examen du tableau réalisé au cours de la 1ère séance.

Cette observation se fait d'abord silencieusement, pour que les enfants puissent repérer les incompatibilités les plus évidentes de certaines mesures. Puis l'enseignant leur propose de relever les erreurs qu'ils ont vues, ligne après ligne (pour chaque type de papier)

b) Déroulement et remarques.

Les enfants, après observation, et sur leur demande, viennent à tour de rôle au tableau pour montrer les "messages" qui leur paraissent inexacts et proposent éventuellement une correction.

Ces corrections sont discutées par l'ensemble des enfants. S'ils sont tous d'accord, la correction est faite sinon, ils proposent eux-mêmes de vérifier par une manipulation: ils recomptent le nombre de feuilles indiquées dans le message et font la mesure. Après vérification collective, le nouveau message est adopté et inscrit sur le tableau (cette manipulation est faite par groupes : 2 groupes vérifient un message, 2 autres, un autre message...etc) Il est arrivé souvent que lorsque le même type de papier est mesuré par des groupes d'enfants différents, ces groupes ne trouvent pas des mesures compatibles. Ceci est dû souvent aux erreurs de lecture ou au fait que les enfants ont plus ou moins tassé les feuilles. Ils s'en rendent compte très vite et le disent.

Il est arrivé également pour des types de papier d'épaisseurs très voisines que les mesures trouvées ne permettent pas de reconnaître de quel papier il s'agit. C'est au cours de cette phase que les enfants se sont rendu compte qu'ils ont plus de chance de distinguer des épaisseurs de papier voisines et prenant un plus grand nombre de feuilles. En effet, 15 ou 20 feuilles seulement de papiers d'épaisseurs très voisines ont des mesures si proches que les enfants ne peuvent pas les distinguer avec précision. C'est alors qu'ils proposent souvent de mesurer l'épaisseur de 50, 80 ou 100 feuilles.

Exemples de remarques d'enfants (ces exemples sont pris dans le tableau II)

10 f ; 2 mm
et 5 f ; 1 mm pour le type B, c'est bien.

Un enfant ajoute :

x3 (5 f ; 1 mm) x 3
15 f ; 3 mm

Ces 3 mesures : 5 f ; 1 mm - 10 f ; 2 mm et 15 f ; 3 mm sont donc conservées.

Par contre dans la ligne du type C, les mesures :

12 f ; 1 mm
et 8 f ; 1 mm sont contestées et rejetées par les enfants qui proposent de les refaire.

Autre exemple (tableau II)

Equipes	Type C	Type D	Conclusions des enfants
1	100 f ; 8 mm	100 f ; 11 mm	⇒ 1) D > C (D est plus épais que C)
2	12 f ; 1 mm	10 f ; 1 mm	⇒ 2) D > C (D est plus épais que C)
3	8 f ; 1 mm		3) C > D (C est plus épais que D)
4		14 f ; 1 mm	

Les deux premières conclusions ne correspondent pas à la 3ème - Les enfants décident de conserver la 1ère conclusion car ils voient que sur 100 feuilles, il y a 3 mm de différence alors qu'avec 8 f, 14 f, 12 f, il n'y a pas de différence de mesure.

Ils disent aussi qu'une différence de 3 f(12-8) ou de 2 f(14-12) ne change pas la mesure (ils vérifient par une manipulation).

1.2.3 : 2ème phase : finition du tableau : recherche des valeurs manquantes. (20 mn à 25 mn)

a) Présentation de la situation : consigne.

Les enfants remarquent que certains types de papier

.../...

n'ont pas été choisis au cours du jeu de communication et qu'il manque des mesures.

L'enseignant propose alors aux enfants de compléter le tableau en mesurant les types de papier manquants.

b) Déroulement et remarques.

Les enfants se partagent le travail par groupes de 5 non plus concurrents mais coopérants et pas forcément les mêmes que dans la séance précédente (plusieurs groupes prennent le même type de papier et vérifient ensuite la compatibilité des mesures)

Exemple pour le type C :

$$\times 8 \begin{pmatrix} 12\ f\ ;\ 1\ mm \\ 96\ f\ ;\ 8\ mm \end{pmatrix} \times 8$$

Quand tous les enfants sont d'accord, les nouvelles mesures sont inscrites dans le tableau (tableau III).
A la fin de cette phase, le tableau est donc entièrement corrigé et complété. Il y a plusieurs messages compatibles pour chaque type de papier.

1.2.4 - 3ème phase : jeu de communication (15 mn)

. L'enseignant propose aux enfants de refaire le jeu de communication de la 1ère activité en tenant compte de toutes les remarques et corrections qu'ils ont faites (grand nombre de feuilles, tassement du papier...)
. Le jeu est donc repris une fois à la grande satisfaction des enfants qui réussissent tous, même si on ajoute un ou deux nouveaux types de papier.

1.2.5 - Résultats didactiques.

Ces enfants savent adapter le nombre des feuilles choisies aux besoins de la discrimination de leurs épaisseurs (augmenter le nombre de feuilles lorsque les épaisseurs sont très voisines). Ils savent trouver par le calcul, des couples correspondants au même type de papier. Tous savent maintenant utiliser le modèle linéaire pour analyser un tableau. Une partie d'entre eux est capable d'utiliser des relations de voisinage entre les couples. Un grand nombre d'enfants a été conduit à juger des déclarations et à argumenter lui-même.

.../...

EXEMPLE DE 1er TABLEAU DE MESURES NON CORRIGE

TABLEAU CM_2 b

Type des feuilles	équipe 1	équipe 2	équipe 3	équipe 4
A	19 f ; 3 mm	10 f ; 2 mm	20 f ; 4 mm	
B	19 f ; 3 mm		4 f ; 1 mm	15 f ; 2 mm
C	19 f ; 2 mm	30 f ; 2 mm	100 f ; 8 mm	30 f ; 3 mm 15 f ; 1 mm 20 f ; 2 mm
D	19 f ; 2 mm 12 f ; 1 mm		100 f ; 9 mm	
E			9 f ; 4 mm	13 f ; 5 mm 7 f ; 3 mm

TABLEAU I (1977)

TABLEAU $C.M_2$ a

Type des feuilles	équipe 1	équipe 2	équipe 3	équipe 4
A	48 f ; 9 mm			
B			10 f ; 2 mm	5 f ; 1 mm 15 f ; 3 mm
C	100 f ; 8 mm	12 f ; 1 mm 96 f ; 8 mm	8 f ; 1 mm 64 f ; 8 mm 12 f ; 1 mm	
D	100 f ; 11 mm	10 f ; 1 mm 100 f ; 10 mm		14 f ; 1 mm 154 f ; 11 mm
E	23 f ; 10 mm	10 f ; 4 mm 8 f ; 3 mm	6 f ; 2 mm	

TABLEAU II (1977)

.../...

1.3 - CLASSE D'EQUIVALENCE DE COUPLES - NOMBRE RATIONNEL

1.3.1 - Préparation du matériel.

L'enseignant a conservé sous les yeux des enfants le tableau III, corrigé et complété au cours de la 2ème séance, mais elle a réservé la place pour faire un second tableau.

Il utilise aussi les tas de papiers des 2 premières séances.

1.3.2 - 1ère phase : notion d'équivalence des couples (15 à 20 mn)

a) Présentation de la situation - Consigne.

. L'enseignant fait rappeler par les enfants les objectifs des deux premières séances :
"pouvez-vous rappeler ce que vous avez fait au cours des deux dernières leçons ? Quel était le but de ces leçons ?"

Ce rappel par les enfants, permet à de voir si les objectifs ont été bien cernés et bien compris. Il résume ensuite leurs interventions : "vous avez découvert une méthode pour désigner les épaisseurs de n'importe quelle feuille de papier". Pour voir si cette méthode est bonne, vous allez l'éprouver en disant maintenant si les écritures que je marque sur le tableau désignent l'une des feuilles de papier que vous connaissez et laquelle ?

Exemple : - Quelle feuille désigne le coupe (10;2) ? (10;1)? (100;8) ? (48;9)? (un enfant va chercher les feuilles correspondantes dans les tas restés en place.
- Comment pourrait-on désigner l'épaisseur d'une feuille de type A ? de type B ? etc...

Les enfants répondent en nommant les couples inscrits dans le tableau III (Il peut y avoir 1 ou plusieurs couples pour chaque type de feuille).

Le début de cette première phase est collectif et se déroule de manière très vivante sous forme de questions et de réponses.

. Puis l'enseignant demande aux enfants :
"Pourriez-vous trouver d'autres écritures pour désigner ces différents types de papier ?"
et leur propose de chercher individuellement sur leur cahier de brouillon d'autres couples.

.../...

b) Déroulement et remarques.

Pendant que les enfants recherchent individuellement d'autres écritures, l'enseignant dessine sur le tableau noir 5 colonnes qui correspondent aux 5 types de papier (tableau IV). En tête de chaque colonne, il inscrit l'un des couples du tableau III qui désigne l'épaisseur de la feuille correspondante :

exemple :

A	B	C	D	E
(48f;9mm)	(10f;2mm) (5f; 1mm) (20f;4mm)	(100f; 8 mm)	(100f;11mm)	(10f;4mm)

(IV)

Au bout de 5 mn environ, l'enseignant inscrit dans les colonnes ci-dessus les couples que les enfants énoncent (On peut également envoyer certains enfants les écrire eux-mêmes).

Ceci donne lieu à des discussions entre les enfants qui demandent des explications lorsqu'ils ne comprennent pas ou lorsqu'une écriture ne leur paraît pas correcte. Bientôt des enfants déclarent "on peut en trouver tant qu'on veut". A la fin de cette 1ère phase, on a donc inscrit 5 à 10 couples différents pour désigner chaque épaisseur de feuille.

Pour s'assurer de la bonne compréhension de tous, l'enseignant désigne au hasard des couples et demande à des enfants d'aller chercher les feuilles correspondantes. Il dit aux enfants comment on indique que deux couples correspondent au même papier :

"nous avons vu que tous les couples d'une même colonne (par exemple (10f;2mm), (20f;4mm), (5f;1mm)...) correspondent au même type de papier, donc à la même épaisseur de feuille. On dit qu'ils sont "équivalents" et on l'écrit :

$(10f;2mm) \equiv (20f;4mm)$

$(20;4) \equiv (5f;1mm)$

1.3.3. - 2ème phase : Rangement des 5 types de feuilles A,B,C,D,E d'après leur épaisseur (30 à 35 mn) :

a) Présentation de la situation :

Pour chaque type de feuilles (A,B,C,D,E), l'enseignant demande aux enfants de choisir parmi tous les couples

.../...

équivalents qu'ils ont écrits, l'un d'entre eux qui sera seul retenu pour désigner l'épaisseur de la feuille. (généralement on constate que les enfants choisissent plutôt les couples avec 10 ou 100 (s'il y en a) ou alors des couples formés de nombres petits.

Ex. 10 f; 2mm
100 f; 11 mm
ou 5 f ; 1 mm

Il refait les 5 colonnes en gardant seulement le couple choisi.

Exemple : Ces mesures sont celles du tableau II qui avaient été choisies par les enfants en 1977.

A	B	C	D	E
(48 ; 9)	(10 ; 2)	(100;8)	(100;11)	(10;4)

Puis il demande aux enfants de ranger les feuilles A,B,C,D,E, de la plus mince à la plus épaisse.

b) Déroulement et remarques.

Les enfants travaillent individuellement sur leur cahier. L'enseignant n'intervient que sur leur demande soit pour apporter un renseignement, soit pour écouter une explication : tous n'arrivent pas seuls à ranger du premier coup les 5 types de feuilles. Au bout de 10 à 15 mn (avant que certains ne se découragent), l'enseignant fait exposer tour à tour les différentes méthodes employées. Un des enfants qui n'a pas employé une méthode semblable à celle déjà exposée vient décrire la sienne. Elle est discutée par l'ensemble de la classe. Elle est acceptée si elle est reconnue bonne et rejetée si elle ne donne aucun résultat.

Les enfants ne font pas une comparaison systématique de toutes les paires de couples. Ils utilisent des stratégies plus économiques et des méthodes de comparaison très variées dont voici les plus remarquables:

. certains enfants choisissent un couple qui ne changera pas et transforment les autres couples en les ramenant tous au même nombre de feuilles que le premier.

Ici, le nombre de feuilles 100 est presque évident (C ou D), ce qui donne B : (100 f; 20 mn) E : (100 f; 40 mn) mais ne marche pas pour A. Seules les feuilles B,C,D,E peuvent être rangées.

.../...

. D'autres enfants ramènent le plus grand nombre de couples possibles à la même épaisseur : B (20:4) C : (5;4) c'est plus épais que B puisqu'il faut moins de feuilles pour la même épaisseur, ce qui permet de ranger déjà B, C, E.

. Ils arrivent également à placer la feuille de type D par rapport à celle de type C en faisant le raisonnement suivant :

100 f ; 11 mm

50 f → c'est un peu plus de 5 mm, donc la feuille de type D est plus épaisse que celle du type C.

Ils peuvent donc à l'aide de ces deux démarches ranger les 4 types de feuilles :

$C < D < B < E$

. La feuille A pose des problèmes pour les deux méthodes.

Pour la première par exemple le type A : (48f;9mm) ≡ (96f;18mm)
ainsi est comparée au type C : (100f;8mm)

La feuille de type A est plus épaisse que la feuille de type C puisque 96 feuilles ont une épaisseur de 18 mm alors que 100 f n'ont qu'une épaisseur de 8 mm.

Il faut alors ranger cette feuille de type A par rapport aux 3 autres, c'est-à-dire par rapport à D, B et E. Les enfants la comparent d'abord à D puisque D est juste après C dans le 1er rangement. Ils font le même raisonnement que précédemment :

Pour A → 96 f ; 18 mm
Pour D → 100 f ; 11 mm

et ils voient bien que A est plus épais que D.

Puis ils comparent la feuille de type A à la feuille de type B.

Pour A → (96 f ; 18 mm)
Pour B → (100f ; 20 mm)

Ici, les enfants ont beaucoup de difficultés et disent que ce n'est pas possible de dire quelle est la plus mince des deux (les 2 types de papier sont très voisins l'un de l'autre et il était impossible au toucher de les distinguer)

Une fillette a proposé alors d'écrire :

$$\text{Pour B} \quad {:}10 \left(\begin{array}{c} 100\ f\ ;\ 20\ mm \\ 10\ f\ ;\ 2\ mm \end{array} \right) {:}10$$

et elle a dit : "pour A il faut un peu plus de 10 feuilles pour faire 2 mn, alors les feuilles de type A sont plus minces que celles de type B".

Les autres enfants qui n'avaient pas compris ce raisonnement ont demandé des explications. Pour qu'elles soient

.../...

plus compréhensibles, l'enseignant a demandé à la fillette de disposer ainsi sur le tableau ce qu'elle expliquait :

B (10 f ; 2 mm)

A (96 f ; 18 mm)

:9 :9

2 mm

"On ne peut pas diviser 96 par 9 parce que ce n'est pas un multiple. Mais comme 9 x 10 = 90, on voit qu'il faut un peu plus de 10 f pour faire 2 mm".

Autre méthode :

D'autres enfants ont fait le raisonnement suivant : "Si A et B avaient la même épaisseur, 96 feuilles de B auraient une épaisseur de 18 mm et il resterait 4 feuilles pour une épaisseur de 2 mm, ce qui n'est pas possible".

A la fin de cette 2ème phase, les enfants ont rangé les 5 types de feuilles et ont inscrit sur le tableau :

C < D < A < B < E

Et si nous avions choisi d'autres couples pour désigner l'épaisseur, aurions-nous trouvé le même rangement ?

Les enfants : - "oui, ce sont les mêmes feuilles

Enseignant : - Mais le système n'est peut-être pas bon. S'il donnait des rangements différents selon les couples choisis

- ...

- Vous vérifierez-ce soir si vous voulez - en prenant d'autres couples."

1.3.4 - 3ème phase : (5 mn)

a) Présentation de la situation.

Pour faire fonctionner ces démarches, l'enseignant propose aux enfants de placer parmi ces 5 types de papier un autre couple qui désignerait l'épaisseur d'une feuille d'un nouveau type que l'on appellera F. (ce type de papier ne fait pas partie du matériel proposé). Il leur demande de comparer l'épaisseur de cette nouvelle feuille aux autres :

type F : 25 f $\rightarrow$ 7 mm

b) Déroulement et remarques :

Les enfants travaillent individuellement et presque tous utilisent la première démarche : ils se ramènent à 100 f. et placent très rapidement la feuille de type F entre B et E.

.../...

1.3.5 - Fractions, égalité de fractions (10 mn)

a) Apport d'information.

Un couple indique qu'un tas de tant de feuilles de tel type a telle épaisseur.

Tous les couples équivalents correspondent donc à un même type de feuilles. On dit qu'ils appartiennent à une même classe. "Voici une classe de couples" (L'enseignant montre une colonne).

Tous indiquent une même épaisseur et on peut prendre n'importe quel couple d'une même classe pour reconnaître le type de papier.

Si l'on veut désigner l'épaisseur d'une feuille elle-même et non plus un tas de feuilles de telle épaisseur, si l'on veut désigner toute la classe des couples et non plus un couple particulier, il faut inventer un nom et une écriture particulière. Cette écriture existe, on l'appelle fraction.

Par exemple, on dit que le papier de type C a une épaisseur de "4 millimètres pour cinquante feuilles" ou encore "4 pour cinquante millimètres", et le plus souvent de "4 cinquantièmes de millimètres" et on écrit ceci à l'aide de la fraction 4/50 ou $\frac{4}{50}$. (50;4) désigne un tas de 50 feuilles qui mesure 4 mm.
4/50 désigne l'épaisseur d'une feuille de papier telle qu'il en faut 50 pour obtenir une épaisseur de 4 mm.
Remarquez que les nombres ont changé de place.

b) Activités :

Ecrivez l'épaisseur d'une feuille de type A, B, D. Lisez les fractions que vous avez écrites - Cherchez des fractions que vous connaissez et dictez-les : les enfants écrivent les épaisseurs : 1/12 de mm, 3/5, 1/4, 1/2, 2/3...

Désignez un tas de 20 feuilles qui a une épaisseur de 3 mm.

Désignez l'épaisseur d'une feuille telle qu'il en faut 30 pour "faire" 5 millimètres.

Que désignent 3/20, (30;5) ?

.../...

c) Est-ce qu'il y a plusieurs écritures (plusieurs fractions) pour désigner la même épaisseur ? Trouvez-en.

Pour dire que 2/9mm et 4/18mm sont la même épaisseur nous écrivons :

$$\frac{2}{9} = \frac{4}{18}$$

Remarque : Ces questions ont pour but de bien faire connaître l'information qui est apportée, elles ne sont pas un exercice d'apprentissage. L'usage fait ultérieurement de cette écriture conduira l'enfant à en "retenir" les formulations et les significations.

La distinction entre l'épaisseur d'une feuille et la désignation d'un tas de feuilles est essentielle et ne sera apprise que progressivement.

1.3.6 - Résultats

Les enfants savent trouver des couples équivalents. Ils savent comparer les épaisseurs de feuilles (beaucoup avec 2 méthodes). Ils ont une stratégie de rangement des couples, d'après ces comparaisons. Ils savent désigner l'épaisseur d'une feuille de papier à l'aide d'une fraction et trouver des fractions égales.

Ils ne savent pas trouver l'égalité de 2 fractions dans le cas général.

Remarque : Ces savoir-faire sont constatés en situations. Il n'est pas possible à ce moment-là de détacher une question du contexte et de la poser de façon indépendante. On ne pourra donc pas encore s'appuyer sur ces résultats en tant que connaissances acquises et identifiées comme telles par l'enfant.

MODULE 2 :

LES NOMBRES RATIONNELS : OPERATIONS.

2.1 - L'EPAISSEUR D'UN CARTON

2.1.1 - Matériel : les tas de feuilles et les pieds à coulisse de l'activité précédente

2.1.2 - Première phase :"les épaisseurs rationnelles sont-elles des nombres ?"(Durée : 5 mn)

Les enfants sont disposés comme pour un travail individuel.

a) l'enseignant pose la question suivante : "8/100, 9/45.... sont-ils des nombres ? Ce que nous avons fabriqué pour mesurer les épaisseurs est ce que c'est des nombres ?"

b) Il laisse discuter les enfants.

Oui, 8, 100, 9, 45 sont des nombres

Non, 8/100 s'écrit avec deux nombres, ce n'est pas un nombre, c'est pas pareil.

c) L'enseignant : "On pourrait appeler ces choses des nombres si on pouvait faire avec elles ce qu'on fait avec les nombres. Que peut-on faire avec des nombres ?"

d) Les réponses sont recensées et discutées sans qu'il soit essentiel d'aboutir à une liste particulière de propriétés communes ou discriminantes :

Exemples :

. On peut les ranger du plus petit au plus grand (propriété commune cela a été vu)

. "On peut compter des objets". On ne le peut qu'avec les naturels (car ils ont un premier élément 1 et que chaque nombre nature a un successeur. Ce qui n'est pas le cas des rationnels, ces raisons peuvent rester cachées).

. " On peut faire avec eux des opérations ; des additions, des multiplications...". "On peut mesurer..."

e) Conclusion :"pour décider si ce sont des nombres il faut essayer de faire des opérations par exemple des additions, proposez m'en"

2.1.3 - Deuxième phase : l'épaisseur d'un carton (durée : 40 mn)

a) Présentation de la situation. L'enseignant :

"Voici une feuille de type B, quelle est son épaisseur en millimètre ? et une feuille de type E, quelle est son épaisseur ?. (Il écrit au tableau les épaisseurs : 10/50 et 40/100). Qu'est ce que la somme de ces deux épaisseurs en millimètre ?"(L'enseignant a choisi des papiers tels que leurs épaisseurs ne soient pas toutes de deux décimales ou au moins il choisit comme ici parmi toutes les réponses

.../...

des enfants, deux fractions n'ayant pas le même dénominateur.

. Des enfants suggèrent de coller les feuilles l'une contre l'autre et viennent montrer comment; d'autres viennent écrire la somme $10/_{50} + 40/_{100}$. "Ceci devrait représenter cela".

b) Consigne : "je fais une feuille nouvelle, plus épaisse en plaquant une feuille B comme une feuille E. Pouvez-vous prévoir de votre place quelle est l'épaisseur de cette nouvelle feuille" (l'enseignant met effectivement un petit point de colle au milieu des deux feuilles et les colle sans affecter l'épaisseur du bord). On vérifiera ensuite pour voir qui a bien deviné.

c) Pari : beaucoup d'enfants croient que c'est facile et proposent $50/_{150}$. (ils ont effectué 10 + 40 et 50+100 !) mais d'autres ont des doutes et écrivent autre chose. (Exemple : $50/_{100}$)

d) Première vérification : L'enseignant laisse des discussions s'établi mais qu'un enfant vienne expliquer une méthode correcte ou non; elle demande bientôt; "comment savoir si ce résultat est correct ?"

Les élèves : "il faut faire un nombre suffisant de feuilles nouvelles et mesurer".

Rapidement l'enseignant distribue des paquets de feuilles B à 5 enfants. "Comptez en 10 chacun" et à 10 autres des paquets de feuilles E : "Comptez en 10 chacun".

Il écrit donc 50 feuilles de type B et 100 feuilles de type E et fait préciser l'épaisseur de ces tas (10 mm et 40 mm), si les enfants ne le demandent pas. Il peut demander l'épaisseur totale du tas (50 mm) et le nombre total de feuilles (150)

"Je prends une feuille de type B et une feuille de type E et je fais une nouvelle feuille...." L'enseignant continue en décrivant cette correspondance à haute voix, jusqu'à ce que les enfants l'arrêten et disent "Ca ne va pas, il y aura trop de feuilles E, il faut le même nombre de feuilles dans les deux tas ; pour faire 100 nouvelles, il faut 100 feuilles B et 100 feuilles E (ou 50 et 50, ou 150 ou 150).

e) Voulez-vous changer votre pari avant la vérification ?

La plupart des enfants font alors le calcul correct et déclarent la vérification inutile. L'enseignant la fait faire par ceux qui n'ont pas trouvé.

$$10/_{50} + 40/_{100} = 20/_{100} + 40/_{100} = 60/_{100}$$

La mesure peut fournir $61/_{100}$ ou $59/_{100}$) mais cette discussion est classique.

.../...

2.1.4 - Troisième phase : Somme de plusieurs fractions (Durée 10 mn à 15 mn).

a) Si on fait un carton composé de trois feuilles, l'une de $8/_{100}$ de mm (C) d'épaisseur, l'une de $11/_{100}$ de mm (D), l'autre de $2/_{10}$ de mm (B). Quelle sera son épaisseur ?

Il n'y a presque jamais besoin de vérification a ce moment. Les enfants font le calcul :

$$8/_{100} + 11/_{100} + 20/_{100} = 39/_{100}$$

b) L'enseignant leur demande s'ils sauraient effectuer des sommes de n'importe quelle épaisseur, et propose un exemple : $9/_{45} + 25/_{90}$

2.1.5 - Remarques

. Le choix des épaisseurs à additionner peut être quelconque. mais les manipulations dépendent de ces nombres : par exemple on peut proposer $10/_{50} + 39/_{100}$ au lieu de $40/_{100}$, cela interdit aux enfants de réunir deux tas de feuilles, mais pas de l'envisager et de dire que c'est impossible.

. Proposer à ce moment là des sommes de fractions à même dénominateur serait une erreur didactique.

Certains maîtres ont été tentés de le faire avec l'espoir d'obtenir immédiatement une réussite d'ensemble. Ils veulent éviter aux élèves la double difficulté d'avoir a décider de réduire au même nombre feuilles et de le faire pour que la somme des numérateurs, c'est-à-dire des épaisseurs, ait un sens. Cela permet aux enfants des justifications faciles à formuler et à apprendre, cela facilite l'apprentissage formel de la somme de deux fractions (on sait faire la somme lorsque les dénominateurs sont les mêmes, il nous reste donc dans le cas général à réduire au même dénominateur avant de faire cette somme).

Mais cette méthode donne de moins bons résultats : seuls les enfants capables d'emblée de concevoir le cas général et les raisons de la facilité apparente des cas particuliers ont franchi la difficulté en développant une conception correcte de ce qu'est la somme de deux fractions. Ils pourront ensuite plus facilement faire des raisonnements directs ou des calculs rapides originaux (exemple $15 \times (\frac{3}{100} + \frac{7}{15})$)
Les autres sont détournés des questions pertinentes (pourquoi les dénominateurs ne s'ajoutent-ils pas ?) et des efforts nécessaires de conception et de vérification, par l'apparente facilité de l'action à effectuer. Ils sont invités à apprendre en deux temps une méthode avec éventuellement des "fausses" justifications (par exemple si

..../...

j'ajoute 3 centièmes et 5 centièmes, cela fait 8 centièmes, comme 3 chaises et 5 chaises sont 8 chaises.

Ils apprennent d'abord que l'on peut faire la somme des fractions ayant même dénominateur et comment, et qu'on ne "fait" pas ou qu'on ne peut pas faire autrement (on ne peut additionner des choux et des loups !) Puis, ils apprennent à résoudre les autres cas en les ramenant au premier, non pas à cause de la signification de cette transformation mais simplement parce qu'on pourra réussir ainsi il n'y a là qu'une apparence d'économie dans ce processus car aucune représentation ne viendra soulager les remémorisations ; il faudra de plus, de nombreux exercices formels de fixation et de discrimination avec d'autres règles de calcul.Certains enfants n'y parviendront pas

Or, ici tous les enfants peuvent concevoir la solution et étayer leur représentation par des essais, des tentatives et des vérifications ce qui rend inutile tout apprentissage formel intentionnel. Il y a parfois intérêt à retarder les algorithmisation pour favoriser la conceptualisation.

2.1.6 - Résultats

Tous les enfants savent trouver la somme de deux ou plusieurs fractions si elles représentent des épaisseurs de papier et si la réduction au même nombre de feuilles est "évidente" (un dénominateur multiple simple des autres). Beaucoup pourraient élaborer une stratégie dans le cas de deux fractions quelconques mais aucune méthode n'a été formulée et encore moins apprise.

MODULE 2 - Activité 2 Séance 5 (70 minutes)

2.2 - QUE DEVONS-NOUS SAVOIR FAIRE MAINTENANT ?

2.2.1 - Première phase : Evolution des méthodes (45 minutes environ).

a) Présentation de la situation

"Vous avez su réaliser et prévoir la somme de certaines épaisseurs de feuilles. Sauriez-vous faire la même chose avec n'importe quelles feuilles, c'est-à-dire avec n'importe quelles fractions ?"

L'enseignant fait écrire rapidement quelques sommes de 2 ou 3 fractions au tableau, des "faciles" et des "moins faciles".

Exemples : $17/_{50} + 5/_{25}$

$9/_{48} + 4/_{20}$

$35/_{100} + 29/_{100} + 18/_{100}$

Il choisit une somme "facile" par exemple :

b) Première consigne

"Je colle ces trois feuilles les unes contre les autres pour obtenir une nouvelle feuille :

$12/_{100}$, $25/_{100}$, $9/_{100}$

Quelle est l'épaisseur de cette nouvelle feuille ?"

c) Déroulement : les enfants cherchent individuellement et rapidement (au brouillon). Lorsque la plus grande partie a trouvé une réponse l'enseignant arrête la recherche (3 mn environ).

S'il y a lieu, il écrit les résultats différents au tableau et les élèves viennent expliquer comment ils les ont trouvés. Ils discutent la validité des méthodes en se référant au besoin de la réalisation effective du collage, jusqu'à ce que tous soient d'accord sur le bon résultat, et au moins une bonne méthode.

Le plus souvent les enfants explicitent ici, la nécessité d'ajouter des épaisseurs, puisqu'il y a le même nombre de feuilles. Le fait que l'ordre des feuilles dans le tas (classées par type ou alternées) n'implique pas sur son épaisseur.

d) Deuxième consigne

Prenons une somme un peu moins facile. Quelle épaisseur aura la feuille obtenue en collant trois feuilles d'épaisseur

$4/_{25}$, $18/_{100}$, $7/_{50}$

. . . .

Deux procédés apparaissent :

. Quelques enfants transforment les deux fractions $4/_{25}$ et $18/_{100}$ de façon à leur donner le dénominateur 50.

. D'autres transforment $4/_{25}$ et $7/_{50}$ en leur donnant le dénominateur 100.

Le déroulement est identique à celui vu plus haut (5 mn de recherche).

e) <u>Troisième consigne</u> :

$8/_{45} + 5/_{30}$

$4/_{35} + 9/_{70} + 1/_{7}$

Les enfants essaient souvent de transformer les deux fractions de façon à leur donner un dénominateur de 100, puis ils essaient de transformer l'un en l'autre. Enfin, certains cherchent des multiples communs

45	30
90	60

La première question est réussie par peu d'enfants, et donne lieu à un calcul mental.

f) <u>Quatrième consigne</u> :

Un ébéniste fait un collage pour un meuble. Il colle 3 plaques de bois, d'épaisseurs différentes.

$40/_{50}$ mm ; $5/_{25}$ mm ; $6/_{10}$ mm

"Rangez ces plaques de la moins épaisse à la plus épaisse Trouvez l'épaisseur en millimètre de la nouvelle plaque.

g) <u>Remarques</u> :

Cette phase a pour objet de permettre aux enfants de mettre en oeuvre les procédés qu'ils ont découverts dans la séance précédente, de les rendre plus généraux et plus efficaces. Donc, de les faire évoluer.

Cette séance n'est donc pas une séance d'entrainement ni un contrôle de connaissances.
Aussi l'enseignant ne porte pas de jugement sur la valeur des méthodes employées et ne dit à aucun moment quel est le bon résultat.

Il organise et favorise pour chaque exercice le processus suivant :

- recherche individuelle
- mise en commun des résultats
- confrontation des méthodes
- discussion et <u>validation par les enfants</u>

.../...

Une méthode est acceptée si elle donne un résultat correct, (là une méthode "avouable" et correcte) rejetée dans le cas contraire. Entre les méthodes acceptables, les remarques sur la longueur ou la facilité de d'exécution, que l'enseignant sollicite, ne deviennent pas des jugements de valeur que l'enfant puisse confondre avec des jugements de validité.

Par contre, l'enseignant s'attache à ce que l'enfant participe au débat, ait un résultat à proposer, puisse faire discuter ses méthodes et fasse le point vis à vis de ses propres connaissances.

La correction immédiate et collective, et la discussion rapide des exercices est donc indispensable.

Elle permet à l'enseignant et à tous de savoir à quel stade d'assimilation en est chaque enfant et quelles sont ses difficultés.

Toute la classe peut prendre part à l'effort de chacun.

.2.2 - Deuxième phase : (30 mn environ) Exercices individuels de contrôle et d'entrainement.

C'est une activité didactique tout à fait classique : l'enseignant donne les énoncés suivants par écrit. Chaque enfant doit les résoudre seul et présenter sa solution sur cahier ou sur une copie ou sur la feuille énoncée. L'enseignant examinera le travail des enfants après la classe. Il discutera les erreurs relevées et fournira les réponses exactes, collectivement au début de la séance suivante. Chaque enfant corrigera éventuellement sa réponse.

1) "Classe ces épaisseurs de feuilles de la plus petite à la plus grande "

$45/_{100}$; $2/_{10}$; $53/_{95}$; $5/_{25}$ (1)

2) "Fais la somme des épaisseurs suivantes" :

$25/_{100} + 13/_{100} + 45/_{100} =$ (2)

$4/_{25} + 9/_{50} + 16/_{100} =$ (3)

$3/_{30} + 12/_{90} =$ (4)

$5/_{7} + 15/_{77} =$ (5)

$5/_{6} + 3/_{8} =$ (6)

Remarque : Il arrive très souvent que les réactions des enfants, leur comportement, leurs résultats soient très différents lorsqu'ils sont confrontés à un travail individuel, sans aucune intervention, ni

.../...

du maître, ni des camarades. Les résultats sont quelquefois décevants, car les enfants seuls devant une tâche ne voient pas toujours les erreurs.

Il est donc nécessaire de les habituer à cette confrontation dans laquelle il n'y a aucun feed-back et où chacun doit prendre en charge ce qu'il fait.

2.2.3 - Résultats

. Cette leçon favorise beaucoup l'exercice du calcul mental (double, moitié, triple, produit par 7) de nombres de deux chiffres.

. Tous les enfants savent organiser et formuler leur méthode de recherche de la somme de plusieurs fractions. Ils commencent par chercher à les réduire au même dénominateur (l'expression n'a pas été prononcée)

. La recherche d'un multiple commun a été pratiquée de plusieurs manières (malgré la rareté jusqu'à ce moment des occasions de le faire). Beaucoup d'élèves ont commencé à élaborer des stratégies de recherche systématique, comme l'énumération et la comparaison de la liste des multiples, ou même dans le cas de petits nombres, le produit des dénominateurs.

Aucune de ces stratégies n'a été identifiée comme stable, et encore moins apprise.

2.3 - DIFFERENCE DE DEUX EPAISSEURS

2.3.1 - Matériel

L'enseignant a préparé :

- une feuille de bristol
- 5 ou 6 sortes de feuilles d'épaisseurs très différentes : feuilles de papier à dessin, feuilles de buvards, de polycopie, etc.. (1 feuille de chaque sorte suffit).

La feuille de bristol doit être assez épaisse pour que les enfants la distinguent bien des autres feuilles. Ces feuilles, sont indispensables bien qu'elles ne servent qu'à illustrer les propos et non à vérifier les calculs.

2.3.2 - Correction rapide des exercices de la veille (10 mn)

Seuls les exercices ayant donné lieu à des erreurs sont commentés.

On obtient des remarques sur la recherche du dénominateur commun dans le dernier exercice (24 ou 48 ?) que le maître se garde bien d'ériger en méthode.("le dénominateur commun est le produit des dénominateurs"). A titre indicatif, voici les résultats obtenus sur deux ans.

2.3.3 - Première phase : signification de la différence de deux fractions (25 à 30 mn)

a) Présentation de la situation

1) L'enseignant rappelle d'abord aux enfants la situation de la séance précédente . Il écrit au tableau les fractions : $8/_{50}$ et $6/_{100}$ et leur demande ce que désignent ces fractions (l'épaisseur d'une feuille telle qu'il faut pour en empiler 50 pour obtenir une épaisseur de 8 mm). Puis il écrit la somme de ces deux fractions :

$8/_{50}$ + $6/_{100}$ et leur demande ce que désigne cette somme : (l'épaisseur d'une feuille composée d'une feuille de $8/_{50}$ collée avec une feuille de $3/_{50}$ d'épaisseur).

Remarque : Il est souvent utile de faire ainsi un rappel des situations précédentes pour deux raisons essentielles :

- d'abord pour permettre à certains enfants qui ont des difficultés ou qui sont plus lents de mieux s'investir dans la tâche qui va être proposée.
- ensuite pour permettre aux enfants qui n'ont pas assisté aux leçons précédentes de comprendre ce qui s'est passé et de pouvoir participer à la séance suivante.

.../...

2) L'enseignant écrit ensuite sur le tableau :

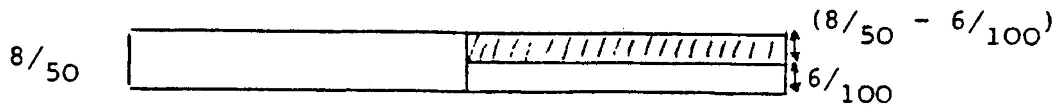
$8/_{50} - 6/_{100}$ et demande aux enfants ce que désigne cette écriture et comment on pourra réaliser ce qu'il indique.

. D'abord, les enfants essaient d'interpréter le signe "moins" mais peuvent souvent donner une interprétation erronée : "on avait collé 2 feuilles d'épaisseurs $8/_{50}$ mm et $6/_{100}$ mm pour faire une feuille plus épaisse et on décolle la feuille d'épaisseur $6/_{100}$mm."

La matérialisation de cette interprétation fait apparaître des contradictions : les deux feuilles collées ont une certaine épaisseur qu'on ne connaît pas et si on décolle l'épaisseur la plus fine, $6/_{100}$ mm, on doit trouver la différence, c'est-à-dire $8/_{50}$, ce qui ne correspond pas à la situation proposée. Cette interprétation est donc rejetée. Cependant, presque tous les enfants supposent que cette différence $8/_{50} - 6/_{100}$ désigne l'épaisseur d'une nouvelle feuille, mais ils ne voient pas immédiatement laquelle.

. Assez vite, ils donnent une autre interprétation : "c'est la feuille épaisse qui a $8/_{50}$ mm d'épaisseur. Elle est formée de deux feuilles collées : l'une de $6/_{100}$ mm d'épaisseur et l'autre qu'on ne connaît pas". Ils se rendent compte alors que la différence $8/_{50} - 6/_{100}$ représente l'épaisseur de cette deuxième feuille.

. L'enseignant suggère alors de représenter les feuilles sur le tableau par un schéma qu' il peut faire elle-même ou faire faire par un enfant :



Il demande à un enfant de montrer sur le schéma ce qui correspond à l'écriture proposée et fait dire que la partie hachurée représente la feuille qu'il faut enlever à $8/_{50}$ pour obtenir $6/_{100}$ ou encore celle qu'il faut ajouter à $6/_{100}$ pour obtenir $8/_{50}$, ce qui amène les enfants à écrire par exemple :

$$6/_{100} + \boxed{} = 8/_{50}$$

b) <u>Consigne</u> : "Vous allez essayer de prévoir tout seuls par le calcul, et par tâtonnements par exemple, l'épaisseur de cette feuille et de trouver un moyen pour vérifier ce résultat".

.../...

c) Déroulement

. Certains enfants font des tentatives comme :

$^6/_{100} + {}^6/_{100} = {}^{12}/_{100} = {}^6/_{50}$ ce n'est pas assez...

$^6/_{100} + {}^8/_{100} = {}^{14}/_{100}$ etc...

. D'autres raisonnent :

en collant 100 feuilles de type A et 100 feuilles de type B, on trouvera 100 grosses feuilles.

Il faut transformer $^8/_{50}$ en $^{16}/_{100}$:

$^6/_{100} + {}^{}/_{100} = {}^{16}/_{100}$ réponse : 10/100

. Un paquet de 50 grosses feuilles a 8 mm d'épaisseur, il faut retirer 1 feuille mince de $^6/_{100}$ à chacune, il faut donc retirer 50 feuilles, elles ont une épaisseur de 3 millimètres. Il reste donc 8 - 3 = 5 mm pour les 50 autres feuilles : épaisseur $^5/_{50}$

. On veut retirer 1 feuille mince de la feuille épaisse, 100 de ces feuilles mesurent 6 millimètres. Si on veut retirer 100 feuilles minces il en faut 100 grosses : $^8/_{50} = {}^{16}/_{100}$. Elles mesurent 16 mm. Il restera 100 feuilles de $[^8/_{50} - {}^6/_{100}]$ d'épaisseur chacune. Elles ont une épaisseur de 10 mm puisque le tas est [100, 10], chacune a une épaisseur de 10/100.

. Certains enfants ne trouvent pas mais doivent dire comment ils ont essayé, et si ce qu'ils ont trouvé est trop grand ou trop petit.

2.3.4 - Deuxième phase : (10 mn)

L'enseignant écrit la différence suivante :

$^4/_{15} - {}^1/_{15}$ et demande aux enfants :

- d'une part de trouver le résultat,
- d'autre part, s'ils sauraient réaliser cette situation avec les feuilles et s'ils sauraient indiquer ce qu'elles représentent.

. Tous les enfants trouvent immédiatement le résultat $^3/_{15}$ en se référant à l'addition des fractions.

. La matérialisation se fait devant les enfants au fur et à mesure de leurs suggestions : "il faut prendre la feuille le plus épaisse dont l'épaisseur peut être désignée par $^4/_{15}$ mm (c'est celle du bristol par exemple). Il faut faire une feuille de même épaisseur ($^4/_{15}$) en collant deux autres feuilles : l'une que l'on connaît dont l'épaisseur peut être désignée par $^1/_{15}$ et une autre qu'il faut choisir (parmi celles qui sont préparées) de manière qu'en la plaquant contre

.../...

la première, on obtienne une épaisseur égale à celle du bristol. C'est cette épaisseur qui correspond à $3/_{15}$ mm

2.3.5 - Troisième phase : Autres exercices proposés (15 mm)

a) L'enseignant propose aux enfants deux autres types de feuilles : $4/_{50}$ et $3/_{40}$ et il leur demande s'ils sauraient calculer leur différence. Les enfans disent qu'il faut se ramener au même nombre de feuilles. Alors, l'enseignant leur demande de le faire individuellement. Certains enfants n'arrivent pas au résultat, car ils ne trouvent pas un multiple commun à 50 et 40. Quelques uns procédent de la manière suivante :

$$
\begin{tikzcd}
4/_{50} \arrow[d, "\times 2"', "\times 2"] \\
8/_{100} \arrow[d, "\times 2"', "\times 2"] \\
16/_{200}
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
3/_{40} \arrow[d, "\times 5"', "\times 5"] \\
15/_{200}
\end{tikzcd}
$$

D'autres enfin font directement :

$$
\begin{tikzcd}
4/_{50} \arrow[d, "\times 4"', "\times 4"] \\
16/_{200}
\end{tikzcd}
$$

Tous finalement écrivent :

$16/_{200} - 15/_{200} = 1/_{200}$ et valident ainsi leur résultat :

$1/_{200} + 15/_{200} = 16/_{200}$

b) L'enseignant derande ensuite aux enfants d'effectuer individuellement l'opération suivante :

$12/_{8} - 2/_{5}$

2.3.6 - Résultats

Cette leçon permet aux enfants de redéfinir la différence de deux grandeurs. La soustraction de deux nombres et d'apprendre à calculer la différence de deux fractions.

.../...

A nouveau la réduction au même dénominateur a donné lieu à la recherche de dénominateur commun. Les enfants ne "connaissent" toujours pas de moyen systématique de la faire, mais progressent en ce sens qu'ils sont plus nombreux à concevoir plus vite à quel moment il faut le faire, et à utiliser régulièrement des moyens plus rapides : calcul mental, produit des dénominateurs, recherche intuitive du plus petit multiple commun.

2.4 - L'EPAISSEUR D'UN TRES GROS CARTON
(Produit d'un nombre rationnel par un entier)

2.4.1 - Matériel.

4 tas de feuilles différents contenant chacun 10 feuilles environ - Par exemple :

- des feuilles marron cartonnées d'épaisseur 19/35 mm
- des feuilles blanches de polycopie d'épaisseur 4/47mm
- des feuilles roses d'épaisseur 3/19mm
- des feuilles de dessin perforées d'épaisseur 18/95 mm

Ces feuilles ne serviront finalement pas à vérifier les résultats mais leur manipulation pourra s'avérer nécessaire à une bonne compréhension de la situation et en particulier à la distinguer de la recherche d'une fraction équivalente.

2.4.2 - Première phase : l'épaisseur d'un gros carton

L'enseignant place les enfants par équipes de 5.

a) Présentation de la situation :

"Voici 4 tas de feuilles. Avec ces feuilles, on voudrait fabriquer des cartons en collant plusieurs feuilles de même catégorie les unes contre les autres".

b) Consigne :

"Vous allez calculer l'épaisseur des cartons réalisés avec 3 feuilles, 5 feuilles, 20 feuilles, 100 feuilles, 120 feuilles de chaque catégorie.

Vous êtes groupés en 5 équipes : chaque équipe va avoir une catégorie de papier (2 équipes auront forcément la même).

Par exemple, l'équipe I aura les feuilles marron (19/35 mm)
l'équipe II aura les feuilles blanches (4/47 mm)
l'équipe III aura les feuilles roses (3/19 mm)
l'équipe IV les feuilles perforées (18/95 mm)
l'équipe V les mêmes feuilles que l'équipe I.

A l'intérieur d'une même équipe, vous pourrez vous partager le travail en vous répartissant les calculs des différentes épaisseurs. Ensuite, vous vous mettrez d'accord sur les résultats obtenus.

Vous écrirez vos résultats dans ce tableau - l'ensei-

.../...

gnant prépare le tableau dont il ne remplit que les marges, ce qui précise bien la consigne -

c) Déroulement

A mesure qu'un groupe a terminé sa recherche après en avoir discuté, il va écrire ses résultats dans le tableau. L'enseignant suggère alors à ce groupe de vérifier le travail des autres groupes pour se préparer à la discussion : l'équipe II vérifie l'équipe III, III vérifie IV, et IV vérifie II.

2.4.3 - Deuxième phase : Examen des résultats.

a) Consigne.

"Ceux qui ne sont pas d'accord avec les résultats qu'ils ont vérifiés viennent écrire leurs propositions. Lorsqu'il n'y a qu'un résultat, c'est que deux équipes au moins sont d'accord à son sujet.

b) Discussion :

Par exemple, l'équipe III a marqué :
3/19 x 3 = 9/57
L'équipe II a marqué au-dessous :
3/19 x 3 = 9/19.

Il faut donc expliquer ces résultats et invalider au moins l'un des deux. Une discussion s'engage entre les équipes : l'équipe III explique que pour multiplier par 3 elle a multiplié les 2 termes de la fraction par 3, mais elle ne sait pas prouver que son résultat est correct.

Par contre, l'équipe II explique que, puisqu'on a collé ensemble 3 feuilles, l'épaisseur du carton peut être trouvée en faisant une addition :

3/19 + 3/19 + 3/19 = 9/19

Les enfants de l'équipe IV interviennent alors pour affirmer que c'est cette solution la bonne parce que eux, ont trouvé une partie de leurs résultats en faisant des additions : en effet dans la colonne 4 du tableau, ils ont inscrit :

18/95 + 18/95 + 18/95 = 54/95
18/95 + 18/95 + 18/95 + 18/95 + 18/95 = 90/95

Les enfants de l'équipe III sont convaincus de leur erreur.

.../...

C'est alors qu'un enfant intervient et fait remarquer que 9/57 et 3/19 désignent les mêmes épaisseurs car les fractions sont égales. Il vient écrire sur le tableau :

$$\times 3 \left(\begin{array}{c} 1/19 \\ \\ 9/57 \end{array} \right) \times 3$$

L'enseignant demande à un enfant de l'équipe III de montrer une feuille d'épaisseur 3/19. Il va chercher une feuille rose. Il demande à un autre enfant de la même équipe de choisir une feuille d'épaisseur 9/57. Tous les enfants s'écrient alors : "c'est la même". Puis il demande enfin de réaliser une épaisseur de 9/19. Les enfants disent qu'il faut prendre 3 feuilles roses et les coller.

a) <u>Correction du tableau</u> :

A la suite de cette discussion, les enfants corrigent les résultats faux contenus dans le tableau.

<u>2.4.4 - Troisième phase : Evaluation de l'épaisseur des cartons</u>, comparaison à 1 mm.

a) <u>Présentation et consigne</u> :

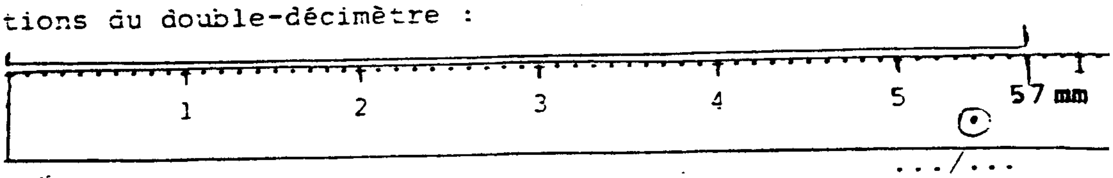
L'enseignant choisit un résultat parmi ceux du tableau : 57/35 par exemple qu'il demande aux enfants d'observer.

"Cette fraction désigne l'épaisseur du carton réalisé en collant 3 feuilles marron. Avez-vous une idée de la grosseur de ce carton ? Sauriez-vous dire et trouver un moyen de prouver s'il est plus épais que 1 mm, moins épais, égal à 1 mm ?"

b) <u>Déroulement</u> :

• Les enfants cherchent par groupes de 2 ou 3. Beaucoup prennent leur double-décimètre pour avoir une idée plus précise du millimètre.
Des stratégies différentes apparaissent dans les groupes.

* La plus fréquemment employée et celle-ci.
- Les enfants dessinent en les agrandissant les graduations du double-décimètre :



.../...

Ils expliquent que 57/35 signifient que si on prend 35 feuilles marron, elles ont une épaisseur de 57 mm ou 5 cm 7 mm (qu'ils indiquent sur leur schéma).

Ils essaient d'évaluer l'épaisseur d'une dizaine de feuilles en partageant approximativement leur bande de 57 mm en 3 parties et de cette observation, ils déduisent et affirment que l'épaisseur 57/35 est plus grande qu'un millimètre.

* Puis, celle qui apparaît ensuite le plus souvent est : "si on avait 35/35 ça voudrait dire que 35 feuilles mesureraient 35 mm, donc 1 feuille mesurerait 1 mm.

1 feuille → 1 mm

Puisque 57 est plus grand que 35 57/35 mm est plus grand que 1 mm et la plupart des enfants qui pratiquent ce raisonnement, disent aussitôt : "mais c'est plus petit que 2 mm !"

* Enfin, quelques enfants pensent que 57/35 est grand que 1 mm mais ils n'arrivent pas à trouver un moyen de le prouver.

- 5 ou 6 enfants dans la classe n'ont aucune idée de l'épaisseur du carton.

• Après cette recherche en groupes, les enfants viennent exposer chacune des 2 stratégies employées, à la suite de quoi, des remarques fusent déjà dans la classe :

"toutes les fois que le nombre du haut (le numérateur) est plus grand que celui du bas (le dénominateur), l'épaisseur est plus grande que 1 mm".

L'enseignant ne les prend pas encore en compte pour ne pas installer trop tôt des mécanismes dans l'esprit des enfants (et c'est la majorité) qui n'a pas encore "vu" ce problème.

c) Evaluation d'autres épaisseurs du tableau.

L'enseignant demande aux enfants - d'observer les autres résultats du tableau - et de dire s'ils peuvent faire des déclarations sur ces épaisseurs.

Certains enfants voient que des épaisseurs comme 2160/95 ou 1900/35 ou 480/47 sont beaucoup plus grandes que 1 mm et ils essaient déjà de les évaluer mentalement.

Ils repèrent aussi les épaisseurs plus petites que 1 mm : 54/95 ou 12/47 ou 9/19 etc...

<u>REMARQUE</u> : Cette dernière partie se déroule de manière

.../...

informelle et spontanée pour le plaisir d'échanger des idées et de les discuter sans pression de l'enseignant qui écoute les remarques des enfants sans intervenir sauf si des enfants lui demandent une précision ou une explication.
Il est indispensable d'insister sur le fait que l'enseignant n'a précisé aucun contrat d'apprentissage ni d'acquisition. Quelques enfants peuvent aller très loin dans l'analyse de la situation et faire des remarques subtiles, profondes. D'autres ont des intuitions et échouent dans leur tentative de les justifier. Ces "découvertes" circulent plus ou moins mais qu'importe, la jubilation de ceux qui ont trouvé quelque chose gagne ceux qui les écoutent, les approuvent, les regardent avec incompréhension ou les contredisent. Chacun peut s'avancer et dire même une "bêtise".

L'enseignant s'attache d'abord à permettre les prises de paroles successives sans intervenir sur l'ordre ou le choix des intervenants, à entretenir le plaisir du groupe à ce jeu. Pour celà il doit témoignenr du plaisir qu'il y prend lui-même, mais surtout sans faire explicitement de son plaisir le but des enfants.

Il enregistre les erreurs et les difficultés sans essayer immédiatement de les faire corriger. Si personne ne les relève, l'explication ne servirait le plus souvent à rien à ce moment-là. L'enseignant devra considérer qu'il y a là un obstacle qui fera l'objet d'une activité didactique préparée.

Puis souvent au bout d'un moment un enfant relève l'erreur et le débat rebondit.

Evidemment, il faut qu'il soit clair que le silence de l'enseignant ne signifie ni acceptation ni réprobation. Et il suffit pas de le dire il faut le pratiquer.

.../...

TABLEAU V. Tableau des résultats de l'activité

Nombre de feuilles collées	Epaisseur d'une feuille			
	19/35 (équipe I et V)	4/47 (Equipe II)	3/19 (équipe III)	18/95 (équipe IV)
3 f.	19/35 x 3 = 57/35	4/47x 3 = 12/47	3/19 x 3 = 9/19	18/95 x 3 = 54/95
5 f.	19/35 x 5 = 95/35	4/47x 5 = 20/47	3/19 x 5 = 15/19	18/95 x 5 = 90/95
20 f.	10/35 x20=380/35	4/47x20=80/47	3/19 x 20= 60/19	18/95 x20=360/95
100 f.	19/35x100=1900/35	4/47x100=400/47	3/19 x100=300/19	18/95x100=1800/95
120 f.	19/35x120=2280/35	4/4x120=480/47	3/19x120=360/19	18/95x120=2160/95

2.4.5. Résultats

Les enfants ont appris à multiplier une fraction par un nombre entier et distinguent cette opération du calcul d'une fraction égale. La compréhension de cette distinction est essentielle pour la suite. Lorsque les enfants commenceront à faire fréquemment des calculs variés dans des problèmes plus complexes ils aurant d'eux-même tendance à automatiser leurs procédures, la distinction initiale leur permettra de la faire sans cesser de comprendre ce qu'ils font et par là de corriger les erreurs qui ne manqueront pas de se produire alors.

Beaucoup ont commencé à envisager la comparaison des fractions aux naturels, question qui sera bientôt reprise. Bien sûr tout céci reste lié à la représentation des fractions par les épaisseurs de papiers.

Problème ouvert : 1) Donnez un nombre de feuilles assez grand pour que l'épaisseur du carton obtenu en les collant dépasse 2000 mm.

2) Pouvez-vous trouver une épaisseur telle que je ne puisse jamais l'atteindre en empilant des feuilles de carton.

2.5 - CALCUL DE L'EPAISSEUR D'UNE FEUILLE
(Division d'un rationnel par un entier)

2.5.1 - Première phase : Signification de la division d'un rationnel par un entier (15 mn)

1) Rappel de la multiplication :

"Si on colle 5 feuilles de 3/9 mm d'épaisseur, savez-vous trouver l'épaisseur de la nouvelle feuille ?"

Les enfants cherchent mentalement de leur place ce résultat quand ils ont trouvé, l'enseignant envoie l'un d'entre eux au tableau écrire :

$3/9 \times 5 = 15/9$

ou $3/9 + 3/9 + 3/9 + 3/9 + 3/9 = 15/9$

2) Présentation de la nouvelle situation : division d'un rationnel par un entier.

a) Présentation et consigne.

"J'ai collé 9 feuilles de même épaisseur. J'ai obtenu un carton qui a une épaisseur de 18/7 mm

. que pourrions-nous chercher ? (l'épaisseur d'une des feuilles)

. savez-vous trouver cette épaisseur ? quand vous l'aurez trouvée, vous l'inscrirez dans votre cahier de brouillon et vous chercherez le moyen de prouver qu'elle est correcte".

b) Déroulement.

Les enfants travaillent individuellement et donnent très vite le résultat : $2/_7$ mm

Pour prouver que ce résultat est correct, ils disent : "puisqu'il y a 9 feuilles collées, et que chaque feuille a une épaisseur de $2/_7$, l'épaisseur du carton est bien $18/_7$ puisque 9 fois $2/_7$ est égal à $18/_7$"

Un enfant vient écrire sur le tableau :

$\boxed{2/_7} \times 9 = 18/_7$

D'autres enfants proposent d'écrire la division :

$18/_7 : 9 = 2/_7$

L'enseignant approuve en confirmant que cette pratique existe. Elle fait cependant remarquer que la seule division qu'ils connaissent est celle dans les entiers naturels : on sait en effet et l'on peut écrire que : 18 : 9 = 2

Mais pour les fractions, on pourrait aussi l'écrire pour l'instant d'une manière différente

$$18/7 \xrightarrow{:\,9} 2/7$$

Les enfants remarquent toujours à ce moment-là qu'"avec l'opérateur inverse (x9), on retrouve bien 18/7" et l'un d'entre eux vient ajouter une flèche :

$$18/7 \underset{x\ 9}{\overset{:\ 9}{\rightleftarrows}} 2/7$$

Si les enfants demandent pourquoi il a entouré les fractions, l'enseignant répond que c'est pour montrer que c'est <u>l'épaisseur</u> qui est multipliée ou divisée, c'est-à-dire la fraction et non pas le numérateur ou le dénominateur comme ils l'avaient fait pour chercher des fractions égales jusqu'à ce moment. De toute façon, la distinction devra se faire dans la phase suivante.

<u>2.5.2 - Deuxième phase</u> : Autre situation proposée (35 mn)

a) <u>Présentation de la situation et consigne</u> :"Maintenant, on a collé 9 feuilles de même épaisseur (mais différente des autres) pour obtenir un autre carton. Ce carton a une épaisseur de $12/_7$"

"Pouvez-vous trouver l'épaisseur de chacune des 9 feuilles collées ?"

b) <u>Déroulement</u>

Les enfants cherchent par groupes de 2 ou 3. Là encore, on observe des stratégies différentes suivant les groupes :

- quelques enfants ont écrit :

$12/_7 \xrightarrow{:9} 1/_7$ et il reste quelque chose

- 2 groupes ont cherché une fraction équivalente à $12/_7$ en multipliant les 2 termes par 9

$$12/_7 \xrightarrow{x\ 9} 108/_{63} \qquad\qquad 108/_{63} \xrightarrow{:9} 12/_{63}$$

Ils expliquent ce qu'ils ont fait en disant que "puisque 12 n'est pas un multiple de 9, ce n'est pas possible"

Alors, ils cherchent une fraction dans laquelle le numérateur est un multiple de 9, comme la fraction $108/_{63}$

.../...

Elle est égale à $12/_7$ et c'est celle-là, qu'ils divisent par 9.

- Un autre groupe a fait un raisonnement identique, mais en multipliant les deux termes de la fraction par 3.

$$\frac{12}{7} \xrightarrow{\times 3 \;\; \times 3} \frac{36}{21} \qquad\qquad \frac{36}{21} \xrightarrow{:9} \frac{4}{21}$$

Trois enfants vont au tableau exposer ces trois méthodes. Les deux dernières déclenchent une vive réaction dans la classe.

En effet, quelques enfants protestent en disant : "Ca ne va pas, on ne trouve pas la même chose !"

Alors, les enfants examinent les deux résultats $12/_{63}$ et $4/_{21}$ et très vite quelques uns voient que ces deux fractions sont égales. Un enfant vient écrire :

$$\frac{4}{21} \xrightarrow[\times 3]{\times 3} \frac{12}{63}$$

Ils concluent que les deux méthodes sont bonnes.

2.5.3 - Troisième phase : (10 mn)

a) Présentation de la situation et consigne

L'enseignant écrit sur le tableau :

$$\frac{13}{5} \xrightarrow{:9} \boxed{?}$$ et demande aux enfants :

"Essayez de dire à quelle occasion on a dû faire cette opération et trouvez-en le résultat".

b) Déroulement

Les enfants travaillent individuellement.

En général, ils cherchent tous à trouver le résultat plutôt qu'à donner un sens à l'opération. L'enseignant a dû insister pour obtenir une phase écrite.

.../...

Au bout de 5 mn environ, l'enseignant arrête les recherches et envoie un ou plusieurs enfants au tableau expliquer ce qu'ils ont fait :

$$13/5 \xrightarrow{:9} 13/45$$

"on veut faire un carton de 13/5 composé de 9 feuilles de même épaisseur. Quelle sera l'épaisseur d'une de ces feuilles ?"

Calculs observés :

$$\star \quad x9 \left(\begin{array}{c} 13/5 \\ 57/45 \end{array} \right) x9 \qquad\qquad 57/45 \xrightarrow{:9} 13/45$$

A ce moment il n'y a généralement pas de remarques sur le procédé qui consiste pour diviser par un nombre, à multiplier le dénominateur par le nombre. Si par hasard, le procédé est signalé, son caractère de généralité n'apparaît pas à ce moment-là et il reste une remarque locale.

2.5.4 - Résultats.

Bien que la plus grande partie des enfants aient effectué les opérations proposées dans la leçon, et aient compris à ce moment-là et dans ce cas le sens de leur travail il n'est pas assuré qu'ils sachent désormais diviser une fraction par un nombre. Mais on va retrouver des situations semblables suffisamment fréquemment pour qu'ils développent leurs méthodes de calculs, les affinent et les assurent.

Cette leçon leur permettra d'investir ces nouvelles situations, de les comprendre sans qu'il soit fait appel à une réduction à la technique opératoire.

2.6. Contrôle des connaissances.

1) Range les épaisseurs suivantes de la plus petite à la plus grande :

$\frac{35}{100}$; $\frac{3}{5}$; $\frac{62}{97}$; $\frac{5}{25}$

2) Fais la somme des épaisseurs suivantes :

$\frac{15}{100} + \frac{22}{100} + \frac{62}{100} =$

$\frac{7}{25} + \frac{14}{50} + \frac{45}{100} =$

$\frac{3}{12} + \frac{1}{4} + \frac{2}{3} =$

$\frac{5}{8} + \frac{13}{88} =$

3) Pour faire un carton, on colle 5 feuilles identiques dont l'épaisseur est $\frac{3}{25}$ mm.

a) Quelle sera l'épaisseur du carton ?

b) Ce carton est-il plus gros ou plus fin qu'un millimètre ?

c) Combien de feuilles faut-il coller pour qu'il soit plus gros qu'un millimètre ?

4) Un carton a une épaisseur de $\frac{7}{25}$ mm
Il a été réalisé en collant 8 feuilles identiques.
Quelle est l'épaisseur d'une de ces feuilles ?

5) Trouve 2 fractions égales à $\frac{3}{18}$.

MODULE 3 : MESURES

Séances 11-12

MODULE 3 - Activité 1

3.1 - MESURES FRACTIONNAIRES DE POIDS, DE CAPACITES ET DE LONGUEURS

Pour les enfants, il s'agira, lors de cette séance d'utiliser les rationnels découverts lors de la désignation des épaisseurs de feuilles (cf. 1ère séance) pour mesurer de nouvelles grandeurs plus particulièrement :

- le poids d'un objet (ici des clous) à l'aide d'une unité de poids
- la capacité d'un récipient (des verres) à l'aide d'une unité de capacité
- la longueur d'une baguette (des bandes) à l'aide d'une unité de longueur.

La leçon prendra la forme d'un jeu de communication, tout comme dans la 1ère séance.

3.1.1. MATERIEL

Tout le matériel est préparé en double (2 ateliers de chaque sorte.)

Ateliers	Objet unité	Objets à mesurer	Instruments de mesure
poids	plaque-unité [plaque à leviers arithmétiques ESA (OCDL)]	5 clous de catégories différentes	Balance Roberval
capacité	verre coloré (verre à liqueur)	5 petits verres de tailles différentes	2 éprouvettes non graduées(*), transparentes identique, l'une marquée d'une pastille de couleur
longueur	bande en carton gris	6 baguettes de canson et de 6 longueurs différentes de celle de l'unité	une bande large et longue de papier affiche blanc (bande-témoin)

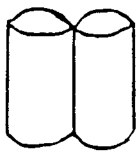


fig. 1

* En fait d'éprouvette nous avons pris des tubes tous identiques de plastique transparents (flacons de schampooing) de 5 cm de diamètre, fig. 1.

Remarques : pour cette séance, il est important que le choix du matériel soit fait soigneusement.
S'il est facile pour les ateliers longueur de donner ici celles que nous avons utilisées, les capacités et l

.../...

poids dépendent du matériel dont chacun peut disposer en respectant toutefois un certain ordre de grandeur par rapport à l'unité choisie.

Atelier poids : Nous avons utilisé des clous style clous à béton tels que :

clou A mesure approximativement 15/25 de l'unité
clou B mesure approximativement 34/22 de l'unité
clou C mesure approximativement 31/27 de l'unité
clou D mesure approximativement 21/46 de l'unité
clou E mesure approximativement 13/62 de l'unité

on voit que les valeurs des rapports encadrent l'unité, et sont du même ordre de grandeur qu'elle

Il faut des clous de chaque sorte et des plaques-unités en assez grand nombre. Le nombre doit être supérieur au numérateur et au dénominateur de la fraction obtenue comme mesure : Exemple : il faut ici plus de 25 clous A, plus de 62 clous E, etc... et plus de 34 "unités" par atelier.

Atelier capacité : Nous avons utilisé des petits verres à liqueur de formes diverses. Il n'y a que le verre-unité qui est coloré. Ils ont été choisis tels que :

verre F mesure 2/3 de l'unité
verre G mesure 5/3 de l'unité
verre H mesure 9/5 de l'unité
verre I mesure 3/2 de l'unité
verre J mesure 7/6 de l'unité

D'autres petits récipients peuvent être employés :
- doseur de lait en poudre pour bébé
- conditionnement de petit suisse
- tasses de dînette etc...

Il est nécessaire que le maître ait lui-même réalisé auparavant les manipulations pour s'assurer qu'elles sont faisables avec le matériel choisi dans un temps relativement court.

Atelier longueur : Baguettes de papier canson de 2 cm de largeur.

baguette K 4,80 cm → 6/5 de l'unité
baguette L 5 cm → 5/4 ou 10/8 de l'unité
baguette M 5,60 cm → 7/5 de l'unité
baguette N 3,20 cm → 4/5 de l'unité
baguette O 3,50 cm → 7/8 de l'unité
baguette P 4,50 cm → 9/8 de l'unité

baguette unité 4 cm de longueur.

.../...

3.1.2 - PHASE I : RECHERCHE D'UNE METHODE DE DESIGNATION.

1. Consigne :

* "Nous avons inventé des nombres (les fractions) pour mesurer des épaisseurs de feuilles de papier. Est-ce que de la même manière, des fractions nous permettraient de mesurer d'autres grandeurs, des poids, des longueurs, des capacités ?

Par exemple, le poids d'un de ces clous, la capacité d'un de ces verres, la longueur d'une de ces baguettes ?

* Pour cela, que faut-il ?" une unité et les moyens de comparer.
". le poids d'un clou sera mesuré à l'aide de l'unité de poids : le poids d'une de ces plaquettes.
. La capacité d'un verre sera mesurée à l'aide de l'unité de capacité : la capacité de ce verre coloré.
. La longueur d'une baguette sera mesurée à l'aide de l'unité de longueur : la longueur de cette bande grise.

* Nous ferons tout à l'heure un jeu de communication (rappeler le premier jeu au cours duquel on a échangé des messages qui désignaient des épaisseurs de feuilles). Mais aujourd'hui, chaque groupe doit trouver un moyen pour désigner :
- le poids d'un clou
- la capacité d'un verre
- la longueur d'une baguette.

* Il faut comparer les grandeurs à mesurer avec les unités. Pour cela, vous disposez d'appareils de comparaison :
. la balance Roberval (pour comparer les poids)
. les éprouvettes (pour comparer les capacités)
. les bandes-témoins (pour comparer les longueurs)

Vous allez donc d'abord chercher comment on se sert de ces appareils pour faire correspondre une fraction à une grandeur.

Lorsque ce système de désignation sera accepté par tous les enfants d'un même groupe, vous l'éprouverez dans le jeu de communication".

Note : L'enseignant peut donner cette consigne de diverses façons, sans réciter ce texte.

Remarque : Dans cette première phase, les enfants ne disposent que de 2 objets à désigner, pour les groupes "capacités","poids" et de 3 baguettes : pour les groupes "longueurs".

.../...

L'enseignant les a choisis de façon à ce que le nombre de reports d'unités et de grandeurs soit minimum parmi les objets proposée. Ici, par exemple on choisit :

Capacités $\frac{2}{3}$ et $\frac{3}{2}$

Poids $\frac{34}{22}$ et $\frac{16}{25}$

Longueurs $\underset{K}{\frac{6}{5}}$ et $\underset{M}{\frac{7}{5}}$ et $\underset{L}{\frac{5}{4}}$

2. Organisation de la classe :

Les enfants sont répartis en groupes de 4, selon la figure 2.

- 2 groupes pour les poids $P(E_A,R_A)$ $P(E_B,R_B)$
- 2 groupes pour les capacités $C(E_A,R_A)$ $C(E_B,R_B)$
- 2 groupes pour les longueurs $L(E_A,R_A)$ $L(E_B,R_B)$

figure 2

Disposition des ateliers dans la classe - Phase 1.

Récepteurs A Capacités Emetteurs A	Emetteurs A Longueurs Récepteurs A	Emetteurs B Poids Récepteurs B
E_A R_A	E_A R_A	E_B R_B
Emetteurs A Poids Récepteurs A	Emetteurs B Capacités Récepteurs B	Emetteurs B Longueurs Récepteurs B
E_A R_A	E_B R_B	

Remarques : On peut considérer que la classe est divisée en deux équipes concurrentes A et B. Comme dans l'activité 1, Séance 1, et que chaque équipe est elle-même partagée en trois ateliers (P,C,L)

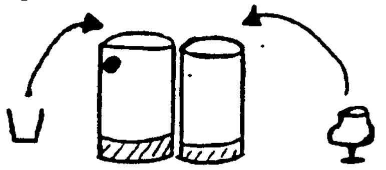
On peut aussi renoncer à ce regroupement en équipes et à la compétition. Les groupes ne changent pas (cf. p. 1 § sur la compétition et coopération).

3. Déroulement.

Les enfants discutent et manipulent pour se mettre d'accord sur le système de désignation qu'ils vont utiliser.

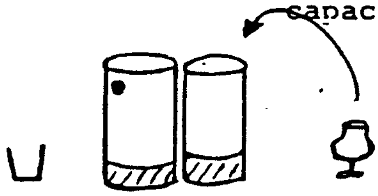
.../...

<u>Exemples de procédés que les enfants utilisent</u>. Ils discutent et manipulent pour se mettre d'accord sur le système de désignation qu'ils vont utiliser.

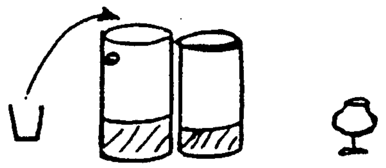


verre F de capacité f

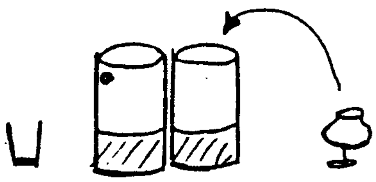
* Groupe "capacités"
Le verre F contient moins que le verre unité.



Comparons le verre unité à 2 fois la capacité de F.
La capacité 2 f est plus grande que l'unité



Mais deux unités dépassent 2 f



En ajoutant 3 fois la capacité f, on obtient la même capacité qu'avec deux verres unité.

3 f = 2 u.

Les enfants versent alternativement et respectivement dans l'éprouvette marquée d'une pastille des verres-unités, et dans l'autre éprouvette des verres à mesurer jusqu'à ce qu'ils observent que le niveau de l'eau est le même dans les 2 éprouvettes.

Ils concluent alors : "il faut 3 f pour faire 2 unités"

Ils écrivent : f = 2/3 U.

<u>Remarque</u> : • Il est très important que les enfants ne versent pas les verres dans n'importe quelle éprouvette et surtout qu'ils n'en changent pas en cours de manipulation. La pastille de couleur sert à repérer l'éprouvette dans laquelle on verse l'eau du "verre-unité"

• Les enfants du groupe-capacité peuvent avoir quelques difficultés : lorsqu'ils ne comprennent pas l'usage des éprouvettes. Par exemple, ils peuvent essayer d'en évaluer la capacité avec le verre-unité, puis avec le verre à mesurer sans faire de comparaison à chaque étape. Cette méthode permet en effet une approximation de la capacité du verre (19 f pour 12 u, par exemple).

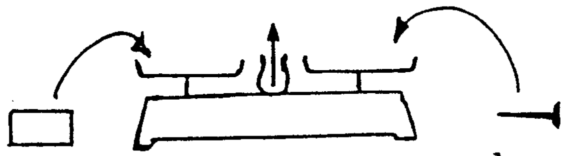
.../...

• Le sable pourrait être plus commode à transvaser mais guère plus propre, et surtout beaucoup moins précis pour comparer les niveaux (tassement, horizontabilité, etc...)
On peut utiliser d'autres récipients que des verres et bien distinguer la "capacité" et le "récipient".

• Certains élèves ne trouvant pas très rapidement la coïncidence, font l'hypothèse que si l'on continue à verser alternativement des "unités" et des "verres à mesurer" on ne trouvera jamais de coïncidence : "ça continuera toujours à dépasser d'un côté ou de l'autre".

Le maître peut alors intervenir soit, pour encourager, soit pour accepter des coïncidences approximatives. Ceci est vrai pour tous les ateliers.

Groupe "poids"



Ici non plus les enfants ne peuvent pas utiliser le procédé classique qui consiste à fractionner l'unité puis à équilibrer le poids cherché à l'aide d'unités et de fractions d'unités.

Ils essaient de "peser" A avec U, ils constatent par exemple que U est plus lourd, ils essayent alors d'équilibrer U avec deux exemplaires de A, etc... jusqu'à l'obtention de l'équilibre : ils disent alors par exemple : "il faut 25 clous dans un plateau pour équilibrer, 16 plaques dans l'autre..."

"25 clous sont équilibrés par 16 unités, il faut 16 U pour 25 clous"

"25 fois le poids d'un clou est égal à 16 fois le poids de l'unité"

"Le poids du clou est 16/25 U".

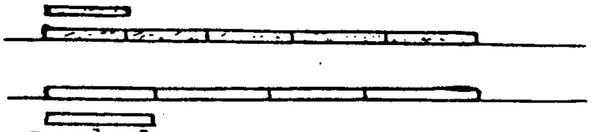
Remarque : Le poids de la plaquette est 25/16 si l'on prend le poids du clou comme unité, les enfants disent "on met le nombre d'unités en haut".

Mais il n'est pas souhaitable de laisser les enfants choisir l'unité car ils ont tendance à prendre l'objet le plus léger systématiquement.

.../...

* Groupe "longueurs" :

Bande unité



Bande L

Il faut 4 bandes pour faire la même longueur que 5 bandes unités, donc
Bande L mesure 5/4 unité.

Il peut arriver que les enfants hésitent un moment avant de reporter bout à bout la longueur unité. C'est la conception de "la bande graduée" qui est un peu difficile, mais nous préférons laisser fonctionner le report de l'unité plutôt que d'en éviter la pratique.

4.1.3 - PHASE II : JEU DE COMMUNICATION DES GRANDEURS.

Lorsque le système de désignation est accepté par tous les membres du groupe, celui-ci se scinde en deux. La maîtresse donne le reste du matériel.

Chaque demi-groupe a devant lui un matériel identique.

1. Consigne : Vous allez maintenant éprouver la désignation que vous avez choisie. Par exemple, le groupe poids émetteur choisit un clou, désigne son poids à l'aide de l'unité, l'écrit et envoie ce message au groupe poids récepteur qui devra retrouver de quel clou il s'agit. De même pour les capacités et les longueurs".

Dans cette activité, tous les demi-groupes doivent être au moins une fois émetteurs et au moins 1 fois récepteurs.

2. Organisation.

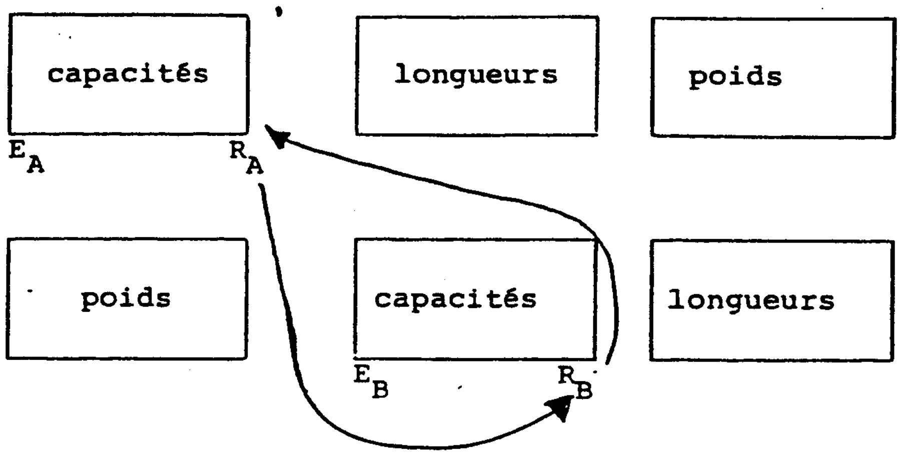
Lors de la phase 2 (jeu de communication), il y a éclatement de chaque groupe en 2 sous-groupes, l'un émetteur, l'autre récepteur.

Pour éviter de devoir doubler le matériel, les récepteurs d'un groupe capacité se mettront à la même table que les émetteurs du second groupe capacité et vice-versa.

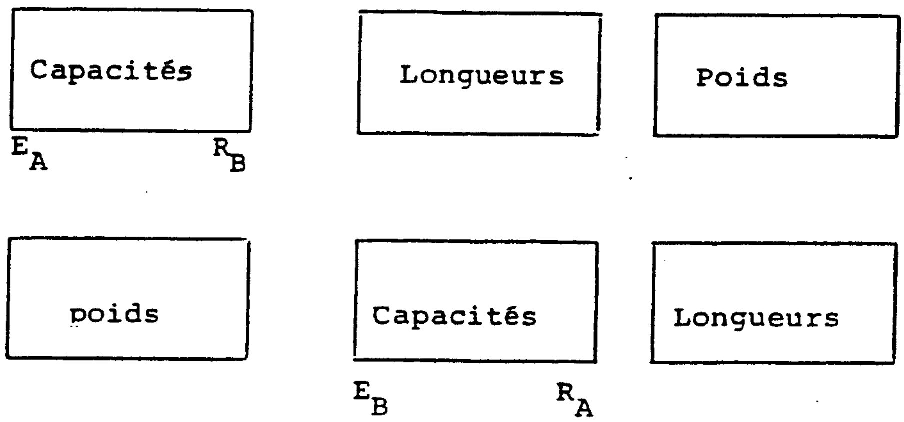
On effectuera les mêmes changements de tables pour les autres demi-groupes récepteurs.

.../...

PHASE 1



PHASE 2



.../...

3.1.4 - COMPTE-RENDU DES RESULTATS

L'enseignant inscrit au tableau
- le ou les messages de chaque demi-groupe émetteur
- la réussite ou l'échec

Les enfants de chaque demi-groupe émetteur expliquent à leurs camarades des autres groupes comment ils ont fabriqué leur message (avec retour à la manipulation si nécessaire) et les récepteurs expliquent comment ils l'ont interprété et reconnu l'objet dont il s'agissait.

On conclut que l'on pourrait mesurer des capacités, des poids, etc... à l'aide des fractions.
On fera alors des "lectures" de fraction par exemple :
"que veut dire : ce verre a une capacité de 3/4 de u ?" :
-"il faut ajouter 4 fois la capacité de ce verre pour obtenir une capacité de trois fois celle du verre-unité"
Même chose pour d'autres exemples.
. des comparaisons de deux poids :
un clou pèse 22/37 ; un autre 11/18.
Quel est le plus lourd ?
. des sommes :
Si je pèse ensemble deux clous, l'un de 17/25 ; l'autre 40/75, quel poids obtiendrai-je ? etc...

3.1.5 - RESULTATS DIDACTIQUES.

A nouveau, les enfants utilisent des couples de nombres pour repérer des mesures. Ce n'est ni une "application" des rationnels, ni une occasion de "reconnaître" une situation comparable à celle des papiers car il y a des obstacles; par exemple, le langage ou la symétrie de présentation entre l'objet à mesurer et l'unité (non et presque arbitraire)...
En fait, les enfants ont surtout résolu des problèmes pratiques, de manipulation, de comparaison, d'évolution, évaluation de somme, d'égalités... des grandeurs étudiées. Un autre problème important est soulevé et "résolu" (seulement par certains). Si on reporte des unités d'une part et des grandeurs égales à mesurer d'autre part, est-ce qu'on finira par observer des équilibres au moins approximatifs, ou est-ce qu'on peut observer une suite "non finie" de déséquilibres ?

.../...

3.2 - CONSTRUCTION DE LONGUEURS FRACTIONNAIRES

3.2.1. Dans la séance précédente, les enfants attribuaient des nombres à des grandeurs (ils désignaient la mesure). Dans celle-ci, ils vont de plus construire des objets dont la mesure à l'aide d'une unité, est donnée. (Ils réalisent une grandeur). Il s'agira seulement de longueurs pour des raisons matérielles.

Cette construction pourra suggérer une technique qui repose sur une nouvelle représentation de la notion de fraction : (que nous appellerons Mβ) pour fabriquer une bande de longueur 5/4 de l'unité, la représentation que nous avons déjà introduite et que nous appellerons Mα, permet plusieurs méthodes :

. soit on prend une longueur quelconque, on la reporte 4 fois et on compare la longueur obtenue à 5 unités, puis on corrige par tâtonnements (Mα)

. soit on reporte 5 fois l'unité puis on partage cette longueur en 4. Cette deuxième méthode exige déjà d'avoir un usage assez souple de la définition donnée.

Il en existe une troisième plus efficace si on doit fabriquer diverses baguettes de dénominateur 4 : on partage l'unité en 4 et on reporte le morceau obtenu 5 fois(Mβ)

C'est cette méthode que nous allons essayer de faire apparaître sans espérer que les enfants montrent ou disent qu'elle est équivalente à l'autre.

I - MATERIEL : (toutes les baguettes ont la même largeur, soit 2 cm, et sont réalisées en papier canson)

- 12 baguettes-unité (grises) de 20 cm
- 4 jeux identiques de 6 baguettes (vertes) dont les longueurs respectives sont :

5 cm	→	1/4 u
10 cm	→	2/4 u
15 cm	→	3/4 u
35 cm	→	7/4 u
30 cm	→	3/2 u ou 6/4 u
45 cm	→	9/4 u

- 4 jeux identiques de 6 baguettes (bleues) dont les longueurs respectives sont :

4 cm	→	1/5 u
8 cm	→	2/5 u
16 cm	→	4/5 u
28 cm	→	7/5 u

.../...

24 cm → 6/5 u

36 cm → 9/5 u

- 4 jeux identiques de 6 baguettes (jaunes)

2,5 cm → 1/8 u
5 cm → 2/8 u
17,5 cm → 7/8 u

12,5 cm → 5/8 u

22,5 cm → 9/8 u

27,5 cm → 11/8 u

- ciseaux
- des bandes de papier affiche de 50 cm de Longueur et de 5 cm de largeur
- des bandes de canson blanc assez longues (largeur toujours 2 cm)

3.2.2. Phase 1 : Jeu de communication.

La classe est partagée en 12 groupes de 2 à 3 enfants

Chaque groupe a devant lui 1 bande unité et 1 jeu de 5 bandes de la même couleur.

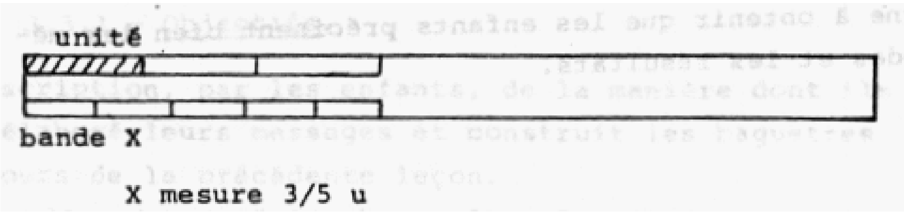
a) Consigne :

- "Il faut que chaque groupe désigne par des fractions les longueurs des 6 bandes de couleur qui lui sont données, à l'aide de l'unité (grise) et les écrive toutes sur le même message. Chaque groupe est donc d'abord émetteur.
- Chaque groupe recevra le message d'un autre groupe. A ce moment-là, vous deviendrez tous récepteurs. Vous devrez découper dans des bandes de papier canson blanc les baguettes dont les longueurs sont celles indiquées sur le message.
- Ensuite, chaque groupe récepteur rencontrera le groupe qui a émis le message décodé et ils vérifieront ensemble que les baguettes de canson blanc sont bien identiques à celles qui ont servi à fabriquer le message (par superposition). Si elles sont bien identiques, les émetteurs ont gagné.
- Si vous désirez du matériel supplémentaire, je vous le fournirai (papier, ciseaux, etc...)

.../...

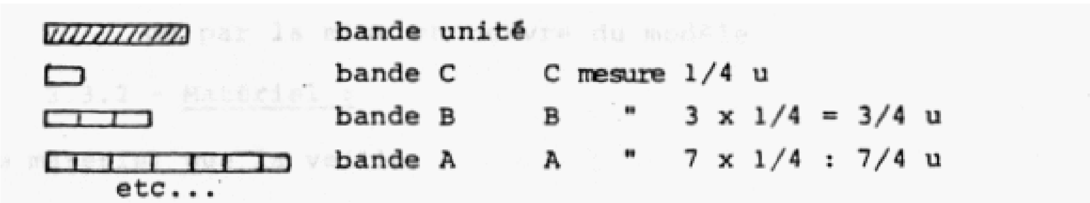
b)Déroulement

i) Phase de mesure



* Les enfants peuvent utiliser la technique habituelle

* Certains peuvent s’apercevoir que sur les 6 bandes de couleur proposées, 4 sont multiples de la plus petite. Il leur suffit alors de mesurer celle-ci. De plus, en reportant cette petite bande, tous peuvent constater qu’elle est contenue un certain nombre exact de fois dans l’unité. Ils s’en servent alors comme



unité intermédiaire:

ii) Phase de communication

- Pour plus de commodité c’est l’enseignant

gui fait passer les messages. Ii faut que les groupes reçoivent le message d’une équipe gui a des bandes d’une couleur différente des leurs (et par là–même de longueurs différentes des leurs)

— Les bandes–témoins de papier affiche ne seront distribuées que sur la demande des enfants

— Les bandes de Cançon blanc et les ciseaux seront données en même temps que le message.

Même s’ils ont commence par mesurer d’autres longueurs, ce choix des longueurs de bandes favorise des observations utiles a ceux gui peuvent les faire pour gagner du temps.

* Pour favoriser ces observations, l’enseignant n’a fourni qu’une seule bande- témoin.

3.2.3 - Phase 2 Compte rendu des résultats Déroulement

Les élèves viennent au tableau présenter leurs messages et indiquer comment ils ont procédé pour la désignation et pour la construction.

L’enseignant s’abstient de porter des jugements personnels sur l’intérêt des méthodes utilisées. Il se borne A obtenir que les enfants précisent bien les méthodes et les résultats.

3.3 - COMPARAISONS DE STRATEGIES

3.3.1 - Objectifs.

- Description, par les enfants, de la manière dont ils ont élaboré leurs messages et construit les baguettes au cours de la précédente leçon.
- Pour l'enseignant; faire apparaître les différentes méthodes de construction (il y en a 2) en disposant sous forme d'un tableau les renseignements fournis par les enfants (qui sont inscrits sous forme de croquis).
- Mettre en évidence et faire la preuve de l'équivalence des longueurs réalisées des deux manières différentes :
  . par la mise en oeuvre du modèle 2
  . ou par la mise en oeuvre du modèle

3.3.2 - Matériel :

Même matériel que la veille.

3.3.3 - Déroulement :

1) Compte rendu des résultats par les enfants :

Ce compte rendu est dirigé par l'enseignant qui inscrit les résultats sous forme d'un tableau de façon à faire apparaître :

. la manière dont les enfants ont réalisé leur message (désignation)

. la manière dont ils ont construit les baguettes (construction) à partir des messages reçus.

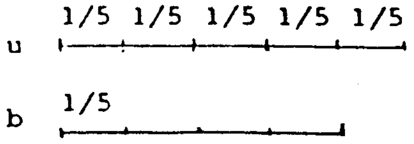
Ces résultats ont été notés sur le tableau sous forme de croquis simples soit par les enfants eux-mêmes, soit par le maître sous la dictée des enfants (voir l'exemple ci-contre pour les baguettes rouges).

2) Lorsque les enfants ont exposé leur méthode ou reconnu leur procédé dans les méthodes déjà exposées, l'enseignant pose le problème suivant :
"on veut construire une baguette de 4/5 de longueur à partir d'une unité donnée"
Réfléchissez aux 2 méthodes qui vous permettraient de la construire".

Réflexions et discussion de groupes.

.../...

2) <u>2ème méthode proposée (modèle β)</u>



L'enfant écrit au tableau :

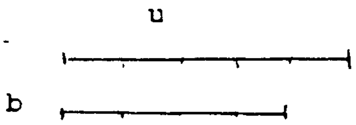
$4/5 \xrightarrow{:4} 1/5$

$1/5 \times 4 = 4/5$

3) Le problème est de savoir maintenant si la baguette "b" obtenue par la 2ème méthode proposée aura la même longueur que la baguette "a" obtenue par la première méthode.

(<u>Remarque</u> : Ce problème n'a pas été posé par l'enseignant mais par un enfant qui a demandé spontanément : "est-ce que les 2 baguettes auront la même longueur ?")

L'enseignant demande aux enfants d'essayer de trouver un moyen pour savoir si cette baguette "b" a effectivement la même longueur que "a" c'est-à-dire 4/5.
Les enfants ont élaboré, avec l'enseignant, la démonstration suivante :



Dans u, il y a 5 morceaux identiques (1/5)

Dans b, il y en a 4.

Si on met :

1 fois u → 5	1 fois b → 4
2 u → 10	2 b → 8
3 u → 15	3 b → 12
$\boxed{4\ u \rightarrow 20}$	4 b → 16
5 u → 25	$\boxed{5\ b \rightarrow 20}$

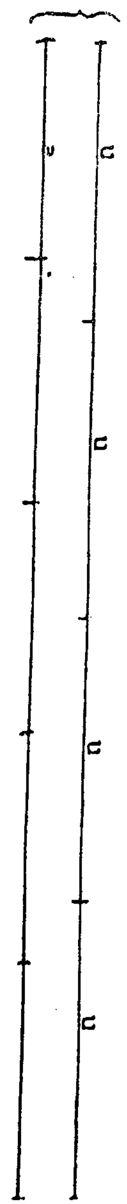
Ils s'arrêtent et disent qu'il faut 5 b pour faire 4 u

donc 4 u = 5 b

donc b = 4/5 de l'unité (d'après la définition du rationnel qu'ils connaissent)

La longueur "b" est donc bien égale à "a" = 4/5 de u.

1ère méthode proposée (commensuration)



Messages	Mesurage (désignation) (1er cas) (Mα) commensuration	Mesurage (désignation) (2ème cas) (Mβ) partage de l'unité	Construction (1er cas) commensuration	Construction (2ème cas) partage de l'unité
1/5 Les enfants qui ont procédé de la même manière pour 1/8, 1/4, ... le disent	u report. (utilisation, essai de la petite baguette)		u découpage par tâtonnement, d'une baguette. report, essais jusqu'à coïncidence. u	
2/5 Les enfants essaient de reconnaître leur manière de procéder dans ces différentes méthodes pour 2/8 ; 2/4 ...	(essais par tâtonnement) report.	(petite baguette 1/5) 2/5 report 2 fois dans la baguette plus grande.	u u Découpage par tâtonnement, essai report.	utilisation de la petite baguette 1/5 1/5 x 2 = 2/5 report 2 fois

PROBLEMES

1. Un marchand de tissu a vendu successivement la moitié d'une pièce de velours, puis le quart de cette même pièce.

1°) Quelle fraction de la pièce lui reste-t-il à la fin de la journée ?

2°) La pièce de velours mesurait 24 mètres, quelle longueur de velours reste-t-il ?

2. Claude a un sac de billes. Au cours d'une partie, il perd successivement $\frac{2}{3}$ de ses billes puis encore $\frac{2}{9}$ de ses billes.

1°) Quelle fraction de ses billes a-t-il perdue ?

2°) Quelle fraction de ses billes lui reste-t-il ?

3°) Au début du jeu, il avait 63 billes dans son sac.
Combien en a-t-il à la fin de la partie ?

Remarques sur l'activité 4.

1. Cette activité peut se dérouler en 2 temps :

A) choix d'un problème par l'enseignant.

a) lecture silencieuse du texte par les enfants.

b) explication éventuelle de la situation (proposer aux enfants de la représenter par un croquis)

c) Recherche individuelle des enfants

d) correction, explication et rédaction collectives.

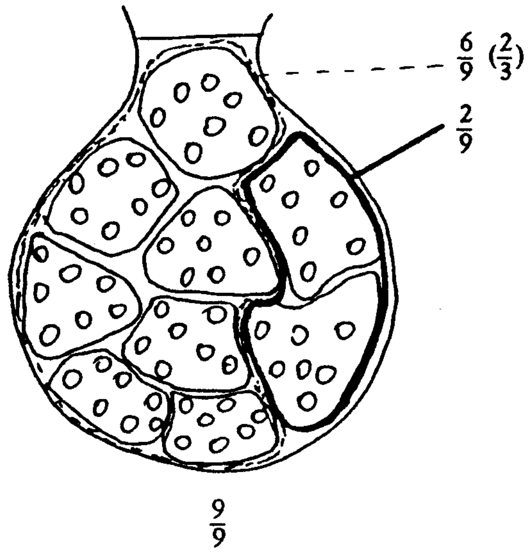
B) recherche et rédaction individuelles de l'autre problème.

2. Le problème n° 2 est beaucoup plus difficile pour les enfants que le n° 1.

En effet, ils ne reconnaissent, dans cette situation, aucune des significations des fractions qu'ils ont vues jusqu'alors : épaisseurs de feuilles, désignation d'une capacité, d'un poids, longueurs de baguettes.

.../...

La deuxième difficulté est qu'ils ont beaucoup de mal à comprendre qu'ici, l'unité est le sac de billes. Il est nécessaire de les aider en représentant ce sac de billes qu'ils doivent considérer globalement.



MODULE 4 :

ORDRE DES RATIONNELS

4.1 - EVALUATION D'UNE SOMME

4.1.1 - Première phase : Rappel collectif : 10 minutes.

"Vous avez construit des fractions pour désigner des épaisseurs de feuilles.
- Vous avez aussi utilisé ces fractions pour désigner d'autres grandeurs - lesquelles ?
(longueurs, capacités, poids)
- Si je vous donne la fraction 11/3 et l'unité "mètre", que désigne 11/3 m ? (une longueur)
- Pouvez-vous dire si cette longueur est grande, petite ?
- Montrez à peu près la longueur que désigne cette fraction.
- Et 11/3 mm ? est-ce que c'est plus grand que 2 mm ? (il est souhaitable que l'on écrive 2 en fraction)
- Et 322/5 de 1 ? Est-ce que cela fait beaucoup de litres, ou peu de litres ? ou moins d'un litre ? (écrire 1 l, 3 l, ... en fraction).

Ces nombres ne sont pas très faciles à utiliser surtout pour les évaluations, pour les comparaisons et pour les sommes. Depuis la Révolution, on ne les emploie plus dans la pratique des métiers et on les a remplacés par d'autres nombres. Cependant, pour bien comprendre comment fonctionnent les fractions, il faut savoir s'en servir un peu. Leur usage nous permettra surtout de fabriquer ces nouveaux nombres que nous voulons construire.
Pour cela, nous allons jouer à un jeu qui ressemble au "compte est bon".

4.1.2 - 2ème phase : Introduction au jeu. Evaluation d'une somme. Comment décider qui gagne (20 minutes)

Consigne : "Voici des fractions sur le tableau :

22/3 ; 17/5 ; 15/2 ; 7/10 ; 17/3 ; 55/10 ; 3/2 ; 48/5 ; 1/3 ; 8/5

.../...

Je choisis 3 de ces fractions dont vous allez calculer la somme.

Par exemple : 17/5, 15/2, 8/5".

Déroulement : Tous les enfants calculent individuellement la somme et l'un d'entre eux vient faire la correction au tableau.

$$\frac{17}{5} + \frac{15}{2} + \frac{8}{5} = \frac{125}{10}$$

b) le jeu.

Consigne : "Pour jouer maintenant, je vais vous demander d'évaluer cette somme avant de faire le calcul. Pour cela, vous choisirez entre les 3 nombres que je vous donnerai, celui qui vous paraîtra être le plus près du résultat.

Par exemple, pour la somme que nous venons de calculer, j'aurais pu vous proposer ces 3 nombres :

$$\frac{115}{10} \quad 12 \text{ et } \frac{38}{3}$$

Choisissez-en un (sans essayer de faire les calculs) que vous écrivez sur votre cahier.

Qui a gangé à la devinette ? Comment savoir qui a gagné ?

Déroulement :

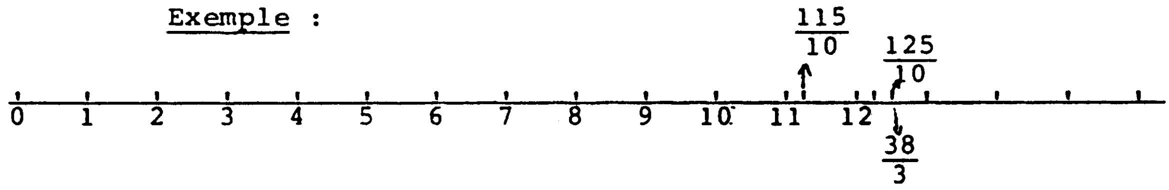
L'enseignant laisse les enfants réfléchir et discuter. Assez rapidement, il réduisent au même dénominateur les fractions

$$\frac{125}{10} = \frac{375}{30} \ ; \ \frac{115}{10} = \frac{345}{30} \ ; \ 12 = \frac{360}{30} \ ; \ \frac{38}{3} = \frac{380}{30}$$

Ils proposent généralement de faire la différence des numérateurs : il faut alors leur faire remarquer que c'est la différence entre les fractions et, pour cela, il peut être utile de faire placer les longueurs correspondantes sur un même segment et y repérer les différences.

.../...

Exemple :



$\frac{115}{10}$ est à $\frac{30}{30}$ de $\frac{125}{10}$ (c'est-à-dire à 1) et il est plus petit

12 est à $\frac{15}{30}$ de $\frac{125}{10}$ et il est plus petit.

$\frac{38}{3}$ est à $\frac{5}{30}$ de $\frac{125}{10}$ et il est plus grand.

La meilleure évaluation de la somme des 3 fractions choisies est $\frac{38}{3}$.

4.1.3 - 3ème phase : Le jeu : évaluation de sommes : la règle du jeu (30 minutes)

Consigne : "Maintenant, voici la règle du jeu :
"A chaque partie, je vous donnerai seulement 2 fractions ou 1 fraction et un nombre naturel (au lieu de 3) pour évaluer la somme. Puis je mettrai une croix sous chacune des fractions choisies pour faire la somme (une des fractions de la liste peut servir dans plusieurs sommes).

Déroulement : Il est souhaitable de faire plusieurs parties.

1ère partie : Evaluation : 5 et $\frac{79}{15}$

Somme à évaluer :

$\frac{1}{3} + \frac{3}{2} + \frac{17}{5}$

2ème partie : Evaluation : $\frac{150}{10}$ et $\frac{81}{5}$

Somme à évaluer :

$\frac{3}{2} + \frac{48}{5} + \frac{55}{10}$

3ème partie : Evaluation : $\frac{250}{20}$ et 11

Somme à évaluer : $\frac{7}{10} + \frac{48}{5} + \frac{8}{5}$

.../...

<u>4ème partie</u> : Evaluation : 9 et $\frac{25}{3}$

Somme à évaluer : $\frac{22}{3} + \frac{3}{2} + \frac{1}{3}$

4.1.4 - Résultats.

Au cours de cette activité, les enfants ont appris (et savent presque tous) encadrer une somme de fractions entre 2 fractions et touver la distance de 2 fractions.

4.2 - "LE COMPTE EST DEDANS"
Distance de deux fractions

4.2.1 - Première phase

a) Reprise du jeu de l'activité précédente (4.1.3) avec de nouvelles règles (encadrement d'une fraction entre 2 naturels, définition de l'intervalle)

Les enfants jouent une partie de la même manière que dans la séance précédente (équipe contre équipe avec 1 représentant). Lorsque les sommes sont données et l'évaluation vérifiée, l'enseignant demande aux enfants : "Est-ce que cette fraction est grande petite ? Si elle désigne une longueur, pourriez-vous la construire ou la montrer entre deux doigts quand je vous donnerai une unité ?"

b) Nouvelle consigne.

"Nous allons rejouer, mais au lieu de trouver le bon résultat d'une somme, vous allez en chercher deux entre lesquels vous pensez que se trouve le résultat :
- un nombre dont vous êtes sûr qu'il est plus petit
- un nombre dont vous êtes sûrs qu'il est plus grand

Exemple :

"Si la somme des fractions proposées est 125/60, quelles pourraient être vos réponses ?

$$. < 125/60 < .$$

Il y en a beaucoup. Trouvez en d'autres.

Information apportée par l'enseignant.

La maîtresse choisit une réponse donnée, par exemple $1 < 125/60 < 4$ et demande : "n'y-a-t-il qu'une fraction entre ces nombres ? Pouvez-vous en écrire d'autres ?

Toutes les fractions qui se trouvent entre ces deux nombres forment un "intervalle".

.../...

Remarque : Il est clair que les enfants peuvent théoriquement à ce moment-là savoir si une fraction est ou non, dans un intervalle, mais ils ne savent pas encore placer une fraction dans un intervalle ou s'il y en a beaucoup ou non.

4.2.2 - Deuxième phase : Premier jeu et élaboration des nouvelles règles. Recherche d'un intervalle dans lequel se trouve une somme de 2 ou plusieurs fractions. Comparaison des intervalles.

a) Consigne : L'enseignant écrit sur le tableau la somme suivante de fractions : (toujours choisies parmi la suite proposée dans l'activité précédente)

$$48/5 \quad + \quad 22/3 \quad + \quad 8/5$$

et demande aux enfants :
"vous allez trouver un intervalle dans lequel se trouve votre résultat et nous vérifierons ensemble".

b) Déroulement : Tous les enfants cherchent sur leur cahier (chacun travaille pour son équipe). Lorsque tous ont trouvé une réponse, ils se réunissent par équipe pour choisir - après discussion - l'un des intervalles trouvés. Ils désignent un représentant qui va écrire cet intervalle sur le tableau.

c) Elaboration des règles du jeu.

Après une correction collective - comparaison de la somme avec les intervalles donnés par les représentants des deux équipes - il faut savoir qui a gagné :
Les enfants proposent des critères en citant d'ailleurs le jeu "le compte est bon".

L'enseignant dit :"on pourrait appeler ce jeu "le compte est dedans" et on retient finalement

la première règle : si le résultat est dans l'intervalle proposé, l'équipe gagne 1 point.
la deuxième règle : si les 2 équipes ont donné un intervalle juste, celle qui a donné l'intervalle le plus petit gagne 1 point de plus.

.../...

4.2.3. Troisième phase : Nouveau jeu, essai des nouvelles règles. "Le compte est dedans". Recherche d'une stratégie qui permet d'évaluer très vite un résultat.

a) Consigne : "vous allez jouer de nouveau mais cette fois-ci je laisserai très peu de temps pour proposer un intervalle. Essayez de trouver une stratégie qui vous permettra d'évaluer très vite ce résultat, sans faire de calculs. Vous écrirez l'intervalle sur votre cahier et dès que je taperai dans les mains, un représentant ira écrire cet intervalle au tableau.

Voici la somme :

$$1/3 + 3/2 + 15/2$$

b) Déroulement : Chaque enfant cherche individuellement. Au bout de 30 secondes environ, l'enseignant fait poser les crayons et envoie un élève de chaque équipe au tableau écrire l'intervalle qu'il a trouvé (la concertation aura lieu entre les parties).

Pour vérifier si cet intervalle est juste, c'est l'enseignant qui donnera le résultat de la somme (calculé à l'avance).

$$1/3 + 3/2 + 15/2 = 56/6$$

Remarque : Cette pratique a pour but de ne pas contamment reproduire, avec les enfants, la démarche de calcul qu'ils doivent remplacer par une stratégie d'évaluation plus rapide.

Pour que celle-ci apparaisse, il faut jouer un grand nombre de parties et très vite.

On peut alors proposer une somme comme :

$$6/6 + 8/4 + 12/5$$

qui fournit aussitôt :

$$1 + 2 \leqslant S \leqslant 1 + 2 + 2$$
$$\text{ou} \quad 1 + 2 + 1 \leqslant S \leqslant 1 + 2 + 3$$

On peut aussi augmenter le nombre des termes de la somme

Exemple : $1/2 + 3/3 + 5/2 + 10/2$

.../...

4.3.1- Validation de la stratégie mise en place lors du jeu précédent

a) Consigne : "Sauriez-vous prouver que ce moyen d'encadrer une somme est correct ? vous allez réfléchir un petit momment et ceux qui trouvent une preuve la soumettront à leurs camarades".

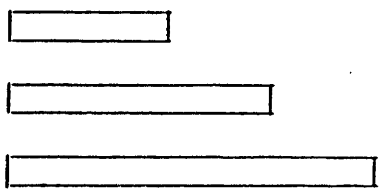
b) Déroulement : Les enfants cherchent individuellement sur leur cahier.

Ceux qui trouvent ou croient trouver la preuve demandée, viennent à tour de rôle au tableau la proposer à leurs camarades.

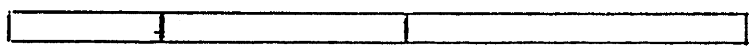
Une discussion peut alors s'engager entre les enfants les uns approuvant la preuve proposée, les autres la réfutant.

c) Vérification possible pour les enfants (si personne ne trouve)

1°) L'enseignant découpe 3 baguettes dont les longueurs sont désignées par des fractions :



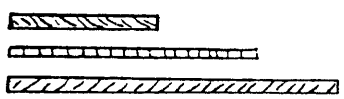
Pour faire la somme, on les met bout à bout.



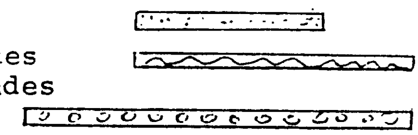
S_1

Puis l'enseignant découpe 3 baguettes plus petites que chacune d'elles et 3 baguettes plus grandes :

3 baguettes plus petites



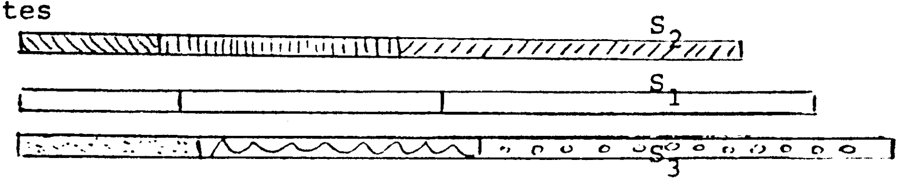
3 baguettes plus grandes



On les met bout à bout et on constate que

les 3 petites baguettes

les 3 plus grandes



$S_2 < S_1 < S_3$.

.../...

4.3.2 - Résultats.

Tous les enfants ont compris que l'on peut encadrer une somme entre deux entiers. Quelques-uns seulement savent trouver un intervalle par la stratégie indiquée dans la leçon.

Note : Ces 3 activités sont très difficiles pour les enfants et il est possible d'en faire l'économie si le niveau de la classe ne le permet pas.

4.4 - ENCADREMENT D'UN RATIONNEL DANS N

4.4.1 - Première phase : "Initiation au jeu"

a) Consigne et jeu : "Nous allons apprendre un jeu qui va se jouer entre deux équipes. Mais pour bien en comprendre les règles, 2 élèves vont venir d'abord jouer devant toute la classe.

Le joueur A choisit une fraction comprise entre 0 et 10 (sans la dire à haute voix). Il l'écrit sur un papier qu'il met dans sa poche.

Le joueur B cherche à deviner dans quel intervalle de naturels consécutifs se trouve cette fraction. Pour cela, il pose des questions. Par exemple : "Est-ce que ta fraction se trouve entre 7 et 9 ?"

A n'a le droit de répondre que par "oui" ou par "non". B pose des questions jusqu'à ce qu'il ait trouvé les 2 entiers consécutifs entre lesquels se trouve la fraction. A ce moment là, A montre son papier et tous les enfants comparent sa fraction à l'intervalle trouvé par B.

Vous allez jouer à ce jeu, mais maintenant il opposera 2 équipes A et B formées chacune d'une moitié de classe (L'enseignant constitue rapidement les équipes).

b) Déroulement du jeu.

Une équipe choisit une fraction que tous les enfants de l'équipe écrivent sur leur cahier de brouillon. Les enfants choisissent un représentant qui va jouer au tableau pour son équipe. Ce sont les deux représentants qui s'interrogent et répondent tour à tour aux questions. Cependant, ils peuvent se faire aider par leur équipe (par une discussion, soit avant le démarrage d'une partie, soit à la fin, si les équipes le demandent et sont d'accord). L'équipe qui aura trouvé la pre-

.../...

mière l'intervalle de 1 dans lequel se trouve la fraction de l'autre a gagné.

Remarques : 1°) les intervalles choisis par les 2 représentants doivent être écrits sur le tableau de manière à ce que tous les enfants les voient : le tableau est partagé en 2 parties, une pour chaque équipe.

- Par exemple, si la fraction choisie par l'équipe B est 25/30 et si le représentant de l'équipe A demande : "est-ce que votre fraction est entre 0 et 7 ?", il écrit :

Equipe A		Equipe B
[0 ; 7[	oui	
[0 ; 4[	oui	
~~[2 ; 4[~~	non	

et l'adversaire répond : "oui".

Si l'enfant avait demandé : "est-ce que votre fraction est entre 5 et 10 ?", il aurait écrit [5 ; 10[et l'équipe adverse aurait répondu "non". Alors l'enfant barre l'intervalle :

~~[5 ; 10[~~

- Si la fraction choisie est 25/5, l'intervalle de 1 dans lequel elle se trouve est désigné : [5;6[et dans ce cas, l'équipe adverse répond qu'elle est "attrapée" parce qu'elle se trouve sur le premier point (5) qui désigne l'intervalle.

- Si la fraction choisie est 30/5 et que l'intervalle demandé soit [5 ; 6[, l'équipe adverse répond "non". Elle sera attrapée s'ils demandent l'intervalle [6 ; 7[

Si une fraction est encadrée, l'équipe qui l'a encadrée marque 1 point.

Si une fraction est "attrapée" l'équipe qui l'a attrapée marque 2 points.

2°) Apparition de stratégies dans le choix des intervalles.

Ce premier jeu par équipe permet la mise en place

.../...

de stratégies intéressantes dans le choix des intervalles. En effet, à la première partie, les représentants posent généralement des questions au hasard qui, très souvent, se recoupent et font perdre leur équipe.

Exemple : 1ère question : "Est-ce que la fraction est entre [5 et 9[?"

2ème question : "Est-ce que la fraction est entre [3 et 9[?"

Ce qui déclenche parmi les enfants d'une même équipe des discussions très vives.

Très souvent, dès la deuxième partie, ils procèdent par découpage binaire :

Exemple : "Est-ce qu'elle est entre [0 et 5[? Si le représentant de l'autre équipe répond "non", ils évitent de demander : "est-ce qu'elle est entre 5 et 10 ?"comme cela se produit souvent au début du jeu. Il est fréquent qu'après 3 ou 4 parties entre équipes, les enfants arrivent à situer la fraction en un nombre minimum de questions.

c) Remarques :

1°) Si la consigne, qui est longue, n'a pas été bien comprise, le jeu par équipes fournit à l'enseignant l'occasion de l'expliciter mieux, de s'assurer que tous les enfants écrivent bien les intervalles et qu'ils savent tous jouer.

2°) Il faut recommencer plusieurs fois le jeu par équipes pour que tous les enfants en aient bien compris les règles (il est possible de faire 3 ou 4 parties).

3°) Le choix de la fraction en début de partie provoque toujours des discussions intéressantes car il arrive que des enfants proposent une fraction qui n'est pas comprise entre 0 et 10. Ceux qui ne sont pas d'accord sont obligés, pour refuser la fraction proposée, de prouver aux autres qu'elle n'est pas située entre 0 à 10.

.../...

4°) Très vite, les enfants évitent de choisir des fractions que l'on peut "attraper" car ils ne veulent pas faire gagner 2 points à leurs adversaires.

4.4.2 - 2ème phase : jeu 2 par 2.

a) Présentation.

Après 3 ou 4 parties de jeu par grandes équipes, l'enseignant place les enfants par groupes de 4 afin qu'ils jouent 2 contre 2.

b) Déroulement.

Chaque groupe de 2 note sur une feuille, d'une part la fraction qu'il choisit, d'autre part, les intervalles qu'il demande aux adversaires pour localiser leur fraction.

L'enseignant n'intervient dans cette phase que si les enfants font appel à lui, soit pour arbitrer un conflit, soit pour apporter des précisions ou des renseignements.

4.4.3 - Troisième phase : Synthèse collective (15 à 18 mn)

a) Présentation.

Pendant la phase précédente, l'enseignant a préparé le tableau suivant au tableau noir :

Fraction attrapée		Fraction encadrée	
fraction choisie	intervalle demandé	Fraction choisie	intervalle demandé

.../...

Il interrompt le jeu par équipe de 4 au bout de 5 à 8 mn et demande aux enfants :

"qui a attrapé une fraction ?"

puis "qui a encadré une fraction ?"

Il inscrit à mesure les résultats : les fractions "encadrées" ou "attrapées" sont notées ainsi que l'intervalle demandé. Tous les enfants vérifient ces résultats au fur et à mesure et corrigent s'il le faut, sous la conduite de l'enseignant.

4.4.4 - Résultats.

A la fin de cette séance, tous les enfants savent jouer et presque tous réussissent à localiser des fractions dans des intervalles de 1.

MODULE 5 :
LES NOMBRES DECIMAUX, CONSTRUCTION

5.1 - ENCADREMENTS D'UN RATIONNEL PAR DES RATIONNELS : FRACTIONNEMENT D'UN INTERVALLE.

5.1.1. Première phase

a) Présentation du problème et rappel du jeu de la séance précédente :(10 mn)

"Au cours de la séance précédente, nous avons appris comment on peut localiser une fraction en cherchant entre quels entiers elle se trouve.

Pensez-vous qu'il peut être utile de savoir entre quels entiers une fraction se trouve ? Pourquoi ?"

Exemples : 1) - L'encadrement peut servir à dire si le nombre est grand ou petit

- La comparaison aux entiers est utile dans les mesures, dans l'évaluation.

2) L'encadrement est-il utile pour comparer 2 fractions ? par exemple $\frac{156}{7}$ et $\frac{149}{6}$.

1ère méthode de comparaison : La réduction au même dénominateur.
2ème méthode de comparaison : L'encadrement entre 2 entiers.
Quelle est la méthode la plus courte ?

3) L'encadrement permet aussi d'estimer la somme de plusieurs fractions. Quel encadrement peut-on donner de la somme quand on connaît l'encadrement de chaque fraction.

Remarque : Si les séances 14, 15 et 16 n'ont pu être faîtes à cause de leur difficulté ; l'enseignant n'évoquera pas le (3) (Estimation de la somme).

b) Consigne : "Nous allons refaire le jeu de la séance précédente. Les équipes A et B vont choisir une fraction et désigner un représentant qui viendra au tableau poser les questions".

.../...

c) Déroulement : Le jeu se déroule exactement de la même manière (équipe A contre équipe B avec un représentant pour chacune d'elles) jusqu'à ce que les fractions soient "encadrées" ou "attrapées". Mais les fractions restent cachées et à ce moment-là, l'enseignant arrête le jeu.

5.1.2. Deuxième phase : 10 mn. : Recherche d'un intervalle plus petit.

a) Présentation et consigne : "Vous venez d'encadrer les fractions dans un intervalle de 1 (l'intervalle [3;4[par exemple).

Pensez-vous qu'il n'y a que la fraction cherchée dans cet intervalle ?

3 4

Trouvez-en d'autres.

b) Déroulement : L'enseignant laisse les enfants chercher individuellement ou par groupes de 2, pendant une ou deux minutes.

Puis il leur demande de venir écrire (ou il écrit lui-même) sur le tableau les fractions qu'ils ont trouvées et qui se situent aussi dans cet intervalle.

Les enfants constatent qu'il y en a beaucoup et que l'intervalle de 1 qu'ils ont trouvé ne permet pas de situer avec précision la fraction cherchée. Ils comprennent alors - certains même le disent - qu'il va falloir trouver un intervalle plus petit.

5.1.3. Troisième phase : Recherche d'intervalles de plus en plus petits. (45 mn.

a) Consigne : "Nous allons ajouter une nouvelle règle au jeu : pour gagner, il faudra que la fraction soit encadrée dans l'intervalle le plus petit possible. Vous allez donc essa-

.../...

au moment de l'arrêt

yer de trouver des intervalles plus petits et de les désigner".

b) Déroulement :

. Les enfants travaillent par groupes de 2 ou 3 (il y en a 4 ou 5 par équipe). Certains groupes ont l'idée d'écrire les bornes de l'intervalle en fractions (par exemple $\frac{6}{2}$ et $\frac{8}{2}$ s'il s'agit de l'intervalle [3;4[. Mais il arrive aussi que beaucoup d'enfants n'y pensent pas en aient des difficultés. Pour éviter le découragement, l'enseignant peut le leur suggérer au bout d'un moment de recherche, ce qui relance l'intérêt.

Dès qu'ils ont trouvé et désigné un intervalle plus petit, ils se réunissent de nouveau en deux grandes équipes A et B dans lesquelles chaque groupe propose l'intervalle qu'il a trouvé. Les enfants d'une même équipe doivent donc discuter et se mettre d'accord pour choisir, parmi les 4 ou 5 intervalles proposés, celui qu'ils jugent le plus petit.

Alors, les deux représentants des équipes reviennent au tableau et le jeu continue :

"est-ce que votre fraction est entre :

$[\frac{6}{2}$ et $\frac{7}{2}[$? (par exemple)

. Pour répondre à la question posée, les enfants demandent généralement à se réunir de nouveau.

c) Remarques :

1°) Pour répondre à cette première question, ils font souvent appel à l'enseignant car ils ne trouvent pas toujours ou ne sont pas tourjours d'accord. Certains pensent à réduire les fractions au même dénominateur (la fraction qu'ils ont choisie et celles qui sont proposées comme bornes de l'intervalle), les autres répondent au hasard.

Pour entretenir le plaisir du jeu et le désir de continuer, l'enseignant peut les aider en leur donnant quelques indications (suggérer la réduction au même dénominateur, par exemple, s'ils n'y ont pas pensé).

.../...

2°) Il est rare qu'au cours de cette séance, ils puissent proposer plus de 2 intervalles. En effet, les calculs importants (qu'ils ne maîtrisent pas encore très bien) prennent beaucoup de temps car il faut :
- qu'ils trouvent des intervalles plus petits et les désignent
- qu'ils cherchent ensuite si les fractions se trouvent dans ces intervalles, ce qui nécessite des réductions au même dénominateur souvent compliquées
- enfin, pour savoir quelle est l'équipe qui a gagné, qu'ils comparent les deux derniers intervalles désignés.

Aussi peu d'enfants sont-ils capables, à la fin de cette première séance de réduire aisément des intervalles et de dire si une fraction se trouve dans un intervalle donné.

Pour une meilleure compréhension du jeu, et pour que tous les enfants aient envie de participer, il est donc souhaitable d'y consacrer une ou même deux autres séances suivant les stratégies utilisées.

5.1. 4. Quelques stratégies observées.

1°) Il est rare qu'au cours du premier jeu, tous les enfants écrivent les bornes des intervalles avec des fractions à dénominateur 10, 100, 1000... C'est pourquoi les calculs sont longs et difficiles.

En effet, il est arrivé qu'à la première séance une équipe propose l'intervalle : $[\frac{6}{40} ; \frac{7}{40}[$ pour encadrer une fraction qui se trouve entre 0 et 1. Et comme cette fraction est $\frac{12}{37}$, il est facile de comprendre les difficultés de calculs que rencontrent les enfants !

2°) Au cours d'une première séance, l'une des équipes (A), a désigné les intervalles avec des fractions de dénominateur 64 parce qu'elle a fait des découpages binaires : un groupe de 2 de cette équipe avait d'abord découpé l'intervalle en 2 puis en 4 en le désignant.

Pendant la concertation en équipe, les autres en-

.../...

fants ont dit : "mais on pourrait encore faire des intervalles plus petits en continuant à partager en 2 !" et ils ont successivement essayé des découpages en 8 puis en 16, puis en 32 et ils se sont arrêtés à 64, persuadés que leur intervalle serait plus petit que celui de l'autre équipe !

Dans le même temps l'autre équipe (B) a proposé des intervalles désignés par des fractions à dénominateur 1000. Pourquoi ?

Parce qu'un groupe de 2 fillettes de cette équipe avait d'abord découpé l'intervalle de 1 en 10. (pour faire comme sur leur règle ont-elles dit !). Puis, pour faire toujours comme sur leur règle, elles ont désigné les intervalles en centièmes puis en millièmes. Leurs calculs ont été vite faits !

Lors de la concertation en équipe, les trois autres groupes qui, eux, avaient fait des découpages de l'unité en 10, ou 4 ou 2, ont adopté aussitôt le découpage en millièmes.

Lorsque les représentants de ces deux équipes sont allés proposer leurs intervalles les enfants de l'équipe A ont pu répondre très vite. Par contre ceux de l'équipe B, qui avaient proposé des intervalles en millièmes, ont dû faire des calculs longs et difficiles, ce qui leur a fait dire, à la fin, aux autres :
"la prochaine fois, trouvez quelque chose de plus simple. Posez nous des questions faciles comme les nôtres !" L'enseignant est intervenu alors pour demander pourquoi c'était plus facile de répondre aux questions posées par l'équipe B qu'à celles posées par l'équipe A. Tous ont compris qu'avec des fractions à dénominateur 10, 100, 1000,... les calculs étaient beaucoup plus faciles et d'un commun accord, ils ont demandé à rejouer le lendemain ! Au cours de la 2ème séance, les deux équipes ont fait toutes les deux des découpages en 100, 1000, 10.000... mais ce jour-là, l'une des équipes avait choisi la fraction $\frac{14}{10}$ (qui a été "attrapée" très vite) et l'autre fraction $\frac{83}{9}$! ce qui a encore compliqué les calculs de l'équipe adverse et retardé ses réponses ! (L'activité suivante décrira les réactions des enfants face à ce problème).

.../...

5.1.5. Résultats.

A la fin de cette activité, les enfants ont compris :
- qu'on peut localiser une fraction dans un intervalle plus petit que 1.
- que dans cet intervalle, il y a beaucoup de fractions
- que l'on peut réduire cet intervalle.

Mais suivant les intervalles ou les fractions choisis, plus ou moins d'enfants maîtrisent les calculs et sont capables de trouver aisément un intervalle plus petit.

5.1.6. Note :

Si le jeu, ainsi décrit, est trop difficile et trop long (cela arrive avec certaines classes), il est plus simple de faire jouer les équipes, l'une après l'autre :
- au lieu, pour chaque équipe, de poser des questions et de répondre, en même temps, à celles posées par l'équipe adverse, une seule équipe choisit d'abord une fraction (l'équipe A par exemple). L'autre, (l'équipe B) pose les questions qui vont lui permettre de trouver la fraction choisie par A.
L'équipe A, elle, répond à ces questions.
- ainsi, pour une équipe, il faut seulement trouver des intervalles, et pour l'autre, seulement répondre aux questions.
- Dans ce cas, il est nécessaire de fixer un nombre de questions pour chacune des équipes (de 3 à 5 par exemple) et de comparer les derniers intervalles proposés.
Le jeu recommence : c'est l'équipe B qui choisit la fraction et l'équipe A qui propose les intervalles.

.../...

5.2 - ENCADREMENTS D'UN RATIONNEL DANS Q :
- RACCOURCISSEMENT DES INTERVALLES
- FILTRES DECIMAUX

5.2.1. Première phase : Reprise du jeu de la séance 20.

a) Consigne : La même consigne est reprise.

b) Déroulement : Le jeu se déroule de la même manière (Si les 2 fractions choisies à la séance précédente n'ont pas encore été attrapées, les enfants désirent continuer ce même jeu).

Il faut cependant distinguer 2 cas :
1°) Les enfants ont fait, dans la séance précédente, des découpages en dixièmes, centièmes, millièmes, etc...
2°) Ils n'ont pas fait ces découpages et proposent encore des intervalles avec des fractions à dénominateur quelconque.

Chaque cas est différent aussi si la fraction choisie est décimale ou non.

Premier cas : découpages décimaux.

Le jeu se déroule plus rapidement et est beaucoup plus passionné car les calculs se font plus vite et ne sont pas une entrave au déroulement. Il est possible alors de faire plusieurs parties.

La fraction choisie est décimale : elle va être très vite attrapée et les enfants vont vouloir arrêter le jeu et recommencer une autre partie.

La fraction n'est pas décimale : Les enfants, qui commencent à bien maîtriser les calculs, demandent des intervalles de plus en plus petits (généralement, ils vont jusqu'au 1/10000 sans se lasser). Mais à ce moment-là, l'équipe qui cherche la fraction, commence à se poser des questions, à faire des remarques (l'autre équipe jubile).

C'est ce qui s'est passé pour la fraction $\frac{83}{9}$ (cf. séance précédente) qui n'a pu être "attrapée" malgré des

.../...

intervalles très petits :

Les enfants ont dit : "elle n'a sûrement pas un dénominateur avec des zéros, ça doit être 7 ou 8 ou 9 !" et ils ont voulu arrêter et voir la fraction - ce qui a provoqué une discussion très animée. Certains ont dit que l'on ne l'attraperait jamais "parce que 10, 100, 1000... ne sont pas des multiples de 9". D'autres ont affirmé le contraire en disant que ce serait sûrement très long mais qu'à force de trouver des intervalles de plus en plus petits on finirait bien par l'attraper.

Le problème est resté ouvert.

Les réactions des enfants avaient été exactement les mêmes l'année précédente lorsque l'une des fractions choisies était : $\frac{22}{7}$.

Deuxième cas : découpages non décimaux.

Si aucune des deux équipes n'a pas encore pensé à faire des découpages en dixièmes, centièmes, millièmes... (c'est arrivé une fois), le jeu devient très vite long et pénible. Avant que s'installe une lassitude chez les enfants (voire un découragement bien compréhensible), il est souhaitable que l'enseignant intervienne, arrête le jeu et propose à toute la classe de réfléchir à une nouvelle stratégie : il suggère, par exemple, de trouver des questions (pour désigner les intervalles) qui permettent des calculs plus rapides.

Après un petit moment de réflexion et de discussion collective, si personne ne propose le découpage en dixièmes, centièmes... alors l'enseignant peut proposer un autre jeu dans lequel il joue lui-même contre la classe :

- soit c'est lui qui choisit une fraction qu'il inscrit derrière le tableau et ce sont les enfants qui proposent des intervalles (que chacun écrit sur son cahier de brouillon)

- soit ce sont les enfants qui la choisissent ensemble, l'écrivent sur leur cahier de brouillon et c'est l'enseignant qui pose des questions.

.../...

Dans le premier cas, il interroge quelques enfants, écrit les intervalles proposés sur le tableau et répond uniquement à ceux qui ont choisi des intervalles décimaux. Dans le deuxième cas, il propose lui-même des intervalles - et uniquement avec des fractions à dénominateur 10, 100, 1000... pour encadrer la fraction.

5.2.2. Remarques :

1°) Les enfants reprennent plaisir au jeu et s'aperçoivent vite que l'enseignant a privilégié certains intervalles. Ils en font généralement la remarque en disant qu'"il suffit d'ajouter des zéros", ils voient que le jeu est plus rapide, donc plus intéressant.

2°) Pour maintenir l'intérêt des enfants, on peut apporter quelques variables au jeu :

- les enfants peuvent jouer :

. soit un contre un

. soit deux contre deux.

3°) Il arrive très souvent que la fraction proposée soit une fraction décimale comme $\frac{990}{100}$ par exemple ; les enfants qui encadrent d'abord dans des intervalles en dixièmes trouvent $\frac{99}{10}$. La fraction est attrapée, mais ce n'est pas celle-là qui a été choisie. Les enfants disent alors : "elle est attrapée, mais ce n'est pas celle-là !". Le représentant, aidé de toute son équipe propose alors des fractions égales jusqu'à ce qu'il trouve $\frac{990}{100}$.

5.2.3. Résultats :

A la fin de cette séance, tous les enfants ont compris la nécessité de choisir des intervalles en dixièmes,

.../...

centièmes, millièmes. Ils arrivent facilement :
- soit à attraper une fraction (lorsqu'elle est décimale)
- soit à l'encadrer dans des intervalles très petits (de l'ordre du dix millième ou cent millième).

Enfin, ils ont pris conscience qu'il y a des fractions faciles à attraper, et d'autres non. Certains en ont même désigné spontanément.

* Suivant la difficulté des fractions et des intervalles choisis par les enfants, il est presque toujours nécessaire de poursuivre le jeu sur deux séances (à la demande des enfants, d'ailleurs).

5.3 - REPRESENTATION SUR LA DROITE Q.

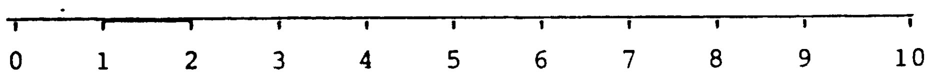
5.3.1. Première phase : 1er jeu (20 minutes)

Consigne : "Aujourd'hui, c'est moi qui vais choisir une fraction que j'inscrirai derrière le tableau. Vous devrez attraper cette fraction en me proposant des intervalles. Je ne répondrai que par "oui" ou "non".

Déroulement : L'enseignant choisit une fraction (145/100 par exemple) l'inscrit derrière le tableau noir. Les enfants travaillent par groupes de 2 ou de 3 et inscrivent les premiers intervalles sur leur cahier. Lorsque l'enseignant s'est assuré que tous les groupes ont choisi un intervalle, il les interroge à tour de rôle.

Les enfants demandent : "Est-ce qu'elle est entre ([0 et 5[...? entre [0 et 3[?..." ainsi de suite jusqu'à ce qu'ils trouvent l'intervalle de 1 ([1 ; 2[pour la fraction choisie ci-dessus)

L'enseignant dessine une droite sur le tableau, représente les différentes divisions et demande à un enfant de venir montrer où se trouve la fraction.



Il dessine cet intervalle [1 ; 2[en couleur. Puis il demande aux enfants de trouver des intervalles plus petits.

A chaque étape la valeur de l'intervalle est indiquée par les enfants (à la demande de l'enseignant).

Le jeu continue jusqu'à ce que soit proposé l'intervalle $[\frac{145}{100} ; \frac{146}{100}[$. L'enseignant dit alors "attrapée !".

Plusieurs stratégies apparaissent :

1°) Les enfants proposent directement des intervalles en cen-

.../...

tièmes : par exemple $[\frac{100}{100} ; \frac{150}{100}[$

puis progressivement $[\frac{100}{100} ; \frac{125}{100}[$... ainsi de suite jusqu'à

$[\frac{145}{100} ; \frac{146}{100}[$.

2°) Ils proposent d'abord des intervalles en dixièmes.
Par exemple :

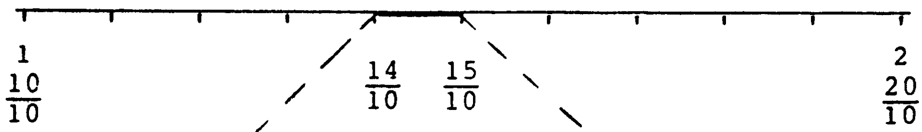
$[\frac{10}{10} ; \frac{15}{10}[$ encadrée

$\cancel{[\frac{10}{10} ; \frac{13}{10}[}$ (l'enseignant barre)

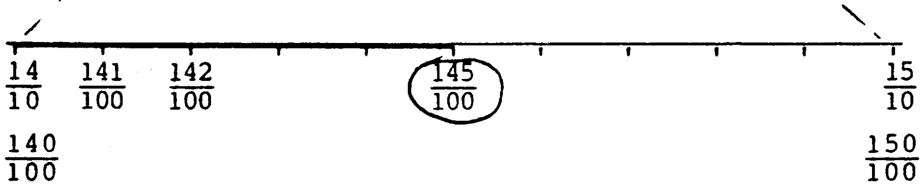
$\cancel{[\frac{13}{10} ; \frac{14}{10}[}$

$[\frac{14}{10} ; \frac{15}{10}[$ encadrée.

A ce moment-là, ils proposent des centièmes. Chaque fois que les enfants proposent un nouveau découpage, l'enseignant leur demande de venir au tableau écrire les bornes en fractions.



A ce stade, les enfants se rendent compte qu'il est très difficile de partager l'intervalle $[\frac{14}{10} ; \frac{15}{10}[$ en 10 parties égales et proposent un agrandissement de cet intervalle qu'ils découpent en 10 parties égales. A ce moment encore, les bornes



sont marqués en centièmes (par un enfant) ainsi que les graduations intermédiaires.

Ils font de nouvelles propositions :

$\cancel{[\frac{140}{100} ; \frac{142}{100}[}$ $\cancel{[\frac{144}{100} ; \frac{145}{100}[}$

$\cancel{[\frac{142}{100} ; \frac{144}{100}[}$ $[\frac{145}{100} ; \frac{146}{100}[$ attrapée.

.../...

5.3.2. <u>Placement sur la droite</u> (15 minutes)

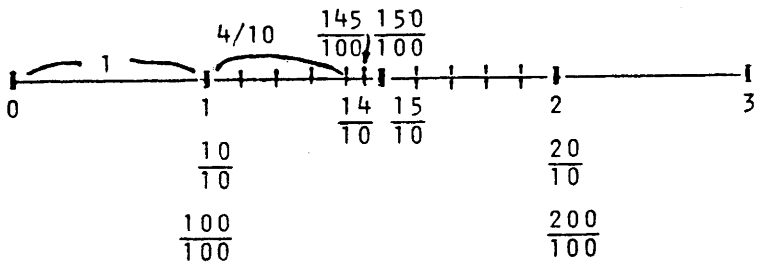
a) <u>Consigne</u> : "Nous allons supposer que cette fraction $\frac{145}{100}$ désigne la longueur d'un ruban que nous tracerons en rouge. Si je place ce ruban le long d'une droite graduée de 0 à 10, $\frac{145}{100}$ désigne aussi le point où arrive l'extrémité du ruban sur la droite.

Nous allons placer exactement cette extrémité, c'est à dire $\frac{145}{100}$".

b) <u>Déroulement</u> : C'est une pbase collective. L'activité se déroule très rapidement sur le mode "questions-réponses".

Sur la droite dessinée au tableau, un enfant vient colorier l'intervalle [0,1[en rouge, puis propose de partager l'intervalle [1,2[en 10, ce qui est fait aussitôt (soit par l'enseignant soit par lui). Les bornes sont marquées en fractions comme cela a été fait dans la première phase (paragraphe c). Il continue le trait rouge jusqu'à $\frac{14}{10}$ puis dit "il faut encore découper en 10 pour avoir des centièmes".

L'enseignant lui demande ce qu'il faut découper en 10 et l'enfant montre l'intervalle $[\frac{14}{10} ; \frac{15}{10}[$ et marque la fraction $\frac{145}{100}[$. Il trace enfin en rouge l'intervalle $[\frac{140}{100} ; \frac{145}{100}[$



L'enseignant demande alors :

"Pour mesurer ce ruban, combien faut-il d'unités ?

combien de 1/10 à patir de 1 ?

combien de 1/100 ?

et inscrit sur le tableau

nombre d'unités → 1

nombre de 1/10 → 4 ou 4/10

nombre de 1/100 → 5 ou 5/100

.../...

Il dit alors : "voilà ce que nous avons mesuré :

$$1 + \frac{4}{10} + \frac{5}{100} \text{"}$$

et demande à un enfant de venir faire cette addition au tableau. L'enfant écrit :

$$\frac{100}{100} + \frac{40}{100} + \frac{5}{100} = \frac{145}{100}.$$

Remarque : Les enfants disent très souvent : "on a décomposé la fraction !"

5.3.3. Deuxième jeu : (15 minutes)

a) L'enseignant propose de jouer une autre fois. Pour ce jeu, la fraction choisie doit être un peu différente de la première, par exemple $\frac{975}{1000}$.

Le jeu se déroule exactement de la même manière : la fraction est placée sur la droite puis décomposée :

$$\frac{9}{10} + \frac{7}{100} + \frac{5}{1000}$$

$$\frac{900}{1000} + \frac{70}{1000} + \frac{5}{1000} = \frac{975}{1000}.$$

b) L'enseignant demande ensuite aux enfants de décomposer les fractions qui avaient été attrapées dans l'activité précédente, ici : $\frac{99}{10}$. Chacun écrit sur son cahier :

$$\frac{99}{10} = \frac{90}{10} + \frac{9}{10}$$

$$9u + \frac{9}{10}$$

et place $\frac{99}{10}$ sur la droite.

Remarque : Certains enfants s'aperçoivent alors que la fraction $\frac{83}{9}$ qu'ils avaient aussi choisie dans l'activité précédente, ne peut pas être placée sur cette droite graduée en 1/10, en 1/100 1/1000...

.../...

5.3.4. <u>Troisième jeu</u> : (15 minutes)

a) <u>Consigne</u> : "Pourrait-on maintenant deviner très vite une fraction en posant des questions relatives à sa décomposition ? Vous allez essayer de trouver ces questions".

b) <u>Déroulement</u> : Un élève joue contre ses camarades. Il sort de la classe pendant que les autres choisissent ensemble une fraction qu'ils inscrivent chacun sur leur cahier ($\frac{243}{100}$ par exemple).

L'enfant revient et essaie de poser à tour de rôle à ses camarades des questions qui lui permettront de trouver très vite la fraction. Après quelques tâtonnements et essais infructueux, il demande (aidé quelquefois par l'enseignant) :
"combien y-a-t-il d'unités ?
"combien de 1/10 ?
"combien de 1/100 ? etc..."

Ses camarades doivent l'avertir quand la fraction est attrapée. Il doit alors l'écrire sur le tableau (à l'aide des réponses qu'il a reçues) et la placer sur la droite.

c) <u>Remarques</u> :

1) Les enfants notent les renseignements qu'ils reçoivent de manière très différente.

Voici quelques exemples de notations qui ont été utilisées :

baguettes de 1 → 2
baguettes de 1/10 → 4
baguettes de 1/100 → 3

ou encore : 2 u
4 dix.
3 cent.

ou encore : 2
4/10
3/100

ou encore : 2 4 3 → 2u
l'enfant écrivait à mesure dans l'ordre
4 → $\frac{1}{10}$
3 → $\frac{1}{100}$

.../...

2) L'enseignant n'intervient pas dans ce jeu. Ce sont les enfants qui, de leur place protestent si les réponses données ne sont pas correctes ou si l'enfant qui cherche la fraction se trompe.

3) Le jeu peut recommencer deux ou trois fois, les enfants ne se lassent pas. C'est généralement l'heure qui arrête l'activité.

4) Il est intéressant de changer l'ordre dans lequel les renseignements sont demandés (combien de millièmes ? combien de centièmes ? combien d'unités ?...) afin que les enfants s'aperçoivent que cela n'empêche pas de trouver la fraction.

5) Les fractions choisies par les enfants au cours de cette activité seront relevées par l'enseignant car elles seront utilisées dans l'activité suivante.

5.3.5. Résultats :

Les enfants ont appris à placer des fractions sur une droite graduée. Beaucoup savent les placer vite et sûrement. Quelques-uns ont encore des difficultés.

Ils ont pris conscience que certaines ne pouvaient pas être placées sur une droite graduée en 1/10, 1/100, 1/1000...

A la fin de cette activité, ils savent tous décomposer une fraction et donner le nombre d'unités, de dixièmes, de centièmes...

5.4 - PASSAGE DE L'ECRITURE EN FRACTION DES RATIONNELS DECIMAUX A L'ECRITURE DECIMALE

5.4.1. : Reprise du jeu de l'activité précédente (15 minutes)

a) Consigne : la même consigne est reprise.

b) Déroulement :

Un enfant sort, ses camarades choisissent une fraction qu'il devra trouver en posant les mêmes questions que lors de l'activité précédente.

Mais alors l'enseignant propose de marquer les renseignements demandés dans le tableau suivant (tableau A) qui servira pour chaque jeu.

valeur des intervalles	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{10000}$	
	0	2	3	9		$\frac{239}{1000}$

(Tableau A)

Par exemple, si la fraction choisie est $\frac{239}{1000}$, l'enfant qui demande le nombre d'unités, de dixièmes, de centièmes, de millièmes etc... place 0 dans la colonne 1 , 2 dans la colonne $\frac{1}{10}$, 3 dans la colonne $\frac{1}{100}$, 9 dans la colonne $\frac{1}{1000}$ et il marque la fraction trouvée en face.

Un ou deux autres enfants peuvent jouer encore et inscrire les renseignements et la fraction dans le tableau A.

5.4.2. Ecriture des fractions dans le tableau A (15 minutes)

a) Consigne : "Nous allons marquer dans ce tableau les fractions que vous aviez choisies et devinées dans l'activité

.../...

précédente et que j'ai relevées".

b) <u>Déroulement</u> :

1) L'enseignant envoie plusieurs enfants au tableau, à tour de rôle, afin d'inscrire les fractions du jeu précédent dans le tableau A.

Il fait ensuite marquer d'autres fractions choisies soit par les enfants, soit par lui-même (par exemple

$\frac{325}{100}$; $\frac{1240}{10}$; $\frac{85}{10\ 000}$ etc...)

<u>Remarque</u> : Cette phase est collective. Tous les enfants participent, soit en venant au tableau, soit en faisant des remarques, soit en protestant si une erreur est faite par celui qui vient inscrire les fractions.

Elle doit se dérouler rapidement, comme un jeu.

2) D'autres exemples sont ensuite faits individuellement. L'enseignant dicte les fractions suivantes que les enfants placent dans le tableau qu'ils ont fait sur leur cahier de brouillon.

$\frac{7345}{100}$; $\frac{7345}{10}$; $\frac{7345}{10000}$; $\frac{7345}{1000}$

5.4.3. <u>Passage à l'écriture décimale</u> (15 minutes)

a) <u>apport d'information</u> : L'enseignant écrit sur le tableau (en dehors du tableau A) :

7345

7345

7345

7345

et demande aux enfants s'il s'agit du même nombre. Les enfants répondent que, écrits ainsi hors du tableau A, il s'agit bien du même nombre alors qu'écrits dans le tableau A, ce sont des nombres différents.

Après discussion avec les enfants sur les moyens possibles de savoir distinguer ces nombres, l'enseignant introduit la virgule :

.../...

73,45 - 734,5 - 0,7345 - 7,345

Ils remarquent immédiatement qu'elle est toujours placée après les unités (intervalles de 1).

b) Lecture de ces nombres :

L'enseignant dit aux enfants comment se lisent ces nombres : 73 virgule 45 ou 73 unités 45 centièmes, et en fait lire plusieurs.

c) Exercices individuels de contrôle et d'entraînement (20 minutes).

L'enseignant propose les exercices suivants qui sont faits individuellement par les enfants et corrigés aussitôt. Il peut repérer ainsi tout de suite les enfants qui ont encore des difficultés et les aider.

1°) Ecrire sous forme de nombres à virgule les fractions suivantes :

$$\frac{245}{100} = \qquad \frac{48}{1000} = \qquad \frac{2}{100} = \qquad \frac{7259}{10} =$$

2°) Ecrire sous forme de fractions :

2,5 = 154,75 = 13,525 3,7425

0,1 = 0,01 =

5.4.4. - Résultats :

Presque tous les enfants ont compris et savent écrire les fractions sous forme de nombres à virgule et inversement. Lorsque le nombre est écrit sous la forme d'écriture à virgule, ils savent dire le nombre d'unités, de dixièmes, de centièmes, etc...
Cette activité ne présente guère de difficultés pour eux.

5.5. CONTROLE DES CONNAISSANCES

1) Ecris sous forme d'un nombre décimal :

$\frac{175}{100} =$ $\frac{26}{100} =$

$\frac{2}{5} =$ $\frac{4325}{10} =$

$\frac{17}{20} =$ $\frac{17}{2} =$

2) Ecris sous forme d'une fraction :

4,7 = 154,75 =

13,525 = 0,1 =

0,02 = 12,5 =

3) Ecris les nombres suivants sous forme de 2 fractions égales :

2 = ___ = ___

15 = ___ = ___

4) Place sur une droite les fractions suivantes :

$\frac{25}{10}$; $\frac{28}{50}$; $\frac{75}{50}$

MODULE 6 :
OPERATIONS DANS LES DECIMAUX

MODULE 6 - Activité 1 Séance 26

6.1 - ADDITIONS DES NOMBRES A VIRGULE : "LE COMPTE EST BON"

6.1.1 - Première phase :

a) Présentation de la situation. Consigne :

"Un charpentier doit faire un support en planches pour un chêneau de 2,9 m. de long. Il a quatre planches qu'il ne veut pas toutes monter sur le toit.

Il doit donc choisir celles qui conviennent. Ces planches mesurent respectivement :

1 m 1,57 m 1,1 m 1,33 m 0,3 m

Vous allez aider le charpentier en cherchant quelles sont les planches qui, posées bout à bout, auront une longueur de 2,9 m (1,57 + 1,33)

b) Déroulement.

Les enfants se partagent le travail par groupes de 4. Lorsqu'ils ont trouvé une solution avec laquelle les 4 sont d'accord, l'enseignant arrête le jeu.

c) Inventaire des résultats. Correction.

Chaque groupe envoie un représentant au tableau exposer sa méthode dont il doit prouver la véracité aux autres (cette validation peut se faire par le passage aux fractions) :

d) Remarques : Les différentes méthodes que les enfants sont susceptibles d'utiliser peuvent être inventoriées ainsi :

- écriture des nombres en fractions puis addition des fractions
- addition des nombres à virgule comme si c'étaient des entiers
- décomposition en entiers, dixièmes, centièmes, etc...
- addition des mètres, des décimètres, des centimètres séparément (en utilisant le tableau).

.../...

6.1.2. Deuxième phase : "Concours des méthodes"

a) Consigne : Vous auvez réussi à additionner ces nombres à virgule. Vous avez trouvé plusieurs méthodes.

Maintenant, vous allez essayer ces méthodes dans un jeu que vous connaissez : "le compte est bon". Vous attribuerez ensuite des points à celles que vous jugerez les meilleures.

Comment estimer qu'une méthode est meilleure qu'une autre ?

- celle qui donne un résultat exact
- celle qui est plus rapide
- celle pour laquelle on peut prouver qu'elle est bonne.

b) 1er jeu :

Voici, pour le premier jeu, des nombres à virgule, et la somme que vous devez atteindre avec certains de ces nombres.

0,45 1,58 1,27 2,035 2 1,7

Somme : $\boxed{5,28} \rightarrow$ (1,58 + 1,7 + 2)

c) Déroulement.

Au début de la partie, chaque groupe de 4 choisit une ou deux méthodes (1 méthode pour 2 enfants par exemple) et l'éprouve en jouant.

Lorsque les groupes ont trouvé "le compte est bon", un enfant de chaque groupe vient - à tour de rôle - exposer sa méthode en essayant chaque fois de la valider.

Il est souhaitable qu'à chaque nouvelle partie, les enfants changent de méthodes (pour les éprouver toutes), cependant, ils peuvent réessayer les mêmes ou en inventer de nouvelles.

.../...

6.2 - ADDITIONS ET MULTIPLICATIONS DES NOMBRES DECIMAUX

6.2.1 - Autres parties possibles :

2ème jeu.

0,91 0,94 0,95 0,82 1,03 1,05

Somme à atteindre : $\boxed{2,8}$ → (0,91 + 0,94 + 0 95)

3ème jeu.

3,75 1,953 2,0131 0,033 1,5

1,64 1,05 1,005 0,9 1,0359

Somme : $\boxed{5,508}$ → (1,05 + 1,005 + 1,5 + 1,953)

4ème jeu.

1,5 4 2,7 1,75 0,58

Somme : $\boxed{6,08}$ (1,5 + 4 + 0,58)

6.2.2 - 5ème jeu : multiplication.

Le charpentier a 3 types de planches :
- 5 planches de 0,58 m
- 3 planches de 1,44 m
- 1 planche de 0,95 m

Somme : 2,32 m.
5,27
6,73

6.3 - SOUSTRACTION DE DECIMAUX

6.3.1 - Présentation de la situation.

a) Consigne : "Le charpentier doit faire un autre support en planches pour un chêneau de 3,2 m. Il dispose toujours des mêmes planches :

1 m   1,57 m   1,1 m   1,33 m   0,3 m.

Mais cette fois, il n'a pas bien prévu. Il a monté sur le toit 2 planches : celle qui mesure 1,57 m et celle de 0,3 m et il s'aperçoit qu'il lui en manque une. Pouvez-vous deviner celle qu'il doit aller chercher ?"

b) Déroulement : Les enfants travaillent par groupes de 2.

c) Stratégies observées :

1°/ Certains groupes font une addition à trous (c'est la majorité)

i. 1,57 + 0,3 +   = 3,2

et ils écrivent généralement :

$1,57 + 0,3 + \boxed{1,47} = 3,2 \rightarrow \begin{array}{r} 1,57 \\ +\ 0,3 \\ + \quad \\ \hline 3,2 \end{array}$

(Comme il n'y a pas de chiffre dans le rang des centièmes dans 3,2, ils écrivent le 7 de "1,57" puis comptent les dixièmes :
5 + 3 = 8 → pour aller à 12 → 4 etc...)

Mais ils s'aperçoivent alors qu'il n'y a pas de planche de cette longueur.
Bien sûr, ils pensent tout de suite qu'ils ont fait une erreur de calcul (de retenue disent-ils) et recomptent : même résultat !

Alors, généralement, ils ont recours aux fractions et transforment les nombres en :

$1,57 = \frac{157}{100}$ $0,3 = \frac{3}{10}$ $3,2 = \frac{32}{10}$.

Puis ils calculent avec les fractions (technique qui est très sûre et fiable pour eux maintenant).

.../...

$$\frac{157}{100} + \frac{3}{10} + \qquad = \frac{32}{10}$$

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

$$\frac{157}{100} + \frac{30}{100} + \overline{\underline{\frac{133}{100}}} = \frac{320}{100}$$

1,33

Ils rectifient alors leur résultat et essaient de le comprendre

$1,57 + 0,3 + \boxed{1,33} = 3,2$

Presque toujours d'ailleurs, à la suite de cette vérification par les fractions, ils ajoutent un zéro pour avoir un chiffre dans le rang des centièmes dans tous les nombres :

$1,57 + 0,30 + \boxed{\quad} = 3,20.$

ii. D'autres calculent :

$1,57 + 0,3 = 1,87$

$1,87 + \qquad = 3,2 \rightarrow$

$$\begin{array}{r} 1,87 \\ + \qquad \\ \hline 3,2 \end{array}$$

Pour ceux-là, le problème est évidemment le même et on peut observer les mêmes procédures.

2°/ D'autres enfin, écrivent une soustraction :

$1,57 + 0,3 = 1,87$

$3,2 - 1,87 =$

Dans ce cas, on observe 2 stratégies :

i. Certains font la même erreur que dans (1) et trouvent 1,47

$$\begin{array}{r} 3,2 \\ - \ 1,87 \\ \hline 1,47 \end{array}$$

Ils constatent également qu'il n'y a aucune planche qui mesure 1,47 m et ont recours à la soustraction de fractions.

$$\frac{32}{10} - \frac{187}{100}$$

$$\downarrow$$

$$\frac{320}{100} - \frac{187}{100} = \frac{133}{100} = 1,33.$$

.../...

Ils corrigent alors leur résultat.

ii. D'autres, ajoutent spontanément des zéros en posant la soustraction pour obtenir le même nombre de décimales :

$$\begin{array}{r} 3,20 \\ -\ 1,87 \\ \hline 1,33 \end{array}$$

Ils trouvent donc tout de suite le résultat exact. Mais il est évident que cette pratique "spontanée" qui n'apparaît pas ici pour surmonter un obstacle, n'est pas justifiée par les enfants. Et si l'enseignant leur demande : "êtes-vous sûrs du résultat ?" ils répondent : "bien sûr, puisqu'il y a une planche qui mesure 1,33 m !".

Ceux qui ont dû recourir à la soustraction ou à l'addition de fractions sont en mesure de dire pourquoi il faut ajouter des zéros et justifier cette pratique : "on ne peut pas faire la soustraction si les fractions n'ont pas le même dénominateur ! Il faut donc les mettre toutes en centièmes". Souvent, certains ajoutent : "on pourrait aussi les transformer en millièmes mais ici ce n'est pas la peine d'ajouter des zéros pour rien !"

d) REMARQUE : L'enseignant dit aux enfants que, dorénavant, il sera préférable d'ajouter des zéros si le nombre de décimales n'est pas le même : ils éviteront ainsi des erreurs. Il institutionnalise la pratique.

6.3.2 : Autres problèmes proposés (pour mettre en évidence d'autres sens de la soustraction).

1°) Premier problème

a) Consigne : "Voici ce qui peut arriver lorsqu'on ne prévoit pas bien : pour faire le support de 3,2 m, le charpentier monte 3 planches : celle de 1,57 m, celle de 1, 33 m et celle de 1,1 m, qu'il cloue bout à bout. Il voit alors que son support est trop long. Quelle longueur de planche doit-il couper ?"

b) Déroulement : Les enfants travaillent individuellement. Très rapidement, ils trouvent la bonne solution. Tous calculent de la même manière :

1,57 + 1,33 + 1,1 = 4,00
4,00 - 3,2 = 0,80

.../...

c) REMARQUE : Ici, aucune hésitation de la part des enfants : tous ajoutent des zéros pour obtenir le même nombre de décimales et généralement les calculs sont corrects.

2°) Deuxième problème : Une pièce de tissu mesurait 24,70 m. Dans le courant de la journée, la vendeuse en a successivement coupé : 3,75 m ; 4,8 m et 7,5 m. Quelle longueur de tissu reste-t-il à la fin de la journée ?

3°) Troisième problème : Un pieu a 2 mètres de hauteur. On l'enfonce dans un trou de 60 cm de profondeur. Calcule la hauteur du pieu au-dessus du sol.

4°) Quatrième problème : Pierre et son frère comptent leurs économies : Pierre possède 3 billets de 100 francs, un billet de 20 francs, deux pièces de 10 f., 1 pièce de 5 f, une de cinquante centimes et une de 5 centimes. Son frère a deux billets de 100 f, 6 pièces de 50 f. Quel est le plus riche ? de combien ?

REMARQUE : L'enseignant peut choisir d'autres situations qui mettent en oeuvre additions, soustractions de décimaux, multiplication d'un décimal par un entier. Ces quatre problèmes ne sont proposés ici qu'à titre d'exemples.

Cependant, il faut signaler que dans certaines situations des enfants peuvent mal poser les soustractions en mettant le plus petit nombre en haut et le plus grand en bas.

Exemple : 3,847 - 3,95.
L'enseignant doit faire rectifier sans s'offusquer : en effet, l'activité sur l'ordre des décimaux n'est pas encore faite. Il est donc légitime, si le maître ne choisit pas bien les exemples, que les enfants se trompent.

6.3.3 : Résultats :

Les enfants ont compris. Ils savent faire les soustractions mais il est cependant important que l'enseignant leur donne régulièrement l'occasion d'en faire. En effet, un algorithme qui n'est pas utilisé souvent s'oublie très vite.
L'enseignant doit décider maintenant avec les enfants que ces 3 opérations : additions, soustractions, multiplications par un entier doivent être sues et effectuées correctement sans aucune hésitation.

.../...

6.4 - MULTIPLICATION PAR 10, 100, 1000

6-4-1 : Rappel de la multiplication d'un décimal par un entier

a) Présentation de la situation : L'enseignant demande aux enfants de calculer les multiplications suivantes :

135,75 x 402 = 0,649 x 75 =

Mais auparavant, il leur demande de prévoir le nombre de chiffres après la virgule des résultats.

b) Déroulement : Chaque enfant fait les 2 opérations sur son cahier de brouillon. Lorsqu'il s'est assuré que tous avaient terminé, l'enseignant fait une correction collective : il envoie un enfant au tableau pour chacune des multiplications. (Il choisit généralement des enfants qui ont encore des difficultés afin de les aider éventuellement et de leur redonner confiance.)

c) Il est intéressant de donner une dernière multiplication du type : 125,75 x 3000. Car ce sont celles dans lesquelles il y a le plus d'erreurs (à cause des zéros).

6-4-2 : Multiplication d'un décimal par 10, 100, 1000, 10000.

a) Consigne : "Maintenant, vous allez calculer les multiplications que je marque sur le tableau. Lorsque vous aurez trouvé tous les résultats, vous les observerez et essaierez de trouver un procédé rapide qui économise les calculs et que vous éprouverez en faisant les opérations".

b) Déroulement : L'enseignant écrit sur le tableau :

1,25 x 10 =
0,354 x 100 =
1,25 x 1000 =
25,15 x 100 =
1,25 x 100 =

Les enfants calculent individuellement sur le cahier de brouillon.

..../...

c) Comportements observés :

- La majorité des enfants pose la multiplication :

$$\begin{array}{r} 1,25 \\ \underline{\times\ 10\quad} \end{array}$$

- Quelques-uns ajoutent des zéros par analogie avec la multiplication d'un entier :

ex. : 1,25 x 10 = 1,250
0,354 x 100 = 0,35400.

Ils savent pourtant - si on le leur fait expliciter - que 1,25 = 1,250.

- D'autres enfin transforment le décimal en fractions :

$$1,25 = \frac{125}{100}$$

$$\frac{125}{100} \times 10 = \frac{1250}{100} = 12,50.$$

6-4-3 : Correction des calculs.

a) L'enseignant demande aux enfants leurs résultats qu'ils marquent à la suite des opérations. S'il y a plusieurs résultats différents, ils les marquent tous sans prendre parti :
exemple : 1,25 x 10 = 12,5 1,250 125...
et envoie un enfant faire la multiplication au tableau afin que tous les élèves soient sûrs du bon résultat qui seul, est conservé (les autres sont effacés).

b) Observation des résultats et énoncé d'une règle.

Lorsque tous les résultats sont vérifiés, l'enseignant demande aux enfants de les observer.

1,25 x 10 = 12,5
0,354 x 100 = 35,4
1,25 x 1000 = 1250
25,15 x 100 = 2515
1,25 x 100 = 125.

A ceux qui avaient terminé les premiers et qui ont déjà réfléchi, il leur demande d'écrire la règle qu'ils croient avoir trouvée et qui permet de trouver rapidement le résultat sans poser de calcul. .../...

c) <u>Enoncé et vérification des règles.</u>

Chaque règle est ensuite vérifiée sur les opérations restées marquées sur le tableau. Si elle fonctionne, elle est éprouvée sur d'autres calculs que l'enseignant marque au tableau et qu'il fait vérifier en posant l'opération.

135,75 x 10
135,75 x 100
135,75 x 1000

d) <u>Conclusion</u> : Pour multiplier un décimal par 10, 100, 1000, il suffit de déplacer la virgule d'un rang, de 2 rangs, de 3 rangs... vers la droite.

6-4-4 : <u>Exercices individuels avec correction immédiate</u> :

1) 45,87 x 1000 =
139,2 x 10 =
4,750 x 100 =
25,785 x 10 =
0,08 x 1000 =
0,08 x 10 =
0,08 x 100 =

2) 135,9 x $\boxed{}$ = 1359
4,857 x $\boxed{}$ = 485,7
130 x $\boxed{}$ = 13000
1,675 x $\boxed{}$ = 1,675
5,45 x $\boxed{}$ = 5450.

6-4-5 : <u>Résultats.</u>

Cette activité se déroule rapidement car elle ne présente pas de difficultés. Il arrive cependant qu'il y ait beaucoup de d'erreurs de calcul lors des premiers exercices. En effet, bien qu'ayant compris, beaucoup d'enfants ne maîtrisent pas bien encore les déplacements de la virgule.

Il est important, au début, de comparer chaque résultat

.../...

trouvé au décimal multiplié.

$$1,25 \times 10 = 12,25$$

et d'obliger les enfants à se demander si ce résultat est bien 10 fois plus grand que le décimal 1,25.

Problèmes possibles :

1/ Pour faire une couverture, il faut acheter :

- 12 pelotes de laine bleue à 25,50 F. la pelote
- 15 pelotes de laine blanche à 15,75 F. la pelote
- 18 pelotes de laine noire à 14,20 F. la pelote.

Une tricoteuse prend 450 F. pour le travail. Calcule le prix de revient de la couverture tricotée.

2/ J'achète 375 grammes de beurre à 3,25 F. les 125 grammes et 1 litre de lait à 2,50 F.

Pour payer, je donne un billet de 20 F.

Combien doit-on me rendre ?

3/ Maman coud un galon autour d'une nappe rectangulaire dont les dimensions sont 1,20 m et 90 cm.

Elle a posé les 3,5 m. de galon qu'elle possédait déjà. Quelle longueur de galon doit-elle acheter en plus pour terminer son travail ?

FICHE DIDACTIQUE

6.5 - L'ORDRE DANS LES DECIMAUX

6.5.1. Rappel - Introduction

Vous connaissez beaucoup de fractions. Certaines sont plus faciles à utiliser. Lesquelles ? ("celles qui ont 10, 100, 1000... au dénominateur")

Voici une de ces fractions : $\frac{5208}{1000}$

Nous avons vu qu'il existe une écriture plus simple à manipuler. Laquelle ? (écriture à virgule)

Un enfant vient écrire : $\frac{5208}{1000} = 5,208$.

6.5.2. Problème posé.

a) Consigne : "Voici des nombres décimaux, vous allez les ranger du plus petit au plus grand"
14,07 - 1,94 - 2,03 - 0,938417 - 14,007 - 0,1.

b) Déroulement :

1) Les enfants travaillent individuellement. Lorsqu'ils auront tous terminé, le maître organisera une correction collective.

2) Correction collective : le maître envoie au tableau 2 enfants qui n'ont pas fait le même rangement et s'adresse à la classe : "si vous n'êtes pas d'accord avec vos camarades, vous pouvez leur demander une preuve de ce qu'ils affirment ou leur prouver qu'ils se sont trompés". (Cette preuve peut être, par exemple, la comparaison des nombres sous forme de fractions décimales, ou le placement dans le tableau ou sur la droite, ou la décomposition)

Remarque : La correction par le passage à la fraction décimale de 2 erreurs de rangement est suffisante pour ne pas trop renforcer cette méthode de rangement.

.../...

6.5.3. Choix d'une méthode de rangement.

a) Consigne : "Maintenant, vous allez avoir beaucoup de nombres à ranger (que je vous donnerai petit à petit). Vous allez essayer de choisir une méthode qui vous permettra de les ranger le plus vite possible sans vous tromper. Si vous en trouvez plusieurs, choisissez la plus rapide. Vous l'éprouverez sur d'autres nombres et les élèves qui n'en auront pas trouvé l'essaieront".

Voici les 3 premiers nombres :

28,13 - 1,13 - 0,92987.

Rangez-les du plus petit au plus grand.

b) Déroulement : Les enfants travaillent, soit individuellement, soit par deux. Dès qu'ils ont rangé ces 3 premiers nombres et qu'ils pensent avoir trouvé la bonne méthode de rangement, le maître leur donne une feuille sur laquelle ils écrivent la manière dont ils ont procédé. Puis ils éprouvent cette méthode sur les nombres qui suivent. Le maître les leur donne progressivement et (2 par 2 ou 3 par 3) ils les rangent par rapport aux 3 premiers.

28,103 - 12,001 - 11,99 - 12,4

3,0 - 12,09 - 3,91 - 4,09 - 1,103

c) Lorsque tous ces nombres ont été rangés, les enfants peuvent dire si leur méthode a bien fonctionné.

6.5.4. Lecture rapide des méthodes et essai.

a) Consigne : "ceux qui n'ont pas réussi à ranger ces nombres vont essayer la méthode jugée la plus simple par leurs camarades en comparant par exemple :

0,999 et 0,9847

Ceux qui ont su compareront ces 2 nombres par une autre méthode. Et on verra ainsi quelle est la plus simple et la plus rapide".

.../...

b) Déroulement : Après examen rapide des textes, le maître donnera aux élèves qui ne sont pas arrivés à ranger les décimaux de la 2ème série, la méthode classique de rangement (celle qui permet de comparer d'abord le nombre d'unités, puis les $\frac{1}{10}$ puis les $\frac{1}{100}$ ...) afin qu'ils l'utilisent pour comparer 2 par 2 les nombres ci-dessous :

0,999 et 0,9847

10,094 et 10,1

152,42 et 151,42

0,9999 et 1,1

Les enfants qui ont bien utilisé cette méthode, compareront ces nombres avec une autre méthode (passage par les fractions par exemple).

Il sera facile ainsi de voir quelle est la plus rapide et la plus simple des deux.

6.5.5. Résultats.

Cette dernière méthode (comparaison des unités, puis des $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$ ...) qui est beaucoup plus rapide et plus sûre que le passage par les fractions, est donc énoncée, institutionnalisée : dorénavant, c'est celle que tous les enfants utiliseront rapidement et sans difficulté. Il faut noter cependant qu'ils continueront à faire des erreurs s'ils n'ont pas l'occasion de comparer ou de ranger des décimaux d'une manière régulière.

.../...

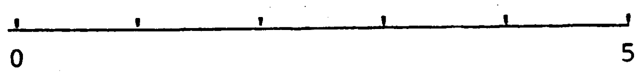
MODULE 7 :

ENCADREMENTS ET APPROXIMATIONS

7.1 - INTERCALER UN DECIMAL ENTRE DEUX.

7-1-1 : Recherche de décimaux entre deux entiers.

1ère phase : L'enseignant dessine une droite numérique sur le tableau sur laquelle il marque 0 et 5. Il demande ensuite à un enfant de venir marquer à son tour les entiers naturels entre 0 et 5.

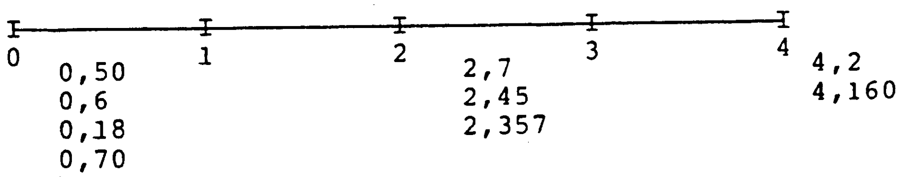


"Combien peut-on écrire d'entiers naturels entre 0 et 5 ?" En existe-t-il d'autres ?"

a) Consigne : "Maintenant, chacun d'entre vous va trouver 2 décimaux dans un intervalle de 1. Les élèves de la première rangée chercheront 2 décimaux entre 0 et 1, ceux de la 2ème rangée, entre 2 et 3 et ceux de la 3ème rangée, entre 4 et 5".

b) Déroulement : Les enfants travaillent sur leur cahier de brouillon par groupes de deux. L'enseignant n'intervient pas.

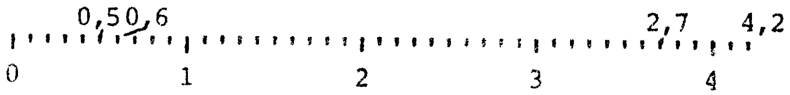
c) Correction : Lorsque tous ont terminé, ils viennent à tour de rôle au tableau, marquer les nombres qu'ils ont trouvés, les uns sous les autres, dans l'intervalle demandé, comme l'indique la figure ci-dessous. Cette activité se déroule très rapidement, comme un jeu.



Les enfants sont seuls juges et doivent refuser une réponse inexacte. L'enseignant intervient le moins possible, sinon comme arbitre.

.../...

2ème phase : L'enseignant demande à certains enfants de venir placer exactement sur une droite numérique certains de ces nombres qu'il entoure à la craie de couleur (Par exemple : 0,50 ; 0,6 ; 2,7 ; 4,2...)



7-1-2 : Intercaler un décimal entre deux autres

a) Consigne : "Peut-on trouver d'autres nombres entre 0,5 et 0,6. Si vous pensez que c'est possible, vous en écrivez deux chacun, si vous pensez le contraire, vous devrez prouv er à vos camarades que ce n'est pas possible".

L'enseignant écrit sur le tableau :

0,5 <   < 0,6

b) Déroulement : Les enfants travaillent individuellement sur leur cahier.

Là encore, l'enseignant n'intervient pas. Les enfants n'ont d'ailleurs aucune difficulté et ils trouvent rapidement (avec très peu d'erreurs) des nombres compris entre 0,5 et 0,6.

Dès que tous ont écrit deux nombres, l'enseignant procède à une correction collective rapide.

c) Procédés utilisés :

1/ La plupart d'entre eux ajoutent spontanément un zéro à 0,5 et à 0,6 puis comptent : 0,50 - 0,51 - 0,52...

Certains écrivent plusieurs décimales après les 5 dixièmes : 0,5421 ; d'autres essaient, par jeu, de mettre en difficulté les camarades qui devront déclérer si le nombre est plus petit que 0,6, en ajoutant un grand nombre de chiffres.

Exemple : 0,59876104

2/ Quelques-uns reviennent à l'écirture fractionnaire :

$0,5 = \frac{5}{10}$ $0,6 = \frac{6}{10}$ et par une "transformation",

.../...

7.2 - ENCADREMENT D'UN RATIONNEL ENTRE DEUX ENTIERS

7.2.1. Révision

a) Consigne : "Voici une liste de nombres décimaux que vous allez ranger du plus petit au plus grand :

148,0978 - 148,97 - 148,95 - 148 - 149,1 - 148,0999 - 148,932

b) Déroulement :
Les enfants travaillent individuellement sur leur cahier de brouillon. Dès qu'ils ont terminé, l'enseignant fait une correction collective (cette liste de nombres rangés doit rester sur le tableau).

7.2.2. Problème proposé aux enfants :

a) Consigne : "Maintenant, vous allez placer dans cette liste la fraction : $\frac{4319}{29}$ (1)

Pour cela que faut-il savoir ?"
Les enfants disent qu'il faut savoir combien il y a d'unités dans la fraction.

b) Déroulement : Les enfants cherchent par groupes de deux sur de grandes feuilles de papier-affiche. Au cours de cette activité, l'enseignant ne doit donner aucune indication qui puisse induire les enfants dans une stratégie plutôt que dans une autre. Il pourrait, en effet, être tenté d'aider certains enfants en difficulté, en particulier ceux (ils sont peu nom-

.../...

(1) Pour cette recherche, il est indispensable de choisir une fraction dont le numérateur est beaucoup plus grand que le dénominateur. Sinon, les enfants trouveraient très rapidement le résultat par encadrements et ne comprendraient pas la nécessité de faire une division.

breux) qui calculent les fractions égales à 1, à 2, 3, 4, 5... et pour qui la tâche est très longue, fastidieuse, voire décourageante. Il se contente d'encourager, de rassurer.

c) Quelques stratégies observées :

1) Stratégie 1 : Souvent, les enfants procèdent de la manière suivante :

$$\frac{29}{29} = 1$$

$$\frac{58}{29} = 2$$

$$\frac{87}{29} = 3$$

$$\frac{116}{29} = 4...$$

Très vite, la plupart d'entre eux s'aperçoivent que les calculs vont être longs. Alors, ils calculent généralement la fraction égale à 10, puis aussitôt après, celle égale à 100 :

$$\frac{290}{29} = 10$$

et $\frac{2900}{29} = 100.$

Ils se rapprochent ainsi peu à peu de la fraction $\frac{4319}{29}$ et par tâtonnements, ils arrivent à l'encadrer entre 140 et 150 de la manière suivante :

- ils calculent d'abord la fraction égale à 200 à partir de celle égale à 100 :

$$\times 2 \left(\begin{array}{l} \frac{2900}{29} = 100 \\ \frac{5800}{29} = 200 \end{array} \right) \times 2$$

Ils s'aperçoivent qu'elle est beaucoup plus grande que la fraction donnée : $\frac{4319}{29}$. Alors, ils calculent la fraction égale à 150 :

.../...

- soit en partant de :

$$\times 5 \left(\begin{array}{l} \frac{290}{29} = 10 \\ \\ \frac{1450}{29} = 50 \end{array} \right) \times 5$$

et en ajoutant : $\frac{2900}{29} + \frac{1450}{29} = \frac{4350}{29}$

$$\frac{4350}{29} = 150.$$

- soit en faisant $\frac{2900}{29} : 2 = \frac{1450}{29}$

et $\frac{2900}{29} + \frac{1450}{29} = \frac{4350}{29}$

- Ils calculent aussi la fraction égale à 140 :

$$100 = \frac{2900}{29}$$

$$\times 4 \left(\begin{array}{l} 10 = \frac{290}{29} \\ \\ 40 = \frac{1160}{29} \end{array} \right) \times 4$$

$$140 = \frac{2900}{29} + \frac{1160}{29} = \frac{4060}{29} .$$

Ils concluent alors que $\frac{4319}{29}$ est entre 140 et 150 mais beaucoup plus près de 150.
Alors ils cherchent les fractions égales à 149, à 147, quelquefois directement à 148.

$$148 = \frac{4292}{29}$$

$$149 = \frac{4321}{29}$$

donc $148 < \frac{4319}{29} < 149.$

2) Stratégie 2 : Cependant, quelques groupes comprennent très vite après quelques essais, comme dans la stratégie 1, qu'il faut enlever autant de fois qu'il est possible $\frac{29}{29}$ (c'est-à-dire 1 unité) de $\frac{4319}{29}$ et font la division : .../...

$$4319 \div 29 = 148$$

Ils encadrent alors la fraction :

$$148 < \frac{4319}{29} < 149.$$

7.2.3. Comparaison et choix d'une méthode :

a) L'enseignant demande aux groupes d'enfants qui sont allés au bout de leurs calculs (et donc qui ont encadré la fraction) de venir au tableau exposer leur méthode.

Déroulement : Les feuilles de papier, sur lesquelles ont travaillé les enfants, sont affichées au tableau. Les enfants viennent expliquer ce qu'ils ont fait, ce qui donne lieu à des discussions souvent intéressantes. Dans ces discussions, l'enseignant intervient le moins possible, son rôle est celui d'un arbitre : il précise une idée, aide les enfants à s'exprimer, mais ne prend pas position.

b) L'enseignant demande ensuite aux autres pourquoi ils n'y sont pas arrivés. Et c'est presque toujours par découragement à cause de la longueur des calculs (pour ceux qui ont procédé par encadrements successifs).

c) Les deux méthodes employées par les enfants :
- encadrements successifs
- division

sont alors comparées et c'est évidemment la deuxième qui est reconnue la plus rapide. Donc,c'est elle qui est adoptée par l'ensemble des enfants et privilégiée maintenant par l'enseignant.

7.2.4. Placement de la fraction $\frac{4319}{29}$ dans la liste des nombres (§ 7.2.2)

a) Consigne : "Vous deviez placer cette fraction dans la liste des nombres que vous avez rangés où va-t-elle se mettre ?

.../...

Qui peut la placer ?"

b) Déroulement : Cette phase se déroule collectivement très vite. Les enfants disent qu'ils ne peuvent pas placer encore la fraction, qu'ils n'ont pas assez de renseignements et qu'il faudrait savoir combien il y a de dixièmes après 148. Certains même prévoient que les dixièmes ne suffiront pas, qu'il faudra peut-être trouver aussi les centièmes.

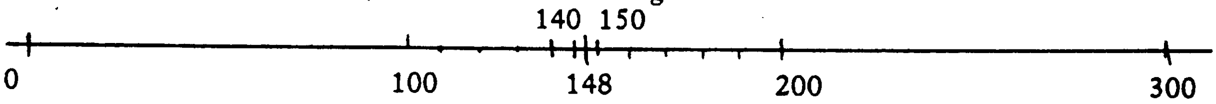
c) L'activité s'arrête donc sur un problème ouvert aux enfants qui sera poursuivi au cours de l'activité suivante.

ENCADREMENTS SUCCESSIFS D'UN RATIONNEL PAR DEUX DECIMAUX

7.3.1. Rappel de la situation de la fraction entre 2 entiers.

a) Consigne : "Nous avons trouvé que la fraction $\frac{4319}{29}$ était située entre 148 et 149. Mais pour la placer avec précision dans la liste des nombres décimaux, nous avons vu qu'il fallait trouver le nombre de dixièmes...". Avant de trouver ce nombre de dixièmes, nous allons placer la fraction sur une droite".

b) Déroulement : L'enseignant trace sur le tableau une droite qu'il gradue de 100 en 100 de 0 à 300 et demande à un enfant de venir tracer à la craie de couleur la longueur de baguette que peut désigner cette fraction (cf. l'activité 3 module 5.3.2) Où s'arrête la baguette ?



Pour pouvoir placer la fraction avec plus de précision, et surtout pour y voir mieux, les enfants proposent eux-mêmes d'agrandir l'intervalle [148;149[et ils refont le trait de couleur qui représente la longueur $\frac{4319}{29}$, mais là, ils hésitent et ne savent pas où s'arrêter.

Certains, qui ont sous les yeux les calculs qu'ils ont faits dans l'activité précédente, proposent d'écrire 148 et 149 en fractions (si personne ne le propose - ce qui est rare - l'enseignant le suggère).

Alors l'enseignant demande de combien il faut dépasser 148 ; l'enseignant laisse chercher les enfants individuellement. Lorsque la majorité a trouvé, l'un d'entre eux vient au tableau et écrit :

$$\frac{4319}{29} - \frac{4292}{29} = \frac{27}{29}$$

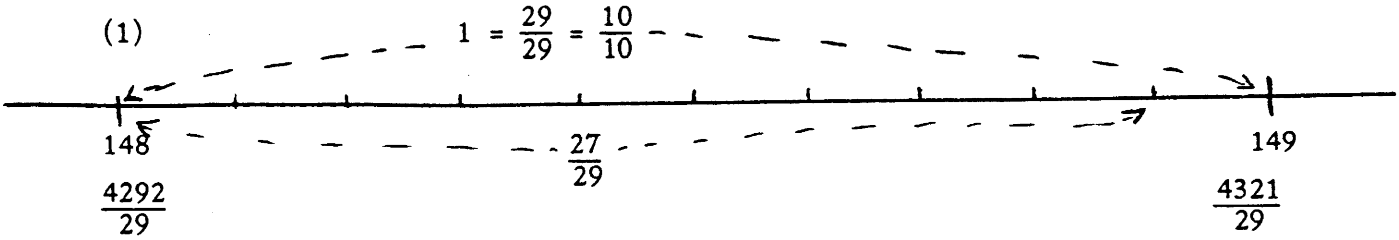
.../...

Certains proposent un autre calcul :

$$\frac{4292}{29} + \boxed{} = \frac{4319}{29}$$ et disent que ce qui manque dans cette opération, c'est "ce qui dépasse 148". Ils voient alors que la fraction est tout près de 149 et certains précisent : "il manque que $\frac{2}{29}$".

Tous ces renseignements recueillis au cours de discussions, de remarques, sont ajoutés sur la droite (par des enfants désignés par l'enseignant).

(1)



REMARQUE : Quelques enfants proposent souvent de partager l'intervalle [148 en 29 parties égales et de placer la fraction en comptant 27 de ces parties. En se référant à l'activité 2, module 5, l'enseignant évoque les difficultés rencontrées, la longueur des calculs, et rappelle la décision qui avait été prise d'utiliser des intervalles décimaux.

Pour placer la fraction avec précision, il faut donc savoir combien il y a de dixièmes dans ces $\frac{27}{29}$.

L'enseignant découpe l'intervalle [148 ; 149[en 10.

7.3.2. Recherche des dixièmes

a) Consigne : "Vous allez donc chercher le nombre de dixièmes dans $\frac{27}{29}$ ".

b) Déroulement : Les enfants travaillent par groupes de deux ou trois Cette recherche étant difficile, l'enseignant va de groupe en groupe pour aider ceux qui ont le plus de difficultés. Il suffit quelquefois de suggérer seulement la réduction au même dénominateur ("transformation", pour les enfants) des 2 fractions : 1/10 et 27/29.

.../...

Les méthodes utilisées par les enfants sont sensiblement les mêmes que dans l'activité 2 module 7, lorsqu'il s'agissait de trouver le nombre d'entiers dans la fraction $\frac{4319}{29}$.

Lorsque les 2 fractions précédentes sont "transformées" :

$$\frac{1}{10} = \frac{29}{290} \quad \text{et} \quad \frac{27}{29} = \frac{270}{290}$$

ils cherchent par encadrements successifs combien de fois 29 est contenu dans 270. Ils voient que 10 fois c'est trop : $29 \times 10 = 290$ et essaient immédiatement 9 fois. Certains font directement la division $270 \div 29$.

c) Comparaison des méthodes : Les enfants viennent au tableau dire comment ils ont procédé. Ceux qui ont posé la division la font sur le tableau.

$$270 \div 29 = 9 \text{ dixièmes et il reste } \frac{9}{290} .$$

Il est donc possible de repérer sur la droite (1) où se trouve la fraction et l'enseignant envoie un élève au tableau pour indiquer en continuant le trait de couleur qui s'arrête entre les $\frac{9}{10}$ et 149.

7.3.3. Recherche des centièmes

Les enfants savent qu'il y a 9 dixièmes mais cela ne leur permet pas encore de placer la fraction dans la liste des décimaux de l'activité précédente puisque trois autres nombres ont aussi 9 dixièmes.

Le problème est de nouveau le même que dans le paragraphe précédent.

a) Consigne : "que devez-vous chercher maintenant ? (les enfants ont très bien compris qu'il faut trouver le nombre de centièmes dans $\frac{9}{290}$.

b) Déroulement : Comme dans l'activité précédente, ils travaillent par groupes de 2 et refont des calculs analogues à ceux qui leur ont permis de trouver les dixièmes

$$\frac{1}{100} = \frac{29}{2900} \qquad \frac{9}{290} = \frac{90}{2900}$$

.../...

Mais maintenant, ils ne reprennent pas le procédé des encadrements successifs ; tous font tout de suite la division :

$$90 \div 29.$$

Ils trouvent 3 centièmes et encore "un petit bout" que l'enseignant fait désigner : $\frac{3}{2900}$.

A ce moment de l'activité, ils se rendent compte de 2 choses :

1) qu'ils peuvent continuer ainsi en cherchant des millièmes, des dix millièmes...

2) qu'ils peuvent placer la fraction dans la liste des décimaux.

7.4 - ORGANIGRAMME DE LA METHODE ET MISE EN PLACE DE LA DIVISION (Algorithme)

7.4.1 - Synthèse de différentes recherches qui ont abouti au placement d'une fraction entre deux décimaux.

a) Consigne : "Nous venons de trouver un moyen d'encadrer une fraction entre deux nombres à virgule et de resserer de plus en plus l'intervalle.

Nous allons écrire de façon simple la méthode que nous avons employée".

b) Déroulement : L'enseignant demande aux enfants comment ils ont procédé. Il écrit sur 2 colonnes ce qu'ils ont cherché, et ce qu'ils ont fait.

ce que nous avons cherché	ce que nous avons fait	Division : Algorithme
1) je cherche les entiers Je cherche combien de fois $\frac{29}{29}$ est contenu dans $\frac{4319}{29}$ $148<\frac{4319}{29}<149$	$4319 \div 29 = 148$ Il reste 27 qui représente $\frac{27}{29}$	
2) Je cherche les dixièmes Je cherche combien de fois $\frac{29}{290}$ est contenu dans $\frac{270}{290}$ $148{,}9 < \frac{4319}{29} < 149$	$\frac{27}{29} = \frac{270}{290}$ $\frac{1}{10} = \frac{29}{290}$ $270 \div 29 = 9$ Il reste 9/290	
3) Je cherche les centièmes Je cherche combien de fois $\frac{29}{2900}$ est contenu dans $\frac{90}{2900}$ $148{,}9 < \frac{4319}{29} < 148{,}94$	$\frac{9}{290} = \frac{90}{2900}$ $\frac{1}{100} = \frac{29}{2900}$ $90 \div 29 = 3$ Il reste 3 qui représente 3/2900	

```
      148,93
29 | 4319
     1419
     1160
     0259
      232
      027 0
       26 1
       00 90
          87
        0 03
```

7.4.2. Résultats.

Ces deux activités (7.3 et 7.4) présentent des difficultés pour les enfants (spécialement la recherche des dixièmes). Elles sont pourtant comprises par un certain nombre d'entre eux qui ont vu, au fil des étapes, ce que l'on cherchait et quel était l'objectif.

Cependant, les enfants ne sont pas capables (pour la plupart) de refaire les calculs seuls et ils ne maîtrisent pas non plus l'algorithme qui sera repris au cours de l'activité suivante.

7.5 - RATIONNELS DECIMAUX, RATIONNELS NON DECIMAUX

7.5.1 - Rappel (phase collective) : différentes sortes de fractions déjà rencontrées.

a) Consigne : "Parmi toutes les fractions que nous avons étudiées et utilisées, certaines sont plus faciles à manipuler, et permettent de faire des calculs plus rapides et plus simples. Pouvez-vous en citer quelques-unes ?"

b) Déroulement : Ce rappel se fait collectivement et rapidement sous forme de questions-réponses. Les enfants énumèrent des fractions à dénominateur 10, 100, 1000,... et disent, en effet, que les "calculs sont plus simples puisqu'il suffit d'ajouter des zéros !"

Certains proposent aussi des fractions à dénominateur 5 comme 3/5 ou à dénominateur 50 comme $\frac{12}{50}$. L'enseignant les écrit sur le tableau et demande à un enfant de venir montrer pourquoi ces fractions sont aussi faciles à utiliser que les premières. L'enfant écrit : $\frac{3}{5} = \frac{6}{10}$ et $\frac{12}{50} = \frac{24}{100}$.

7.5.2 : Fractions décimales.

a) Apport d'information :

L'enseignant donne la définition des fractions décimales : "toutes les fractions qui peuvent se mettre sous la forme $\frac{\ }{10}$, $\frac{\ }{100}$, $\frac{\ }{1000}$,... sont des fractions décimales"

b) Consigne : "Est-ce que $\frac{3}{4}$ est une fraction décimale ? pourquoi ?

Pouvez-vous en trouver d'autres ?"

c) Déroulement : Les enfants trouvent très vite oralement, de leur place, des exemples de fractions décimales dont les déno-

.../...

minateurs sont 25, 50, 2, 20, etc...

L'enseignant les écrit sur le tableau et demande chaque fois une preuve. Les enfants transforment mentalement ces fractions en dixièmes ou centièmes ou millièmes. Les calculs sont faits très rapidement sous forme de "calcul mental".

7-5-3 : Mise en évidence de 2 méthodes pour transformer une fraction décimale en nombre à virgule.

a) Consigne : "Cette fraction $\frac{7}{20}$ est décimale puisqu'il est possible de la transformer en fraction dont le dénominateur est 100.

$$\frac{7}{20} \overset{\times 5}{=} \frac{35}{100} = 0{,}35$$ (ces calculs sont faits au tableau par un enfant)

Pouvez-vous trouver ce nombre à virgule par une autre méthode ?

b) Déroulement :

Des enfants proposent de chercher le nombre d'entiers, puis de dixièmes, puis de centièmes par la division (comme ils l'ont fait dans l'activité précédente). Mais ce calcul présente des difficultés pour eux puisqu'ils n'ont jamais trouvé encore un quotient inférieur à 1. Ce problème est une bonne motivation pour aborder et résoudre ce genre de difficulté : ils travaillent par groupes de 2 (quelquefois individuellement s'ils le souhaitent).

c) Comportements :

1) La majorité des enfants procèdent comme dans l'activité précédente : ils disent que dans $\frac{7}{20}$ il y a 0 unité puisque $1 = \frac{20}{20}$.

Puis ils cherchent combien il y a de $\frac{1}{10}$. Pour cela, ils transforment $\frac{1}{10}$ en vingtièmes

$\frac{1}{10} = \frac{2}{20}$ et ils cherchent combien de fois il y a de $\frac{2}{20}$ (c'est-à-dire de $\frac{1}{10}$) dans $\frac{7}{20}$: 3 fois donc $\frac{3}{10}$ et il reste $\frac{1}{20}$

car $3 \times \frac{2}{20} = \frac{6}{20}$.

.../...

Enfin ils calculent combien il y a de $\frac{1}{100}$ dans $\frac{1}{20}$. Ils transforment les 2 fractions :

$\frac{1}{20} = \frac{10}{200}$ $\qquad$ $\frac{1}{100} = \frac{2}{200}$

ce qui revient à trouver combien de fois il y a $\frac{2}{200}$ dans $\frac{10}{200}$.

$5 \times \frac{2}{200} = \frac{10}{200}$. Il y a donc 5 centièmes. Le quotient de la division est donc 0,35.

2) Un ou deux groupes posent directement la division par analogie avec ce qui a été fait dans la précédente activité

	0 ,	3 5
20	7	0
	6	0
	1	0 0
		0 0

d) <u>Conclusion</u> :

"Vous connaissez donc deux méthodes pour écrire une fraction sous forme d'un nombre à virgule :.la première est de transformer la fraction de manière à obtenir une fraction en dixièmes, centièmes, millièmes...

.la deuxième de faire la division.Quelle est celle de ces 2 méthodes que vous utiliseriez pour écrire sous forme de nombres à virgule le plus rapidement possible : $\frac{3}{5}$? $\frac{18}{20}$? $\frac{12}{25}$? etc..."

Les enfants choisissent évidemment la première car "elle est plus rapide" disent-ils.

7.5.4 : <u>Choix d'une méthode.</u>

a) <u>Consigne</u> : "Vous allez essayer de mettre sous forme d'un nombre à virgule les 2 fractions suivantes :

$\frac{17}{32}$ et $\frac{325}{128}$, à l'aide des 2 méthodes étudiées.

b) <u>Déroulement</u> : La moitié des élèves calcule $\frac{17}{32}$, l'autre moitié $\frac{325}{128}$.

.../...

Les enfants travaillent par groupes de 2. L'un calcule par la division, l'autre essaie par la transformation de la fraction en centièmes, millièmes, dixmillièmes, etc...

c) <u>Comportements</u> :

Généralement, les enfants chargés de la transformation des fractions n'arrivent pas au but et, le plus souvent, ils abandonnent leurs calculs pour faire eux aussi la division.

d) <u>Correction collective</u> :

L'enseignant demande à deux enfants de venir faire les divisions au tableau :

		0 , 5 3 1 2 5
3 2	1 7	0
	1	0 0
		0 4 0
		0 8 0
		1 6 0
		0 0

		2 , 5 3 9 0 6 2 5
1 2 8	3 2 5	
	0 6 9	0
	0 5	0 0
	1	1 6 0
		0 0 8 0 0
		0 3 2 0
		0 6 4 0
		0 0 0

"Sauriez-vous maintenant écrire ces deux fractions avec un dénominateur composé de 1 suivi de zéros ?"
Quelques enfants (5 ou 6) réussissent à écrire

$$\frac{53125}{100000} \quad \text{et} \quad \frac{25390625}{10000000}$$

Ils expliquent aussi le nombre de zéros au dénominateur.

.../...

e) Conclusion.

"Que peut-on dire de ces 2 fractions ?"
Ce sont des fractions décimales

Dans ce cas, quelle est la méthode qui a été la plus rapide ? "c'est la division !" disent bien sûr, les enfants.

7.5.5 : Reconnaître si une fraction est ou non décimale.

a) Présentation du problème - Consigne :

"Voici deux fractions : $\frac{221}{35}$ et $\frac{938}{1024}$.
Vous allez essayer de voir si ces fractions sont décimales ou non. Choisissez pour cela la méthode qui vous paraît la plus rapide"

b) Déroulement :

Comme dans le paragraphe 7-4-4 la moitié des élèves calcule $\frac{221}{35}$ et l'autre moitié $\frac{938}{1024}$ (sur leur cahier de brouillon, le plus rapidement possible !)

c) Comportements :

1) Tous les enfants posent la division.

2) La 1ère des fractions $\frac{231}{35}$ n'étant pas décimale, les enfants qui la font, s'arrêtent presque tous à la fin de la première période (aux dix millioniëmes). En effet, ils s'aperçoivent très vite qu'à ce moment-là, le reste 50 a déjà été rencontré, donc que "ça va toujours recommencer pareil". (c'est ce qu'ils disent).

3) Pour la deuxième qui est décimale, quelques enfants s'arrêtent parfois au zéro du rang des dix millièmes du quotient en décrétant qu'elle n'est pas décimale.

Mais la plupart d'entre eux vont jusqu'au bout et sont presque soulagés de constater qu'elle se termine par des zéros et donc qu'elle est décimale !

.../...

7.5.6 : Correction collective et conclusions :

Comme dans le paragraphe (7-4-4) l'enseignant organise une correction collective. Il envoie deux enfants au tableau faire les divisions.

a) Remarque : Contrairement à ce que l'on pourrait penser, ce travail n'ennuie pas les élèves qui attendent toujours avec impatience de voir ce qui va arriver :

- va-t-on trouver zéro au reste ?
- jusqu'où va-t-il falloir aller ?

Beaucoup font des remarques - voire des paris - tout au long de la correction. (Pour cela, il faut, bien entendu, que ceux qui ont fait les calculs, donc qui connaissent déjà le résultat, ne disent rien pour ne pas rompre le suspense...)

b) Conclusions : apport d'information :

1) Au moment de la correction, l'enseignant demande aux enfants quels seraient les chiffres du quotient après le 7, pour la première division : $\frac{221}{35}$ (car même à la correction, l'élève s'arrête lorsqu'il trouve le reste 50 pour la deuxième fois).

```
                  6 , 3 1 4 2 8 5 7
 3 5 | 2 2 1 |
     |   1 1 | 0
     |     0 | 5 0
     |       | 1 5 0
     |       |   1 0 0
     |       |     3 0 0
     |       |       2 0 0
     |       |         2 5 0
     |       |           0 5 0
```

Lorsque vous effectuez une division à quotient décimal, il peut arriver seulement 2 cas :

a) Soit on retrouve deux fois le même reste : alors la division ne se finit pas mais on connaît très bien tous les chiffres puisqu'ils se répètent toujours dans le même ordre. Cette suite s'appelle une période.

.../...

Dans l'opération $\frac{221}{35}$, la période est "142857". Pour montrer la période sans être obligé de l'écrire plusieurs fois, il est d'usage de la souligner.

Exemple : $6,3\underline{142857}$
Quel est le dixième chiffre après la virgule ?

b) soit, on trouve des zéros à partir d'un certain rang seulement. Le quotient est décimal.

Note pour les maîtres : Dans les deux cas, le quotient et le diviseur permettent de retrouver exactement le dividende : si on n'arrondit pas, on ne perd pas l'information.
Mais il faut savoir que $0,9\underline{9} = 1$ $2,39\underline{9} = 2,4$

Exemple : $\frac{1}{3} \times 3 = 1$ $3 \times 0,3\underline{3} = 0,9\underline{9} = 1.$

Dans les deux cas, on peut toujours retrouver une fraction équivalente à la fraction originelle :

Exemple : quotient $q = 3,\underline{26}$
alors $100 \times q = 326,\underline{26}$
$99q = 326,\underline{26} - 3,26 = 323$
$q = \frac{323}{qq}$

3) On ne peut pas affirmer qu'une fraction n'est pas décimale tant qu'on n'a pas trouvé une période. Ici, l'enseignant fait remarquer aux enfants qui ont calculé la 2ème division et qui se sont arrêtés au zéro du quotient, qu'il n'était pas possible de conclure puisqu'ils n'avaient pas trouvé de période !

4) Il fait également remarquer que la méthode qui consiste à trouver une fraction égale de dénominateur 1000, 10000,... est souvent très coûteuse.

.../...

7.5.7 : Résultats :

Cette activité au cours de laquelle il faut faire beaucoup de divisions, a donné aux enfants l'occasion de maîtriser l'algorithme.

De plus, il est très motivant, excitant même pour eux de découvrir si une fraction est décimale ou non (certains ont voulu reprendre des fractions qui avaient été choisies au cours de l'activité 2, module 5, pour voir maintenant si elles pouvaient ou non être attrapées ! et ont fait pour cela des calculs d'une page).

Il n'est pas exagéré de dire que tous ont compris l'objectif de l'activité et qu'ils ont travaillé avec beaucoup d'enthousiasme et de plaisir.

7.6 : Problèmes. Situations.

1) L'abonnement d'un an à une revue hebdomadaire (52 numéros) revient à 199 francs.

1°) Calcule à un centime près par défaut le prix de revient de chaque numéro.

Cette même revue est vendue à raison de 5 F le numéro.

2°) Calcule au centime près par défaut le montant de l'économie réalisée sur chaque numéro si l'on souscrit un abonnement.

2) Un fermier prépare le carburant nécessaire au fonctionnement d'une machine agricole. Pour cela, il mélange 45 litres d'essence à 2,80 F. le litre et 2 litres d'huile à 9,50 F. le litre.

1°) Calcule, en litres, la quantité de mélange obtenu.

2°) Calcule, au centime près par excès, le prix du litre de mélange ainsi préparé.

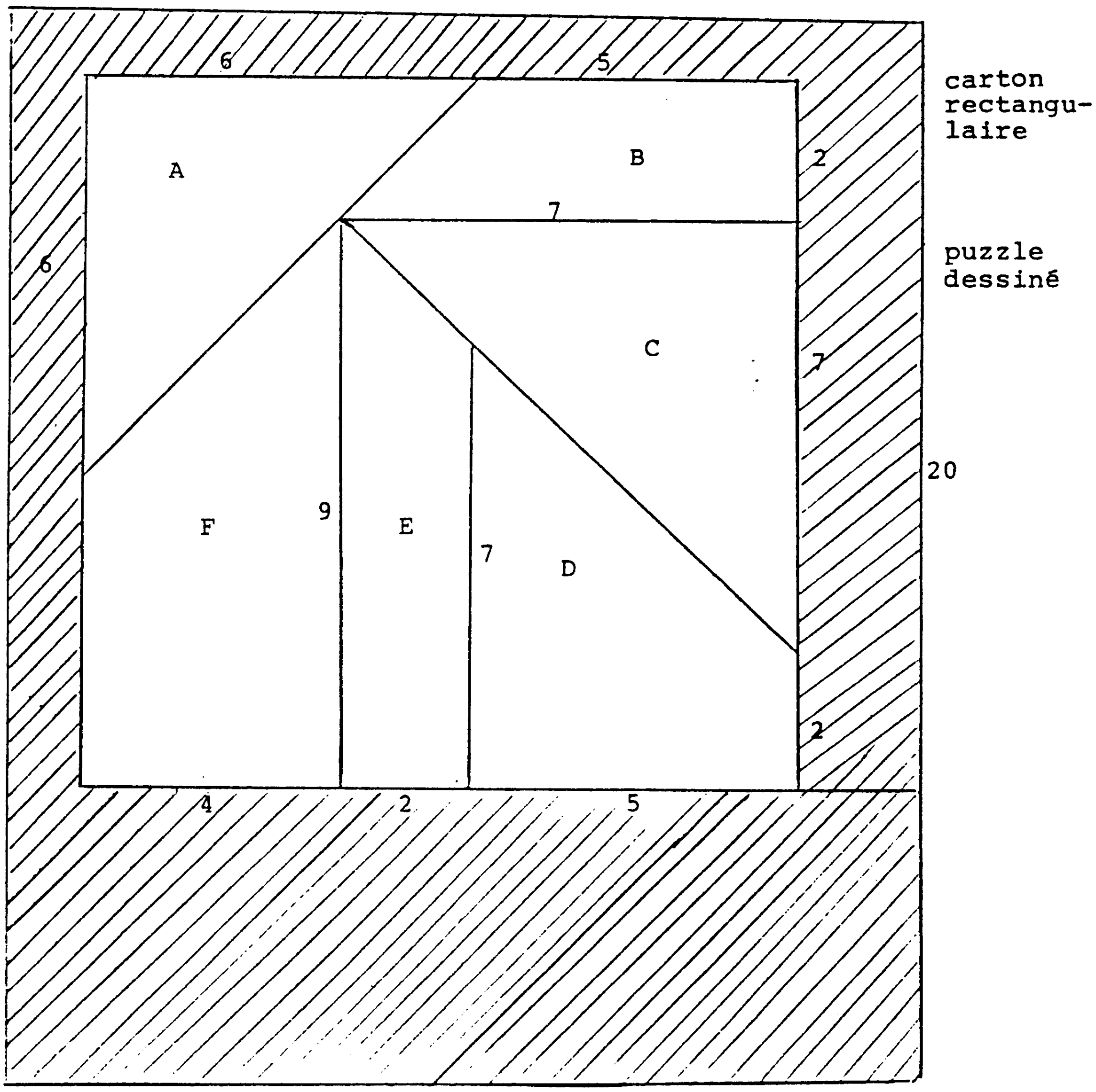
MODULE 8 :

SIMILITUDE

8.1 - AGRANDISSEMENT DU PUZZLE

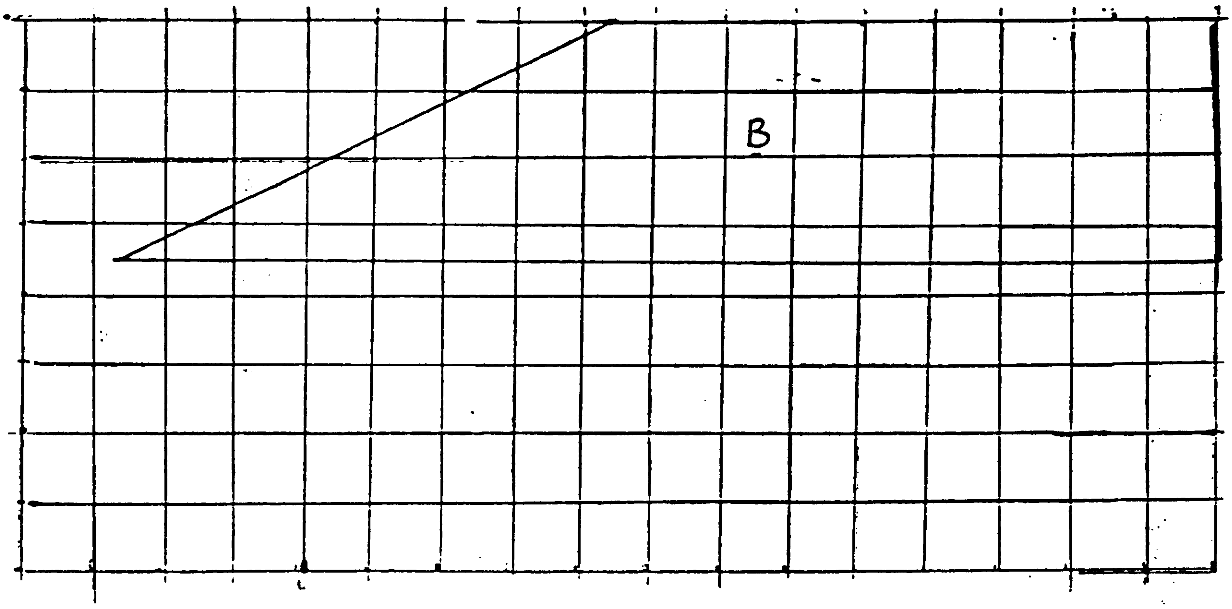
8-1-1 : Matériel :

. 6 à 8 puzzles (suivant le nombre d'enfants) dessinés sur des cartons rectangulaires de 20 cm x 15 cm. Pour chacun des puzzles, les 6 pièces (A, B, C, D, E, F), découpées dans le même carton.
(chaque puzzle et ses 6 pièces sont placés dans une enveloppe).



. des feuilles de papier affiche (en assez grand nombre) ou quand c'est possible, des feuilles de papier quadrillé, ce qui facilite et rend plus rapides les mesures et les tracés.

Ex.



. 1 double décimètre par enfant.

8-1-2 : Situation-problème :

a) Consigne : "Voici des puzzles. Vous allez en fabriquer de semblables, plus grands que les modèles en respectant la règle suivante : le segment qui mesure 4 centimètres sur le modèle devra mesurer 7 cm sur votre reproduction.

Je donne un puzzle par équipe. Chaque élève devra faire une ou deux pièces. Lorsque vous aurez fini, vous devrez pouvoir reconstituer les mêmes figures qu'avec le modèle".

b) Déroulement : Les enfants sont partagés en équipes de 4 ou 5. Après une brève concertation par équipe, ils se séparent pour réaliser leur(s) pièce(s).

Le maître affiche (ou dessine) au tableau une représentation agrandie du puzzle complet.

.../...

8-1-3 : Comportements et stratégies observés.

Stratégie 1.

a) Presque tous les enfants pensent qu'il faut ajouter 3 à toutes les dimensions : même si certains doutent de ce modèle, ils parviennent rarement à s'expliquer et à convaincre leurs partenaires à ce moment-là. Le résultat, évidemment, c'est que les morceaux ne se raccordent pas. Discussions, diagnostics, les leaders accusent leurs camarades d'avoir manqué de soin. Ce n'est pas le modèle, c'est la réalisation qui est mise en accusation ; certains refont tous les morceaux. Il faut se rendre à l'évidence, ce n'est pas facile !

L'enseignant n'intervient que pour encourager et constater les faits, sans exigences particulières.

Stratégie 2.

b) Certains essaient une autre stratégie : ils commencent par tracer le grand carré en ajoutant 3 à chaque segment, ce qui aboutit au résultat suivant : pour deux des côtés, la mesure est 17 cm (en effet, à 6 cm correspond 9 cm
à 5 cm correspond 8 cm → ce qui fait 17 cm)
pour les deux autres côtés, la mesure est différente : 20 cm.
(à 2 cm correspond 5 cm
à 7 cm correspond 10 cm → ce qui fait 20 cm)
à 2 cm correspond 5 cm)
ce n'est donc plus un carré ! Perplexité des enfants qui commencent vraiment à mettre en doute le modèle et qui disent souvent : "il ne faut sûrement pas ajouter 3 !"

Stratégie 3.

c) Une autre stratégie fréquemment utilisée (soit tout de suite, soit après les stratégies (a) ou (b)) est de multiplier chaque mesure par 2 et d'enlever 1 car les enfants constatent que :

$$4 \xrightarrow{(\times 2)\ -1} 7$$

Ceci donne un puzzle qui ressemble beaucoup au modèle.

.../...

Seules quelques pièces ne se raccordent pas bien. Alors quelquefois, les enfants se tirent d'affaire en donnant par ci, par là quelques coups de ciseaux de manière à raccorder tous les morceaux. Si la plupart d'entre eux sont conscients de la roublardise, certains, cependant, croient qu'ils détiennent la bonne solution. L'enseignant est obligé, pour ceux-là, de faire rétablir la vérité par le procédé utilisé dans le § (b).

$$\begin{array}{ccccccc} 4 & + & 2 & + & 5 & = & 11 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 7 & + & 3 & + & 9 & = & \underline{19} \end{array}$$

mesure incompatible si on utilise, pour trouver la mesure qui correspond à 11, la stratégie :

$$11 \xrightarrow{(x2)\ -1} 21\ !$$

8-1-4 : Remarques :

a) Divers processus sociaux et intellectuels se conjuguent pour rendre difficile la mise en cause du modèle. On assiste parfois à des manifestations affectives très vives : disputes, acharnement, menaces... rarement du découragement.

b) Il arrive cependant qu'un groupe réussisse à trouver le bon modèle et réalise le puzzle. Toute la classe, avec l'enseignant, constate la réussite mais la procédure sera examinée lors de l'activité suivante.

8-1-5 : Résultats :

Tous les enfants ont mis en oeuvre au moins une stratégie, la plupart en ont essayé deux. Ils sont tous persuadés à la fin de l'activité, que c'est leur modèle qui n'est pas correct et ils sont tous prêts à en changer afin de réussir le puzzle. Mais dans aucun des groupes on ne perçoit de lassitude ou de découragement. Et à la fin de la séance, tous ont envie de savoir, de trouver le "bon moyen".

8.2 - IMAGE D'UN ENTIER

8-2-1 :

a) Consigne : "Les différents procédés que vous avez utilisés hier pour refaire le puzzle ne sont pas bons puisqu'ils ne vous ont pas permis de le construire correctement.

Vous vous êtes rendus compte qu'en ajoutant 3 ou en faisant (x2)-1, les mesures ne sont pas correctes.

Au cours de cette séance, vous allez essayer de trouver les bonnes mesures qui permettront de réaliser le puzzle".

b) Déroulement :

1°) Pour plus de facilité, l'enseignant (ou quelquefois un des enfants qui a réussi dans l'activité précédente) dispose les longueurs dans un tableau :

4 —> 7
5 —>
6 —>
2 —>
9 —>
7 —>

Aussitôt, il en est toujours un pour demander que l'on trouve l'image de 8 (qui ne sert pas, mais qu'ils ajoutent malgré tout dans le tableau)

8 —> 14

Cette proposition, qui n'est pas rejetée, permet peut-être le surgissement presque instantané d'un autre modèle : "il faudrait l'image de 1!".
"Oui, ça permettrait de trouver toutes les autres !". Alors l'enseignant ajoute encore 1 dans le tableau et demande aux enfants de trouver les mesures.

2°) La recherche se fait par groupes de 2 ou 3 enfants qui ont tous reproduit le tableau des mesures sur leur cahier.

L'enseignant, comme dans l'activité précédente, va de

.../...

groupe en groupe, encourage, répond aux questions mais ne prend pas parti.

c) <u>Quelques procédés observés</u>.

1)
$$\begin{array}{lll} 4 \longrightarrow 7 & = \dfrac{70}{10} & \\ \big\downarrow :4 & \big\downarrow :4 & \\ 1 \longrightarrow & \dfrac{70}{40} = \dfrac{35}{20} = \underset{\times 5}{\overset{\times 5}{\dfrac{175}{100}}} = 1{,}75 & \end{array}$$

2)
$$\begin{array}{ll} 4 \longrightarrow 7 & \\ \big\downarrow :2 & \big\downarrow :2 \\ 2 \longrightarrow 3{,}5 & \end{array}$$

ici, ils ne font pas la division. Ils utilisent un savoir culturel qu'ils ont acquis et expliquent ainsi leur réponse :

"la moitié de 6 c'est 3
la moitié de 1 c'est 1/2 ou 0,5
3 + 0,5 = 3,5"

Ils continuent :

$$\begin{array}{ll} 2 \longrightarrow 3{,}5 = \dfrac{35}{10} & \\ \big\downarrow :2 & \big\downarrow :2 \\ 1 \longrightarrow \quad \dfrac{35}{20} = \dfrac{175}{100} = 1{,}75 & \end{array}$$

3) 2 —>3,5 qu'ils écrivent 3,50.

Pour trouver l'image de 1, ils écrivent la moitié de 3 → 1,50 et ajoutent la moitié de 50 centièmes soit 25 centièmes :

1,50 + 0,25 = 1,75;

Pour trouver les autres mesures, ils utilisent indiféremment l'un ou l'autre des deux procédés suivants :

- soit en multipliant successivement l'image de 1 par 5, 6, 7, 9.

1 —>1,75
5 —>1,75 x 5 = 8,75
6 —>1,75 x 6 = 10,50
7 —>1,75 x 7 = 12,25
9 —>1,75 x 9 = 15,75

.../...

- soit en ajoutant l'image de 1 et l'image de 4 pour trouver l'image de 5 :

1,75 + 7 = 8,75

en ajoutant l'image de 4 et celle de 2 pour trouver celle de 6 :

7 + 3,5 = 10,50 et ainsi de suite.

d) Remarque :

1) Une fillette ayant bien trouvé l'image de 1 a fait ensuite tous les calculs en utilisant, non 1,75 mais 1,7. A la question de l'enseignant :

"Mais pourquoi as-tu multiplié par 1,7 alors que tu as trouvé 1,75 ?"

Elle a répondu :

"Parce que je ne peux pas mesurer 1,75 cm avec mon double-décimètre puisque ça ne va que jusqu'aux millimètres !"

Les autres enfants étant immédiatement intervenus pour protester en disant "que c'était possible, qu'avec un crayon bien pointu on peut repérer à peu près le milieu entre deux millimètres", la fillette convaincue, n'a pas réalisé le puzzle avec les mesures qu'elle avait trouvées. Elle n'a donc pas pu se rendre compte de l'inexactitude de ses résultats.

2) Pour beaucoup d'enfants, mesurer 12,25 cm ; 15,75 cm représente effectivement une difficulté importante dont l'enseignant ne se rend pas toujours compte mais qu'il doit prendre en considération.

8-2-2 : Confrontation des méthodes et réalisation des puzzles.

a) Dès que tous les groupes ont trouvé les mesures, les méthodes sont confrontées, discutées par les enfants.

b) L'enseignant leur demande ensuite de faire les pièces et de reconstituer le puzzle. (D'eux-mêmes, d'ailleurs, les enfants le demandent).

Cette phase est absolument indispensable car c'est pour les enfants la seule preuve valable qui emporte leur conviction.

.../...

Mais c'est aussi surtout un moment de plaisir et d'enthousiasme pour eux : celui de l'effort récompensé et de la réussite !

8-2-3 : Résultats :

Tous les enfants savent qu'on peut toujours trouver l'image d'un entier et presque tous savent la calculer.

8.3 - IMAGE D'UNE FRACTION

8.3.1 - Première phase : Rappel des deux activités précédentes.

a) Consigne :

"Nous avons agrandi un puzzle. Pour cela, nous avions un modèle dont on connaissait les mesures et un renseignement sur l'une des mesures : à 4 correspond 7.

$$4 \longrightarrow 7$$

Qu'avez-vous cherché ?"

b) Déroulement :

Les enfants rappellent brièvement l'activité et l'enseignant fait un recensement rapide des procédures utilisées : il fallait trouver l'image de 1.

$$\begin{array}{ccc} 4 & \longrightarrow & 7 \\ 1 & \longrightarrow & \boxed{?} \end{array}$$

Autres exemples traités rapidement : "Si 9 a pour image 11, quelle est l'image de 1 ?"

L'enseignant peut envoyer un enfant au tableau ou demander à chacun de chercher sur son cahier de brouillon.

$$\begin{array}{cccc} & 9 & \longrightarrow & 11 = \frac{11}{1} & \\ :9 & \downarrow & & \downarrow & :9 \\ & 1 & \longrightarrow & \frac{11}{9} & \end{array}$$

(Un rappel de la division est souvent nécessaire ici, rappel qui se fait collectivement).

.../...

(*) Il est très important de faire régulièrement "le point" avec les enfants : rappeler ou faire rappeler quel problème avait été posé, quelles questions ce problème avait soulevées. Il est nécessaire qu'ils sachent ce qu'ils sont en train de résoudre. L'enseignant peut même, quelquefois, le rappeler en cours d'activité : en effet, beaucoup d'enfants lorsqu'ils cherchent des "moyens", des "solutions" d'un problème, oublient souvent le "pourquoi" de leurs calculs.

8.3.2. - Deuxième phase : Image d'une fraction.

a) Consigne : "Vous savez maintenant trouver l'image de n'importe quel entier.

Nous avons vu aussi que l'on peut désigner une mesure par une fraction ; à propos de quelle activité ? (construction de baguettes...)
Aujourd'hui, vous allez essayer de trouver l'image d'une fraction".

L'enseignant place $\frac{5}{7}$ dans un tableau de mesures

$$\begin{array}{ccc} 4 & \longrightarrow & 11 \\ \frac{5}{7} & \longrightarrow & ? \end{array}$$

b) Déroulement :

1. d'abord, il demande aux enfants de réfléchir et s'assure que tous ont bien compris le problème posé.

Spontanément, les enfants proposent d'ajouter 1 dans le tableau de mesures - ce que fait l'enseignant - Il leur demande ensuite de trouver l'image de 1.

$$\begin{array}{ccc} 4 & \longrightarrow & 11 \\ 1 & \longrightarrow & ? \end{array}$$

L'un des enfants vient écrire cette image de 1 sur le tableau, ce qui donne lieu encore à une révision rapide.
Le nouveau tableau de mesures se présente maintenant ainsi :

(1)
$$\begin{array}{ccc} 4 & \longrightarrow & 11 \\ 1 & \longrightarrow & \frac{11}{4} \\ \frac{5}{7} & \longrightarrow & ? \end{array}$$

Remarque : L'opérateur $\frac{11}{4}$ n'est pas identifié et ne doit pas l'être. C'est seulement une mesure.

2. A ce moment-là, pour cette recherche, les enfants travaillent par groupes de deux ou de trois.

c) Comportements observés :

1. Beaucoup "transforment" la fraction $\frac{11}{4}$ en nombre à virgule :

.../...

$\frac{11}{4} = \frac{275}{100} = 2{,}75$, et s'arrêtent là, car ils ne savent pas "multiplier $\frac{5}{7}$ par 2,75.

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] \arrow[d, bend right, "\times \frac{5}{7}"'] & \frac{11}{4} = 2{,}75 \arrow[d, bend left, "\times \frac{5}{7}"] \\ \frac{5}{7} \arrow[r] & 2{,}75 \times \frac{5}{7} \end{tikzcd}$$

2. La majorité "attrape" (1) $\frac{5}{7}$ en faisant comme précédemment :

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] \arrow[d, bend right, "\times \frac{5}{7}"'] & \frac{11}{4} \arrow[d, bend left, "\times \frac{5}{7}"] \\ \frac{5}{7} \arrow[r] & {} \end{tikzcd}$$

mais là encore, ils tombent sur des calculs qu'ils ne savent pas résoudre : la multiplication de 2 fractions : $\frac{11}{4} \times \frac{5}{7}$.

Il faut signaler cependant que certains d'entre eux écrivent bien le résultat exact $\frac{11}{4} \times \frac{5}{7} = \frac{55}{28}$ - uniquement par intuition - résultat qui n'est pas acceptable, bien entendu, puisqu'ils ne peuvent pas en prouver la véracité.

3. Souvent aussi, ils écrivent 4, 11 et 1 sous forme de fractions :

$4 = \frac{4}{1}$ $\quad 11 = \frac{11}{1}$ $\quad 1 = \frac{1}{1}$ puis sont bloqués là.

L'enseignant va de groupe en groupe, pose des questions, encourage. Essais infructueux.

Cette activité est difficile pour les enfants de cet âge-là et il faut les aider par des questions du genre :

.../...

(1) quelques expressions employées spontanément par les enfants pour se faire comprendre - soit de l'enseignant, soit des autres enfants - ont été adoptées par la classe entière et acceptées par l'enseignant. Des termes sont ainsi utilisés qui ne sont pas forcément "mathématiques" mais qui ne serviront que provisoirement pour certaines recherches, ne seront pas "institutionnalisés", donc oubliés ensuite, exemple : "attraper" "intermédiaire".

"comment faire pour "attraper" $\frac{5}{7}$,".

L'enseignant suggère de trouver d'autres "intermédiaires".

A cette étape, il organise une discussion collective car tous les enfants sont "bloqués" sur ce problème.

8.3.3. - Troisième phase : Recherche d'un "intermédiaire".

a) Consigne : L'enseignant demande aux enfants d'observer le tableau de mesures (i)(dans le § 8.3.2.) et pose la question :

"qu'est-ce qui permettrait "d'attraper" facilement $\frac{5}{7}$? Réfléchissez aux calculs qu'il faudrait faire".

b) Déroulement :

i) Une phase de réflexion collective commence d'abord.
Les enfants réfléchissent en silence puis font des propositions à haute voix qui sont aussitôt mises à l'essai sous le regard de toute la classe. Certaines d'entre elles n'aboutissent à rien : proposition de mettre 1 en fraction dans le tableau sous la forme $\frac{7}{7}$ ou $\frac{1}{1}$, ce qui ne fait pas avancer le problème puisque les enfants ne savent pas passer de $\frac{7}{7}$ à $\frac{5}{7}$ ou de $\frac{1}{1}$ à $\frac{5}{7}$.

D'autres, par exemple 5 ou $\frac{1}{7}$, sont retenues parce qu'elles apportent une solution possible à la question posée par l'enseignant :

Essais au tableau des 2 dernières propositions par un enfant ou par l'enseignant :

1er essai : 5.

- 5 est d'abord transformé en fraction : $\frac{5}{1}$

$$\frac{5}{1} \xrightarrow{:7} \frac{5}{7}$$

Remarque : A ce moment-là encore, il est généralement utile de faire encore un rappel de la division sous forme de petits calculs rapides tels que $\frac{25}{3}$: 9 = $\frac{25}{27}$ $\frac{13}{9}$: 5 = $\frac{13}{45}$, $\frac{81}{13}$:9 = $\frac{9}{13}$ etc... (quelques enfants savent et rappellent qu'il suffit de multiplier le dénominateur de la fraction par 7, ce qui la rend 7 fois plus petite)

.../...

<u>2ème essai</u> : $\frac{1}{7}$.

$$\frac{1}{7} \xrightarrow{x5} \frac{5}{7}$$

ii) <u>Les enfants se remettent en groupes de 2 ou 3</u> et reprennent la recherche qu'ils avaient commencée au cours de la 2ème phase.

c) <u>Stratégies observées</u> :

Tous les groupes font sur leur cahier un des deux tableaux :

<u>soit</u> :

4	11
1	$\frac{11}{4}$
5	
$\frac{5}{7}$	

<u>soit</u> :

4	11
1	$\frac{11}{4}$
$\frac{1}{7}$	
$\frac{5}{7}$	

suivant qu'ils adoptent l'une ou l'autre des deux propositions faites et mises à l'essai.

<u>Remarque</u> : Tous les groupes n'arrivent pas au bout des calculs car les enfants font des erreurs : ils ont oublié les techniques découvertes lors des leçons sur les opérations dans les fractions.

C'est tout à fait normal et l'enseignant, ne doit ni s'inquiéter, ni culpabiliser les enfants. Au contraire car c'est justement l'occasion de réutiliser des procédés découverts, il y a déjà longtemps, de les faire fonctionner et de montrer aux enfants à quoi ils servent.

8.3.4. - <u>Synthèse collective des méthodes.</u>

a) L'enseignant demande d'abord quels sont les groupes qui n'ont pas réussi. Il leur propose d'essayer de dire ce

.../...

qui les a gênés et pourquoi ils ne sont pas arrivés au résultat. Les enfants connaissent généralement très bien les raisons de leur échec : ils se trompent dans les multiplications et les divisions d'une fraction par un nombre - c'est la principale cause d'erreur.

b) Puis l'enseignant envoie des enfants au tableau pour décrire les méthodes utilisées :

1/

$$\begin{array}{rcccl} & 4 & — & 11 & \\ & 1 & — & \frac{11}{4} & \\ \times 5 & & & & \times 5 \\ \frac{5}{1} = & 5 & — & \frac{55}{4} & \\ :7 & & & & :7 \\ & \frac{5}{7} & — & \boxed{\frac{55}{28}} & \end{array}$$

2/

$$\begin{array}{rcccl} & 4 & — & 11 & \\ & \frac{1}{1} & — & \frac{11}{4} & \\ :7 & & & & :7 \\ & \frac{1}{7} & — & \frac{11}{28} & \\ \times 5 & & & & \times 5 \\ & \frac{5}{7} & — & \boxed{\frac{55}{28}} & \end{array}$$

8.3.5. - <u>Exercices d'entraînement</u>.

1) L'enseignant ajoute 2 autres fractions sur le tableau des mesures et les enfants calculent individuellement leurs images :

$$\begin{array}{ccc} 4 & — & 11 \\ 1 & — & \frac{11}{4} \\ \frac{7}{9} & — & ? \\ \frac{6}{7} & — & ? \end{array}$$

L'enseignant fait une correction collective. Il envoie au tableau les enfants qui ont encore des difficultés.

.../...

2) Conclusion. "Toutes les fractions ont-elles une image ?" demande l'enseignant.

Les enfants concluent, après réflexion, qu'on peut toujours trouver l'image d'une fraction puisqu'il est toujours possible de multiplier et de diviser des fractions par des nombres.

8.3.6. - Résultats.

A la fin de cette séance, les enfants ont compris qu'il est possible de trouver l'image de n'importe quelle fraction, connaissant l'image d'un entier naturel.

Tous, aussi, ont compris qu'il faut connaître l'image de 1 et celle d'un "intermédiaire" mais tous ne maîtrisent pas encore la suite des calculs et n'arrivent pas au résultat.

Il faut insister encore sur le fait que ceci est normal et que l'enseignant n'a pas lieu de s'inquiéter. Ce serait une grave erreur de faire des exercices répétés d'entraînement car les activités qui vont suivre permettront de réutiliser ces notions et d'en acquérir la maîtrise progressivement (au rythme de chaque enfant).

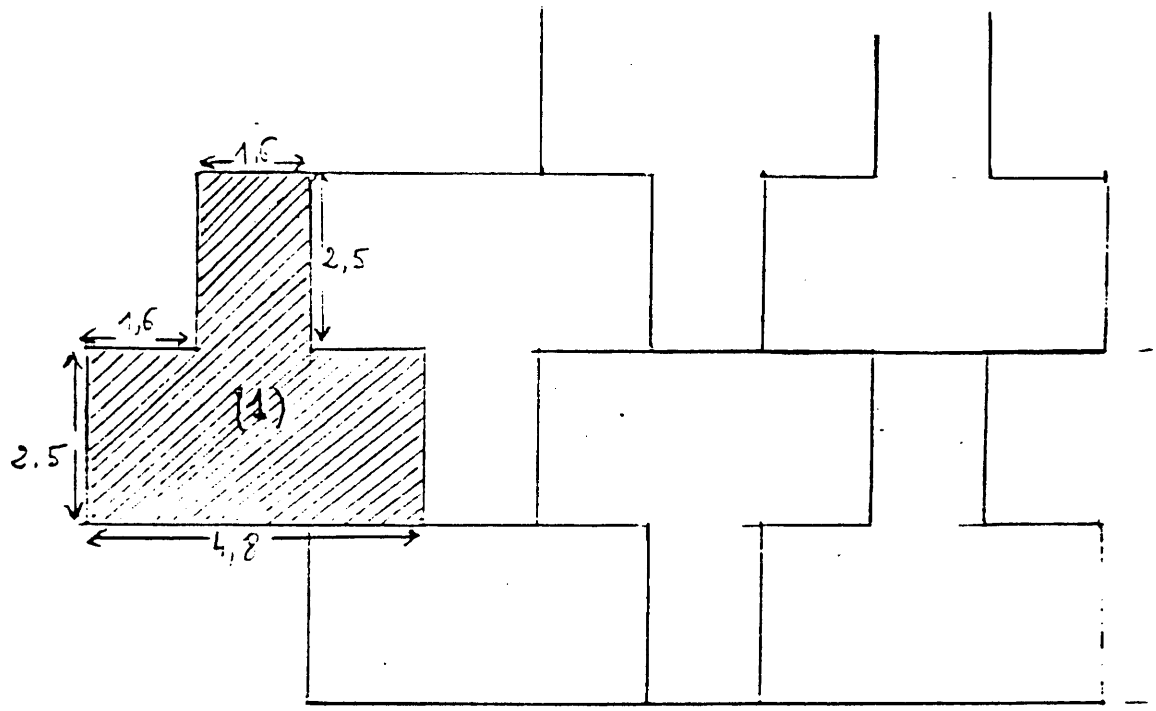
8.4 - IMAGE D'UN DECIMAL

8.4.1 : Matériel : 3 ou 4 pièces semblables au(1) réalisées dans du carton ou un dessin fait sur le tableau avant la leçon

8.4.2 : Situation-problème : Construction d'un pavage.

a) Consigne : "Nous allons réaliser un panneau décoratif pour notre classe.

Ce panneau sera formé d'un ensemble d'éléments identiques à (1) que nous arrangerons comme le montre ce dessin*:



Pour cela, chaque élève réalisera un de ces éléments en agrandissant le modèle de telle manière qu'à 1 cm du modèle correspondent 3,5 cm.

1 cm ⟶ 3,5 cm

.../...

* Le dessin aura été réalisé avant la leçon par l'enseignant
- soit sur le tableau, - soit sur la feuille.

b) <u>Le déroulement</u> :

Les enfants travaillent par groupes de 3. Ils cherchent d'abord un moyen pour trouver les mesures de la pièce

$$\begin{array}{lcl}
1 & — & 3,5 \\
2,5 & — & \\
1,6 & — & \\
4,8 & — &
\end{array}$$

c) <u>Stratégies observées</u> :

1) La stratégie la plus couramment utilisée par les enfants est celle qui consiste à écrire les nombres décimaux en fraction :

$$\begin{array}{lcl}
1 & — & \frac{35}{10} \\
\frac{25}{10} & — & \\
\frac{16}{10} & — &
\end{array}$$

et en se référant à l'activité précédente, ils calculent l'image de $\frac{1}{10}$ qu'ils ajoutent dans le tableau :

$$\begin{array}{llcl}
 & 1 & ——— & \frac{35}{10} \\
 & \downarrow :10 & & \downarrow :10 \\
 & \frac{1}{10} & ——— & \frac{35}{100} \\
 & \downarrow x25 & & \downarrow x25 \\
 & \frac{25}{10} & ——— & \frac{35}{100} \times 25 = \frac{875}{100} = 8,75 \\
x16 & \frac{16}{10} & ——— & \frac{35}{100} \times 16 = \frac{560}{100} = 5,60 \\
x48 & \frac{48}{10} & ——— & \frac{35}{100} \times 48 = \frac{1680}{100} = 16,80
\end{array}$$

2) Souvent, les enfants calculent aussi en décomposant les nombres décimaux de la manière suivante :

- Pour l'image de 2,5 :

.../...

2,5 = 2+0,5

1	→ 3,5
2	→ 7
0,5	→ 1,75
2,5	→ 7+1,75 = 8,75

x2 :2 :2 x2

Pour trouver la moitié de 3,5, ils écrivent :
3,5 = 3+0,5
la moitié de 3, c'est 1,5
la moitié de 0,50 c'est 0,25
la moitié de 3,50 c'est :
1,5 + 0,25 = 1,75

Pour l'image de 1,6 :

1,6=1+0,5+0,1

1	→ $3,5 = \frac{35}{10}$
$\frac{1}{10}$ = 0,1	→ $\frac{35}{100}$ = 0,35

:10 :10

1,6 → 3,5 + 1,75 + 0,35 = 5,6

Pour l'image de 4,8 :

4,8 = 4+0,5+(3x0,1)

1	→ 3,5
4	→ 14,0
0,5	→ 1,75
0,3	→ 3 x 0,35 = 1,05
4,8	→ 14 + 1,75 + 1,05 = 16,8

x4

Remarque : Cette dernière méthode est généralement utilisée par des enfants très bons en calcul mental. Beaucoup des calculs décrits ci-dessus ne sont pas marqués sur les cahiers, seuls les résultats apparaissent. C'est à la demande de l'enseignant (qui passe de groupe en groupe et qui insiste en disant : "mais comment avez-vous trouvé ceci ?") que les enfants consentent - souvent de mauvaise grâce - à les écrire (de manière très désordonnée parfois !)

8.4.3. - Phase 2 : Comparaison des méthodes.

1. Les groupes qui ont trouvé des résultats viennent à tour de rôle au tableau expliquer leur méthode. C'est l'occasion pour

.../...

les autres de voir où ils se sont trompés. Lorsque des enfants échouent à cette activité, c'est toujours à cause des erreurs de calcul.

2. Conclusion : Comme dans l'activité précédente, l'enseignant demande : "tous les nombres décimaux ont-ils une image ?"
Les enfants répondent bien entendu, affirmativement.

8.4.4. - Phase 3 : Réalisation des pièces

Chaque enfant réalise une ou plusieurs pièces dans du papier de couleur.

Comme dans l'activité du puzzle, ils sont de nouveau confrontés au problème de mesurage : 5,6 cm ; 8,75 cm ; 16,8 cm. De plus, ils doivent utiliser l'équerre pour leurs tracés, ce qui ajoute un deuxième intérêt à cette séance : la construction de figures géométriques.

8.4.5. - Résultats.

Cette activité a donné aux enfants l'occasion de remettre en oeuvre des procédés élaborés au cours de la séance précédente. Elle a permis à beaucoup d'entre eux de maîtriser des calculs difficiles qu'ils n'avaient pas réussi à mener jusqu'au bout.

8.5 - DIVISION D'UN DECIMAL PAR 10, 100, 1000...

8.5.1 - Image de $\frac{1}{10}$; $\frac{1}{100}$; $\frac{1}{1000}$.

a) Consigne : "Dans la leçon précédente, vous avez agrandi des pièces pour faire un panneau décoratif. Vous deviez les agrandir de telle manière qu'à 1 cm correspondent 3,5 cm. Maintenant, à l'aide de cet agrandissement :

$$1 \longrightarrow 3,5$$

vous allez chercher l'image de $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}$ d'abord en fraction, puis en nombre décimal".

b) Déroulement : Les enfants cherchent soit individuellement, soit par groupes de deux.

Ils complètent le tableau qui a été élaboré par l'enseignant en donnant la consigne :

$1 \longrightarrow 3,5$

$\frac{1}{10}$

$\frac{1}{100}$

$\frac{1}{1000}$

c) Correction : Cette activité qui ne présente pas de difficultés pour les enfants se déroule rapidement et très vite le tableau est complété. L'enseignant procède à une correction collective en faisant disposer les calculs de la manière suivante : la colonne (3) est complétée la première, la colonne 2 est complétée après la (3) : les enfants transforment l'écriture en fraction en écriture décimale.

ex : $\frac{35}{10} = 3,5$

$\frac{35}{100} = 0,35$ etc...

.../...

	Colonne 1	Colonne 2		Colonne 3	
	1 $\longrightarrow$	3,5	=	$\frac{35}{10}$	
:10	$\frac{1}{10}$ $\longrightarrow$	0,35 (:10)	=	$\frac{35}{100}$	:10
:100	$\frac{1}{100}$ (:10) $\longrightarrow$	0,035 (:10)	=	$\frac{35}{1000}$	:100
:1000	$\frac{1}{1000}$ (:10) $\longrightarrow$	0,0035 (:10) (:100)	=	$\frac{35}{10000}$	:1000

(I)

Les enfants n'ont pas tous employé la même stratégie : certains sont toujours partis de la première ligne pour trouver toutes les autres images

Exemple :

$$\begin{array}{ccc} :100 & 1 \longrightarrow \frac{35}{10} & :100 \\ & \frac{1}{100} \longrightarrow & \end{array}$$

D'autres partent du dernier calcul trouvé :

$$\begin{array}{ccc} :10 & \frac{1}{10} \longrightarrow \frac{35}{100} & :10 \\ & \frac{1}{100} \longrightarrow \frac{35}{1000} & \end{array}$$

Toutes ces stratégies sont recensées par l'enseignant et les enfants qui remarquent que "c'est pareil" quant à la rapidité et à la difficulté.

8.5.2 - Division d'un décimal par 10, 100, 1000

a) Observation du tableau (I)

L'enseignant demande aux enfants d'observer les résultats du tableau (I) et regroupe sous leurs yeux toutes les opérations sur les décimaux contenues dans ce tableau :

colonne 2

3,5 : 10 = 0,35
0,35 : 10 = 0,035
3,5 :100 = 0,035
0,035 : 10 = 0,0035
0,35 :100 = 0,0035
3,5 :1000 = 0,0035

.../...

b) Observation des opérations ci-dessus

Les enfants observent ces opérations et découvrent la règle de la division d'un décimal par 10, 100, 1000. Bien entendu, ils ne la formulent pas encore mais les constatations qu'ils font sur un exemple et qui sont vérifiées sur toutes les opérations, prouvent qu'ils ont compris :

"c'est le contraire de la multiplication !"

"Il faut reculer la virgule !!" etc...

L'enseignant fait alors expliciter la règle qui permet de trouver immédiatement le résultat :

"Pour diviser un nombre décimal par 10, 100, 1000, il faut déplacer la virgule d'un rang, 2 rangs, 3 rangs vers la gauche".

8.5.3 - Exercices d'application individuels.

Ces exercices sont faits par les enfants et l'enseignant procède à une correction immédiate.

1) 45,87 : 1000 =
139,2 : 10 =
4,750 : 100 =
25,785 : 10 000 =
0,08 : 100 =
0,08 : 1000 =

2) 135,9 x $\boxed{}$ = 1359
4,457 x $\boxed{}$ = 485,7
0,129 x $\boxed{}$ = 129
130 x $\boxed{}$ = 13000
1,675 x $\boxed{}$ = 16,75
5,45 x $\boxed{}$ = 5450

8.5.4 - Résultats.

Comme pour la multiplication d'un décimal par 10, 100, 1000, (module 6, activité 4), les enfants, bien qu'ayant compris, font beaucoup d'erreurs dans le déplacement de la virgule. Il est donc nécessaire de leur donner régulièrement des exercices (qui sont corrigés aussitôt) afin qu'ils acquièrent très vite la maîtrise de ces calculs qu'ils devront utiliser dans les activités ultérieures.

MODULE 9 :

LES APPLICATIONS LINEAIRES

9.1. UNE REPRODUCTION DE L'OPTIMIST

9.1.1 - Matériel :

- Le dessin d'un "optimist"* sur une feuille de papier canson dont les dimensions sont indiquées dans le paragraphe 8.5.2 et qui servira de "modèle".

- 11 reproductions de ce modèle, de tailles différentes, 6 plus petites, 5 plus grandes. Chacune de des reproductions est dessinée aussi sur une feuille de papier canson.

9.1.2 - Phase 1. Observation du dessin de l'"optimist"

1) L'enseignant affiche sur le tableau le dessin de l'optimist (le modèle) et demande aux enfants s'ils reconnaissent ce que c'est.

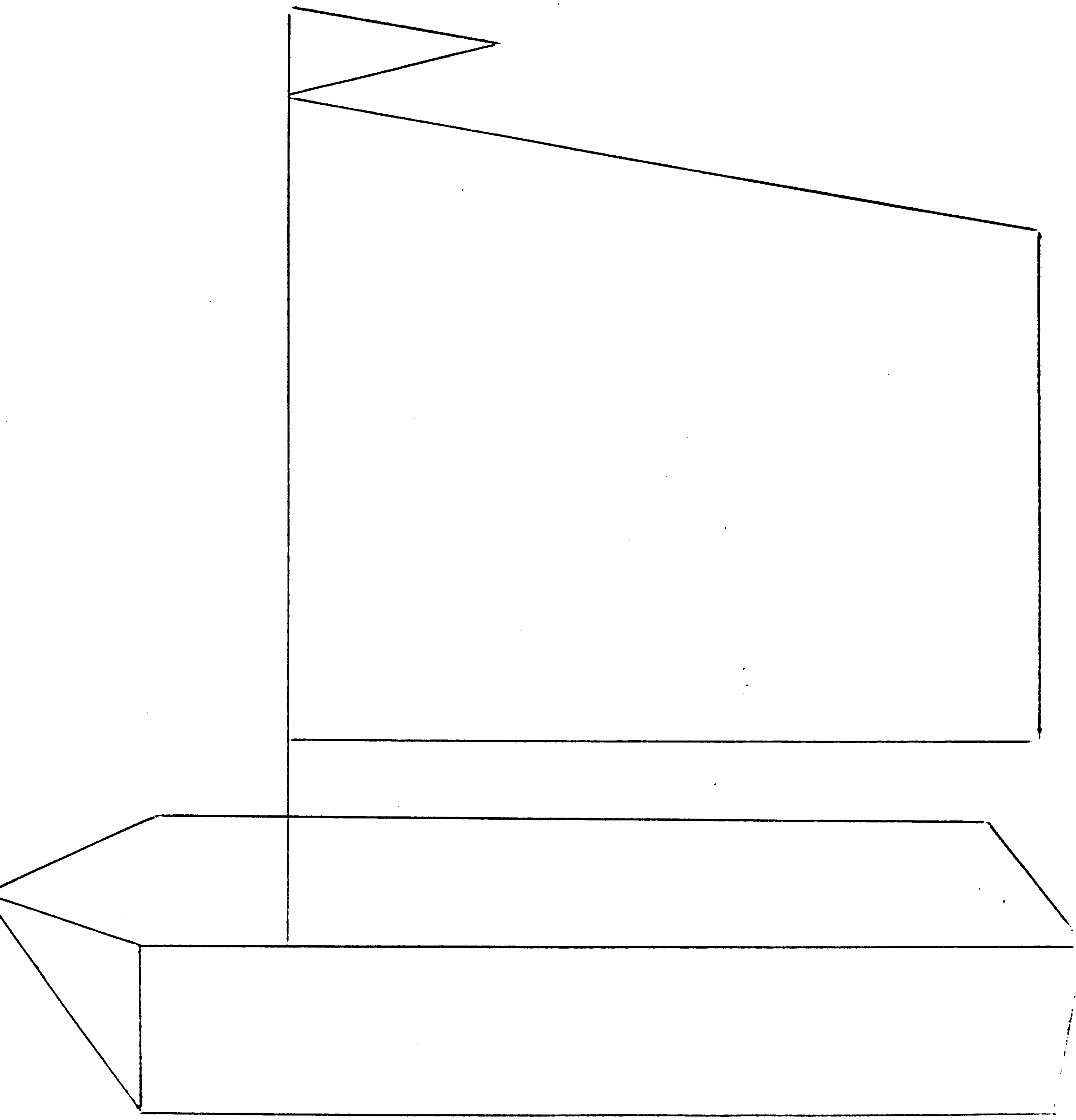
Il leur fait énumérer et désigner les principaux éléments du bateau, le mât, la bôme, le pavillon, l'étrave...

2) Puis il marque sur le tableau les dimensions de ces éléments :

hauteur du mât : 17,7 cm
hauteur du pavillon : 1,7 cm
côté du pavillon : 4 cm
longueur de la bôme : 14 cm
hauteur de la coque : 3,4 cm
longueur de l'étrave : 5,2 cm

.../...

*L'optimist a été choisi car les enfants qui étaient allés en classe de mer connaissaient tous ce bateau et l'avaient manoeuvré. Mais il est bien évident que l'on aurait pu choisir n'importe quel autre dessin.



…/…

9.1.3 - Première phase : présentation d'une reproduction (plus grande que le modèle)

L'enseignant affiche ensuite au tableau (à côté du modèle qui reste affiché) une reproduction plus grande de ce modèle (celle qui agrandit 1 fois 1/2).

Introduction à l'activité : "Que pouvez-vous dire de cet optimist ? que pouvez-vous dire sur ses dimensions ?"

Les enfants font des remarques : "il est plus grand", "ce n'est pas le double, c'est plus petit que le double". Ils demandent souvent : "est-ce que toutes les mesures sont pareilles ?", ce qui signifie : "est-ce que toutes les mesures ont été agrandies de la même manière ?"
parfois aussi ils disent : "est-ce qu'il est proportionnel ?"

L'enseignant répond aux enfants qu'ils trouveront eux-mêmes la réponse à ces questions s'ils trouvent les mesures de cette reproduction. Il demande alors :"est-ce que vous sauriez trouver ces mesures ? et pour cela de quel renseignement auriez-vous besoin ?" Les enfants répondent généralement qu'une mesure leur suffit.

<u>a) Consigne</u> : "Vous allez travailler en groupes et chaque groupe me demandera par écrit, la mesure qu'il souhaite. Puis, à l'aide de cette mesure, vous prévoirez, par le calcul, toutes les mesures de cette reproduction. Vous viendrez ensuite vérifier, avec votre double-décimètre, si les résultats que vous trouvez sont corrects et identiques aux mesures de la reproduction". Vous aurez alors les réponses à vos questions.

<u>b) Déroulement</u> : Les enfants travaillent par groupes de 2 ou 3. Ils cherchent d'abord ensemble une procédure qui va leur permettre de trouver ces mesures. Ensuite, ils se partagent les calculs : l'un calcule la bôme, l'autre le mât, l'autre l'étrave...

Dès qu'ils ont terminé, ils vont vérifier sur la reproduction, restée affichée au tableau, si les mesures qu'ils trouvent sont correctes. Ils font souvent des remarques à propos de ces résultats : "oui, c'est proportionnel" ou "on s'est trompé, nos mesures ne sont pas les mêmes..." alors ils reviennent à leur place et recommencent (c'est le cas d'un groupe qui, ayant demandé la mesure du mât, avait ajouté 8,55 à toutes les mesures car 26,55 - 17,5 = 8,55.

.../...

9.1.4 - Recensement des méthodes de calcul - choix d'une méthode.

a) Etude collective des réponses et des erreurs.

L'enseignant demande : "qui a trouvé les mesures qui sont les mêmes que celles du dessin ?" A ceux qui n'ont pas réussi à trouver de bons résultats, il demande pouquoi. Les enfants sont conduits à réfléchir sur ce qu'ils ont fait : erreurs de calcul ? mauvaise procédure ?

Il est intéressant de remarquer que beaucoup savent parfaitement pourquoi ils ne sont pas arrivés à trouver des mesures exactes et le disent : "on a choisi la hauteur du mât, alors c'était difficile parce qu'il n'y avait que des nombres décimaux..." ; "on n'a pas su faire des calculs..."; "on n'a pas su trouver l'image de 1..."

b) Exposé des méthodes correctes.

Les groupes qui ont réussi viennent au tableau montrer comment ils ont procédé. Il est évident qu'un ou deux groupes seulement (quelquefois trois) viennent car l'enseignant demande chaque fois qui a procédé de la même manière (les enfants reconnaissent toujours leur procédure).

9.1.5 - Différentes procédures utilisées par les enfants et présentées lors de la correction collective.

Remarque : Beaucoup de groupes ont demandé la mesure de la bome ou celle du côté du pavillon (car ces mesures sont des naturels sur le modèle : 14 cm et 4 cm).

Cependant, d'autres groupes ont demandé au hasard : mesure du mât, de l'étrave, etc...

Différentes procédures : Ils font tous des tableaux.

<u>1ère procédure observée dans 2 groupes</u> : un qui a demandé la mesure de la bôme, l'autre la mesure du mât.

<u>1er exemple</u> : mesure de la bôme.

Les enfants ont remarqué que : 14 + 7 (moitié de 14) = 21.
Pour trouver chaque mesure (de la reproduction) ils ont ajouté la mesure du modèle et sa moitié
3,4 = 3 + 0,4
5,2 = 5 + 0,2
1,7 = 1 + 0,70

Modèle	Reproduction
14 →	21
3,4 →	3,4+1,5+0,2 = 5,1
5,2 →	5,2+2,5+0,1 = 7,8
17,7 →	17,7+8,5+0,35 = 26,55

.../...

2ème exemple : mesure du mât

Ils ont écrit :

17,7 = 17 + 0,70

La moitié de 17,7 c'est la moitié de 17 plus la moitié de 0,70

8,5 + 0,35 = 8,85

17,7 + 8,85 = 26,55

Modèle	Reproduction
17,7 →	26,55

Cette remarque étant faite, la procédure est exactement la même que celle du 1er exemple.

2ème procédure observée

(pour ceux qui ont demandé la mesure de la bôme)

	Modèle	Reproduction
bôme	14 →	21
	1 →	1,5
Côté du pavillon	4 →	6
Hauteur du pavillon	1,7	
Ils écrivent en fraction :	$\frac{17}{10}$	
et calculent l'image de 1/10 ou 0,1	$\frac{1}{10}$ →	0,15
Hauteur de la coque :	3,4 →	5,10
Ils écrivent en fraction :	$\frac{34}{10}$ →	$\frac{510}{100}$

Ils font la même chose pour toutes les mesures.

Cette procédure est observée aussi dans les groupes qui demandent la mesure du côté du pavillon. Parmi ceux-là, un groupe a d'abord calculé l'image de tous les entiers : 17 ; 3 ; 5 puis l'image de 0,7 ; 0,4 ; 0,2 (voir tableau ci-dessous)

.../...

	Modèle		Reproduction	
	4	→	6	
:4	1	→	1,5	:4
x17	17	→	25,5	x17
	3	→	3 x 1,5 = 4,5	
	5	→	5 x 1,5 = 7,5	
:10	0,1	→	0,15	:10
x7	0,7	→	1,05	x7
x4	0,4	→	0,6	x4
	0,2	→	0,30	
	17,7	→	25,5 + 1,05 = 26,55	
	3,4	→	4,5 + 0,6 = 5,1	
	5,2	→	7,5 + 0,3 = 7,8	

3ème procédure observée

Les enfants expliquent qu'ils ont transformé la mesure en mm pour avoir un nombre entier

	Modèle		Reproduction	
	17,7	→	26,55	
x10	177	→	265,5	x10
:177	1	→	1,5	:177

4ème procédure observée

Ils écrivent en fraction :

Ils calculent l'image de 1/10

	Modèle		Reproduction	
	17,7	→	26,55	
	$\frac{177}{10}$	→	26,55	
:177	$\frac{1}{10}$	→	0,15	:177
x10	1	→	1,5	x10

Pour le calcul des autres mesures, ces enfants ont procédé comme dans la 2ème procédure.

9.1.6. COMMENTAIRE : **longueur calculée, longueur mesurée, approximations.**

Cette leçon, comme toutes celles où les élèves doivent effectivement mesurer des grandeurs et les comparer avec les résultats de leurs calculs, soulève des questions liées aux approximations (feuilles de papier

§ 1.1 ... constructions de grandeurs fractionnaires § 3.2, Puzzle, § 8.1

Il est souhaitable que le maître établisse petit à petit et surtout d'après les remarques ou les difficultés des enfants, une bonne pratique du traitement des valeurs mesurées dans les calculs ou des valeurs calculées dans les mesures sans pour autant les enseigner comme des savoirs.

Exemples : Erreurs de mesures.

Des élèves mesurant le même objet peuvent avoir des résultats différents : les premières leçons § 1.1 à § 2.1 avaient pour but de favoriser l'apparition de ce concept et d'attirer l'attention des élèves sur :
- l'importance de distinguer les différences acceptables (erreurs de mesure) de celles qui ne le sont pas parce qu'elles sont trop grandes et qu'elles mettent en cause le raisonnement.

Exemple : 25 f $\longrightarrow$ 3 mm
ou 27 f $\longrightarrow$ 3 mm

s'il s'agit de feuilles très minces, sont acceptables toutes les deux par contre, s'il s'agit des feuilles les plus épaisses (E) ce n'est plus acceptable!

Ils ont pu remarquer aussi l'effet des opérations de sommes (physiques) sur les erreurs de mesure.

Valeur calculée (V.C) Valeur mersurée (V.M)

De nombreuses occasions de confronter des valeurs prévues par le calcul (à partir de mesures effectives) avec des valeurs mesurées directement, ont donné l'occasion au maître d'insister sur les différences d'exigences que l'on doit avoir à leur égard :

Il est acceptable de manipuler une longueur calculée de 1,275 cm surtout si elle sert à d'autres calculs.

Il ne l'est pas d'annoncer une longueur mesurée directement de 1,275 ou de $\frac{7}{3}$ cm.

Il est temps de demander aux élèves de signaler cette distinction dans les tableaux de nombres qu'ils écrivent. Par exemple, en mettant "VMD" ou "LMD" (valeur ou longueur mesurée directement) après ces valeurs.

Il est important en tout cas que le maître ne substitue pas sans précautions les valeurs qu'il attend à celles qui fournissent les mesures au cours de ces exercices.

.../...

Correspondance entre une valeur calculée et une valeur mesurée.

La manipulation des intervalles ,introduite dans les paragraphes 4.3 et 4.4 et suivants, permet de discuter sans formalisme et sans cours théorique l'appartenance ou non d'une VMD à un intervalle d'erreur autour de la valeur calculée.

Les enfants repèrent un intervalle : "la valeur est comprise entre 7,42 et 7,43" et,

- soit calculent sur les deux valeurs le nouvel intervalle calculé
- soit estiment l'intervalle : 1/10 de millimètres et opèrent les calculs sur cet intervalle.

Attention : Si A est compris entre 7,42 et 7,43

et si B est compris entre 3,27 et 3;28

A-B est compris entre 7,42 - 3,28 = 4,14

et 7,43 - 3,27 = 4,16

le nouvel intervalle d'erreur est de 2 mm. L'effet introduit par la multiplication est très simple à comprendre pour les élèves.

Valeur attribuée à une application à la suite de plusieurs mesures directes approximation :

Exemple : On a cherché à donner une valeur à l'application linéaire suivante

3 ⟶ 7,1 VMD

6 ⟶ 13,9 VMD

Le calcul fournit des valeurs différentes des applications pour les deux valeurs mesurées : 2,366... et 2,31..., laquelle choisir ?
Les élèves proposent habituellement celle qui facilite l'expression, ici ils calculeraient la même valeur pour toutes les VMD

$$\begin{array}{rcccl} & 3 & \longrightarrow & 7,1 & \text{VMD} \\ \times 2 & \downarrow & & \downarrow & \times 2 \\ & 6 & \longrightarrow & 14,2 & \\ & 6 & \longrightarrow & 13,9 & \text{VMD} \end{array}$$

et choisiraient 6 ⟶ 14

ici encore il s'agit simplement de savoir quelles pratiques sont acceptables ou non. La théorie de l'approximation d'une application est hors de portée des élèves mais pas la pratique.

Il est important que cette approximation ne soit pas faite sournoisement afin que les élèves puissent la remettre en cause.

Exemple : avec la même application on mesure plus tard :

60 ⟶ 138 VMD.

.../...

Les élèves peuvent revenir sur l'approximation qu'ils ont faite plus haut, si elle a été explicite.

Arrondi, erreurs d'arrondi, valeur approchée.

C'est seulement lorsque les élèves auront été familiarisés avec ce genre de questions et de raisonnement justifiés par des problèmes pratiques effectifs où les conceptions erronées peuvent être matériellement montrées fausses que les enfants peuvent commencer à utiliser l'approximation pour se faciliter les calculs. Remplacer 2,39 par 2,4 pour la seule raison que l'erreur d'arrondi ainsi introduite n'a pas de conséquence pour la suite et facilitera les calculs peut s'appuyer sur une bonne maîtrise du calcul d'erreurs de mesures car les raisonnement sosnt les mêmes. Il ne nous a pas paru très utile de les confondre comme il est fait trop souvent. 2,4 est une valeur approchée de 2,39 valeur exacte. Les élèves signalent ce nouveau "type de valeurs" comme précédemment (VA). Cette pratique interviendra principalement dans la présentation du quotient d'une division : $\frac{7}{3}$ = 2,3 (VA). Il était clair pour les élèves que le signe "=" dans "$\frac{7}{3}$=2,3" est faux et nous n'avons pas voulu introduire $\frac{7}{3}$ = 2,33... imprécis ou la notation mathématique $\frac{7}{3}$ = 2,33.

La valeur exacte est $\frac{7}{3}$ bien sûr et nous savons comment la traiter.

Comment enseigner ces pratiques ?

La plupart des exercices pratiques réels conduisent à se poser ce genre de questions. Il est important de les traiter au moment opportun pour chaque élève. Il est possible que la répugnance des maîtres pour les mesures effectives vienne en partie de ce qu'ils ne savent pas comment traiter ces problèmes. La tradition et les programmes sont muets sur ces points. Il n'est pas question de clarifier toutes ces questions dès le premier exercice pratique ; le maître laisse les problèmes surgir et même les souligne, il les résoud ,à la demande, de la façon correcte du point de vue mathématique sans retarder le déroulement des activités effectives. Il utilise le langage correct sans ostentation ni dogmatisme, mais exige à l'occasion des élèves les précisions nécessaires à l'action : précision de la pensée et non précision formelle du vocabulaire. Lorsque les conceptions floues, les pratiques erronées conduisent à des "conflits de connaissances", les élèves discutent et le maître institutionnalise les bonnes pratiques ou laisse le problème théorique ouvert et tranche pratiquement.

.../...

L'appropriation du langage correct est tributaire du développement des conceptions des élèves. Le processus choisit donne de nombreuses occasions de mise à l'épreuve de ces conceptions ; certains élèves assimileront très vite une pratique correcte, d'autres se contenteront provisoirement de fuir les complications et fourniront le moment venu les sujets de mise au point indispensables.

L'architecture du processus permet, le moment venu, de disposer des concepts théoriques suffisants pour dénouer la plupart des questions et en même temps de disposer des occasions qui font progresser les problèmes théoriques correspondants.

9.2. UNE DEUXIEME REPRODUCTION DE L'OPTIMIST

9.2.1 - Phase 2. Présentation d'une autre reproduction (celle qui agrandit 1,4 fois)

L'enseignant affiche cette reproduction. Comme la première fois, les enfants font des remarques "elle est plus petite que l'autre", "à peine plus petite" mais elle est aussi "plus grande que le modèle".

a) Consigne : "Comme pour la première reproduction, vous allez calculer les mesures de ce bateau. Pour cela, je vous donnerai le renseignement que vous me demanderez sur votre cahier".

b) Remarque : Avant même de calculer, les enfants qui avaient utilisé la première procédure disent : "on ne pourra pas utiliser notre méthode pour ce bateau !" Par contre, ceux qui avaient utilisé la deuxième, la troisième et la quatrième, disent : "nous, on pourra utiliser la nôtre. Elle pourra toujours servir !"

c) Déroulement : Les enfants travaillent de nouveau par groupes de 2 ou 3. Ils choisissent une des 3 dernières méthodes. Généralement, ceux qui doivent en changer, utilisent la 3ème. Par contre, ceux qui avaient utilisé la 2ème méthode et la 4ème, les essaient de nouveau pour se prouver et pour prouver aux autres qu'elles sont valables dans tous les cas.

d) Correction collective et comparaison des méthodes : L'enseignant procède à une correction collective. Les procédures utilisées restent sur le tableau et sont comparées.

C'est la troisième (passage par des entiers) qui paraît la plus rapide et donc qui sera adoptée par la majorité des enfants.

9.2.2 - Résultats

a) Tous les enfants savent calculer les mesures d'une reproduction, connaissant une mesure sur le modèle et son image sur la reproduction.

Ils savent aussi qu'on peut trouver n'importe quelle mesure si on connaît une mesure et son image (que ces mesures soient entières ou décimales).

.../...

b) Ces deux activités qui ont permis, grâce à une situation différente, de calculer une deuxième fois l'image d'un décimal, donne aux enfants l'occasion d'utiliser et d'assurer une ou des procédures qu'ils ont déjà découverte(s) de les comparer et de choisir la plus rapide ou celle qui leur paraît la plus facile. Une de ces procédures est privilégiée par l'enseignant et institutionnalisée pour être utilisée dans les activités suivantes.

9.3. BEAUCOUP DE REPRODUCTIONS DE L'OPTIMIST

9.3.1 - Matériel :

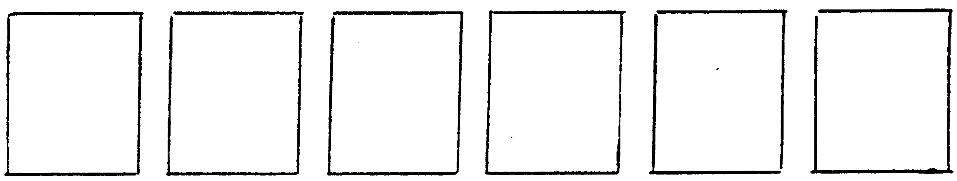
- Le modèle de l'optimist et les 2 reproductions des séances précédentes
- 6 reproductions plus petites que le modèle (dont les dimensions sont données dans les tableaux (I et II) p. 198
- 4 reproductions plus grandes que le modèle (ce qui fait 6 avec les deux utilisées dans l'activité précédente).

9.3.2 - Présentation de la situation :

L'enseignant remet le "modèle" de l'optimist au tableau et il montre 5 reproductions (2 plus grandes et 3 plus petites) de ce modèle : ce sont les reproductions désignées sur le tableau I (0,25 ; 0,67 ; 0,75 ; 0,94 ; 1, 25 ; 1,5).

a) "Pouvez-vous mettre ces dessins dans l'ordre depuis votre place ?"

L'enseignant affiche les reproductions sur le tableau dans l'ordre indiqué par les enfants et les désigne dans cet ordre-là par les lettres A, B, C, D, E, M pour le modèle, comme ci-dessous.



A B C M D E

Les enfants hésitent beaucoup entre la B et la C qui sont "voisines".

Certains pensent que B est avant C, d'autres pensent que C est avant B.

Comment être certain de ce que l'on prévoit ?

Les enfants disent qu'il faudrait calculer les mesures. L'enseignant prépare le tableau suivant (A) correspondant au classement effectué par les enfants :

.../...

	M Modèle	A	B	C	D	E
Bôme	14					
Mât	17,7					
Côté pavillon	4					
Hauteur pavillon	1,7					
Etrave	5,2	1,3	3,484	3,9	4, 888	6,5
Hauteur coque	3,4					

(A)

b) " Je vous donne la mesure de l'étrave pour toutes ces reproductions" et il inscrit dans le tableau la mesure de l'étrave pour chacune des reproductions correspondant au classement. Les enfants qui avaient hésité pour les deux dessins très "voisins" peuvent s'apercevoir alors

- soit de leur erreur (et rectifier)
- soit qu'ils ont bien rangé.

Toutes les reproductions sont alors dans un bon ordre.

9.3.3 - Deuxième phase : calcul des dimensions.

a) Consigne : "maintenant, je vous donne la mesure d'un mât : 13,275 (valeur calculée). Pouvez-vous deviner de quelle reproduction il s'agit ?"

b) Analyse de la tâche

La consigne ne dit pas ce qu'il faut calculer et les élèves ont, pour comprendre le problème, à identifier les variables pertinentes : qu'est-ce qui peut servir, quelles relations ?

i/ Par exemple on pourrait calculer un agrandissement

$$17{,}7 \longrightarrow 13{,}275$$

puis calculer tous les agrandissements grâce aux dimensions de l'étrave :

$5{,}2 \longrightarrow 1{,}3$ $\qquad$ $5{,}2 \longrightarrow 3{,}484$...

ii/ Mais on pourrait aussi calculer la dimension de tous les mâts et comparer à celui qui est donné.

.../...

iii/ On peut enfin calculer l'étrave du bateau inconnu et la comparer à celles que l'on connaît. Certains élèves n'arrivent à envisager aucune stratégie et ne comprennent pas quelles comparaisons ils peuvent faire. Si le maître réduisait directement le problème en évoquant les nombres à choisir et le nombre à calculer, il viderait le problème de son intérêt. Il vaudrait encore mieux que ces élèves jouent à la devinette et aillent mesurer le mât d'un bateau choisi au hasard. Le but pour les enfants n'est pas d'accomplir une tâche mais de la déterminer. La définition de la tâche par le maître rend donc le problème sans objet. Ils pourraient peut-être alors voir avec quoi ils peuvent comparer la longueur du mât de l'image inconnue.

c) Déroulement : Les élèves font des remarques du genre :
- l'image est plus petite que le modèle puisque au lieu de 17,7 le mât mesure 13,275
- mais pas beaucoup plus petite...
- ce n'est pas E parce que E agrandit (utilisation implicite de la longueur de l'étrave). Cette stratégie de réduction du champ de réponses permet l'activation des bonnes relations
- ce n'est pas A parce que A est beaucoup plus petit... l'étrave fait moins de la moitié de celle du modèle...
- Ils parviennent par ce moyen à déduire le champ à deux ou trois réponses possibles. B ou C ? ou bien B ou C ou D ?

Alors pour "être sûr" ils proposent eux-mêmes de faire des calculs. Mais quels calculs ? Qu'est-ce qui permettrait de savoir à quel bateau appartient ce mât ?

L'enseignant leur demande de réfléchir et ensemble, les enfants discutent. Après tâtonnements et hésitations, l'un d'entre eux vient écrire le tableau suivant :

Modèle	Reproduction
17,7 →	13,275
5,2 →	$\boxed{}$

Par groupes de deux, ils calculent la mesure de l'étrave en mettant en oeuvre l'une des méthodes étudiées dans la séance précédente. La correction est faite collectivement. C'est un enfant qui avait eu des difficultés dans l'activité précédente que le maître envoie au tableau. Après un recensement rapide des procédures étudiées, il choisit presque toujours la troisième (cf. séance 8-5).

.../...

	Modèle	Reproduction	
	17,7	13,275	
x10	5,2	5,2 x 0,75 = 3,9	x10
	177	132,75	
:177	1	0,75	:177

Tous les enfants peuvent voir alors dans le tableau A que cette mesure de l'étrave : 3,9 cm est celle du bateau C.

9.3.4 - Troisième phase, calcul individuel.

a) Consigne : "Je vais vous donner d'autres renseignements et très vite, vous allez essayer, chaque fois, de deviner de quel bateau il s'agit"

b) Déroulement : Les enfants travaillent seuls. Chacun doit pouvoir se rendre compte s'il a appris et s'il sait calculer n'importe quelle mesure.

L'enseignant donne des mesures : par exemple :

- la mesure d'un côté du pavillon : 3,76

A quel bateau appartient-il ?

- puis celle d'un mât : 11,859
- puis celle d'une bôme : 3,5, etc...

Une correction collective est faite pour chacune des mesures et c'est l'occasion pour les enfants de dire quelles sont leurs difficultés et de comparer les méthodes de calcul. Il faut aller vite ! Les calculs sont longs. Après discussion, quelques enfants disent généralement que ce serait plus rapide s'ils connaissaient l'image de 1. D'autres pensent que non.

c) Concours de vitesse :

L'enseignant donne une autre mesure : celle de la hauteur du pavillon du bateau D, par exemple. Il demande de trouver à quel bateau elle appartient (comme précédemment) en essayant les 2 sortes de calculs :

- les enfants qui ont demandé l'image de 1 l'utilisent (premier groupe)
- ceux qui ne sont pas convaincus que ça ira plus vite utilisent la mesure de la hauteur du pavillon du modèle (2ème groupe). Le premier groupe a bien sûr terminé avant et les méthodes sont comparées aussitôt :

Modèle	Reproduction
1	0,94
1,7	?

1er groupe

Modèle	Reproduction
5,2	4,888
1,7	?
1	

2ème groupe

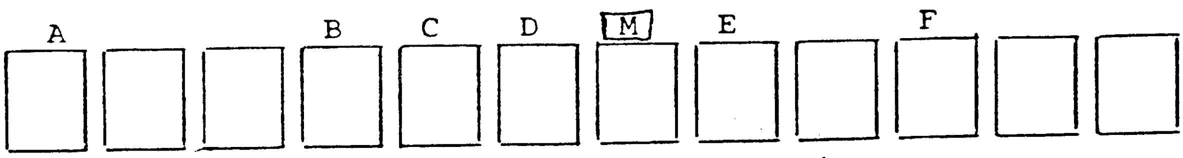
Avant même que le tableau de mesures soit terminé, les enfants voient immédiatement pourquoi les calculs du 2ème groupe ont été plus longs : il faut de toute façon calculer l'image de 1 pour pouvoir trouver celle de 1,7.

9.3.5 - Rangement, désignation et classement des autres reproductions.

a) Consigne : "Voici d'autres reproductions du même modèle (il s'agit des 5 autres reproductions - tableau II). J'en prends une. Je vous donne une dimension de cette image et vous allez me dire où elle se place par rapport à celles qui sont déjà sur le tableau (on fait un calcul rapide sur le tableau si c'est nécessaire), de façon à ce qu'elles soient rangées de la plus petite à la plus grande.

b) Déroulement : Cette phase se déroule très rapidement sur le mode "questions-réponses". Les enfants ont l'impression de jouer.
"En voici une autre" "où la placer ?" "est-ce qu'elle agrandit plus ou moins ?"
Les enfants remarquent : les rapetissements sont d'un côté, les agrandissements de l'autre.

L'enseignant place les 5 autres images aux endroits indiqués par les enfants et leur demande :



"Comment désigner ces images ? Comment savoir de combien elles agrandissent ?"

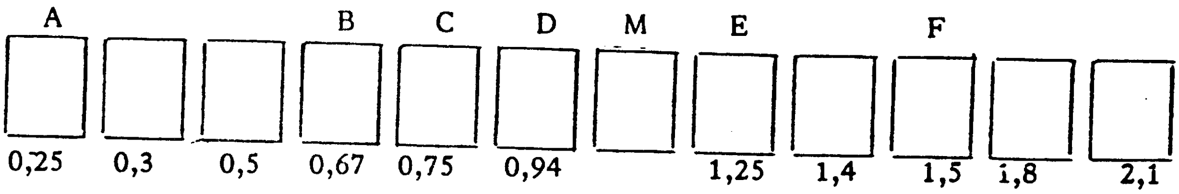
Beaucoup proposent de désigner par A, A_1, A_2, B... L'enseignant dit alors qu'il en a une autre qui se place entre A_1 et A_2.

Les enfants se rendent compte alors que les lettres ne conviennent pas pour ranger et qu'il faut trouver un autre moyen. Souvent, l'un d'entre eux propose de marquer l'image de 1 puisqu'elle permet de savoir si ça agrandit peu ou beaucoup. Si aucun enfant n'y pense, l'enseignant le suggère et demande de vérifier si ce moyen de désignation donne les renseignements souhaités, à savoir que l'image de 1 permet :
- de retrouver l'image de n'importe quel nombre
- de placer n'importe quel agrandissement ou rapetissement.

Il propose alors à un enfant de montrer où on placerait :
- un agrandissement de 1, 35, de 1,87 etc...
- un rapetissement de 0,72, de 0,29...

.../...

- et inversement, de trouver d'autres agrandissements entre ceux qui sont déjà affichés : par exemple entre 1,4 et 1,5 ou d'autres rapetissements : par exemple entre 0,5 et 0,67 (les enfants en écrivent sur leur cahier de brouillon).



L'enseignant inscrit alors toutes les images de 1 sous les reproductions.

9.3.6 - Agrandissements, rapetissements 1 ou 0 ?

"Que remarquez-vous à propos des nombres qui désignent les reproductions ? (les images de 1 (l'unité) sur le modèle)".

- ils sont rangés du plus petit au plus grand !
- plus l'agrandissement est grand plus le nombre est grand !
- il y en a un qui n'a pas de nombre, c'est le modèle !

Les élèves envisagent de lui donner un nombre. Certains proposent 1, d'autres 0.

- Tous les rapetissements sont représentés par des nombres plus petits que 1
- Les nombres plus grands que 1 correspondent à des agrandissements,

M est entre les deux, il faut mettre 1.

Le maître dit alors : si je fais une reproduction en utilisant 1 1 qu'est-ce que j'obtiens ?

- une reproduction "égale" au modèle. Elle n'agrandit pas et ne rapetisse pas
- Justement, ça ne fait "rien" - Agrandir de rien, ça devrait faire zéro !

Le maître dit : "Avec notre convention, il faut mettre 1, mais que donnerait la reproduction 0 ?"

1 ———— 0

2 ———— 0 etc...

- "rien" "un point"...

b)

Le maître :-"Savez-vous reconnaître si la reproduction 0,84 est un agrandissement ? et 3,40 ? et 1,10 ? et 0,01 ?"

-"Que voudrait dire un agrandissement de 2? Les élèves répondent 1 ——— 2, et un rapetissement de 2 ? ou un agrandissement de $\frac{1}{2}$? ... contradiction ?

.../...

Conclusion : Il faut dire "reproduction "1 ⟶ 2" puisque le nombre suffit à dire si c'est un agrandissement ou un rapetissement.

Remarque : Les élèves ont tendance à choisir comme dans la langue naturelle le terme le plus précis pour désigner un objet et donc à préférer "agrandissement" ou "rapetissement" à "reproduction". Mais ce qui n'est que redondance dans "agrandissement de 1 ⟶ 4" peut devenir contradiction si, comme dans la langue naturelle on combine par croisement (multiplication logique) deux expressions d'un même objet. L'expression "les rectangles carrés" est inhabituelle mais logique, mais "les carrés rectangles" évoquent des carrés "non rectangles" qui n'existent pas.

(Autre exemple : Des "mammifères chats" sont concevables, mais des "chats mammifères" évoquent la possibilité de "chats non mammifères !?")
Ce genre "d'accidents" ne peut pas être évité seulement par des dispositions de formulation et de vocabulaire. Les élèves doivent se soucier de ce qu'ils disent !

Remarque : Cette leçon suit le modèle : "questions-réponses- (maïeutique socratique). Au lieu d'organiser comme il l'a fait pour désigner les épaisseurs de papier, une vraie situation de communication, le maître se contente ici de l'évoquer, parce qu'elle est familière aux enfants et parce que sa réalisation n'apporterait guère d'imprévu.

L'intériorisation par des élèves des types de situations qui "justifient" l'aménagement du savoir qu'on leur propose fait partie de la construction épistémologique dont le maître la charge. Cette intériorisation permet de gagner du temps par la suite sans rien perdre du sens des connaissances créées.

9.3.7 - Exercices individuels.

1) Où placerait-on un agrandissement de $\frac{7}{4}$?
2) Trouver un agrandissement entre 2 et 2?5.
3) On a pris un agrandissement de "3,2". Calculer la mesure du côté du pavillon de cet agrandissement.
4) La bôme d'une reproduction mesure 7 cm. Calculer l'agrandissement.

Remarque : Il n'est pas obligatoire de faire immédiatement tous ces exercices. Ils ocnstituent un éventail dans lequel l'enseignant fait un choix. Ils peuvent se faire soit individuellement, soit collectivement au tableau, soit alternativement, individuellement ou collectivement.

.../...

9.3.8. - Résultats

Tous les enfants ont compris la signification de l'image de 1 et tous les renseignements qu'elle permet d'obtenir. En particulier ils savent que le calcul du correspondant de 1 est un moyen plus rapide lorsqu'on veut trouver beaucoup de correspondances que le calcul par les "opérateurs" (les rapports) dans chaque ensemble. Ils maîtrisent les calculs et savent trouver n'importe quelle mesure :

. la mesure d'une dimension de la reproduction connaissant la mesure correspondante du modèle et l'image de 1.

. la mesure d'une dimension du modèle connaissant la mesure correspondante de la reproduction et l'image de 1.

. l'image de 1, c'est-à-dire le nom de l'agrandissement connaissant 2 mesures correspondantes : l'une sur le modèle, l'autre sur la reproduction.

Ils savent aussi - comparer les agrandissements et les rapetissements entre eux,

et - intercaler un agrandissement ou un rapetissement entre 2 autres.

R e m a r q u e : L'enseignant dispose des 2 tableaux de mesures suivants mais ces tableaux ne sont jamais affichés ni utilisés par les élèves.

(I)	A (0,25)	B (0,67)	C (0,75)	D (0,94)	E (1,25)	F (1,5)
bôme	3,5	9,38	10,5	13,16	17,5	21
mât	4,425	11,859	13,275	16,638	22,125	26,55
côté pavillon	1	2,68	3	3,76	5	6
hauteur pavillon	0,425	1,139	1,275	1,598	2,125	2,55
étrave	1,3	3,484	3,9	4,888	6,5	7,8
hauteur coque	0,85	2,278	2,55	3,196	4,25	5,1

(I)

(II)	1,4	0,3	1,8	0,5	2,1
bôme	19,6	4,2	25,2	7	29,4
mât	24,78	5,31	31,86	8,85	37,17
côté pavillon	5,6	1,2	7,2	2	8,4
hauteur pavillon	2,38	0,51	3,06	0,85	3,57
étrave	7,28	1,56	9,36	2,6	10,92
Hauteur coque	4,76	1,02	6,12	1,7	7,14

(II)

.../...

9.4. BONNES REPRODUCTIONS, MOINS BONNES RERPODUCTIONS.

9.4.1 - Matériel

- Les 11 reproductions de l'optimist et le modèle
- Une reproduction nouvelle particulière que l'on désigne par Z.

Cette reproduction a été obtenue de la manière suivante :

. S'il s'agit d'une reproduction photographique d'un modèle, soulever les deux coins de droite du papier sensible de la même hauteur jusqu'à ce que l'image de la bôme ait la longueur voulue : 16,8 cm. S'assurer en même temps que le mât a la dimension voulue : 26,55.

S'il s'agit d'une reproduction graphique, placer les points à l'intersection des coordonnées données par le tableau suivant :

		Abscisses	Ordonnées
A	Sommet du mât	3,24	31,65
B	Sommet du pavillon	7,92	30
C	Bas du pavillon	3,24	29,1
D	Intersection de la bôme et du mât	3,24	10,95
E	Extrêmité de la bôme	20,04	10,95
F	Pied du mât	3,24	5,1
G	Sommet de la voile	20,04	15,65
H	Intersection du mât et du côté droit	3,24	8,7
I	Haut de l'étrave	3,60	6,15
J	Bas de l'étrave	0	0
K	Extrémité arrière du fond de la coque	20,4	0
L	Extrémité arrière du bord droit	18,84	8,7
M	Extrémité arrière du bord gauche	17,8	5,1
N	Extrémité avant du bord gauche	0	5,1
O	extrémité avant du bord droit	0,24	8,7

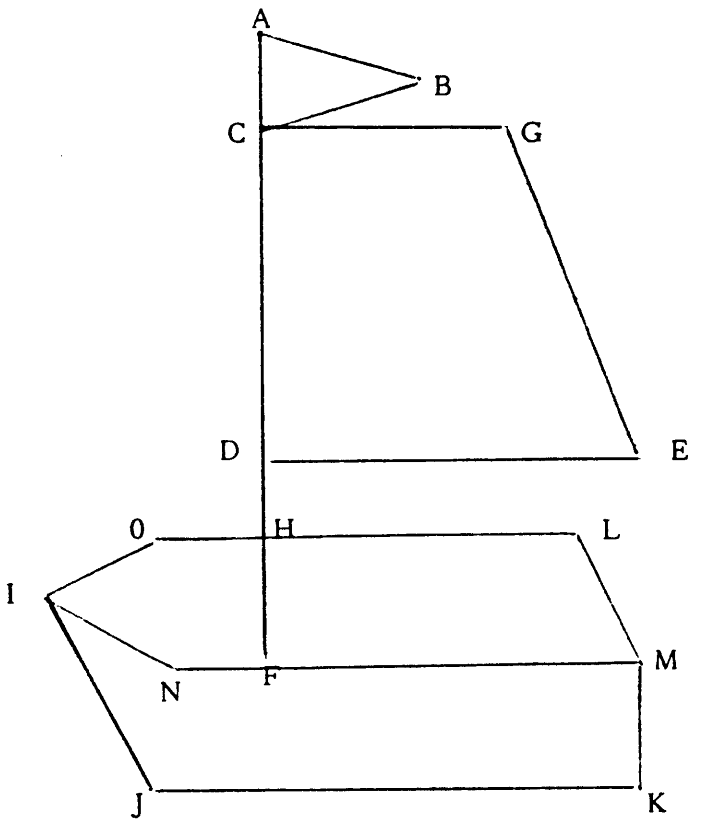
V

JN	3,4	5,1
FH	2,4	3,6
FD	3,9	5,85
FC	16	24
FA	17,7	26,55
EG	9,8	14,70
AC	1,7	2,55

H

JK	17	20,4
NM	17,8	21,36
OL	15,5	18,6
DE	14	16,8
NF	2,7	3,24
OH	2,5	3

.../...



Dans les deux cas, on obtient une affinité géométrique de rapport horizontal de 1,2 et de rapport vertical 1,5 par rapport au modèle C.

- 6 feuilles de papier affiche.

9.4.2. - Rappel des conclusions tirées de l'activité précédente

"Nous avons agrandi ou rapetissé le dessin d'un optimist à partir d'un modèle.

Vous souvenez-vous quels sont les agrandissements et les rapetissements que nous avons trouvés ?"

Les enfants rappellent l'image de 1 pour chaque reproduction. L'enseignant écrit au tableau sous la dictée des élèves (dans l'ordre où les élèves le disent).

1 —— 1,4
1 —— 1,5
1 —— 0,3
1 —— 1,8
1 —— 0,5
1 —— 2,1
1 —— 1,25
1 —— 0,67 etc...

et affiche à mesure les reproductions.

.../...

"Pouvez-vous dire maintenant ce qu'est une reproduction : agrandissement ou rapetissement ?

Les enfants répondent : "on prend un modèle
on mesure ses dimensions
on agrandit toutes les dimensions de la même manière ou on les diminue
on obtient un dessin plus grand ou plus petit."

9.4.3 - Présentation d'un nouveau problème

a) Consigne : "Voici le modèle : Je veux maintenant le transformer de 3 manières différentes telles que :

1) $1 \longrightarrow 2{,}2$ 1ère manière → pour 1 groupe

2) $1 \xrightarrow{(+5)} 6$ 2ème manière → pour 1 groupe

3) $1 \xrightarrow{(\times 2\ +3)} 5$ 3ème manière → pour un autre groupe.

Est-ce que j'obtiendrai des agrandissements ?

4) Puis je propose ensuite pour un quatrième groupe une nouvelle reproduction très particulière que j'appelle Z de cet optimist (l'enseignant l'affiche sur le tableau).

Est-ce que cette reproduction est un agrandissement du modèle ?

Après la 1ère question posée, on entend murmurer dans la classe : "oui, ce sont des agrandissements". Il y a cependant quelques réticences de la part de certains élèves qui évoquent l'agrandissement du puzzle et disent : "quand on avait ajouté 3, ça n'a pas marché !" Il y a dès lors une ambiguité pour les enfants autour du terme "agrandissement" mais aucun ne peut encore expliciter pourquoi.

b) Déroulement : Les enfants proposent de calculer toutes les dimensions à partir des "applications" proposées et de faire le dessin correspondant avec ces nouvelles dimensions. L'enseignant qui a réparti les enfants en 4 groupes, donne à chacun des 3 premiers groupes l'une des applications proposées en 1) 2) 3) et au quatrième groupe la reproduction Z et le modèle choisi. Dans les groupes 1, 2, 3, les enfants relèvent toutes les mesures du modèle et se répartissent ensuite les calculs : chacun prend à sa charge le calcul de la mesure d'une image par les procédés décrits dans l'activité 9.3 § 9.3.4, puis avec ces mesures, ils commencent le dessin de l'image de l'optimist sur une feuille de papier affiche.

.../...

c) Remarques : Au cours de cette phase de dessin, les enfants des groupes qui ont utilisé les applications 2) et 3) manifestent à haute voix, se disputent même (chacun rend l'autre responsable en l'accusant d'erreurs de calculs !) :

"ce n'est pas possible, notre dessin ne ressemble pas au modèle !"

"c'est une boîte de conserve ! dit un autre, et pas un bateau"

"Les segments ne se raccordent pas !"

Ils veulent arrêter et généralement appellent l'enseignant qui dédramatise la situation en souriant et en acceptant qu'ils ne continuent pas le dessin.

9.4.4 - Synthèse collective : vérification des mesures, observation des dessins obtenus, constatations.

a) Vérification des mesures : Dans un premier temps, l'enseignant marque au tableau, après les avoir vérifiées avec les enfants, les mesures (calculées) trouvées dans les trois premiers groupes.

1er groupe	2ème groupe	3ème groupe
$1 \longrightarrow 2{,}2$	$1 \xrightarrow{+5} 6$	$1 \xrightarrow{(x2)+3} 5$
$17{,}7 \longrightarrow 38{,}94$	$17{,}7 \longrightarrow 22{,}7$	$17{,}7 \longrightarrow 38{,}4$
$1{,}7 \longrightarrow 3{,}74$	$1{,}7 \longrightarrow 6{,}7$	$1{,}7 \longrightarrow 6{,}4$
$4 \longrightarrow 8{,}8$	$4 \longrightarrow 9$	$4 \longrightarrow 11$
$14 \longrightarrow 30{,}8$	$14 \longrightarrow 19$	$14 \longrightarrow 31$
$3{,}4 \longrightarrow 7{,}48$	$3{,}4 \longrightarrow 8{,}4$	$3{,}4 \longrightarrow 9{,}8$
$5{,}2 \longrightarrow 11{,}44$	$5{,}2 \longrightarrow 10{,}2$	$5{,}2 \longrightarrow 13{,}4$

a) Observation des dessins : Les enfants sont tout-à-fait satisfaits du dessin du 1er groupe, ils trouvent que c'est une reproduction correcte. Certains enfants disent "elle paraît proportionnelle au modèle". Par contre, les dessins qui correspondent aux applications 2) et 3) font bien rire les enfants car ils ne ressemblent pas du tout au modèle. Les segments se coupent n'importe où ou ne se coupent pas du tout... Il est impossible à la fois de reproduire la forme de l'optimist et de respecter, pour tous les segments, l'application numérique.

La quatrième équipe a eu des problèmes : sa reproduction ressemble très bien à l'optimist mais les enfants ne sont pas arrivés à déterminer une seule image de 1 :

.../...

$$\begin{array}{llcccl} & \underline{\text{Modèle}} & & \underline{\text{Reproduction}} & \\ \text{Mât} & 17{,}7 & \longrightarrow & 26{,}55 & \\ \times 10 & 177 & \longrightarrow & 265{,}5 & \times 10 \\ :177 & 1 & \longrightarrow & 1{,}5 & :177 \end{array}$$

Un élève a remarqué que la reproduction a l'air un peu allongée ; alors, à l'aide de cette image de 1, ils ont calculé la mesure que devrait avoir la bôme sur Z :

$$\begin{array}{lcccl} & 1 & \longrightarrow & 1{,}5 & \\ \times 14 & 14 & \longrightarrow & 21 & \times 14 \end{array}$$

Ils ont mesuré cette bôme : 16,8 cm et se sont rendus compte que sa mesure ne correspondait pas à celle qu'ils viennent de calculer : 21. Ils ont mis en doute leurs calculs que tout le groupe a vérifiés. Les calculs sont corrects !

L'enseignant leur a suggéré alors de calculer de nouveau l'image de 1 en utilisant cette fois les mesures de la bôme :

$$\begin{array}{lcccl} & \underline{\text{Modèle}} & & \underline{\text{Reproduction}} & \\ & 14 & \longrightarrow & 16{,}8 & \\ :14 & 1 & \longrightarrow & 1{,}2 & :14 \end{array}$$

Etonnement, l'image de 1 n'est pas la même que celle qui a été trouvée en utilisant les mesures du mât !

Alors l'enfant qui avait remarqué que la reproduction avait l'air plus allongée a demandé si on ne pourrait pas essayer de trouver le longueur de la coque avec cette nouvelle image de 1, ce qui a été fait aussitôt :

$$\begin{array}{llcccl} & & \underline{\text{Modèle}} & & \underline{\text{Reproduction}} & \\ \text{Longueur de} & & 1 & \longrightarrow & 1{,}2 & \\ \text{la coque} & \times 17 & 17 & \text{———} & & \times 17 \end{array}$$

Ils ont vérifié sur le dessin : la mesure (VM) est la même que celle qu'ils viennent de calculer ! Lorsque ce groupe présente ses résultats au reste de la classe, certains se demandent si l'agrandissement ne serait pas le même pour tous les segments verticaux.

Alors l'enseignant les encourage aussitôt à calculer encore l'image de 1 en utilisant d'abord les mesures (VM) de la hauteur de la coque, puis celles de la hauteur du pavillon et ils ajoutent même :

.../...

"elle doit être pareille que celle qu'on a trouvée avec le mât !". Vérification immédiate :

		Modèle		Reproduction	
hauteur coque		3,4	→	5,1	
	x10	34	→	51	x10
	:34	1	→	1,5	: 34

C'est effectivement la même !

Avec cette image de 1, ils calculent la hauteur du pavillon :

	Modèle		Reproduction	
x17	1	→	1,5	x17
:10	1,7	→	2,55	:10
	17	→	25,5	

Ils mesurent sur le dessin la hauteur du pavillon : c'est la même mesure !

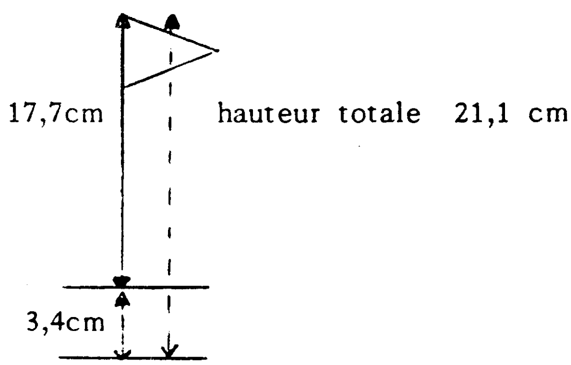
Maintenant, ils sont sûrs : il y a plusieurs images de 1. Cette image est différente suivant que les mesures sont verticales ou horizontales.

R E M A R Q U E : Les segments en biais sont agrandis de façon intermédiaire.

9.4.5 - Propriétés de la fonction linéaire

Pour mettre en évidence les propriétés de la fonction linéaire, l'enseignant procède comme dans l'activité "agrandissement du puzzle" § 8.1.3 : il propose aux enfants de vérifier collectivement avec quelques mesures, si l'image de la somme est bien la somme des images. Bien entendu, il peut ne pas énoncer cette propriété, mais devant les enfants, il montre les différents segments qui composent la hauteur totale du bateau sur le modèle : hauteur de la coque : 3,4 cm ; hauteur du mât : 17,7 cm.

Il ajoute ces deux mesures et envoie un enfant pour montrer ce que représente cette somme sur le dessin.



.../...

Hauteur totale du bateau (sur le modèle)

$3,4 + 17,7 = 21,1$

Vérification par l'application $1 \longrightarrow 2,2$ (VC)

$3,4 + 17,7 = 21,1$

$7,48 + 38,94 = 46,42$

Si on calcule l'image de 21,1 par l'application 2,2 :

$$\begin{array}{ccc} & 1 \longrightarrow 2,2 & \\ \times 21,1 & 21,1 \longrightarrow 46,42 & \times 21,1 \end{array}$$

On trouve aussi 46,42.

Dans ce cas la somme des images est égale à l'image de la somme

L'enseignant propose aux enfants de faire la même chose avec les autres applications : (+5) et (x2)+3.

Application +5

$3,4 + 17,7 = 21,1$

$8,4 + 22,7 = 31,1$

Calculons l'image de 21,1 par l'application (+5)

$21,1 + 5 = 26,1$ ce qui ne correspond plus à la sommme des images.

Donc dans ce cas, la somme des images n'est pas égale à l'image de la somme.

Application : (x2)+3

$3,4 + 17,7 = 21,1$

$9,8 + 38,4 = 48,2$

Calculons l'image de 21,1 par l'application (x2)+3 : (21,1 x 2)+3 = 45,2, ce qui ne correspond pas à la somme des images.

Dans ce cas encore, la somme des images n'est pas égale à l'image de la somme.

Les enfants disent alors : "c'est comme pour le puzzle. On n'obtient une bonne reproduction que lorsqu'on multiplie ! s'il y a une addition, ça ne va pas !"

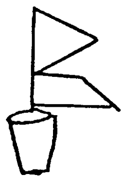
Apport d'information : L'enseignant confirme en effet en disant : Si, dans une reproduction, la somme des images est égale à l'image de la

.../...

somme, comme dans l'application 1 ⟶ 2,2 ci-dessus, alors on dit que l'application est linéaire ou que les nombres sont proportionnels.

Pour désigner un agrandissement, nous nous étions contentés de prendre l'image de 1 mais maintenant il faudra, en plus, indiquer s'il s'agit d'un agrandissement proportionnel et pour cela, nous aurons à inventer un signe. Nous le choisirons plus loin.

Jeu : Inventez des reproductions qui ne sont pas proportionnelles.



9.4.6 - Résultats.

Le terme "agrandissement" n'est plus ambigu pour les enfants ils l'utilisent uniquement lorsque les nombres sont proportionnels.

De plus, ils sont capables aussi de savoir s'ils sont en présence d'une fonction linéaire en mettant en oeuvre une de ces propriétés : somme des images égale à l'image de la somme, propriété qui n'est évidemment pas récitée mais qui sera vérifiée chaque fois par des calculs.

Ils sont capables de reconnaître une "bonne reproduction" d'une "mauvaise reproduction".

9.5 - CHANGEMENT DE MODELE

9.5.1 - Rappel

"Nous avons découvert comment faire des agrandissements de figures sans les déformer avec le puzzle, puis dans ce cas comment calculer toutes les dimensions à partir d'une seule : l'image de 1. Nous avons cherché toutes les reproductions proportionnelles possibles d'un modèle. Nous les avons rangées, classes, nous savons les distinguer des autres".

9.5.2 - Changement de modèle : présentation de la situation.

a) Consigne : "Pensez-vous que l'on pourrait prendre un autre modèle ? Par exemple, si j'avais pris C comme modèle au lieu de M, est-ce que j'aurais pu désigner l'agrandissement qui donne la reproduction F à l'aide du même nombre ? Est-ce que vous pourriez trouver un nombre qui désigne cet agrandissement ?"

b) Déroulement : Les enfants et l'enseignant travaillent ensemble : l'enseignant pose des questions, les enfants répondent.

"Nous avons vu que F est obtenu à partir de M par l'agrandissement :

M	F
1 ——>	1,5

Est-ce que si je prends C comme modèle, on a :

C	F
1 ——>	1,5

?

Pour faire la comparaison, les élèves proposent de calculer la longueur d'un même élément du dessin : ils choisissent la mesure de la bôme qui est simple. L'enseignant marque sur le tableau :

M	F
14 ——>	21

C	F
10,5 ——>	21

et demande à deux enfants de venir compléter ces tableaux tandis que les autres calculent sur leur cahier de brouillon. Puis les résultats sont confrontés.

	M	F	
	14 ——→	21	
:14	1 ——→	$\boxed{1,5}$	:14

	C	F	
	10,5 ——→	21	
x10	105 ——→	210	x10
:105	1 ——→	$\boxed{2}$	:105

Réponse : F est un agrandissement de C tel que :

1———> 2 et non 1 ———> 1,5.

Les enfants disent souvent : "c'est normal que l'agrandissement soit plus grand puisque C est plus petit que M. Il faut donc agrandir plus pour obtenir F !"

c) Conclusion : Si le modèle est changé :

- Pour chaque figure, il est encore possible de calculer la nouvelle image de 1
- Elle est différente de la précédente
- Une figure ne peut être représentée par un nombre que si l'on indique le modèle correspondant. Elle peut être désignée par autant de nombres qu'on peut choisir de modèles différents.

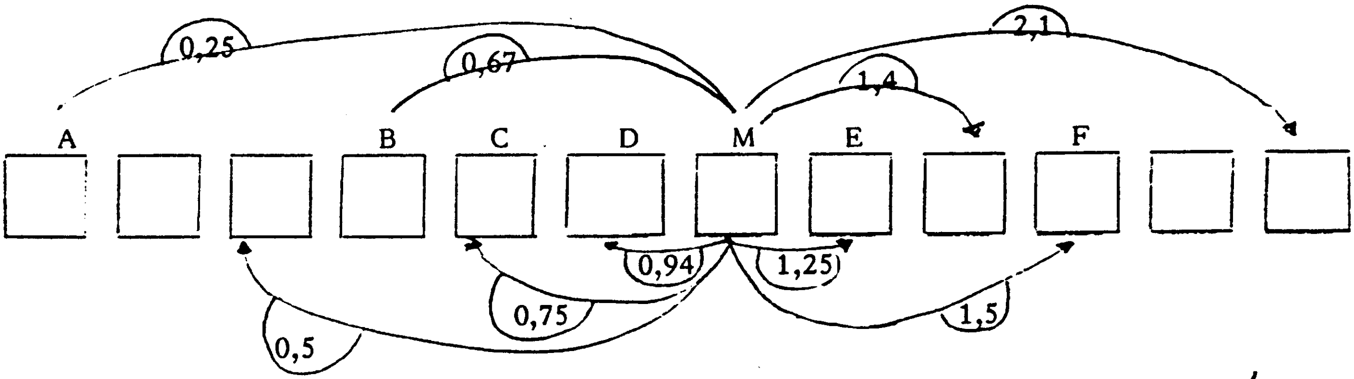
9.5.3 - Reproduction : l'application et l'image.

"Puisqu'on peut changer le modèle pour une même figure, il ne faut donc pas mettre le nom qui désigne l'agrandissement ou le rapetissement sous la figure reproduction. Il faut le mettre entre le modèle et la reproduction pour désigner l'application !

Exemple :

M		F
1	$\xrightarrow{1,5}$	1,5
14	——→	21

Ce qui donne pour toutes les reproductions de l'optimist :



.../...

Les nombres sont les noms de la reproduction - action et non ceux de la reproduction - image.

9.5.4 - Calculs avec d'autres modèles.

a) Consigne : "Si nous prenons comme modèle la reproduction anciennement marquée 0,5 et que nous la repdoduisions de manière que :

$$1 \longrightarrow 3$$

Quelle figure obtenons-nous ?"

b) Le maître écrit sur le tableau l'applicatin et ajoute la mesure de la bôme de la reproduction : 0,5

	1	——>	3
bôme	7	——>	21

21 est la mesure de la bôme de la reproduction F !

c) Autre consigne : "Quelle est l'application qui fait passer de A, pris comme modèle, à C ?"

L'enseignant donne aux enfants la mesure de la bôme sur A et sur C et marque sur le tableau :

	A		C
bôme	3,5	——>	10,5

et demande l'image de 1 que les enfants calculent individuellement de la manière suivante :

	A		C	
	3,5	——>	10,5	
x10	1	——>	$\boxed{3}$	x10
	35 :35	——>	:35 105	

C o n c l u s i o n : C'est la même application qui permet de passer du dessin précédemment marqué 0,5, prise comme modèle, à F que celle qui permet de passer de A, pris comme modèle, à C !

d) Définition : "En faisant un agrandissement 1 ——> 5, j'ai trouvé F. Quel était le modèle ?

Pour le trouver, quel tableau peut-on faire ?"

Le maître et les enfants échangent des propositions :

.../...

Le maître écrit :

Modèle	F	
1 ——>	5	
? ——>	21	bôme de F.

et les enfants calculent individuellement. Ils cherchent les rapports dans F d'abord puis dans le modèle. Ces calculs sont ensuite corrigés collectivement :

	Modèle	F	
:5	1 ——>	5	:5
	$\frac{1}{5}$ ——>	1	
x21	$\frac{21}{5}$ ——>	21	x21

Sur le modèle, la bôme mesure donc $\frac{21}{5}$ = 4,2. C'est la "reproduction" précédemment marquée 3 qui a été prise comme modèle!

9.5.5 - Images et reproductions.

a) Pour déterminer une reproduction proportionnelle, combien faut-il montrer de dessins ? deux : le modèle et son image.

Bien sûr <u>la même reproduction proportionnelle</u> peut permettre de faire correspondre à chaque modèle une image différente.

Exemple : 0,5 ——> F
A ——> C

se correspondent par l'agrandissement x3

Y-a-t-il d'autres couples de dessins associés par la même reproduction ? Comment trouver tous les agrandissements réalisés dans notre collection de figures ?

b) <u>Déroulement :</u>

Les élèves calculent à nouveau quelques agrandissements en prenant divers couples de figures. Le maître insiste pour obtenir une disposition qui permettra de les représenter tous et de se partager le travail.

Les élèves, éventuellement avec son aide, préparent le tableau ci-dessous et le remplissent. Cette activité peut être présentée comme un entrainement au calcul. Elle peut être le travail d'un petit groupe armé

.../...

d'une calculette. Elle peut être l'occasion de petits concours : "qui trouve la plus petite, la plus grande, qui en trouve une entre tel et tel nombre... etc.

Image / Modèle	A	B	C	D	E	F	M	...
A	1	2,68	3	3,76	5	6	4	
B	0,373	1	1,12	1,396	1,86	2,23	1,49	
C	0,33	0,89	1	1,24	1,66	2	1,33	
D	0,266	0,71	0,79	1	1,32	1,6	1,06	
E	0,2	0,53	0, 6	0,75	1	1,2	0,8	
F	0,166	0,44	0,5	0,62	0,83	1	0,66	
M	0,25	0,67	0,75	0,94	1,25	1,5	1	
⋮								

L'application qui fait passer de F à A est

$F \xrightarrow{x\ 0,166} A$ c'est le plus fort rapetissement pour passer de E à A (ce qui rapetisse le plus)
on rapetisse un peu moins (on "agrandit un peu plus) $E \xrightarrow{x\ 0,2} A$
Ensuite on trouve le rapetissement de M à A, etc. Les formulations ne sont pas simples mais les enfants arrivent à les dominer et à rire des contradictions apparentes qu'elles produisent(*). Ordonnons toutes ces applications linéaires de la plus petite à la plus grande et cherchons les effets qu'elles produisent sur les différents modèles.

.../...

(*) "Plus tu pédales moins fort moins ça avance plus vite" expliquait un jour un enfant à un psychologue éberlué.

9.5.6 - REMARQUE

Cette leçon peut être omise au $C.M_2$ mais elle montre bien la nécessité de détacher la reproduction-application de la reproduction-image. Les élèves peuvent concevoir ces agrandissements comme des opérations ou comme des résultats d'opérations sans qu'il soit nécessaire de les obliger à les distinguer formellement ; mais, dès que les problèmes se compliquent, les maîtres manquent de moyens d'explication avec les élèves les moins capables de construire seuls leur modèle. Les maîtres ont alors recours à l'éppréntissage d'automatismes (solution ancienne) ou retardent l'étude de ces questions jusqu'au moment où elle peut être présentée formellement ! (solution actuelle).

Dans les deux cas, il n'y a pas de négociation ni d'enseignement du sens. La difficulté n'est pas résolue, mais dissimulée.

9.6. APPLICATIONS RECIPROQUES

9.6.1 - Présentation du problème.

"En prenant M comme modèle, nous avons trouvé que l'agrandissement :

$$1 \longrightarrow 1{,}25$$

produisait la copie E.

Il s'agit de savoir maintenant ce qui se passerait si on prenait E comme modèle et M comme copie. A chaque longueur sur E correspond une longueur sur M.

Est-ce que cette application est une bonne reproduction (proportionnelle) ? et si oui, quel est l'agrandissement ?"

Les élèves protestent : "ça ne peut pas être un agrandissement! c'est un rapetissement !"

9.6.2 - Calcul du rapetissement.

a) Consigne : "Nous allons essayer de trouver ce rapetissement puisque vous êtes sûrs que c'en est un !"

b) Déroulement : C'est un échange de remarques, de propositions d'objections entre l'enseignant et les enfants (et entre les enfants eux-mêmes).

Comment calculer ce rapetissement ?

Le maître écrit sur le tableau :

E	M

Aussitôt, les enfants proposent d'inscrire les mesures correspondantes en précisant : "il faut trouver ce qui correspond à 1 de E". Le maître demande à un enfant de venir compléter le tableau :

	E	M	
	1,25	1	
x100	1	0,8	x100
	125 :125	:125 100	

Les calculs sont très vite faits

... /...

C'est donc l'application 1 $\longrightarrow$ 0,8. Mais il faut maintenant vérifier que ce rapetissement est le même pour tous les segments.

c) Vérification par les enfants

L'enseignant donne rapidement sur le tableau toutes les mesures de l'image E et les enfants travaillent individuellement.

Beaucoup pensent que ce n'est pas nécessaire. Pourquoi ? ils ne savent pas l'expliquer "c'est obligé" disent-ils. Le maître s'abstient de faire trop d'objections.

9.6.3 - Apport d'informations du maître.

"L'application qui produit l'image M du modèle E est l'application réciproque de celle qui produit l'image E du modèle M (il écrit sur le tableau l'expression soulignée)."

- Pensez-vous que toutes les reproductions proportionnelles que nous avons vues ont une réciproque ? Sauriez-vous les calculer ? Ce sont aussi des reproductions proportionnelles.

9.6.4 - Exercice.

Quelle est l'applicatin réciproque de :

$$1 \longrightarrow \frac{5}{4} \ ?$$

Certains enfants sont obligés de refaire les tableaux et les calculs.

$$\begin{array}{ccc} M & & R \\ 1 & \longrightarrow & \frac{5}{4} \end{array}$$

Dans l'applicatin réciproque on a :

$$\begin{array}{ccccc} & M & & R & \\ & \frac{5}{4} & \longrightarrow & 1 & \\ :5 & 1 & \longrightarrow & \frac{4}{5} & :5 \\ & \text{x4} & & \text{x4} & \\ & \frac{1}{4} & \longrightarrow & \frac{1}{5} & \end{array}$$

Donc l'application réciproque est :

$$\boxed{1 \longrightarrow \frac{4}{5}}$$

D'autres écrivent : $\frac{5}{4} \longrightarrow 1$

$\frac{5}{4} = 1{,}25 \qquad 1{,}25 \longrightarrow 1$

$$\begin{tikzcd} 125 \arrow[r] \arrow[d, bend right, ":125"'] & 100 \arrow[d, bend left, ":125"] \\ 1 \arrow[r] & 0{,}8 \end{tikzcd}$$

$$\boxed{1 \longrightarrow 0{,}8}$$

Enfin, certains remarquent et disent que la réciproque d'un agrandissement est un rapetissement.

Définition : "Vous chercherez s'il existe une application égale à sa réciproque".

9.6.5 - Résultats :

Cette activité est relativement simple pour tous les enfants. Elle se déroule rapidement comme un jeu (questions-réponses).

MODULE 10 :

MULTIPLIER PAR UN RATIONNEL

10.1. MULTIPLIER PAR UNE FRACTION

10.1.1 - Détermination du problème.

a) Mise au point collective par l'enseignant : "Nous avons construit des fractions, qu'avons-nous fait avec ces fractions ?

Les enfants rappellent ce qu'ils ont appris à faire :

- nous les avons rangées
- nous les avons additionnées
- nous avons fait des soustractions
- nous les avons transformées en nombres à virgule
- nous les avons multipliées par un naturel.

"Quelle opération pensez-vous que nous pourrions essayer de faire encore ?"

- les multiplier.

Nous avons déjà fait des calculs de produit de 2 fractions mais nous ne les avons pas reconnus. Nous avons fait des calculs qu'on aurait pu décrire par une fraction multipliée par une fraction.

Nous allons essayer de chercher quels sont ces calculs.

Il faudra se demander qu'est-ce qui nous permet d'écrire le signe x entre 2 fractions. Pourquoi a-t-on le droit de l'écrire puisque c'est une multiplication différente de celle que vous connaissez.

R e m a r q u e : Pour justifier l'emploi du signe + dans l'ensemble des fractions, les élèves se sont contentés de vérifier que l'opération matérielle qu'ils effectuaient, sur les longueurs par exemple, correspondait bien à celle qu'ils avaient l'habitude d'associer à l'addition.

Ici, le sens du produit de 2 fractions est assez différent du sens du produit de 2 nombres. Le seul moyen vraiment légitime d'accepter le signe "multiplié" serait l'examen détaillé des propriétés formelles de cette nouvelle opération et la comparaison avec les propriétés déjà connues de la multiplication. Nous pensons que cet examen exhaustif n'est pas à sa place avec des enfants de cet âge (encore qu'il serait possible) mais il va être indispensable de faire avec eux l'inventaire d'un certain nombre de propriétés,
- soit qui sont conservées, (par exemple la distributivité sur l'addition)
- soit qui changent (par exemple le fait que le produit de deux entiers est plus grand ou égal que chacun des deux)

.../...

et bien sûr, de construire un nouveau "sens" de la multiplication.

10.1.2 - Définition du produit de deux fractions.

"Nous savons que $3 \times \frac{2}{5}$ c'est $\frac{2}{5} + \frac{2}{5} + \frac{2}{5}$
mais y-a-t-il une addition qui pourrait remplacer l'opération $\frac{3}{7} \times \frac{2}{5}$?
Vous vous doutez que c'est dans les agrandissements et les rapetissements (et pas dans une addition) qu'il faut chercher des exemples pour construire cette nouvelle multiplication. Nous allons procéder en 4 étapes :
<u>1ère étape</u> : Cherchons dans quel agrandissement on pourrait être conduit à écrire : $\frac{3}{7} \times \frac{2}{5}$."

L'enseignant laisse aux enfants quelques minutes pour réfléchir et éventuellement écrire quelque chose sur un petit papier qu'il dépose au coin du bureau.
A la fin de cette première courte période de réflexion (2 à 3 minutes), l'enseignant ne demande pas aux élèves leur réponse. Ils constateront si c'est juste au fur et à mesure de la recherche.

- "Connaissez-vous un agrandissement que lon pourrait appeler "x 4" ? Jusqu'à présent, nous n'avions pas mis de signe x devant les nombres qui désignaient un agrandissement. Mais souvent on met ce signe x. Essayez de comprendre pourquoi."

La réponse attendue par le maître est : "à 1 du modèle correspond 4 sur la reproduction". Dès qu'il l'obtient, il fait écrire sur le tableau en conclusion :

<u>Modèle</u>		<u>Reproduction</u>
1	$\longrightarrow$	4

Pourquoi cet agrandissement peut-il s'appeler x 4 ? et il ajoute les mesures suivantes :

<u>Modèle</u>		<u>Reproduction</u>
1	$\longrightarrow$	4
5	$\longrightarrow$	
3,5	$\longrightarrow$	
$\frac{3}{5}$	$\longrightarrow$	

Un élève vient compléter le tableau de la manière suivante :

Modèle		Reproduction
1	$\longrightarrow$	4
5	$\longrightarrow$	5 x 4
3,5	$\longrightarrow$	3,5 x 4
$\frac{3}{5}$	$\longrightarrow$	$\frac{3}{5}$ x 4

et souvent donne le résultat.

Cet agrandissement peut s'appeler "x 4" parce que l'image d'un nombre se calcule en multipliant ce nombre par 4.

Est-ce que vous sauriez de la même façon ce qu'est l'agrandissement x 5, x 7... ?

<u>2ème étape de réflexion</u> : "Est-ce que, maintenant, certains d'entre vous pourraient écrire sur leur cahier comment, dans un agrandissement, ils seraient amenés à écrire le produit $\frac{3}{7} \times \frac{2}{5}$?

L'enseignant laisse encore les enfants réfléchir quelques minutes, mais ne relève pas les réponses. Si certains enfants, sûrs d'avoir trouvé, exercent une pression trop forte, l'enseignant peut les inviter à "déposer" cette réponse sur un autre petit papier au coin du bureau (ceci pour qu'ils puissent savoir, ainsi que l'enseignant, en fin de démarche, à quel moment ils ont su définir le produit). A la fin de cette deuxième période de réflexion, l'enseignant pose une nouvelle question.
"suivant le même principe, qu'est-ce qu'un agrandissement que l'on pourrait appeler x 0,25 ?" et il attend de la part des enfants la réponse :
"à 1 du modèle correspond 0,25 sur la reproduction".
"Pourquoi cet agrandissement peut-il s'appeler x 0,25 ?

R e m a r q u e : La réponse n'est pas : "parce que pour trouver chaque image il faut multipliser par 0,25" suivant le raisonnement de la première étape, car les enfants ne savent pas ce qu'est "multiplier par 0,25". Il faut au contraire, décider qu'on peut écrire une image, celle de 5 par exemple, sous la forme 5 x 0,25 alors qu'on ne sait pas ce que cela veut dire et se trouver des raisons de le faire. Naturellement, les enfants sont assez portés à admettre comme évident que l'image de 5 peut s'écrire 5 x 0,25 parce qu'on la calcule en faisant 0,25 x 5. Mais l'enseignant va insister lourdement jusqu'à la fin de la leçon sur le caractère arbitraire de ce choix et sur ses conséquences, dans le cas où il n'y aura plus d'entiers (par exemple $\frac{3}{4}$ X 0,25).

.../...

Comme tout à l'heure, l'enseignant écrit au tableau :

Modèle		Reproduction
1	$\longrightarrow$	0,25
5	$\longrightarrow$	5 x 0,25 ?
8	$\longrightarrow$	8 x 0,25 ?

et demande : "Peut-on écrire 5 x 0,25 ?"
8 x 0,25 ?

Les enfants, en général, répondent qu'ils savent trouver les images de la manière suivante :

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] \arrow[d, bend right, "\times 5"'] \arrow[dd, bend right=60, "\times 8"'] & 0{,}25 \arrow[d, bend left, "\times 5"] \arrow[dd, bend left=60, "\times 8"] \\
5 \arrow[r] & 0{,}25 \times 5 = 1{,}25 \\
8 \arrow[r] & 0{,}25 \times 8 = 2{,}00
\end{tikzcd}$$

Le maître insiste : "alors vous décidez qu'on peut écrire que 1,25 est égal à 0,25 x 5 ?"

Il ajoute : "0,25 x 5 c'est 0,25 + 0,25 + 0,25 + 0,25 + 0,25 et 5 x 0,25 c'est donc par définition 0,25 x 5"
"c'est acceptable, mais est-ce que cette définition peut s'appliquer à tous les nombres entiers naturels ?"

"On peut donc admettre que "x 0,25" c'est trouver l'image d'un nombre par l'agrandissement 0,25"

Nous écrirons le nom de l'agrandissement au-dessus du tableau de nombres ainsi :

$$1 \xrightarrow{\times\ 0{,}25} 0{,}25$$

Remarque : Le terme "opérateur" utilisé par le maître et les élèves jusqu'à présent pour désigner en diverses circonstances ce qui est symbolisé par les flèches $\xrightarrow{\times}$ ne correspond pas à un usage mathématique de cette notion mathématique très générale. Or, il s'agit maintenant de "définir" implicitement, mais de façon précise et mathématiquement utilisable pour les élèves, un objet mathématique bien déterminé : les applications linéaires rationnelles. Cet objet étant lui-même le référent de ce que les élèves utiliseront sous le nom de rationnel.

Utiliser le terme et le concept "d'opérateur" tel qu'il est connu des élèves à ce moment-là pour "représenter", nommer le nouvel objet mathématique construit, serait une erreur, une fausse facilité qui ferait hériter inutilement le nouveau concept des ambiguités de l'ancien et qui brouillerait le débat.

.../...

<u>3ème étape</u> : "Maintenant, pouvez-vous trouver dans quelle circonstance on pourrait écrire $\frac{3}{7} \times \frac{2}{5}$?

et l'enseignant attend encore la réponse :

"à 1 du modèle correspond $\frac{2}{5}$ sur la reproduction

à $\frac{3}{7}$ du modèle correspond $\frac{3}{7} \times \frac{2}{5}$ sur la reproduction".

Il peut prendre les réponses des élèves et les examiner s'il pense en avoir suffisamment de correctes ou donner une information de plus et demander : "quelles sont les images des mesures suivantes par l'agrandissement "x $\frac{2}{7}$".

$$\begin{array}{l} \xrightarrow{\times \frac{2}{7}} \\ 1 \longrightarrow \\ 2 \longrightarrow \\ 5 \longrightarrow \end{array}$$

Est-ce que c'est un agrandissement ou un rapetissement ?

Les élèves écrivent les réponses sur leur cahier :

$$\begin{array}{lcl} \underline{\text{Modèle}} & \times \frac{2}{7} & \underline{\text{Reproduction}} \\ 1 & \longrightarrow & \frac{2}{7} \\ 2 & \longrightarrow & 2 \times \frac{2}{7} \\ 5 & \longrightarrow & 5 \times \frac{2}{7} \end{array}$$

<u>4ème étape</u> : "et que signifierait $\frac{3}{4} \times \frac{2}{7}$?"

Beaucoup d'enfants proposent d'ajouter $\frac{3}{4}$ dans la colonne "modèle" et sont en mesure de répondre "c'est l'image de $\frac{3}{4}$ par l'agrandissement "x $\frac{2}{7}$" c'est-à-dire lorsque l'image de 1 est $\frac{2}{7}$".

10.1.3 - Calcul du produit de 2 fractions.

<u>a) Consigne</u> : "Pouvez-vous trouver maintenant ce que nous pouvons décider que signifie : $\frac{3}{7} \times \frac{2}{5}$?

Savez-vous calculer le résultat ?

$$\begin{array}{lcl} 1 & \xrightarrow{\times \frac{2}{5}} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{7} & \xrightarrow{\times \frac{2}{5}} & \boxed{\quad ?} \end{array}$$

<u>b) Déroulement</u> : Les enfants travaillent par groupes de 2. Ils essaient de mettre en oeuvre les techniques qu'ils avaient découvertes et utilisées dans l'activité 8-3 (§ 8.3.4) "image d'une fraction".

<u>c) Stratégies observées</u> : Les enfants calculent par l'un des deux procédés suivants :

.../...

1. <u>Choix de "l'intermédiaire"</u> $\frac{1}{7}$

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "\times \frac{2}{5}"] \arrow[d, ":7"'] & \frac{2}{5} \arrow[d, ":7"] \\ \frac{1}{7} \arrow[r, "\times \frac{2}{5}"] \arrow[d, "\times 3"'] & \frac{2}{35} \arrow[d, "\times 3"] \\ \frac{3}{7} \arrow[r] & \frac{6}{35} \end{tikzcd}$$

Donc l'image de $\frac{3}{7}$ est: $\frac{3}{7} \times \frac{2}{5} = \frac{6}{35}$

2. <u>Choix de "l'intermédiaire" 3</u>

$$\begin{tikzcd} & 1 \arrow[r, "\times \frac{2}{5}"] \arrow[d, "\times 3"'] & \frac{2}{5} \arrow[d, "\times 3"] \\ & 3 \arrow[r, "\times \frac{2}{5}"] \arrow[d] & \frac{6}{5} \arrow[d, ":7"] \\ 3=\frac{3}{1} \arrow[r, ":7"] & \frac{3}{7} \arrow[r] & \frac{6}{35} \end{tikzcd}$$

Donc l'image de $\frac{3}{7}$ est: $\frac{3}{7} \times \frac{2}{5} = \frac{6}{35}$.

3. <u>Chaque année des enfants écrivent directement</u> :

$\frac{3}{4} \times \frac{2}{7} = \frac{6}{28}$

L'enseignant qui passe auprès de chaque groupe pendant la phase de recherche, s'étonne et leur demande comment ils ont trouvé ce résultat. Ceux-ci répondent qu'ils ont multiplié les deux numérateurs et les deux dénominateurs. "Pourquoi ?" questionne encore l'enseignant "c'est obligé", "c'est normal" répondent-ils.

Alors l'enseignant leur dit qu'il ne peut pas accepter un résultat s'ils ne prouvent pas qu'il est juste. Ces enfants mettent alors en oeuvre l'une des deux stratégies décrites ci-dessus.

<u>d) Correction collective</u> : L'enseignant organise une correction au cours de laquelle les enfants qui sont arrivés à trouver un résultat viennent au tableau montrer leur stratégie.

C'est un rappel rapide puisque ces calculs ont déjà été faits à plusieurs reprises : au cours des activités : 8-3 ; 8-4 ; 8-5.

Beaucoup constatent et affirment alors qu'il suffit de multiplier entre eux les numérateurs et les dénominateurs.

L'enseignant accepte d'étudier cette dernière méthode qu'il baptise du nom de son proposant.

.../...

10.1.4 - Etude de la méthode : $\dfrac{\text{produit des 2 numérateurs}}{\text{produit des 2 dénominateurs}}$

"Est-ce que vous pensez que cette règle est toujours vraie quelles que soient les fractions ?"

Les enfants hésitent et demandent à l'enseignant de leur donner un autre produit.

a) Consigne "que signifie le produit $\frac{5}{7} \times \frac{4}{3}$?

Donnez sa signification et calculez-le."

b) Déroulement : Les enfants travaillent individuellement. L'enseignant aide un peu ceux qui ont du mal à démarrer :

$$\begin{array}{ccc} 1 & \xrightarrow{\times \frac{4}{3}} & \frac{4}{3} \\ \frac{5}{7} & \xrightarrow{\times \frac{4}{3}} & ? \end{array}$$

Au bout de 3 à 5 minutes environ, il fait une correction collective :

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "\times \frac{4}{3}"] \arrow[d, bend right, ":7"'] & \frac{4}{3} \arrow[d, bend left, ":7"] \\ \frac{1}{7} \arrow[r, "\times \frac{4}{3}"] \arrow[d, bend right, "\times 5"'] & \frac{4}{21} \arrow[d, bend left, "\times 5"] \\ \frac{5}{7} \arrow[r, dash] & \frac{20}{21} \end{tikzcd}$$

donc : $\frac{5}{7} \times \frac{4}{3} = \frac{20}{21}$

Les enfants disent avec enthousiasme que la "règle" qu'ils ont découverte est bonne puisqu'elle vient encore de fonctionner.

Mais l'enseignant fait remarquer qu'ils n'ont essayé que sur deux exemples et que pour l'adopter ("l'institutionnaliser") il faut qu'elle soit toujours vraie, sur n'importe quel exemple. Alors il propose aux enfants une forme de vérification nouvelle sous forme de jeu.

10.1.5 - Vérification de la règle.

a/ Premier jeu.

1) L'enseignant demande aux enfants de choisir un nombre correspondant à ces lettres :

a =

b =

c =

d =

(chaque enfant écrit sur son cahier de brouillon).

2) Calculez (a + b) : "Allez-vous trouver pareil ? pourquoi ?"
La vérification se fait immédiatement sur le tableau. "

3) Calculez (b + c) : "Allez-vous trouver pareil ?"
(vérification avec 1 ou 2 enfants) : Non !

4) Calculez (a + b) + (b + c)
puis a + b + c
puis (a + b) + (b + c) - b
Que remarquez-vous ?
La conclusion est inscrite sur le tableau :
(a + b) + (b + c) - b = a + b + c
pourquoi ?

Remarque : Les enfants aiment beaucoup cette activité. En effet, la plupart d'entre eux ont vu des plus grands calculer avec des lettres et ils le disent : "c'est comme en 6ème", ou "c'est comme en 5ème !"

b/ Deuxième jeu.

<u>a) Consigne</u> : "Que signifie le produit : $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$?"

<u>b) Déroulement</u> : L'enseignant demande à un enfant de venir écrire la signification sur le tableau tandis que les autres regardent et participent par leurs remarques.

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[rr, "\times \frac{c}{d}"] & & \frac{c}{d} \\
\frac{a}{b} \arrow[rr, "\times \frac{c}{d}"] & & ?
\end{tikzcd}$$

A ce stade, il propose aux enfants de l'aider à calculer ce produit :

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[rr, "\times \frac{c}{d}"] \arrow[dd, bend right=60, ":b"'] & & \frac{c}{d} \arrow[dd, bend left=60, ":b"] & \\
\frac{a}{b} \arrow[rr, "\times \frac{c}{d}"] & & ? \arrow[r] & \boxed{\frac{a \times c}{d \times b}} \\
\frac{1}{b} \arrow[u, bend right, "\times a"'] \arrow[rr, "\times \frac{c}{d}"] & & \frac{c}{d \times b} \arrow[u, bend right, "\times a"'] &
\end{tikzcd}$$

donc : $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{d \times b}$

<u>c) Conclusion</u> : L'enseignant fait remarquer que les lettres, comme dans le jeu précédent, désignent n'importe quel nombre donc la règle découverte par les enfants est toujours vraie.

.../...

10.2. MULTIPLIER PAR UN DECIMAL

10.2.1 - Définition du produit de deux décimaux.

a) Consigne "Que signifie le produit suivant : 1,25 x 3,5 ? Sauriez-vous le calculer ?"

b) Déroulement : Comme dans l'activité précédente, l'enseignant laisse aux enfants quelques minutes pour réfléchir et éventuellement écrire quelque chose sur leur cahier de brouillon. Il s'attend évidemment à la réponse suivante : "à 1 du modèle correspond 3,5 sur la reproduction et "1,25 x 3,5" est l'image de 1,25.

Dès qu'il obtient cette réponse (qui vient très vite !) il écrit ou fait écrire sur le tableau en conclusion :

$$1 \xrightarrow{\times\ 3,25} 3,5$$
$$1,25 \xrightarrow{\times\ 3,25} 1,25 \times 3,5$$

"Mais ici peut-on donner le résultat ?"

Les enfants répondent que non, qu'ils ne savent pas multiplier deux nombres décimaux.

Mais aussitôt, il y a toujours 2 ou 3 enfants qui proposent à haute voix d'écrire les nombres sous forme de fractions.

L'enseignant demande alors à l'un d'entre eux de venir au tableau écrire le produit avec des fractions :

$$\frac{125}{100} \times \frac{35}{10} .$$

10.2.2 - Calcul du produit de deux décimaux.

a) Consigne "Nous venons d'écrire un nouveau produit. Vous allez chercher sur votre cahier quelle est la signification de ce produit et le calculer".

b) Déroulement : L'enseignant laisse le choix aux enfants de travailler seuls ou à deux.

La recherche est très rapide car les enfants reconnaissent le problème de l'activité précédente et écrivent très vite :

.../...

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "\times \frac{35}{10}"] & \frac{35}{10} \\
\frac{125}{100} \arrow[r] & \frac{125}{100} \times \frac{35}{10}
\end{tikzcd}$$

c) Stratégies observées : Pour calculer le résultat, il y en a toujours quelques-uns qui refont l'un des deux calculs suivants :

1ère méthode :

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "\times \frac{35}{10}"] \arrow[d, bend right, ":100"'] & \frac{35}{10} \arrow[d, bend left, ":100"] \\
\frac{1}{100} \arrow[r] \arrow[d, bend right, "\times 125"'] & \frac{35}{1000} \arrow[d, bend left, "\times 125"] \\
\frac{125}{100} \arrow[r] & \frac{35 \times 125}{1000} = \frac{4375}{1000}
\end{tikzcd}$$

2ème méthode :

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "\times \frac{35}{10}"] \arrow[d, bend right, "\times 125"'] & \frac{35}{10} \arrow[d, bend left, "\times 125"] \\
125 \arrow[r] \arrow[d, bend right, ":100"'] & \frac{35 \times 125}{10} \arrow[d, bend left, "\times 100"] \\
\frac{125}{100} \arrow[r] & \frac{35 \times 125}{1000} = \frac{4375}{1000}
\end{tikzcd}$$

3ème méthode :

Mais la plupart d'entre eux ne recommencent pas ces calculs et appliquent la dernière méthode de l'activité précédente : ils multiplient entre eux les numérateurs et les dénominateurs et écrivent directement :

$$\frac{125}{100} \times \frac{35}{10} = \frac{4375}{1000} .$$

d) Correction, confrontation et choix d'une méthode.

Pour la correction, l'enseignant envoie au tableau trois des enfants qui ont utilisé les méthodes décrites ci-dessus. Ceux qui ont recommencé tous les calculs subissent une très forte pression de ceux qui ont "appliqué" la dernière règle : "mais c'est trop long !"

"on sait calculer directement, on n'a plus besoin de faire tous ces calculs !"

Un consensus s'établit alors dans la classe : dorénavant, pour multiplier 2 fractions, on fera le produit des numérateurs et des dénominateurs !"

.../...

10.2.3 - Algorithme de l'opération.

1) L'enseignant écrit sur le tableau un résumé de ce qui vient d'être fait :

$$1{,}25 \times 3{,}5 = 4{,}375$$
$$\downarrow \quad \downarrow \quad \uparrow$$
$$\frac{125}{100} \times \frac{35}{10} = \frac{4375}{1000}$$

et complète en faisant mettre le résultat sous forme d'un décimal :

$$1{,}25 \times 3{,}5 = 4{,}375.$$

2) Puis il invite les enfants à réfléchir et énoncer les calculs qu'ils ont faits :

"on a multiplié 125 par 35, puis on a divisé par 1000 car $\frac{}{100} \times \frac{}{10} = \frac{}{1000}$ (règle du produit de 2 fractions).

Il pose ensuite l'opération sur le tableau et applique le règle que les enfants viennent d'énoncer :

$$\begin{array}{r} 1{,}25 \\ \times\ 3{,}5 \\ \hline 625 \\ 375 \\ \hline 4{,}376 \end{array}$$

Quelques enfants disent ce qu'ils ont entendu : "il faut 3 chiffres après la virgule !"

L'enseignant fait expliciter pourquoi en se référant au produit des deux fractions qui est resté sur le tableau.

10.2.4 - Exercice.

A la demande des enfants (qui aiment utiliser des algorithmes par ce que c'est très rassurant pour eux) l'enseignant propose une autre opération :

12,07 x 4,9 et leur demande de prévoir le nombre de chiffres qu'il y aura après la virgule au résultat.

.../...

10.2.5 - Résultats.

Tous les enfants ont compris l'algorithme et le sens de cette multiplication. Mais il est intéressant de noter ici qu'ils éprouvent une grande satisfaction de pouvoir, enfin, faire une multiplication de deux décimaux.

En effet, chaque année, ils demandent depuis longtemps à l'enseignant : "pourquoi on n'apprend pas encore à multiplier deux décimaux, on saurait le faire !" Cette interrogation est particulièrement pressante au cours de l'activité sur l'optimist (activité 8-7 ; § 8.7.4) car il y a toujours à ce moment-là un ou deux élèves (redoublants ou venant d'autres écoles) qui calculent directement l'image des mesures de l'optimist (entières ou décimales) en les multipliant par les agrandissements ou rapetissements : 2,1 ou 1,8 ou 0,94...

Comme l'enseignant ne prend pas en compte ce procédé de calcul et qu'il ne le fait pas exhiber lors de la correction collective, (§ 8.7.4 concours de vitesses) ces enfants se sentent lésés et demandent pourquoi leur solution n'est pas prise en considération. A la réponse de l'enseignant : "parce qu'on n'a pas encore appris la multiplication de deux décimaux et que vous n'en connaissez pas la signification", il y en a souvent un qui proteste en disant qu'il sait, qu'il a appris.

Alors l'enseignant est obligé, dans ces cas-là, de faire une mise au point collective : Il rappelle aux élèves le sens des différentes multiplications qu'ils ont déjà rencontrées :

- 4 x 125 signifie

125 + 125 + 125 + 125

- 4 x 2,5 (2,5 pouvant être une longueur de baguette ou le prix d'un objet ou la capacité d'un récipient...= signifie

2,5 + 2,5 + 2,5 + 2,5

mais que signifie ce produit :

1,7 x 0,94

ou 4,128 x 3,67 ?

Evidemment, les enfants réalisent alors qu'il existe des multiplications dont le sens est différent de celles qu'ils connaissent et tous admettent que l'on ne peut pas utiliser ces calculs à ce moment de la progression. On comprend alors le soulagement qu'ils ressentent et expriment lors de cette séance et le désir de faire et d'utiliser enfin ce calcul tant attendu !

.../...

10.3. METHODES DE RESOLUTION DE PROBLEMES LINEAIRES

10.3.1 - Introduction (pour le maître)

A ce moment de la progression, les enfants disposent d'outils mathématiques suffisants pour résoudre les exercices classiques du CM 2 à la condition qu'ils soient capables de raisonner la mise en oeuvre du modèle linéaire mis en place dans les leçons précédentes.

Pour cela, il leur faut se familiariser avec de nombreuses situations sociales, physiques, logiques, etc... qui supposent la construction par les élèves de représentations appropriées et l'acquisition d'un vocabulaire spécialisé (échelles, pourcentages, remises, taux, débit...). L'usage du modèle linéaire dans ces différents exemples n'est en aucun cas une simple "application" que l'élève devrait automatiquement réussir. Ce chapitre et le suivant ont pour objet de montrer comment le maître a pris en charge avec les élèves la tâche d'explorer consciemment la famille des situations et des problèmes que l'on peut résoudre à l'aide de ce modèle linéaire. Cette quête se poursuivra jusqu'à la fin de l'année parallèlement aux activités d'unification de la structure des rationnels qui feront l'objet du module suivant.

Les enfants comprendront d'autant mieux l'intérêt de cette unification qu'ils auront un champ plus large de situations à décrire.
Les exemples qui suivent vont nous permettre de décrire le déroulement type d'une étude de situation et d'indiquer comment les enfants et le maître en tirent des conclusions bien explicites (mais sûrement pas apprises par coeur). Nous allons aussi indiquer la plus grande partie possible des conclusions et des remarques que les enfants **peuvent** faire pour maîtriser les différentes méthodes de résolution, les différents types de questions, les différents usages de la fonction linéaire, etc... Pour éviter de multiplier les comptes-rendus de problèmes, nous sommes amenés à concentrer de façon un peu artificielle toutes ces conclusions sur les quelques exemples que nous exposons ici. De toute façon, dès lors que les enfants participent à la recherche, le détail des moyens d'obtenir ces conclusions échappe au maître, l'ordre dans lequel on les rencontre n'étant pas très important.

.../...

10.3.2 - Exemple d'étude d'une situation.

a) <u>Origine et présentation du problème.</u> Les élèves ont évoqué en sciences la composition du lait, les enfants ont recueilli la crème de deux litres de lait entier et aussi celle de 5 litres de lait demi-écrémé. Le maître demande aux enfants si on peut répondre aux questions suivantes :

"Combien de crème obtiendrait-on avec 50 litres de lait, 125 litres de lait, 250 litres de lait ?

Combien de lait faudrait-il pour obtenir 4 litres de crème ? 2 litres de crème ? 10 litres de crème ?"

b) <u>recherche des éléments du schéma fondamental des applications : ensembles en présence et correspondance.</u>

Il n'y a aucun doute : les élèves veulent séparer les ensembles de quantités de lait et ceux de quantités de crème, mais certains élèves peuvent écrire :

lait		crème
2 l	$\longrightarrow$	32 cl
5 l	$\longrightarrow$	40 cl
50 l	$\longrightarrow$	

ce qui va permettre un débat sur le fait de savoir si on a bien une application linéaire. On peut retrouver tous les raisonnements qui étaient apparus lors de l'épaisseur des feuilles de papier.
Exemple : pour 4 litres, on devrait trouver 64 litres et pour 5 litres encore plus... Or, on a trouvé seulement 40 cl pour 5 litres.

D'autres raisonnements fallacieux mais apparemment corrects peuvent apparaître :

"Si je prends les 2 litres de lait (entier) et les 5 litres de lait (écrémé), j'obtiens bien pour les 7 litres de lait 32 cl de crème plus 40 cl de crème ! L'image de la somme est bien la somme des images, donc, les quantités sont proportionnelles".

Pour déjouer ce genre de piège, les enfants doivent bien faire fonctionner les propriétés fondamentales des applications linéaires : l'image de la somme de 2 nombres **quelconques** doit être la somme des images, l'image du double doit être le double etc...

.../...

Conclusion des élèves : Il faut séparer le tableau du lait entier et celui du lait écrémé. Dans les deux cas, les quantités de crème sont proportionnelles à la quantité de lait mais les applications sont différentes.

c) Présentation des données

L'enseignant prépare les tableaux suivants :

1er tableau : lait entier.

quantité de lait	2 l	50 l	125 l	250 l	
quantité de crème	32 l				

2ème tableau : lait écrémé

quantité de lait	5 l	50 l	125 l	250 l	
quantité de crème	40 cl				

Certains élèves peuvent, pour chaque calcul particulier, disposer les nombres selon le schéma qui leur est familier, la plupart s'adaptent à la disposition du tableau.

Le maître valorise les calculs directs du genre :

$$5 \xrightarrow{x10} 50$$

$$40 \xrightarrow{x10} 400 \text{ cl}$$

mais accepte le calcul des quantités de crème pour 1 litre de lait (que les enfants peuvent ajouter dans le tableau, dans la case restée vide). Il peut l'utiliser éventuellement pour définir "la teneur en crème" des différents laits et pour caractériser les deux applications différentes : x16) et (x8)

puisque $1 \longrightarrow 16$ (dans le cas du lait entier)

$1 \longrightarrow 8$ (dans le cas du lait écrémé)

d) Expression des données et des résultats : Les transformations naturelles de 400 cl en 4 l ne posent guère de problème tant que les élèves ne s'occupent que des quantités. Mais le problème de l'hétérogénéité des unités dans un tel tableau doit être traité dès que possible en prévision des cas où la représentation des quantités ne permettra plus de corriger les erreurs qui pourraient résulter de cette hétérogénéité. On montre aux élèves qu'on ne peut plus calculer de façon automatique lorsqu'on mélange les unités.

.../...

Conventions à établir avec les enfants.

1/ Tous les nombres de l'ensemble "départ" doivent être exprimés dans une même unité, tous ceux de l'ensemble "arrivée" doivent être exprimés dans la même unité. Par contre, même s'il est possible d'exprimer les deux grandeurs dans la même unité, (ici lait et crème) ce n'est pas indispensable (on peut exprimer la quantité de crème soit en litre, soit en centilitre).

2/ Si on respecte ce principe, on peut désigner l'application comme un agrandissement à l'aide d'un nombre ou d'une opération (x16 ou x 0,165) sinon, ce n'est pas possible. Il faut alors aussi indiquer les correspondances entre unités : litres (de crème) pour litres (de lait) ou centilitres (de crème) pour litres (de lait), ce qui donne :

soit : 16 cl/l

soit 0,16 l/l.

Lorsque les unités changent, l'application et le nombre qui la désigne changent tout en désignant les mêmes correspondances entre les quantités.

3/ Dans un problème, lorsqu'on rencontre une application qui met en relation des grandeurs, il faut contrôler, d'une part l'application numérique, d'autre part les correspondances entre unités.

10.3.3 - Déroulement type d'une activité (commentaire pour le maître)

L'enseignant choisit un exercice parmi les propositions des élèves ou en propose un nouveau. Il écrit l'énoncé sur le tableau, demande aux enfants de le lire silencieusement, de réfléchir un moment et il invite ceux qui croient savoir, à le faire sur leur cahier de brouillon. Il passe auprès des enfants, aide ceux qui le souhaitent, répond à leurs demandes.

Lorsque ceux qui savent ont trouvé, lorsque ceux qui ne savent pas ne progressent plus et commencent à se démobiliser, alors il organise une analyse collective qui donne presque toujours lieu à des discussions et des recherches intéressantes. Le problème va être reformulé de façon à ce que les enfants :

- cherchent à reconstituer le schéma fondamental d'une application : classification des ensembles de nombres, vérification de la relation qui justifie la correspondance entre les nombres de l'ensemble "départ" et les nombres de l'ensemble "arrivée".
- cherchent à vérifier le caractère linéaire de l'application :

. soit par la preuve matérielle que l'image de la somme de deux nombres est la somme des images

. soit par la preuve que les rapports sont conservés.

.../...

La preuve par l'égalité des produits en croix ne s'est jamais avérée nécessaire pour les problèmes que nous avons choisis à ce niveau.
- Obtiennent un des raisonnements qui donnent la solution.

Les enfants qui ont réussi n'ont pas tous trouvé de la même manière. Les méthodes sont discutées, étiquetées, comparées. La plus simple est privilégiée par les enfants et par l'enseignant.

Il est souhaitable de terminer chaque séance par un travail individuel, rédigé et bien présenté sur le cahier de classe. Ce travail sera corrigé, d'abord par le maître en dehors de la classe, puis avec les élèves au début de la séance suivante.

10.3.4 - Remarques.

1/ Nombres et ensemble de nombres :

La reconstitution du schéma fondamental exige que les élèves manipulent, conçoivent chaque nombre donné dans l'énoncé comme le représentant d'une famille d'autres nombres possibles mais c'est seulement certains d'entre ces ensembles qui sont intéressants pour la représentation par le schéma fondamental.

Par exemple, s'il s'agit de calculer une dimension sur la carte, connaissant la dimension sur le terrain, la considération de l'ensemble des échelles possibles peut contrarier la recherche de la solution. Il y a donc tout un entraînement à reconnaître les éléments du schéma fondamental.

2/ Règle de trois.

Ces activités remplacent avantageusement l'ancien procédé dit de "la règle de trois" et qui consistait, rappelons-le, à :

i/ énoncer ce que l'on cherche, opposé à ce que l'on connaît : par exemple le prix d'un [certain] nombre de cravates connaissant celui d'un [autre] nombre (en fait, l'énoncé demandait : "trouver le prix de 2 cravates" et l'enfant devait identifier que ce qui était demandé là était un prix et non un nombre de cravates malgré la présence de l'expression "2 cravates" et que ce prix n'était pas connu, le nombre de cravates, lui, étant connu).

En général, l'énoncé comportait au moins deux nombres de la catégorie connue et un seul de la catégorie inconnue.

ii/ choisir parmi les deux nombres du genre connu celui dont on connaissait le correspondant et commencer la "récitation" de la formule de la règle de trois : "si 3 cravates coûtent 390 f., 1 cravate coûte 3 fois moins et 2 cravates 2 fois plus !"

.../...

iii/ disposer au fur et à mesure de la récitation les nombres nommés sous la forme canonique :

$$\frac{390}{} \; ; \; \frac{390}{3} \; ; \; \frac{390 \times 2}{3}$$

iv/ effectuer les opérations indiquées :

$$390 \times 2$$

puis le résultat divisé par 3.

Cette récitation indiquait d'elle-même certain disfonctionnement : par exemple si l'élève commençait par : "si 2 cravates coûtent" il ne pouvait pas dire quel prix, donc, il fallait changer le nombre commençant : avec 390 F, j'ai 3 cravates, avec 1 franc, j'ai 390 fois moins et le 3ème nombre évoqué qui devait être des francs était absent ! Il fallait donc recommencer avec le 3ème nombre.
Cette possibilité d'autocorrection formelle permettait aux enfants d'abandonner le sens, parfois très comique, de ce qu'ils disaient.

Exemple : S'il s'agit de savoir combien de cravates j'ai obtenues avec 260 f alors que 3 cravates valent 390 f., la formulation précédente doit être utilisée et on évoque la quantité de cravates que l'on pouvait acheter avec 1 F !

L'étude formelle de la règle de trois conduisait à détruire chez l'enfant le contrôle de ce qu'il disait par le sens.

De plus, pour assurer la bonne succession des nombres dans la récitation de la règle de trois, de nombreux auteurs faisaient disposer les nombres en colonne comme nous l'avons fait jusqu'ici dans le schéma fondamental : le nombre inconnu en bas à droite.

3/ Différence avec la méthode proposée ici.

Cette ressemblance ne doit pas masquer la différence essentielle de la méthode présentée ici avec celle de la règle de trois :

i/ La disposition à droite ou à gauche, en haut ou en bas, des nombres du type cherché et celle, dans les colonnes, des nombres donnés ou calculés ne joue aucun rôle. Et elle est le plus souvent quelconque dans la classe.

Exemple :

Prix	Poids

ou

Poids	Prix

.../...

ii/ Toutes les opérations de recherche du schéma fondamental utiles dans l'énoncé et la vérification des propriétés caractéristiques s'appuient sur le sens de ce qui est proposé et sur des propriétés mathématiques à l'exclusion de tout formalisme "procédologique".

iii/ Toutes les opérations de solution sont obtenues uniquement par des raisonnements mathématiques vérifiables, pour les enfants, par d'autres raisonnements équivalents ! (Les enfants ont appris plusieurs méthodes pour établir la validité d'une solution).

iv/ Ces méthodes d'analyse ont été élaborées et éprouvées par les enfants et si le maître a aidé à les reconnaître, il n'en a canonisé aucune.

v/ La prise en compte ouverte par le maître devant les élèves des difficultés de mathématisation (institutionnalisation-validation), les projets communs de classements et de recherche des situations ou des méthodes de résolution tendent à développer chez les élèves des attitudes responsables et chez le maître une compréhension plus efficace de leurs difficultés.

4/ Cette méthode exige qu'assez fréquemment, et au hasard, l'enseignant présente à ses élèves des problèmes différents : linéaires ou non linéaires.

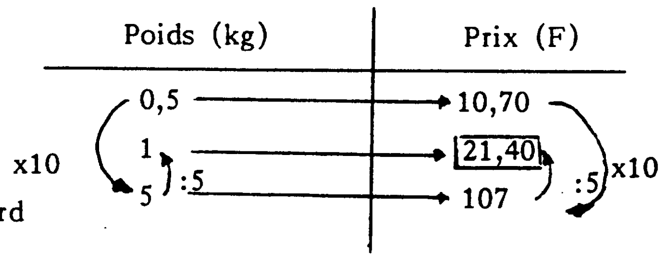
10.3.5 - Différentes méthodes de résolution.

Les élèves ont l'habitude de faire des recensements de méthodes et de les comparer. Il s'agit maintenant de montrer qu'un même élève peut utiliser des méthodes différentes selon les cas.

a/ Pour faciliter les calculs :

Exemple : J'ai payé 10,70 F pour 0,5 kg de fromage. Quel est le prix du kilogramme*de ce fromage ?

.1ère solution décrite par un enfant



Il calcule d'abord le prix de 5 kg.

.../...

* Il arrive que certains enfants ne comprennent pas que l'expression du kilo signifie la même chose que d'un kilo

2ème solution décrite par un autre enfant

	Poids (kg)		Prix (F)	
x2	0,5	→	10,70	x2
	1	x 21,40 →	10,70 x 2 = $\boxed{21,40}$	

Les enfants disent que la deuxième solution est la plus rapide. Mais l'un d'entre eux ajoute : "oui, mais pour employer cette méthode, il fallait savoir que 2 x 0,5 = 1 !"

Réaction immédiate des autres : "mais on le sait depuis longtemps puisque 2 fois 5 dixièmes, ça fait 10 dixièmes et 10 dixièmes c'est 1 !".

R e m a r q u e : L'enseignant peut, à ce moment-là, exploiter cette remarque d'un enfant et faire un peu de calcul mental en demandant :

"et 3 fois 0,5 combien ça fait ?"

2 fois 1,5 ?

2 fois 5,5 ?..." ce qui rompt la monotonie de la séance.

b/ Pour faciliter la représentation :

Exemple : 3 cravates valent 390 F. J'ai payé 260 F, combien ai-je eu de cravates ?

1ère solution : Type "règle de trois automatique" ("combien de cravates j'obtiens pour 1 franc ?")

	Nombre de cravates		Prix (F)	
:390	3	→	390	:390
	2	→	260	
	3 : 390 x260	x260 →	1	

2ème solution :

Nombre de cravates		Prix	
3	→	390	x?
	→	260	

...\/...

Pour trouver l'opérateur, les enfants divisent 260 : 390 et trouvent 0, 666...

Comme la division ne "tombe pas juste", ils cherchent souvent une autre solution.

<u>3ème solution</u> : utilisation de l'application (simple mais formelle)

Nombre de cravates		Prix (F)
3	$\xrightarrow{x130}$	390
2	$\xleftarrow{:130}$	260

<u>4ème solution</u> : celle qui sera retenue pour donner du sens à ce qu'on calcule et éventuellement vérifier.

	Nombre de cravates		Prix (F)	
	3		390	
:3	$\boxed{2}$	x2	260	:3
	1		130	

Prix d'une cravate
390 : 3 = 130

Nombre de cravates
260 : 130 = 2

R e m a r q u e : La 3ème et la 4ème solution font apparaître le même calcul. Dans la quatrième 130 F est le prix <u>d'une</u> cravate. Dans la troisième, "multiplier par 130" est l'application "prix des cravates" : définie par "1 cravate coûte 130 F." ou encore par : "130 F. par cravate".
Les sens sont donc très différents.

10.4 - RECHERCHE DES SITUATIONS LINEAIRES

10.4.1. Concours de recherche de situations

a) Consigne : "Je vous propose un concours qui durera jusqu'à la fin de l'année : Il s'agira de trouver des exemples d'applications linéaires et d'occasions de s'en servir. Au fur et à mesure, je relèverai vos propositions et nous choisirons les plus nouvelles ou les plus intéressantes. Qui peut donner un exemple ?"

R E M A R Q U E : la plupart des exemples qui viennent alors sont des exemples de prix d'une certaine quantité de marchandise, peut-être parce que l'achat et la vente sont devenus la seule activité sociale observable en rapport avec des calculs.

b) Etude d'un exemple : les poids et les prix.

Voici un exemple proposé par l'un d'entre vous : "Maman a payé 50,40 F. un rôti de 900 grammes. Quel est le prix du kilogramme de ce rôti ?"

Nous disposons habituellement, d'un côté l'ensemble de tous les poids de rôti que nous pourrions imaginer (mais nous n'écrirons que ceux qui nous intéressent) et de l'autre, l'ensemble de tous les prix correspondants, nous mettrons sur la même ligne, un poids et son prix :

Ensemble des poids		Ensemble des prix
900	————————>	50,40
un poids	————————>	son prix
1 kg	————————>	56 ?

La réponse demandée comprend trois parties :

un nombre : (le prix)	56
L'unité utilisée pour les prix :	FRANCS
L'unité utilisée pour les poids :	kilogramme

Réponse : 56 FRANCS par kilogramme
ou 56 F/Kg.

Attention ! ce n'est pas 56 F/g mais 56 F/1000 g.

.../...

c) Généralisation : les quantités et les prix

"Beaucoup de vos propositions se ressemblent, ne trouvez-vous pas ? Il s'agit toujours d'une quantité de produit et de son prix, la quantité étant une masse, une longueur, une capacité, une surface, un nombre, etc...

La fonction est généralement linéaire parce que si l'on veut acheter deux fois au même endroit la même quantité de produit, on paiera chaque fois le même prix. Donc le prix d'une quantité double sera une somme double.

10.4.2. Situations déjà rencontrées

a) Deuxième consigne : "Avant d'étudier les nombres décimaux, nous avions trouvé quelques exemples où l'on rencontrait un ensemble de départ, un ensemble images et une application linéaire de l'un sur l'autre.

Vous allez les rechercher dans vos cahiers (ou classeurs). Vous les proposerez et je les écrirai sur le tableau (le maître peut en avoir déjà écrit quelques-uns).

Ensuite, vous les relirez attentivement et vous remplacerez les nombres entiers par des nombres décimaux partout où ce sera possible et raisonnable".

b) Déroulement :

L'enseignant obtient alors après cette activité une liste de problèmes telle que la suivante (l'ordre des problèmes n'a aucune importance).

1. Une automobile consomme 8,2 litres pour faire $\boxed{100}$ kilomètres. Quelle sera sa consommation pour 300 kilomètres, 575 kilomètres ?

2. Un piéton qui marche toujours à la même vitesse parcourt 4,5 km en une heure.
1°) Quel temps mettra-t-il pour parcourir 7,2 km ? 9,8 km ?
2°) Quelle distance parcourt-il en 45 mn ?
" " " en 18 mn ?

3. Pour remplir $\boxed{7}$ boîtes de friandises, il a fallu $\boxed{133}$ bouchées au chocolat et $\boxed{224}$ bonbons aux fruits.
Combien faut-il de bouchées et de bonbons pour garnir 11 boîtes ?

4. Il faut 0,12 kg de café pour faire $\boxed{8}$ tasses.
Quel poids de café faut-il pour faire $\boxed{3}$ tasses ?
Avec 285 g. de café, combien peut-on faire de tasses ?

5. A l'hôtel, la pension pour $\boxed{3}$ personnes est de 541,5 f.
- Combien paiera une famille de $\boxed{5}$ personnes ?
- Un groupe a payé 1805 f. Combien y avait-il de personnes ?

6. Un rouleau de fil de cuivre de 5,1 mètres pèse 0,390 kg.
- Quel serait la longueur d'un rouleau du même fil pesant 1,170 kg ?
- Combien pèserait un rouleau de 8,5 mètres du même fil ?

7. Un libraire vend en réclame $\boxed{7}$ livres pour 108,50 f.
Combien valent $\boxed{56}$ de ces livres ?

8. Pour obtenir 10,1 kilogrammes de sel marin, il faut faire évaporer 310,1 kg d'eau de mer.
- Quelle quantité d'eau de mer faut-il faire évaporer pour obtenir 15,5 kg de sel ? 250,20 kg de sel ?
- Quelle quantité de sel marin peut-on obtenir en laissant évaporer 62,8 kg d'eau de mer ? 7285,5 kg ?

9. Le prix d'une course en taxi comprend :
- une prise en charge de 8,5 f.
- et une somme de par kilomètre
- Combien paiera-t-on pour un trajet de 7,5 km ? de 10,9 km ? de 17,5 km ?

10.

côté d'un carré	3,5	4,75	6,3	7,2
périmètre				
aire				

L'enseignant fait encadrer par les enfants les nombres qui ne peuvent pas être remplacés par des décimaux. Au cours de cette activité, les enfants devront remarquer que :

- certains nombres sont conventionnellement fixés : consommation d'essence aux 100 km, d'autes ne peuvent pas être mis par les enfants sous forme d'un nombre décimal : le temps en minutes.

- certaines quantités sont, par nature, entières : quantité de livres, de tasses, de bouchées au chocolat, etc...
- certains nombres décimaux sont aberrants à cause de la précision invraisemblable qu'ils évoquent : 7285,5 kg. Il est ridicule d'évaluer le poids de plus de 7 tonnes d'eau de mer à 500 grammes près !

Les élèves évoquent la manière de résoudre ces problèmes. Pour certains, la méthode ne change pas. D'autres, par contre, ne peuvent pas être résolus par les oenfants à ce moment-là (c'est le cas du problème n° 2 (division par un décimal), n° 6 (division par un décimal).

R E M A R Q U E : certains des exemples proposés sont, en fait, des contre-exemples (problèmes n° 9 et 10 : l'aire). Mais les élèves; tout en les résolvant correctement, peuvent ne pas le remarquer. Cette question est traitée dans le paragraphe suivant.

10.4.3. Contre-exemples.

a) Etude d'un contre-exemple :

"Examinons à nouveau la relation entre une quantité et son prix. Pensez-vous que dans ce cas, on a toujours des fonctions linéaires ? cherchons des contre-exemples."

L'enseignant laisse les enfants chercher et au bout de quelques minutes, accepte le contre exemple bien peu naturel en tant que contre-exemple du chauffeur de taxi (problème n° 9)

- et propose le suivant :

"Les vis à bois de 8 x 50 (diamètre 8 mm, longueur 50 mm) sont vendues dans un magasin par sachets de 6 au prix de 6 f. le sachet. Quel est le prix d'une vis ?

Je trouve chez le même marchand une boîte de 100 vis semblables au prix de 50 f.
Quel est le prix d'une vis ? Expliquez.

La fonction n'est pas linéaire puisque le prix d'une vis change suivant la quantité.

R E M A R Q U E : On peut se damnder alors sous quel emballage il vaut mieux acheter les vis selon le nombre de vis que l'on veut réellement utiliser. Par exemple, si on n'a besoin que d'une seule vis, (on suppose que les autres ne seront jamais utilisées) elle coûtera 6 f. !
"Et si on a besoin de 3 vis ?

de 20 vis ?

.../...

de 60 vis ?

de 80 vis ?

Que vaut-il mieux acheter ?"

Les enfants réfléchissent, éventuellement calculent sur leur cahier de brouillon.

Quantité	Prix par sachet	Prix par boîte
1 vis ———>	6 f. ———>	50 f.
3 vis ———>	6 f. ———>	50 f.
20 vis ———>	24 f. ———>	50 f.
24 vis ———>	24 f. ———>	50 f.
60 vis ———>	60 f. ———>	50 f.
80 vis ———>	84 f. ———>	50 f.

Le tableau montre que si on a besoin de 60 vis, il vaut mieux acheter 1 boîte.

On voit aussi que les applications "quantités-prix" ne sont pas linéaires mais pour une autre raison : le groupement par quantités.

L'application quantité ——> prix ne sera linéaire que si le prix d'une vis utilisée est rigoureusement le même quelle que soit la quantité. On peut donc calculer les prix moyens d'une vis dans les différents cas.

"Faites le tableau des prix moyens d'une vis selon la quantité".

Quantités	Prix d'une vis	Quantités	Prix d'une vis
1 ———>	6	7 ———>	1,71
2 ———>	3	8 ———>	1,5
3 ———>	2	9 ———>	1,33
4 ———>	1,5	10 ———>	1,20
5 ———>	1,2	11 ———>	1,09
6 ———>	1	12 ———>	1

Très vite, pour des quantités de vis assez grandes, le prix réel d'une vis est très voisin de 1 f.

10.4.4. Ouverture du concours

a) Troisième consigne :

* Vous chercherez (en dehors de la classe) de nouveaux exemples de situations de proportionnalité.
* Tous les matins, nous examinerons une proposition.

.../...

* Il faudra, autant que possible, chercher des exemples nouveaux différents de ceux que nous connaissons déjà. Nous essaierons de repérer ensemble ces différences.
* Nous attribuerons ensembles des points aux problèmes proposés (aux problèmes bien entendu, pas aux enfants), s'ils sont intéressants. Une situation originale présentant beaucoup de différences par rapport à celles déjà connues, remportera plus de points qu'une situation presque semblable à un problème déjà rencontré.
* Le concours d'exemples s'accompagnera d'un concours de contre-exemples. Un contre-exemple aura plus de points qu'un exemple.

REMARQUES POUR LE MAITRE :

Ce concours a pour objet d'inciter les enfants à consulter des manuels, à demander ou repérer dans leur entourage les problèmes possibles mais aussi à discuter de leurs particularités et des manières de les résoudre toujours en se référant à l'application linéaire.

Les points sont attribués aux problèmes et non pas aux élèves mais un élève peut se targuer d'avoir trouvé un problème à 5 points et même ajouter les points qu'il a obtenus. Un élève moins ingénieux peut essayer d'obtenir lui aussi beaucoup de points mais il est conduit à faire plus de problèmes. Ces additions de points ne sont pas prises en compte par le maître qui peut assurer que les enfants ont du goût pour la compétition sans en être lui-même l'instigateur ni l'organisateur.
Chaque élève doit savoir faire le problème qu'il propose.
Les points attribués à un problème donné varient avec le moment selon ce qui a été fait avant.

b) Comment chercher de nouveaux exemples.

Le maître ne fait pas un cours aux élèves sur la façon dont ils doivent chercher, mais il suggère au bon moment, soit des synthèses, soit des exemples, soit des méthodes, soit des pistes.
Voici quelques exemples.

. Faire varier systématiquement le type de grandeurs mises en correspondance : i) quantités/francs
ii) quantités/quantités
iii) nombre/nombre
iv) prix/prix

.../...

Ces quantités pouvant être des longueurs, des poids, des capacités, des volumes, des surfaces, des temps, des nombres (résultats de dénombrements) etc

. Cette exploration systématique se fait en cherchant les situations de référence qui donnent l'occasion de ces mises en correspondances :

i) ventes, achats.....

ii) transformations de produits (lait en crème, charbon en ses composants, confitures,.....), dosages (épandages d'engrais....)

iii) changements d'unités

iv) location d'argent (temps fixe)

. Faire varier les raisons de mise en correspondance (par exemple calcul du prix d'achat, du prix de vente, du bénéfice dans le cas des ventes et achats).

. Prendre systématiquement des activités sociales, professionnelles, techniques......

. Examiner le vocabulaire familier ou technique associé à ces pratiques sociales.

(Les élèves cherchent systématiquement toutes les formulations possibles d'un même problème et éventuellement font une enquête sur la manière dont les professionnels les formulent.
Exemples : A la banque, dans les magasins....)

Nous donnerons au Chapitre 14 quelques résultats possibles de cette recherche et notre propre classification.

MODULE 11 :

SITUATIONS LINEAIRES

11.1. FRACTIONS D'UN RATIONNEL

Avertissement aux enseignants.

Le vocabulaire des fractions a été introduit dans la première partie pour désigner des quantités. Nous allons maintenant l'utiliser pour désigner des applications linéaires, puis nous l'utiliserons pour désigner des rapports. Ces trois concepts sont des objets mathématiques différents qui ont été maîtrisés dans l'histoire à des époques et par des civilisations différentes. Nous savons aujourd'hui reconnaître leurs propriétés communes. Pour les calculs, ces trois sortes d'objets se comportent de la même manière et peuvent être identifiés puis confondus. Les élèves devront finalement traiter tous les cas avec le même langage et les mêmes méthodes.

Jusqu'au début des années 70, tous les manuels enseignaient directement le formalisme des fractions en l'illustrant de dessins presque métaphoriques (l'exemple de la tarte autorisait tous les usages des fractions !) et ne distinguaient pas les différences de sens importantes qu'introduisait le passage d'une conception à une autre.
Il est apparu qu'il y avait là une cause importante de difficultés et d'échecs pour certains enfants. Dans cet ouvrage où nous essayons, à la fois de permettre aux enfants d'interpréter de façon personnelle des situations réelles et néanmoins de leur faire construire un discours et des méthodes mathématiques corrects, les distinctions de ce type sont incontournables, du moins au début. Elles permettront de mettre en évidence les difficultés des élèves et la façon de les surmonter.

Les maîtres formés par des méthodes différentes ont beaucoup de mal à adapter leurs représentations et leurs explications, lorsque, comme ici, on ne s'autorise pas à étendre sans précaution un concept à un autre.

Dans ce premier paragraphe, nous allons d'abord familiariser les enfants avec la désignation d'applications linéaires à l'aide du vocabulaire des fractions (§ 1,2 et 3).

Les exemples et les problèmes devront donc être choisis

.../...

convenablement. Par exemple, dans le problème :
"Les 25 élèves d'une classe de CM 2 vont à la piscine toutes les semaines. A la fin de l'année, les 4/5 des élèves savent nager. Combien cela fait-il d'élèves ?" la fraction 4/5 est un rapport entre deux grandeurs : le nombre d'élèves sachant nager et le nombre d'élèves total. Elle ne correspond pas à une application linéaire : on n'évoque pas ici une loi telle qu'une autre classe devrait avoir la même proportion de nageurs. Par contre, on peut s'attendre à comparer des rapports. Au contraire, les problèmes correspondant à des "lois", à des conventions ou à des nécessités logiques, fourniront des exemples d'applications linéaires

Exemples de "lois" :

Composition d'un produit alimentaire, chimique ou autre (lait, pain, charbon, café, etc...) et ses transformations : le café perd 1/7 de son poids à la torréfaction, la confiture de figues nécessite un poids de sucre qui est les 3/4 d'un poids de fruits...

11.1.1. Fraction d'une grandeur

a) Introduction : Consigne

Voici un tableau pour faire de la confiture de figues :

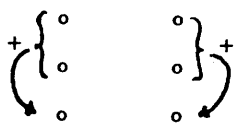
Poids de fruits en kg		Poids de sucre en kg
2	————————>	1,5
12	————————>	9
8	————————>	6
5	————————>	3,75

Est-ce que ce tableau est tiré d'une application linéaire ?

b) Déroulement :

1ère méthode

- Les élèves vérifient par les méthodes dont ils disposent :



. Est-ce que le poids de sucre correspondant à la somme de deux poids de fruits est la somme des poids de sucre correspondants à ces deux poids de fruits ? Quelques élèves proposent de comparer le poids de sucre (15 kg de sucre) correspondant à 12 + 8 kg de figues avec celui correspondant à 4 x 5 kg de figues (4 x 3,75 = 15), mais ils ont déjà supposé alors que l'application est linéaire. Cette méthode ne donne ici aucune vérification.

.../...

2ème méthode

. Est-ce que si on multiplie chaque poids de fruits par un certain nombre il faut multiplier le poids de sucre correspondant par le même nombre pour trouver la nouvelle quantité de sucre ?

	2	1,5
x6	12	9	x6
x4	8	6	x4

Les enfants vérifient que puisque 2 x 6 = 12 on a bien 1,5 x 6 = 9, puisque 2 x 4 = 8 et que 1,5 x 4 = 6. Puis ils se rendent compte qu'il faudrait faire beaucoup de vérifications...(16, ou au moins 6). Alors certains proposent de passer par 1 puis de faire toutes les vérifications.

3ème méthode

$2 \longrightarrow 1{,}5$

$1 \longrightarrow 0{,}75$

$\xrightarrow{x0{,}75}$

. Est-ce que les poids de sucre sont obtenus en multipliant le poids des fruits par un nombre constant ?
Pour trouver ce nombre les enfants cherchent l'image de 1, puis effectuent les multiplications 12 x 0,75 ; 8 x 0,75 ; etc...

. Conclusion : L'application est linéaire.

Note : Ces différentes méthodes sont toutes connues des enfants qui les utilisent selon leur efficacité du moment. Elles feront l'objet d'un recensement systématique et d'une "institutionnalisation" un peu plus tard.

Cette situation peut être rapprochée de celles qui donnent la composition d'un produit : exemples du lait, du gâteau, du pain....

c) Résumés du tableau.

. "Comment résumer le tableau en une recette courte ?"
Les élèves proposent leur méthode habituelle utilisant l'image de 1 :

"Il faut faire "multiplié par 0,75".

bientôt corrigé en :

"Il faut multiplier le poids des fruits par 0,75 pour trouver le poids de sucre correspondant"

. L'enseignant fait transformer l'écriture en fraction :

$\xrightarrow{x\frac{75}{100}}$, "simplifiez la fraction". Les élèves : $\frac{75}{100} = \frac{150}{200} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$ ...

il reformule alors ainsi :

"Il faut multiplier le poids des fruits par $\frac{3}{4}$ pour trouver le poids de sucre correspondant".
" Il faut appliquer x 3/4 aux poids de fruits pour trouver les poids de sucre correspondants".

. L'enseignant : "vous trouverez souvent pour dire cela des expressions comme :

> le poids de sucre est les 3/4 du poids des fruits. Pour trouver le poids de sucre on prend les 3/4 du poids des fruits, ou on calcule les 3/4...

Ce que vous avez fait ici, c'est calculer une fraction d'un nombre

R E M A R Q U E : On trouve dans le tableau en face du nombre 4 (dans les poids des fruits) le nombre 3 (poids du sucre): le poids de sucre est 3 lorsque le poids des fruits est 4, le poids de sucre par rapport au poids des fruits est de 3 pour 4.

11.1.2. Exercices de formulation des fractions en termes d'applications linéaires.

a) Consigne : "Voici quelques situations formulées de cette manière :

- Traduisez-les par le schéma d'application linéaire,
- puis proposez des questions en complétant s'il le faut par les renseignements nécessaires.

1) un marchand veut que son gain soit les 2/5 du prix d'achat.
2) le blé donne en farine blanche les 4/5 de son poids.
3) Dessinez un rectangle dont la largeur est les 2/3 de la longueur.
4) Pour acheter à crédit dans un magasin, il faut verser les 3/8 du prix de vente lors de l'achat."

b) Déroulement : Reconnaissance de l'application désignée par une fraction et recherche du schéma.

* Les enfants savent par exemple qu'il s'agit, dans la première situation, d'une application 2/5 et ils peuvent la représenter

$$1 \xrightarrow{x2/5} 2/5$$

.../...

le problème pour eux est de comprendre où se trouvent les prix d'achat et où se placent les gains.

- Assez souvent, si la situation de référence est bien connue, des renseignements annexes viennent indiquer la solution : par exemple dans le cas où l'on prend une partie d'un tout. Exemple (ce n'est pas le cas ici) l'image est plus petite que la quantité : si on prend les deux cinquièmes, à 2 ne peut pas correspondre 5, donc à 5 correspond 2.

- Ici ces informations "sémantiques" ont été volontairement rendues inopérantes. Le marchand pourrait vouloir faire un gain des 5/2 du prix d'achat car le gain n'est pas une partie du prix d'achat et la situation n'est pas bien connue des élèves. Dans ce cas, il faut bien se référer à la formulation elle-même : l'expression "les 2/5 $\boxed{\text{du}}$ prix d'achat" montre :

. que 2/5 <u>n'est pas</u> le prix d'achat

. que c'est le prix d'achat $\boxed{\text{dont}}$ on prend les 2/5.

* On a donc :

Prix d'achat

$$1 \xrightarrow{\times 2/5} 2/5$$

et l'ensemble d'arrivée est formé par conséquent des gains.

C'est l'occasion pour les élèves de reprendre les formulations déjà rencontrées :

. pour un achat de 1 le gain est 2/5

. lorsque l'achat est 5 le gain est 2 veut dire que le gain est 2 pour [un achat de] 5

. le gain est [2 pour 5] (prix d'achat)

. 2/5 est le gain, il faut le multiplier par 5 pour trouver 2 fois le prix d'achat :

$$\begin{array}{ccccc} & 1 & \longrightarrow & 2/5 & \\ \text{x}5 & & & & \text{x}5 \\ & 5 & \longrightarrow & 2 & \end{array}$$

* Les élèves produisent en réponse des schémas tels que :

. Prix d'achat $\xrightarrow{\times 2/5}$ gain

. Poids du blé $\xrightarrow{\times 4/5}$ Poids de farine blanche

.../...

. Prix de vente $\xrightarrow{x\ 3/8}$ 1er versement

. Longueur du rectangle $\xrightarrow{x2/3}$ largeur

REMARQUES :

1) Le nombre de départ multiplié par le nombre donnant l'application est égal au nombre d'arrivée. Alors que le nombre de départ s'obtient en divisant le nombre d'arrivée par la fraction, distinguer départ et arrivée est donc bien lié à la compréhension du produit de deux fractions ou de deux nombres.

2) Les enfants doivent interpréter directement les formulations il ne faut pas enseigner formellement des "algorithmes" pour obtenir le bon résultat. De nombreux exercices et des traductions dans les différentes formulations, accompagnés d'arguments de toutes sortes (la plupart, particuliers à l'exemple choisi, dont non généralisables) permettront de donner du sens aux formulations culturelles qu'ils rencontreront (et dont certaines sont assez illogiques).
De toute façon cette étude va être reprise dans le module 14 où, avec la composition des applications, il sera possible de récupérer le sens traditionnel (3/4 c'est diviser par quatre puis multiplier le résultat par 3).

c) Déroulement (suite) : Formulations de questions et de problèmes ; recherche des renseignements complémentaires nécessaires.

Les élèves proposent, pour chacune des situations énoncées ci-dessus, plusieurs problèmes obtenus en ajoutant des questions :
Par exemple, (pour la situation 2), les enfants peuvent demander :

- le poids de farine que l'on obtient
- le poids de blé qu'il a fallu.

Mais alors ceci suppose que l'on connaît le poids de blé dans le premier cas, le poids de farine dans le deuxième.

Les enfants n'éprouvent aucune difficulté à poser ces questions grâce à leur familiarité avec les tableaux. Néanmoins, cette activité est l'occasion de remarques intéressantes sur la pertinence des informations et des questions.
Exemple : "Une voiture a fait 100 km et son réservoir est aux trois-quarts vide".

.../...

. Si l'on ajoute que le réservoir était plein au départ, alors on peut demander combien on peut faire encore de kilomètres :

$\frac{3}{4}$ de réservoir ——> 100 kms

$\frac{1}{4}$ de réservoir ——> (100 : 3) kms

Comme il reste $\frac{1}{4}$ de réservoir, on pourra donc faire 33 kms.

. Mais si au lieu de cette première information, on dit qu'il reste 20 litres d'essence, alors c'est la capacité du réservoir qu'on peut demander:

$\frac{1}{4}$ de réservoir ——> 20 l.

$\frac{4}{4}$ ou le réservoir plein ——> 20 x 4 = 80 l.

(et dans ce cas, le nombre de kilomètres ne sert plus à rien).

REMARQUES POUR LE MAITRE :

i) Les élèves rencontrent parfois des difficultés à identifier les trois éléments de l'application.

.L'ensemble de départ ; la chose dont "on prend une fraction et qui, placée avant dans le schéma fonctionnel est le plus souvent nommée après la fraction, comme dans tous les exemples ci-dessus et parfois difficile à identifier :

Exemples : "Le réservoir est vide aux 3/4"

"Un employé gagne une somme, il en économise les 3/40..."

.La correspondance c'est-à-dire la manière de trouver l'image d'un nombre donné. De façon classique 3/4 décrit l'opération "diviser en quatre puis multiplier par 3" que nous décrirons dans le module 12, ici l'enfant dit qu'à 1 on fait correspondre 3/4 sans se référer à une opération quelconque pour "passer" de 1 à 3/4.

Nous évitons ainsi quelques difficultés liées :

- à l'impossibilité de faire réellement le partage envisagé
- à une représentation trop concrète (prendre les $\frac{5}{4}$ d'une somme !)
- ou à la complexité des opérations concrètes envisagées.

Mais l'identification a priori de l'ensemble d'arrivée n'en devient que plus nécessaire.

. L'ensemble d'arrivée : L'ensemble des valeurs qui sont "une fraction" d'une autre est parfois d'autant plus difficle à distinguer que la langue française permet la confusion constante entre une opération et son résultat une application et son image, une action ou un fait et l'état qui en est la conséquence (le mariage a eu lieu à telle date et a duré 20 ans !).

.../...

Le langage des fractions suppose "évidente" la manière d'effectuer l'application linéaire.

ii) Nous supposons que le schéma peut être fait par les élèves avant que l'on connaisse la question posée et indépendamment d'elle en ne se servant que du langage et de la représentation de la situation de référence. Nous supposons ensuite que la question peut être représentée avant et indépendamment de la solution à produire.

iii) Les élèves sont donc invités à poser les questions et à inventorier les questions possibles :

. recherche de l'image (la fractin d'une quantité)

. recherche de l'objet (la quantité dont on connaît la fraction)

. recherche de l'application (la fraction prise - ou le rapport de deux grandeurs). Les questions vont justifier la suite de la leçon.

iv) Les élèves constatent qu'ils ne peuvent "rien calculer" s'ils ne connaissent pas la quantité ou le nombre dont ils "prennent une fraction" mais ils peuvent faire le tableau, tout comme ils peuvent dessiner un rectangle dont la largeur est les deux tiers de la longueur.

11.1.3. Calcul avec les "fractions-applications"

a) Calcul de l'image : L'enseignant propose aux enfants les problèmes suivants :

1 - On achète 6 kg de fruits pour faire de la confiture. Ces fruits donnent les $\frac{2}{3}$ de leur poids en jus . On ajoute un poids de sucre égal au poids de jus.

Quel poids de sucre doit-on acheter ?

2 - Le coton rétrécit au lavage : il perd les $\frac{2}{9}$ de sa longueur. Si une pièce de ce tissu mesure 6,75 mètres, quelle sera sa longueur après lavage ?

3 - Le lait donne le $\frac{4}{25}$ de son volume en crème, quel poids de crème obtient-on avec $\frac{3}{4}$ de litre de lait ?

b) Mathématisation avec les enfants.

L'enseignant invite les enfants à faire des remarques mathématiques sur les problèmes qu'ils viennent de faire. Certains indiquent qu'on a calculé une fraction d'un nombre entier(1), puis d'un nombre décimal(2) enfin d'une fraction(3).

L'enseignant fait préciser : "quelle opération avez-vous faite pour prendre les $\frac{2}{3}$ d'un nombre ?

Les enfants disent : "on a multiplié le nombre par $\frac{2}{3}$"

.../...

Par quelle opération peut-on décrire l'application "prendre les 2/3 ?" Par rapprochement avec l'activité 10.1 produit de 2 fractions), les enfants proposent : "$1 \longrightarrow \frac{2}{3}$ c'est multiplier par 2/3 !"

$$1 \xrightarrow{\times\ 2/3} \frac{2}{3}$$

L'enseignant alors encadre :

$\boxed{\text{Prendre une fraction c'est multiplier par cette fraction}}$

c) Calcul d'un nombre dont on connaît une fraction

- Pour un repas de fête, on achète un rôti de 3,6 kg. Après avoir été désossée et cuite, cette viande perd les $\frac{2}{9}$ de son poids.

Après cuisson, on veut obtenir un rôti de 2,1 kg. Quel poids de viande doit-on demander au boucher ?

poids avant cuisson — perte de poids

$$\xrightarrow{\times\ 2/9} \frac{2}{9}$$

Poids avant cuisson — perte de poids

$$\begin{array}{ccc} 1 & \xrightarrow{\times\ 2/9} & \frac{2}{9} \\ \times 9 \downarrow & & \downarrow \times 9 \\ 9 & \longrightarrow & 2 \end{array}$$

Poids avant cuisson — Poids après cuisson

$$9 \xrightarrow{\times\ 7/9} 7$$

Poids avant cuisson — Poids après cuisson

$$\begin{array}{ccc} 9 & \xrightarrow{\times\ 7/9} & 7 \\ & & \downarrow \times 3 \\ & & 21 \\ & & \downarrow :10 \\ & & 2{,}1 \end{array}$$

Poids avant cuisson — Poids après cuisson

$$\begin{array}{ccc} 9 & \xrightarrow{\times\ 7/9} & 7 \\ \times 3 \downarrow & & \downarrow \times 3 \\ 27 & \longrightarrow & 21 \\ :10 \downarrow & & \downarrow :10 \\ 2{,}7 & \xrightarrow{\times\ 7/9} & 2{,}1 \end{array}$$

L'enseignant demande quelle est l'opération correspondante à cette application.

$$\begin{array}{ccc} 9 & \longrightarrow & 7 \\ 1 & \longrightarrow & \frac{7}{9} \end{array}$$

$$\xrightarrow{\times\ 7/9}$$

d) Calcul de la fraction-application

. Problème : Une brûlerie traite 21 kg de café vert et obtient 18 kg de café torréfié. Trouvez les poids de café torréfié correspondant à d'autres poids de café vert.
Quelle fraction de son poids de café garde-t-il dans cette opération ?
Quelle fraction perd-il ?

L'enseignant indique aux enfants qu'il s'agit de reconnaître l'application linéaire, de la formuler en terme de fraction et leur demande d'essayer de trouver une méthode rapide et générale.

- Déroulement : différentes étapes :

i) reconnaissance des ensembles : écrits dans un ordre quelconque

café torréfié	café vert

ii) correspondances

café torréfié		café vert
18	$\longrightarrow$	21

iii) autres poids de café vert

café torrefié		café vert
18	$\longrightarrow$	21
		10
		1
		30

iv) Calcul des poids de café torréfié

	café torréfié		café vert	
:21	18	$\longrightarrow$	21	:21
x10	$\frac{18}{21}$ ou 0,857		1	x10
	8,57		10	x28
			28	
			.	

v) Quelle est l'application dont on demande le nom ?
C'es celle qui correspond à prendre une fraction du poids de café avant (vert) pour connaître le poids du café après (torréfié)

C'est le nom de l'application représentée par les flèches de droite à gauche

$$\frac{18}{21} \longleftarrow 1 \quad \text{c'est } \times \frac{18}{21}$$

.../...

Si on veut retrouver le schéma habituel, on doit mettre l'image à droite, la fraction calculée à droite, le café torréfié à droite.

$$\begin{array}{ccc} \text{café vert} & & \text{café torréfié} \\ 1 & \longrightarrow & \frac{18}{21} \end{array}$$

L'application est $\times \frac{18}{21}$ en la simplifiant on trouve :

$\frac{18}{21} = \frac{6 \times 3}{7 \times 3} = \frac{6}{7}$.

vi) L'application qui fait correspondre

$$21 \longrightarrow 18$$

est $\times \frac{18}{21}$, prendre les 18/21 des valeurs de l'ensemble de départ.

Prendre a/b d'un nombre ou le x a/b, c'est calculer l'image de ce nombre par l'application b ——> a.

11.1.4. Formulation des applications linéaires en terme de fractions. Simplification des fractions.

a) Fractions simples

"Pouvez-vous maintenant reprendre des applications linéaires que nous avons rencontrées dans les leçons précédentes et dire si elles consistaient à prendre une fraction des nombres de départ, et laquelle ? "

b) Déroulement :

Les élèves évoquent les applications linéaires connues, généralement

. en rappelant leur "signification" par exemple "la reproduction de l'optimist",

. puis, soit le nombre qui représente l'application.

Exemple : $\xrightarrow{\times 0,5}$

. Soit les ensembles que l'application met en relation. Exemple : le modèle et C ou le modèle et F.

. Soit un élément du modèle et son image : exemple : le côté du pavillon 4 ——> 3 ou C.

Certains élèves choisissent aussitôt des nombres entiers le plus petit possible. Cela permet des formulations directes, immédiates.

Exemples :

Sur l'image C les longueurs sont les 3/4 des longueurs sur le modèle.

.../...

L'application du modèle vers E est $\times \frac{5}{4}$.

Pour dessiner E il faut prendre les 5/4 des longueurs du modèle.

La reproduction x 0,5 consiste à prendre $\frac{1}{2}$ (ou la moitié) des longueurs.

Le nouveau puzzle était les 7/4 du modèle...

La plupart prennent bien des applications linéaires mais les désignent à l'aide de nombres quelconques qu'il faut transformer en nombres <u>entiers les plus petits</u>. Soit avant (en particulier si les nombres sont décimaux ou s'ils sont des fractions) soit après la formation de la fraction. La simplification de la fraction est reconnue comme la recherche des correspondants les plus petits :

Exemples : $\times 0{,}75 = \times \frac{75}{100} = \times \frac{3 \times 25}{4 \times 25} = \times \frac{3}{4}$

. $4 \longrightarrow 6$ c'est $2 \longrightarrow 3$ c'est $\times \frac{3}{2}$

. $3{,}2 \longrightarrow 5{,}6$ c'est $32 \longrightarrow 56$ c'est $4 \times 8 \longrightarrow 7 \times 8$

c'est donc $4 \longrightarrow 7$ donc $\times \frac{7}{4}$ ou $\times 1{,}75$

ou encore $\frac{56}{32} = \frac{4 \times 8}{7 \times 8} = \frac{4}{7} = 1{,}75$.

Très souvent les élèves calculent directement en nombre décimal et les fractions formulées sont des fractions décimales.

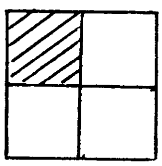
11.1.5. Fractions directes.

<u>a) Consigne</u> :

Trouvez différentes façons de hachurer 1/4 de sa surface, 3/4, 3/7... Pourvez la validité de votre solution en calculant la surface hachurée dans le cas où le carré mesure 20 cm de côté.

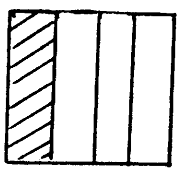
<u>b) Déroulement</u> :

. Les propositions : les premières réponses sont celles que fournit la culture des enfants : Généralement :



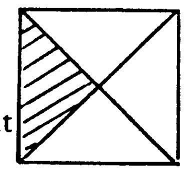
(a)

parfois



(b)

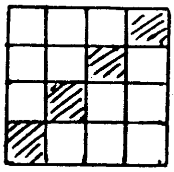
exceptionnellement



(c)

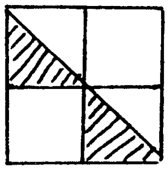
.../...

Le maître relance la question éventuellement en proposant :



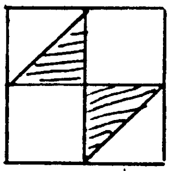
(d)

ou

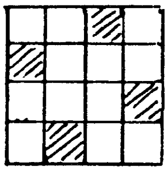


(f)

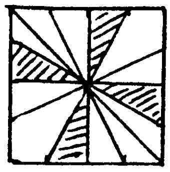
Les enfants peuvent alors inventer :



(g)

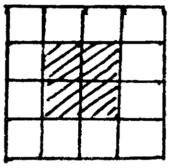


(h)



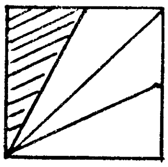
(i)

La solution :



(j)

fait souvent naître des commentaires intéressants ainsi que celle-ci :



(l)

. Les preuves : en fait, ces propositions ne peuvent être examinées que sous la condition que les élèves connaissent :

Le calcul de la surface du carré pour les exemples (a) (d) (h) (i).

<u>Exemple</u> (a) :

Tout le carré	la surface hachurée
$20 \times 20 = 400\ cm^2$	$10 \times 10 = 100\ cm^2$

$$400 \longrightarrow 100$$

$$4 \longrightarrow 1$$

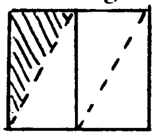
donc $\xrightarrow{\times \frac{1}{4}}$

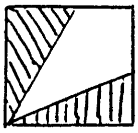
.../...

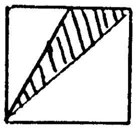
ou bien les superpositions de figures

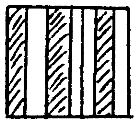
Les élèves qui remarquent que $\times\frac{1}{4}$ c'est diviser par 4 (ils peuvent le faire en tant que <u>division</u> dans les entiers) proposent souvent de reporter 4 fois le morceau hachuré pour recouvrir la surface. Le procédé, sans calcul est valable pour (b) (c) (d) (f) (g) (h) , mais pas pour j ni pour i ni pour l

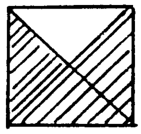
ou bien le calcul de la surface d'un triangle pour les cas i, j, l.

R E M A R Q U E : pour le cas l  ici la partie hachurée

est bien 1/4. Alors ici  la partie blanche

est 1/2 et sa moitié  est aussi 1/4.

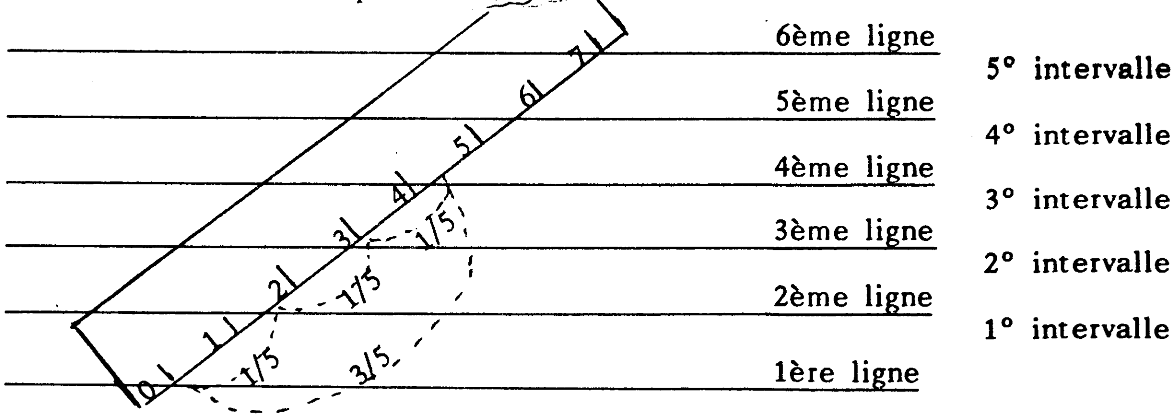
Pour $\frac{3}{7}$ les solutions sont beaucoup moins nombreuses 

Pour $\frac{3}{4}$ les élèves utilisent l'égalité bien connue $3/4 = 3 \times \frac{1}{4}$ 

c) <u>Fractions de longueurs</u>

1. Les élèves s'intéressent à ces partages directs de figures. L'instituteur leur annonce qu'ils peuvent faire avec une règle graduée très finement et une feuille de papier quadrillé d'école un abaque pour diviser par 2, 3, 4, 5, 6, 7... Et pour prendre des fractions simples des longueurs comprises entre 5 et 20 cm. Il laisse les élèves interroger leur famille, ou dans les livres, ou réfléchir et quelques jours plus tard, leur montre la <u>méthode de Thalès</u> :

Comment prendre 3/5 de 7 cm.



Réponse 4,2

2. Rapports scalaires.

Par quelle fraction faut-il multiplier un nombre donné pour en trouver un autre donné lui aussi ?

Cette question peut être déjà posée (et déjà résolue par certains élèves). Elle sera étudiée dans le module 11, mais l'enseignant peut lancer ce défi intellectuel à l'avance.

11.2. POURCENTAGES

11.2.1. Pourcentages.

a) Consigne : "D'un minerai de fer, on extrait du fer et on obtient 18 pour cent de son poids.

Pouvez-vous montrer quelle application représente cette expression et comment on peut trouver le poids de fer extrait de 550 kg de minerai.

Trouvez d'autres manières d'exprimer cette application".

L'enseignant peut rappeler que 18 pour cent exprime une correspondance et qu'on a déjà rencontré cette expression dans les fractions.

b) Déroulement : Les enfants produisent des formulations connues. Ils précisent : "dans chaque tas de 100 kg de minerai de fer, on peut extraire 18 kg de fer. Pour 200 kg, 2 fois 18 kg... 18 pour cent veut dire que c'est proportionnel.

Poids du minerai de fer (kg)	Poids du fer (kg)
100 ———>	18

c'est $\times\frac{18}{100}$ (dix huit centièmes) ou x 0,18.

Il faut prendre les dix-huit centièmes... etc et pour 550 kg :

500 ———> 5 x 18 = 90
50 ———> 9
550 ———> 99

11.2.2. Situations de référence

a) Cherchez d'autres exemples (d'applications linéaires) que l'on désigne par des expressions comme "18 pour cent".

b) Les enfants trouvent une foule d'exemples ; à chacun d'eux le maître demande de traduire la situation par un tableau et au besoin aide l'élève à présenter son exemple :

. 45 pour cent de matières grasses dans le fromage
. 100 pour cent de polyester dans un vêtement

.../...

. 80 pour cent de coton

. 40 pour cent de chicorée
et 60 pour cent de café } dans un produit

. soldes de 15 pour cent ou de 20 pour cent...

Il font également allusion aux sondages qu'ils entendent à la télévision ainsi qu'au livret de caisse d'épargne. Pour ce dernier exemple, ils ne connaissent pas, pour la plupart, le vocabulaire qui leur permettrait de s'exprimer : taux, intérêt, capital. Ce peut être l'occasion de l'introduire (sans exiger, bien sûr, qu'il soit définitivement connu et maîtrisé).

c) Conclusions

Les pourcentages sont seulement des fractions à dénominateur 100. Ils jouent un rôle intermédiaire entre les fractions simples et les décimaux.

Ces fractions ont toutes le même dénominateur, ce qui permet de les comparer, des les additionner ou de les soustraire.

Elles permettent d'exprimer un plus grand nombre de fractions que les petites fractins ordinaires, par exemple les 1/4 ou les 1/5...

Pour la précision nécessaire à bien des métiers, ces fractions suffisent.

On peut s'en servir presque comme des nombres entiers et pour le montrer, on remplace les dénominateurs par un signe spécial:%

$$\frac{3}{100} = 3\ \%$$

d) Exercices :

Exprimez en pourcentages :

- le poids de sucre, pour la confiture, est les 3/4 du poids des fruits
- le gain est les 2/5 du prix d'achat
- le blé donne les 4/5 de son poids en farine
- le nouveau puzzle est les 7/4 du modèle.

11.2.3. Exercices

a)"Prendre"un pourcentage :

. Sur une boîte de camembert, on lit : 40 % de matières grasses.

.../...

Quelle est la quantité de matières grasses contenue dans un fromage de 250 grammes ?

. L'air contient 21 % d'oxygène. Quel est le volume d'oxygène contenu dans 100 litres d'air ? 500 litres d'air, 10 l. d'air ?

. Un libraire fait une remise de 25 % à un directeur d'école. Celui-ci achète une série de 45 livres à 50 F. l'un.

Combien paiera-t-il ?

. Un marchand de fruits et légumes achète 145 kg de foies à 4,5 F. le kg. Il les revend avec un bénéfice de 32 % du prix d'achat.

Quel est le prix de vente total ?

b) Trouver le départ (quantité soumise au pourcentage)

. Les betteraves donnent 35 % de leur poids en sucre. Si on obtient 150 Kg de sucre, quel poids de betteraves a-t-il fallu ?

. Un commerçant me fait un rabais de 5 % sur un imperméable. Il paie cet imperméable 513 F. Combien valait-il ?

. La population d'une grande ville a augmenté de 4 % en 2 ans. Elle est maintenant de 37 180 habitants. Combien comptait-elle d'habitants il y a 2 ans ?

c) Calcul du pourcentage

. Un boeuf de 650 kg a donné 390 kg de viande de boucherie. Quel pourcentage de l'animal vivant cela représente-t-il ?

. Dans une assemblée, on compte 182 adultes et 18 enfants. Quel est le pourcentage d'enfants de cette assemblée ?

. Une pièce de tissu de 25 mètres perd 0,5 m. après lavage. Quel pourcentage de la longueur représente ce rétrécissement.

11.2.4. Calcul du pourcentage

REMARQUE POUR LE MAITRE :

Le calcul des pourcentages traité ci-dessus comme de simples exercices peut être conçu comme une deuxième introduction de la notion, afin de donner une "deuxième chance" aux élèves que l'exemple "introductif" aurait laissé en difficulté (On peut supposer

.../...

que certains élèves n'avaient ni entendu les remarques de la leçon précédentes, ni une connaissance "culturelle" des pourcentages).
Il est nécessaire à la fois que l'enseignant exige un réinvestissement de ce qu'il a enseigné ou de ce que les enfants ont appris hors de l'école et qu'il n'en fasse pas une condition incontournable pour les élèves. Inversement, si offrir plusieurs occasions d'accéder directement aux notions est un souci constant de l'enseignant, cela ne doit pas aboutir à un désengagement cognitif de l'élève qui se contente alors de recommencer éternellement la première initiation. L'enseignant doit exercer une pression mesurée mais constante sur les élèves pour qu'ils sachent ce qu'ils sont censés savoir. Ici, les élèves doivent savoir deviner qu'on leur montre une nouvelle fois la définition des pourcentages.

a) Consigne : "Pour obtenir 8 litres de crème, il faut 50 litres de lait".
Placez ce renseignement dans le tableau ci-dessous et complétez ce tableau de proportionnalité.

quantité de lait					125		250	
quantité de crème	4	2	10	16				100

b) Déroulement : Les enfants placent 8 et 50 dans l'une des colonnes vides (8 dans la rangée des quantités de crème, 50 dans celle des quantités de lait), puis ils font les calculs en utilisant les méthodes qui leur sont familières.

i) 1ère méthode

x2   :2   x5

quantité de lait	25	12,5	62,5	100	125	50	250	625
quantité de crème	4	2	10	16	20	8	40	100

:2   x2   x5

250 = 200 + 50 (lait)
↓
(2x16) + 8 (crème)

10 = 8 + 2 (crème)
↓ ↓ ↓
625 = 50 + 12,5 (lait)

.../...

125 = 100 + 25
20 = 16 + 4

ii) 2ème méthode : Cette méthode consiste :
- à trouver l'application qui permet de passer de la quantité de lait à celle de crème, ou inversement, en mettant en oeuvre les découvertes faites dans l'activité précédente : le nombre d'arrivée divisé par le nombre de départ correspondant, ce qui donne :

soit 25 : 4 = 6,25 dans le 1er cas
ou 4 : 25 = 0,16 dans le 2ème cas.

- puis à multiplier chaque quantité de lait par 0,16 pour obtenir la quantité de crème correspondante et chque quantité de crème par 6,25 pour obtenir la quantité de lait correspondante.

c) Correction collective

(L'enseignant procède comme à l'habitude à une correction collective et à un recensement de toutes les méthodes utilisées par les enfants. Ces méthodes sont discutées, approuvées si elles sont correctes, rejetées si elles ne donnent pas des résultats exacts).

d) Définition des pourcentages par les élèves.

L'enseignant demande quels seraient les nombres les plus faciles pour désigner cette correspondance. Il peut même leur demander d'expliquer, d'exposer, ou de définir eux-mêmes les pourcentages.

Les élèves entourent 16 et 100 et proposent des formulations "100 litres de lait donne 16 litres de crème"

le lait donne de la crème
100 ————————> 16

Le lait donne 16 litres de crème pour 100 litres de lait.
Le lait donne 16 pour 100 de crème
quantité de lait $\times \frac{16}{100}$ quantité de crème

Il faut prendre les 16/100 de la quantité de lait, etc... pour obtenir la quantité de crème correspondante. La quantité de crème est les 16 % de la quantité de lait, etc...
Quelques autres élèves s'intéressent à l'autre nombre 100 en essayant de formuler la correspondance.
100 litres de crème nécessitent, exigent, demandent...(?) 625 litres de lait.
Pour avoir 100 litres de crème, il faut 625 litres de lait : la crème "demande" 625 pour 100 de lait !!

.../...

e) Difficultés des élèves.

Le pourcentage est plus difficile à formuler dans un sens que dans l'autre : c'est que le vocabulaire utilisé pour l'introduire évoque des opérations matérielles : prendre, donner, ... ou logiques nécessigent, exige,... ces formulations sont plus commodes lorsqu'elles évoquent des opérations qui suivent l'ordre normal du temps que lorsqu'elles évoquent une remontée dans la chronologie.
De toute façon, des expressions comme :
"le lait donne 16 % de son poids en crème" et
"la crème provient des 625 % de son poids en lait"
sont loin d'être symétriques.

Il faut donc admettre que les élèves rencontrent des difficultés qui ne sont surmontées qu'avec une familiarisation des expressions et des situations de référence.

11.2.5. Additions et soustractions de pourcentages.

Nous avons introduit les pourcentages comme les fractions archimédiennes en tant qu'applications linéaires. Ce choix facilite une certaine approche mais tend à en dissimuler une autre :
Très souvent le pourcentage, commez les fractions sont utilisées pour exprimer des mesures lorsqu'il existe ce que l'on appelle "une condition d'échelle" c'est-à-dire lorsqu'on veut rapporter ces mesures à celle d'un tout qui tout en étant finie (généralement 1) ne sera pas dépassée :

Exemple : en probabilité, la mesure de la certitude est 1. Un évènement peut être probable à 99 % (0,99), mais pas à 101 %!! à 100 % il est sûr c'est tout.

"Les opérations les plus courantes deviennent alors des additions et des soustractions de ces applications linéaires et notamment le calcul du pourcentage restant.

Ces opérations sont très simplifiées par l'emploi des pourcentages lorsuq'il n'y a pas d'ambiguité sur le tout ou la chose dont on prend des fractions.

a) Un commerçant accorde les conditions de paiement suivantes : le client doit payer 10 % de la somme à la commande, 30 % à la réception de la marchandise, le reste en trois paiements égaux, un par mois après la livraison.

.../...

Pour faciliter les calculs de ses clients, il décide de faire un tableau indiquant les différents versements pour les prix de vente suivants : 3800 F., 4200 F., 6700 F., 1200 F.
Quel pourcentage du prix d'achat reste-t-il à payer par le dernier versement ?

Les élèves peuvent découvrir :
1) qu'il est plus économique de calculer directement les pourcentages correspondants aux traites que de calculer sur les nombres
2) et qu'on obtient le même résultat

b) Le maître pose alors une question :
"peut-on ajouter des pourcentages ? A quelle condition ?"
Il faut, si l'on ajoute des % que ce soit des pourcentages d'une même quantité.

.../...

11.3. CORRESPONDANCES ENTRE MESURES

11.3.1. Correspondance entre deux grandeurs de même espèce : Echelles.

a) Matériel :

* Différentes cartes de la région où vivent les enfants, à des échelles différentes :

Exemples : (échelle 1/285000) - carte physique Aquitaine (Edition MDI)
(échelle 1/200000) - carte Michelin n° 71
(échelle 1/1100000) - carte de "Bison futé"
(échelle 1/500000) - Guide de la route (Sélection du Reader's Digest)

Il faut compter une carte par groupe de 2 ou 3 enfants.

* Un trajet assez simple a été choisi par le maître, par exemple Cap Ferret (la pointe) - Pauillac (88 km) et sur toutes ces cartes (précédemment énumérées) les indications des distances réelles le long de ce trajet ont été effacées (à l'aide d'une goutte de blanc à correction, par exemple).

* 5 à 6 épingles à tête * 50 cm de ficelle fine * 1 feutre * 1 double décimètre	par groupe

b) Présentation de la situation

* Les enfants sont par groupes de deux ou trois
* Ils choisissent, avec le maître, un trajet commun, familier à la plupart d'entre eux si possible (et différent de celui qui a été retenu par le maître) Par exemple : Facture -Pointe de Grave (121 km)
* Ils décrivent ce trajet, repèrent les symboles et les expliquent (oralement bien entendu, avec l'aide de l'enseignant).
* Celui-ci demande ensuite à chaque groupe :

- de calculer la longueur de ce trajet commun sur le terrain, indiquée sur la carte (et qui doit être la même pour tous)

.../...

- de mesurer ce trajet sur la carte à l'aide de la ficelle fine et des épingles. On constate que ces longueurs ne sont pas les mêmes dans tous les groupes.

c) Consigne :

"Chaque groupe va, maintenant, calculer la longueur réelle du trajet : "Cap Ferret (pointe) - Pauillac".

d) Déroulement :

Dans tous les groupes, les enfants mesurent avec la ficelle le trajet indiqué par le maître. Puis ils inscrivent dans un tableau :

- (1) la longueur de la ficelle relative au trajet qu'ils ont choisi ensemble (cf b)

- (2) la longueur réelle de ce trajet qu'ils ont calculée sur la carte (cf b)

- (3) la longueur de ficelle relative au trajet : "Cap Ferret (pointe) - Pauillac" qu'ils viennent de mesurer.

Ils mettent, sans difficulté, les deux premières mesures en correspondance, la troisième sous la première mais certains sont embarrassés pour donner un nom aux deux grandeurs proportionnelles. Quelques-unes trouvent des formulations souvent maladroites du genre : "les kilomètres sur la route", "les kilomètres sur la carte"... ou "longueur du trajet" pour les deux grandeurs.

L'enseignant les aide à formuler correctement ce qu'ils veulent dire et un consensus se fait dans la classe : on appellera "distance réelle" ou "longueur réelle du trajet" le nombre de kilomètres indiqué sur la carte et "distance sur la carte" ou "longueur du trajet sur la carte" la longueur de la ficelle. Les tableaux se présentent alors ainsi :

. Par groupe (carte Michelin n° 71)

distances sur la carte		distances réelles
Facture - Pointe de Grave	59 ——>	121
Cap Ferret - Pauillac	43,2 ——>	

puis les enfants ajoutent toujours les unités correspondantes à chaque grandeur :

.../...

	Distances sur la carte (cm)	Distances réelles (km)
Facture Pointe de Grave	59	121
	:9 1	2,05 :59
Cap Ferret - pauillac	43,2	88,56 x43,2

Ils remarquent que dans ce cas l 'application est (x2,05)
Ils écrivent donc 88,56 en face de 43,2.

. Dans un autre groupe, qui travaille sur le guide de la route (sélection du reader's digest), on obtient :

	Distances sur la carte (cm)	Distances réelles (km)
Facture - Pointe de Grave	22,6	121
Cap Ferret - Pauillac	16,2	

Pour faire les calculs, ils multiplient les 2 premières mesures par 10.

	Distances sur la carte (cm)	Distances réelles (km)
Facture - Pointe de Grave	22,6	121
	x10 226	x10 1210
	:226 1	:226 5,35
	16,2	16,2 x 5,35 = 86,67.

e) Conclusion : L'enseignant fait remarquer aux enfants que, sur les cartes, les longueurs du trajet Cap Ferret - Pauillac sont différents selon le type de cartes mais que toutes représentent la même distance sur le terrain.

Puis il leur annonce qu'il va demander d'évaluer plusieurs distances réelles. Les enfants disent qu'il faut calculer les applications pour pouvoir trouver plus vite les images, comme avec l'optimist.

Les différents groupes calculent donc :

$16,2 \xrightarrow{\text{x } 5,35}$

ou $43,2 \xrightarrow{\text{x } 2,05}$

f) Réflexions sur ces "écritures" (x5,35 ; x 2,05...)

i/ L'enseignant fait remarquer que :

$16,2 \xrightarrow{\text{x}5,35} 86,67$

.../...

L'enseignant fait remarquer que sans indications supplémentaires :

$$16{,}2 \xrightarrow{\times\ 5{,}35} 86{,}67$$

veut dire que 86,67 <u>cm</u> correspondent à 16,2 <u>cm</u>.
Or, on voudrait dire que 86,67 représentent des kilomètres et 16,2 des centimètres.
Il suffirait de préciser les unités correspondant à chaque colonne. Mais lorsque l'ensemble de départ et l'ensemble d'arrivée sont des grandeurs de même type (longueurs, masse, prix...etc) il est d'usage d'utiliser les mêmes unités dans les deux colonnes. Car 86,67 km n'est pas 5,35 fois plus grand que 16,2 cm. Comment savoir alors combien de fois elle est plus grande ?

ii) Les enfants comprennent tout de suite qu'il faut transformer 86,67 km en centimètres, et sur le tableau, on écrit :

$$16{,}2 \text{ cm} \longrightarrow 8667000 \text{ cm}$$

L'application n'est donc pas x 5,35 mais 5,35 x 100000 = 535000

$$16{,}2 \text{ cm} \xrightarrow{\times 535000} 8667000 \text{ cm}$$

iv) L'enseignant leur demande d'inscrire dans le tableau la longueur sur le terrain correspondant à 1 cm sur la carte et il fait ajouter 1 cm sur les différents tableaux (si ce n'était déjà marqué). Ce qui donne pour un groupe :

Distance sur la carte (<u>cm</u>)	Distance réelle en <u>cm</u>
16,2 cm ——>	8667000 cm
1 cm ——>	535 000

ou pour un autre groupe :

Distance sur la carte (<u>cm</u>)	Distance réelle (<u>cm</u>)
43,2 ——>	88566000
1 ——>	205000

g) <u>Définition de l'échelle</u> :

Il dit aux enfants : "l'image de 1 s'appelle "<u>l'échelle</u>". On écrit le plus souvent :

1/535000

ou 1/205000 "

L'échelle ne dépend pas de l'unité choisie à condition que cette unité soit la même sur le terrain et sur la carte.

.../...

h) REMARQUE :

1) Dès que les enfants voient cette écriture de l'échelle, ils disent que "c'est marqué" sur les cartes et ils la cherchent, par groupe, sur la carte avec laquelle ils ont travaillé.

Ils remarquent alors dans certains groupes que l'échelle qu'ils ont trouvée est un peu différente de celle qui est indiquée.

1/535 000 pour 1/500 000

ou 1/205 000 pour 1/200 000.

L'enseignant leur rappelle les difficultés de mesurage qu'ils ont eues avec la ficelle. Ils reconnaissent en effet et admettent que ce n'est pas très précis. Ils comprennent que l'erreur de 35/1000 (1er cas) ou de 5/1000 (2ème cas) peu importante est due à cette imprécision.

2) L'enseignant leur fait rechercher sur toutes les cartes qui sont à leur disposition (celles sur lesquelles ils ont travaillé et d'autres que le maître a apportées) toutes les manières d'indiquer l'échelle. (cette recherche peut se faire à la maison sur les cartes des parents). Ils vérifient que dans tous les cas, il s'agit de l'image de 1 (en centimètres).

11.3.2. Problèmes d'échelles

a) Recherche de la distance réelle

L'enseignant propose alors plusieurs problèmes afin que les enfants distinguent bien chaque fois la longueur réelle, la longueur sur la carte (ou sur le plan) et l'échelle (longueur en cm qui correspond à 1 cm sur la carte).

1. Un trajet mesure 7,5 cm sur une carte dont l'échelle est 1/200000. Quelle est la longueur réelle du trajet ?

2. Un ingénieur établit le projet de construction d'un canal entre deux rivières sur une carte au 1/50000 ; il mesure la distance qui sépare ces deux rivières sur la carte (en ligne droite) et trouve 38 cm.
Quelle est la distance réelle ?

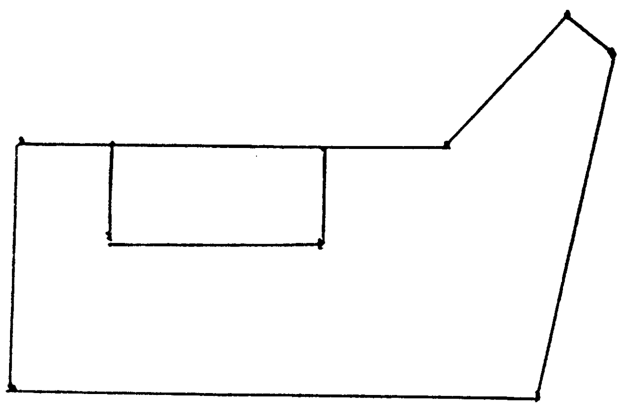
.../...

3. Un camion miniature "dinky-toy" a une échelle de 1/43. Ses dimensions sont les suivantes :

Longueur totale : 13 cm
Largeur de la cabine : 3,6 cm
Longueur de la cabine : 5 cm
Hauteur totale : 6 cm.

Quelles sont les dimensions réelles du camion ?

4. Sur le plan cadastral d'une commune à l'échelle de 1/500, quelles sont les dimensions réelles de cette maison représentée par le rectangle hachuré et de son terrain.



b) Recherche de la longueur sur la carte

1. Entre Bordeaux et Libourne, il y a 38 km. Quelle est la longueur de ce trajet sur une carte au 1/200000 ?

2. Sur la carte de France, 1 cm représente 400 km. Fais un trait correspondant à une distance de 500 km.

3. Suite du problème - 2 - dans (a)
La configuration du terrain oblige à construire un canal long de 23km. Quelle longueur aura ce canal sur la carte ?

c) Recherche de l'échelle

1. Sur une carte, 4,5 cm représentent une distance de 9 km.
Quelle est l'échelle de cette carte ?

2. Sur une carte 594 km sont représentés par 54 cm. Quelle est cette échelle ?

.../...

3. L'enseignant peut demander aux enfants de trouver à partir de leurs calculs quelle était l'échelle de la carte qu'ils avaient dans chaque groupe. Il leur est alors possible de vérifier si leurs calculs sont corrects.

d) **R E M A R Q U E** : Le problème de Thalès

Même avec les méthodes pédagogiques les moins raffinées, l'introduction de la notion d'échelle ne semble pas présenter pour les élèves d'autres difficultés que de manier des fractions à grand dénominateur.

Nous avons cependant pu observer les limites de la connaissance ainsi acquise par les élèves : c'est un algorithme utilisable, au plus, dans quelques situations stéréotypées et les élèves rencontrent de grandes difficultés à mettre réellement en correspondance le terrain et la carte, à orienter celle-ci, à s'orienter eux-mêmes et à maîtriser concrètement cette relation de similitude qui nous paraît si évidente.

On peut imputer ces difficultés aux insuffisances des élèves dans l'acquisition des relations spatiales ou plus généralement à une "incapacité" à utiliser le savoir acquis comme moyen d'anticipations effectives.

Les leçons proposées ici ont pour objet de lutter contre leur tendance à ne produire le savoir que comme une réponse directe à des questions scolaires. Nous utilisons des situations spécifiques pour favoriser le développement des représentations spatiales des élèves et leur étude en termes de géométrie. Nous ne pouvons pas les exposer ici. Mais il est clair que la linéarité, comme moyen d'anticipation, joue un rôle très important dans la formation de ces représentations spatiales. Ces deux questions doivent être étudiées ensemble.

La linéarité n'est pas une espèce de sous-produit de la similitude "naturelle" entre une image et son modèle. L'élève ne maîtrise vraiment les relations spatiales que lorsqu'il est capable de les structurer <u>à l'aide</u> de ses modélisations, et en particulier les modélisations linéaires.

En fin d'année nous proposons le problème réel suivant :

"Dans le jardin de l'école, au bord de deux allées (convergentes, voir figure 1), nous avons planté deux fanions. Voici un double mètre ; pouvez-vous prévoir la distance entre ces deux fanions ? Vous avez le droit de vous déplacer et de mesurer partout sauf sur la pelouse (voir dessin).

Nous vérifierons votre prévision après, en tendant un fil entre les deux fanions et en le mesurant".

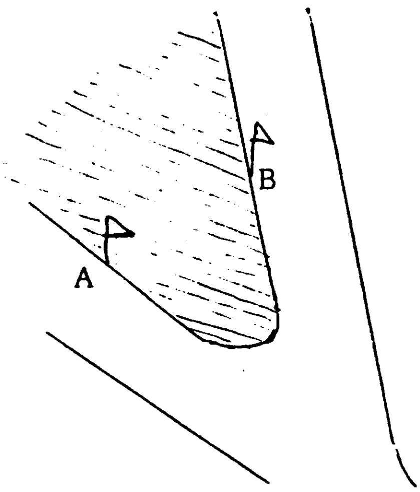


figure 1

La solution consiste évidemment pour un adulte :

- à structurer l'espace à l'aide de points de repères accessibles par exemple (fig. 2) LMNOPQ. Ou plus simplement RST (fig. 3)
- à faire un plan à l'échelle de cette "structure" spatiale
- à mesurer la distance cherchée sur le plan
- à calculer la distance réelle AB correspondante.

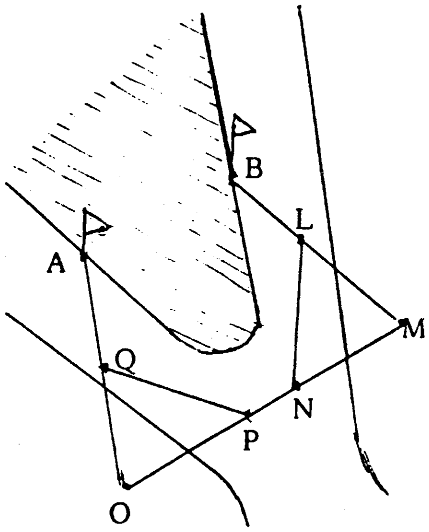


figure 2

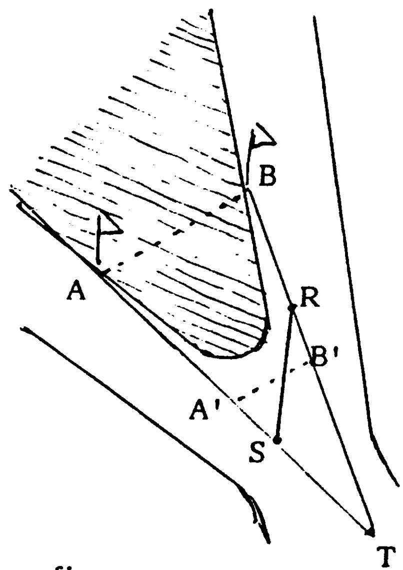


figure 3

Dessiner A'B'T, en fonction "de Thalès" c'est-à-dire avec A'T/AT = B'T/BT (et donc A'B'//AB) n'est qu'un raffinement économique de cette méthode qui consiste à faire le plan A'B'T de ABT sur le terrain lui-même en utilisant l'angle T lui-même.

.../...

Après quelques tentatives infructueuses - malgré la suggestion de l'enseignant de faire un plan - les élèves réclament la solution et beaucoup ont du mal à comprendre avant la fin comment la solution surgira de cette opération. (Attention ! SR n'est pas parallèle à AB, et TSR n'est pas un modèle de TAB comme dans le "théorème de Thalès" du secondaire, ce raffinement sera pour plus tard).
Mais une fois vue la solution, ils ont l'impression d'avoir fait une découverte importante. Leurs difficultés dans cette situation sont en partie liées à celles qu'ils rencontrent à passer de la conception de la longueur d'un objet rectiligne à celle de la distance de deux points non reliés matériellement.

11.3.3. Correspondance entre des grandeurs d'espèces différentes

a) Problème : "Je veux mesurer la longueur divers rouleaux de fil de cuivre. Puis-je le faire sans les dérouler ?

Je dispose d'un petit bout de ce fil qui mesure 1,20 m. Je le pèse et je trouve 33,6 g. Trouver la longueur du rouleau".

Les enfants demandent le poidsdu premier rouleau :"Je pèse ce rouleau et je trouve 2,1 kg".

b) Déroulement de la recherche

Les enfants commencent à faire un tableau mais certains s'inquiètent : "est-ce que c'est proportionnel ?"

L'enseignant répond : "le fil est bien régulier. Je crois que si je coupais 1,20 m de ce fil n'importe où, il pèserait toujours 33,6 grammes !"

Les enfants font le tableau en précisant les deux grandeurs. Ils inscrivent tout de suite les renseignements numériques qu'on leur a donnés.

longueur du fil de cuivre	Poids du fil de cuivre
1,20 ———	——> 33,6

Puis ajoutent les unités fournies par ces renseignements :

longueur du fil de cuivre (m)	Poids du fil de cuivre (g)
1,20 ———	——> 33,6

.../...

Avant d'ajouter le poids total du rouleau : 2,1 kg, dans le tableau, les enfants remarquent que ce poids est exprimé en kg et disent qu'on ne peut pas l'inscrire ainsi, il faut qu'il soit exprimé en grammes : 2100 grammes. Ils obtiennent ainsi le tableau définitif qui va leur permettre de trouver la longueur demandée :

longueur du fil de cuivre (m)	Poids du fil de cuivre (g)
1,20	33,6
12	336
	2100

Ils calculent l'application linéaire par le procédé qui leur est familier maintenant : 336 : 12 = 28 et ajoutent cette application linéaire sur leur tableau :

longueur du fil de cuivre (m)		Poids du fil de cuivre (g)
1,20		33,6
12	x28	336
75	:28	2100

2100 grammes est le poids de 75 mètres de fil de cuivre.

Conclusions :

On ne peut plus représenter ces applications à l'aide seulement d'un nombre comme dans les échelles. Il faut indiquer aussi les unités utilisées pour chaque mesure.

Il faut aussi que toutes les mesures soient indiquées avec la même unité dans chaque ensemble.

11.3.4. Applications différentes - même correspondance; Notation

a) Consigne

Voici le prix de 1,250 kg de rôti affiché par mon boucher : 85 F.
La correspondance est "68 F par kg." Exprimez cette même correspondance par différentes applications selon les unités choisies.

b) Pour exprimer une correspondance linéaire on écrit :

- le nom de l'application : nombre d'arrivée sur nombre de départ correspondant

…/…

. La correspondance entre unités : <u>l'unité de l'ensemble d'arrivée sur l'unité de l'ensemble de départ</u>.

Exemples :

Un bateau file $\boxed{13}$ $\boxed{\text{noeuds à l'heure}}$

heure noeuds

$1 \xrightarrow{x13}$

Une machine fabrique $\boxed{130}$ $\boxed{\text{pièces à la minute}}$

mn pièces

$1 \xrightarrow{x130}$

Des oeufs valent $\boxed{12}$ $\boxed{\text{F la douzaine}}$

Nbr de douzaines prix

$1 \xrightarrow{x12}$

Des roses coûtent $\boxed{6}$ $\boxed{\text{Francs pièce}}$

Nbr de roses prix en F

$1 \xrightarrow{x6}$

Un engrais contient $\boxed{4,5}$ $\boxed{\text{kilogrammes de potasse par sac de 50 kg}}$

Nbr.de sacs de 50 kg Poids de potasse

$1 \xrightarrow{x4,5}$

c) Dans le cas du fil de cuivre, exprimez la correspondance que nous avons vue de toutes les façons différentes que vous pourrez.

11.3.5. Correspondances non linéaires

a) <u>Cartes</u>

. Faire un tableau montrant la correspondance entre les côtés des carrés et leur surface.

Cette application est-elle linéaire ?

. Sur un plan à l'échelle 1/100, une pièce est représentée par un carré de surface 2 cm^2. Quelle est la surface de cette pièce ?

. Sur le plan la surface du dessin d'un champ A est double de celle d'un autre B. Est-ce que le champ A a réellement une suface double de B ?

. Etablir la correspondance entre les surfaces de rectangles sur une carte au 1/10 000, et sur le terrain. La correspondance est-elle linéaire ?

.../...

b) Les châteaux d'eau

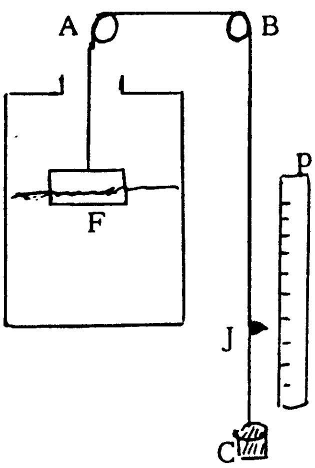


figure 1

Pour mesurer la quantité d'eau dans certaines citernes on utilise le système ci-contre. F est un flotteur A et B sont des poulies, C un contrepoids qui tend le fil, I un index et P la planche sur laquelle on marquera les quantités d'eau correspondantes (graduation).
Où est l'index lorsque la citerne est vide? Lorsqu'elle est pleine ?

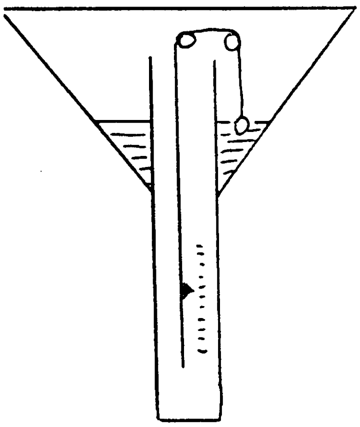


figure 2

Avec une citerne cylindrique, le fabriquant a trouvé que l'index baissait de 5 cm lorsqu'on ajoutait 100 litres d'eau.
La citerne contient 80 hl. Quelle est la longueur totale de la graduation ? Quelle est la profondeur de la cuve ?

On utilise le même système pour un château d'eau de la forme suivante (figure 2)
La graduation sera-t-elle linéaire ? Pourquoi ?

Cherche d'autres relations non linéaires : par exemple : la taille et l'âge d'un enfant.

.../..

MODULE 12 :

DIVISIONS CLASSIQUES DANS LES RATIONNELS

Objectifs - avertissement

Dans le module suivant, nous voulons introduire la division des rationnels en tant qu'application réciproque de l'application linéaire "multiplicative", puis commencer à "identifier" ces appplications réciproques comme des applications linéaires : (:2) est la réciproque de x 2, mais c'est aussi $(x\frac{1}{2})$... Il s'agit donc de diviser un rationnel mesure par un rationnel application.

Cette étude sera poursuivie dans les modules suivants par l'introduction d'une nouvelle représentation de la multiplication comme composition d'applications linéaires et donc d'un nouveau sens de la division. Elle se terminera seulement lors de l'unification des différentes approches que nous avons suscitées chez les élèves.

Mais ces approches différentes ne se juxtaposent pas simplement dans les connaissances des enfants elles s'organisent inéluctablement en représentations parfois complémentaires mais souvent concurrentes (on peut concevoir des solutions différentes d'un même problème). Ces représentations comportent des limitations qui les rendent parfois contradictoires entre elles et même fausses dans certains cas. L'introduction d'une nouvelle représentation doit tenir compte de ces difficultés. De plus, il faut poursuivre l'exploration entreprise depuis le module 10, du champ des problèmes et des situations que nos concepts mathématiques permettent de maîtriser et commencer à organiser cette exploration. Nous commenterons à la fin de ce module la méthode que nous avons retenue.

Elle repose essentiellement :

- sur la prise de conscience, par les élèves, des "représentations" dont ils disposent au sujet de la division, de leurs conditions d'utilisation, de leurs limites et de leurs contradictions

.../...

- et sur un travail de classification et de réflexion sur le sens des problèmes qu'ils ont rencontrés.

Il faut qu'il soit bien clair, pour le maître, que ces réflexions et ces classifications ne sont, en aucun cas, des connaissances à enseigner, ce ne sont que des moyens qui devront être oubliés ensuite, des occasions, pour l'élève, d'unifier lui-même une multitude de conceptions fragmentaires et contradictoires en un concept unique de division qu'il ne possède pas encore (et auquel il serait donc vain de vouloir le faire se référer).

12.1. CONCOURS DE RECHERCHE DE PROBLEMES DE DIVISION

L'activité se déroule comme une succession de cycles d'activités. Chaque cycle comprend :

- une phase de recherche d'énoncés par les élèves, individuellement ou par petits groupes,

- puis une phase de vérification et de résolution collective de ces problèmes

- enfin, d'une phase de classification et de recherche des critères.

Dans le cycle suivant, les élèves chercheront de "nouveaux" énoncés en utilisant les critères dégagés et la classification obtenue. Au fur et à mesure du travail, cette classification évolue et se "complète".

12.1.1. Phase 1. recherche

a) Consigne : "Nous continuons notre concours d'énoncés (cf. module 10.4).

. Aujourd'hui, vous devez proposer des problèmes qui conduisent à faire une division. Vous écrivez l'énoncé et vous posez seulement l'opération mais vous préparez dans votre tête la justification de ce calcul pour la donner oralement à vos camarades. Vous pouvez commencer par des exemples simples ou que nous avons rencontrés mais ne compliquez pas, introduisez par une phrase le dividende et le diviseur et demandez le quotient. Ce sont les occasions de faire la division qui nous intéressent.

Par contre, essayez de mettre le plus possible des décimaux ou des fractions non naturels dans les énoncés et dans les solutions - A LA CONDITION QUE LE PROBLEME GARDE DU SENS.

Nous suivons toujours la même règle".

.../...

a) Déroulement : Les élèves travaillent par groupes de deux sur des feuilles de papier affiche. Le maître arrête le travail dès que chaque groupe a choisi,on produit au moins deux énoncés.Il doit parcourir rapidement les groupes pour les encourager mais aussi pour avoir une idée assez précise des énoncés qui vont lui arriver.

12.1.2. Phase 2. Vérification

a) Consigne : "Vous allez venir présenter vos problèmes, tout le monde réfléchit à la solution. Quelqu'un propose l'opération à poser et nous vérifions : si ce problème est un problème de division,

si la solution proposée par l'équipe est correcte,

si l'énoncé est correct et plausible.

b) Déroulement: Chaque équipe vient proposer un de ses problèmes.
Une courte discussion conduit :
- à rejeter les problèmes pour lesquels tout le monde (y compris le maître) est d'accord pour dire que ce n'est pas un problème de division
- à retenir les problèmes sur lesquels tout le monde (y compris le maître) est d'accord pour reconnaître un problème de division
- à laisser affichés, mais à part, les problèmes litigieux : l'accord n'a pas pu se faire dans un temps raisonnable.
Chacun pourra venir puiser dans cette réserve au fur et à mesure que les progrès permettront d'obtenir l'accordde tous - sur un énoncé.

Le maître accepte les exemples à la condition que l'élève
. identifie le dividende, le diviseur, le quotient en termes généraux (par exemple : le prix total, le poids, le prix du kilo...)
. et justifie l'opération par le détail des sens ou des techniques de référence: soustractions répétées, soustractions répétées poursuivies, recherche du terme inconnu d'un produit, rapport...

Il aide l'élève dans cette recherche et dans la formulation de la question.

Après l'étude de chaque énoncé le maître demande "qui a

.../...

choisi le même problème".Rapidement, les groupes proposent ceux de leurs énoncés qu'ils estiment semblables à celui qui vient d'être présenté. Il n'y a pas de discussion à ce moment-là sur ce qui "est le même problème" : c'est le maître qui accepte ou rejette l'identification selon les critères qu'il sait évidents pour tous ses élèves. Il rend aux auteurs les énoncés dont il pense qu'ils donneront lieu à un débat intéressant. Il place tous les énoncés "semblables" sous "l'énoncé-type" provisoire, qui reste exposé.

c) Difficultés des élèves et stratégies du maître

Il s'agit de ne pas se laisser déborder par trop de "types" trop différents et non classables, ni de soulever des débats insolubles parce que prématurés. Le choix de la succession des énoncés présentés, seule variable de commande pour le maître, est donc critique, elle ne doit pas être abandonnée au hasard ; à première vue, le détail du déroulement dépend beaucoup des propositions faites par les enfants et de leurs difficultés à reconnaître les problèmes de division.

i/ Les élèves peuvent confondre le moyen de contrôle ou le moyen de calcul de sa solution avec le moyen "canonique".

Exemple : Enoncé proposé "5 livres identiques coûtent 160 francs. Quel est le prix d'un livre ?

Objection d'un élève :

"J'ai trouvé 32 ; 32 x 5 = 160. C'est un problème de multiplication puisqu'on le résoud avec une multiplication.

Cette réponse est un effet normal de notre "méthode" qui donne la primauté au sens dans l'action par rapport à la description théorique. Mais le maître doit faire distinguer l'opération canonique 160 : 5 de ses justifications ou moyens de substitution... Il peut, par exemple, discuter directement : (qu'est-ce qui est demandé ?, quelle opération donne ce résultat?) et s'appuyer sur le présupposé arithmétique : les données avant le signe "égale" le résultat après).

ii/ Les élèves aperçoivent une opération partielle dans la résolution d'un problème et cette opération partielle du calcul global, qui n'est pas toujours reconnu comme une opération.

Exemple : même énoncé.

.../...

Objection : J'ai essayé des nombres :

à 30 francs, 5 livres coûteraient 150 francs.

Il fallait un peu plus, j'ai pensé 2 francs puisque 2 x 5 = 10 f. alors j'ai vu que 32 x 5 = 160.

Ici, l'élève effectue une division, correctement mais l'appelle multiplication.

Le maître peut alors négocier un meilleur terrain :
Est-ce que : "5 livres identiques coûtent 147,26 F. Quel est le prix d'un livre ?" est le même problème ? Chercher successivement 29 x 5, puis 29,4, puis 29,45, ce n'est pas <u>une</u> opération mais une suite d'essais, et c'est ce que nous appelons <u>une</u> division. Ce que tu as fait est une division : les divisions contiennent des mutiplications.

iii/ Autre difficulté. Les élèves ne peuvent identifier la question qui conduit à la division qu'ils ont aperçue dans un problème.
Exemple : Pour encadrer $\frac{4319}{29}$ entre deux décimaux, il a été nécessaire de faire plusieurs divisions :

Combien de fois 4319 contient-il 29 ?

Combien de fois 270 contient-il 29 ?

Quels étaient les problèmes posés ?

Les élèves peuvent avec l'aide du maître les identifier : "combien d'unités dans $\frac{4319}{29}$, puis "combien de dixièmes"... etc
Il est temps maintenant de faire <u>admettre</u> et <u>d'institutionnaliser</u> l'ensemble de l'opération comme une division unique (en concluant ce que nous avons fait dans le module 7)

Aujourd'hui le maître pourra proposer "trouver le plus grand décimal à trois chiffres après la virgule inférieur à 22/7", ou plus simplement: "représentez $\frac{22}{7}$ par un décimal, approchez $\frac{22}{7}$ par un décimal"... etc comme une occasion de faire la division 22 : 7 qui fournit le résultat : 3,142.
Le maître n'introduira cet exemple (il y a peu de chance que les élèves le proposent spontanément) qu'en temps opportun, et le laissera, si nécessaire, dans la réserve. Il choisira des problèmes plus faciles à traiter dans l'ordre indiqué plus loin.

.../...

12.1.3. Phase 3 : Première classification et identification de critères

Cette phase commence lorsque tous les énoncés ont été communiqués à tous les élèves, mais elle peut être entreprise dès que l'on possède un lot significatif d'énoncés : La classification permet de recueillir plus vite les problèmes "semblables", mais si elle est prématurée, elle n'est pas comprise par les élèves. Il est essentiel de ne pas "trainer" sur chaque exemple en voulant tout dire à son sujet car les classifications sur un exemple unique passent assez mal. Inversement, les enfants ne peuvent pas investir un champ de problèmes trop vastes (surtout si chacun n'a été traité que trop superficiellement). Ici encore, l'équilibre sera essentiel. Ce type d'exercice peut apparaître inconcevable aux maîtres qui n'ont pas expérimenté les effets à long terme des méthodes d'enseignement que nous présentons ici. Les élèves prennent progressivement l'habitude de ces situations de débat et des stratégies du maître qui leur sont liées. Ainsi, la consigne suivante n'a souvent même pas besoin d'être donnée : certains élèves la proposent et le maître la justifie seulement (pour apprendre plus facilement à résoudre les problèmes, pour en découvrir de nouveaux, etc...)

a) Consigne : "Certains de ces énoncés se ressemblent beaucoup et pourraient être mis ensemble. Nous aurions ainsi moins de catégories et de problèmes-types à apprendre. Cherchez des problèmes qui se résolvent ou s'expliquent de la même façon. Nous discuterons ensemble les regroupements. En même temps, nous chercherons ce qui peut les rendre différents".

b) Déroulement et stratégie du maître.

Les élèves, en choisissant deux problèmes, sont conduits à évoquer une catégorie (les ressemblances) et des critères de dissemblance. Exemple : Deux problèmes identiques qui ne diffèrent que par les nombres qui y figurent n'évoquent pas forcément un type mais donnent l'occasion de discuter du critère "nombres différents".

Par contre, les enfants peuvent vouloir utiliser des critères tels que : Dans les deux cas, il s'agit de partager quelque chose, ou bien dans les deux cas il s'agit du prix de quelque chose...

La consigne permet aux élèves de tenter des rapprochements

.../...

mais ne leur donne aucun moyen pour décider de leur intérêt. Avant d'entreprendre des discussions, ils essaient habituellement de tâter l'opinion du maître par des différences d'abord "petites" : mêmes nombres, mêmes grandeurs... avant de s'enhardir.

Le maître se prête à ce jeu pour mettre en évidence les caractères qui différencient les prolbèmes, valeur et nature de nombres, types de grandeurs, genre de questions, etc... mais en même temps, il est commode de traiter le plus tôt possible les cas les mieux connus des enfants : Partages, recherche du terme inconnu d'un produit, rapports, etc...

Il s'agit de montrer des différences, leur effet sur le raisonnement ou le type de calcul, puis de dépasser ces différences en montrant que la solution envisagée pour un problème peut être utilisée pour résoudre l'autre, et en identifiant les dividendes, les diviseurs et les quotients.

12.1.4. Phase 4 : Production de problèmes nouveaux et usages des critères

A chaque étape, la classe dispose :
- d'un embryon de classification : quelques types reconnus différents et dans chaque type des énoncés "semblables"
- et d'un début de liste de critères qui introduisent ces différences et qu'on peut négliger pour trier les classes. Le maître fait fonctionner ce système : Il fait évoquer l'ensemble des problèmes possibles engendrés dans chaque catégorie par le système de critères dégagé à ce moment-là.

Dans certains cas, ces critères obligent à créer des catégories nouvelles.

Il fait rechercher les causes de différences et observe leurs effets, il augmente ainsi le champ des problèmes, les critères envisagés et le nombre de catégories possibles, mais ensuite, il les réduit par des ressemblances, des assimilations, des représentations.

a) Exemples : création d'une catégorie

Les élèves proposent de mettre dans une même catégorie les deux problèmes suivants :

.../...

"Evelyne partage un ruban de 1,50 m en deux morceaux égaux. Quelle est la longueur de chaque morceau ?" et

"Trois frères se partagent égalent une somme de 375 F. Combien ont-ils chacun ?"

M : "Pourquoi trouvez-vous qu'ils se ressemblent ?
E : Parce qu'on partage en parts égales
M : Il y a des différences pourtant
E : Oui, dans un cas c'est des rubans, dans l'autre c'est de l'argent.
M: Et on peut partager l'argent comme les rubans ?
E : ??? non mais pour les nombres, oui c'est pareil
M : Trouvez un problème "intermédiaire" qui montre la ressemblance : par exemple, mettez les données de l'un à la place de celles de l'autre.

Les élèves proposent l'énoncé :
"Trois frères se partagent également une somme de 1,50 F. Combien ont-ils chacun ?" et
"Evelyne partage un ruban de 375 m en 5 morceaux égaux. Quelle est la longueur de chaque morceau ?"

Le maître accepte provisoirement le rapprochement, ce sera une catégorie "les partages" mais relance le problème des nombres.

b) Création de critères

M : "Alors si on change les nombres, on ne change pas le problème ?"
Les enfants sont prêts à penser que changer les nombres ne conduit pas à changer l'opération à faire.
M : "Prenons le même énoncé, changeons les nombres... qu'arrive-t-il ?"

Les remarques alors peuvent permettre de dégager l'effet de la grandeur des nombres :

certains nombres sont plausibles mais d'autres ne le sont pas (valeur des données)

un ruban de 375 m, ce n'est pas usuel, un ruban de 375 km, ce n'est pas possible.

Si Evelyne partage un ruban de 1,523712 m, le problème paraît plausible mais la précision est ridicule (représentation des données).

.../...

Si le nombre de frères était le nombre décimal 3,2, le problème n'aurait pas de sens (nature du nombre).

c) Tentative de suppression d'un critère

Par contre, regardons le problème suivant : "on partage les 5/6 d'un gâteau entre 2 enfants. Quelle part de gâteau reçoivent-ils ? Est-ce un problème de division ? "

Le maître relance la discussion. Peut-on faire un problème de partage où le nombre de parts pourrait être décimal...

Pas de réponse évidemment. Mais plus tard, lorsque la recherche du prix à l'unité de mesure a été reconnu comme type de problème, on peut observer des tentatives de réponses :
"Un gigot de 3,750 kg est vendu 270 F. Quel est le prix du kilo ?
On pourrait considérer le prix total 270 F. comme la quantité à partager (à répartir), le prix au kilogramme serait la valeur d'une part et le nombre de parts serait le nombre de kilogrammes. Chaque kilo doit recevoir la même part du prix total, et s'il reste une fraction de kilo, elle doit recevoir la même fraction du prix d'un kilo... c'est comme pour le partage.

Il est très important pour que les enfants comprennent le sens des problèmes, de favoriser cette attitude d'esprit. Il est évident qu'un rapprochement de deux problèmes aussi singuliers (bien que juste car il contient la notion de distribution de densité uniforme) ne doit pas être recherché pour lui-même et encore moins enseigné.

d) Recherche de nouveaux problèmes

Le maître prend un autre problème de la liste : par exemple : "Avec 7,5 m de toile, combien pourra-t-on faire de torchons s'il faut 1,25 m par torchon ?"
"Pouvez-vous montrer les différents genres de problèmes que vous pouvez obtenir dans cette nouvelle catégorie en utilisant les critères que nous venons de voir :

- valeur des nombres (valeurs plausibles et non plausibles)

.../...

- représentation des nombres (précision trop grande ou insuffisante ; écriture d'un naturel sous forme de fraction, exemple : j'ai partagé 28 billes entre $\frac{u}{2}$ garçons)

- nombre de natures différentes (décimaux non naturels,...)

e) Reprise de la classification

M : Est-ce que le problème de la toile et des torchons est un problème de partage ?
E : non, on ne parle pas de partage
E : Mais si, il faut partager la toile pour faire des torchons
M : Est-ce qu'on reconnaît la valeur d'une part ? et le nombre de parts ?
E : le nombre de torchons ne peut pas être décimal !
M : Dans les problèmes de partage, on peut chercher la valeur d'une part comme dans le prolbème d'Evelyne ou celui des 3 frères, ou chercher combien de parts, comme dans celui des torchons. Nous ferons deux catégories différentes. Dans les deux cas, il faut faire des divisions.
E : Oui, mais si on demande la longueur de tissu pour faire 12 torchons de 0,85 m ce n'est plus un problème de division, c'est un problème de multiplication

Nouveaux critères.

M : "Oui, c'est la même situation, la même histoire mais on a changé la question.

Trouvez d'autres énoncés, où, en changeant la question, on transforme la division en multiplication... et l'inverse est-il possible aussi ?"

12.2. REPRESENTATIONS FAMILIERES DE LA DIVISION

12.2.0. Introduction

Dans le concours de recherche, des types de problèmes sur la division, déjà étudiés au CM_1, réapparaissent. Il n'est pas inutile de les envisager à nouveau et d'en éclairer le sens en les confrontant aux nouvelles conditions apparues cette année notamment à des données rationnelles ou décimales.

En gros, le "type scolaire de problème" dépend :

a) des conditions matérielles (du milieu) évoquées par le texte - la situation de référence et ses caratéristiques - : domaine physique, grandeurs, taille des quantités, taille et nature mathématique des nombres...

b) des rapports à ces conditions que le texte établit ou évoque :

i/ rapports d'action ou de formulation où le déroulement temporel et les étapes du calcul se correspondent directement : le résultat du calcul anticipe le résultat de l'action

ii/ rapports réflexifs, de preuve ou d'institutionnalisation où l'action qui correspondrait au calcul n'est pas directement évoquée ; la situation est alors communiquée par des relations ou des contraintes intemporelles (énoncés déclaratifs) ou encore par l'évocation d'une action qui ne correspond pas aux calculs et qui n'est qu'un moyen de communiquer des relations. Dans les deux cas, l'élève doit considérer la situation dans son ensemble et a la charge d'imaginer un déroulement temporel de résolution original ou au mcins une action, une procédure non décrite qui le guide.

c) des représentations des élèves - qu'elles soient spontanées ou qu'elles résultent d'un apprentissage et de conventions délibérées - ces représentations sont elles-mêmes attachées à des conditions matérielles ou didactiques et aux techniques de calcul dont ils disposent. Cette classification varie donc sensiblement au cours de la scolarité et du développement des élèves.

.../...

Le lecteur trouvera dans les commentaires, une étude détaillée des variables des situations, des classifications de problèmes et des représentations utilisées par les élèves.

Cette étude est très complexe mais une première approche permettra au maître de discuter avec ses élèves et de commencer une classification "simple". Evidemment, cette classification "simple" s'avèrera bien vite assez difficile à mettre réellement en oeuvre car elle se révèlera trop floue ou même contradictoire pour bien des problèmes.

Dans un premier temps, les élèves et le maître pourront distinguer 5 cas de division :

1. pour partager (et chercher dividende ou diviseur)
2. pour trouver le terme inconnu d'un produit (multiplicande ou multiplicateur)
3. pour trouver l'image de 1 ou le nom d'une application linéaire
4. pour trouver le rapport de deux nombres
5. pour approcher une fraction avec un décimal.

Dans le paragraphe 12.3 nous reconnaîtrons les cas 3, 4 et 5 et nous introduirons deux nouveaux cas : la recherche du modèle d'un agrandissement et l'application linéaire réciproque. Dans les chapitres suivants nous rencontrerons un cas nouveau résultant de l'étude de la composition des applications linéaires.

Rappelons encore qu'il ne s'agit pas de classification stricte mais de différentes manières de présenter et comprendre les énoncés : un même énoncé peut être conçu de plusieurs façons. L'effort d'unification que nous devrons entreprendre ensuite serait contrarié par des classifications préalables trop rigides. Inversement, l'introduction directe d'une représentation unique de la division pourrait poser des porblèmes de signification insurmontables pour certains élèves.

De même, il serait maladroit de donner directement ces représentations comme un cours et naïf d'attendre trop longtemps qu'elles ressortent complètement naturellement du jeu de la classification.

.../...

12.2.1. Diviser c'est partager.

L'énoncé évoque un partage comme opération matérielle - une action de partage - qui implicitement ou explicitement sert de "guide" à l'opération à effectuer. Les quantités sur lesquelles l'élève opère "mentalement" pour soutenir chaque étape de son calcul sont contemporaines entre elles et disjointes (il n'y a pas besoin de considérer des quantités définies à des moments différents de l'évolution d'un même système, ni de considérer des quantités présentant des intersections non vides).

L'élève peut alors identifier un nombre de parts et la valeur d'une part, l'un connu, l'autre cherché. Cependant, le partage matériel évoqué s'appuiera selon les circonstances sur des scénarios différents.

1) <u>La répartition globale égalisée</u> : le nombre de parts est connu et assez petit, on cherche la valeur d'une part, la quantité à partager n'est pas trop grande et chaque part peut être manipulée en un coup.

i/ Le manipulateur envisagé (auquel l'élève peut s'identifier) :

* prépare les endroits - des récipients par exemple - en nombre égal au nombre de parts voulu

* répartit grossièrement la quantité à partager entre ces lieux pour obtenir des parts inégales mais voisines

* corrige les inégalités entre les parts en profitant éventuellement d'aménagements propices : récipients semblables où le niveau du produit est repéré, possibilité de peser les parts...

* vérifie l'égalité des parts et la conservation globale de la quantité.

Dans ce procédé le manipulateur ne s'occupe que des différences entre parts. Il réalise d'un coup une approche qu'il affine ensuite avec des manipulations de quantité de matière rapidement décroissantes.

ii/ Le calcul correspondant à cette procédure serait du genre suivant, par exemple, dans le cas du partage de 1855 grammes de farine en sept parts :

- la première part est de 200 grammes ainsi que la deuxième et la troisième, la quatrième est de 300 grammes ainsi que la cinquième

.../...

et la sixième, la septième comprend donc 355 grammes

- On reverse cinquante grammes de la quatrième dans la première, de la 5ème dans la 2ème, de la 6ème dans la troisième, et 10 grammes de la 7ème dans chacune des autres. 260 x 6 + 295

- On reverse cinq grammes de la 7ème dans chacune des autres 265 x 6 + (295 - 30).

iii/ Il est clair que le partage par ce procédé ne produit aucune méthode de calcul effectivement utilisée. D'ailleurs, le nombre de comparaisons deux à deux croissant comme le carré du diviseur, la procédure devient elle-même impraticable. Elle sert pourtant de définition de référence de la division pour les enfants très jeunes et de sorte que toutes les références ultérieures restent métaphoriques.

Exemples I :

. Pierre a 42 billes, André en a 28, Jacques en a 23. Ils décident de se répartir toutes ces billes de façon à ce que chacun en ait autant que chacun des deux autres. Comment vont-ils faire ?

(Note : ce problème posé au tout début de l'année avait conduit encore certains élèves à des manipulations locales : Pierre en donne 5 à Jacques, puis en donne 1 à chacun des deux - ou un même nombre - et recommence jusqu'à égalité)

. Pour montrer l'intérêt de la division, le maître avait posé alors le problème :

. Quatre amis partent en voyage et mettent leurs frais en commun. Le premier a payé 375 francs d'essence, le deuxième 480 francs d'hôtel, le troisième 345 francs pour les repas et le quatrième 320 francs pour les visites. Le voyage terminé, comment doivent-ils s'arranger pour avoir dépensé la même somme ?

2) La répartition répétée

i/ Les parts sont trop importantes pour les moyens matériels du partage envisagé ou bien la quantité à partager est déjà répartie en lots inégaux.

Chaque lot est réparti comme ci-dessus - les attributions sont égalisées entre elles - puis la répartition se répète. Le manipulateur doit

.../...

savoir que des "sommes" de répartitions globales égales produisent des répartitions égales.

ii/ Cette stratégie peut être observée dans les calcul des élèves sous la forme suivante par exemple :

Pour répartir 1855 grammes en 7 parts, les enfants commencent par attribuer 10 grammes à chaque part, puis effectuent 1855 - 70, et s'aperçoivent de la disproportion de leur premier lot, ils attribuent alors 100 grammes à chaque part, recommencent, puis en approchant de la fin du processus, reprennent de petites attributions.

iii/ Rationnalisée, elle peut conduire à la décomposition classique de la division

1855 est décomposé en 1800 + 50 + 5

18 centaines est réparti en 7 parts, le reste ajouté à 50 sera réparti ensuite, etc...

Mais la répartition de 1800 en 7 parts sera immédiatement contrôlée par le produit 1800 x 7.

iv/ Exemple :

. 7 pêcheurs possèdent en commun un bateau et partagent les frais et les revenus à égalité. La première campagne a rapporté 26 700 francs, quelle somme ont-ils reçue chacun ? La deuxième campagne a entraîné une perte de 12 600 francs. Quelle somme chacun a-t-il dû payer ? La troisième campagne a rapporté 38 400 francs, quelle somme chacun a-t-il reçue.

Quel revenu le bateau a-t-il permis de produire en tout ?

Quelle est la part de chacun ?

3) <u>L'attribution régulière</u>

i/ Comme ci-dessus, la quantité à partager est grande et chaque part ne peut être manipulée en un coup. Le manipulateur

- prépare les endroits pour recevoir les parts
- prélève une quantité donnée de matière <u>toujours la même</u> telle qu'il peut la manipuler aisément, et l'attribue à l'un des endroits
- recommence l'opération en servant <u>successivement chaque endroit</u> jusqu'à épuisement du tas à partager.

.../...

- contrôle l'égalité des parts par l'intermédiaire du nombre et de l'équi-répartition des attributions (un nombre exact de cycles de distribution).

Cette méthode repose :

- sur un contrôle local et non plus global des opérations - celui de la quantité attribuée à chaque coup, à l'aide d'un récipient par exemple - et celui de la succession des attributions
- et sur la confiance du manipulateur en ce qu'une distribution régulière produit une répartition égale.

ii/ Le calcul correspondant à cette manipulation est une soustraction répétée de la quantité attribuée à chaque part, de la quantité totale. Mieux la soustraction répétée de la quantité distribuée à chaque répartition. Encore mieux, la soustraction correspondant à plusieurs répartitions (de préférence une puissance de 10). La quantité attribuée à chaque étape peut être l'unité d'abord (ou une puissance de 10 de l'unité), les calculs se implifient alors (Exemple du paragraphe précédent, répartition de 1855 grammes en 7 parts).

1855 - 700 = 1155
1155 - 700 = 455
455 - 70 = 385
385 - 70 = 315 etc...

il faut en même temps additionner les quantités attribuées à une part : 100 + 100 + 10 + 10 +...

iii/ La soustraction répétée et poursuivie.

Au CM_2, le quotient est naturel mais s'il ne l'est pas, le modèle fonctionne encore si les quantités sont rationnelles. Les élèves, après avoir achevé la répartition des unités, poursuivent les soustractions en attribuant des dixièmes, puis des centièmes d'unités comme ils l'ont fait pour les unités (ils pourraient le faire avec les fractions).

4) L'attribution proportionnelle préparée.

Pour préparer un partage en un nombre quelconque non connu (mais entier) de parts, le manipulateur prépare des attributions égales assez petites. Au moment où on lui demande de partager en n parts, il prend une attribution, en saute n - 1, prend la n + 1ème et recommence. C'est l'ancien procédé romain de décimation des armées ennemies.

.../...

ii/ Il correspond à des conditions bien particulières jamais proposées en classe et il n'apparaît donc pas dans les conditions classiques. Il ne donne lieu à aucun procédé de calcul, mais à cause de cela, favorise la conception du rapport "1 sur n". Remarquons que prendre une part parmi 7 constitue un partage en une part d'un côté et (contre) 6 de l'autre la représentation du rapport"1 pour 7"se heurte à celle du partage "1 contre 6."

5) La distribution régulière

i/ Dans ce cas, le nombre de parts n'est pas connu et c'est la valeur d'une part qui est connue.

ii/ Le procédé c'est la soustraction répétée de la valeur d'une part. C'est la situation la plus simple pour introduire la division au CM$_1$. Les élèves peuvent découvrir eux-mêmes le procédé et le perfectionner rapidement en effectuant des soustractions groupées par 10, par 100, par 1000....

iii/ Evidemment les élèves s'attendent à un quotient entier et il ne saurait être question de poursuivre cette division lorsque le reste est inférieur à une part. Remarquons que la distribution produit un partage mais n'est pas elle-même un partage au sens strict.

iv/ Exemple de situation proposée pour l'apprentissage :
Une frise de 1881,6 cm de longueur comprend un nombre exact de motifs identiques. Chaque motif mesure 14,7 cm de longueur, combien de motifs comprend-elle ?

1881,6 - 14,7 1866,9 - 14,7	* La division consiste alors à répéter les soustractions de 14,7 autant qu'il est nécessaire et à compter le nombre de fois que la valeur d'une part a été soustraite. Cete opération facile à concevoir dès le CP ou le CE$_1$ devient impraticable dès que le nombre de parts devient supérieur à 4 ou 5.

* Cette première méthode est bien améliorée dès que l'élève a l'idée de retrancher plusieurs parts à la fois :

.../...

Exemple : 5 motifs mesurent 73,7

* Elle peut être systématisée : l'élève enlève les parts par mille, puis par centaines, puis par dizaines... autant qu'il peut

Exemple : 10 motifs mesurent 147 cm, 100 mesurent 1470, mille 14700

1881,6	
-1470	100 motifs
411,6	
- 147	10 motifs
264,6	
- 147	10 motifs
117,6	
- 73,5	5 motifs
44,1	
- 44,1	3 motifs
0	

Il y a 100 + 10 + 10 + 5 + 3 = 128 motifs.

* L'optimisation de cette méthode et une disposition "à l'anglaise" améliorée permet :
- de conserver le sens (soustractions répétées)
- de contrôler l'ordre de grandeur du quotient dès la première soustraction et de celui des nombres soustraits
- de permettre d'éventuels tâtonnements et des calculs intermédiaires

* Disposition :

diviseur	quotient	valeurs décimales
calculs	Dividende	du quotient,
auxiliaires	Soustractions	du dividende et
	successives	des restes successifs
	reste	les virgules sont toutes sur ce trait

Etape 1 : 14,7 | 1881|,6

Etape 2 : 14,70 | 1
100x14,7=1470 | 1881|,6
- 1470
411,6

signifie | 100
1881|,6
- 1470

Etape 3 :

14,7 | 12

1881,6
100x14,7 = 1470 - 1470
10 x14,7 = 147
30 x14,7 = 441 411,6
20 x14,7 = 294 - 294

14,7 | 20
100
1881,6
- 1470
411,6
- 294

Etape 4 :

14,7 | 8
20
100 x 14,7 = 1470 100
10 x 14,7 = 147 1881,6
30 x 14,7 = 441 - 1470
411,6
20 x 14,7 = 294 - 294
5 x 14,7 = 73,5 117,6
44,1 - 117,6
8 x 14,7 = 117,6

0

Etape 5 :

128 quotient
8
20 quotients
100 partiels

* A la fin du CM_1 les élèves font directement la division optimale dans les naturels. Au CM_2, les élèves peuvent écrire directement

14,7 | 128
1881,6
- 1470
14,7 x 8 = 1176 411,6
- 294
117,6
117,6
0

.../...

6) Le modèle unificateur

La définition de "la" division comme l'opération qui permet d'anticiper le résultat d'un partage en prenant comme données les quantités connues au début du partage conduit à distinguer 2 "opérations"

- la première, la recherche de la valeur d'une part, est utilisable avec un dividende et un quotient rationnels quelconques (représentant toutefois des mesures) et un diviseur obligatoirement naturel
- la deuxième, la recherche du nombre de parts est utilisable avec dividende et diviseurs rationnels mais quotient naturel.

Bien qu'elles représentent des opérations matérielles et mentales différentes, toutes les conditions qui conduisent à des calculs identiques - disposés de la même manière - doivent être confondues. C'est pourquoi il est nécessaire de reconnaître et de nommer les éléments de l'opération en fonction de leur position formelle (dividende, diviseur, quotient) et non plus de leur signification "concrète". La reconnaissance des conditions d'une division repose sur l'identification d'un partage et du triplet "quantité partagée, nombre de parts, valeur d'une part". Nous avons vu que ce modèle était déjà très métaphorique par rapport à la plupart des opérations concrètes qu'il représente. C'est pourtant celui qui est le plus souvent enseigné directement, généralement pour chercher le nombre de parts (qui conduit au calcul de la façon la plus simple).

Mais il faut ensuite apprendre à s'y ramener dans les autres cas, ce qui suppose la compréhension de l'échange des rôles entre le diviseur et le quotient. Le dépassement de la dissymétrie fondamentale devra donc inévitablement être organisé.

Les limitations de ce modèle sont évidentes. Le nombre de parts doit être entier différent de 1.

La valeur d'une part peut être rationnelle et inférieure à l'unité mais si la méthode ne change pas le résultat, elle appelle des remarques de la part des enfants.

7) Divisiser pour trouver le reste

Ce modèle laisse de côté conception de la division comme moyen de retrouver le reste. Nous avons étudié cette situation (connue

.../...

sous le nom de "course " 20") et montré qu'elle pouvait conduire les élèves du CM_1 ou du CM_2 à réinventer tout l'algorithme de la division avant de faire le rapprochement avec la division-partage, qu'ils connaissaient. (Voir dans la 2ème partie le texte accompagnant le film réalisé à cette occasion).

12.2.2. Diviser c'est trouver le terme inconnu d'un produit.

* L'énoncé évoque :

. Soit une opération matérielle qui n'est pas un partage mais une multiplication. Cette multiplication n'est pas là pour guider un calcul mais pour présenter les relations qui existent entre les éléments de problème.

. Soit directement un ensemble produit d'ensembles ou une mesure produit.

* Dans les deux cas, il s'agit de trouver l'un des deux termes du produit connaissant l'autre et le résultat. L'élève ne doit pas calquer son opération mathématique sur une opération matérielle évoquée dans l'énoncé. Il ne doit pas "entrer" dans l'activité mais en "sortir" et la regarder de l'extérieur comme achevée, et comme un objet d'étude. Il doit donc :

. Soit conserver l'opération directe mais la faire intervenir sur des valeurs supposées du terme inconnu et recommencer cette tentative jusqu'à ce que le calcul donne le résultat connu.

. Soit imaginer une (autre) activité qui servira de modèle au calcul qui donnera la valeur cherchée, la multiplication pouvant alors servir de vérification. La division, opération matérielle nouvelle ainsi inventée pour résoudre le problème posé devient alors une opération mentale:

* Les méthodes de solution toutefois peuvent changer selon le type de multiplication évoquée - somme de termes égaux ou produit direct - et selon le type de produit.

1) Le partage retrouvé

La multiplication évoquée dans l'énoncé :
- suggère des additions répétées de termes égaux,

.../...

Exemple : Combien de chemises à 85 francs chacune a-t-on achetées si la facture s'est élevée à 1020 francs ?

- ou s'appuie sur la même représentation,

Exemple : Une douzaine de chemises identiques ont coûté 1020 francs.
Quel est le prix d'une chemise ?

Dans le premier cas, l'élève peut penser à des soustractions successives, dans le second, à la distribution régulière de la somme totale sur un nombre de parts (égal au nombre de chemises).

Pour fabriquer la quantité demandée, l'élève imagine donc un partage (de 1020 francs en tas de 85, ou de 1020 francs en 12 tas).

Toutes les méthodes du paragraphe précédent peuvent alors être utilisées.

De ce point de vue, la deuxième catégorie de problèmes pourrait englober la première.

2) <u>Tâtonnements et encadrements avec des multiplications</u>

i/ Une rupture de contrat.

Si le produit ou la multiplication sont présentés ou appréhendés par l'élève de façon synthétique (comme une opération binaire non analysable), l'idée d'essayer des valeurs au hasard puis de les corriger peut être utilisée. Mais il faut la suggérer aux élèves la première fois (au CM_1) car ils ne peuvent pas espérer trouver le résultat complètement par hasard, d'autre part, ils ne voient pas a priori comment ils pourront améliorer une proposition fausse, enfin, ils pensent que le tatonnement n'est pas une méthode mais une sorte de tricherie : d'habitude il faut savoir et deviner ou tâtonner n'est pas une méthode acceptée par le maître.

Après avoir été encouragés, les élèves se mettent à utiliser des méthodes plus ou moins raffinées et rapides. Il est intéressant de les rappeler ici rapidement pour que le maître puisse les accepter et s'en servir pour retrouver le sens de la méthode de division la plus répandue.

ii/ Essais et encadrements.

La "division" n'est en fait qu'une simple suite de multiplications effectuées "complètement" et dont les résutlats encadrent de mieux en mieux le produit connu. La stratégie de la recherche est à la charge de l'élève.

Exemple : Conservons un cas qui garde un sens , l'un des termes est un naturel.

.../...

$128 \times \boxed{} = 1881,6$

. le "résultat" est compris entre dix et vingt, essayons 15.

$128 \times 15 = 1920$,

. trop grand, mais pas de beaucoup !

$128 \times 14 = 1792$

. le résultat est entre quatorze et quinze, essayons 14,5

$128 \times 14,5 = 1856$ etc.

iii/ L'utilisation des restes.

Dans le calcul précédent, le raisonnement prélude à l'utilisation du reste. "81 est à peu près au milieu de l'intervalle [56;120], alors essayons vers le milieu de [14,5;15]" "14,7 !". Alors $128 \times 14,7 = 1881,6$.

Le calcul du reste permet de rendre la recherche systématique et d'économiser des claculs et des efforts d'estimation. L'usage veut alors que l'approche se fasse par des nombres inférieurs au produit.

Exemple : 1881,6 : 128

Le résultat $128 \times 15 = 1920$ montre que 15 est trop grand mais ne fait pas progresser le calcul. Essayons 12. $128 \times 12 = 1536$

il reste $1881,6 - 1536 = 345,6$

qui contient deux fois 128. $128 \times 2 = 256$

$345,6 - 256 = 89,6$

le résultat sera $12 + 2 = 14$.

Pour obtenir 89,6 essayons de multiplier 128 par 0,5. $128 \times 0,5 = 64$. Il reste $89,6 - 64 = 25,6$

or $128 \times 0,2 = 25,6$, donc il faut multiplier 128 par $12+2+0,5+0,2=14,7$ pour obtenir 1881,6.

La "division" devient une suite plus complexe de multiplications et de soustractions, les produits successifs disparaissent un peu mais les tâtonnements restent à la charge de l'élève de telle sorte que s'il perd le sens de ce qu'il fait, il ne peut pas poursuivre mécaniquement sa division.

iv/ Recherche systématique.

Les tâtonnements peuvent être rendus systématiques de façon à produire successivement tous les chiffres du nombre cherché en commençant par celui de rang le plus élevé et optimisés en rejetant comme calcul mental intermédiaire (ou comme erreur si elle est évitée), les tentatives qui ne sont pas optimales.

Exemple : 128 est contenu 10 fois dans 1881,6 mais pas 20 :

$128 \times 10 = 1280$

$1881,6 - 1280 = 601,6$

le chiffre des dizaines est 1.

128 est contenu ... calcul de tête 5 fois.

128 x 5 = 640, erreur, 4 fois

128 x 4 = 512

601,6 - 512 = 89,6

le chiffre des unités est 4.

128 est contenu ... 7 fois dans 896.

128 x 0,7 = 89,6..

le chiffre des dixièmes est 7.

La technique finale engendrée par cette méthode donne à la division le sens d'une rationnalisation optimale du tâtonnement.

Dans le 2ème problème, des chemises la recherche successive du nombre de dizaines de francs qu'il faut donner, puis du reste, puis du nombre de francs... donne le résultat par une méthode apparemment systématique.

v/ La présentation des calculs.

L'institutionnalisation de la méthode conduit à convenir d'une disposition conventionnelle des données et des résultats intermédiaires.

La méthode actuellement enseignée en France fait disparaître le résultat des produits essayés; les multiplications et les soustractions sont "contractées" en une même opération mentale portant séquentiellement sur des chiffres isolés dont on ignore l'ordre, la place dans un nombre et la signification de ce nombre.

En même temps, une disposition irréfléchie (et qu'on ne retrouve guère dans les pays étrangers), empeche de contrôler a priori le nombre de chiffres du résultat et gêne la poursuite des opérations, les chiffres venant s'écraser contre la barre verticale. Enfin, tout tâtonnement oblige à rayer et à refaire les calculs dans des conditions qui, loin de lui donner son statut, en font une erreur.

Ainsi tout est propice à la perte du contrôle des calculs par leur sens au cours de l'exécution de l'opération. Les malheureux élèves et leurs maîtres n'ont plus que le recours de se tétaniser sur l'exécution séquentielle rigoureuse d'un algorithme inintelligible. Réciproquement, la compréhension de l'opération ne permet plus de vérifier la pertinence de son emploi.

.../...

Comme effets positifs de cette rupture avec le sens, le caractère de l'opération originale de la division est puissamment réaffirmé et l'accent est mis sur l'instrument formel comme moyen unificateur.
La disposition que nous avons présentée en 12.2.1.4, ne présente pas ces inconvénients. Elle se prête aussi bien à l'interprétation en termes d'essais de multiplications qu'à celle des partages. L'accent est mis sur la partie que nous avions appelée "calculs auxiliaires" et qui pourrait maintenant s'appeler "produits essayés".

3) Une composante d'une mesure produit.

Si l'élève possède une représentation qui donne des sens aux produits de décimaux (comme c'est le cas pour ceux qui ont suivi ce cours), la recherche du terme inconnu d'une multiplication à un sens, même si tous les nombres sont décimaux. Cependant les conceptions associées à ces opérations sont différentes selon les cas car l'exactitude des calculs repose en fait sur un choix arbitraire des unités et les grandeurs composantes sont plus ou moins commodes à manier mentalement.

Dans les situations qui présentent une mesure produit de deux grandeurs, celles-ci peuvent être semblables et jouer un rôle symétrique comme dans la surface du rectangle, ou dissemblables comme dans le volume du prisme droit (surface de base x hauteur) et parmi celles-ci il faut distinguer celles où l'une des grandeurs n'est pas directement définie préalablement mais "dérivée" de la seconde comme dans le cas d'une vitesse ou du prix d'un gigot.

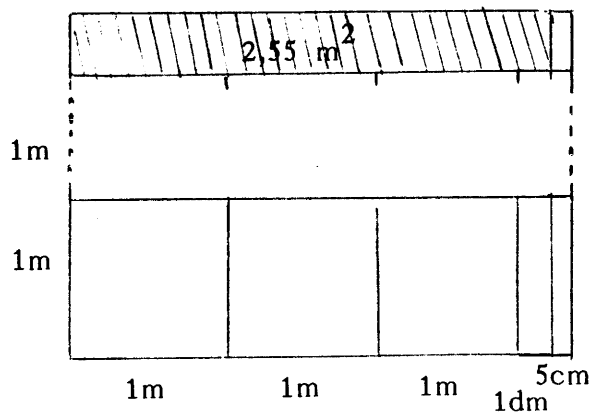
i/ Le côté d'un rectangle.

Exemple 1 : Au CE_2 où la multiplication a été élaborée comme moyen de compter le nombre de carreaux d'un rectangle comportant n carreaux dans sa longueur et p dans sa largeur, puis au CM_1 où le même modèle est disponible, la recherche de l'un des deux nombres connaissant le nombre total de carreaux renvoie à des soustractions répétées. Mais ce modèle échoue avec des nombres décimaux.

Exemple 2 : Une pièce rectangulaire de 12 m^2 doit avoir 3,15 m de large. Quelle est sa longueur ?

.../...

* La solution directe consisterait à paver mentalement la pièce avec des carreaux de 1 m x 1 m ou 1 dm^2, 1 cm^2... selon le schéma ci-contre, qui est exactement celui auquel aboutit une étape de l'apprentissage de la multiplication "per gelosia"(*)



Par soustractions successives, jusqu'à ce qu'il reste moins de 3,15 m^2 - ici 2,55. Puis conception du pavage d'un rectangle de 3,15m de long et de 2,55 m^2 de surface avec des carrés de 1 dm de côté...on retire un certain nombre de fois 3,15 dm^2 etc...

* Une solution plus élaborée consiste à se placer dans la grandeur produit choisie comme cadre de référence (ici la surface) à plonger l'une des grandeurs dans la grandeur produit -ici à considérer une surface ayant comme largeur l'unité de longueur puis à assimiler l'autre à un scalaire opérant dans la grandeur produit, ici l'élève cherche par combien il faut multiplier 3,15 pour obtenir 12,
ce nombre sera la longueur en mètres.

Ce procédé nous renvoie au deuxième cas :

ii/ la division, calcul dérivé.

Un automobiliste a payé 213,57 francs pour obtenir 47,25 litres de carburant, quel est le prix du litre ?

Le prix du litre, comme le nombre de kilomètres parcourus en une heure par exemple, est une grandeur dérivée définie à partir d'une relation entre deux autres grandeurs (le prix et la quantité ou bien

.../...

(*) cf. "Peut-on améliorer le calcul des produits de nombres naturels ?" Actes du Congrès International des Sciences de l'Education PARIS 1973 la distance parcourue et le temps). A l'école primaire il faut supposer que cette relation est bien particulière (fonction linéaire) pour que cette grandeur dérivée reste constante. La faire varier revient à changer cette relation. L'élève peut comprendre ce problème :

47,25 x = 213,57

- soit en envisageant une application linéaire de coefficient à déterminer faisant correspondre des francs : 213,57 à des litres : 47,25, c'est-à-dire au cas étudié dans le paragraphe 12.3
- soit en envisageant 47,25 comme un scalaire dans l'ensemble des prix : l'automobiliste paie 47,25 fois le prix d'un litre.

Cette transformation du nombre de litres en scalaire apparaît dans l'autre problème :
Un automobiliste a dépensé 213,57 francs d'un carburant qui coûte 4,52 francs le litre. Combien de litres a-t-il consommés ?
C'est le nombre de fois que 4,52 francs est contenu dans 213,57 francs.

Le sens attaché à la multiplication ne subit aucune transformation dans la division par la méthode des tâtonnements qui peut donc se dérouler comme au 12.2.2.2. ci-dessus.

iii/ Prolongement de la division-partage.
Mais en fait, les élèves raisonnent sur les parties entières comme dans N pour trouver la partie entière du quotient (ils diraient ici:"combien de fois 47 dans 213," ou "47 fois le prix d'un litre fera 213 francs)." Puis ils prolongent alors le calcul aux parties décimales grâce à la topologie implicite véhiculée par la notion de mesure et ils poursuivent "la même" division. (ici le prix au litre est une sorte de mesure).
La preuve en est que si le quotient et le dividende ont une partie entière inférieure à deux, les élèves n'identifient plus le dividende et le diviseur aussi facilement.

Parfois, le désir d'obtenir à bon marché des réponses correctes entraîne les élèves (et leurs maîtres) des classes de CE et CM 1 à considérer que si l'on divise quelque chose c'est le grand nombre par le petit !!
Evidemment cette habitude fait naître des difficultés lors des tentatives de prolongement. Ces difficultés doivent être étudiées avec les élèves.

iv/ Obstacles au prolongement : les cas "dégénérés".
Les conditions qui influent sur la difficulté des prolongements de la division-partage ou du tâtonnement sont les suivantes :

.../...

. Valeur du diviseur par rapport à 1 et à 2

. Valeur du quotient par rapport à 1 et à 2

. Caractère dimensionnel du quotient : le diviseur est une même grandeur ou gandeur différente du dividende.

Le tableau ci-dessous représente les 18 cas possibles et se lit de la manière suivante :

Exemple : Si le diviseur est supérieur à 2 et le quotient supérieur à 2 : le cas est représenté par la case en bas à droite : où figure l'opération 380 : 14,2.

Le cas où dividende et diviseurs sont conçus comme une même grandeur, serait celui du problème :

Enoncé 1 : "Quel nombre de litres à 14,2 francs le litre ont été payés 380 francs ?" il est présenté dans le triangle inférieur de cette case. Nous avons vu que la solution est facilement conçue par sosutraction répétée. De même, le cas représenté dans le triangle supérieur est :

Enoncé 2 : "Quel est le prix au litre d'un liquide dont 14,2 litres coûtent 380 francs ?" lui aussi aisément résolu par tâtonnements "que multiplier par 14 pour obtenir 380 ?"

* Il n'y a pas de grandes difficultés si le quotient reste supérieur à 2.

* Si le quotient est compris entre 1 et 2, dans les cas où le diviseur est de "même nature" que le dividende (380 : 200 ou bien 1,80 : 1,25 ou bien 1,70) l'élève peut effectuer la soustraction initiale mais ne peut pas la répéter pour avoir l'image d'un certain nombre de fois. Il doit donc pouvoir interpréter une simple soustraction comme une division de quotient 1 - ce qui n'est pas toujours évident.

. dans le cas où le diviseur est supérieur à 1 (1,80 : 1,25 et 380 : 200) et où il est de nature différente du dividende, la première multiplication à envisager se réduit à une multiplication par 1. Comme cette multiplication triviale dans N n'est jamais considérée le modèle de l'élève ne sort pas renforcé par cette image. Il lui faut insister..."Il faudra multiplier par 1 et quelque chose".

. lorsque le diviseur devient inférieur à 1 (Exemple : 1,70 : 0,90), ce maigre appui s'effondre à son tour, le tâtonnement engagerait l'élève à multiplier par 0, ce qui est encore plus dissuasif.

.../...

nature différente
avec le dividende

Enoncé 2

Diviseur

même nature
que dividende

Enoncé 1

	0 < diviseur < 1	1 < diviseur < 2	2 < diviseur
0 < quotient < 1	0,30:0,80 0,80:0,30 0,80 L 0,30 1 tâtonnements 0 x 0 ou 0 divisé par 0, sinon comme ci-contre comme ci-contre ou ci-dessous 0,80 F/1 0,30 F/1	0,80:1,25 1,25 1 Tâtonnements multiplicande plus grand que le produit pas de modèle dans N pas de première soustraction possible 1,25 F/1	380:450 450 1 Tâtonnements multiplicande plus grand que le produit pas de modèle dans N pas de première soustraction possible 450 F/1
1 < quotient < 2	1,70:0,90 0,90 1 Tâtonnements Il faut multiplier 0 par 1 Difficultés plus grandes La soustraction est possible mais pas répétable Difficulté 0,90 F/1	1,80:1,25 1,25 1 Tâtonnements Il faut multiplier par 1 Difficulté La soustraction est possible mais pas répétable Difficulté 1,25 F/1	380:200 200 1 Tâtonnements Il faut multiplier par 1 Difficulté La soustraction est possible mais pas répétable Difficulté 200 F/1
2 < quotient	380:0,75 0,75 1 Tâtonnements : pas de difficulté mais quotient plus grand que le dividende ou division par 0 : Difficulté Soustraction répétée pas de difficulté Division réduite : diviser par 0 : Difficulté 0,75 F/1	380:1,80 1,80 1 Tâtonnements ou fonction linéaire - pas de difficulté Division par 1 : Difficulté Soustraction répétée Division réduite : diviser par 1 : petite difficulté 1,80 F/1	380:14,2 14,2 1 Tâtonnements ou fonction linéaire Pas de difficulté Soustraction répétée : pas de difficulté Division réduite à N : 380 : 14 - Pas de difficulté 14,2 F/1

* Si le quotient est compris entre 0 et 1 (le dividende est aussi inférieur à 1) le modèle de la soustraction répétée s'effondre puisque même la première soustraction ne peut s'opérer. Celui des tâtonnements dans la multiplication se heurte, lorsque le diviseur est supérieur à 1, à l'idée qu'"il n'y a pas de multiplication qui rapetisse"

	(diviseur)		(quotient)		(dividende)
	1,25	x		=	0,80 ?
ou bien	450	x		=	3,80 ?

Et si on imagine tout de même qu'il faut le faire, la multiplication par zéro porte des problèmes. Si quotient et diviseur sont inférieurs à 1
0,30 : 0,80 se ramène au cas précédent et
0,80 : 0,30 à celui où $1 < q < 2$ et $0 < d < 1$, mais la division de 0 par 0 n'est pas engageante.

C'est le cas favorable (repoussoir) qui peut engager les maîtres et les élèves à se ramener à des cas plus sympathiques par un changement d'unités ou une homothétie

0,80 : 0,30 devient alors 80 : 30...

Dans tous les cas ci-dessus, une connaissance trop bien ancrée de la division-partage et de la division dans N fera obstacle - s'opposera fortement - à l'extension de la division aux rationnels. A moins de reconnaître cet obstacle épistémologique et de le traiter comme tel de façon appropriée sur le plan didactique les erreurs se poursuivent et persisteront malgré les apprentissages ultérieurs.

4) <u>Conclusion.</u>

La division définie comme moyen de trouver le terme inconnu d'un produit diffère essentiellement de la précédente en ce qu'elle est introduite à partir d'un problème de l'élève et non à partir d'une activité-guide : cette définition est donc réflexive et heuristique. Elle est plus générale que la précédente et couvre tous les cas d'inversion d'une multiplication. Si elle s'appuie sur la division-partage, cette dernière fait obstacle dans certains cas. Si l'on l'utilise directement, il faudra ensuite en dériver explicitement les problèmes de partage, c'est-à-dire reconnaître une multiplication là où l'énoncé évoque ou décrit un partage.

.../...

M O D U L E 1 3 :

DIVISIONS NOUVELLES
DANS LES RATIONNELS

13.1. REPRESENTATIONS NOUVELLES DE LA DIVISION

13.1.0.

Les représentations familières évoquées dans le paragraphe précédent montrent la division comme une "activité" - qu'elle soit le guide des calculs ou le moyen de trouver le terme inconnu d'un produit. Les représentations nouvelles (celles qui sont introduites depuis le début de l'ouvrage) la mettent en scène comme un objet identifiable dans son ensemble comme une fraction, puis comme un "rapport". Cet objet fonctionne comme un outil d'analyses et de calcul dans l'étude des applications linéaires : recherche de l'image de 1, de l'agrandissement ou du rapport lui-même. En conjugant l'étude des applications linéaires réciproques et l'idée que la division permet de trouver le terme inconnu d'un produit apparaît l'idée de la division en tant qu'application linéaire, qui est alors étudiée dans le détail (activité 4).

13.1.1. La commensuration ou le fractionnement de l'unité : la fraction (séance additionnelle 3)

1) Ecriture formelle

L'énoncé présente une situaiton où intervient un partage (ou une multiplication) que les conditions réelles ne permettent pas ou n'exigent pas d'effectuer matériellement. Le résultat du partage - ou le terme inconnu de la multiplication est envisagé directement et doit être désigné indépendamment du mode d'effectuation ; il suffit alors de noter le dividende, le diviseur et la relation :

Exemple : Huit feuilles mesurent 3 millimètres, l'épaisseur d'une feuille est 3/8 de millimètre

$$3 : 8 = \frac{3}{8}.$$

La division est si directe qu'elle disparaît en tant qu'opération au sens banal de suite d'actions et que le ":" dans l'égalité ci-dessus n'a guère de sens.

.../...

2) Fraction de sens classique

Pour édulcorer cette position formaliste difficile à accepter naturellement, il est de tradition de présenter une construction qui donne un sens à cette écriture formelle, et que se base sur le fractionnement de l'unité.

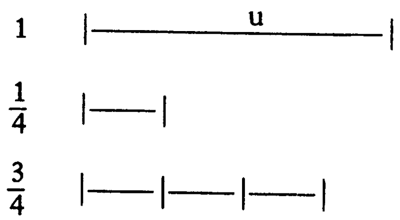


fig. 1

L'unité est fractionnée en partie égales, supposées obtenues par un partage matériel direct. Ces parts sont considérées comme des unités nouvelles dont le nom est fourni par le quantième de l'unité - qui s'appelle alors dénominateur. Un nombre de ces parts est déterminé par le numérateur, qui ne peut être qu'entier naturel. Même si une division matérielle par un nombre non entier n'est pas tout à fait inconcevable, elle ne pourra pas donner de nom à la nouvelle unité : le dénominateur est par nature entier lui aussi.

3) Commensuration

Le schéma de la commensuration est moins connu, mais nous l'avons néanmoins choisi pour introduire les fractions-mesures. Et les élèves l'utilisent ou le rappellent.

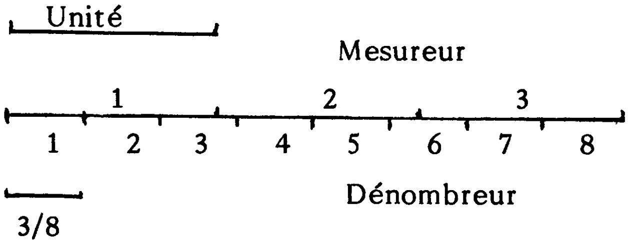


fig. 2

La division de 3 par 8 est considérée dans son ensemble, avec son résultat : le report de 3 fois l'unité coïncide avec 8 fois le report du résultat 3/8 (fig.2)

Dans ce cas, il faudrait appeler 8 le "dénombreur" et "3" le mesureur :

$$\text{fraction :} \qquad \frac{\text{mesureur}}{\text{dénombreur}}.$$

Cette représentation accepterait parfaitement des nombres décimaux ou rationnels comme "mesureur" (c'est-à-dire au numérateur) contrairement au numérateur de la fraction ordinaire.

Huit feuilles mesurent 3,5 mm (figure 3)

1 feuille mesure $\frac{3,5}{8}$ mm

5 feuilles mesurent 3/4 mm (figure 4)

.../...

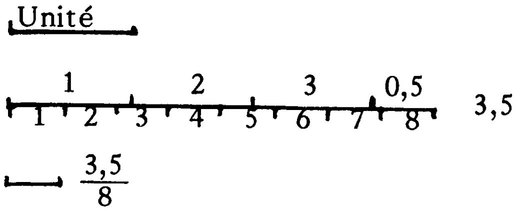


figure 3

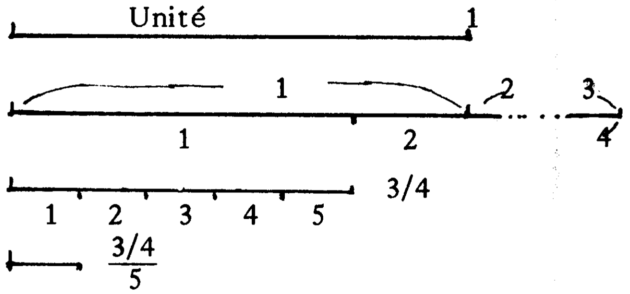


figure 4

Cette conception prolonge la notion de rapport "multiple" et "sous-multiple" (figure 5).

figure 5

Pour la division d'une fraction par une fraction, le schéma fonctionne encore, bien que difficilement.
Exemple : 3/4 / 2/5 le mesureur $\frac{3}{4}$ est mis en coïncidence avec le dénombreur $\frac{2}{5}$ (figure 5).

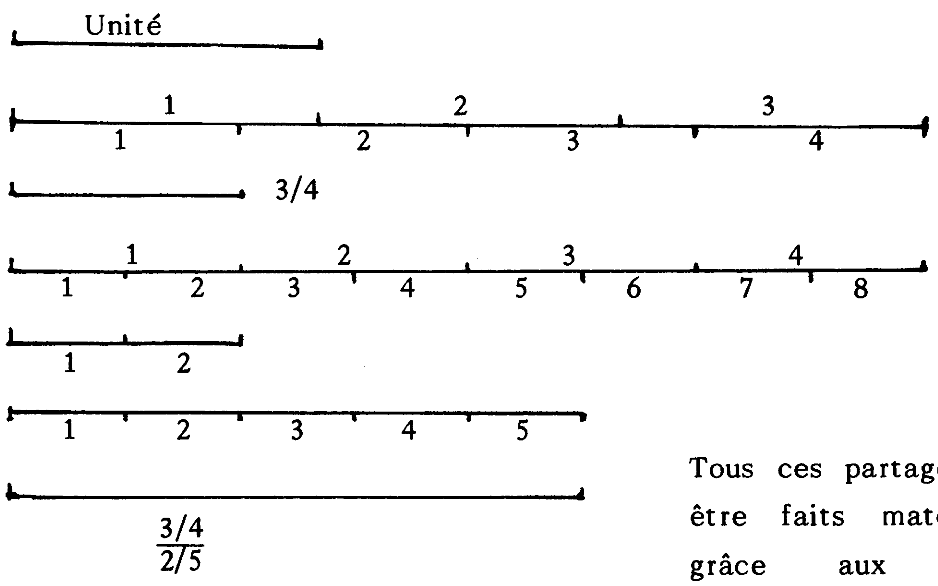


Figure 6

Tous ces partages peuvent être faits matériellement grâce aux parallèles équidistantes comme dans le module 1.

Identifier division et fraction consistera plutôt à admettre que l'on puisse "traiter" de la même manière un programme d'action ou de calcul et son résultat, nombre ou grandeur, dès lors que la correspondance entre les uns et les autres est biunivoque. Cette identification est rendue possible par des situations favorables (communications comme dans le chapitre 1 ou conventions spécifiques) mais surtout par une activité de recherche d'équivalence comme dans le module 7.

4) <u>Diviser, c'est trouver l'expression décimale ou l'estimation décimale d'un rationnel</u>

Exemple : Un rouleau de fil de fer de 25 mètres pèse 3 kilos. Quel est le poids de 1 mètre de fil de fer ?

Réponse directe $\frac{3}{25}$ kg

Calculer $\frac{3}{25}$ c'est trouver un décimal équivalent.

$$\begin{array}{r|l} & 0{,}12 \\ \hline 3, & 0 \\ -\,2, & 5 \\ \hline 0, & 50 \\ -\,0, & 5 \\ \hline 0, & 00 \end{array}$$

Réponse décimale 0,12 kg

Si le rationnel n'est pas décimal, l'approche ne s'arrête pas mais l'écriture décimale est alors périodique.

<u>Remarque</u> : Les élèves savent exprimer une écriture décimale limitée par une fraction : 7,23416 = 723416/100000. Il est encore possible d'exprimer par une fraction une écriture décimale infinie si elle est périodique. Exemple : a = 14,232323... que l'on peut écrire $14{,}\underline{23}$. La période a deux chiffres "2" et "3". En multipliant a par 10^2, on obtient un nombre de même période : $1423{,}\underline{23}$ (c'est-à-dire 1423,232323...). En retranchant $14{,}\underline{23}$ de ce nombre, les deux périodes vont s'annuler : la différence sera donc forcément un nombre entier : 1409.

$$\begin{array}{r} 1423{,}2323... \\ \underline{14{,}2323...} \\ 1409{,}000 \end{array}$$

Elle correspond à : 100 x a - 1 x a. C'est-à-dire 99 fois a donc a = 1409/99.

L'introduction directe de la fraction telle que nous l'avons proposée au chapitre 1 permet de proposer aux élèves aussi fréquemment

.../...

qu'il est possible la reconnaissance directe de la fraction formelle sans pour autant empêcher la recherche du sens à l'aide de différents points de vue.

13.1.2. La division dans l'application linéaire.

Il s'agit :

- soit de problèmes qui évoquent directement une correspondance biunivoque, matérielle (par exemple un barême, un choix, etc...) entre plusieurs nombres figurent avec leur correspondant et cette correspondance linéaire. Cette correspondance peut n'être ni nommée, ni reconnue comme un concept mathématique, et en particulier pas comme un nombre
- soit de problèmes qui n'évoquent cette correspondance qu'à travers un seul couple de nombres le modèle et son image, la valeur initiale et la transformée ; mais l'application est alors identifiable grâce à un dispositif permanent (mécanisme d'agrandissement ou de transformation...) ou à un vocabulaire spécifique (taux, échelle, vitesse, fraction opérateur...) qui permet la construction des autres couples. Assez souvent elle apparaît alors comme un nombre.

Nous en avons étudié les cas les plus typiques. Mais les élèves peuvent projeter le schéma de l'application linéaire sur n'importe quelle situation où apparaissent des produits ou des rapports. Lorsqu'ils envisagent une relation, c'est le plus souvent de façon intuitive et verbale; identifier les ensembles de départ et d'arrivée et placer plusieurs couples de nombres en correspondance leur permet d'objectiver cette relation. Il leur devient alors possible d'examiner diverses valeurs (et même l'ensemble des valeurs possibles) pour les deux composantes, et de vérifier les conditions de linéarité.

Par exemple, dans le problème du paragraphe précédent, la correspondance 3 kg ————> 25 m peut être envisagée. Cette correspondance est-elle linéaire ? : Est-ce que 6 kg————> 50 m est raisonnable ? oui, alors qu'est-ce qu'il faut chercher ? le poids de 1 m?

? ————> 1 m.

Les élèves prennent le risque dans certains cas de ne pas choisir de bonne correspondance : par exemple, il peut arriver que ce soit ce qui est formulé (ou envisagé) comme correspondance qui soit variable, alors que la valeur est fixe. Alors il faut représenter une autre application linéaire car le schéma par flèches est mieux adapté à un objet et une image variables, l'application restant constante.

.../...

Exemple : un constructeur produit des bobines de 50 mètres de fil métallique, le calibrage de la filière est gradué en kilogrames par m (il aurait pu être gradué en mm pour le diamère ou en mm^2 pour la section). Quelles valeurs de calibrage choisir pour la filière afin que ces bobines pèsent 2 kg, 3 kg, etc...

Le schéma utile est alors $? \xrightarrow{\times 50} 2$ kg

$\xrightarrow{\hspace{2cm}} 3$ kg

Le schéma poids ————> longueur

2 kg ————> 50

3 kg ————> 50 ne correspond plus à une application linéaire.

Dans les situations conçues à l'aide d'une correspondance biunivoque, la division peut appraître :

- comme exprimant l'application linéaire, ce cas est nouveau et sera étudié au paragraphe suivant
- comme moyen de retrouver les éléments marquants d'une application linéaire exprimée de façon multiplicative (comme nous l'avons fait jusque là).

Dans ce dernier cas, il conviendra de distinguer différents cas :

- selon que l'élève n'envisage pas la correspondance en tant que valeur numérique : il se réfère alors à deux valeurs correspondantes. Dans ce cas la division permet de calculer :

* le correspondant de 1 (paragraphe 1 ci-après)

* ou le rapport de deux valeurs d'un même ensemble - rapport scalaire - conservé entre les images (paragraphe 2)

- ou selon que l'élève envisage la correspondance comme une application repérée par un nombre. La division lui permet de calculer ce nombre (paragraphe 3) ou alors, si l'application est connue, de calculer l'objet dont l'image est connue (paragraphe 4).

Tout domaine, toute situation qui permet de poser un problème d'une de ces sortes permet d'en poser un dans chacune des trois autres.

La situation de référence est ici l'agrandissement (puzzle, optimist, représentations à l'échelle...). Les élèves cherchent maintenant des problèmes semblables dans d'autres domaines. Nous pouvons conserver la terminologie introduite : modèle, image, agrandissement, sous réserve de révisions (prochaines).

1. Trouver le correspondant de 1 : Exemples :

. Problème du puzzle : à 4 cm correspondent 7 cm, quelle est la mesure qui correspond à 1 cm ?

.../...

modèle		Reproduction
4	————	7
1	————	?

. Tous les problèmes de prix de l'unité, de poids de l'unité, de longueur de l'unité... Exemple :

Un ruban de 3 mètres est partagé en 32 coupons. Quelle est la longueur d'un coupon à 1 mm près ?

3	32
?	1

Un casier de 12 bouteilles coûte 56,40 francs. Quel est le prix d'une bouteille ?

12	56,40
1	?

⊛ Petites difficultés :

Une dinde pesant 3,5 kg a été payée 120 francs. Quel est le prix de vente du kilogramme ?

3,5	————	120 f
1	————	?

La valeur de 1 n'apparaît pas explicitement. Quelques élèves de CM_2 peuvent être déroutés. Par contre, la dinde, animal majestueux et solennel, risque d'occuper le devant de la scène au point que les élèves cherchent des correspondances où apparaîtrait le mot "dinde", le "nombre de dindes" par exemple. Cette difficulté disparaît (mais pas la première) s'il s'agit d'un rôti (prix du kg).

2. Trouver le rapport

Dans un agrandissement, Paul a trouvé que 1 est l'image de 0,80. Quelle sera l'image de 3,70 ?

x ?	0,80	1
	3,70	?

.../...

Un commerçant fait 2,5 francs de bénéfice par douzaine d'oeufs. Combien a-t-il vendu de douzaines d'oeufs s'il a réalisé un bénéfice de 87,5 francs ?

x ?

2,5 —— 1 douzaine
87,5 ——

Avec 7,5 m de toile, combien pourra-t-on faire de torchons s'il faut 1,25 m de toile par torchon ?

x ?

1,25 —— 1
7,5 ——

3. Calcul de l'application

Dans la reproduction de "l'optimist" : L'image de 17,7 est 13,275. Calcule l'agrandissement.

$$17{,}7 \xrightarrow{\quad x? \quad} 13{,}275$$

On a payé 12 pelotes de laine 54 francs. Quel est le prix d'une pelote ? Combien valent 18 pelotes ?

x?

12 —————— 54
1 ——————>
18 ——————

Un capital de 2500 francs a rapporté 112,50 francs en 1 an. A quel taux est-il placé ?

$$2500 \xrightarrow{\quad x? \quad} 112{,}5$$

4. Calcul du modèle

On a acheté des fruits pour faire de la confiture, ces fruits ont donné 4 kg de jus, ce qui représente les 2/3 de leur poids. Quel était le poids des fruits ?

$$? \xrightarrow{\quad x\,\frac{2}{3} \quad} 4 \text{ kg}$$

Ce que les enfants traduisent en indiquant l'image de 1.

$$1 \longrightarrow \frac{2}{3}$$

$$? \longrightarrow 4 \text{ kg}$$

.../...

Les betteraves donnent 35 % de leur poids en sucre. Si on obtient 150 kg de sucre, quel poids de betteraves a-t-il fallu ?

$$\begin{array}{ccc} \text{Poids de betteraves} & & \text{Poids de sucre} \\ ? & \xrightarrow{\times \frac{35}{100}} & 150 \text{ kg} \end{array}$$

2 séances additionnelles 53-6
53-7

13.2. LA DIVISION, APPLICATION LINEAIRE RECIPROQUE D'UNE MULTIPLICATION

La séance se déroule sous forme d'une suite de problèmes que les enfants exécutent rapidement. Ces problèmes sont l'occasion de poser des questions de mathématique. Le maître doit bien marquer la différence qu'il fait entre ces questions mathématiques et les problèmes. Les questions mathématiques sont l'objet véritable des défis proposés aux élèves, l'occasion de débats, le véritable but de l'apprentissage visé. Les énoncés de problèmes - qu'ils soient proposés par le maître ou par les élèves - ne sont là que comme moyens de traiter ces questions de mathématiques ou comme applications des connaissances qu'on vient d'acquérir ou de découvrir. Depuis le début de cet ouvrage et à propos de toutes les notions rencontrées, nous avons articulé l'activité des élèves entre des actions, des anticipations, des formulations de procédure, des débats sur la valeur des procédures d'une part, et d'autre part des déclarations sur les situations rencontrées, des conjectures, des débats de preuve sur des questions de mathématique. La forme de leçon qui est présentée ci-après montre un des aboutissements de cette méthode : permettre au maître de poser **ouvertement** des questions de mathématique, auxquelles les élèves puissent répondre ou dont ils puissent débattre, dans des conditions toutes nouvelles pour eux :

- au lieu de traiter un problème posé dans un milieu objectif comme "trouver tel agrandissement" ou "l'image d'un objet ," ils s'occupent de la manière dont ils ont résolu différents problèmes

- au lieu d'étayer leur conviction par l'adéquation des réponses ou même des instruments mathématiques qu'ils fabriquent à ce problème objectif (comme lorsqu'ils inventent la somme de deux fractions pour prévoir l'épaisseur d'un carton), ils doivent l'appuyer explicitement sur la cohérence logique de leurs modes de résolution : se demander si "diviser par 8" est une application linéaire, est un tout autre problème que d'effectuer un calcul ou même d'utiliser cette conception. Se demander s'il existe une division équivalente à "multiplier par 5/8" réclame une maturité par rapport aux mathématiques et une curiosité

.../....

intellectuelle dont les élèves sont tout-à-fait capables mais que l'on utilise et développe fort peu à l'école élémentaire et que l'on n'exige ensuite dans le secondaire que trop tard et trop brutalement.

13.2.1. La division, application linéaire.

i/ Premier énoncé : "Une place de cinéma coûte 35 francs. La recette totale d'une salle est de :

3325 F. le lundi	5250 F. le vendredi
4480 F. le mercredi	6125 F. le samedi
3675 F. le jeudi	6230 F. le dimanche

1ère question : Combien y-a-t-il eu de spectateurs payants pour chacun des jours de cette semaine ?

2ème question : Vous allez disposer dans un tableau : les recettes quotidiennes dans la colonne de gauche et le nombre de spectateurs payants correspondants dans la colonne de droite.

3ème question : Est-ce que "diviser par 35" est une application linéaire ? Vérifiez-le.

Déroulement : L'enseignant partage les calculs de la première question entre les enfants qui les effectuent individuellement. Ils reconnaissent, sans difficulté, l'opération à faire. Il envoie un élève au tableau pour disposer les résultats que ses camarades lui communiquent comme le demande la deuxième question de l'énoncé. Les réponses sont alors confrontées et éventuellement corrigées.

Après un moment de réflexion, les élèves prennent parti et inscrivent leur opinion (assez gros) sur l'ardoise ou sur le cahier de brouillon.
Le débat s'instaure : les uns pensent que les applications linéaires sont des multiplications, d'autres (ou le maître) demandent le rappel de ce qu'est une application linéaire. L'enseignant alors rappelle :

- pour chaque nombre (ici la "recette totale") on doit pouvoir connaître le correspondant (le nombre de places) et il n'y en a qu'un

- à la somme de deux nombres (recettes) doit correspondre la somme de leurs correspondants (nombre de places).

.../...

Alors les enfants vérifient sur quelques exemples (2 ou 3) que si l'on divise par 35 la somme des recettes du lundi et du mercredi, le nombre de places trouvé est la somme du nombre de places du lundi et du mercredi.
"Est-ce que ce sera vrai pour n'importe quels nombres ?"

Seuls quelques enfants pourront peut-être répondre à cette question à la fin de la leçon mais la plupart se persuadent sur la foi de quelques exemples. L'enseignant laisse la question de la preuve ouverte mais admet la vraisemblance de la réponse : "oui, diviser par 35 est une application linéaire, on ne l'a pas prouvé mais on l'a vérifié sur les nombres donnés."

ii/ Deuxième énoncé :"Cherchez des énoncés de problèmes semblabes, c'est-à-dire qui montrent une division comme application linéaire.

Trouvez des énoncés de ce type où les nombres ne sont pas des naturels mais des fractions ou des décimaux".

Déroulement : L'enseignant peut rappeler en exemples des problèmes déjà traités :

"J'ai collé 9 feuilles de même épaisseur et j'ai obtenu un carton qui a une épaisseur de $\frac{18}{7}$ mm. Quelle est l'épaisseur d'une de ces feuilles ?" (module 2.5.1)

Pour que la division par 9 corresponde à une application linéaire, il faut envisager toute une série d'énoncés dans lesquels le nombre de feuilles reste constant.
"Je recommence en prenant toujours 9 feuilles identiques mais d'épaisseurs différentes. Quelles sont les épaisseurs des feuilles quand l'épaisseur des cartons est : $\frac{27}{7}$; $\frac{12}{7}$ (cet exemple a été traité dans le module 2.5.2).

Les élèves alignent des valeurs qu'ils choisissent de façon à faciliter leurs calculs. Il n'est pas nécessaire d'ailleurs qu'ils les effectuent tous.

épaisseurs du carton		épaisseur d'une feuille
$\frac{18}{7}$	$\xrightarrow{:9}$	$\frac{2}{7}$
$\frac{27}{7}$		? (division du numérateur)
$\frac{10}{7}$		$\frac{10}{63}$ (multiplication du dénominateur)
$\frac{12}{7}$		$\frac{12}{63} = \frac{4}{21}$

iii/ Troisième énoncé : L'enseignant pose alors la question :

"Pour un problème de multiplication, nous avions trouvé 2 problèmes de division (12-2). Quel est l'autre problème de division qui correspond à la situation où on considère l'épaisseur de chaque feuille, le nombre de feuilles, et l'épaisseur totale du carton."

Les élèves (avec l'aide du maître éventuellement) peuvent alors produire l'énoncé :

"J'ai collé des feuilles de $\frac{2}{7}$ mm d'épaisseur. J'ai obtenu un carton de $\frac{18}{7}$ de mm d'épaisseur. Combien ai-je collé de feuilles ?"

Déroulement : * Les élèves - même ceux qui n'ont pas inventé l'énoncé - peuvent comprendre et admettre que c'est un problème de division parce que, pour le résoudre, ils comprennent qu'ils doivent faire des soustractions répétées de $\frac{2}{7}$.

Ils peuvent accepter d'écrire :

$$\frac{18}{7} - \frac{2}{7} =$$

ils effectuent successivement :

$\frac{18}{7} - \frac{2}{7} = \frac{16}{7}$ puis $\frac{16}{7} - \frac{2}{7} = \frac{14}{7}$, puis $\frac{14}{7} - \frac{2}{7} = \frac{12}{7}$ etc...

ce qui s'écrit $\frac{18}{7} : \frac{2}{7}$. Ils comparent à 18 : 2 = 9, d'où ils déduisent qu'il faut 9 feuilles.

Mais tous remarquent : "on n'a jamais appris à diviser par une fraction !"

* La fabrication du tableau, elle aussi, pose des problèmes aux enfants ; certains essaient :

épaisseur du carton	épaisseur d'une feuille
$\frac{18}{7}$	$\frac{2}{7}$

Mais alors l'application (:9) ne représente pas le calcul effectué. Ils corrigent : puisqu'il faut diviser par $\frac{2}{7}$, ils tracent la flèche et écrivent :

$$\xrightarrow{\quad :\frac{2}{7} \quad}$$

..../...

puis ils placent les ensembles

$$\begin{array}{ccc} \underline{\text{épaisseur du carton}} & & \underline{\text{nombre de feuilles}} \\ \frac{18}{7} & \xrightarrow{\quad :\frac{2}{7} \quad} & 9 \end{array}$$

mais ils continuent en utilisant les données des autres énoncés pour obtenir le tableau suivant :

$$\begin{array}{ccc} \underline{\text{épaisseur du carton}} & :\frac{2}{7} & \underline{\text{nombre de feuilles}} \\ \frac{18}{7} & \xrightarrow{\qquad\qquad} & 9 \\ \frac{27}{7} & \xrightarrow{\qquad\qquad} & \\ \frac{12}{7} & \xrightarrow{\qquad\qquad} & \end{array}$$

Ce tableau serait correct mais ils ne le comprennent plus parce qui'ls voudraient y placer des résultats déjà obtenus, ce qui ne donnerait pas le schéma <u>d'une</u> application linéaire.

$$\begin{array}{ccc} \frac{18}{7} & \xrightarrow{\quad :\frac{2}{7} \quad} & 9 \\ \frac{27}{7} & \xrightarrow{\quad :\frac{3}{7} \quad} & 9 \\ \frac{12}{7} & \xrightarrow{\quad :\frac{4}{21} \quad} & 9 \end{array}$$

Le maître doit demander à nouveau aux élèves de "formuler leur problème de manière à pouvoir y placer une famille de données semblables et de demander une famille de résultats correspondants : "

Il faut donc modifier le premier énoncé proposé par les élèves et obtenir par exemple :

"Je colle des feuilles de $\frac{2}{7}$ mm d'épaisseur, j'ai obtenu différents cartons d'épaisseurs :

$$\frac{18}{7}\text{ mm} \quad : \quad \frac{20}{7}\text{ mm} \ ; \quad \frac{38}{7} \ ; \text{ etc...}$$

"Est-ce que je peux proposer une épaisseur de $\frac{27}{7}$ mm ? (non bien sûr puisque 27 n'est pas un multiple de 2).

On obtient le tableau suivant :

.../...

$$\begin{array}{lcr}
\underline{\text{épaisseur du carton}} & & \underline{\text{nombre de feuilles}} \\
\frac{18}{7} & \xrightarrow{:\frac{2}{7}} & 9 \\
\frac{20}{7} & \xrightarrow{:\frac{2}{7}} & 10 \\
\frac{38}{7} & \longrightarrow & 19 \\
\frac{12}{7} & \longrightarrow & 6
\end{array}$$

Certains élèves remarquent que s'ils choisissaient des épaisseurs de carton quelconques, par exemple $\frac{30}{8}$, ils ne sauraient pas bien faire le calcul. D'autres disent que si mais que le résultat ne serait pas exact.

<u>Remarque</u> : Certains élèves font remarquer que tous les nombres n'ont pas un correspondant et que nous n'avons donc pas une application.

iv/ Enoncés avec des décimaux.

L'enseignant demande des énoncés comprenant la division par un nombre décimal, "même si on ne sait pas bien les résoudre"

Exemples : Un propriétaire a dépensé 2450 F pour une clôture légère de 32,45 mètres de long. Il calcule le prix par mètre de cette clôture et compare ce prix à celui proposé par différents entrepreneurs sur leur devis : 2596 ; 2693.35 etc...

Les élèves ne peuvent pas procéder par soustraction répétée, l'idée de chercher le terme inconnu d'un produit peut s'imposer.

$$\begin{array}{lcl}
2450 & \xrightarrow{:32,45} & 75,5 \\
2596 & & \\
2693.35 & &
\end{array}$$

L'enseignant demande alors de préciser que l'on connaît l'application réciproque de ":32,45"

$$\begin{array}{lcl}
2450 & \underset{\times 32,45}{\overset{:32,45}{\rightleftarrows}} & 75,5 \\
2596 & \xleftarrow[\times 32,45]{} & 80
\end{array}$$

.../...

13.2.2. La division par une fraction : calcul de l'image.

L'enseignant pose à nouveau la question qui fait l'objet de cette leçon. Nous savons que "diviser par une fraction" ou "diviser par un nombre décimal" est une application linéaire. Comment trouver des images dans ces applications. Par exemple :

"comment diviser par $\frac{3}{8}$?"

1) Stratégies du maître.

L'enseignant peut proposer la question à la fin de l'heure de mathématiques et laisser la question ouverte jusqu'à la prochaine séance.

Il peut aussi ouvrir directement le débat et solliciter les propositions des élèves en dirigeant les interventions.

Il peut ouvrir des périodes de recherche individuelle silencieuse entrecoupées de périodes d'échanges où les stratégies des élèves sont recueillies et/ou suggérées : des étapes sont alors aménagées.

a) "Tout le monde pense à un énoncé et l'écrit. Arrangez-vous pour qu'il conduise à faire plusieurs fois "le même" calcul ": $\frac{3}{8}$"puis essayez de décrire ce que vous faites à chaque fois"

b) Vous pouvez chercher des cas particuliers simples comme par exemple : "combien de feuilles de $\frac{1}{8}$ de mm pour faire un carton de 3 mm ?

c) Pouvez-vous connaître chaque fois l'application réciproque ?

2) Stratégies de l'élève.

Pour appuyer leur raisonnement les élèves doivent penser à un énoncé. Par exemple :
"J'ai à diviser par 3/8 si je cherche combien de feuilles de 3/8 de mm, il faut pour faire diverses épaisseurs données par exemple 6 mm, 9 mm, etc...

$$6 \xrightarrow{\quad : 3/8 \quad}$$

a) raisonnement par une fausse supposition (et une règle de trois)

.../...

Si les feuilles avaient une épaisseur de $\frac{1}{8}$ème de millimètre, il faudrait 8 feuilles pour faire une épaisseur de 1 mm, et donc 48 feuilles pour faire 6 mm - mais les feuilles font $3 \times \frac{1}{8}$ de millimètres, elles sont trois fois plus épaisses et il en faudra donc trois fois moins (que 48) pour faire un carton de 6 mm : $6 : \frac{3}{8} = \frac{48}{8} = 16$.

b) raisonnement par équivalence.

6 mm c'est $\frac{48}{8}$ de mm puis le raisonnement donné plus haut produit : $\frac{48}{8} : \frac{3}{8} = 48 : 3 = 16$.

c) la réciproque.

Le raisonnement amenant à la recherche du terme inconnu d'un produit conduit à des phrases comme : "si j'avais 3 feuilles de $\frac{3}{8}$ mm, elles auraient une épaisseur de $\frac{9}{8}$ de mm, il en faut plus. 10 feuilles $\to \frac{30}{8}$ c'est un peu plus de 3 mm, il en faut plus... c'est 16 parce que $16 \times \frac{3}{8} = \frac{48}{8} = 6$ mm que le maître traduit : il faut donc chercher le nombre qui, multiplié par $\frac{3}{8}$, donne 6 $\boxed{?} \times \frac{3}{8} = 6$

$$6 \underset{\times\, 3/8}{\overset{:\, 3/8}{\rightleftarrows}} \boxed{} \; ?$$

Avec quelque peine il est vrai, le maître peut obtenir alors un rappel du module 9-6 : Pour trouver l'objet $\boxed{}$ il faut trouver l'image par la réciproque de $\times\frac{3}{8}$.

La réciproque de $\times\frac{3}{8}$ c'est $\times \frac{8}{3}$ alors

$$6 \underset{\times\, \frac{3}{8}}{\overset{\times\, \frac{8}{3}}{\rightleftarrows}} \frac{48}{3} = 16$$

De ces trois méthodes, on peut retenir que chaque fois, l'élève a multiplié par 8 puis divisé par 3 les nombres dont il voulait trouver l'image.

3) Calcul de l'image dans une division par une fraction.

Pouvons-nous formuler une règle qui pourrait s'appliquer à n'importe quelle sorte de nombres pour calculer le résutlat d'une division par une fraction.

.../...

$$6 \xrightarrow{\quad :\frac{4}{5} \quad} \frac{6 \times 5}{4} =$$

$$\frac{2}{5} \xrightarrow{\quad :\frac{4}{5} \quad} \frac{2}{3} \times \frac{5}{4} =$$

$$3{,}6 \xrightarrow{\quad :\frac{4}{5} \quad} 3{,}6 \times \frac{5}{4} =$$

Des élèves proposent $\times\frac{5}{4}$

M. : La règle serait "pour diviser par $\frac{4}{5}$ il faut multiplier par $\frac{5}{4}$".

13.2.3. Division par une fraction, réciproque de la mutliplication par cette fraction

1/ Le Maître :"Comment savoir si cette règle est toujours bonne ?"

L'élève : $\xrightarrow{\quad :\frac{4}{5} \quad}$ est une application linéaire et on sait alors toujours trouver l'image d'un nombre, si on connaît l'image de 1.

Le maître "Cherchez l'image de 1 par une des méthodes habituelles"

$$1 \xrightarrow{\quad :\frac{4}{5} \quad} ?$$

$$\frac{40}{5} \xrightarrow{\quad :\frac{4}{5} \quad} 10$$

mais $1 = \frac{5}{5}$

$$\begin{tikzcd} \frac{40}{5} \arrow[r, ":\frac{4}{5}"] \arrow[d, ":8"'] & 10 \arrow[d, ":8"] \\ \frac{5}{5} \arrow[r] & \frac{10}{8} \end{tikzcd}$$

alors $1 \longrightarrow \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$

donc l'application est $\times \frac{5}{4}$

On peut toujours calculer son image !

2/ Le maître : "Cherchez une autre preuve, une autre manière de calculer en commençant par répondre à la question, par exemple : quelle est la réciproque de $:\frac{4}{5}$?"

L'élève :

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, shift left, ":\frac{4}{5}"] & \bullet \arrow[l, shift left, "\times\frac{4}{5}\ ?"] \end{tikzcd}$$

est-ce bien $\times \frac{4}{5}$?

.../...

le Maître : "Prouvez-le"

l'Elève : $\frac{4}{5} \xrightarrow{:\frac{4}{5}} 1$

Pour faire un carton de $\frac{4}{5}$ mm avec des feuilles de $\frac{4}{5}$ mm, il faut une seule feuille.

La réciproque fait correspondre à $1 \longrightarrow \frac{4}{5}$, c'est donc $\times\frac{5}{4}$

Le Maître : bien ; la réciproque de :3 c'est x3, celle de $:\frac{3}{7}$ c'est $\times\frac{3}{7}$

Mais nous avons vu que la réciproque de $\times\frac{4}{5}$ c'est l'application $\times\frac{5}{4}$.

$$\xrightarrow{:\frac{4}{5}}$$
$$\xleftarrow[\times\frac{4}{5}]{}$$
$$\xrightarrow[\times\frac{5}{4}]{}$$

(Remarque pour le maître : l'application est la réciproque de sa réciproque)

Alors $:\frac{4}{5}$ c'est l'application $\times\frac{5}{4}$.

L'enseignant demande: "montrez directement que la réciproque de $\times\frac{4}{5}$ c'est $\times\frac{5}{4}$

$$1 \underset{\times\frac{4}{5}}{\overset{\times\frac{5}{4}}{\rightleftarrows}} \frac{5}{4}$$

L'image de 1 par $\times\frac{5}{4}$ est $\frac{5}{4}$

L'image de $\frac{5}{4}$ par $\times\frac{4}{5}$ c'est $\frac{5}{4} \times \frac{4}{5} = \frac{20}{20} = 1.$

Exercices : Un élève dit :

La réciproque de $\times\frac{7}{13}$ est $:\frac{7}{13}$

Un autre dit :

non la réciproque de $\times\frac{7}{13}$ est $\times\frac{13}{7}$

Qui a raison ?

Remarque : Tous les élèves ne peuvent pas atteindre une compréhension de ces questions qui leur permette de produire individuellement les preuves évoquées ici. Elles ne doivent pas être exigées comme des savoirs à acquérir. De plus, les "règles" proposées par les élèves ne doivent pas être immédiatement institutionnalisées. Elles doivent rester

.../...

"douteuses" c'est-à-dire être contrôlées, soit par un calcul qui s'appuie sur les représentations évoquées et donc peuvent ne pas être générales, soit sur des résultats déjà établis.

Nous allons y revenir dans les deux prochains chapitres, en donnant de nouvelles représentations et de nouvelles preuves à l'appui des propriétés introduites ici.

13.3. DEFINITION ET DESIGNATION D'APPLICATIONS (LE JEU DU PORTRAIT)

Il est utile de maintenir les élèves encore un peu dans cette incertitude au sujet des règles de calcul sur les fractions. Cette incertitude les conduit à mobiliser en même temps et concurrement les raccourcis formels et les représentations. Ce fonctionnement des connaissances est très utile aussi bien à la compréhension qu'à la mémorisation des propriétés.

Pour faire fonctionner ces propriétés comme des conjectures, nous proposons aux élèves des situations de preuve qui les intéressent souvent. Le jeu du portrait menteur paraît un peu formel s'il est proposé après l'institutionnalisation des connaissances (il se réduit à un exercice) et trop difficile s'il est proposé avant que les questions aient été traitées au moins une fois.

13.3.1. Présentation simplifiée du jeu

1/ Principe du jeu : Le jeu se joue à deux.

Le proposant "vend" une suite d'informations sur une application linéaire cachée. L'opposant "achète" certaines de ces informations jusqu'à ce qu'il pense être sûr de connaître (d'en déduire) cette application cachée.

Il dit alors "je sais". On compare alors l'application devinée à celle cachée indiquée sur la fiche "application" correspondante. Pour augmenter le plaisir des léèves, le proposant est autorisé à proposer certains renseignements faux (plus exactement contradictoires avec d'autres).

S'il arrive à vendre à l'opposant des renseignements contradictoires, il s'écrie "gagné" et l'autre perd la partie : L'opposant ne peut plus trouver alors de solution. Mais si l'opposant détecte qu'un renseignement est contradictoire avec ceux qui lui ont été fournis précédemment, il s'écrie "menteur" et gagne. Bien sûr chacun doit prouver ses dires.

.../...

2/ Matériel : Le jeu peut être laissé à l'initiative des enfants ais il est plus commode pour eux d'avoir un support matériel : des fiches, une par partie. Chaque fiche "renseignements" porte une liste d'informations entre lesquelles le proposant chosit celle qu'il essaie de "vendre" à son opposant. Une autre fiche "application" portant le même numéro contient le nom de l'application cachée et des couples qu'elle associe. Cette fiche application n'est disponible pour le proposant comme pour l'opposant qu'après la fin de la partie et lorsqu'ils se sont mis d'accord sur son résultat.

Exemples de fiches"simplifiées "

FICHE 1 : Application

$$\square \xrightarrow{3\square + 3} 3\square + 3$$

$$1 \longrightarrow 7$$

$$2 \longrightarrow 10$$

$$\frac{3}{2} \longrightarrow \frac{17}{2}$$

$$0 \longrightarrow 3$$

$$5 \longrightarrow 18$$

$$10 \longrightarrow 33$$

FICHE 1 : Renseignements

- au modèle 3 elle fait correspondre l'image 13
- au modèle 1 elle fait correspondre l'image 7
- ce n'est pas une application linéaire
- sa réciproque associe l'image $\frac{3}{2}$ à l'objet $\frac{17}{2}$
- au modèle 0 elle fait correspondre l'image 4
- sa réciproque est $(\square - 4)/3$
- elle agrandit (l'image est plus grande que le modèle)
- ce n'est pas une translation (une addition)

N.B. : La fiche "application" donne les images des valeurs :
1 ; 2 ; $\frac{2}{2}$; 0 ; 5 ; 10.

.../...

FICHE 2 : Application

$$\square \xrightarrow{\times\frac{2}{3}} \frac{2}{3}\,\square$$

$$
\begin{array}{lcl}
0 & \longrightarrow & 0 \\
1 & \longrightarrow & \frac{2}{3} \\
3 & \longrightarrow & 2 \\
2 & \longrightarrow & \frac{4}{3} \\
\frac{3}{2} & \longrightarrow & 1 \\
5 & \longrightarrow & \\
10 & \longrightarrow &
\end{array}
$$

FICHE 2 : Renseignements

- c'est une application linéaire
- l'image de 0 est 0
- l'application réciproque donne de l'objet 2 l'image 3
- l'image de 1 est $\frac{2}{3}$
- au modèle 6 elle associe l'image 4
- elle rapetisse l'objet de $\frac{1}{3}$
- c'est la réciproque de $\times\frac{3}{2}$
- c'est l'application $:\frac{3}{2}$
- Le modèle $\frac{3}{2}$ a pour image 1.

N.B. : La fiche application donne l'image des valeurs :
0 ; 1 ; 3 ; 2 ; $\frac{3}{2}$; 5 ; 10.

3/ Conditions d'utilisation

Le jeu du portrait peut être rendu plus intéressant et plus clair pour les léèves si les règles et surtout les enjeux sont plus précis. Les règles sont un peu coompliquées pour qu'il soit intéressant de les introduire si la seule occasion de les utiliser est celle que nous montrons ici. Il en va tout autrement si, comme à l'école Jules Michelet, elles ont été introduites de longue main. Le jeu du portrait est utilisé dès le cours préparatoire comme moyen d'introduire le langage logique - en rapport avec la pensée naturelle - Le jeu du portrait menteur peut être introduit dès le CE 2 à propos de divers problèmes mathématiques.

.../...

13.3.2. Le jeu du portrait : consignes et déroulement

1/ Organisation : Le jeu se déroule en 4 phases :

a) Une phase de recherche au cours de laquelle le joueur A "vend" des informations (portées sur la fiche "informations") sur une application inconnue (de lui et de son partenaire B) jusqu'à ce que B pense avoir deviné cette application.

b) Une phase d'épreuve au cours de laquelle A demande à B de calculers les images que cette application donne pour quelques valeurs ; A demande autant de valeurs qu'il croit nécessaires pour qu'il puisse deviner quelle est la répnse que B a trouvée.

c) Une phase d'enchères et de preuves au cours de laquelle, alternativement, A et B décidnet des différentes mises et échangent, sous certaines conditions, des preuves à l'appui de leur opinion. A la fin de cette phase, une réponse de B et la position du couple A-B (accord ou désaccord après preuves ou sans preuves) sont arrêtées.

d) Une phase de vérification au cours de laquelle les deux joueurs consultent la fiche "application" et déterminent les points - gagnés ou perdus - par chacun.

Pour faciliter le déroulement du jeu :

* au cours de la phase a) le joueur A choisit ses informations sur une fiche spéciale appelée "fiche information". Sur cette fiche figure en outre, une liste de nombres pour lesquels la "fiche application" donnera l'image.
* au cours de la phase b), le joueur B écrit les images qu'il a calculées et le nom de l'application qu'il a trouvée sur un papier blanc qu'il montre au joueur A.
* au cours de la phase c), les différentes décisions possibles sont matérialisées par un graphe dessiné sur une grande feuille (qui joue le rôle d'un tapis de jeu comme ceux utilisés "aux petits chevaux", au "jaquet" ou au "jeu de l'oie"). Les joueurs posent leur mise et déplacent un pion en fonction de leur décision.
* au cours de la phase d), les joueurs A et B se réfèrent à la "fiche application" qui jouera ici le rôle de fiche-réponse et qui est déterminée dès le début par le numéro de la "fiche information"

.../...

Remarque : Dans une variante plus sophistiquée de ce jeu, le joueur A pourrait choisir ses informations sur plusieurs "fiches information" puis, au moment où le joueur B se déclare suffisamment informé, choisir la "fiche application" de son choix. Cette position lui permet de choisir un contre-exemple s'il pense que B s'est trompé.

2) Constitution des couples de partenaires : Le jeu peut se jouer à un contre un ou opposer deux petites équipes de deux ou trois élèves (maximum). Chaque équipe sera alternativement A et B. Les "fiches application" (en fait des cartons de la taille des cartes à jouer) sont retournées sur la table. Un joueur A va tirer au hasard - ou reçoit du maître - une "fiche information" qui ne donne évidemment pas la réponse complète.

3) Phase de recherche : L'équipe B décide de prendre une question à 1, 2, ou 3 jetons et paie le prix en posant devant A le nombre de jetons nécessaires. Le joueur A choisit une information du prix demandé parmi celles que porte la fiche et la lit à B. Le joueur B réfléchit pour savoir si cette information est suffisante pour déterminer l'application inconnue. S'il ne sait pas la trouver, il achète une autre information par le même procédé que ci-dessus et en payant chaque fois le prix. Le processus continue jusqu'à ce que B pense avoir trouvé l'application. Il dit alors : "j'ai trouvé".

4) Phase d'épreuves : Les joueurs A qui possèdent beaucoup plus d'informations sur l'application inconnue que leurs partenaires B, et qui ont pu pendant la phase de recherche se livrer eux aussi à quelques calculs (de préférence à l'insu de B) vont préparer la phase de vérification en demandant à B de calculer les images de certaines valeurs portées sur la "fiche information". On sait que ces images figurent aussi dans la fiche qui servira à la correction. Mais chaque fois que A demande à B d'effectuer un calcul, A doit payer un jeton mais B doit produire sa réponse. A a intéref à s'arrêter dès qu'il pense qu'il a suffisamment d'éléments pour deviner la réponse de B et prendre ses décisions au moment des enchères. B, pour l'instant, garde secrète le nom de l'application qu'il a trouvée.

.../...

5) Phase d'enchères :

a/ A mise 1, 2, ou 3 jetons sur la case "enchères de A" (mise a)
B mise 1, 2, ou 3 jetons sur la case "enchères de B" (mise b)

b/ B alors montre sa réponse écrite.

c/ Le pion est sur la case "départ". C'est à B de décider. Il peut placer le pion sur "B propose arrêt et vérification"
ou sur "B propose une preuve qu'il a raison"

A, à son tour, doit faire avancer le pion en suivant les flèches (il ne peut pas le faire revenir en arrière ni le faire sauter sur une autre branche). Par exemple, si B a proposé "arrêt et vérification" et que A avance le pion sur "arrêt et vérification", la phase d'enchères est immédiatement terminée (issue 1).

Si A avance le pion sur "A propose une preuve", B a le choix entre refuser ou accepter. S'il refuse, le graphe indique qu'il doit mettre b' jetons sur la case "banque" et la phase "enchères" est terminée (issue 2). Si B accepte d'examiner la preuve de A, A doit mettre immédiatement a' jetons sur la case banque. Puis il donne son explication. B doit alors à nouveau décider. Si les explications de A l'ont convaincu que sa réponse est fausse, il place le pion sur la case correspondante (la réponse de B est fausse et B est d'accord) et il met aussitôt b' jetons à la banque. La phase d'enchères est terminée (issue 3). Si les explications de A ne l'ont pas convaincu (il place le pion sur la case correspondante) et donne b' jetons à la banque (issue 4)

d/ Revenons à la case départ et regardons ce qui se passe si B propose une preuve. A doit décider s'il avance le pion sur "A accepte d'examiner la preuve de B" ou "A refuse d'examiner la preuve de B" (issue 7) et paye a' jetons à la banque. Puis, s'il y a lieu, après l'explication de B, il place le pion sur la case voulue : "B a deviné juste et A est d'accord" (issue 5) ou "A pense que B s'est trompé" (issue 6).

6) Phase de vérification et de règlement de la partie :

L'examen de la fiche application doit permettre aux joueurs d'établir le règlement c'est-à-dire le paiement des jetons dus. Voici les différents cas :

.../...

1er cas : - la réponse de B est conforme à celle de la fiche : il a donné le nom de toutes les images et un des noms de l'application.

2ème cas : - la réponse de B est inexacte et au moins une des images est fausse.

3ème cas : - le nom proposé par B est inexact mais toutes les images sont justes.

Dans ce dernier cas (issue 8), il y a un match nul. Chacun des joueurs A et B reprend tous ses jetons mais paie un nombre des primes de jetons à la banque.

Dans les deux premier cas, le graphe indique le règlement :

issue 1 : B répond juste : A paie (a x b) jetons à B
B répond faux : B paie (a x b) jetons à A.

issue 2 : B répond juste : A paie (a x b) + b' jetons à B la banque paie de plus b' jetons à B.
B répond faux : B paie (a x b) + b' jetons à A la banque paie b' jetons à A.

issue 3 : B répond juste : A paie (a x b) à la banque et et B aussi
B répond faux : B paie (a x b) à A et la banque paie (a'xb') à A mais elle paie b' à B.

issue 4 : B répond juste : A paie (a x b) à B et (a x b) à la banque qui garde a' et b'.
B répond faux : B paie (a x b) à A, (a x b) à la banque - La banque paie (a' x b') à A.

De cette façon, dans les différentes phases du jeu, ce système de jetons indique ce que les élèves ont intérêt à faire :

. dans la phase a) A doit choisir dans chaque catégorie d'informations celle qui lui semble apporter le moins d'informations utilisables à B.
B a intérêt à déduire le plus vite possible la réponse des informations qu'il obtien tet de l'avoir au meilleur prix. Dans cette première variante, il est clair que B a intérêt de faire des "impasses" sur certaines informations en faisant -consciemment ou non - un pari. Par exemple, ayant obtenu un modèle et son image, il fait l'hypothèse que l'application est linéaire et, sans attendre de confirmation, prend le risque de proposer une solution. Des variantes plus sophistiquées peuvent alors donner à A des moyens de contrer cette stratégie.

.../...

. dans la phase b), A a intérêt à demander le calcul de nombreuses images pour augmenter ses chances de faire chuter B mais en même temps, il doit le payer.

. dans la phase c) les joueurs ont intérêt à demander des explications ou des preuves, même s'ils sont sûrs de leur fait.

Il est évident que ce système ne garantit absolument pas un fonctionnement convenable : des réponses exactes, des preuves correctes, un apprentissage rapide. Il se contente d'indiquer les possibilités et de motiver les efforts de la part des élèves. Le maître devra, de toute manière, contrôler le bon déroulement des opérations et intervenir éventuellement sur les preuves produites et discutées et pour résoudre les cas litigieux.

Les fiches sont constituées selon les modèles suivants :

a) <u>Exemple de fiche d'application linéaire</u>

<u>FICHE 3 : Application</u>

. L'application est : $\square \xrightarrow{\times\frac{2}{3}} \frac{2}{3}\square$

. Autres désignations : x0,66... ou $:\frac{2}{3}$ ou : 1,5 ou $\times\frac{4}{6}$ etc...

. Exemples d'images : $\times\frac{2}{3}$

$0 \longrightarrow 0$

$1 \longrightarrow \frac{2}{3}$

$3 \longrightarrow 2$

$5 \longrightarrow \frac{10}{3}$

$10 \longrightarrow \frac{20}{3}$

$\frac{3}{2} \longrightarrow 1$

$\frac{2}{3} \longrightarrow \frac{4}{9}$

<u>FICHE 3 : Renseignements</u>

à 1 point

- l'image de 0 est 0
- elle rapetisse l'objet de $\frac{1}{3}$
- c'est la réciproque de l'application $:\frac{2}{3}$
- le modèle $\frac{3}{3}$ a pour image 1

.../...

à 2 points

- c'est une application linéaire
- L'application réciproque donne de l'objet 3 l'image 3
- l'image est les deux tiers du modèle
- l'image de la somme de deux nombres est la somme des images de ces nombres
- c'est la réciproque de l'application $x\frac{3}{2}$

à 3 points

- au modèle 6 elle associe l'image 4
- au modèle 3 elle associe l'image 2
- l'image de 1 est $\frac{2}{3}$

à 4 points

c'est l'application linéaire "$x\frac{2}{3}$".

N.B. La fiche application donne l'image des valeurs suivantes :
$0 ; 1 ; 3 ; 5 ; 10 ; \frac{3}{2} ; \frac{2}{3}$;

Avec les fiches d'applications linéaires sont construites sur le même modèle avec des avriantes comme :

2 points : si on divise l'image de a par 8 on trouve a (pour la fiche x 8)

1 point : l'image est les 125 % de l'objet (x1,25 ou $x\frac{5}{4}$)

Un tiers environ des fiches construites sur le même modèle ne décrivent pas une application linéaire mais une translation (ajouter ou retrancher un nombre) ou une application affine (x $\square$ + 5) comme la fiche 1.

b) Exemple de fiche de translation.

Les translations d'un nombre entier (+3, + 12 etc...) sont bien connues des élèves mais les translations d'une fraction le sont moins.

FICHE 4 : Application

. l'application est $\square \xrightarrow{+\frac{1}{3}} \square + \frac{1}{3}$

.../...

. autres désignations. Ajouter $\frac{1}{3}$ d'unité
(attention, ne pas confondre avec ajouter un tiers de l'image, c'est-à-dire $x\frac{3}{4}$)

. Exemples d'images — Explication

Exemples d'images	Explication
$0 \longrightarrow \frac{1}{3}$	
$\frac{1}{3} \longrightarrow \frac{2}{3}$	$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$
$1 \longrightarrow \frac{4}{3}$	$1 + \frac{1}{3} = \frac{3}{3} + \frac{1}{3}$
$2 \longrightarrow \frac{7}{3}$	$2 + \frac{1}{3} = \frac{6}{3} + \frac{1}{3}$
$5 \longrightarrow \frac{16}{3}$	
$10 \longrightarrow \frac{31}{3}$	

FICHE 4 : Renseignements

à 1 point

- l'image de 0 est $\frac{1}{3}$
- elle augmente l'objet
- c'est la réciproque de l'application "$-\frac{1}{3}$"
- le modèle $\frac{2}{3}$ a pour image 1

à 2 points

- ce n'est pas une application linéaire
- l'application réciproque donne de l'objet 2 l'image $\frac{5}{3}$
- l'image dépasse l'objet de $\frac{1}{3}$ d'unité
- c'est la translation de $\frac{1}{3}$
- l'image de 1 est $\frac{4}{3}$

à 3 points

- l'image de $\frac{1}{3}$ est $\frac{2}{3}$
- l'image de 10 est $\frac{31}{3}$

à 4 points

- c'est l'application "ajouter $\frac{1}{3}$"

N.B. : la fiche d'application donne l'image des valeurs suivantes :
$0 ; \frac{1}{3} ; 1 ; 2 ; 5 ; 10.$

.../...

c) <u>Exemple de fiche d'application affine</u> (le mot n'est pas prononcé devant les élèves)

FICHE 5 : Application

- l'application est $\square \xrightarrow{2 \times \square - 3}$

- autres désignations : C'est l'application "multiplié par 2, puis enlever 3".

- Exemples d'images

$0 \longrightarrow$ | pas d'image
$1 \longrightarrow$ |
$2 \longrightarrow 1$
$\frac{3}{2} \longrightarrow 0$
$5 \longrightarrow 7$
$\frac{7}{3} \longrightarrow \frac{5}{3}$ car $2 \times \frac{7}{3} - \frac{9}{3} = \frac{5}{3}$
$10 \longrightarrow 17$

FICHE 5 : Renseignements

à 1 point

- il n'y a pas d'image de 0
- il n'y a pas d'image de 1
- sa réciproque est : enlever 3 et divisez par 2
- si l'objet est plus grand que 3, l'image est plus grande que l'objet
- le modèle 2 a pour image 1
- l'image de 3 est 3

à 2 points

- si on ajoute 3 à chaque image, elle devient une application linéaire
- ce n'est pas une application linéaire
- $\frac{3}{2}$ a pour image 0
- 5 a pour image 7 et 10 a pour image 17
- 6 a pour image 9 et 12 a pour image 21
- 9 a pour image 15 et 20 a pour image 27

.../...

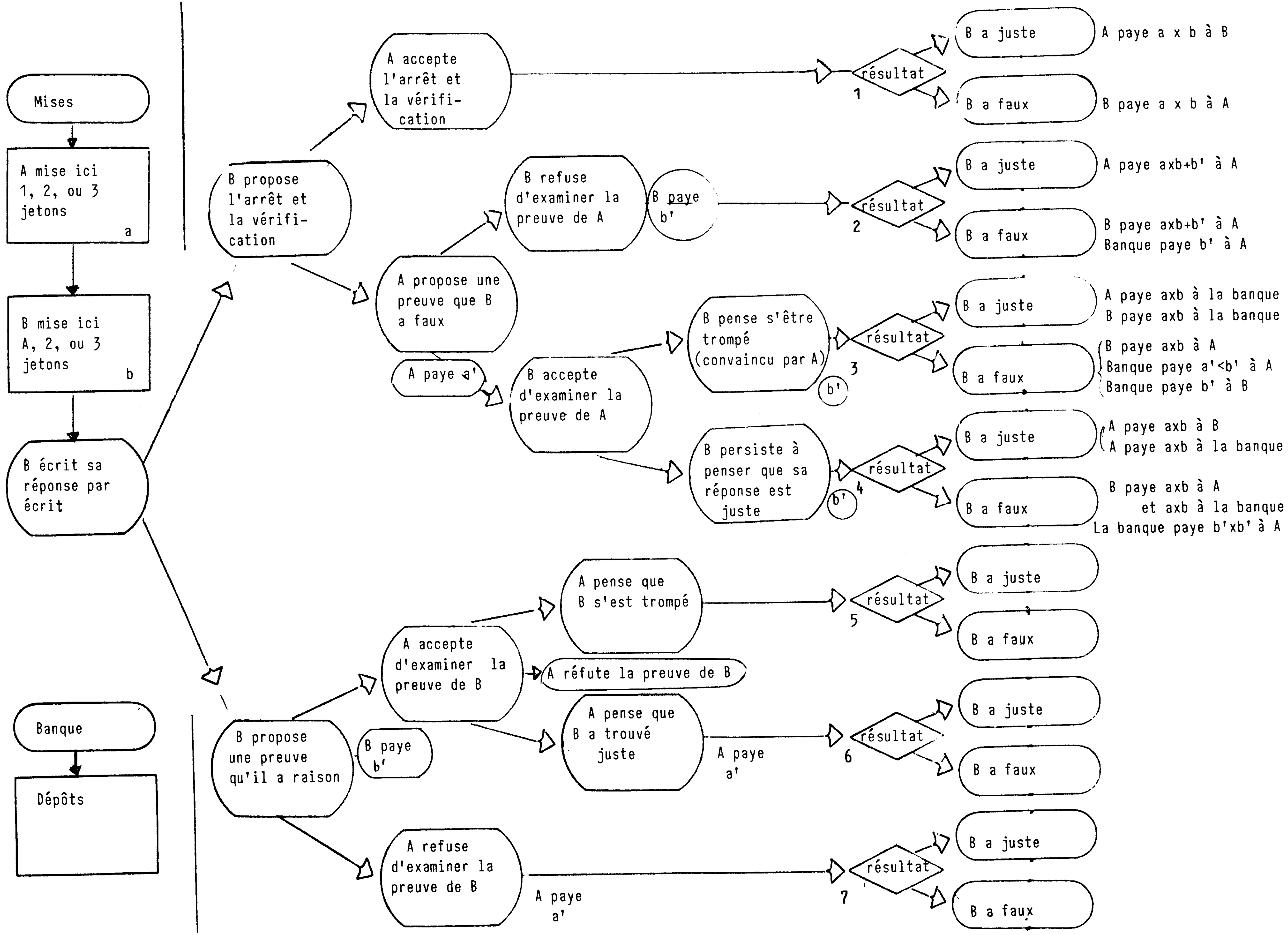
à 3 points

- l'application s'écrit avec un "multiplié par" et avec un signe "moins"
- il faut enlever 3 au résultat d'une multiplication par un entier.

N.B. : La fiche "application" donne l'image des valeurs suivantes :

$2 \; ; \; \frac{3}{2} \; ; \; 5 \; ; \; \frac{7}{3} \; ; \; 10.$

.../...


Mises
A mise ici 1, 2, ou 3 jetons
a
B mise ici A, 2, ou 3 jetons
b
B écrit sa réponse par écrit
Banque
Dépôts
B propose l'arrêt et la vérification
A accepte l'arrêt et la vérification
A propose une preuve que B a faux
A paye a'
B refuse d'examiner la preuve de A
B paye b'
B accepte d'examiner la preuve de A
B pense s'être trompé (convaincu par A)
b'
B persiste à penser que sa réponse est juste
b'
B propose une preuve qu'il a raison
B paye b'
A accepte d'examiner la preuve de B
A pense que B s'est trompé
A réfute la preuve de B
A pense que B a trouvé juste
A paye a'
A refuse d'examiner la preuve de B
A paye a'
résultat
1
2
3
4
5
6
7
B a juste
B a faux
A paye a x b à B
B paye a x b à A
A paye axb+b' à A
B paye axb+b' à A
Banque paye b' à A
A paye axb à la banque
B paye axb à la banque
B paye axb à A
Banque paye a'<b' à A
Banque paye b' à B
A paye axb à B
A paye axb à la banque
B paye axb à A
et axb à la banque
La banque paye b'xb' à A

13.3.3. Conclusions tirées avec les élèves.

1) Nous allons faire maintenant un inventaire des différentes manières d'écrire une application linéaire et d'écrire sa réciproque".

* L'application linéaire est donnée par un couple :

$$14 \longrightarrow 27$$

. Si on veut l'exprimer par une multiplication :

l'application est : $\times\frac{27}{14}$

L'application réciproque est donnée par le couple.

$$27 \longrightarrow 14$$

c'est l'application : $\times \frac{14}{27}$

. Si on veut l'exprimer par une division :

$$14 \xrightarrow{:\ ?} 27$$

pour trouver cette division, on regarde la réciproque exprimée par une multiplication :

$$14 \longrightarrow 27$$

La réciproque est l'application : $\times\frac{14}{27}$.

Donc, l'application directe est : $:\frac{14}{27}$.

* Nous avons vu que l'on procède de la même manière quels que soient les nombres.

Présentons les résultats dans un tableau en appelant a et b deux nombres quelconques :

Différentes manières de désigner une application linéaire et comment on en déduit la désignation de sa réciproque

Application linéaire	Application linéaire réciproque
$a \longrightarrow b$	$b \longrightarrow a$
$1 \longrightarrow \frac{b}{a}$	$1 \longrightarrow \frac{a}{b}$
$\times \frac{b}{a}$	$\times \frac{a}{b}$
$: \frac{a}{b}$	$: \frac{b}{a}$

Pour résumer ce tableau, il suffit de se souvenir que :

$$\boxed{\times\frac{b}{a} = :\frac{a}{b}}$$

2) Agrandir et rapetisser en multipliant et en divisant

1/ en multipliant :

"Nous avons trouvé des applications qui agrandissent et d'autres qui rapetissent et qui s'expriment toutes par des multiplications. Pouvez-vous en trouver quelques unes ?"

Les enfants commentent ce paradoxe apparent qu'ils ont déjà rencontré dans les leçons sur "l'optimist" et qui les avait déjà surpris. Ils l'avaient alors exprimé ainsi : "jusqu'à maintenant, on croyait que multiplier, ça agrandit toujours parce qu'on ne connaissait que des nombres plus grands que 1 !"

Ils proposent des applications que l'enseignant inscrit sur le tableau et qui sont classées en même temps en deux parties : celles qui agrandissent, celles qui rapetissent (l'enseignant peut en proposer lui aussi).

$\times\frac{2}{5}$; $\times\frac{1}{2}$; $\times\frac{12}{7}$; $\times\frac{4}{4}$; $\times\frac{7}{5}$;

$\times 1$; $\times\frac{1}{4}$; $\times$ 1,4 ; $\times$ 0,95 ; $\times$ 2,75 ...

celles qui agrandissent	celles qui rapetissent
$\times\frac{12}{7}$; $\times\frac{7}{5}$; $\times$ 2,75 ; $\times$ 1,4...	$\times\frac{2}{5}$; $\times\frac{1}{2}$; $\times\frac{1}{4}$; $\times$ 0,95...

Restent $\times\frac{4}{4}$ et $\times$ 1 qui sont l'occasion d'un rappel ("optimist" 9.3.6) "On avait vu qu'une reproduction faite en utilisant x1 était égale au modèle !"

Conclusion : L'enseignant fait expliciter une conclusion : "Les applications qui diminuent s'expriment par la multiplication d'un nombre plus petit que 1".

.../...

2/ en divisant :

"Nous venons de rappeler qu'on peut rapetisser un modèle en faisant une multiplication. Est-il possible d'agrandir un modèle en faisant une division ?"

L'enseignant, pour plus de compréhension, propose aux enfants de trouver une traduction comme celles qu'ils ont l'habitude d'utiliser dans ces cas-là : recherche de l'image de 1 :

$$1 \longrightarrow 7$$

Quelle est l'application qui s'exprime par une division et qui permet de multiplier par 7 (ou d'agrandir 7 fois).

Les enfants proposent d'écrire x7 mais cette réponse ne correspond pas à la question posée.

L'enseignant demande, pour les aider :
"Par quoi faut-il diviser 1 pour trouver 7 ?

$$1 \xrightarrow{:\,?} 7$$

C'est un nombre plus petit que 1 car en divisant 1 par ce nombre, il faut retrouver 7. C'est donc $\frac{1}{7}$.

L'enseignant écrit :

$$1 \xrightarrow{:\frac{1}{7}} 7$$

et demande : "pouvez-vous trouver d'autres applications ?" Mais en utilisant ce même système, les élèves ne proposent que des divisions de la forme $:\frac{1}{n}$. Alors, le maître demande de trouver une division qui, à 1 fait correspondre $\frac{5}{2}$.

$$1 \xrightarrow{?\,:} \frac{5}{2}$$

Comme précédemment, ils identifient d'abord l'application : "c'est $x\frac{5}{2}$!"
"Comment l'écrire sous forme de division ? Essayez de trouver d'autres manières d'écrire cette application". Les enfants rappellent qu'on vient d'apprendre que $x\frac{5}{2}$ c'est égal à $:\frac{2}{5}$ (ils donnent la preuve :
"la réciproque de $x\frac{5}{2}$ c'est $x\frac{2}{5}$ et la réciproque de $x\frac{2}{5}$ c'est $:\frac{2}{5}$. Donc $x\frac{5}{2}$ c'est la même application que $:\frac{2}{7}$).

Comme dans l'activité précédente, l'enseignant demande aux enfants

.../...

de trouver des applications linéaires qui s'expriment par des divisions. Ces applications seront classées en deux parties selon qu'elles agrandissent ou qu'elle rapetissent.

$:\frac{3}{5}$; $:\frac{5}{3}$; $:\frac{12}{15}$; $:\frac{4}{4}$; : 0,5 ;

:1,5 ; :0,8 ; 3,7...

<u>celles qui agrandissent</u>	<u>celles qui rapetissent</u>
$:\frac{3}{5}$; : 0,8 ; $\frac{12}{5}$; :0,5	$:\frac{5}{3}$; : 1,5 ; : 3,7 ...

$:\frac{4}{4}$ ne change pas le modèle.

<u>Conclusion</u> : L'enseignant fait expliciter la conclusion : "les applications qui diminuent s'expriment par la division d'un nombre plus grand que 1 et celles qui agrandissent par la division d'un nombre plus petit que 1"

MODULE 14 :

COMPOSITION DES APPLICATIONS LINEAIRES

14.1. LE PANTOGRAPHE*

14.1.1. Matériel :

- 1 pantographe pour 2 élèves (les pantographes sont réglés différement)
- des feuilles de papier uni pour la réalisation des dessins (il faut en prévoir suffisamment : 4 au moins par groupes de 2)
- du scotch pour fixer les feuilles sur les tables.
- 1 gomme pour 2 élèves.

Les pantographes sont mis en place avant le début de la séance.

14.1.2. - Introduction des pantographes.

a) Consigne : "Ces appareils sont des pantographes. Certains d'entre vous en ont déjà vu, peut-être même utilisé. Ils permettent de reproduire des dessins. Vous allez donc faire des dessins sur l'une des feuilles et à l'aide du pantographe, vous les reproduirez sur l'autre feuille".

b) Déroulement : Les enfants travaillent par groupes de 2. Il y a toujours au début un moment d'hésitation (comme souvent lorsque les enfants sont confrontés à une situation nouvelle ou à un instrument qu'ils n'ont jamais utilisé). Mais très vite, ils s'organisent, dessinent et découvrent l'usage du pantographe : la ventouse ne doit pas bouger, ni le papier (qui est fixé avec du scotch), la pointe suit le modèle, le crayon dessine l'image.

Dès qu'ils ont réalisé quelques dessins, ils demandent s'ils peuvent modifier la forme du pantographe, à quoi l'enseignant répond affirmativement. Ils modifient donc les réglages, recommencent à dessiner, échangent des remarques, certaines modifications les surprennent, les amusent.

Cette manipulation libre des pantographes peut durer 30 à 45 minutes sans lassitude.

.../...

* Remarque : Cette activité peut se faire dans le cadre de disciplines d'éveil : en dessin par exemple.

14.1.3.- Mise en commun des observations.

Après cette phase ludique, l'enseignant procède à une mise en commun ordonnée des observations, étayées par l'affichage des dessins et de leurs reproductions.

a) Consigne : "Qu'avez-vous remarqué ?"

b) Déroulement : Les enfants font des remarques et des hypothèses :

doit 1er

- On peut "agrandir" ou "rapetisser" en échangeant la pointe et le crayon.
- L'image ne change pas de forme quelle que soit la manière dont on dispose le pantographe.
- L'"agrandissement" ou le "rapetissement" varie suivant le réglage des pantographes.
- Les nombres qui sont en face des trous indiquent les agrandissements et les rapetissements.

Cette remarque est aussitôt vérifiée par les enfants qui l'ont faite : ils affichent leur modèle et sa reproduction, mesurent un segment sur le modèle et le segment correspondant sur la reproduction, écrivent ces mesures sur le tableau.

	Dessin (cm)	Reproduction (cm)
exemple :	3,2 ——————>	5,4

et calculent 3,2 x 1,5 (si 1,5 est le nombre indiqué en face du trou de réglage).

3,2 x 1,5 = 5,25 !

Etonnement général ! "ils ont fait une erreur !". L'enseignant invite alors tous les élèves à recompter l'opération - cahiers de brouillon, calculs... c'est bien 5,25 !

Il y a donc une erreur de 1,5 mm !

Les enfants font des remarques : "l'erreur n'est pas très grande !", "c'est obligé car le pantographe n'est pas très précis !"

Beaucoup alors veulent voir si leur reproduction a été mieux réalisée et par groupe de deux, ils vérifient en utilisant le procédé précédent. C'est une vraie compétition qui s'instaure : chacun espère avoir mieux réussi que les autres !

- Si le pantographe n'a pas la forme d'un parallélogramme, l'image est déformée.

.../...

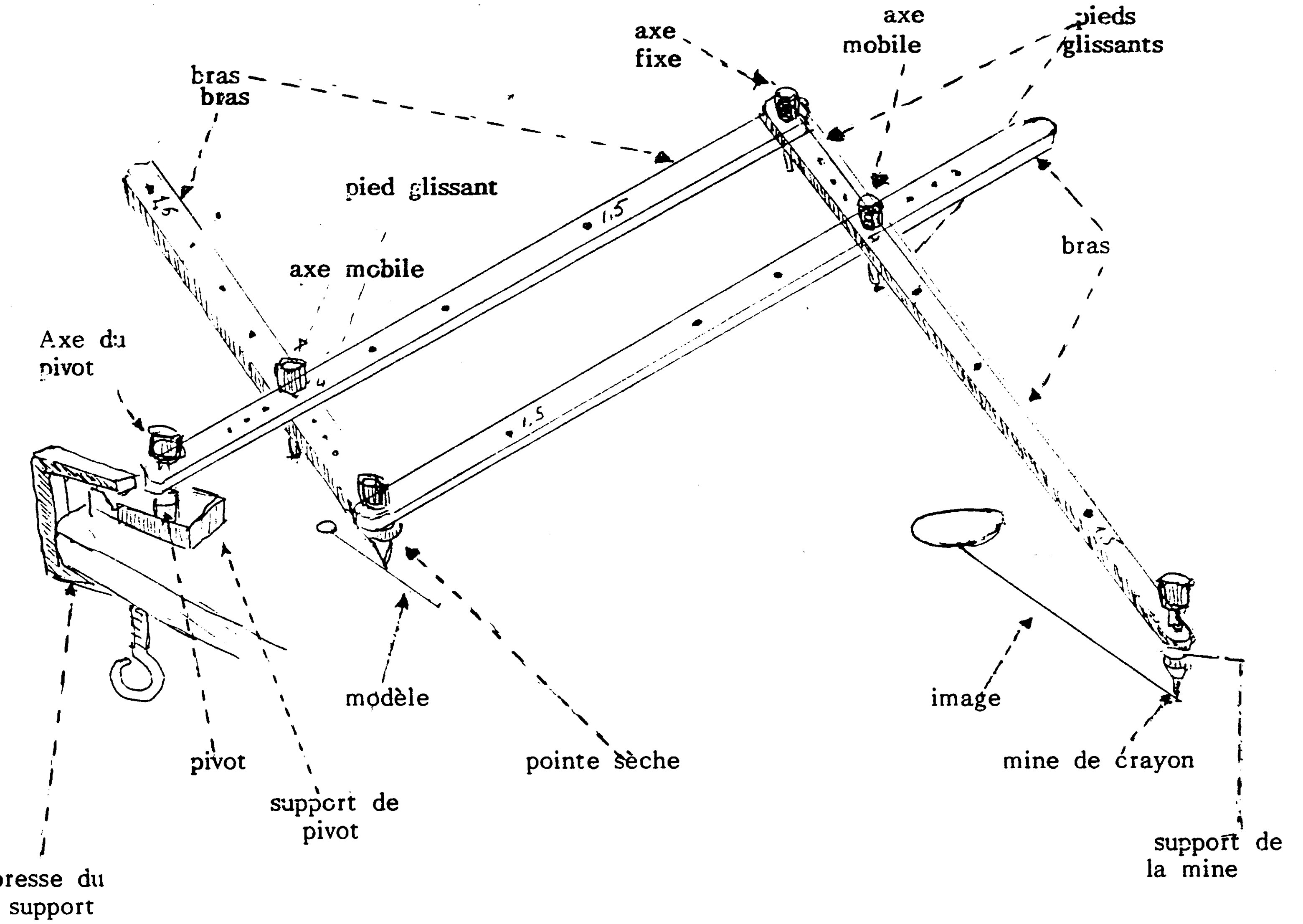
Il arrive toujours en effet qu'un groupe ait mal réglé son pantographe sans tenir compte des nombres qui sont sur les trous. Lors de la mise en commun, ils présentent leurs dessins un peu honteusement car ils n'ont pas compris quelquefois pourquoi cette déformation, ce qui fait bien rire les autres car la reproduction a souvent une forme bizarre !

D'autres qui en avaient pris conscience lors de la phase de manipulation viennent au secours de leurs camarades en disant qu'il leur est arrivé la même chose mais qu'ils se sont aperçus alors que le réglage était mal fait et qu'ils l'ont modifié !

14.1.4. - Résultats.

Tous les enfants savent utiliser le pantographe. Tous aussi ont compris les remarques qui ont été faites et savent dorénavant obtenir ce qu'ils veulent avec le pantographe.

.../...


axe
fixe
axe
mobile
pieds
glissants
bras
bras
pied glissant
axe mobile
1.5
1.5
bras
Axe du
pivot
modèle
pointe sèche
image
mine de crayon
pivot
support de
pivot
presse du
support
support de
la mine

.../..

14.2. COMPOSITION D'APPLICATIONS : 1ère séance.

14.2.1. - Matériel :

- 2 pantographes par groupe de 2 ou 3 élèves, l'un qui agrandit 3 fois, l'autre qui agrandit 1,5 fois.
- 3 feuilles de couleurs différentes par groupe de 2 élèves et pour l'enseignant.

0.7'

14.2.2. - Présentation de la situation.

"Derrière cette feuille blanche, j'ai fait un dessin. Puis, avec ce pantographe, j'ai reproduit ce dessin qui m'a servi de modèle sur cette feuille bleue. Enfin, j'ai reproduit le dessin de la feuille bleue sur cette feuille jaune à l'aide de ce pantographe* (Les enfants ne voient pas les dessins qui sont au verso des feuilles).

1/ Prévisions qualitatives

"Que pouvez-vous deviner à propos de ces dessins ? que pouvez-vous dire sans les voir ?"

L'enseignant s'attend bien sûr aux réponses suivantes : "ils se ressemblent" "ils sont agrandis ou rapetissés..., il faut voir comment sont réglés les pantographes".

L'enseignant montre alors la place du crayon et de la pointe sur les 2 pantographes. Les enfants disent alors "les dessins sont agrandis. Le plus grand est celui de la feuille jaune..."

2/ Prévisions quantitatives.

"Dans un moment, vous allez vous aussi faire la même chose : vous ferez un dessin sur la feuille blanche, vous le reproduirez sur la feuille bleue avec le premier pantographe, puis vous reproduirez ce dernier dessin sur la feuille jaune avec l'autre pantographe.

.../...

---

* Les pantographes que désigne l'enseignant sont également réglés, le premier sur 3, le deuxième sur 1,5.

Mais avant, je vous donne 2 dimensions du modèle :

4 ⟶

7' 2,5 ⟶

(L'enseignant écrit ces mesures sur le tableau)

Pouvez-vous prévoir les dimensions correspondantes sur la feuille jaune ?"

Les enfants disent alors qu'il leur faut d'autres renseignements et demandent :

- soit de combien agrandissent les pantographes
- soit une dimension correspondante sur la feuille jaune.

14.2.3.– Présentation d'un jeu : premier essai.

10 7-10 a) Consigne : "Vous allez faire un jeu : vous marquerez sur votre cahier de brouillon le renseignement que vous souhaitez. Je vous le donnerai. Il s'agira alors de faire des prévisions : vous choisirez des nombres qui désignent des mesures du modèle et vous prévoirez les longueurs des segments correspondantes sur la feuille jaune."

Il faudra écrire ces nombres dans un tableau.

Exemple : 4 ⟶

2,5 ⟶

3 ⟶

3' Lorsque vous aurez prévu ces mesures, vous vérifierez si votre prévision est juste à l'aide des pantographes.

Si vous choisissez un entier et que la prévision est juste, vous gagnerez 1 point.

Si vous choisissez un décimal et que la prévision est juste, vous gagnerez 3 points.

10 - 17' b) Déroulement. Les enfants travaillent par groupe de 2 ou de 3. L'enseignant leur suggère, s'ils n'y ont pas pensé, de calculer chacun leur mesure (car les points s'ajoutent). Ils peuvent donc ainsi en avoir davantage car dans les groupes, les enfants ont tendance à calculer ensemble la même mesure, ce qui retarde les calculs et du même coup, en limite le nombre.

7'

Pendant que les enfants font leurs prévisions, l'enseignant prépare le tableau suivant :

.../...

	Prévisions		Prévisions justes	Points
	Entier	Décimal		
Groupe 1				
Groupe 2				
Groupe 3				
Groupe 4				
Groupe 5				

c) Vérification : Elle se fait en deux parties :

17 . 30

1/ D'abord collectivement pour 4 et 2,5 : L'enseignant fait venir au bureau un enfant de chaque groupe.

13'

L'un des enfants desssine sur une feuille blanche la longueur 4 ; un autre la première image sur la feuille blanche, un autre la deuxième image sur la feuille jaune à l'aide des pantographes. Enfin, un autre encore, mesure ces images et donne les résultats à l'enseignant qui les marque sur une représentation agrandie au tableau :

$$4 \longrightarrow 12 \longrightarrow 18$$

et qui demande : "qui a trouvé ces mesures ?". Il y a souvent des erreurs dues au pantographe, ce qui donne lieu à des discussions. Un consensus s'établit : on accepte une prévision au 1, 2 ou 3 dixièmes près : par exemple, si les enfants ont mesuré 17,7 ou 17,8 ou 18,1 ou 18,2, la prévision sera acceptée.

2/ Pour les autres prévisions, le contrôle se fait dans chaque groupe avec les pantographes. Un enfant d'un groupe concurrent vient vérifier. Si l'activité est trop longue (parce que les enfants manipulent encore maladroitement les pantographes) l'enseignant peut s'en tenir à une simple vérification collective comme pour les mesures 4 et 1,5.

L'enseignant recueille dans le tableau de synthèse les résultats obtenus et marque les points.

30'

10 + 8

30 - 43

14.2.4. - Jeu : 2ème essai.

3'

7'

a) Consigne : "Vous avez vu qu'il est possible de prévoir les mesures de la dernière image par des calculs plus ou moins rapides.

travail 3'

Vous allez faire un deuxième essai ; vous discuterez entre vous pour trouver la manière la plus rapide pour calculer les résultats afin de

.../...

faire le plus de prévisions possibles. Voici une liste de nombres. Vous choisirez dans cette liste ceux que vous voulez et le plus possible. Vous pourrez même en ajouter si vous êtes très rapides et si vous le souhaitez".

(5')

4	→	→
2,5	→	→
6	→	→
2	→	→
5,1	→	→
14,6	→	→
2,25	→	→

49 - 48

b) Déroulement : Les enfants travaillent toujours en groupes en se partageant le travail.

48 - 65

17'

14.2.5. - Synthèse collective : correction des résultats, recensement des méthodes.

a) Correction des résultats. L'enseignant relève les résultats trouvés par les élèves, les inscrit en les corrigeant sur le tableau, puis attribue les points de manière à ce que les enfants sachent quelle est l'équipe gagnante. Puis il procède à un recensement des méthodes employées :

b) Recensement et comparaison des méthodes. Un enfant de chaque équipe vient au tableau expliquer sa méthode. Il est bien évident que tous ne viendront pas, car après chaque exposé, l'enseignant demande qui a procédé de la même manière.

1ère méthode observée : calcul des intermédiaires par la linéarité :

	4		12		18
:4	1	:4	3	:4	4,5
x2,5	2,5	x2,5	7,5	x2,5	11,25
x2	2	x2	6	x2	9

2ème méthode : calcul des intermédiaires par le produit.

$4 \xrightarrow{x3} 12 \xrightarrow{x1,5} 18$

2,5 ———— 7,5 ———— 11,25

3ème méthode : pas de calcul des intermédiaires.

$4 \xrightarrow{4,5} 18$

2,5 ———— 11,25

.../...

Evidemment, les enfants qui ont utilisé la 3ème méthode ont pu calculer tous les résultats et vite, tandis que ceux qui ont utilisé les deux autres, et plus particulièrement la première, ne sont pas souvent arrivés au bout. Ils reconnaissent que la dernière méthode est la plus rapide mais quelques-uns demandent toujours : "pourquoi avez-vous multiplié par 4,5 ?" à quoi certains répondent : "parce que 3 + 1,5 = 4,5", d'autres disent : "nous, on a multiplié 3 par 1,5", mais, généralement cette dernière explication n'est pas retenue car les enfants voient immédiatement sans faire de calculs que 3 + 1,5 = 4,5, alors qu'ils sont obligés de faire un calcul (même mental) pour trouver que 3 x 1,5 = 4,5. Le problème reste donc ouvert.

L'enseignant écrit alors sur le tableau la conclusion suivante :

$$(\times 3)\ \underset{\substack{\downarrow \\ \text{(suivi)}}}{S}\ (\times 1{,}5) = (4{,}5)$$

14.2.6

65-70

5'

c) Problème ouvert. "Pouvez-vous prévoir quel agrandissement feront deux pantographes réglés sur 3,5 et sur 2 ? Vous réfléchirez et vous donnerez le résultat dans la prochaine séance".

Un début de discussion très anarchique s'amorce déjà entre les enfants : certains pensent que c'est 5,5, d'autres disent que non. L'enseignant ne prend pas parti et leur propose d'y réfléchir pour le lendemain et surtout de trouver la preuve que ce qu'ils disent est vrai. La séance se termine presque par un suspense qui excite l'intérêt des enfants et les mobilise déjà pour l'activité suivante.

14.2.6. - Résultats.

Les enfants ont composé 2 applications linéaires : ils ont anticipé le résultat, trouvé plusieurs méthodes, choisi la plus courte. Ils ont découvert que l'on peut économiser des calculs en remplaçant deux applications linéaires par une certaine application linéaire qu'ils ne savent pas encore calculer.

Eq

14.3. - COMPOSITION D'APPLICATIONS LINEAIRES : DESIGNATION DES APPLICATIONS LINEAIRES COMPOSEES

14.3.1. - Recherche d'une solution au problème ouvert et validation.

1/ Rappel de l'activité précédente par l'enseignant.

"Dans l'activité précédente nous avons agrandi un modèle avec le pantographe réglé sur 3. Puis nous avons agrandi cette première image avec le pantographe réglé sur 1,5. Nous avons vu que l'agrandissement qui nous permettait de passer du modèle à la deuxième image était (x4,5) et nous avons écrit que :

(x3) S (x1,5) = (x4,5)

2/ Problème ouvert.

a) Consigne.: "A la fin de la séance précédente, je vous ai proposé le problème suivant : avec le pantographe, j'ai fait les agrandissements (x3,5) S (x2) et je vous ai demandé quelle est l'application linéaire qui peut remplacer ces deux applications ? Ceux qui ont trouvé une solution l'écrivent sur leur cahier".

b) Déroulement : Les enfants écrivent une réponse. Au bout de deux minutes, l'enseignant demande quelles sont les réponses marquées sur les cahiers. Il les inscrit sur le tableau, il y en a toujours 2 :

(x3,5) S (x2) = (x5,5)

et (x3,5) S (x2) = (x7)

Il procède alors à une vérification collective.

c) Vérification. "Comment savoir quelle est la réponse exacte ?" demande-t-il.

Les enfants proposent alors de vérifier ces applications sur des mesures entières ou décimales.

- Vérification sur une mesure entière : 8 par exemple.

$$\begin{tikzcd} 8 \arrow[r, "x3,5"] \arrow[rr, bend right, "(x7)"'] & 28 \arrow[r, "x2"] & \boxed{56} \end{tikzcd}$$

L'application qui permet de trouver 56 comme image de 8 est bien (x7). Par contre, l'enseignant demande aux enfants de calculer quelle image de 8 on trouverait par l'application 5,5. $8 \xrightarrow[x5,5]{} 44$

.../...

Cette image est 44, ce qui ne correspond pas à celle qui a été trouvée à l'aide des calculs intermédiaires. Les enfants voient bien alors que :

(x3,5) S (x2) = (x7).

Vérification sur une mesure décimale : 1,5 par exemple.

$$\begin{tikzcd} 1{,}5 \arrow[r, "x3{,}5"] \arrow[rr, bend right, "?"'] & \; \arrow[r, "x2"] & 10{,}50 \end{tikzcd}$$

L'enseignant demande aux enfants de calculer

1,5 x 7 = 10,5

et 1,5 x 5,5 = 8,25 ce qui ne correspond pas à l'image trouuvée

et de conclure : (x3,5) S (x2) = (x7).

d) Règle de composition de deux applications. L'enseignant fait formuler la règle qu'ils ont trouvée après ces deux vérifications.

"Pour trouver l'application linéaire qui remplace 2 applications linéaires, il faut multiplier ces deux applications".

Vérification sur une mesure très simple : 1.

L'enseignant demande aux enfants s'ils ne pourraient pas valider la même chose mais en évitant des calculs fastidieux et où ils peuvent faire des erreurs.

"Quelle est la mesure très simple à partir de laquelle on pourrait vérifier que l'application trouvée est la bonne ?"

Quelques enfants proposent 1 (si aucun d'entre eux n'y pense, l'enseignant le suggère) et l'on essaie aussitôt : c'est un des élèves qui l'a proposé qui vient au tableau et écrit :

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "(x3{,}5)"] \arrow[rr, bend right, "?\ (x7)"'] & 3{,}5 \arrow[r, "x2"] & 7 \end{tikzcd}$$

14.3.2. - Vérification de la règle sur n'importe quelle suite d'agrandissements ou de rapetissements.

a) Consigne "Vous savez trouver maintenant une application permettant de remplacer deux applications successives. Mais la règle que vous venez de vérifier s'applique-t-elle encore s'il y a plus de deux applications qui agrandissent ou rapetissent ?

Pour le savoir, vous allez calculer sur beaucoup d'exemples que je vais écrire sur le tableau et vous pourrez dire ensuite si cette règle est générale :

.../...

Exemples : (x1,75) S (x1) S (x0,5) =

(x3) S (x2,5) S (x1,75) =

(x0,125) S (x5) S (x1,5) S (x2) =

(x4,5) S (x0,2) S (x0,7) =

(x2,7) S (x4,52) S (x0) S (x0,425) =

b) Déroulement : Les enfants calculent par groupes de 2 ou 3. L'enseignant distribue une ou deux suites d'applications à chaque groupe qui devra la remplacer par une application unique en prouvant qu'elle est juste.

c) Correction collective :

1/ Un enfant de chaque groupe vient au tableau montrer ce qu'il a fait sous l'oeil critique des autres qui suivent les calculs avec attention. Il choisit 1 comme mesure de départ.

1er exemple : (1,75) S (x1) S (x0,5) = x0,875

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "x1{,}75"] \arrow[rrr, bend right, "x0{,}875"'] & 1{,}75 \arrow[r, "x1"] & 1{,}75 \arrow[r, "x0{,}5"] & 0{,}875 \end{tikzcd}$$

On procède de même pour tous les autres exemples.

L'enseignant profite de cette correction qui ne présente aucune difficulté pour faire découvrir par les enfants les propriétés de ces compositions d'applications : commutativité, associativité, le rôle de 1, le rôle de 0, etc... (Beaucoup d'enfants, en effet, commencent des calculs longs et fastidieux avant de s'apercevoir qu'il y a (x0) dans la suite des applications)

L'enseignant fait conclure par les enfants que, quelles que soient les applications (agrandissements ou rapetissements), quel qu'en soit le nombre, on peut toujours les remplacer par une seule application en les multipliant toutes.

Il fait remarquer aux enfants que cette ou ces multiplications de décimaux sont différentes de celle qu'ils connaissent (cf. module 8 activité 8) (trouver l'image d'une mesure par une application décimale).

14.3.3. - Exercices individuels.

13,4 - (x3,5) S (x1,5) S (x4) $\boxed{?}$

25,86 - (x3,5) S (x1,5) S (x4) $\boxed{?}$

11 - (x3,5) S (x1,5) S (x4) $\boxed{?}$

Au cours de la correction, l'enseignant inventorie les méthodes. Il y a encore des enfants qui font les calculs intermédiaires, donc souvent des erreurs et qui vont beaucoup moins vite que ceux qui utilisent directement l'application (x3,5 x 1,5 x 4). C'est alors une occasion pour les enfants de prendre conscience de l'utilité de remplacer plusieurs applications linéaires par une seule et de faire fonctionner les règles qu'ils ont apprises au cours de l'activité.

14.3.4. - Résultats.

Cette activité ne présente aucune diffiuclté. Outre qu'elle donne aux enfants l'occasion de faire des multiplications de décimaux et de découvrir une nouvelle signification de cette multiplication, elle leur permet, grâce aux règles découvertes, d'économiser des calculs et de désigner de nouvelles applications.

→ linéarité

14.4. DIFFERENTES ECRITURES POUR UNE MEME APPLICATION

14.4.1. - Matériel.

1 pantographe.

14.4.2.- Révision de la règle de composition des applications

a) Consigne : "Voici une suite d'applications linéaires :

(x1,5) S (x2) S (x2,5) S (x3) S (x4)

Notre pantographe peut-il réaliser cet agrandissement ?

Si oui, par quelle application linéaire pourrait-on remplacer cette suite d'agrandissements ?

b) Déroulement : Les enfants travaillent individuellement sur leur cahier de brouillon et le plus vite possible.

L'enseignant les invite à trouver les calculs les plus rapides.

c) Correction : Au bout de 3 minutes, il fait une correction collective. Pour cela, il envoie un enfant au tableau pour écrire :
(x1,5)S(x2)S(x2,5)S(x3)S(x4) = 1,5 x 2 x 2,5 x 3 x 4.

L'enfant explique comment il a fait et très souvent les autres proposent de leur place plusieurs solutions :

"Moi, j'ai commencé par faire de tête toutes les opérations possibles et il énumère :

2 fois 1,5 ça fait 3

3 fois 3 ça fait 9

9 fois 4 ça fait 36,

il ne reste plus qu'à multiplier 36 par 2,5 et cette opération aussi, on peut la fiare de tête :

2 x 36 ça fait 72

la moitié de 36 c'est 18

72 plus 18 ça fait 90 !"

Un autre dit : "moi j'ai commencé par 3 fois 4, ça fait 12, puis 2 fois 12, ça fait 24.

.../...

24 multiplié par 1,5 ça fait 24 + 12 = 36
et il reste à faire 36 multiplié par 2,5..."

Ainsi de suite jusqu'à ce que tous les procédés aient été énoncés. Ce déroulement permet à tous les enfants de découvrir toutes les manières possibles de calculer et de trouver la plus rapide.

On écrit donc sur le tableau en conclusion :

$$(x1,5) \; S \; (x2) \; S \; (x2,5) \; S \; (x3) \; S \; (x4) = (x90).$$

14.4.3. - Différentes écritures pour une même application.

a) Présentation du problème, consigne.

"Que peuvent faire les pantographes que vous avez utilisés ?"
(ils peuvent : soit agrandir un modèle
soit rapetisser un modèle).
Vous avez déjà utilisé ces différentes possibilités. Vous devez donc pouvoir direce que signifie :

"Rapetisser de 3".

Sauriez-vous le réaliser avec ce pantographe et écrire sur votre cahier ce que fait cette application ?"

b) Déroulement : L'enseignant laisse les enfants réfléchir un moment et demande à deux d'entre eux de venir réaliser devant toute la classe, avec le pantographe, le rapetissement 3.

Ils règlent le pantographe sur 3 et mettent le crayon entre la pointe et la ventouse, aidés si c'est nécessaire par les remarques des autres enfants. Puis l'enseignant leur demande de tracer un segment de 9 cm sur une feuille que le maître affiche au tableau et à l'aide du pantographe réglé, ils dessinent l'image de ce segment. Les enfants font des remarques à haute voix :
"l'image mesure 3 cm puisqu'elle doit être 3 fois plus petite que le modèle peut-être que sur le dessin, ce n'est pas tout à fait exact..."

L'enseignant rappelle alors la dernière question posée : "Sauriez-vous écrire sur votre cahier de brouillon ce que fait cette application ?" et laisse aux enfants quelques minutes de réflexion (2 au plus) .Puis l'un d'entre eux vient écrire sur le tableau :

$$9 \xrightarrow{:3} 3$$

L'enseignant ajoute des mesures et demande aux enfants de compléter le tableau suivant :

.../...

$$\begin{array}{l} 9 \xrightarrow{(:3)} 3 \\ 6 \longrightarrow 2 \\ 3 \longrightarrow 1 \\ 1 \longrightarrow \frac{1}{3} \end{array}$$

Il procède à une correction collective rapide et détache sur le tableau le dernier couple :

$$1 \longrightarrow \frac{1}{3}$$

"Comment pourrait-on désigner l'application qui à 1 fait correspondre $\frac{1}{3}$?"

Les enfants répondent spontanément $(x\frac{1}{3})$

$$1 \xrightarrow{(x\frac{1}{3})} \frac{1}{3}$$

Mais il faut alors vérifier s'il s'agit bien de la même application, si elle fonctionne aussi avec les mesures précédentes : 6, 3, 9, ce qui est fait aussitôt par un enfant :

$$9 \xrightarrow{x\frac{1}{3}} \frac{9}{3} = 3$$

$$6 \xrightarrow{x\frac{1}{3}} \frac{6}{3} = 2.$$

On trouve les mêmes images qu'avec l'application (:3)
On peut donc écrire que $(:3) = (x\frac{1}{3})$

Conclusion : L'enseignant dit alors : "Cette application s'appelle :

"diviser par 3"

"multiplier par $\frac{1}{3}$"

Elle peut être désignée de plusieurs manières.

14.4.4. - Autres écritures pour les applications :4 et :2

a) Consigne : "Nous allons essayer de désigner ainsi de plusieur manières d'autres applications. Quels sont les rapetissements que l'on peut faire avec notre pantographe en n'utilisant que les entiers ?

- on peut rapetisser de 4, de 2

Comment peut-on écrire ce que font ces applications ?
Qui saurait trouver plusieurs écritures pour les désigner ?"

.../...

b) Déroulement : Les enfants cherchent un moment individuellement sur leur cahier de brouillon. Chacun met un point d'honneur à trouver une écriture différente. L'enseignant procède vite à une correction collective pour ne pas laisser tomber l'intérêt.
Ce sont des enfants qui viennent à tour de rôle écrire :

Modèle		Image	
4	$\xrightarrow{:4}$	1	l'application est (:4)
1	$\xrightarrow[x\frac{1}{4}]{}$	$\frac{1}{4}$	l'application est x $\frac{1}{4}$

Pourrait-on trouver une autre désignation en remplaçant par exemple la fraction $\frac{1}{4}$ par un décimal.

Les enfants calculent vite de deux manières différentes :

1ère manière (la plus utilisée)

$\frac{1}{4} = \frac{25}{100} = 0{,}25$

2ème manière : par la division

$1 : 4 = 0{,}25$

et on écrit sur le tableau (soit l'enseignant, soit un enfant) :

$1 \xrightarrow{x0{,}25} 0{,}25$ l'application est x0,25.

c) Validation de ces écritures

Consigne : "Nous venons de trouver 3 écritures différentes : (:4) ; ($x\frac{1}{4}$) ; (x0,25)

Il s'agit maintenant de prouver qu'il s'agit bien de la même application. Nous allons donc les faire fonctionner sur d'autres nombres : 2,5 par exemple."

Déroulement : L'enseignant propose aux enfants de se partager la tâche pour aller plus vite : une rangée calcule avec (:4), une autre avec ($x\frac{1}{4}$) et la troisième avec (x 0,25).

Correction : un enfant de chaque rangée vient au tableau :

1°) $1 \xrightarrow{:4} 0{,}625$

2°) $2{,}5 \xrightarrow{x\frac{1}{4}}$

$\frac{25}{10} \xrightarrow{X\frac{1}{4}} \frac{25}{40} = 0{,}625$

3°) $2{,}5 \times 0{,}25 = 0{,}625.$

.../...

Il s'agit donc bien de la même application puisqu'on trouve la même image. On peut donc écrire :

$$(:4) = (\times\frac{1}{4}) = (\times 0,25)$$

Cette égalité est isolée dans un coin du tableau ou sur un autre tableau. L'enseignant procède de la même manière pour <u>le rapetissement de 2</u>.

<u>Modèle</u>		<u>Image</u>		
2	$\xrightarrow{:2}$	1	$\rightarrow$	application $(\times 2)$
1	$\xrightarrow{:2}$ / $\xrightarrow{\times\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2}$	$\rightarrow$	application $(\times\frac{1}{2})$

Mais $\frac{1}{2} = 0,5$ donc

$$1 \xrightarrow[\times 0,5]{:2} 0,5 \rightarrow \text{application } (\times 0,5)$$

<u>Validation</u>

Que signifie donc cette application $(:2)$?

$$7,8 \xrightarrow{:2} 3,9$$

$$7,8 \xrightarrow{\times\frac{1}{2}}$$

$$\frac{78}{10} \xrightarrow{\times\frac{1}{2}} \frac{78}{20} = 3,9$$

$7,8 \times 0,5 = 3,9.$

On peut donc écrire sous l'autre égalité :

$$(:2) = (\times\frac{1}{2}) = (\times 0,5)$$

14.4.5. Autres exemples : généralisation.

<u>a) Consigne</u> : "Si on avait un pantographe qui rapetisse de 5, de 6 ou de 9... pourriez-vous trouver plusieurs désignations pour ces applications ?"

<u>b) Déroulement</u> : Les enfants cherchent sur leur cahier de brouillon. Certains, par analogie, écrivent tout de suite :

$$(:5) = (\times\frac{1}{5}) = (\times 0,2)$$

d'autres sont encore obligés de calculer :

$$5 \xrightarrow{:5} 1$$

$$1 \xrightarrow[\times\frac{1}{5}]{:5} \frac{1}{5}$$

.../...

$$(:6) = (\times\frac{1}{6}) =$$

Ici, ils hésitent car, quand ils font la division 1:6, ils s'aperçoivent qu'elle ne "tombe pas juste !" L'enseignant décide avec eux qu'on écrira :

$$(\frac{1}{6}) = (\times 0,1\underline{6}...).$$

14.4.6. - Utilisation de ces différentes écritures.

L'enseignant organise pour finir, une brève séance de calcul mental. Il écrit sur le tableau l'opération suivante :

$$4 \times 0,25 =$$

et donne 20 secondes pour obtenir le résultat sans poser l'opération.
Les enfants hésitent, commencent mentalement la multiplication et protestent lorsque l'enseignant arrête la recherche au bout de 20 secondes. Un ou deux seulement ont trouvé le résultat. L'enseignant montre les égalités restées écrites sur le tableau : aucun n'a pensé à remplacer (x0,25) par (:4).

$$4 : 4 = 1.$$

Alors, les enfants qui ont tous compris, redemandent au maître de poser d'autres calculs et c'est sur un véritable jeu que se termine l'activité.

$$18 \times 0,5 = ?$$

$$25 \times 0,2 = ? \text{ etc...}$$

14.4.7. - Résultats.

Les enfants savent désigner de différentes manières une même application.

14.5. -APPLICATIONS LINEAIRES RATIONNELLES

14.5.1. - Présentation du problème.

a) Consigne : "quelles sont les applications linéaires entières que l'on peut faire avec notre pantographe ?"

L'enseignant les écrit sur le tableau sous la dictée des enfants

(x2) (x3) (x4)
(:2) (:2) (:4)

"Je prends le pantographe qui agrandit 3 fois. Avec ce pantographe, je dessine l'image d'un modèle. Puis avec le pantographe qui rapetisse 2 fois, je réduis cette première image et j'en obtiens une deuxième.

Sauriez-vous écrire ce que j'ai fait ?"

Les enfants réponsent : "On a multiplié par 3 puis divisé par 2" et l'un d'entre eux est invité à venir écrire sur le tableau ces deux applications successives :

$$\xrightarrow{x3} \qquad \xrightarrow{:2}$$

b) Problème posé : "En combinant ces deux applications linéaires peut-on obtenir une application fractionnaire ou décimale ?"

$$\begin{tikzcd} {} \arrow[r, "x3"] \arrow[rr, bend right, "?"'] & {} \arrow[r, ":2"] & {} \end{tikzcd}$$

c) Déroulement : Il se fait collectivement avec l'enseignant. Les enfants proposent de prendre un nombre et choisissent naturellement 1 (puisque c'est le nombre qui a toujours été privilégié).

L'enseignant écrit :

$$1 \quad \xrightarrow{x3} \qquad \xrightarrow{:2}$$

et il demande à un enfant de venir compléter en marquant les nombres intermédiaires :

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "x3"] \arrow[rr, bend right, "x\frac{3}{2}"'] & 3 \arrow[r, "(:2)", "(x\frac{1}{2})"'] & \frac{3}{2} \end{tikzcd}$$

(:2) est remplacé par $(x\frac{1}{2})$

$\longrightarrow$ l'application est $x\frac{3}{2}$

.../...

L'enseignant écrit donc en conclusion :

$(x3)$ S $(:2) = (x\frac{3}{2}) = (x1{,}5)$ cette dernière écriture étant calculée rapidement par les enfants.

Il est donc possible de remplacer 2 applications linéaires entières par une application linéaire fractionnelle ou décimale.

14.5.2. - Recherche de toutes les applications linéaires rationnelles avec le pantographe

a) Consigne "Cherchez de la même manière tout ce que nous pourrions faire encore avec notre pantographe en combinant toutes les applications entières".

b) Déroulement : Les enfants cherchent un moment sur leur cahier de brouillon. Au bout de 5 minutes, l'enseignant leur demande de venir marquer sur le tableau ce qu'ils ont trouvé. On obtient ainsi une suite d'applications :

$\xrightarrow{x3}\quad\xrightarrow{:3}$

$\xrightarrow{x3}\quad\xrightarrow{:4}$

$\xrightarrow{x2}\quad\xrightarrow{:3}$

$\xrightarrow{x2}\quad\xrightarrow{:2}$

$\xrightarrow{x2}\quad\xrightarrow{:4}$ ainsi de suite.

14.5.3. - Elaboration d'un tableau.

a) L'enseignant propose d'écrire toutes ces possibilités dans un tableau à double entrée afin d'être sûr de n'en oublier aucune et de ne pas marquer 2 fois la même.

.../...

	x 2	x 3	x 4	: 2	: 3	: 4
x 2						
x 3						
x 4						
: 2						
: 3	x $\frac{2}{3}$					
: 4						

Il demande aux enfants de compléter le tableau en vérifiant chaque fois leurs résultats.

La première vérification est faite collectivement :

Exemple : (x2) S (:3)

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "x2"] \arrow[rr, bend right, "(x\frac{2}{3})"'] & 2 \arrow[r, "(:3)=(x\frac{1}{3})"] & \frac{2}{3} \end{tikzcd}$$

b) Déroulement : Les enfants travaillent individuellement. Ils complètent le tableau qu'ils ont tracé sur leur cahier de brouillon et n'écrivent un résultat que lorsqu'ils l'ont vérifié comme précédemment.

Remarques : En complétant le tableau, ils font souvent des remarques à haute voix :

"On ne trouve pas toujours une fraction !"

"On retrouve des choses qu'on avait déjà apprises !"

.../...

(il s'agit par exemple de (x4) S (:2) = (x2) ou d'un calcul du même type qui avait été vu au début de l'année scolaire au cours d'une activité sur les fonctions numériques).

<u>d) Correction</u> : Après 5 à 8 minutes de travail individuel, l'enseignant organise une correction collective. Il envoie des enfants, à tour de rôle, compléter le tableau élaboré par lui-même.

Tout en complétant ce tableau, ils font encore des remarques

$$\left.\begin{array}{l}\text{"si on fait (x4) S (:4)}\\ \quad\text{ou (x3) S (:3)}\end{array}\right\} \text{ c'est comme si on faisait x1 ou :1"}$$

"Si on fait "(x3) S (:2) = x $\frac{3}{2}$ c'est la même chose que si on fait (:2) S (x3) = (x$\frac{3}{2}$).

Ils découvrent ainsi la commutativité des suites d'application.

On vérifie alors que c'est vrai pour tous les cas :

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "x5"] \arrow[rr, bend right, "x\frac{5}{4}"'] & 5 \arrow[r, bend left, ":4 \;\; x\frac{1}{4}"] & \frac{5}{4} \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, bend left, ":4 \;\; x\frac{1}{4}"] \arrow[rr, bend right, "x\frac{5}{4}"'] & \frac{1}{4} \arrow[r, "x5"] & \frac{5}{4} \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, bend left, ":6 \;\; x\frac{1}{6}"] \arrow[rr, bend right, "x\frac{5}{6}"'] & \frac{1}{6} \arrow[r, "x5"] & \frac{5}{6} \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "x5"] \arrow[rr, bend right, "\frac{5}{6}"'] & 5 \arrow[r, bend left, ":6 \;\; x\frac{1}{6}"] & \frac{5}{6} \end{tikzcd}$$

(x5) S (:4) = (:4) S (x5)

(:6) S (x5) = (x5) S (:6) .

Tous les résultats sont ainsi vérifiés et les enfants découvrent et explicitent la règle de composition des applications :

"on peut toujours trouver n'importe quelle application linéaire décimale ou fractionnaire avec des suites de 2 applications entières.

Le nombre multiplié est toujours en haut, le nombre divisé, toujours en bas".

14.5.4. Exercice d'application : les enfants travaillent individuellement sur leur cahier.

Consigne : Trouver l'application rationnelle et décimale quand c'est possible, qui remplace deux applications entières :

Exemple : (x7) S (:2) = $(\text{x}\frac{7}{2})$ = (x3,5)

1) (:5) S (x4) =

(x8) S (:5) =

(x4) S (:5) =

(x12) S (:12) =

(:5) S (x5) =

2) (x5) S (.) = $\text{x}\frac{5}{3}$

(:4) S ( ) = $\text{x}\frac{7}{4}$

( ) S (x2) = $\text{x}\frac{2}{9}$

(.) S (x3) = 1

(:5) S ( ) = 1.

Remarque : Cet exercice peut être corrigé :

- soit tout de suite après s'il reste un peu de temps
- soit au début de la séance suivante.

14.5.5. - Résultats.

Cette activité ne présente aucune difficulté pour les enfants. Tous comprennent et savent faire les exercices individuels. Il faut cependant s'attendre à quelques erreurs qui sont rectifiées lors de la correction.

MODULE 15 :

DECOMPOSITION DES APPLICATIONS RATIONNELLES. IDENTIFICATION DES RATIONNELS ET DES APPLICATIONS LINEAIRES RATIONNELLES

15.1. DECOMPOSITION DES APPLICATIONS RATIONNELLES

15.1.1. - Remarque aux enseignants.

Cette activité se déroule sous forme de questions posées aux enfants. Ces questions sont autant de problèmes ouverts dont les enfants peuvent trouver les solutions en mettant en oeuvre les notions sur les applications et leurs compositions.

15.1.2. - Premier problème "Décomposition d'un agrandissement"

<u>1/ Première question : Consigne</u>

"Je veux faire un agrandissement de $\frac{3}{4}$ (c'est un rapetissement!) mais je n'ai pas de pantographe qui effectue $x\frac{3}{4}$. Est-ce qu'avec nos pantographes, je pourrais réaliser un tel "agrandissement ?"

<u>b) Déroulement</u> : L'enseignant laisse 2 ou 3 minutes aux enfants pour réfléchir et leur demande de marquer sur leur cahier ce qu'ils ont trouvé.

Généralement, ils écrivent :

$\xrightarrow{x3}\ \xrightarrow{:4}$ ou $\xrightarrow{:4}\ \xrightarrow{x3}$

ou simplement (x3) S (:4) ou (:4) S (x3)

Certains aussi ne savent pas écrire ce qu'ils comprennent et s'expriment oralement : "il faut d'abord régler un pantographe qui agrandit de 3 puis un pantographe qui rapetisse de 4".

L'enseignant résume toutes ces réponses en écrivant sur le tableau :

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "x3"] \arrow[rr, bend right, "x\frac{3}{4}"'] & {} \arrow[r, ":4"] & \frac{3}{4} \end{tikzcd} = (:4)\ S\ (x3)$$

et écrit en conclusion : $(x\frac{3}{4})$ = (x3) S (:4) = (:4) S (x3)

.../...

2/ <u>2ème question</u>

a) <u>Consigne :</u> "Je veux réaliser une autre reproduction en utilisant l'application x $\frac{7}{12}$.

Est-ce que ce sera un agrandissement ou un rapetissement ?. Comment la réaliser ?

b) <u>Déroulement</u> : Le déroulement se fait de la même manière que pour la première question.

L'enseignant résume toujours les réponses des enfants en écrivant :

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "x7"] \arrow[rr, bend left, "x\frac{7}{12}"] & \cdot \arrow[r, ":12"] & \cdot \end{tikzcd}$$

ou $(x\frac{7}{12}) = (x7)\ S\ (:12)$.

3/ <u>3ème question</u> : "Si j'écris n'importe quel agrandissement ou rapetissement rationnel, est-ce que l'on pourra toujours le réaliser avec des agrandissements ou des rapetissements entiers ? par exemple le rapetissement $\frac{3}{5}$?"

Même déroulement et l'enseignant marque sur le tableau : $(x\frac{3}{5}) = (x3)S(:5)$

4/ <u>4ème question</u>

a) <u>Consigne</u> "Comment réaliser l'agrandissement x3,47 ? Quels pantographes entiers faudrait-il utiliser ?"

b) <u>Déroulement</u> : Les enfants hésitent un peu mais très vite, ils disent souvent à haute voix dans leur précipitation (alors que l'enseignant leur a demandé d'écrire) : "il n'y a qu'à transformer en fraction !"
et ils marquent : $3{,}67 = \frac{367}{100}$

$$x\ 3{,}67 = x\frac{367}{100}$$

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "x367"'] & \cdot \arrow[r, ":100"'] & \cdot \end{tikzcd}$$

Pour tous les enfants qui ont trouvé très vite, l'enseignant propose de chercher pour 1,5.

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "x15"'] \arrow[rr, bend left, "x1{,}5"] & \cdot \arrow[r, ":10"'] & \cdot \end{tikzcd} \qquad 1{,}5 = \frac{15}{10}$$

.../...

c) Au cours d'une correction collective, les enfants viennent au tableau écrire ces deux dernières décompositions.

15.1.3. Deuxième problème : décomposition de la réciproque

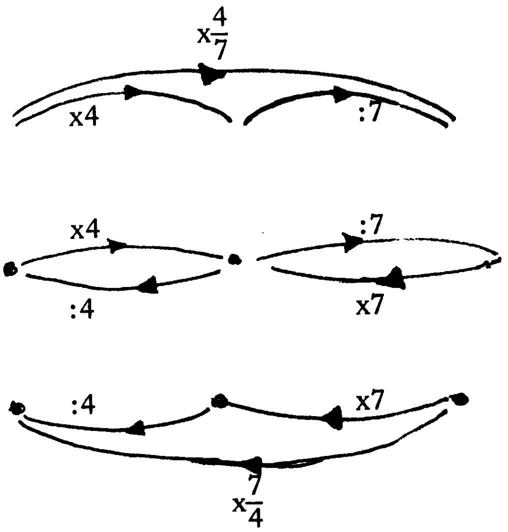
a) Consigne : "Pour passer d'un modèle à son image, j'ai utilisé le pantographe $\times\frac{4}{7}$

1°) Donnez la décomposition de l'application linéaire $\times\frac{4}{7}$ en applications linéaires entières (comment la réaliser avec nos pantographes ?)

2°) Comment réaliser l'application réciproque avec les pantographes entiers (comment passer des images aux modèles ?)

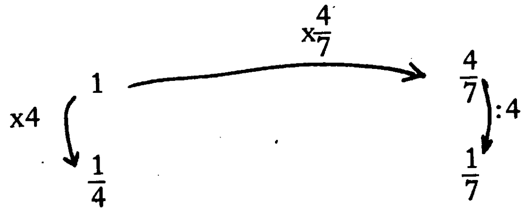
3°) Par quelle application linéaire peut-on remplacer la composée des deux pantographes réciproques ? Est-ce bien l'applicatrion réciproque de $\times\frac{4}{7}$?"

b) Déroulement : Les élèves proposent :



L'enseignant fait rappeler comment on procédait jusqu'à maintenant pour trouver l'application réciproque:

1ère étape :



...</...

2ème étape :

$$\begin{tikzcd} \frac{1}{4} \arrow[r, "\times\frac{4}{7}"] \arrow[d, bend right, "\times 7"'] & \frac{1}{7} \arrow[d, "\times 7"] \\ \frac{7}{4} \arrow[r, "\times\frac{4}{7}"] & \frac{7}{7} = 1 \end{tikzcd}$$

3ème étape :

$$\begin{tikzcd} \frac{7}{4} & 1 \arrow[l, "\times\frac{7}{4}"'] \end{tikzcd}$$

La nouvelle méthode est plus rapide et plus simple.

Conclusion : On peut trouver la réciproque d'une application fractionnaire, en décomposant celle-ci, en prenant les réciproques et en les recomposant.

Une fois encore, on vérifie que la réciproque de $\times\frac{4}{7}$ est $\times\frac{7}{4}$

15.1.4. Calcul de la réciproque d'une proportion

Dans les nombreuses expressions particulières et "concrètes" des applications linéaires, la formulation des questions peut devenir très vite complexe et gêner les élèves. Il est utile de leur apprendre à reconnaître et à se servir du "modèle théorique" pour interpréter les cas peu familiers :

Exemple :

a) Consigne : Voici un texte de problème. Il va vous paraître un peu compliqué. Mais en essayant de retrouver les applications linéaires, vous pourrez le comprendre et le résoudre.

"Le café "Kafor" est un mélange d'Arabica et de Robusta. Le café "Kafor" contient les 4/7 de son poids en café Arabica.
Quel poids d'Arabica faut-il pour faire 28 kg de Kafor ?
Quelle application permet de calculer les quantités de "Kafor" obtenues en utilisant divers poids d'Arabica ?"

b) Déroulement : L'enseignant aide les enfants à utiliser le modèle des applications linéaires et du pantographe pour traduire cet énoncé.

La difficulté provient en partie de ce qu'il faut :
- d'abord utiliser la situation additive suivante :
Poids d'Arabica + Poids de Robusta = Poids de "Kafor"
- puis, la reconnaître invariante dans un ensemble de possibilités multiplicatives :

.../...

3 fois plus d'Arabica + 3 fois plus de Robusta = 3 fois plus de "Kafor",

2 fois plus d'Arabica + 2 fois plus de Robusta = 2 fois plus de "Kafor", etc...

- quantifier les proportions en complétant avec la valeur non donnée dans l'énoncé : $\frac{3}{7}$ de Robusta :

$$\text{soit } \frac{4}{7} + \frac{3}{7} = \frac{7}{7} = 1$$

soit 4 kg + 3 kg = 7 kg.

- choisir de comparer deux seulement de ces trois quantités,
  . l'une étant connue (à gauche du tableau)
  . l'autre étant celle que l'on cherche (à droite du tableau)
- Reconnaître l'application linéaire qui les relie et pour cela, échapper au modèle additif

Poids de "Kafor" $\xrightarrow[\times\frac{4}{7}]{}$ Poids d'Arabica

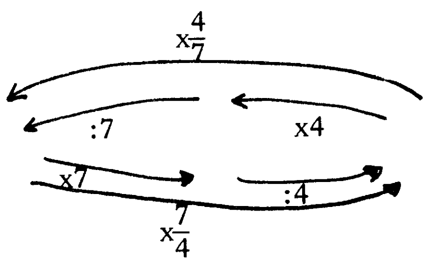
Cette traduction faite, la première réponse est évidente pour les enfants :

Poids de "Kafor"	$\times\frac{4}{7}$	Poids d'Arabica
28	$\longrightarrow$	16

La deuxième question conduit à chercher l'application réciproque. Le problème reconnu, la solution devient facile.

Poids d'Arabica $\xleftarrow{\times\frac{4}{7}}$ Poids de "Kafor"

Poids d'Arabica $\xrightarrow{?}$ Poids de "Kafor"



Certains enfants peuvent contrôler leur raisonnement en prenant des quantités effectives et en envisageant les transformations qu'elles subissent.

La troisième question est évidente, à ce moment-là, pour eux.

.../...

15.1.5. Décomposition de l'application (x1) : application inverse

Voici une application : quelle est-elle ?

$$3 \longrightarrow 3$$
$$2{,}5 \longrightarrow 2{,}5$$
$$\frac{4}{7} \longrightarrow \frac{4}{7} \quad \text{etc...}$$

C'est l'application (x1). Peut-on la décomposer ?

<u>1ère réaction des enfants</u> : "non, on ne peut pas !"
"<u>L'enseignant</u>" : "Peut-on trouver deux applications successives que l'on peut remplacer par (x1) ?"

<u>2ème réaction</u> : "On a vu que (x3) S (:3) = (x1)
On agrandit d'abord de 3 puis on rapetisse de 3, oui, on peut décomposer (x1)...

$$\begin{tikzcd} {} \arrow[r, "x3"] \arrow[rr, bend right, "x1"'] & {} \arrow[r, ":3"] & {} \end{tikzcd}$$

<u>L'enseignant</u> : "Vous pourriez trouver ainsi beaucoup d'autres décompositions. Mais voici un petit problème :
on a agrandi un modèle en le multipliant par $\frac{7}{4}$. Ensuite, on a composé cette application avec une seconde, de sorte que l'application composée des deux est (x1). Quelle est la seconde application ?

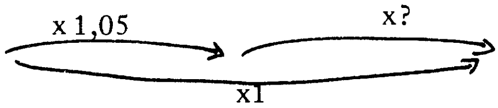
$$\begin{tikzcd} {} \arrow[r, "x\frac{7}{4}"] \arrow[rr, bend right, "x1"'] & {} \arrow[r, "?"] & {} \end{tikzcd}$$

<u>Exemple de problème de cette sorte</u> :

"On observe une augmentation de 5 % du nombre d'accidents par rapport à l'année précédente. Quel devrait être pour cette année la diminution qui ramènerait le nombre d'accidents à sa valeur d'il y a deux ans ?"

L'enseignant dit aux élèves qu'une augmentation de 0 % correspond à une application de x1 et qu'une augmentation de 5 % correspond à une application de (x1,05)

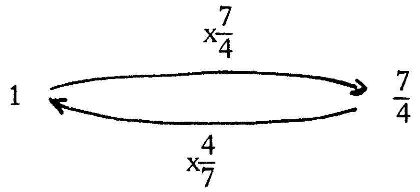
.../...



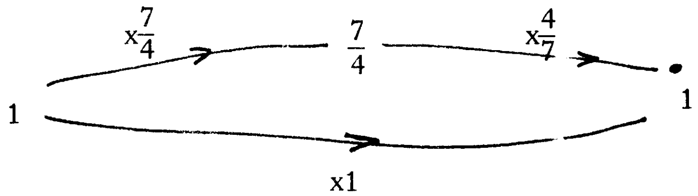
Déroulement :

1ère méthode : Certains élèves peuvent avoir l'idée que l'application cherchée est la réciproque de la première. Mais pour la plupart, cette idée, même explicitée, reste incompréhensible dans un premier temps.

puique

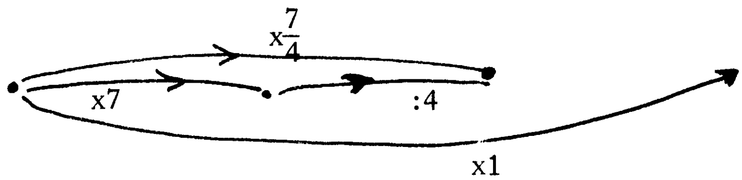


alors



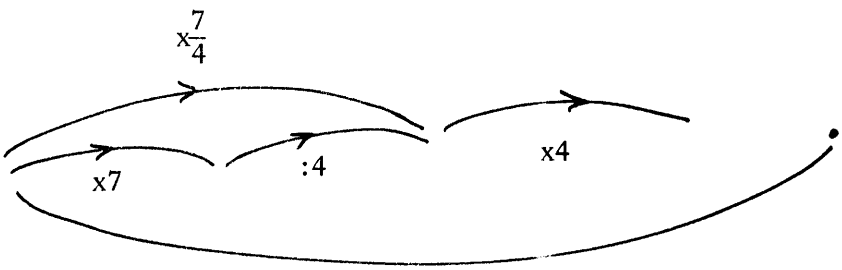
$$(x\frac{7}{4})\ S\ (x\frac{4}{7}) = (x1)$$

2ème méthode :

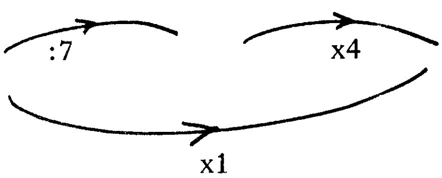


L'idée consiste à "défaire" ce que la première application a fait.

d'abord

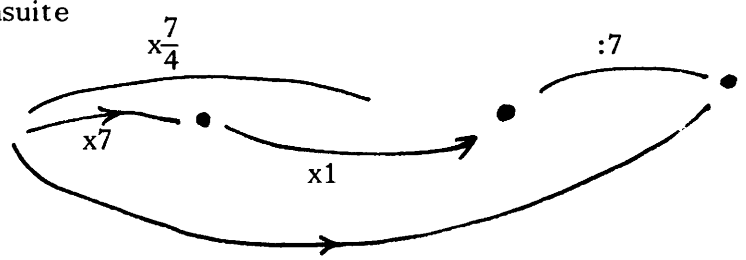


parce que

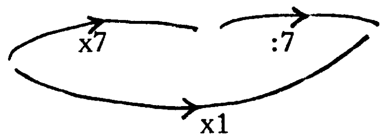


.../...

ensuite



car



Pour le problème de l'augmentation des accidents, l'enseignant demande des anticipations avant d'examiner la solution.

Beaucoup d'élèves pensent que c'est une diminution de 5 % qui sera nécessaire.

Le calcul de l'application inverse de (x 1,05) donne : 0,9524. Autrement dit, la diminution est voisine de 4,76 %.

Surprise des élèves ! Puis explication :

"Le pourcentage des diminutions évalue le même nombre mais porte sur un nombre plus grand que celui du pourcentage des augmentations".

15.1.6. Réciproque et inverse.

L'application inverse d'une application est celle qui, composée avec elle, est égale à (x1)

Remarque : L'inverse d'une application linéaire est sa réciproque.

Exercice : Que fait l'application x$\frac{11}{3}$? (Agrandit-elle ou rapetisse-t-elle ?)

Trouver son inverse. Que fait-elle ?

Si une application agrandit, est-ce que son inverse rapetisse toujours ?

.../...

15.1.7 : Résultat.

Les élèves se familiarisent avec un vocabulaire et des situations nouvelles. Pour beaucoup d'entre eux, le maniement des compositions d'applications linéaires paraît assez facile mais risque de devenir formel et d'échapper trop vite au contrôle que les enfants doivent exercer en vérifiant le sens.

Il ne s'agit donc pas, pour l'instant, pour le maître, d'institutionnaliser ces nouveaux modes de calculs et encore moins d'en exiger la reproduction mécanique.

15.2. LE SENS DE "DIVISER PAR UNE FRACTION"
(Décomposition des applications inverses)

15.2.1. Recherche d'énoncés de problèmes

a) Consigne : "Sauriez-vous trouver des significations à l'opération :

$$4 : \frac{3}{5} \quad ?$$

On peut en retrouver des anciennes puis en inventer des nouvelles comme dans le concours d'énoncés".

b) Déroulement :

Première phase : recherche d'énoncés.

L'enseignant laisse quelques minutes aux enfants pour trouver des énoncés qu'ils écrivent sur leur cahier de brouillon.

Il s'agit, d'une part, de rappeler rapidement les types de représentations identifiées au cours du module 12, mais en les appliquant à une division par un rationnel,

d'autre part, d'y joindre des interprétations nouvelles en termes de composition d'application.

Deuxième phase : recueil des énoncés par le maître.

L'enseignant commence un inventaire rapide des réponses des élèves (sans demander d'explications). Il cherche à obtenir des réponses de divers types et le cas échéant en ajoute (comme par exemple les énoncés 3-5 et 6).

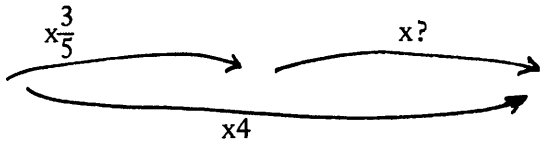
Enoncé 1 : On partage 4 m de ruban en parts de $\frac{3}{5}$ m. Combien de parts ?

Enoncé 2 : On achète $\frac{3}{5}$ m de ruban que l'on paie 4 F. Quel est le prix du mètre ?

Enoncé 3 : Un tapis de 4 m^2 a une largeur de $\frac{3}{5}$ m. Quelle est sa longueur ?

.../...

<u>Enoncé 4</u> : Avec un pantographe, on a obtenu une image qui est les $\frac{3}{5}$ de son modèle et on veut obrenir, à partir de cette image, une autre image agrandie qui soit 4 fois plus grande que la première image. Quel pantographe faut-il choisir ?



<u>Enoncé 5</u> : Paul mesure la longueur du bureau avec une baguette. Elle entre exactement 4 fois.
Jacques, lui, a pris une baguette qui est exactement les $\frac{3}{5}$ de celle de Paul. Quelle mesure trouvera-t-il pour le bureau ?

<u>Enoncé 6</u> : Une compagnie décide qu'une diminution de 3 % par rapport aux prix affichés le 1er avril doit être appliquée à ses produits le 1er août. Or, un détaillant avait déjà consenti une diminution de 1 % le 1er juin.
Quelle diminution lui reste-t-il à appliquer pour afficher le 1er août le prix fixé par la compagnie ?

L'enseignant ne retient qu'un seul énoncé de chacun "des types" de problèmes reconnus par les élèves.

<u>Troisième phase</u> : Interprétation.

Chaque énoncé peut être compris de plusieurs manières selon les rôles mathématiques que l'enfant attribue implicitement aux données. Ces interprétations se manifestent :
- par la possibilité, pour l'élève, d'envisager la variation des différentes données
- et par les schémas correspondants.

Cependant, certains énoncés favorisent certaines interprétations. L'enseignant développe le sens de la division en faisant essayer de reformuler toutes les interprétations possibles pour chacun d'eux.

15.2.2. Différentes interprétations des énoncés de problèmes.

1/ <u>Interprétation de la valeur cherchée comme un rapport de mesure.</u>

a) L'élève qui interprète le partage directement comme un opérateur

.../...

"diviser par un nombre inconnu" (nombre de parts) peut représenter son idée par le schéma suivant : cas de l'énoncé n° 1

$$4\text{ m} \xrightarrow[\qquad\qquad]{:\ ?} \frac{3}{5}\text{ m} \quad \text{valeur d'une part}$$

Il peut ainsi envisager facilement la variation linéaire de la longueur totale du ruban (4 m, 2 fois 4 m, 4 m + 2 m, 4 m et un peu plus, etc...) et la variation correspondante de la longueur des portions ($\frac{3}{5}$ de m, 2 fois $\frac{3}{5}$ de m, $\frac{3}{5}$ + $\frac{1}{2}$ fois $\frac{3}{5}$, $\frac{3}{5}$ et un peu plus, etc...).
Par contre, la variation du résultat cherché est beaucoup plus difficile à envisager car il s'agit d'une "application linéaire", son environnement numérique est presque absent.

La solution suggérée par cette interprétation fait souvent appel à l'application réciproque : Si 4 divisé par un nombre donne $\frac{3}{5}$, alors $\frac{3}{5}$ multiplié par ce même nombre donne 4.

$$\begin{tikzcd} 4 \arrow[r, shift left, ":?"] & \frac{3}{5} \arrow[l, shift left, "x?"] \end{tikzcd}$$

Mais le mécanisme "point d'arrivée divisé par le point de départ" auquel ils sont habitués (pour aller de a $\longrightarrow$ b, il faut multiplier par $\frac{b}{a}$) donne ici $\dfrac{4}{\frac{3}{5}}$ qui n'a pas reçu de sens.

Alors la solution est souvent la bonne vieille recherche de l'image de 1 :

$$\begin{tikzcd} 4 \arrow[r, bend left, ":"] \arrow[d, "x5"'] & \frac{3}{5} \arrow[l, "x?"] \arrow[d, "x5"] \\ 20 \arrow[d, ":3"'] & 3 \arrow[d, ":3"] \\ \frac{20}{3} & 1 \arrow[l] \end{tikzcd}$$

.../...

Elle est formulée ainsi :
"Si je partage un ruban 5 fois plus long mais que je fasse des parts 5 fois plus grandes le nombre de parts (le rapport) ne change pas.

La décomposition des rapports, très utilisée dans l'étude des applications linéaires pour définir les rapports fractionnaires, (pour "passer" de 3 à 4, on divise par 3 puis on multiplie par 4) ne peut pas être utilisée directement. Mais de nombreux élèves ont remarqué l'identité de traitements et de raisonnements entre les naturels et les fractions. En les sollicitant, au besoin, on peut obtenir la décomposition :

$\frac{3}{5} \xrightarrow{?} 1 \longrightarrow 4$ puis $\frac{3}{5} \longrightarrow 1 \xrightarrow{x4} 4$ puis $\frac{3}{5} \xrightarrow{x\,5} 3 \xrightarrow{:3} 1 \xrightarrow{x4} 4$ et enfin $\frac{3}{5} \xrightarrow{\frac{(x5)\ x\ 4}{3}} 4$

c) Les différents énoncés ne se prêtent pas également à interpréter le nombre cherché comme rapport. Le n° 1 s'y prête parce que le fait d'interprêter les deux données dans une même grandeur induit l'idée de rapport scalaire.
Le n° 2 et le n° 3 excluent l'idée de rapport scalaire. L'idée ancienne de rapports entre grandeurs différentes que nous interprétons ici en termes d'application linéaire apparaîtrait mieux ; elle entraîne des solutions du type a).
Les énoncés n° 4, 5 et 6 peuvent se formuler en terme de rapports scalaires et conduire à des solutions comme ci-dessus, mais l'interprétation suggérée par le cours est celle d'applications linéaires, plus proche des manipulations effectives.

2/ Interprétation de la valeur cherchée comme grandeur.

Par exemple dans l'énoncé n° 2, le prix du mètre est une grandeur dont l'élève envisage les variations, qui entrainent des variations du prix total, la longueur achetée étant déterminée [on cherche un magasin parmi plusieurs, qui propose le ruban à un prix total inférieur à un prix donné]

Prix total		Prix au mètre
4	$\xrightarrow{:\frac{3}{5}}$	?

.../...

Dans l'énoncé n° 3, la longueur est la grandeur cherchée :

$$\begin{array}{ccc} \text{surface} & \text{longueur} & \text{largeur} \\ 4 & \xrightarrow{\;:\frac{3}{5}\;} & ? \end{array}$$

a) Le schéma qui apparaît alors est donc :

$$4 \xrightarrow{\quad :\frac{3}{5} \quad}$$

Cette interprétation fournit des solutions assez comparables aux solutions précédentes si les élèves savent manipuler les applications "divisé par" par exemple :

$$\begin{array}{rcccl}
 & 4 & \xrightarrow{\quad :\frac{3}{5} \quad} & ? & \\
 & \frac{3}{5} & \xrightarrow{\quad :\frac{3}{5} \quad} & 1 & \\
x5 & \downarrow & & \downarrow & x5 \\
 & 3 & \xrightarrow{\quad :\frac{3}{5} \quad} & 5 & \\
:3 & \downarrow & & \downarrow & :3 \\
 & 1 & \xrightarrow{\quad :\frac{3}{5} \quad} & \frac{5}{3} & \\
x4 & \downarrow & & \downarrow & x4 \\
 & 4 & \xrightarrow{\quad :\frac{3}{5} \quad} & 4 \times \frac{5}{3} = \frac{20}{3} &
\end{array}$$

Dans l'énoncé n° 1 ce schéma apparaît si l'élève interprète la valeur cherchée comme le résultat d'une opération à appliquer aux données. Il peut concevoir alors des variations de la longueur totale et des variations du nombre de parts, la longueur des parts restant fixe : $\frac{3}{5}$ le m.

b) Le module précédent conduit à envisager l'application réciproque, soit dans la conception précédente pour obtenir une réponse plus rapide

$$4 \underset{\frac{3}{5}}{\overset{:\frac{3}{5}}{\rightleftarrows}}$$

et se ramener aux cas mieux connus d'applications linéaires multiplicatives.

.../...

Soit directement :

$$4 \xleftarrow{\times\frac{3}{5}} \qquad$$

en disant 4 $:\frac{3}{5}$ c'est la grandeur qui, multipliée par $\frac{3}{5}$ (donne) est 4.

c) Cette solution est un peu "contradictoire" avec l'idée qui active le schéma primitif et qui veut que la valeur cherchée soit le résultat d'une opération. A moins que ne soit utilisée immédiatement l'observation sur les applications réciproques.

$$\begin{tikzcd} 4 \arrow[r, bend right, "\times\frac{5}{3}"'] & \bullet \arrow[l, bend right, "\times\frac{3}{5}"'] \end{tikzcd}$$

qui donne aussitôt la solution.

d) Le fait de considérer comme une application linéaire le terme connu du produit permet aussi d'en envisager la décomposition.

$$\begin{tikzcd} 4 \arrow[r, bend left, ":\frac{3}{5}"] & \bullet \arrow[l, bend left, "\times\frac{3}{5}"] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} 4 \arrow[rr, bend left, dash, ":\frac{3}{5}"] & \cdot \arrow[l, bend left, ":5"] & \bullet \arrow[l, bend left, "\times 3"] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} 4 \arrow[r, bend left, ":3"'] & \underset{20}{\bullet} \arrow[r, bend left, "\times 5"'] & \bullet \end{tikzcd}$$

Cette décomposition peut être soutenue par des "raisonnements" du genre "fausse position" qui, en fait, utilise les arguments linéaires vus plus haut.

Si je partage 4 en parts de 1, j'en trouve 4
Si je partage 4 en parts de $\frac{1}{5}$ j'en trouve 5 fois plus
Si je partage 4 en parts de $\frac{3}{5}$ j'en trouve3 fois moins

Ce raisonnement conduit au schéma :

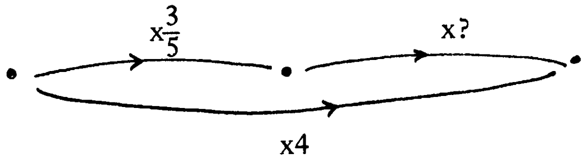
$$1 \xrightarrow{\times 4} 4 \xrightarrow{\times 5} 20 \xrightarrow{:3} 20/3$$

.../...

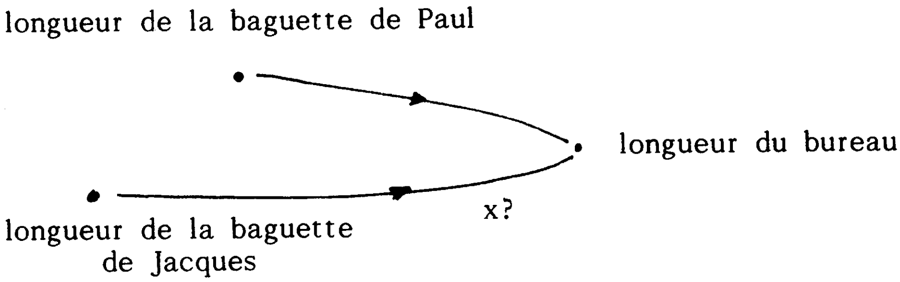
Remarquons que, si formellement ce calcul coïncide avec celui du 1 a ci-dessus, les concepts mobilisés par les raisonnements sont assez différents. Les élèves doivent, tantôt traduire en schéma ce qu'ils conçoivent, formulent et calculent d'abord, tantôt, comme ici, appliquer d'abord des théorèmes formels pour calculer. Mais, dans ce cas le maître leur demande de formuler une explication - ou même plusieurs. Ces schémas ne sont que des moyens d'expression, pas une fin en soi !

3/ <u>Interprétation de la grandeur cherchée comme application linéaire composante inconnue d'une autre (homogénéisation implicite des rationnels).</u>

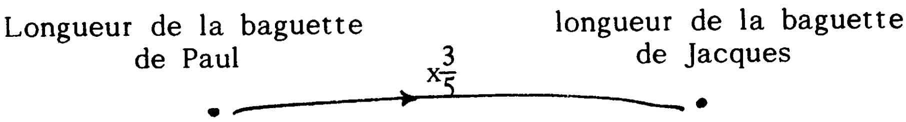
a) L'énoncé 4 conduit assez directement à un schéma du genre :



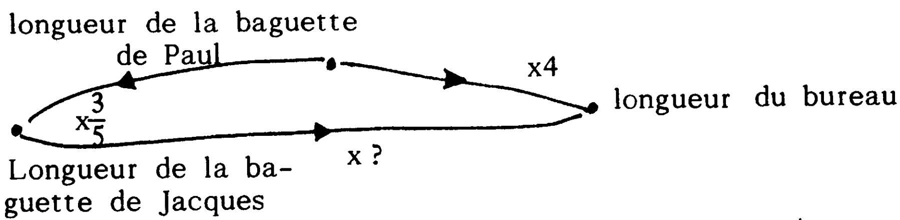
Il faut un peu plus d'efforts pour interpréter l'énoncé 5



que l'énoncé n° 4, à cause de la symétrie des activités de Jacques et de Paul et du fait que la succession des opération n'est plus assurée.

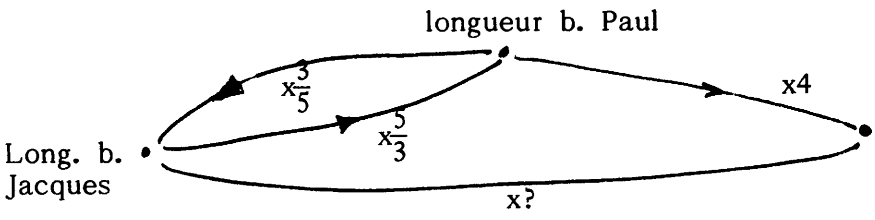


On obtient donc :



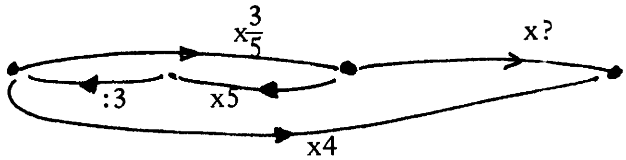
.../...

mais si la mise en schéma est plus difficile, la solution est peut-être plus évidente (à cause de la symétrie). Il faut inverser l'une des applications et calculer la composée cherchée

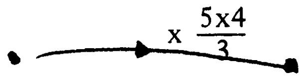


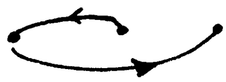
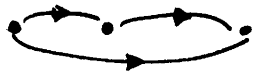
Le traitement assez stéréotypé des schémas que nous avons utilisé jusque là peut faire obstacle à cette étape.

Exemple pour faire (dans l'énoncé 4)

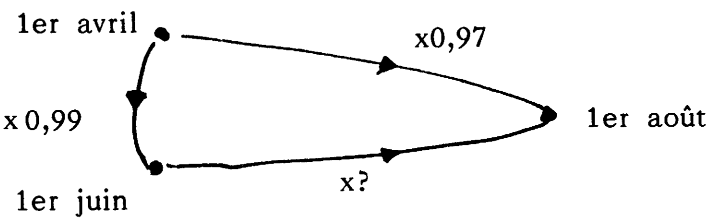


et conclure :



l'élève doit considérer le chemin 
comme équivalent à l'application cherchée alors qu'il n'a jamais considéré que des cas de composition représentés par 

L'énoncé 6, avec la difficulté supplémentaire du passage à l'application donnant les prix, est du même type que le 4 et le 5:



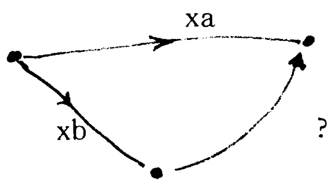
La difficulté serait de mettre les valeurs 4 et $:\frac{3}{5}$ au bon endroit pour obtenir un énoncé comparable aux précédents.

.../...

15.2.3. La composition d'applications linéaires.

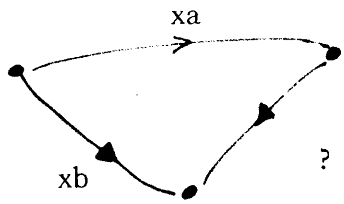
Les énoncés 4, 5 et 6 précédents, introduit par l'enseignant sont l'occasion d'une remarque importante et d'une nouvelle recherche de problèmes "semblables"

a) * Un énoncé de problème a conduit au schéma suivant

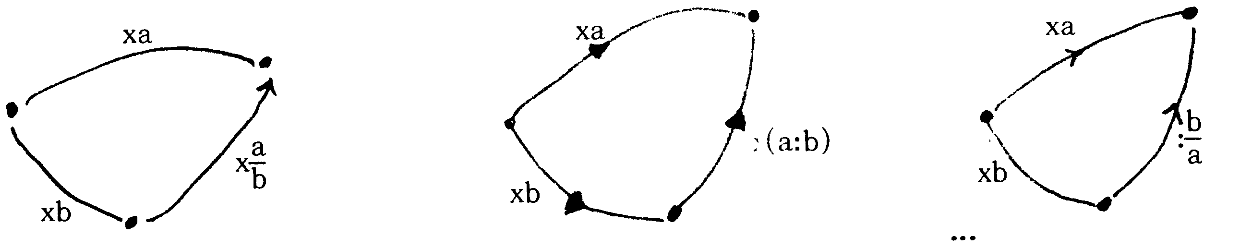


Comment calculer l'application cherchée : a et b peuvent-ils être des naturels ? des rationnels ?

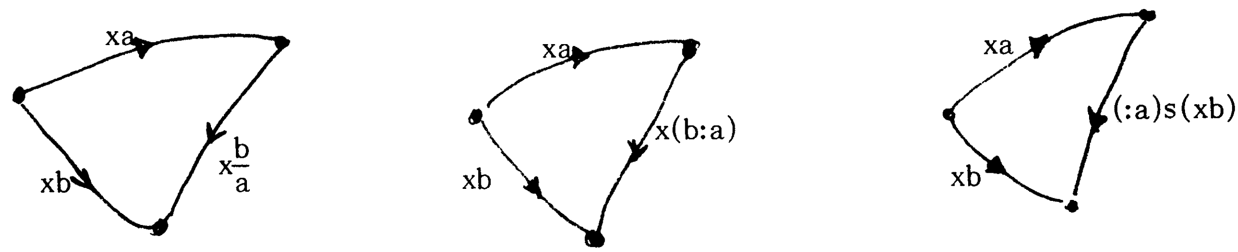
* Même question pour



L'enseignant recense diverses interprétations



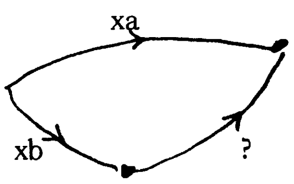
en classant les réponses par rapport à leur inverse



Pour chacune il demande (évidemment) une justification et (éventuellement) un exemple dénoncé, mais il s'agit d'abord de trouver un moyen formel de donner la réponse sous le contrôle de toutes les interprétations qu'on connaît.

.../...

Exemple :

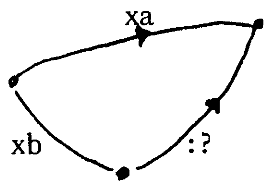


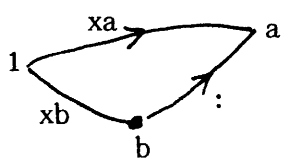
L'opérateur cherché est :

- ce qui est multiplié par b donne a $\frac{a}{b}$
- le résultat de la division de a par b
- la composée de :b suivie de xa

etc...

Exemple :



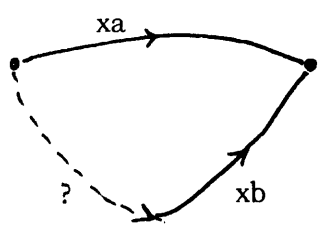


Comment exprimer cette application sous forme d'une division ? Par quel nombre faut-il diviser b pour trouver a ? c'est le nombre par lequel il faut multiplier a pour trouver b.
donc (:a) S (xb) $:\frac{b}{a}$

Les moyens formels peuvent être ceux que nous donnons ci-après mais il y a danger à les institutionnaliser. Ils ne sont ici que des moyens de se rendre compte que tous les calculs sur les rationnesl (naturels compris) obéissent à des règles simples qui ne dépendent pas de la nature des nombres ni de leur fonction mathématique comme application, comme mesure, ou comme rapports.

b) <u>Consigne</u> : recherchez d'autres énoncés fondés sur un schéma différent.

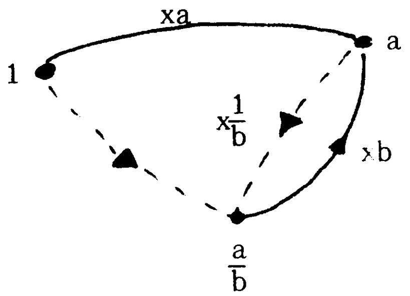
Exemple :



<u>Remarque</u> : Dans les raisonnements sur les compositions d'applications il peut être utile de revenir à la matérialisation des nombres sur lesquels elles opèrent, c'est le plus souvent la valeur 1 qui est la plus commode.

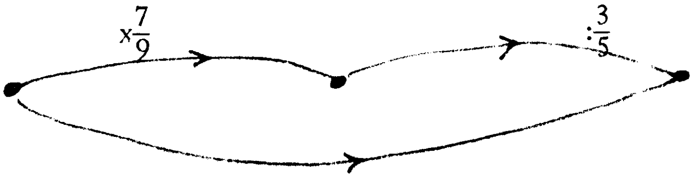
.../...

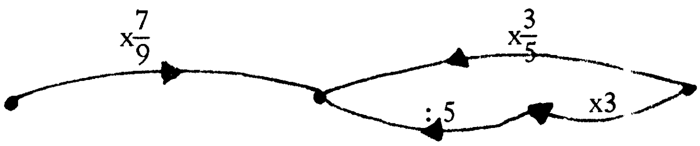
Exemple :

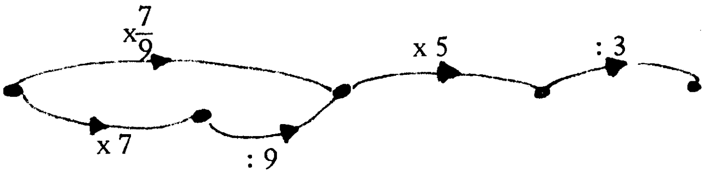


alors $x\frac{a}{b}$

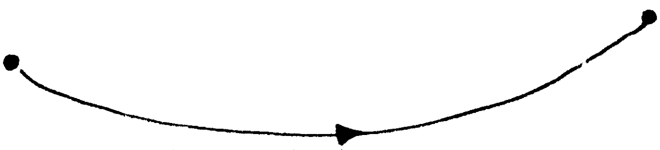
Exercice : Représentez par des applications linéaires $\frac{7}{9}$: $\frac{3}{5}$ et calculez sa composée.



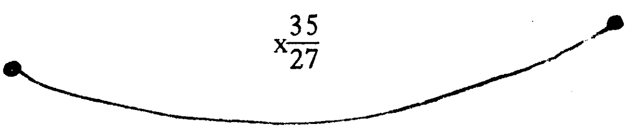




(x7) s (:9) s (x5) s (:3)



(x35) s (:27)



15.3. LA DIVISION DES DECIMAUX

15.3.1. Application du calcul des décimaux

a) Consigne : "Sauriez-vous maintenant trouver une signification de cette division :

1,38 : 4,15
(l'opération est inscrite sur le tableau)

b) Déroulement : Cette phase se déroule comme la précédente:

- D'abord une réflexion des enfants qui font des essais sur leur cahier de brouillon
- Puis, alternativement, des réflexions individuelles et collectives au cours desquelles les propositions sont discutées, adoptées ou rejetées.

L'enseignant fait expliciter le sens de cette division : "il faut trouver l'image de 1,38 en appliquant (: 4,15)" et fait écrire sur le tableau (ou écrit lui-même)

$$1{,}38 \xrightarrow{:4{,}15} ?$$

Les enfants qui sont maintenant bien entrainés à ce genre d'exercice, proposent d'écrire 4,15 en fraction :

$$4{,}15 = \frac{415}{100}.$$

1ère étape : $1{,}38 \xrightarrow{:\frac{415}{100}} ?$

Par référence à l'activité 15.2.1, l'enseignant demande : "par quelle application on pourrait remplacer l'application : $:\frac{415}{100}$?" et écrit cette application sous la dictée d'un enfant (ou la fait écrire)

$$:\frac{415}{100} = \times\,\frac{100}{415}$$

2ème étape :

$$1{,}38 \xrightarrow{\times\frac{100}{415}.} ?$$

.../...

3ème étape :

$$1{,}38 \xrightarrow{x100} \quad \xrightarrow{:415} \qquad \left(x\frac{100}{415}\right)$$

$$1{,}38 \xrightarrow{x100} 138 \xrightarrow{:415} \frac{138}{415} \qquad \left(x\frac{100}{415}\right)$$

Les enfants calculent $\frac{138}{415}$ sur leur cahier de brouillon

$$1{,}38 \xrightarrow{x100} 138 \xrightarrow{:415} 0{,}332... \qquad \left(:\frac{415}{100} \text{ ou } x\ \frac{100}{415}\right)$$

15.3.2. Conclusions et mise en place de l'algorithme

L'enseignant demande quels calculs il a fallu faire pour trouver 1,38 : 4,15. "il a fallu d'abord multiplier 1,38 par 100 (138) puis on a divisé 138 par 415".

Il écrit sur le tableau :

		0 , 3 3 2
4, 1 5	1 , 3 8	0
	1 3	5 0
	1	0 5 0
		2 2 0

	0	3 3 2
4 1 5	1 3 8	0
	- 1 2 4	5
	1 3	5 0
	1 2	4 5
	1	0 5 0
		2 2 0

L'enseignant attire l'attention des enfants sur cette nouvelle "division" dont le sens est différent de ceux qu'ils connaissent déjà (voir modules 12 et 13) et qu'ils peuvent maintenant calculer rapidement quels que soient les nombres (sans faire de soustractions successives ou de tâtonnements pour trouver des encadrements avec des produits).

.../...

15.3.3. Exercices proposés.

Calculer 25,75 : 1,25
1,38 : 2,1

Il est souvent nécessaire pour les premiers exemples de reprendre toutes les étapes précédentes :

$$25{,}75 : \frac{125}{100} = 25{,}75 \times \frac{100}{125}\ldots$$

mais assez rapidement, les enfants utilisent directement (et de manière spontanée) l'application multiplicative égale :

Par exemple $\times \frac{100}{25}$ à la place de $(: \frac{25}{100})$
$(\times \frac{10}{21})$ à la place de $(:\frac{21}{10})$ (:2,1)
$(\times \frac{1000}{48})$ à la place de $(:\frac{48}{1000})$ (:0,048) etc...

Ils se rendent compte alors qu'il suffit de multiplier <u>le diviseur</u> et le dividende par 10, 100, 1000... de manière à ce que le diviseur soit un naturel.

Cette dernière remarque devra être très vite institutionnalisée par le maître afin de permettre aux enfants de calculer le plus rapidement possible.

15.3.4. Résultats.

Les enfants ont découvert un nouveau sens de la division et appris l'algorithme.

Bien entendu, il faudra faire encore beaucoup d'exercices pour que tous les cas possibles de divisions soient rencontrés et maîtrisés :

- autant de chiffres après la virgule au D qu'au d (25,75 : 1,25)
- plus de chiffres après la virgule au D qu'au d (1,38 : 2,1)
- plus de chiffres après la virgule au d qu'au D (45,8 : 25,475)
- D naturel, diviseur décimal (475 : 1,78).

Ces exercices se présenteront :
- soit sous forme systématique : opérations à résoudre
- soit sous forme de problèmes de divisions (voir chapitre suivant).

Les élèves peuvent exprimer tous les calculs sur les fractions ou sur les naturels en termes d'application linéaire même avec le formalisme classique. Ce savoir n'est pas institutionnalisé. Certains élèves l'ont dit, beaucoup en sont persuadés, mais ils ne sauraient pas le soutenir ni le prouver et encore moins l'utiliser pour organiser une introduction axiomatique de $\mathcal{L}$ et de $\mathcal{D}$ comme celle qui pourrait être introduite maintenant en 4ème. Il reste aussi à se débarrasser des schémas qui ne servent que d'intermédiaires (fugaces) dans la mise en équation mais ne sont pas l'objet d'une théorisation quelconque.

.../...

15.4. LA DIVISION DE DEUX DECIMAUX : EXERCICES

Ces exercices ne sont que quelques exemples choisis en fonction de ce que le maître veut faire acquérir aux enfants et à l'entraînement qu'il souhaite donner (ce sont les différents cas de division énumérés dans le paragraphe 15.2.6).

15.4.1. Quelques divisions que les enfants peuvent résoudre.

1,75 : 4,15
25,75 : 1,2
15,5 : 3,75
7,45 : 10,5
145,2 : 78,4
725 : 30,5...

Avant de résoudre ces divisions, l'enseignant leur fait rappeler les calculs qu'ils avaient été amenés à faire.

Exemple : 1,75 : 4,15. Il faut d'abord multiplier
1,75 par 100 (175) puis on divise par 415.

Autrement dit, pour résumer, on transforme de cette manière :

1,75 : 4,15 = 175 : 415
25,75 : 1,2 = 257,5 : 12
ou 2575 : 120 etc...

15.4.2. Quelques exercices d'application

1°) J'ai acheté des yaourts à 1,35 F. l'un. J'ai payé 8,10 F. Combien ai-je eu de yaourts ?

Pour résoudre ce genre d'exercice, l'enseignant fait désigner l'application directe, puis sa réciproque.

nombre de yaourts	Prix (en francs)
1	1,35
□	8,10

x 1,35
: 1,35

2°) 2,5 litres de vin valent 9,75 F. Quel est le prix d'un litre ?

Quantité en litres	Prix (en francs)
2,5	9,75
1	?

Dans ce cas, les enfants peuvent utiliser 2 stratégies :

- ou bien ils cherchent l'application, qui, à 2,5 fait correspondre 9,75.

$$2{,}5 \xrightarrow{\;?\;} 9{,}75$$

$$\text{x } (9{,}75:2{,}5)$$

$$1 \longrightarrow$$

- ou bien ils passent de 2,5 l à 1 l.

$$:2{,}5 \quad \begin{array}{lcl} 2{,}5 & \text{———————} & 9{,}75 \\ 1 & \text{———————} & ? \end{array} \quad :2{,}5$$

9,75 : 2,5 = 97,5 : 25 = 975 : 250.

3°) Un rôti de boeuf coûte 130,05 F. Sachant qu'un kg de ce rôti coûte 76,5 F. quel est son poids ?

Poids (en kg)	Prix (en francs)
1	76,5
$\square$	130,05

$$1 \xrightarrow{\text{x } 76{,}5} 76{,}5 \qquad \square \xleftarrow{:\ 76{,}5} 130{,}05$$

Les enfants désigent l'application directe, puis sa réciproque :76,5.

4°) Un sac contenant 3,5 kg de pommes de terre est vendu 9,80 F. Quel est le prix d'un kilo de ces pommes de terre. Combien sera vendu un sac de ces mêmes pommes de terre pesant 50 kg ?

5°) Un directeur d'école dispose de 312 F. pour acheter des livres de bibliothèque qui valent 18,50 F. l'un. Combien, au plus, peut-il acheter de livres ? S'il n'utilise pas tout l'argent, combien lui restera-t-il ?

.../...

Ce ne sont que quelques exemples très classiques de problèmes auxquels on peut ajouter, évidemment, des énoncés portant sur les surfaces (calcul d'une dimension, connaissant la surface et l'autre dimension, par exemple pour le rectangle), sur les volumes...

On peut trouver ce type de problèmes dans tous les manuels de cours moyen.

COMPOSITIONS TRIMESTRIELLES

et

CONTROLES DE FIN D'ANNEE

COMPOSITION 2ème TRIMESTRE

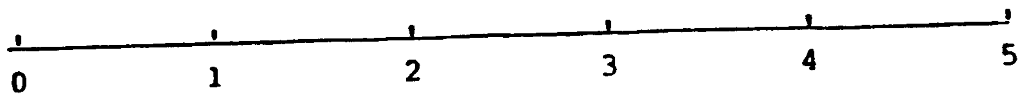
Première partie

1) Ecrire 2 fractions égales à 15/25 = =

2) Ecrire sous forme décimales : 0,027 =
3,08 =
27,4 =

3) Donner une écriture à virgule de : 4/100 =
280/50 =
17/20 =
500/100 =

4) Placer les fractions suivantes sur la droite :
7/10 ; 350/100 ; 95/50 ; 9/25



5) Décomposer les nombres comme sur l'exemple :

27,34 = 20 + 7 + 3/10 + 4/100

179,456 =

0,105 =

6) Encadrer chaque fraction par deux entiers "consécutif"

exemple : $1 < 15/10 < 2$

$< 312/100 <$

$< 37/5 <$

$< 25/7 <$

Deuxième partie

1. Effectue les calculs suivants :

   7 + 21,05 + 0,842 =

   567 - 14,03 =

   0,25 x 3000 =

2. Dans un récipient de 35 litres, on a versé successivement 12,35 litres ; 9 litres ; 5,475 litres.

   Combien de litres faut-il ajouter pour finir de le remplir ?

3. Pendant les vacances de février, j'ai acheté 18 cartes postales à 1,60 Francs chacune.

   Pour les expédier, j'ai acheté les timbres :
   sur 12 cartes, j'ai mis un timbre à 2,10 francs ;
   sur les autres, j'ai mis un timbre à 1,70 francs.

   Combien ai-je dépensé en tout ?
   Pour payer, j'ai donné 1 billet de 100 francs, combien m'a-t-on rendu ?

COMPOSITION 3ème TRIMESTRE

Première partie

1 Effectue :

7 029,5 + 834 + 7,956 = ...

3 408,6 - 979,675 = ...

549 x 60,45 =...................

Encadre les fractions suivantes entre deux décimaux au 1/100 près

..... < 53/87 < .....

..... < 1409/275< .....

2 Les 3 côtés d'un triangle quelconque ont pour mesure :

5,7 cm

2,8 cm

3,5 cm

Reproduis ce triangle en l'agrandissant de telle sorte qu'à 4 cm corresponde 10 cm.

Pour cela,

- Calcule les nouvelles mesures.
- Dessine le triangle.

Deuxième partie

1 La lieue marine est une ancienne mesure de longueur correspondant à une longueur de 5,5 km.
Jules Verne, dans un de ses romans, a imaginé qu'un sous-marin, "le Nautilus", avait parcouru "20 000 lieues sous les mers".
Quelle distance, en km, aurait parcourue le "Nautilus" ?

2 Une personne a 2 possibilités pour effectuer un déplacement de 400 kilomètres :

- soit en chemin de fer, à raison de 0,38 F. le km
- soit en louant une voiture dont la location s'élève à 95 F. et qui consomme 9 litres d'essence aux 100 km., le prix du litre étant 4,71 F.

1°) Trouve le prix de revient correspondant à chacune des possibilités.

2°) Quel est le moyen de transport le plus économique ?

FICHE 1

CONTROLE D'ACQUISITIONS SCOLAIRES

C M 2 ANNEE 1984-1985

NOM :.................................... CLASSE :...............

I - CALCUL RAPIDE

1) Complète les opérations :

2,5 x ..... = 250 | 450 x ..... = 4,50

2,75 x ..... = 27,50 | 125 x ..... = 125

2) Ecris le nombre qui manque :

(2 x 100) + (...x 10) + 7 = 247

(5 x 80) + (4 x 15) +.... = 530

3) Sans compter l'opération, encadre le résultat qui convient :

3236 x 58

1 613 721 ; 187 688 ; 15 623 ; 187 684 ; 6 788

II - NUMÉRATION - OPÉRATIONS

1°) Ecris en chiffres :

Sept mille huit cents :..........................

Soixante dix mille trente cinq :..............

Neuf cent trois mille deux :...................

2°) Quel est le nombre entier qui est juste avant 290 000 ?

....

Quel est le nombre entier qui est juste après 79 099 ?

....

3°) Ecris en chiffres :

Quarante huit unités sept dixièmes :................

Douze unités trois centièmes :.....................

Trente cinq centièmes :..............................

FICHE 2

NOM : .... CLASSE :...........

4°) Entoure le plus petit des nombres suivants et mets une croix sous le plus grand

8,709 - 8,09 - 8,079 - 8,90 - 8,097

5°) Entoure pour chacun des nombres suivants le chiffre des dizaines

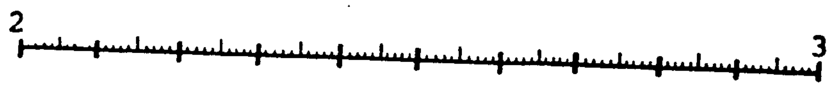
37 - 147,82 - 1,8 - 10 304

6°) Ecris un nombre décimal situé entre 1,2 et 1,3

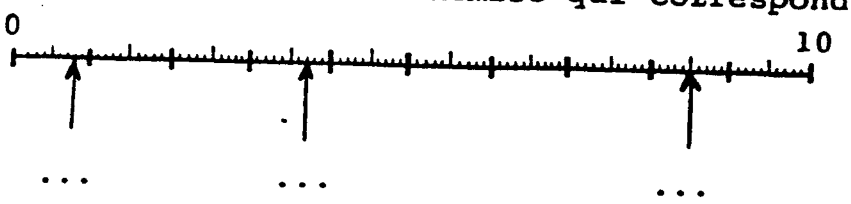
....

7°) Place sur la droite graduée les nombres suivants :

2,2 - 2,63 - 2,04



Place sous chaque flèche le nombre qui correspond



8°) Opérations :

12,04 + 108,974 + 358 =

8 - 7,956 =

2,68 x 30,9 =

148,5 : 33

Calcule le produit de 1985 par 0,75

Calcule le quotient exact de 19,85 par 25

FICHE 3

NOM :....................

CLASSE :..........

A Pierre a 18,55 francs de plus dans son porte-monnaie que Jacques qui a 9,20 francs. Combien possède Pierre ?

B Un casier de 12 bouteilles coûte 56,40 francs. Quel est le prix d'une bouteille ?

C Colette pèse 15,5 kg de moins que sa mère qui pèse 65 kg. Quel est le poids de Colette ?

D A 40 francs le kilo, combien coûte un rôti de 3550 g. ?

E Une classe de 25 élèves va régulièrement à la piscine. Les 3/5 de ces élèves savent nager à la fin.de l'année. Combien cela fait-il d'élèves ?

FICHE 4

NOM :.................................... CLASSE :..........

PROBLEME

Pour acheter des livres de bibliothèque, le directeur d'une école dispose d'une somme de 710 francs. Il achète une série de 18 livres à 16 F. l'un puis une autre série de 24 livres à 13,50 F. l'un. Pourra-t-il acheter d'autres livres à 15 F. l'un ? Si oui, combien ? Lui restera-t-il de l'argent ?

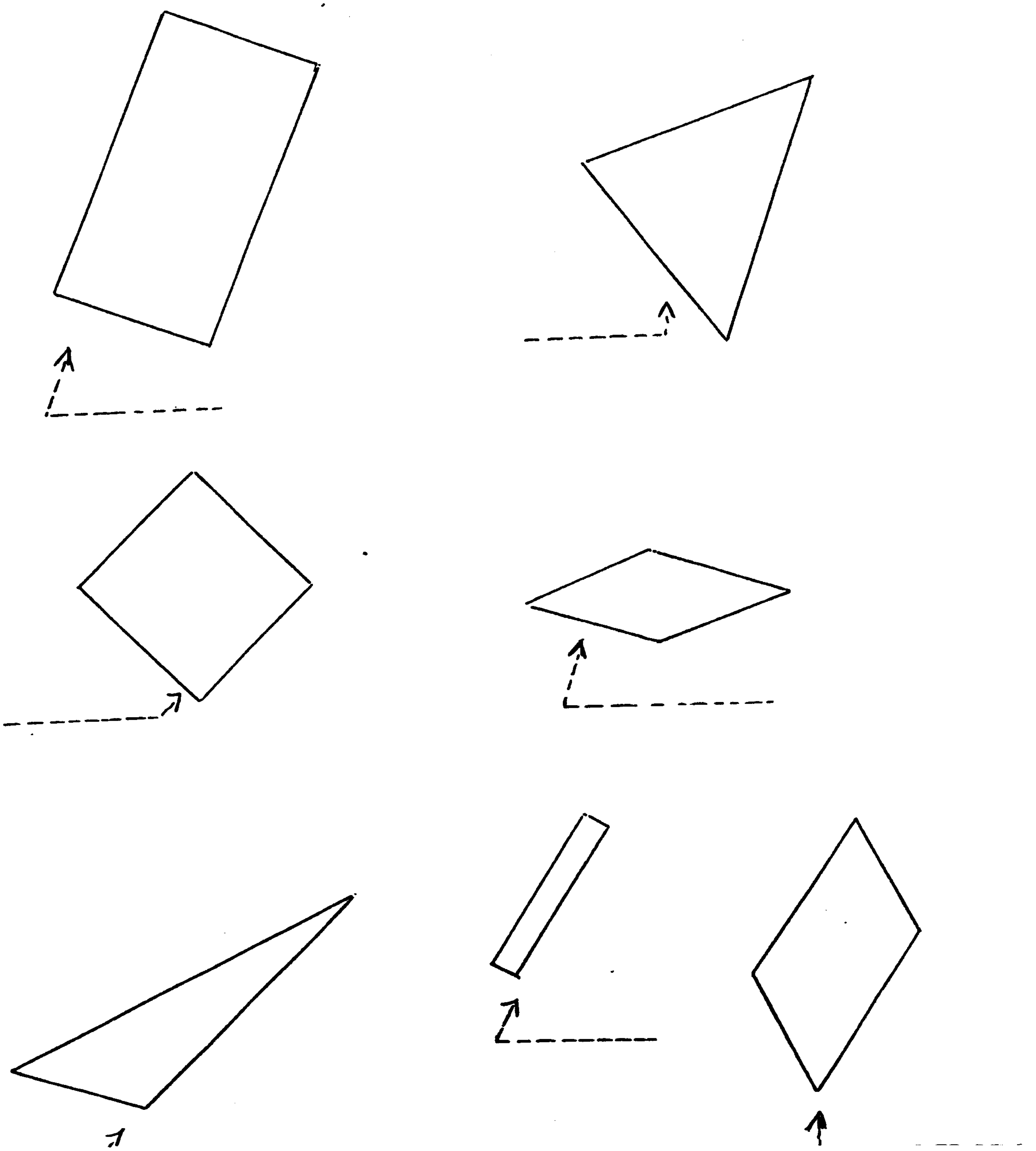
FICHE 5

NOM :

CLASSE :

GEOMETRIE

1) Sous chaque figure, écris le nom le plus précis



2) Trace un cercle de 7 cm de diamètre

3) Trace un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit mesurent : 6,3 cm et 8,4 cm

4) Construis un triangle quelconque dont les côtés mesurent : 11 cm ; 8,7 cm, 4,2 cm.

5) La largeur d'un terrain rectangulaire mesure 23,50 m. Sa longueur mesure 12 m de plus que sa largeur. Calcule le périmètre du terrain.

FICHE 6

NOM :...........................   CLASSE : ....

SYSTÈME MÉTRIQUE

1) Classe du plus léger au plus lourd :

   3,5 kg ; 4 t ; 60 g ; 4000 g ; ....

   Classe du plus petit au plus grand

   0,285 dam ; 3 m ; 27,94 dm ; 290 cm ....

2) Trouve l'unité qui convient :

   Ce camion peut transporter une charge de 8 ☐

   Cette bouteille contient 1,5 ☐

   Cette salle a une superficie de 25 ☐

   La distance de Paris à Bordeaux est de 580 ☐

   Le poids de 4 tranches de jambon est de 540 ☐

   La contenance d'une bouteille de vin est de 75 ☐

   L'âge d'un petit enfant est 18 ☐

   La taille d'un garçon de 10 ans est 138 ☐

3) $12,5\ m^2 = \qquad dm^2$

   $1815\ cm^2 = \qquad m^2$

   $1\ dam^2 = \qquad m^2$

PROBLEMES D'ENSEIGNEMENT DES DECIMAUX

I - INTRODUCTION

Comparer, mesurer, reproduire des longueurs, des masses ou des volumes sont des activités considérées comme tout à fait fondamentales, et, en conséquence, elles doivent être apprises dans les premières années de la scolarité, tout de suite après celles qui consistent à classer, ranger, dénombrer ou reproduire des collections finies. Ces activités mettent en œuvre des êtres mathématiques, les *rationnels* ou les *rationnels décimaux*. En prenant en considération la structure mathématique qui les définit et en régit l'emploi, il est possible de réorganiser ces apprentissages autour d'un projet théorique dans lequel les acquisitions des élèves sont identifiées par les connaissances qui s'y révèlent, ordonnées et justifiées par la place que ces dernières tiennent actuellement dans le corps des connaissances scientifiques.

Or, c'est bien parce qu'il existe des pratiques sociales familières correspondantes et dont l'origine plonge dans la nuit des temps qu'on peut entreprendre un tel projet; car si les résultats paraissent clairs, les actions assurées, les méthodes évidentes, les propriétés utiles, ces activités sont souvent en réalité, à y bien réfléchir, d'une très grande complexité, ainsi d'ailleurs que les concepts, dits élémentaires, qui y sont engagés. Les rapports entre ces théories et ces pratiques restent très mystérieux dès lors qu'on veut les traduire en *comportements* des sujets qui accomplissent ces activités, en *modifications* de ceux qui les apprennent ou en *décisions* de ceux qui les enseignent.

C'est pourquoi l'objet de cette étude apparaîtra à certains excessivement présomptueux.

Il s'agit, en effet, d'étudier les conditions dans lesquelles ces comportements ou ces appropriations peuvent apparaître, ainsi que les rapports qu'entretiennent les conceptions mathématiques — dont ces comportements sont l'indice — avec certains caractères des *situations* qui les accompagnent.

Le nombre des variables auquel on peut s'attendre justifierait tous les pessimismes car un tel projet ne peut pas faire l'économie d'une *mise en expérience* de ces rapports, selon une méthodologie éventuellement spécifique, pas plus que celle d'un investissement théorique initial.

De plus la finalité de ces observations est, bien entendu, de permettre une organisation et un contrôle de ces situations à des *fins d'enseignement*, ce qui nous conduit à essayer de repérer *le champ des choix possibles* plutôt qu'à nous borner à l'observation et à la comparaison des pratiques actuelles de l'enseignement des rationnels et des décimaux.

Notre texte s'alimente d'un ensemble d'activités et de recherches dans le champ ainsi découpé et qui ont pris naissance en 1974 au sein de l'IREM de Bordeaux (l'ensemble des personnes concernées par ce travail comprenant : les étudiants et les enseignants du 3è cycle de didactique des Mathématiques, des instituteurs de l'école Michelet pour l'observation et les professeurs d'école normale de la région). Notre texte ne constitue pas un compte rendu de recherches et à fortiori d'une recherche unique.

Il nous a paru d'ailleurs nécessaire d'introduire le lecteur aux débats de didactique par une voie différente de la présentation académique habituelle des travaux scientifiques.

Nous avons commencé par l'analyse de curricula typiques des années 60 et 70 et de l'effet épistémologique de la réforme de 70 sur les conceptions des élèves et des maîtres relativement aux décimaux. Nous avons voulu faire cette première étude dans le langage et dans l'esprit qui étaient ceux des époques considérées, de façon à ménager au lecteur un accès familier à la fois à l'objet observé, aux phénomènes et aux débats, c'est-à-dire à la situation actuelle des problèmes abordés par la didactique des mathématiques.

Cette analyse sera suivie par l'examen des résultats et celui des alternatives ouvertes à cette méthode, par diverses théories de l'apprentissage de l'enseignement ou du développement.

Cet exemple introductif permettra donc aussi d'attester des phénomènes dont certains seront étudiés expérimentalement dans la suite du texte.

A un moment où un certain nombre d'États s'apprêtent à adopter le système métrique, il m'a paru assez opportun d'examiner avec quelques détails à quel enseignement on est parvenu dans le pays qui le premier en a adopté l'usage.

Cette présentation ne va pas sans risques, en particulier celui de la confusion avec le discours pédagogique classique en usage dans les échanges professionnels, ou avec les articles polémiques fondés seulement sur des opinions. On ne manquera pas de me reprocher de revenir à ce genre au moment même où nous manifestons notre désir d'installer la didactique comme champ scientifique.

Mais il ne faut pas se tromper sur ce mode de présentation : une telle analyse n'a été possible que par l'existence du travail expérimental évoqué plus haut et qui sera présenté dans la deuxième partie de cette étude. Quelques termes ou quelques idées anachroniques n'échapperont pas au lecteur averti.

Il faut qu'il soit clair, par exemple, que notre analyse un peu rapide de la position de Diénès, si elle s'appuie sur des observations assez longues, s'autorise surtout de l'existence d'une autre théorie des processus de genèse des concepts mathématiques. Cette intériorisation active et dialectique se substitue à l'intériorisation immédiate de Diénès pour amener le caractère interactif des connaissances que notre partie expérimentale aura pour but de faire fonctionner et d'observer.

« Dans les sciences plus qu'ailleurs on est amené à confondre la connaissance telle qu'on la transmet et la connaissance telle qu'on la crée ». Cette opinion de Bachelard(*) rend indispensable l'analyse historique et épistémologique de la notion de rationnel et de décimal. Celle-ci nous donnera des exemples de fonctionnement des concepts dans diverses situations et nous permettra d'en relever les caractéristiques et d'étudier celles qui donnaient leur signification aux notions. Nous identifierons principalement la nature des obstacles qui s'opposent à l'évolution des connaissances.

Il conviendra alors d'essayer de reconnaître ceux de ces obstacles qui sont constitutifs du concept et le type de situations qui leur sont associées.

Mais dans cette partie aussi seront engagés, comme dans la première, des instruments conceptuels déjà élaborés et non exposés préalablement. Divers projets de genèse du concept pourront être envisagés. L'étude *des possibilités de les réaliser* mettra en évidence les problèmes théoriques

(*) *Essai sur la connaissance approchée*, VRIN.

ou pratiques ainsi soulevés. Nous aboutirons alors à formuler des choix au sujet de la mise en expérience d'un processus didactique réalisant ce projet d'enseignement. Nous analyserons ensuite les enseignements qu'elle fournit sur les différentes questions posées.

Nous ne donnerons pas d'autre but à cette étude que de présenter l'enseignement des rationnels et des décimaux en tant qu'objet d'études et source de questions de didactique, mais nous discuterons en temps voulu des problèmes scientifiques ou méthodologiques qui s'imposent.

2 - L'ENSEIGNEMENT DES DECIMAUX DANS LES ANNEES 60 EN FRANCE :

Au début des années 60, les « nombres décimaux » ainsi que les « fractions ordinaires » très simples sont inscrits au programme des quatrième et cinquième années d'école élémentaire (CM1 : 9-10 ans et CM2 : 10-11 ans).

Description d'un curriculum :

Voici le résumé d'une méthode exposée dans un ouvrage très répandu depuis 1936 et qui présente bien des pratiques stables et courantes chez les maîtres de l'époque (arithmétique nouvelle au cours moyen de R. Jolly - Fernand Nathan).

La leçon d'introduction (p. 12,6ème leçon : durée 1h) :

a) L'ouvrage évoque des mesurages de longueur avec un mètre pliant. L'enseignant les fera réaliser — à moins qu'il fasse lire le texte ou commenter les images seulement. On ne trouve aucun commentaire sur les difficultés pratiques de cette activité ni sur les particularités du dénombrement d'unités à l'aide d'une graduation.

b) Il énumère les « sous-multiples » du mètre — qui sont en réalité les « multiples » de la plus petite unité présentée : le millimètre.

c) Il fait écrire le résultat de cette opération sous la forme d'un « nombre décimal ». A cette occasion, le mot « entier » apparaît pour la première fois dans le cursus scolaire pour distinguer un « nombre » sans partie décimale, par opposition à « nombre décimal » qui comprend une partie entière,

une partie décimale et l'indication d'une unité — ainsi les nombres entiers ne sont pas des décimaux.
d) L'analyse de cette écriture — placée dans un tableau — n'est rien d'autre qu'un exercice familier de numération avec un changement de nom pour les têtes de colonnes.
e) Toutefois, ce changement de vocabulaire conduit à une nouveauté car la justification du nom de ces sous-unités se fait par référence à l'unité principale. Ainsi, au « groupement par dix » des études de numérations, se substitue une « division par dix » de la construction des graduations du mètre. On ne peut pas savoir si cette « division » s'effectue géométriquement, ni comment : il suffit sans doute que le résultat coïncide avec la division dans les naturels et cette partie n'est l'occasion d'aucune question, d'aucun problème, d'aucune action pour l'élève qui ne partage ni ne divise rien.
f) L'ouvrage donne quelques exemples d'emploi du mot « unité » — qui désigne ici l'*objet* matériel reporté — mais indique seulement par un titre : « changement d'unité » qu'il faut expliquer aux enfants comment faire des conversions d'unités.
g) En fait, le véritable contenu de la leçon est indiqué par les exercices écrits : recopier le tableau de numération et y placer des nombres, exprimer des longueurs données en mètres et en ses sous-multiples et « dessiner une droite » de longueur donnée!

Le système métrique. Les problèmes :
a) Cette leçon est suivie de 7 autres — où l'on apprend, toujours uniquement à propos de longueurs et à travers des problèmes pratiques, à faire l'addition, la soustraction et la multiplication par un entier des nombres décimaux — et d'une leçon de révision présentant le tableau des multiples et des sous-multiples du mètre, intitulée « numération des longueurs ».
b) Pour chacune des autres grandeurs, sauf pour les angles : capacités (2 leçons), poids (5 leçons), monnaies (3 leçons), les leçons d'introduction sont calquées sur le même modèle.
c) 11 leçons seront consacrées à l'étude d'autres grandeurs : surfaces, volumes, densités, vitesses et aux « système de mesure » correspondants.
d) Toutes ces leçons sont suivies d'applications où il s'agit,

le plus souvent, de calculer des prix, des longueurs, des surfaces, des volumes etc... et où les décimaux sont utilisés quotidiennement.

Les opérations dans les décimaux :

Le manuel propose d'apprendre la multiplication d'un nombre décimal par 10, 100, 1000, puis par un naturel, puis celle d'un nombre entier par un nombre décimal et enfin celle de deux nombres décimaux.

Il faut noter que dans le produit d'un décimal par un entier, le changement d'unité permet de prouver la validité de la règle. Par contre, dans le produit d'un nombre entier par un nombre décimal, ce dernier perd l'indication de l'unité qui ne peut plus être changée. La règle est donnée sans preuve. La vérification — établie dans un cas particulier, à l'aide d'une fraction : $\frac{1}{2}$ remplaçant 0,5 — est empruntée à une pratique courante car aucune théorie n'a été faite encore à ce sujet.

L'étude de la division — définie comme une opération concrète : on divise un gâteau — suit un plan qui atteste ici aussi le souci de coller, à la fois, à des représentations mentales qui permettent de la comprendre et à l'exécution de tâches progressivement plus complexes. L'ordre des leçons — division d'un naturel, puis d'un décimal (mesures) par 10, 100, 1000, division entre naturels et quotient décimal, division à dividende, puis à diviseur décimaux, enfin division de décimaux — suggère d'expliquer chaque étape de l'algorithme par les précédentes mais ces explications ne figurent pas.

La justification de la division par un décimal, qui perd à nouveau l'indication de l'unité et son caractère de « mesure » (*), s'appuie sur la propriété établie sur les naturels et étendue sans commentaires aux décimaux de l'invariance du quotient dans la multiplication du dividende et du diviseur par un même nombre. Une leçon spéciale est consacrée à la division d'un dividende par un diviseur plus grand que lui.

(*) Le mot « mesure » sera employé dans tout ce paragraphe, non pas dans un sens mathématique mais dans le sens courant que lui donnait l'ouvrage étudié.

Les fractions décimales :

Elles sont introduites, juste avant les fractions ordinaires, comme une écriture nouvelle du décimal déjà étudié. Les 5 leçons qui leur sont consacrées consistent à reformuler les règles de calcul des décimaux en termes d'opérations sur les fractions.

Il devient clair à cette occasion que c'est la théorie des écritures et non des êtres mathématiques qui est enseignée. Ainsi 3/10 est une fraction décimale mais 1/2, 2/5, 3/5 etc... sont des « fractions ordinaires »!

Les justifications et les preuves :

Contrairement à d'autres ouvrages de la même époque (*) qui se contentent d'énoncer et de faire appliquer les règles, ce manuel tente de les justifier soit par une vraie preuve, soit par un exemple, soit par une vérification. Même dans les cas où la preuve n'est pas possible, la présentation du texte suggère que l'élève peut et doit comprendre. « Le quotient » de 2 nombres quelconques est toujours un décimal soit « exact » soit « approché ».

Aucune étude n'est faite d'un rationnel non décimal. L'élève doit arrêter la division lorsqu'il a obtenu une précision raisonnable dans le contexte. Cette convention n'est même pas énoncée, elle est pratiquée de fait.

Analyse des choix caractéristiques de ce curriculum et de leurs conséquences :

Conception dominante du décimal scolaire en 1960 :

Cette méthode peut être considérée comme typique de celle de l'époque au moins par les traits suivants :

a) le décimal est toujours l'expression d'une « mesure » (au sens non mathématique);

b) ces mesures s'effectuent dans le système métrique;

c) le décimal est défini en tant que nombre naturel muni d'une indication d'unité et d'une virgule qui repère le chiffre de cette unité;

(*) Par exemple Bodart-Bréjaud chez F. Nathan.

d) les algorithmes de calcul sont présentés comme étant les mêmes que pour les naturels, complétés seulement d'une procédure relative à la virgule.

Conséquences sur le produit dans les décimaux :

Ces choix ont des conséquences que l'ont peut apercevoir :

a) Pas de décimal opérateur :

L'écriture 3,25 n'a aucun sens si le type de mesure effectué n'est pas accompagné de l'unité indiquée. L'emploi des décimaux sera donc limité aux cas couverts par l'ancienne dénomination de « nombre concret ».

b) Le produit n'a pas de sens :

Il sera donc presque impossible à un élève de donner directement un sens à l'opération qui consiste à multiplier quelque chose par un décimal :

« 3,25 m x 4 » peut se ramener à une addition, comme dans les naturels; mais pas « 4 m x 3,25 » si 3,25 n'est pas obtenu par une évaporation de l'unité. Ce ne sont pas des artifices comme ceux que nous avons signalés qui peuvent abaisser l'obstacle. Des équivalences du genre :

« 4 m x 3,25 = 3,25 m x 4 » sont inconcevables;

ainsi que :

$$7{,}25 \text{ m} \times 4{,}38 = 7{,}25 \times (4 + 0{,}3 + 0{,}008)$$
$$= 7{,}25 \times 4 + 7{,}25 \times 0{,}3 + 7{,}25 \times 0{,}08.$$

Le produit ne peut plus être interprété à l'aide de la représentation dans les naturels qui a servi de définition. Pour continuer à donner du produit de 2 décimaux une représentation « concrète », c'est-à-dire conforme à la conception décrite plus haut *(Conception dominante du décimal scolaire en 1960)*, il faut en restreindre l'emploi, soit aux cas de « mesures-produits », par exemple la surface d'un rectangle, soit à celui des isomorphismes de mesures, par exemple le prix d'une quantité non discrète, le poids d'un volume donné d'un corps homogène etc...

c) Mesures-produit et dimensions :

En fait, dans le cas des mesures-produit, par exemple la surface du rectangle, on écrit :

2,5 x 3,25 = 8,125 seulement si on a choisi convenablement l'unité de surface (le rectangle ayant pour longueur l'unité choisie pour le premier nombre et pour largeur celle choisie pour le second).

Il n'existe pas de moyen de justifier à priori cette formule plutôt que celle-ci :

2,5 x 3,25 = 812,5 ou celle formée avec toute autre valeur.

d) Proportions :

Le cas des isomorphismes de mesures est plus favorable. L'une des mesures agit sur l'autre comme un ensemble d'opérateurs multiplicatifs tout en restant une mesure. Il exige toutefois une nouvelle interprétation du produit de deux nombres soit construite et si possible englobe l'ancienne, celle utilisée par Al Kwarismi au IXè siècle pour unifier la notion de nombre : a x b est le nombre qui est à « b » comme « a » est à « 1 ».

Les timides tentatives que l'on peut observer pour détacher le décimal de sa fonction de résultat d'une mesure restent tout à fait formelles :

— substitution de noms plus généraux (unités, dixièmes, centièmes), ... à ceux spécifiques du système métrique et prolongeant les dénominations dans les naturels (dizaines, centaines, etc...);

— rejet du nom de l'unité avant ou après le nombre 3,25 m ou m : 3,25 au lieu de $3^{m},25$ (depuis 1945).

La suppression, pure et simple, de la mention de l'unité, à partir d'une certaine leçon et sans avertissement — l'évaporation — telle qu'on la verra utilisée systématiquement après la réforme de 1970, est franchement abusive mais ne se produit que furtivement, la pression des mathématiciens pour faire isoler les êtres, dont ils théorisent la structure, n'étant pas très forte à cette époque.

Les deux représentations des décimaux :

C'est pourquoi on peut constater que les rapports et les proportions (à l'intérieur d'une même grandeur — nombres abstraits) sont toujours exprimés, s'ils ne le sont pas entiers, en fractions (ordinaires ou décimales) ou en pourcentages. On pourrait supposer que cette spécialisation du vocabulaire n'est qu'une trace de l'histoire, mais il est probable qu'il lui correspond des représentations distinctes : d'une part, les décimaux représentant des mesures munis d'une addition et du produit par un naturel, d'autre part les fractions, bien qu'apparemment définies elles aussi à partir de la mesure (la tarte que l'on coupe et dont on prend quelques parts) sont employées comme des rapports.

Le bon fonctionnement des raisonnements va donc dépendre de la facilité avec laquelle les élèves pourront passer, en une situation de résolution de problème, *de l'une à l'autre de ces représentations.* La capacité à substituer l'une des formulations à une autre au cours d'une interrogation, n'est qu'un indice que l'élève pourrait effectuer ces changements de point de vue. Nous ferons plus loin l'historique de ces rapports.

L'ordre des décimaux :

a) Mais en fait, ces décimaux scolaires sont restés des entiers naturels. Dans toutes les mesures il existe un sous-multiple insécable, un atome au-dessous duquel toutes les valeurs subliminaires se confondent. Même si la définition laisse entendre que toutes les unités de grandeur peuvent être divisées en dix, ces divisions ne sont jamais — dans l'enseignement élémentaire — poursuivies impunément au-delà de l'utile ou du raisonnable, même à travers la fiction commode du calcul de la division. Cette tendance s'exprimera nettement dans les commentaires des programmes de 1970 où le décimal est introduit comme mesure du cardinal d'ensembles finis : « le millier étant choisi comme unité, la population d'une ville de 10850 habitants s'exprime par le nombre décimal 10,850 ».

b) Dans ces conditions, les décimaux restent munis d'un ordre discret, celui des naturels : beaucoup d'élèves auront du mal avec cette définition à imaginer un nombre compris entre 10,849 et 10,850. D'ailleurs, ce genre de questions n'est jamais posé à l'époque et ne peut se résoudre que par un apprentissage d'algorithme ou en « imaginant » une nouvelle sous-unité. Mais comment ?

c) Les comparaisons et les sommes de décimaux ne seront souvent correctes que si ces derniers sont écrits avec le même nombre n de chiffres après la virgule, c'est-à-dire s'ils sont présentés dans le même $\mathbb{D}_n$ (ensemble de décimaux tels que $10^n \ \mathbb{D}_n \in \mathbb{N}$) et donc s'ils interprètent comme des naturels (*).

(*) Ce modèle a été étudié avec précision par M.L. Izorche : « Les réels en classe de 2nde ». Mémoire de D.E.A. Bordeaux I. 1978.

Les emboîtements de ces $\mathbb{D}_n$ ($\mathbb{D}_0 \subset \mathbb{D}_1 \subset \mathbb{D}_2 \ldots \subset \mathbb{D}_n$) seront malaisés dès que la situation se compliquera, surtout pour D_0, l'ensemble des naturels, car nous avons vu que si les décimaux sont au fond des naturels, les entiers ont été déclarés ne pas être des décimaux!

L'approximation :

a) La distinction entre partie entière et partie décimale découle de la pratique de la mesure et de l'évaluation surtout dans les calculs où l'opération sur les parties entières donnent l'ordre de grandeur. Cette distinction est bien utile car 0,31; 3,1; 31... ont tendance à s'identifier (il suffit de choisir son unité).

b) Mais alors, le décimal ainsi coupé en deux, sera tenté de suivre certaines règles pour la partie entière et d'autres pour la partie décimale. Par exemple 3,9 sera inférieur à 3,12 (puisque $9 < 12$) (37% des élèves de CM2 : I.N.R.P., 1979) ou bien encore 2,3 x 2,3 donnera mentalement 4,9.

c) Les décimaux seront identifiés avec les parties décimales et donc inférieurs à 1. Les élèves hésitent à trouver un décimal ayant un seul chiffre après la virgule et supérieur à 0,9)...

d) Cette idée que la mesure conduit à fournir un nombre, « approché » mais « qui compte » et un petit bout négligeable s'ancrera fortement, surtout à l'occasion de la division qui fournit des suites visiblement infinies qu'il faut enfouir sans procès puisqu'elles n'ont pas de statut possible.

e) Et lorsque plus tard, un étudiant considère dans un problème une série Σa_n à termes positifs, dont le terme général tend vers zéro et pense qu'elle converge, est-ce parce qu'il remonte l'implication d'un théorème connu, ou plutôt parce que subsiste quelque part l'idée que ($\forall \epsilon \quad \exists n \text{ tq} > n \Longrightarrow a_p < \epsilon$) veut dire que $\exists n$ tq $p > n \Longrightarrow a_p = 0$ par référence à la représentation des décimaux qu'il a appris dès l'enfance ?

Influence des idées pédagogiques sur cette conception :

Appréciation des résultats :

A cette époque, ces difficultés n'apparaissent pas ou sont tenues pour mineures. L'enseignement de l'arithmétique ne présente pas de difficultés pour le maître et pas beaucoup pour la plupart des enfants. Et s'il y a en mathématique un enseignement qui ne prête à aucune discussion et ne présente aucune difficultés c'est celui des décimaux. Il est d'ailleurs si profondément associé à l'usage du système métrique et aux mesures évoquées dans les problèmes scolaires, qu'on ne voit pas alors comment on pourrait l'enseigner autrement ou ne pas réussir à l'enseigner.

Il faut expliquer cette opinion pour comprendre réellement les conditions de l'enseignement des décimaux à cette époque.

Méthodes classiques :

Tout d'abord, aucune des théories pédagogiques de l'époque ne prétend ni ne peut fournir de variantes qui donneraient une alternative à la conception dominante du décimal scolaire de 1960. Des contenus sont supposés être constitués et organisés selon les règles de leur discipline et la pédagogie n'est que l'art de les communiquer. Elle est supposée n'avoir pas de prise ou d'effet sur eux.

Considérons d'abord les plus anciennes :

— Les méthodes dogmatiques conduisent à faire d'abord les règles puis à les faire appliquer.

— Les méthodes maïeutiques procèdent par questions et réponses et simulent une redécouverte de la règle.

— Les méthodes actives insistent sur l'importance du temps consacré à l'activité de l'élève et surtout l'activité manuelle par rapport au temps d'écoute ou d'apprentissage formel, mais ces activités sont, soit des manipulations illustrant un discours introductif soit des exercices. Prisonnières de l'idéologie de la main qui modèle l'esprit, elles ne trouvent qu'accidentellement des situations-problèmes efficaces.

— Le courant empiriste sensualiste influence les manuels à moins que ce ne soit l'inverse, et ceux-ci se gonflent d'illustrations colorées.

Toutes ces méthodes respectent les principes suivants :

a) Aucune connaissance n'est introduite qui ne puisse être, soit admise immédiatement, soit définie ou expliquée à l'aide des acquisitions antérieures.

b) Chaque définition ou explication doit être formulable

et justifiable — sinon formulée — dans le langage de la science enseignée — ou au moins dans son expression culturelle la plus répandue.
c) Chaque « enseignement » donne lieu à un apprentissage identifiable et contrôlable, et, à la limite, seul est enseigné ce qui peut être appris.
d) Les acquisitions entreprises se prolongent et se justifient par l'usage — importance et fréquence — qui en est fait dans les leçons antérieures.

Optimisation :

Ces principes conduisent naturellement à une conception de l'optimisation de l'enseignement qui implique principalement que :
a) Chaque leçon doit viser le maximum d'acquisition (le débit) compatible avec les capacités d'apprentissage des élèves.
b) L'apprentissage d'un concept doit donc se faire sous une forme qui utilise au mieux les connaissances antérieures et les modifie le moins possible.
c) Il doit demander le minimum de temps et doit se rentabiliser par un usage ultérieur assez fréquent dans des applications d'intérêt pratique.

La leçon d'introduction que nous avons minutieusement relatée ne semble pas satisfaire la condition (a) mais c'est parce qu'au fond, la plupart des faits ne sont énoncés là que pour en justifier l'emploi quotidien ultérieur et non pour être appris immédiatement.

Autres méthodes :

a) D'autres méthodes ayant pour objet la recherche d'une meilleure motivation des élèves, conduisent à une réorganisation plus ou moins profonde de l'apprentissage. Cependant, sauf accidentellement ici encore, ces motivations, principalement centrées sur le milieu (école moderne de Freinet), ou sur les centres d'intérêt pour l'enfant (Decroly) ou même purement arbitraires sont d'ordre exogène par rapport à la connaissance et sans pertinence avec elle.
b) L'ordre des acquisitions paraît susceptible d'être totalement bouleversé par rapport à celui que nous avons exposé et que respectent à peu près les autres.

c) Mais en réalité, la rupture de l'ordre des acquisitions et le choix de situations familières et stimulantes n'affecte guère les acquisitions elles-mêmes ni leur signification.

En effet, lorsqu'un problème nouveau se pose à l'élève :
— ou bien le contexte lui permet la construction d'une solution sans qu'il y ait à utiliser la référence à une acquisition antérieure;
— ou bien, après échec et enquête auprès des adultes, il lui apparaît qu'il existe une technique de résolution.

Dans le premier cas, l'enseignement doit instaurer, sans motivation, un procès d'identification de la question qui a été posée, de ce qui a été découvert et qui doit s'organiser après coup en un savoir à réappliquer et donc à apprendre. Dans le second, la technique doit être apprise et il faut s'inquiéter de reconnaître les conditions dans lesquelles on pourra la réemployer.

Dans les deux cas, les connaissances les savoirs, les emplois et les justifications sont ceux de la conception dominante.

D'ailleurs, passé le moment de la découverte qui retient principalement l'attention des utilisateurs de ces méthodes (peut-être parce qu'elle implique plus directement le maître), l'apprentissage continue par un effort solitaire et empirique de l'élève qui doit répondre à des fiches « auto-correctives » d'une conception proche de l'enseignement programmé (fichier C.E.L.).

d) Le problème principal de la didactique consistera à trouver des situations réellement spécifiques des différentes conceptions des décimaux et d'organiser à la fois ces situations et ces conceptions pour rendre possible une genèse artificielle des savoir-faire, des savoir-dire et des savoirs.

L'apprentissage des « mécanismes » et du « sens » :

Séparation de ces apprentissages et leur cause :

La courte analyse qui précède met en évidence la conception qui prévaut à cette époque de l'apprentissage des savoir-faire, et principalement des algorithmes dans la construction de la connaissance, conception qui, elle, joue un rôle dans la création et le fonctionnement des représentations des décimaux.

Cet apprentissage est conçu en deux parties que l'on peut viser séparément :
— l'apprentissage de l'algorithme que les maîtres appellent « mécanisme » de l'opération, et
— celui dit du « sens » de ce mécanisme, c'est-à-dire la connaissance des occasions de l'« appliquer » :
- Le premier relève des techniques d'apprentissage classique et, à la limite, du conditionnement;
- L'autre ne peut s'apprendre, à travers la répétition des exemples et des applications dans des problèmes, que par la grâce de mystérieux transferts que « l'élève effectue si, et seulement si, il a une intelligence suffisante ».

Certains ouvrages font des tentatives pour ramener l'enseignement du sens à celui d'un mécanisme par d'habiles classifications des situations (recherche du nombre de parts, recherche de la valeur d'une part pour la division par exemple) par l'identification de démarches spéciales (la règle de trois), voire par la recherche d'indices linguistiques de l'opération à effectuer (« il manque », « il reste », « on retranche »... pour reconnaître la soustraction).

Ces tentatives conduisent à rejeter certains problèmes, certaines formulations, et donc contribuent à modeler la conception dominante.

Cette séparation entre ce qui peut être enseigné formellement pour être appliqué « mécaniquement » et ce qui ne peut pas l'être — entre la forme et le « sens » — joue un rôle fondamental dans l'enseignement. Elle résulte à première vue de ce qu'elle est le résultat extrême de la négociation didactique étudiée par M. Verret (Le temps des études. 1974) et par laquelle le savoir enseigné se constitue en une transposition didactique du savoir pratiqué.

En effet cette négociation didactique conduit à distinguer, dans ce qu'a été vécu naturellement par l'élève comme une réponse normale à des situations intentionnelles, ce qui est objet de connaissance, de ce qui ne l'est pas, ce qui était un « problème » de ce qui était une hésitation stupide, ce qui était une adaptation banale de ce qui était un apprentissage, ce qui doit être appris de ce qui peut être oublié. Nous entreprendrons plus loin l'étude théorique de ce phénomène important mais nous pouvons tout de suite en observer le fonctionnement dans ce cas précis.

Les Algorithmes :

Un algorithme est une suite finie d'instructions effectuables permettant d'obtenir sur une classe donnée de problèmes, un résultat défini. Lors de son emploi, c'est une procédure de décision, mais le fait important réside en ce que l'algorithme peut être déterminé à l'avance, l'exécution de la n-ième instruction ne dépend d'aucune circonstance non prévue à la (n — 1)-ième, d'aucune nouvelle prise d'information, d'aucune nouvelle décision, d'aucune interprétation, donc d'aucun sens que l'on devrait leur attribuer. C'est pourquoi l'exécution d'un algorithme peut atteindre une grande fiabilité et une grande vitesse d'exécution.

La détermination d'un algorithme permet de hiérarchiser les tâches complexes dans lesquelles il apparaît et de raisonner sur elles. Un grand nombre d'activités et d'équilibres peuvent être décrits comme des algorithmes et paraissent donc relever d'une exécution mécanique ou d'un « automatisme » selon une expression erronnée mais courante chez les maîtres.

L'enseignement des algorithmes :

Très utiles et répandus dans les sciences et les techniques (et d'autant plus qu'ils sont plus complexes), les algorithmes sont tentants pour le professeur car :

— ils peuvent être appris soit directement dans la forme où ils seront utilisés soit par une complexification naturelle (insertion de sous-algorithmes);

— ils peuvent être enseignés sans recours au sens qu'ils sont d'ailleurs chargés de rejeter, donc par des méthodes formelles : application répétée, récitation...

— leur acquisition peut être contrôlée;

— la non-acquisition permet des décisions didactiques simples, dans un contrat clair, où la responsabilité de l'élève peut être engagée à priori;

— leur utilité peut être éprouvée puisque leur mise en œuvre est identifiable dans leurs applications;

— ils assurent après l'apprentissage, dans l'exécution des tâches, des phases de bonne fiabilité, de grande vitesse et confiance.

Ils jouent d'ailleurs un grand rôle dans la justification des modèles d'apprentissage par conditionnement auxquels se réfèrent implicitement ou explicitement les maîtres.

En fait l'usage d'un algorithme est, par rapport à l'activité mentale, comme la partie visible d'un iceberg. Dans de nombreux cas qui servent de référence métaphorique aux théories pédagogiques qui les préconisent, les algorithmes sont acquis par un processus tout différent de ces apprentissages formels : ils sont le résultat d'une adaptation des sujets, progressive ou par sauts, mais où le sens et les caractères des situations jouent un rôle très important. D'une certaine manière, apprendre séparément les algorithmes de calcul et leurs conditions d'emploi est une activité comparable à celle qui consisterait à apprendre des citations et l'occasion de les placer. Elle est concevable en littérature académique mais ne permet pas d'apprendre une langue.

Cette méthode conduit à rendre inutiles — non fonctionnelles — les explications et la compréhension, en ce sens qu'en cas d'erreur ou d'incertitude elles ne servent jamais à rectifier l'algorithme. Seules alors peuvent servir des aides mnémotechniques, c'est-à-dire arbitraires par rapport au contenu. C'est ainsi que les motivations à exécuter une tâche peuvent devenir non pertinentes, et donc se plier à des exigences plus pédagogiques.

On les voit donc disparaîtres dans certains ouvrages (Bodard déjà cité), ou n'y jouer qu'un rôle secondaire, de telle sorte que l'explication est devenue à son tour une nouvelle connaissance juxtaposée aux autres. Et si seuls les meilleurs peuvent l'apprendre, c'est qu'elle n'est pas indispensable. Elle doit donc être considérée comme un autre savoir, indépendant du savoir-faire..., un luxe superflu en première urgence.

Ainsi, les préoccupations pédagogiques des années soixante ne prenaient pas en considération le contenu dans la conception des situations d'enseignement et même tendaient à le rejeter en tant que savoir organisé pour n'en retenir que l'aspect connaissance des faits et algorithmes (*).

En conclusion de cette étude on peut admettre que la méthode que nous avons présentée est bien typique de celles

(*) Cette tendance d'ailleurs été constatée expérimentalement par E. Filhol dans une recherche sur l'enseignement de la numération où il a montré que les maîtres ne prévoyaient les résultats de leurs élèves et ne les faisaient progresser que sur les objectifs de bas niveau taxonomiques.

qui étaient utilisées dans les années 60. Nous ferons l'économie ici de toute vérification aussi bien historique, par l'analyse des manuels, qu'expérimentale, par l'analyse des résultats des élèves des classes qui auraient conservé (elles sont nombreuses) ces méthodes : En effet ces méthodes, obtenues par l'effet des « variables pédagogiques » ne sont pas naturellement exclusives; chaque ouvrage, chaque maître les conjuge selon des formules qui changent d'une leçon à une autre.

Seule l'uniformité des résultats et leur peu de dispersion peuvent attester de l'exactitude de notre déclaration initiale : les variables pédagogiques évoquées plus haut sont sans grand effet sur la conception qu'ont les élèves d'un concept comme les décimaux. Nous ne ferons ces observations qu'après avoir examiné les réformes des années 70.

3 - L'ENSEIGNEMENT DES DECIMAUX DANS LES ANNEES 70 :

Les réformes des années 70, en France en particulier, s'inscrivent en quelque sorte en réaction contre l'état que nous venons de décrire mais, pour s'exprimer ou se justifier, elles vont devoir s'appuyer sur certaines des conceptions antérieures. L'enseignement des décimaux n'est pas au centre de la lutte à laquelle se livrent les novateurs et parfois leurs adversaires, mais il est d'autant plus intéressant d'examiner sur eux la trace des idées nouvelles — dont nous ne ferons pas ici l'inventaire.

Description d'un curriculum :

Examinons les exercices proposés dans le « journal de mathématiques » de N. Picard (CM1, fascicule II et CM2 1976) et dont certains sont commentés dans « Agir pour abstraire » du même auteur (*).

Leçon d'introduction :

L'élève mesure des surfaces limitées par les lignes d'un

(*) Mme. N. Picard a contribué à diffuser en France les idées de Z. Diénès à qui elle a emprunté nombre de ses idées. Chargée de recherches à l'INRDP, elle a représenté, pour les maîtres, de 66 à 70, les tendances des réformes souhaitées.

réseau en dénombrant les mailles. L'unité de surface est le nom donné à cette maille (« L'unité d'aire est un petit triangle » mes. 3) (*). On lui fait alors remplacer ce dénombrement par un recouvrement des figures avec des « pièces » d'un système inspiré des multibases de Diénès : A couvre une maille, B en couvre 2, C $\longrightarrow$ 2^2, D $\longrightarrow$ 2^3, E $\longrightarrow$ 2^4, F $\longrightarrow$ 2^5, G $\longrightarrow$ 2^6. Après échanges pour avoir le minimum de pièces de chaque sorte, le résultat est transcrit dans un tableau où la surface — un naturel — est écrite en base 2. L'élève est alors invité à dessiner une surface M d'aire 11011. « Quand A est l'unité » puis à mesurer cette aire en prenant E « comme unité ». L'unité est devenue une des pièces et par le jeu des échanges la classe d'équivalence des figures de même aire et de même type (ces termes et ces remarques ne figurent pas dans le texte). Pour indiquer que dans cette opération matérielle, il a changé d'unité, l'élève doit mettre, dans le tableau, un chapeau sur le nom de la pièce choisie et une virgule après le nombre de pièces.

Après échanges, on obtient le même tableau que dans l'énoncé — avec en plus la virgule et le chapeau. Les changements d'unité se font à l'intérieur d'un même système. On ne remplace pas un réseau à mailles carrées par un autre à mailles hexagonales par exemple.

Autres bases. Décomposition :

Le même genre de travail est fait en base 3 puis en base 10. Des exercices viennent rappeler que pour multiplier un nombre par la base, il suffit de décaler les chiffres d'un rang vers la gauche.

Il apparaît dans le compte rendu de l'activité du maître qui accompagne ces exercices (agir pour abstraire p. 215), que dans un dialogue très maïeutique, les enfants ont été conduits à transcrire ce tableau :

G	F	E	D	C	B
1	1	0	0	1	1

en légalité : $S = 2\ f + 1\ f + f/8 + f/16$

(*) Mes. i fait référence à l'indexation des fiches utilisées par l'auteur.

Les commentaires de N. Picard sur la situation sont insuffisants pour connaître la signification exacte de ce comportement. f/8 et f/16 ont été « trouvés spontanément ». Mais c'est la première fois qu'une écriture ainsi décomposée apparaît. Le maître fournit un exemple en disant : « Écrivons en mathématique ce qu'il a dit ». Aussitôt les « f » peuvent disparaître :

$S = 2 + 1 + 1/8 + 1/16.$

L'auteur signale toutefois que l'écriture à virgule n'est comprise que lorsque les enfants placent le nombre dans un tableau. Les exercices se font en différentes bases mais les élèves n'effectuent pas de changements de base : ils ne reécrivent pas une aire donnée en base deux, en base trois.

Les opérations :

Les opérations d'addition et de multiplication par un naturel dans les nombres à virgule (base 2) sont étudiées dans le même type de situations (mesure d'aires à l'aide de pièces), puis, après échanges, dénombrement direct dans la base de numération.

L'ordre :

L'étude de l'ordre des nombres à virgules utilise une toute autre représentation : il s'agit de « numéroter » des livres de bibliothèque. Les livres sont désignés par des lettres A, B, C... mais pour des raisons qui ne sont pas évoquées, le bibliothécaire assigne, à chaque nouveau livre, une place déterminée entre deux autres déjà placés. Par exemple F entre B et C « Il s'agit de trouver un code pour F », sous-entendu :

1) pour indiquer la position par rapport aux livres déjà placés,
2) mais qui ne change pas quand de nouveaux livres sont placés, tout en gardant la propriété (1).

Cette « numération » ne permet sûrement pas de compter les livres placés.

En fait, le problème n'est pas posé, la solution est donnée aussitôt, (« voici un moyen ») non pas sous forme d'une méthode pratique qui n'engendrerait que quelques codes, (ceux correspondant à des introductions au hasard) mais sous celle d'un algorithme générateur de la graduation entière, c'est-à-dire de tous les codes ayant un chiffre après la virgule, puis deux..., conformément au modèle évoqué plus haut dans *L'ordre des décimaux*.

Les opérateurs. Les problèmes :

a) Immédiatement après, vient la préparation classique au produit de deux décimaux sans indication d'unité. L'auteur introduit une numération du rang des chiffres à l'aide des entiers ($\mathbb{Z}$)...3,2,1,0,$\bar{1}$,$\bar{2}$,... La multiplication par 10, 100, 1000 consiste à déplacer les chiffres dans le tableau d'un rang vers la gauche. L'opération est justifiée par l'échange de pièces — le modèle reste nécessaire — d'un rang contre celle d'un rang immédiatement supérieur.

La division (de quoi ? des nombres, des nombres-mesures, ... des unités!?) consiste en l'algorithme inverse :

123,35 = 12335 : 100

b) Alors, le produit de deux décimaux — dont on ne sait pas à quelle occasion on peut avoir à le faire — est interprété en termes « d'opérateurs » :

$$\begin{aligned} 123{,}35 \times 4{,}3 &= [\underline{12335} : 100] \times [43 : 10] \quad (*) \\ &= [\underline{12335}]\ ((:100) . (\times 43) . (:10)) \ldots \text{etc} \\ &= [\underline{12335}]\ ((\times 43) . (:100) . (:10)) \end{aligned}$$

Nous traduisons ici par des nombres entre crochets les nombres qui expriment des mesures et entre parenthèses ceux qui sont associés à des « opérateurs » représentés dans le texte par les flèches (Le point représente la « composition » de ces flèches et nous avons ainsi distingué 3 « produits » : l'opération interne x, l'opération externe [ ] ( ) et la composition d'applications qui sont confondus dans le texte). Cette interprétation de [43] « nombre concret » en l'opérateur (x 43) a été préparée dans les naturels par de nombreux exercices sur ce que l'auteur appelle « les machines ». Il n'est proposé aucune situation-problème où la multiplication de deux décimaux pourrait prendre un sens.

c) La division est exposée selon l'ancien schéma : remarque

(*) Pour $[[12335]\ (:100)] \times [[43]\ (:10)]$

est faite que dans les naturels et pour la division euclidienne:
$a \div b = ka \div kb = \frac{a}{h} \div \frac{b}{h}$ (si h divise a et b)

La propriété est étendue aux décimaux.

d) En dehors de ces leçons d'introduction et d'études et auxquelles sont consacrées 32 fiches sur 131 au CM1 et 58 sur 149 au CM2. Aucune autre allusion n'est faite aux décimaux (ni applications ni usage) sauf dans l'étude de l'encadrement d'une aire (Mes. 44 à 51).

Approximation :

Dans un premier exercice les élèves peuvent constater que l'encadrement de l'aire d'une surface connexe, mais non composée d'une juxtaposition d'atomes, dépend de la position du quadrillge utilisé pour le dénombrement et qui s'est substitué aux pièces. Mais cette aire existe-t-elle dans ce cas ?

Puis ils calculent l'aire de la surface bordée par les lignes du quadrillage, d'abord avec une unité, puis avec une autre six fois plus petite. Le partage de l'unité est donc suggéré mais les deux quadrillages sont présentés en même temps et la situation ne diffère pas formellement des précédentes (dénombrements avec groupements).

Dans les exercices suivants (Mes. 50 et 51), l'encadrement de l'aire (?) d'une surface à l'aide de quadrillage plus fins est supposé suggérer la poursuite de la précision.

Analyse de ce curriculum :

Cette présentation appelle quelques remarques :

Les aires :

L'introduction est conforme aux conceptions antérieures, mais le recours aux surfaces est habile car il rend plus claires les différences entre les divers objets d'une même classe, à laquelle la mesure attribue la même valeur. Toutefois l'usage du matériel et la règle des échanges plaquent un exercice de numération inutile et qui renforce l'aspect de dénombrement imposé par la restriction à certaines figures, un sacrifice à l'idéologie de la manipulation.

La virgule :

La virgule et le chapeau ne portent aucune information lorsque le nombre est écrit dans un tableau, ce qui est toujours le cas dans la première partie du travail. L'écriture « mathématique » décomposée sous forme de polynôme aurait vraiment pu servir de base à une étude correcte du décimal. Mais cet épisode paraît assez fortuit et sans lendemain, l'auteur semble ne s'intéresser qu'à la transcription.

L'ordre :

L'étude de l'ordre des décimaux est réellement une innovation qui répondait, nous l'avons vu, à une insuffisance des méthodes antérieures, mais en quoi les raisonnements effectués ou les propriétés énoncées à propos du numérotage engagent-ils les décimaux-mesures déjà introduits ? Ou si ce sont des « nombres » nouveaux comment en concevoir la somme par exemple ?

Identification et évaporation :

a) Ces êtres n'ont en commun avec les autres que la manière dont on les écrits. Leurs représentations sont distinctes, isolées et cohabitent sans rapport — autre que formel. Pour raisonner sur l'ordre des « nombres à virgule » — mesure, il faut se souvenir de l'algorithme du rangement des livres. Aucune activité ne permet à une représentation nouvelle d'englober les deux précédentes (on aurait pu, par exemple, définir une distance entre les repères puis une mesure de ces « segments »).

b) Cependant c'est à partir de ces leçons que le décimal perd toute référence à une unité donnée. La virgule conserve un sens cependant, lorsqu'il s'agit de comparer ou d'additionner des nombres décimaux : elle indique le chiffre de l'unité utilisée pour chacun et qui est supposée être la *même*, même si on ignore laquelle (cette explication n'est ni demandée, ni fournie aux élèves).

Lorsque les nombres proposés n'ont rien à voir entre eux, et qu'il n'y a aucune raison de supposer que c'est la même unité qui a été utilisée, la disparition sans avertissement de l'indication de l'unité, fait, qu'au moment où la virgule pourrait porter effectivement et utilement l'information convenue, elle en porte une autre, on ne sait laquelle.

c) Or, l'identification entre le décimal-mesure et le décimal-opérateur n'a pas été construite. Au contraire, l'insistance sur leur différence de statut, renforcée par l'usage des diagrammes, ne la facilite pas. Aussi ne se fait-elle que de façon tout à fait formelle. Chaque conception hérite des propriétés et des règles établies dans l'autre par la magie de l'identité d'écriture. C'est pourquoi il était nécessaire d'utiliser le décimal — ni mesure, ni opérateur — comme pont formel : Toute représentation dans un exemple concret, non seulement n'apporterait aucune preuve de la légitimité de l'héritage, mais encore ferait obstacle à son fonctionnement (par plaisanterie nous avons appelé ce processus l'évaporation de l'unité).

d) Cette identification est un des problèmes fondamentaux de la création du sens des décimaux. Elle a été totalement négligée dans les études sur l'enseignement. Nous l'étudierons dans le cas des rationnels où elle ressemble beaucoup mieux à l'identification d'un espace vectoriel avec son dual.

Produit :

Pour la notion de produit, rien de nouveau non plus, mais il apparaît clairement que la compréhension — sans parler de la signification — du calcul du produit repose sur la capacité d'identifier un nombre « concret » : [43 : 100] avec un opérateur (x 43) . (: 100).

En conclusion, le décimal est toujours introduit pour représenter une mesure faite avec une unité assez petite et exprimée à l'aide d'un autre multiple.

Ce décimal là est toujours un naturel « concret ». Par contre, le système métrique a été rejeté comme signifié principal du décimal. Son étude occupe une place excessivement modeste (un exercice de présentation pour chaque grandeur : longueurs, surfaces, volumes, masses). Les algorithmes de calcul sont présentés de façon classique même si la justification du calcul joue un rôle beaucoup plus important et s'appuie sur un formalisme assez lourd (non mathématique mais faisant l'objet d'un apprentissage prolongé : les machines).

Ainsi, les caractères relevés comme typiques des méthodes des années 60 sont, pour la plupart, conservés dans ces ouvrages présentés comme très novateurs.

Etude d'un curriculum typique des années 70 :

Le manuel le plus répandu à la suite de la réforme de 70 fut probablement celui de Mme Touyarot (Itinéraire mathématique — Nathan 1976).

Les choix :

Les choix sur les questions qui nous intéressent y sont les mêmes : introduction comme mesure de cardinaux finis avec changements d'unités puis « évaporation » de l'indication de l'unité, ce qui permet, dans la comparaison de deux naturels et dans celle de deux décimaux d'avoir deux algorithmes différents — fournis sans justification — pour ranger dans le même ordre des nombres qui sont toujours considérés comme des naturels.

Propriétés des opérations :

Alors que les propriétés des opérations dans les naturels sont fondées explicitement sur l'examen d'une représentation (les opérations ensemblistes — mais les termes de « réunion » et « d'intersection » ne sont pas prononcés), celles de ces opérations dans les décimaux sont simplement empruntées aux précédentes, attestant qu'avec cette représentation, il n'y a plus ni problème, ni débat, ni même nouveauté. Le décimal n'existe plus comme être mathématique mais seulement comme transcription d'un être déjà connu.

Produit :

Pour le produit de deux décimaux, l'élève est invité à constater que « un paquet de sucre contient 168 morceaux de sucre donc 1,68 centaines de morceaux; 28 paquets de sucre contiennent 1,68 x 28 centaines de morceaux ». D'autre part ces « 2,8 dizaines de paquets de sucre contiennent bien 16,8 x 2,8 centaines de morceaux de sucre puisque une dizaine de paquets de sucre en contient 16,8 centaines de morceaux. Donc : (évaporation)

$16{,}8 \times 2{,}8 = 1{,}68 \times 28$

Opérateurs :

Beaucoup plus tard, le décimal opérant dans les naturels puis dans les décimaux est défini comme une application :

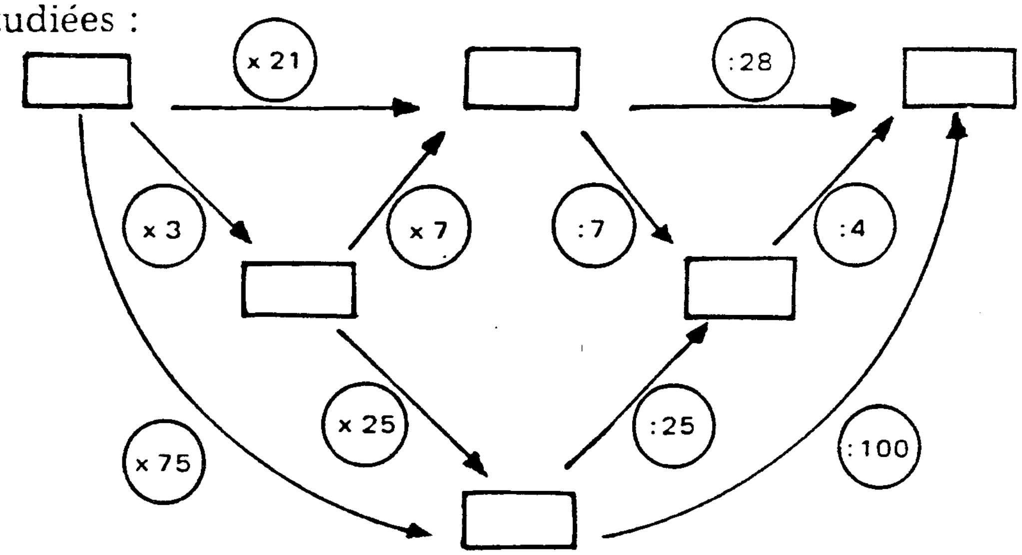
(x 2,5), ce qui permet de présenter les données de problèmes relatifs à la règle de trois.

Les fractions :

Elles sont définies ensuite comme opérateur réduit d'une chaîne d'opérateurs elle-même présentée sans référence à une situation-problème quelconque. Elles « s'utiliseront » plus loin.

L'ouvrage revient alors sur la notion de décimal pour montrer qu'une fraction (opérateur) peut parfois, par décomposition et recomposition, être « égale » à un opérateur décimal. Curieusement, dans cet ouvrage, où pourtant ne figurent que très peu d'exercices dans les bases non décimales, l'expression « nombre à virgule » se substitue au mot « décimal » très fréquemment et sans raison apparente.

Par exemple pour « établir » que $\frac{21}{28} = \frac{75}{100}$ on procède par une démonstration pénible et illustrée d'un nouveau type de diagramme dont les conventions n'ont pas été étudiées :



Mais on ne sait pas d'où vient que $\frac{75}{100} = 0{,}75$ ((x $\frac{75}{100}$) = (x 75) . (: 100) = 75 : 100, nous retrouvons le même obstacle), ni pourquoi pour obtenir le même « résultat », il suffit de diviser 21 par 28 en écrivant à droite du dividende autant de zéros qu'il est nécessaire pour obtenir finalement un reste nul. (Pour la circonstance, le discours s'émaille d'inconnues : x,y,z pour la première fois dans le cours). On trouve seulement un exercice d'approximation pour expliquer et prendre en compte les cas où la division « ne se termine pas » ($\frac{10}{11}$).

Conclusion :

Cet ouvrage éclectique conserve le canevas ancien et l'illustre de tous les apports nouveaux de l'époque. Les problèmes sont nombreux et très variés. L'enseignant ne sait lesquels choisir et ne voit pas bien comment la solution de l'un facilitera pour l'élève la résolution d'un autre. Ce qui veut dire qu'il n'y reconnaît pas les contenus d'apprentissage auxquels il est habitué. Le vocabulaire est lui aussi le résultat d'une négociation de circonstances : quelques termes nouveaux, rattachés à des objets anciens. Mais qu'un obstacle se présente comme dans la démonstration du paragraphe précédent et le langage mathématique reparaît avec tout l'arsenal des innovations didactiques de cette époque. Il témoigne clairement d'une négociation difficile dont nous allons maintenant examiner les conditions.

Les idées pédagogiques de la réforme :

La réforme vise les contenus :

Contrairement aux mouvements pédagogiques antérieurs, la réforme des années 70 visait principalement à modifier le contenu, la formulation, l'organisation et l'ordre d'introduction des connaissances mathématiques enseignées. Si elle était accompagnée souvent de prises de positions pédagogiques aucune ne lui était spécifique. Ayant constaté qu'à part quelques compléments et changements de vocabulaire la conception de l'enseignement des décimaux n'avait pas fondamentalement changée, on serait tenté d'en inférer que les difficultés des élèves devraient être les mêmes.

Or nous allons voir qu'au contraire la modification des contenus conduisit à celle de la conception de l'apprentissage, à la réorganisation des activités des élèves et à celle de l'enseignement des mathématiques.

Cette réforme prétendit avant tout être celle des contenus :
— les connaissances mathématiques avaient été réorganisées et unifiées;
— le vocabulaire avait donc changé, on avait de nouvelles exigences quant à la rigueur, le champ d'application des mathématiques s'était élargi en partie grâce à la fécondité de cette réorganisation;

— l'unification devait permettre une meilleure efficacité de l'enseignement en lui permettant d'apprendre, moins pour résoudre plus mais surtout pour apprendre à apprendre.

C'est pourquoi elle fut demandée, promue et animée par les mathématiciens. Mais la conception même de cette unification portait en elle des hypothèses sur le fonctionnement des mathématiques, en tant que « théorie des structures »(*). Celles-ci, détachables du contenu « peuvent être conçues indépendamment de la nature des ensembles de base ».

Remarquons : dans cet article d'ailleurs, l'auteur insiste, à travers deux exemples, sur l'importance pour une science neuve de se placer dans le domaine proprement mathématique de la déduction totale, position en rupture avec la méthode inductive, l'abstraction extensive et l'accumulation de faits expérimentaux qui prédominent dans les sciences encore jeunes. Il conclut : « Nos modes de connaissance sont bien mathématiques, à eux sont indissolublement liés nos pouvoirs », ce qui à la fois justifie socialement le projet de la réforme et lui donne son fondement psychologique et scientifique.

Ainsi, puisque les mathématiques sont un moyen de fabriquer la connaissance, apprendre les mathématiques c'est apprendre à apprendre. Pour beaucoup, les nouvelles mathématiques sont donc organisées comme un *langage* formel dont la *sémantique* est la théorie des structures dont on peut exhiber la synthèse et qui s'applique dans différents domaines en subissant des adaptations relevant de la *pragmatique* (conception structuraliste). Cette conception permettait d'espérer des apprentissages séparés contrairement à ce que permettaient de penser les travaux de Piaget.

L'enseignement des structures :

Si l'on veut accepter le pari d'organiser l'acquisition de ces mathématiques par les enfants il faut donc dire comment ces structures peuvent s'approprier d'emblée. En effet, l'économie du projet structuraliste consiste à refuser d'inscrire le sens des structures dans une histoire du sujet en

(*) Cf. remarques sur les mathématiques et la réalité de LICHNEROWICZ 1967 (In : Logique et connaissance scientifique. p. 477) p. 474-485. Encyclopédie de la Pléïade. NRF 1969.

interaction avec des situations trop riches ou trop nombreuses où ces structures s'englueraient et prendraient des significations et des limitations trop particulières. De plus, les idées pédagogiques de l'époque conduisent à rejeter une étude scolastique du discours mathématique.

Ce problème a reçu plusieurs tentatives de réponse. Nous ne retiendrons que celle proposée par Diénès que nous considérons comme la plus représentative et la plus explicite. Nous signalerons, toutefois, une manière de s'y dérober fréquemment observée.

Elle consistait :
— en s'appuyant sur les travaux de Piaget à penser que justement l'épistémologie génétique montrait l'apparition non pas de connaissances élémentaires mais de structures entières et, cela, dans une genèse qui procédait du général au particulier;
— et à conclure, avec une référence douteuse aux idées de Rogers que l'activité des sujets et leur développement naturel conduisaient aux appropriations fondamentales visées, à condition que l'on n'y fasse pas obstacle par une didactique normative intempestive. Cette position ne fournissait pas de pratiques didactiques « communicables » mais justifiait beaucoup d'expériences « pédagogiques sauvages » (*) qui prétendaient rejeter les « méthodes traditionnelles ».

Par contre, Diénès, propose explicitement une solution qu'il illustre de nombreuses leçons et de matériels nouveaux (**).

Le processus, qu'il appelle « psychodynamique » se déroule, généralement en six étapes :
— étape ludique;
— jeux structurés;
— jeux isomorphes et abstraction;
— schématisation et formulation;
— symbolisation et formalisation;
— axiomatisation.
mais s'accompagne de phénomènes comme, par exemple, celui de la généralisation.

(*) Selon une terminologie de l'INRDP.
(**) MAUDET : Etude et critique du processus psycho-dynamique selon Diénès. Mémoire de DEA. Université de Bordeaux 1979.

Le processus psychodynamique de Diénès :

L'interprétation que nous allons en donner n'est pas entièrement conforme aux écrits de l'auteur, elle est une tentative d'approche de celle que les enseignants ont pu lui donner dans le contexte des idées de l'époque. Elle correspond en tout cas, à la plupart des exercices et des situations d'enseignement se référant à lui et que j'ai pu observer.

a) Un jeux structuré est un jeu dans lequel l'enfant agit selon des règles qui lui sont fournies soit formellement, soit par le contexte. La plupart du temps ces règles sont celles de la structure à découvrir.

Le cas typique est celui des groupes. Le didacticien choisit une réalisation dans un groupe, par exemple le groupe de Klein comme groupe de transformation d'un certain ensemble (par exemple quatre positions d'une poupée qui culbute, tourne et roule). Le maître présente cet ensemble, invite l'élève à effectuer les transformations, à les chercher toutes, à trouver celle qui, appliquée à ceci, donne tel résultat, celle par quoi peut-on remplacer cette autre, etc. Ces activités sont directement calquées sur des activités mathématiques et correspondent à des solutions d'équations, à des recherches de propriétés, etc.

Le mot « jeu » est utilisé dans le sens où on l'utilisait à l'époque en pédagogie. Il signifie que la situation est inhabituelle, dégagée d'obligations d'apprentissage, d'exigences scolaires, qu'on peut y prendre des libertés, qu'elle met en œuvre l'imagination, qu'on peut faire des découvertes, se les dire. Bien que l'élève soit mis devant le problème d'atteindre un objectif dans le cadre de règles qui lui sont données, la situation didactique n'est généralement pas organisée comme un jeu ordinaire, ni telle que le joueur ait plusieurs occasions d'essayer les diverses stratégies qu'il pourrait mettre en concurrence. Le terme « jeux » recouvre donc ici aussi bien des situations authentiquement ouvertes que des exercices très banals d'imitation et de reproduction de tâches. La situation mathématique est un *cadre* dans lequel s'insèrent des activités et non pas un moyen intellectuel qui commande le choix d'une stratégie optimale dans une situation-problème d'utilité familière.

Dans ces conditions les motivations seront encore exogènes, ne mettant pas en rapport le contenu en tant

que solution d'une situation reconnue intéressante.
b) Dans l'étape des jeux isomorphes, le maître propose, successivement, à ses élèves plusieurs jeux réalisant la même structure. Ceux-ci, doivent reconnaître d'eux mêmes entre ces jeux, les correspondances d'objet à objet, de relation à relation qui leur ont permis de transporter de l'une à l'autre de ces situations problèmes, comportements, propriétés et méthodes. Aux yeux du didacticien ces transferts sont déjà tenus pour la preuve que l'élève a pu établir entre les réalisations, une relation qui constitue l'appréhension encore implicite de l'isomorphisme, modulo la structure choisie et dont on prendra conscience dans la phase suivante.
c) L'abstraction consiste alors à identifier, en tant qu'objet de connaissance la « structure commune » à divers jeux isomorphes. La structure est ici l'ensemble des propriétés qui indépendamment des particularités de chaque exemple les régissent tous. Le didacticien doit donc produire un ensemble de réalisations présentant une «variabilité» convenable pour limiter la finesse de la structure abstraite. La recherche de la structure la plus fine doit être, elle, érigée en règle permanente, les réalisations formant la sémantique de la structure conformément à la définition de Carnap. Mais les raisons de cette recherche, du choix des exemples, et, de l'usage de cette structure ne sont pas accessibles à l'élève de sorte que pour lui il y a bientôt un contrat assez clair : il lui faut reconnaître ce que le professeur a caché dans les jeux, décoder son intention didactique selon une règle uniforme : chercher les ressemblances et les différences. Il faut remarquer que cette étape, contrairement aux précédentes n'appelle aucune décision nouvelle de la part de l'enseignant, elle ne comporte le plus souvent aucune situation-problème spécifique : elle apparaît comme une réponse, entièrement à la charge de l'élève, donnée aux étapes antérieures qui en sont à la fois la condition nécessaire et suffisante.

C'est à mon avis l'existence du contrat didactique qui assure le fonctionnement du processus, et non une quelconque loi de la genèse de la connaissance. L'abstraction n'est pas fatale. En effet les commerçant n'ont jamais abstrait les structures de modules qui règlent leurs échanges permanents parce qu'ils n'avaient pas de motivation à le faire.

d) La schématisation et la formulation de la structure poursuit le processus d'identification et de mise à jour. Diénès ne prévoit pas de situations générales spécifi- jour. Diénès ne prévoit pas de situations générales spécifiques de cette étape (ce qui se conçoit bien s'énoncerait-il clairement ?) mais la représentation par un graphe est souvent envisagée comme une expression simplifiée mais naturelle et directe de la pensée de l'enfant. Figurer les objets par des points et les opérateurs par des flèches s'apprend par l'usage de l'imitation, comme un langage.
e) La symbolisation est la transcription dans un nouveau langage des propriétés représentées à l'étape précédente.
f) L'axiomatisation est l'étape de réorganisation de la connaissance acquise, du choix des propriétés fondamentales de la mise en place des structures les unes par rapport aux autres; cette position étant bien entendu celle assignée par l'état actuel des connaissances mathématiques (qui doivent donc s'identifier, se figer, en « mathématique moderne » pour devenir une référence didactique). Cette étape se déroule elle aussi suivant la démarche précédente jeux libres, avec règles isomorphes, formalisation...

Et ainsi apparaît la nature de ce processus psychodynamique. La connaissance n'est pas organisée comme une réponse adaptable, adéquate, économique et personnelle à des situations-problèmes, elle est fournie toute armée par la culture qui en assure la validité et l'utilité future et ne laisse à l'élève que la possibilité d'adhérer. Elle est seulement un peu cachée suivant une fiction régulière conventionnelle et simple. Ce que l'élève doit faire pour la découvrir est supposé être le fonctionnement de la connaissance dans toutes les situations didactiques ou non. La méthode de Diénès est un langage de communication avec les élèves, un mode de codage didactique de la connaissance qui est supposé ne pas en modifier la nature (conformément à ce qu'affirme Bruner) et c'est un contrat didactique avec les élèves, pour le décodage des messages. Certes cette méthode d'exposition promet d'être très lente et de ne convenir qu'à des exemples très simples.
g) C'est pourquoi elle est reprise par le processus de généralisation et son antagoniste la particularisation : Une fois connus les axiomes d'une structure, il est possible d'en

abandonner certains, ou d'en arrêter d'autres et ainsi d'admettre le débat constitutif de la science. Diénès donne comme exemple de ce processus le schéma suivant :

$$\begin{tikzcd}
& Z \arrow[dr] & & & \\
N \arrow[ur] \arrow[dr] & & Q \arrow[r] & R \arrow[r] & D \\
& Q \arrow[ur] & & &
\end{tikzcd}$$

Processus psychodynamique et pratique pédagogique

Le contrat dont nous parlions plus haut s'appuie sur une fiction épistémologique et psychologique très répandue (à l'époque) et reprend des pratiques professionnelles bien établies :

a) Les comportements des élèves sont supposés être essentiellement empiriques : leurs rapports répétés avec la « réalité » des situations didactiques font surgir les structures qui y sont incluses comme la « gestalt » dans la perception. Ce processus d'abstraction s'interprète parfaitement dans la théorie des traces mémorielles.

b) L'acceptation du modèle empiriste pour rendre compte du fonctionnement de l'élève s'appuie sur une *position traditionnelle* fondamentalement réaliste et presque platonicienne des enseignants : la réalité a des structures que l'homme découvre, le professeur est porté à simuler la nature en cachant les structures qu'il veut enseigner, la découverte étant une lecture du monde.

c) La technique des jeux isomorphes correspond à la *pratique ancienne* de la répétition des problèmes pour en enseigner la résolution (en les classant autour de types qu'il faut reconnaître). Sur ce point, la méthode nouvelle peut ainsi s'opposer à l'ancienne et en même temps s'y substituer sans modifier sensiblement les pratiques.

d) La position ancienne devait séparer l'apprentissage du savoir-faire et celui du sens. La nouvelle permet d'espérer fondre les deux car elle assure au professeur que la signification de la structure qui est finalement apprise et les algorithmes qui y sont attachés n'est rien d'autre que l'ensemble des réalisations qu'elle décrit et, inversement, l'abstraction se produit fatalement par le processus même qui engendre la mémorisation. Mais en fait la « structure » va se substituer aux savoir-faire et l'apprentissage du sens encore plus négligé. On assistera même à la disparition des problèmes.

e) Le structuralisme triomphant des années 70 assure, quant à lui, l'utilité et la fécondité de ces acquisitions.

f) La didactique de Diénès satisfait en même temps des conditions qui paraissaient, auparavant, contradictoires : pour chaque structure la construction précède l'analyse et le maître entend que l'on procède du concret à l'abstrait, de la manipulation et de l'action à la réflexion, du jeu à l'étude puis à l'application. Mais on peut commencer par enseigner les structures les plus générales donc les plus simples pour finir par les plus particulières et les plus complexes.

g) La reformulation en langage mathématique (isomorphisme, réalisation,...) ou mathématique des phénomènes psychologiques ou didactiques est conforme au projet pan-mathématique qu'exprimait plus haut Lichnerowicz et conforme aussi à un usage Piagétien. Elle joue un grand rôle dans l'émergence d'une première « théorie » didactique dont la valeur n'a pas besoin de s'enraciner dans l'expérience, selon ses propres schémas, autrement que par une reconnaissance, in situ, dans le travail d'enseignement : la théorie est vraie parce que l'enseignement qu'elle décrit, marche.

h) Un revers de cette conception a été qu'elle a déchargé les enseignants de la responsabilité d'assurer certaines étapes en « garantissant » les résultats de la méthode par des lois psychologiques.

Par exemple les problèmes, au sens classique ont disparu en tant que pratiques et en tant qu'objectifs : il ne s'agissait guère que d'applications que l'acquisition des structures devait rendre possibles le moment venu.

i) D'autre part la position de Diénès n'était pas incompatible avec la plupart des théories pédagogiques que nous avons évoquées plus haut. De plus, Diénès a pris des positions intéressantes mais indépendantes de sa théorie didactique.

Influence sur l'enseignement des décimaux du processus psycho-dynamique et critique

Revenons à l'enseignement des décimaux *et* reprenons notre analyse des modifications dues à la réforme, à la lumière de ces données.

A la référence du système métrique et aux pratiques qui lui sont liées, on a préféré présenter différentes bases, d'abord la base 2 où le nombre des unité différentes est plus rapidement croissant et les manipulations plus simples. Les conditions de la reproduction d'activités de numération sont facilitées mais aucun problème nouveau n'apparaît et ces réïfications ne sont que des répétitions.

De plus, les vrais problèmes de la mesure : le caractère non discret, la recherche d'une unité et d'un moyen de comparaison et de report, l'encadrement, les erreurs, tous ont été gommés au départ et renvoyés à une entrée ultérieure et solennelle. Les activités ne se réfèrent plus, ni à une utilité pratique, ni à une justification théorique explicite ou construction. Il est révélé à l'élève que puisqu'il a fait telle tâche, il vient de découvrir telle propriété. La structure, qu'un observateur juge présente, dans la situation-problème, est réputée être entrée dans les acquisitions de l'élève par le fait même de son succès à l'épreuve comme si le labyrinthe dans lequel on a placé un rat était connu de lui en tant que tel dès qu'il en est sorti une ou deux fois.

Je ne crois pas que Diénès ait dit ou pensé ainsi, mais rien dans sa « théorie » didactique ne permet au professeur de prendre en compte les comportements des élèves, de les expliquer et de les prévoir, lorsqu'ils sont « erronés » et d'y adapter les situations d'enseignement. Par exemple, c'est la confiance dans la providence ou dans la prévoyance des hommes ou de celle de l'enseignant qui permet aux élèves d'admettre que les décimaux mesure héritent de certaines propriétés des décimaux-repères. On ne peut rien dire de la signification de la réussite ou de l'échec de l'élève.

Conceptions et situations

Ce n'est pas le lieu ici de faire une critique systématique de l'œuvre si intéressante de Diénès mais il faut bien voir l'obstacle principal sur lequel elle bute et qui est celui de l'engagement de la connaissance dans l'action finalisée. Une « structure mathématique » prend sa signification dans l'emploi qui en est fait, dans la fonction qu'elle joue, dans la constitution des autres, et surtout dans les problèmes qu'elle a permis de résoudre. C'est au niveau du concept qu'il faut l'envisager. L'analogie de fonction dans un même problème n'est pas, bien évidemment garante qu'il existe un isomorphisme entre les structures qui la présentent, mais surtout, l'observation entre deux cas d'un isomorphisme n'est aucunement garante d'un fonctionnement analogue de deux situations.

Le structuralisme, instrument fécond pour la recherche, devient dans l'enseignement, une magie trompeuse.

En fait, les travaux de Diénès, s'ils ont bien installé le contenu au centre du débat d'enseignement, ne conduisent pas le didacticien à questionner les mathématiques pour y chercher, au-delà des *structures*, les *concepts* et au-delà des concepts, éventuellement les *conceptions* qui pourraient se forger chez un sujet dans des *situations* historiques ou didactiques particulières. L'analyse de ces conceptions, qu'il faudra que l'élève possède ou évite, est inséparable de celle de la famille des situations-spécifiques où elles prennent leur fonction et leur utilité. Toutes les deux sont inévitables dans toute entreprise qui prétendrait, à la fois fournir une théorie dotée de ses méthodes de confrontation (probablement spécifiques aussi) et de techniques didactiques continuement contrôlables par les enseignants. Les travaux de Diénès ne conduisent pas, et par voie de conséquence serions-nous tentés de dire, à interroger les *comportements* des élèves, non seulement en tant que réponse à une sollicitation didactique mais surtout en tant que source d'informations sur les questions théoriques de didactique.

Et c'est pourquoi peut-être, après ces deux longues études de pratiques d'enseignement on a l'impression de savoir si peu de choses sur les décimaux, sur les diverses conditions de leurs genèses et même de leur emploi ainsi que sur les comportements attestés ou possibles des élèves à leur sujet.

Quelques résultats en 1979

Hypothèse

D'autres méthodes sont apparues à la suite de la réforme. Bien que leur étude conduirait à préciser le champ des « variables » sur lesquelles jouent les didacticiens de cette période, nous ne la poursuivrons pas ici : d'une part, leur impact a été relativement plus faible, d'autre part, elles agissaient dans le sens que nous avons indiqué, parfois même de façon excessive. Nous estimons finalement que la conception est restée la même que dans les années 1960.

Illustration

Nous n'avons pas rapporté ici des travaux qui ont permis de mettre en évidence les phénomènes que nous avons signalés mais pour illustrer leur permanence, nous relevons ci-dessous quelques résultats d'une enquête récente de l'I. N. R. P. sur le comportement de près de 900 élèves* en les disposant de façon à illustrer les caractéristiques de la conception des décimaux que nous avons décrite plus haut. a) Techniques... Nous pouvons observer ainsi que les points sur lesquels les différences significatives apparaissent sont ceux que nous avions signalés : notre hypothèse n'est pas contredite.

Exercices sur $\mathbb{N}$	% réussite	Exercices correspondants dans $\mathbb{D}$	% réussite
ENCADREMENTS			
19225 et 499425	64	6,137 et 728,32	49
134900	56	57,05	50
340090	56	0,583	47
ORDRE			
INRDP (1977)	72	8 nombres	26
		- selon la partie entière	74
		- qui ont même partie entière	28
CHANGEMENTS D'ECRITURES			
Passage de l'écriture en chiffres à l'écriture en lettres			
176 et 5077	85	1,047 m	61
12075320	74	0,049 m	63
		16, 84 m	85
ADDITIONS			
4325128 + 92042 + 104095	89	45,25 + 0, 3451 + 3092,048	89
SOUSTRACTIONS			
315426 – 42975	61	1241,39 – 327,043	60
MULTIPLICATIONS			
7485×374	60	54,15×3,02	66
DIVISIONS			
8359 par 39	69	74,19 par 3,4	52

* Institut National de Recherche Pédagogique (unité de recher. mathémat. sur l'élémentaire). Enquête sur l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire. T. 1 : comportement des élèves (1979).

b) Conversions dans le système métrique.

Effectif : 940

4,15 m^2	$\longrightarrow$	dm^2	29%
3 m^2	$\longrightarrow$	1l	22%
5,25 l	$\longrightarrow$	cl	74%
0,13 t	$\longrightarrow$	kg	40%
2h 25 mn	$\longrightarrow$	mn	53%

c) Il est intéressant de rapprocher de ces résultats sur les techniques, ceux qui ont été obtenus à propos de la proportionnalité. Il s'agissait de calculer les proportions pour 12, 4 et 10 personnes d'une recette connue pour 6 personnes.

Effectif 947 :	12 personnes	4 personnes	10 personnes
Proportions correctes (y compris une fraction)	15	9	5
Deux proportions correctes (pourcentages)	50	24	19
Une proportion correcte	4	10	12
Donne les proportions pour une personne	12	12	13
Autres solutions fausses	19	45	51

Ce résultat est entièrement conforme à ceux obtenus par Alain Mercier* qui a montré que le formalisme des opérateurs (des machines) tendait à faire disparaître l'usage de la notion de rapport, surtout en tant qu'invariant dans une application linéaire, au bénéfice d'un calcul fonctionnel en général mal assimilé. La recherche de la proportion pour une personne correspond au début de cette procédure : elle devrait fournir la fonction linéaire qu'il faut appliquer aux valeurs de l'ensemble départ, mais, la valeur obtenue reste une mesure et l'élève en reste là.

Ces résultats sur les naturels sont valides pour les déci-

* Mercier A. : Etude des notions « opérateur » « machine » mémoire de D.E.A. soutenu en novembre 1978. Université de Bordeaux.

maux. Ils montrent peut-être que les élèves, bien qu'entraînés à la technique des opérateurs, n'ont jamais été beaucoup confrontés avec les problèmes que rencontrent les naturels dans ce rôle.

d) Les problèmes numériques :

Voici les pourcentages de réussite à quelques exercices, un peu complexes il est vrai, (avec usage de diagrammes, de tableaux de péage, de tarifs etc.) mais basés sur des calculs numériques dans $\mathbb{N}$ ou dans $\mathbb{D}$.

Calcul de la distance entre deux villes	15%
Calcul du prix de l'essence	0,8%
Calcul d'un tarif postal	48 à 54%
Calcul de distances sur une carte routière	14%
Sur des problèmes plus classiques de pourcentages, les réussites sont de l'ordre de	30 à 45%

e) D'ailleurs les auteurs concluent :

« En ce qui concerne les acquis traditionnels sur les techniques opératoires, les comparaisons qui ont pu être faites avec des enquêtes plus anciennes montrent que, contrairement à une opinion répandue, « le niveau ne baisse pas ». Les élèves d'aujourd'hui savent aussi bien faire des opérations qu'il y a vingt ans, et ont, de plus, la maîtrise d'outils que ne connaissaient pas leurs aînés. »

En revanche, les élèves du CE2 et du CM2 ont des difficultés pour résoudre des problèmes : il s'agit là de réinvestir leurs savoir-faire techniques dans des situations où ils soient pertinents. Cette faible disponibilité d'outils par ailleurs bien maîtrisés, constitue l'information la plus claire des résultats et renvoie aux multiples aspects de ce qui pour les enfants fait difficulté dans la résolution des problèmes.

Variables

D'autres études, que nous ne rapportons pas ici, montrent en fait que l'effet de variables telles que le nombre des chiffres maniés, le nombre des chiffres de la partie entière, la présence de zéros intercalés près de la virgule, l'égalité des nombres de chiffres après la virgule,... joue un rôle conforme au modèle.

4 - QUELQUES PROBLEMES DE L'ENSEIGNEMENTS DES DECIMAUX

L'examen détaillé mais quelque peu naïf des pratiques des vingt dernières années nous a permis

— d'une part d'identifier les difficultés que les élèves rencontrent dans l'apprentissage des décimaux,

— d'autre part de reconnaître les difficultés des conceptions didactiques classiques ou nouvelles à trouver une prise sur les résultats insuffisants.

Pour pallier à un échec dans l'acquisition d'une connaissance, la pratique habituelle consiste à renforcer l'apprentissage par des répétitions, la multiplication des exercices, l'adjonction d'explications et de méta-discours dans les objectifs d'enseignement,... et même de procédés didactiques ou mnémotechniques, ce qui a pour conséquence d'alourdir et d'allonger l'enseignement. Il faut donc en conséquence et en réaction à la fois, l'alléger en renvoyant à plus tard l'apprentissage de ce qui est considéré comme secondaire et en ne retenant que l'essentiel, le fondamental, les algorithmes pour les uns, les structures pour les autres.

Nous pensons que ces principes conduisent à des décisions qui peuvent rendre impossible la conception de situations capables de donner un sens convenable aux notions enseignées et donc d'en hypothéquer l'emploi et, de toute manière, ils empêchent la fabrication de situations didactiques nouvelles dans le domaine de l'innovation, de l'invention.

Nous nous proposons maintenant de poser le problème différemment et, anticipant sur les apports de la deuxième partie de cet article, d'esquisser les problèmes qui seront étudiés par la suite.

PROBLEMES D'ENSEIGNEMENT ET PROBLEMES DE MATHEMATIQUES

Pour comprendre les difficultés de l'enseignement des décimaux, il ne faut pas se borner à examiner les dysfonctionnements de l'apprentissage.

Le schéma classique, dans lequel l'apprentissage est la mise en mémoire d'une connaissance qui va s'appliquer, a permis une approche économique de la didactique. Il s'agit de décomposer l'organisation de l'enseignement en sous-tâches pouvant se concevoir indépendamment et s'exécuter séquentiellement. Chaque sous-tâche a pour fonction de permettre de :
— définir la connaissance visée, la réorganiser sous la forme la plus adaptée à sa communication ou à son apprentissage, la faire apprendre au sens de mémoriser sous cette forme et montrer comment on l'applique;
— placer cette sous-tâche dans un domaine de savoirs constitués ou sous contrôle d'une activité spécialisée : la discipline mathématique, les théories de la communication ou de l'apprentissage, ou de l'enseignement etc... Une utilisation naïve de ce schéma permet essentiellement aussi une décomposition des responsabilités et des contrats dans le déroulement de l'enseignement et fournit donc un cadre à l'interprétation des difficultés, des erreurs et des échecs. L'erreur est interprétée comme l'indice du non-fonctionnement d'une des séquences prévues, d'un écart entre un projet et sa réalisation : le savoir a été mal appris, mal retenu, ou mal appliqué, ou mal compris, mal relié aux autres savoirs... Les difficultés sont celles de l'élève ou celles de l'enseignant, ... ou celles de l'enseignement : les objectifs sont mal précisés, mal communiqués, les moyens sont insuffisants, les résultats mal évalués... etc.

Nous nous proposons ici d'essayer une autre approche : l'apprentissage est une adaptation de l'élève à une situation-problème nouvelle (*). Les difficultés qu'il rencontre sont donc fondamentales pour provoquer cette adaptation. De plus, elles peuvent être constitutives du nouveau savoir, c'est-à-dire être indispensables à sa compréhension (**). Ces difficultés sont celles que portent en elles la conception antérieure de l'élève et la situation-problème choisie les a seulement révélées. La nouvelle conception apparaît parce qu'elle est une solution à ces difficultés. Elle est une rééquilibration des systèmes de réponse de l'élève (*) soit qu'elle

(*) PIAGET : « Théorie de l'équilibration ».
(**) BACHELARD : « Notion d'obstacles épistémologiques dans la formation de l'esprit scientifique ».

lève les contradictions portées par les anciennes conceptions, soit qu'elle apporte des simplifications substancielles.

Dans cette perspective (à laquelle nous nous référons souvent et que nous étudierons à nouveau), ce qui est, ailleurs, interprété comme une difficulté des élèves dans un apprentissage, devient alors une difficulté pour une ancienne conception à être remplacée par une nouvelle — lorsqu'elle est en difficulté dans la situation-problème présentée.

Autrement dit, pour comprendre l'apprentissage des décimaux, il faut chercher *qu'elles sont les situations-problèmes* dans lesquelles ils sont de façon évidente une meilleure solution que les autres structures, en particulier celles déjà connues de l'enfant.

Il s'agit donc maintenant d'un couple de *problèmes mathématiques* (eux-mêmes formés d'un couple situation-conception) à comparer selon des critères à déterminer. On peut espérer mathématiser aussi cette comparaison en l'interprétant en termes d'économie sur les variables à déterminer. C'est la direction dans laquelle doit s'avancer la didactique aujourd'hui.

EPISTEMOLOGIE ET MATHEMATIQUES.

Ce point de vue ne permet pas de rendre bien indépendantes la recherche et l'étude des conceptions particulières relatives au concept de décimal et la détermination des situations qui pourraient leur être associées. C'est pourquoi il n'y a pas encore de méthodes très naturelles de recherche. C'est seulement après coup qu'on peut mettre à l'épreuve le choix des variables pertinentes et acquérir la conviction qu'il est bon.

La méthode la plus tentante consiste à prendre les changements de couples « situation-conception » là où ils se sont produits pour l'humanité, c'est-à-dire dans l'histoire. L'étude de la genèse des concepts constitue la méthode la plus féconde de l'épistémologie moderne.

Nous savons que nos connaissances ne nous permettent pas encore de fabriquer et de contrôler des transpositions didactiques satisfaisantes pour un usage éducatif. Il n'est pas question, de toute manière, de réintroduire la méthode historique dans l'enseignement mais de comprendre les mécanismes de production des savoirs qui nous intéressent en termes de *conditions reproductibles.* L'autre méthode intéresse plus spécialement les mathématiciens et consiste en une étude a priori des différentes manières de constituer des notions. L'explicitation des contraintes auxquelles on a obéi consciemment, ou non, peut, elle aussi, fournir des indications intéressantes. Nous allons conjuger ces deux méthodes pour la recherche des questions auxquelles la construction des décimaux est une réponse adéquate.

Dans la mesure où ces réflexions ne servent qu'à la constitution du problème épistémologique qui sera mis en expérience et où nous ne cherchons pas à conclure directement sur la foi d'opinions didactiques conscientes ou non, nous pouvons les accepter tous les deux, concurremment et conjointement.

LA DETERMINATION DES CONCEPTIONS ET DES SITUATIONS.

Anticipant sur les résultats de l'étude théorique à venir dans la deuxième partie de cet article nous allons rapidement passer en revue les questions qui se posent et les choix qui peuvent s'ouvrir.

Pour construire les décimaux il suffit de considérer l'ensemble $\mathbb{D}^+$ engendré en adjoignant à $\mathbb{N}$ un élément d tel que $10d = 1$ et de poser que l'ensemble obtenu est muni d'opérations qui prolongent celles de $\mathbb{N}$ en gardant les mêmes propriétés fondamentales.

En considérant $\mathbb{N}\ [d]$ avec $10d = 1$ on obtient un codage prolongeant celui de $\mathbb{N}$, et tout élément $x \in \mathbb{D}$ s'écrit sous la forme $x = \Sigma a_i 10^i \quad i \in \mathbb{Z}$. Alors ayant conservé tout ce que l'on désirait, on peut montrer que $\mathbb{D}^+$ est totalement ordonné (contrairement à $\mathbb{N}\ [x]$) par la relation $a \leqslant a' \Longrightarrow \exists a'' \in \mathbb{N}\ [d] \quad tq\ a' - a = a''$, dense et archimédien. Les seuls éléments de $\mathbb{N}$ qui sont inversibles dans $\mathbb{N}\ [d]$ sont les multiples des diviseurs de d. Mais pour tout nombre décimal a il existe un décimal a' qui peut jouer le rôle d'inverse de a avec la précision e quelconque voulue :

$$0 < 1 - aa' < e$$

On peut alors montrer que $\mathbb{D}^+$ est dense dans $\mathbb{Q}^+$ et que $\mathbb{R}^+$ est le complété de $\mathbb{D}^+$.

Cette construction est celle qui décrit le mieux la construction directe que nous avons décrite comme étant typique en 1960. (Il faudra dire en quel sens).

Nous verrons qu'elle correspond assez bien, d'une certaine façon, au processus que l'on peut prêter au travail de Simon Stevin qui construisit les décimaux pour unifier la notion de nombres rationnels et radicaux en particulier, à la suite d'études sur les fonctions polynômes (Les multinômies).

Malgré cela, cette construction, comme d'ailleurs toutes celles que l'on a avancées à priori, fait disparaître les problèmes que la structure est chargée de résoudre.

Elle correspond certes à la meilleure récupération des connaissances antérieures des propriétés de $\mathbb{N}$, mais ne favorise pas une rupture qui permettrait de bien différencier $\mathbb{D}$ de $\mathbb{N}$.

Elle ne permet pas surtout de maîtriser la notion d'homothétie et de l'identifier avec les nombres déjà construits.

F. Colmez a montré dans une série d'expériences du type des nôtres qu'aujourd'hui les élèves confrontés à des problèmes d'invention des moyen de mesure, reconstruisent sans difficulté des décimaux-mesure selon un schéma qui n'est pas éloigné de celui que nous avons adopté.

DE L'ORDRE DISCRET A L'ORDRE DENSE.

Si on veut fonder $\mathbb{D}^+$ contre $\mathbb{N}$ il faut donc une situation où l'on a besoin que chaque élément ait un inverse, et où on a besoin d'un ordre dense. Selon que l'on choisira certaines situations, certains ordres de grandeurs, ou d'autres..., la solution la meilleure sera $\mathbb{Q}^+$ ou $\mathbb{D}^+$ ou seulement $\mathbb{R}^+$.

$\mathbb{Q}^+$ est une structure très incommode pour la mesure, pour les calculs pratiques de sommes et de différences, pour des comparaisons, donc pour la topologie de la droite. Peut-être est-il plus favorable de fabriquer $\mathbb{D}^+$ pour pallier aux insuffisances de $\mathbb{Q}^+$ plutôt que de $\mathbb{N}$?

Il pourrait ainsi apparaître clairement que $\mathbb{D}^+$ est une approche d'une structure connue (et non pas « quelque chose »). Mais en fait pourquoi pas une non-approche des nombres algébriques ? Historiquement ce n'est pas $\mathbb{Q}$ que $\mathbb{D}$ est chargé d'approcher. R. Douady a longuement étudié une réalisation didactique dans cette voie (Voir article *infra*).

DE LA MESURE AUX HOMOTHETIES DE D.

Il est finalement relativement facile d'obtenir l'usage des décimaux-mesure, en tant que semi groupe additif à opérateurs naturels. Nous avons vu que la notion d'application linéaire de D dans D l'est moins, et surtout la désignation de ces applications linéaires à l'aide de nombres précédemment utilisés pour les mesures. Il y a là une opération qui correspond à l'identification d'un espace vectoriel avec son dual et qui appelle des situations et des processus appropriés. Comment concevoir cela à un niveau élémentaire ? Est-il possible dans ce rôle de faire l'économie de l'étude de $\mathbb{Q}$ en tant qu'ensemble des opérateurs archimédiens ? C'est seulement dans $(\mathbb{Q}^+)$ que le produit de deux rationnels prendrait tout son sens. L'approche de ces opérateurs à l'aide des opérateurs décimaux est-il un problème différent par le sens de celui posé au paragraphe précédent ?

DE LA STRUCTURE AUX REPRESENTATIONS.

Comment passer de cette terminologie mathématique à des conceptions d'élèves ? Est-il possible de constituer une représentation efficace et correcte de la notion de décimal, qui constitue un sens des algorithmes permettant leur usage ?

On peut imaginer — et l'histoire l'atteste — qu'il existe des représentations différentes pour les décimaux.

Par exemple : R_1 : 0,3 est « ce qui multiplié par 10 est égal à 3 »

R_2 : 0,3 est « 3 fois la dixième partie de 1 »

Pourrons-nous en choisir une autre, que la représentation dominante, et l'enseigner pour en observer les effets ?

Nous verrons que si on fait réellement fonctionner la pensée mathématique-créatrice des élèves, il faut aussi accepter que des conceptions transitoires éventuellement fausses se créent chez eux. Comment peut-on provoquer leur rejet ou leur abandon ?

DES CONCEPTIONS AUX SITUATIONS.

Comment élaborer des situations qui fassent réellement fonctionner une notion ? C'est-à-dire qu'on ne peut pas

répondre sans mettre en œuvre cette notion et sans lui donner un sens. De quels paramètres dépendent qualitativement les procédures qui attestent l'usage de cette notion ?

Comment rendre une assimilation (au sens de Piaget) nécessaire, quand une accomodation (id) est-elle indispensable ?

Voici quelques unes des questions spécifiques qui se posent à propos de la didactique des décimaux et auxquelles nous essayerons d'apporter des éléments de réponses.

A travers cette étude se posent d'autres questions plus générales comme par exemple celle de la reproductibilité en didactique, ou même de la possibilité de réaliser des expériences scientifiques. Nous essaierons de les aborder aussi.

PROBLEMES DE DIDACTIQUE DES DECIMAUX

I - Introduction

Nous avons analysé en détail différentes manières d'enseigner les nombres décimaux utilisées en France pendant les vingt dernières années, notamment celles qui ont suivi la réforme des années 70. Nous avons montré que les résultats scolaires n'étaient guère affectés par les variations qui opposaient les différentes méthodes, et qu'ils présentaient toujours certaines faiblesses. Nous avons émis l'hypothèse que ce fait était dû aux déficiences des conceptions didactiques en usage et de leurs bases épistémologiques. Le manque d'études dans ce domaine — notamment en ce qui concerne l'analyse des situations d'enseignement, des processus d'apprentissage, de la tâche du maître — conduit les différentes pratiques à obéir à une même conception des décimaux.

Pour pouvoir être étudiés expérimentalement, les *problèmes d'enseignement* doivent finalement s'exprimer par des choix théoriques qui se traduisent eux-mêmes par des méthodes réalisables.

Il s'agit d'abord, dans cette deuxième partie, de montrer qu'il existe de véritables alternatives à la conception dominante de ID, et par là, de mettre en évidence certains de ces choix didactiques qui s'offrent à l'enseignant.

Nous présenterons donc une expérience conçue en relation avec une analyse mathématique, historique et épistémologique des différentes conceptions des nombres naturels et des nombres décimaux, en détaillant les principales caractéristiques des processus et des situations qui rendent les élèves capables d'acquérir ces conceptions. Afin de contrôler cette approche théorique, le même processus a été reproduit huit fois avec les mêmes maîtres et cinq fois avec des maîtres differents. Nous avons tenté de mettre en évidence le rôle des variables de commande et la part des décisions didactiques dans l'évolution du processus qui ne se présente pas comme une méthode optimale du point de vue éducatif.

Cet essai d'« épistémologie expérimentale » permettra de chercher de nouveaux critères pour analyser les processus d'enseignement.

Ces critères seront signalés à l'occasion, et de courtes études des quelques questions de didactique, parmi les plus importantes, seront insérées dans le cours du récit. Car nous souhaitons aussi, à cette occasion, entamer un débat sur les rapports qu'entretiennent les problèmes d'enseignement avec les domaines scientifiques connexes déjà constitués, d'une part, et avec *les problèmes de didactique*, d'autre part. Nous insisterons sur la complémentarité des deux aspects — phénoménotechnique et scientifique — de la didactique.

2. Conception générale d'un processus d'enseignement des décimaux

2.1. Conclusions de l'étude mathématique

2.1.1. Axiomatique et choix didactiques implicites

Il existe bien des manières de définir mathématiquement ou de construire les décimaux. Elles diffèrent par le choix de ce que l'on considère connu comme objets mathématiques et comme méthode de démonstration, mais leur résultat est le même, en ce sens qu'il existe un moyen de montrer l'équivalence, l'isomorphisme des structures obtenues. Chacune de ces constructions axiomatiques est dans le champ des mathématiques; par contre, l'étude de ce qui fait leurs différences, les raisons des choix, de ce qui est admis ou non, de ce qui est important ou non, facile ou non... ne relève pas des mathématiques. Une construction axiomatique est chargée implicitement d'options épistémologiques, de présupposés didactiques qu'il faut se garder de croire nécessaires au même titre que les conclusions mathématiques, mais par lesquels il faut bien passer pour obtenir un discours qui permet de communiquer la notion. Deux méthodes diffèrent par le choix des axiomes et des règles de production des théorèmes.

2.1.2. Transformations du discours mathématique

Il existe aussi des procédés formels qui transforment un discours mathématique en un autre relevant de la même axiomatique. Ces procédés affectent plus ou moins profondément le discours :

— la logique permet le changement de l'ordre des énoncés, diverses présentations des implications, (condition nécessaire ou condition suffisante mises en évidences) le regroupement en énoncés généraux, l'éclatement en lemmes et corollaires etc.

— la réthorique suggère ses figures de pensée, l'antithèse, la comparaison, la répétition* jusqu'à l'hypotypose et pourquoi pas la prosopopée** et nous ajouterons l'illustration, l'exemple, le commentaire etc.

— la grammaire et la stylistique permettent les reformulations en langage plus simple, le remplacement des termes par leur définition, le choix des synonymes etc. sans parler des procédures de présentations chères à Cagné (1980).

Ces divers procédés appliqués de façon presque automatique fournissent toujours un discours, un exposé que l'on peut espérer plus simple, plus clair, plus redondant... et donc plus intelligible, plus assimilable que le discours mathématique initial. Ce point de vue alimente un certain nombre de recherches qui, malgré tout leur intérêt , n'ont pas réussi à montrer que ces procédés agissaient de façon spécifique et différenciée selon les notions et sur les acquisitions des élèves. Comme les méthodes pédagogiques dont nous avons étudié les effets dans l'article précédent, ces procédés ont en commun de ne pas remettre en cause, de ne pas interroger la construction mathématique elle-même.

2.1.3. *Métamathématique et heuristique*

Il existe un langage spécialisé dans la description et la comparaison de ces méthodes; il fonctionne dans le discours des mathématiciens, dans leurs commentaires, dans leurs cours et leurs confidences. A côté des termes authentiquement mathématiques parfois utilisés de façon métaphorique, des indispensables termes métamathématiques (qui décrivent le langage mathématique) et de certains termes paramathématiques, (considérés comme clairs bien que n'étant pas définis) on trouve essentiellement des concepts heuristiques : généralisation, synthèse, analyse, problèmes tels que les présente Polya dans ses ouvrages, ce langage, plutôt descriptif et classifiant chez certains de ses continua-

* Ici, le lecteur complaisant voudra bien insérer les 43 principales figures dont il trouvera la liste par exemple au mot «figure» dans le «dictionnaire alphabétique et analogique de la langue française» de Robert.

** Cf. Lucienne Félix.

teurs, permet néanmoins de s'interroger sur les différentes constructions d'une notion à partir de ses motivations.

2.1.4. Extensions et restrictions

Prenons, par exemple, une construction directe des décimaux $\mathbb{D}$:

* Considérons, dans $Z \times \mathbb{N}$, la relation d'équivalence $\sim$ $(a,n) \sim (b,p) \Leftrightarrow a.10^p = b.10^n$, la classe de (a,n) étant notée $\frac{a}{10^n}$

* $\mathbb{D} = Z \times \mathbb{N} / \sim$ est muni d'opérations stables par passage au quotient : $(a,n) + (b,p) = (a.\,10^p + b.\,10^n,\, n + p)$

$$(a,n) \times (b,p) = (a.b,\, n + p)$$

qui prolongent les opérations dans $\mathbb{N}$, identifié à $(\mathbb{N},O) \subset \mathbb{D}$

* $\mathbb{D}$ est ordonné par $(a,n) \leqslant (b,p) \Leftrightarrow a.10^p \leqslant b.10^r$

* Alors $(\mathbb{D}, +, \times, \leqslant)$ est un anneau commutatif unitaire intégre et totalement ordonné.

Cette méthode est typique d'une catégorie de constructions qui consistent à prendre une structure connue, ici Z et à en faire *une extension*, qui lui rajoute des éléments. Nous avons esquissé dans l'article précédent une construction de $\mathbb{D}^+$ par une extension de $\mathbb{N}$ qui procédait par *l'adjonction* d'un seul élément et tel que 10d = 1. Toutes les puissances de cet élément, leurs produits et leurs sommes avec un nombre fini des autres engendrent $\mathbb{D}^+$. Bien que produisant le même résultat, cette méthode permet de mieux «voir» que l'on a ajouté le moins de choses possibles à $\mathbb{N}$, et ce que l'on a ajouté. Par contre, elle exige une prise de conscience de ce qui représente toutes les opérations possibles d'un élément avec les autres, c'est-à-dire le semi-anneau des polynômes à coefficients naturels $\mathbb{N}[x]$. Elle suppose connue une structure plus complexe.

Il existe une autre catégorie de constructions qui procède à l'inverse par restriction. On a déjà défini une structure générale, par exemple $\mathbb{Q}$, et l'on se restreint à ne prendre qu'une partie de ses éléments. *Exemple :* les décimaux sont les rationnels exprimables par une fraction décimale.

$\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{D}$ tq $(\exists p$ tq. $x.10^p \in Z)\}$

Il existe bien d'autres méthodes fondées sur d'autres motivations mathématiques (problèmes d'ordre ou de topologie par exemple). Nous n'en rendons pas compte ici mais le lecteur pourra consulter Ermel (1981).

2.1.5. Motivations mathématiques

On peut aussi imaginer beaucoup d'autres extensions de $\mathbb{N}$. Pourquoi celle-là ? que permet-elle de résoudre que les autres ne permettraient pas ? Il est trop tôt pour chercher une situation précise qui rendrait nécessaire la création et l'usage des décimaux, mais c'est là qu'il faudra en venir.

Certains problèmes ne peuvent trouver de solutions dans certains ensembles parce que ceux-ci ne sont pas assez riches : par exemple, on ne trouve pas dans $\mathbb{N}$ de nombre tel que : (1) $a \times 3 = 2$, ou bien tel que $7 + a = 5$ (2)

Or, il peut arriver, dans certains domaines ou dans certaines applications que de telles équations aient, à l'évidence, toujours une solution : par exemple, on peut toujours partager une longueur en trois parties égales, même si elle mesure 2 m. Alors, on veut représenter par un nombre la longueur ainsi obtenue. Il faut donc construire une extension (ici de $\mathbb{N}$) dans laquelle ces équations sont toujours résolubles, $\mathbb{Q}$ pour (1), Z pour (2) ou tout autre structure qui les contiendrait.

On aurait pu construire $\mathbb{R}$, les réels, pour que toute suite de Cauchy y soit convergente ou $\mathbb{C}$, les complexes, pour que tout polynôme à une indéterminée non constante et à coefficients dans $\mathbb{C}$, y ait au moins une racine.

Et pourquoi une restriction ? Lors du plongement d'un ensemble A dans une extension B, tous les éléments de A ont toutes les propriétés communes aux éléments de B, mais l'inverse n'est pas vrai et les éléments de B peuvent avoir «perdu» des propriétés intéressantes. Par exemple, « n est le successeur de 17 » a une solution dans $\mathbb{N}$ et dans $\mathbb{D}$. Ainsi $\mathbb{D}$ hérite des facilités de calcul que l'on trouve dans $\mathbb{N}$; mais $\mathbb{Q}$ les a perdues, en particulier pour les différences, les comparaisons, le calcul sur les intervalles. Il arrive donc que l'on ait pu construire, par un moyen ou par un autre, un ensemble B satisfaisant pour y trouver la solution d'un problème, mais tel que les calculs ou les raisonnements y soient pénibles. On cherche alors un sous-ensemble, une

restriction A de B, tel que tout élément de B puisse être représenté, approché par un élément de A sur lequel les calculs seront plus faciles :
$\mathbb{D}$ approche $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$ parce que, pour tout réel, quelle que soit la tolérance que l'on s'accorde, il existe toujours un décimal dont la distance à ce réel soit inférieure à la tolérance choisie.

Des problèmes de ce genre se rencontrent très fréquemment en mathématique où l'on veut souvent étudier tous les objets engendrés par un système générateur ou au contraire chercher un système générateur commode pour un ensemble donné.

Puisque le fait de plonger un ensemble dans une extension change ses «propriétés» et celles de ses éléments que l'on peut désormais utiliser, nous pouvons nous attendre à de grandes difficultés et à des résistances au changement d'emploi lorsque l'habitude jouera un rôle — qu'il s'agisse d'habitudes psychologiques ou culturelles. C'est un des principaux obstacles épistémologiques que l'on rencontre en mathématiques.

2.1.6.

Cette remarque nous amène à observer que les méthodes heuristiques d'analyse ne prennent pas vraiment en charge les situations d'emploi ou de création des mathématiques. Elles ignorent, entre autre, le sujet, le groupe social et leur histoire.

2.2. Conclusions de l'étude épistémologique.

Pour organiser une genèse expérimentale qui donne un sens convenable à la notion de décimal, il faut faire une étude épistémologique afin de mettre en évidence les formes sous lesquelles le décimal s'est manifesté et leur statut cognitif. Cette étude ne pouvait pas prendre place dans ce chapitre. Nous allons seulement en extraire quelques conclusions.

2.2.1. Différentes conceptions des décimaux.

a) Le «décimal» de l'antiquité qui sert exclusivement au mesurage et à la représentation des quantités. Par exemple, ceux qui expriment les mesures décimales en Chine treize siècles avant Jésus Christ. Ils fonctionnent à peu près comme les binaires hiérophyghiques des Egyptiens de -2500 et comme les sexagésimaux des Babyloniens de -1900, en ce sens qu'ils résolvent de façon similaire des problèmes similaires ; il s'agit de l'emploi direct du système de numération en usage pour les dénombrements comme moyen de décrire des fractionnements : certaines fractions peuvent être désignées, d'autres simplement approchées. Ils se distinguent bien, par toutes sortes de caractères formels, techniques et même sociologiques, des autres fractions avec lesquelles les initiés tentent de faire des calculs exacts, puis de définir la notion de rapport et avec lesquelles ont franchit divers obstacles... (passage à la forme $\frac{1}{m}$, m naturel quelconque; puis à $\frac{n}{m}$, n strictement inférieur à m; puis à $\frac{n}{m}$, n et m quelconques, etc). Bien peu de ces propriétés sont reconnues, même si elles sont utilisées. Je dirai — en empruntant ce terme à Y. Chevallard (1981) — que le décimal est alors une *notion protomathématique* : cette structure est mobilisée implicitement dans des usages et des pratiques, ses propriétés sont utilisées pour résoudre certains problèmes, mais elle n'est pas reconnue, ni comme objet d'étude, ni même comme outil.

b) Al Huwarizmi, (780-850), qui unifie le calcul des naturels avec celui des rapports «géométriques» et qui introduit l'emploi de la numération de position décimale, permet l'émergence du décimal — outil mathématique d'approche, non plus des grandeurs, mais des entités mathématiques : rationnels d'abord, puis radicaux etc. Ces entités sont susceptibles d'être des nombres dénombrants, des nombres mesurants, des rapports et enfin, avec Stevin (1585) d'authentiques applications.

Le décimal devient alors une *notion parathématique* : il n'est tout d'abord qu'un outil consciemment utilisé, reconnu, désigné, mais que son inventeur Al Uqlidisi, vers 952, ne traite pas comme un objet d'étude. (Abd el Jaouad, 1978). Le décimal est montré dans son fonctionnement (préconstruit) et apparaît comme une méthode d'exposition des fractions ou une curiosité. L'écriture des fractions décimales dans l'œuvre d'Al Uglidisi est identique à la nôtre et pourtant le concept n'est pas repris par les contemporains.

Au contraire, son deuxième inventeur, Al Kashi (1427) le reconnaît comme une découverte mathématique. Mais il n'est pas encore sous le contrôle d'une théorie qui en fixe la définition, les propriétés et la position épistémologique. Il est la traduction du système sexagésimal des astronomes, en un système plus commode pour les calculs. On peut supposer que pendant 5 siècles, les décimaux sont potentiellement présents dans la culture et que c'est leur statut qui est en évolution (par exemple, Bonfils de Tarascon vers 1350 en produit une ébauche.)

c) C'est après Simon Stevin (1585) que le décimal accède au statut de *notion mathématique*. Stevin introduit systématiquement les nombres géométriques et les multinomies — les fonctions polynômes — pour unifier la notion de nombre et les solutions des problèmes d'algèbre de son époque. Le décimaux apparaissent comme une production achevée de cette théorie ; ils deviennent alors un objet de connaissance susceptible d'être enseigné et utilisé dans les applications pratiques, les calculs, la constitution de tables. Leur rôle conceptuel reste le plus caché. Pour Stevin, «les quantités irrationnelles, irrégulières, inexplicables, sourdes et absurdes » sont des nombres (réels) parce que toutes sont approchables par les nombres décimaux; il n'a pas écrit cette phrase, mais tout se passe comme s'il l'avait pensée.

Les décimaux servent de modèle heuristique dans l'analyse naissante et Newton les utilise pour expliquer l'approche des fonctions et de leurs fluxions à l'aide des fonctions polynômes et des séries, de leurs dérivées et de leurs primitives (Ovaert, 1976). Cette place n'est finalement fixée et attestée que lorsque les réels sont enfin devenus à leur tour des objets mathématiques et que les procédés d'approche des fonctions qu'utilisait Stevin ont reçu à leur tour leur identité mathématique.

2.2.2. Rapports dialectiques de $\mathbb{D}$ et de $\mathbb{Q}$

L'analyse épistémologique fournit d'autres indications:

Les progrès de $\mathbb{D}$ se sont nourris de ceux de $\mathbb{Q}$ puis de $\mathbb{R}$ en une dialectique difficile à résumer : il sera sans doute indispensable de poser des problèmes qui appeleraient la construction d'une sur-structure telle que $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$, et peut-être de la construire effectivement pour donner à $\mathbb{D}$ sa signification (Douady, 1980).

Par exemple, il nous paraît difficile de concevoir que la notion de rapport puisse être directement approchée par les rapports décimaux.

2.2.3. Types d'objets réalisés

Les situations dans lesquelles $\mathbb{D}$ ou $\mathbb{Q}$ sont employés, diffèrent profondément par la nature des objets mathématiques qui réalisent ces structures et dont on s'occupe. A l'origine, $\mathbb{Q}^+$ et $\mathbb{D}^+$ étaient réalisés comme ensemble des images dans un *système de mesure*; ce qui était explicité, écrit, qui avait un statut, c'était le semi-groupe ordonné $(\mathbb{Q}^+, +, \leqslant)$ muni des opérateurs naturels. Les propriétés de corps de $\mathbb{Q}$ étaient utilisées implicitement mais non reconnues.

La traduction des faits historiques en langage moderne nous fait commettre quelques abus mais nous gagnerons en concision. Ainsi, à côté des *rapports* naturels (multiples, sous-multiples), des Pythagoriciens utilisaient certains rapports privilégiés (épimères, épimores, émioles...) mais ils ne les utilisaient qu'en géométrie et les calculs à leurs propos étaient pénibles; ils ne les assimilaient sûrement pas aux fractions. Un instant, Euclide a rejeté ces distinctions barbares, mais cette initiative est restée presque sans lendemain et même Archimède n'a pas vraiment connu les fractions que nous appelons «Archimèdiennes».

La construction de $\mathcal{L}(\mathbb{Q}^+)$ en tant qu'ensemble de rapports ou d'opérateurs, munis des opérations de groupe, et son identification avec $\mathbb{Q}^+$ va prendre plus de mille ans (de -400 à +850). A la fin de cette période, les rapports fonctionnent implicitement comme des *applications* mais il faudra encore six cents ans au moins (1585) avant que $\mathbb{Q}^+$ ne devienne explicitement un ensemble de fonctions traitées comme des nombres.

2.2.4. Différents sens du produit de 2 rationnels

Ainsi, par exemple, l'opération de multiplication de deux fractions peut recevoir des interprétations différentes dont beaucoup sont apparues à des époques parfois éloignées et que nous présentons dans le tableau 1.

Ce tableau est à rapprocher du canevas que nous donnerons au paragraphe 2.4. et de l'étude des niveaux de connaissance sur la composition de deux applications linéaires rationnelles au paragraphe 3.1.5.

On peut donc s'attendre à ce que les conceptions correspondantes, que l'on a la possibilité de confondre aujourd'hui dans les calculs, se présentent en fait dans des situations différentes et par conséquent qu'elles ne soient pas d'emblée conçues de la même façon et au même âge*.

2.2.5. Nécessité de l'étude d'épistémologie expérimentale

Mais il est peu problable que toutes les distinctions, tous les obstacles, toutes les situations particulières continuent à subsister. Par exemple, prendre le dixième — décimer — consistait, dans l'antiquité, à ranger les éléments puis à compter 1,2,3,... et à retenir le dixième. Ainsi ne pouvait-il y avoir qu'un dixième, pas 2! Il est donc nécessaire de se livrer à une étude d'épistémologie génétique et expérimentale par le moyen d'enquêtes et d'expériences comparables à celles que nous allons rapporter.

Il y a un équilibre à trouver entre un enseignement «historique» qui restaurerait une forêt de distinctions et des points de vue périmés dans laquelle se perdrait l'enfant, et un enseignement direct de ce que l'on sait aujourd'hui être une structure unique et générale, sans se soucier d'unifier les conceptions de l'enfant, nécessairement et naturellement différentes. La recherche des conditions d'un tel équilibre est un des grands problèmes qui se pose actuellement à la didactique. C'est une des ambitions de cet article de faire avancer la réflexion dans cette direction.

2.2.6. Obstacles culturels

Il faut ajouter que la didactique des décimaux a une longue histoire. Depuis Stevin, qui l'envisageait avec une certaine ingénuité et des principes bien arrêtés, jusqu'à la décision, pour les Etats Unis, d'adopter le système métrique,

* Nous reviendrons plus loin sur cette question précise aux paragraphes 3.1.4. et 5.3.5. Voir aussi Vergnaud (1976).

Tableau I

Opérateur naturel $\times$	$n \times U$; $n \times L$; $n \times m \times M$ $\times$ a le sens de $n \times L = \underbrace{L + L + \ldots L}_{n}$	n et m naturels variables U unité ; L, M grandeur
Naturels opérant sur des fractions mesure $\dot{\times}$	$n \,\dot{\times}\, \frac{U}{a} = \overbrace{\frac{U}{a} + \frac{U}{a} + \ldots \frac{U}{a}}^{n}$ $n \,\dot{\times}\, \frac{U}{a} = \frac{n \times U}{a}$; ou $\frac{n \times m \times U}{a}$	$\frac{U}{a}$ est la fraction mesure naturel pas nécessairement quelconque. n scalaire opérant sur des fractions.
$\times$	$\frac{n}{a} \times U = n \,\dot{\times}\, \frac{U}{a}$	$\frac{n}{a}$ est une «fraction-mesure» détachable de la grandeur presque scalaire.
Rapport de naturels invariant dans une transformation implicite $*$	$\frac{a}{b} = \frac{L}{M}$ [$\frac{a}{b}$ mesure de L avec l'unité M] $\frac{a}{b} * U = \frac{L}{M} * U$ $\frac{n}{m} * L$	$\frac{a}{b}$ est un rapport de grandeurs exprimé par des nombres $\frac{a}{b}$ rapport de la mesure de L à celle de M quelle que soit U 4ème proportionnelle de ($n\,U$; $m\,L$ et L).
Applications linéaires rationnelles $\mathfrak{x}$	$\frac{a}{b} \,\mathfrak{x}\, L = \frac{a}{b}$ (L) [désigne l'image de L par application linéaire $\frac{a}{b}$] $(\frac{a}{b} \,\dot{\mathfrak{x}}\, \frac{n}{m})(U) = \frac{a}{b}\,(L) = \frac{a}{b}\,(\frac{n}{m}\,U)$	$L = n\,U$ alors ($\frac{a}{b} \,\mathfrak{x}\, a$) est le nombre que mesure L, extension de l'application $\frac{a}{b}$ aux fractions mesure
Opérateurs rationels	$(\frac{n}{m} \cdot \frac{p}{q})\,(L) = \frac{n}{m}\,(\frac{p}{q}\,L)$ $\frac{n}{m} \cdot \frac{p}{q}$	Application composée de deux applications rationnelles composition dans $\mathcal{L}(Q)$
Rationnel	$\frac{n}{m} \cdot \frac{p}{q}$ ($\frac{n}{m}$ et $\frac{p}{q}$ rationnels «abstraits»)	après identification

et donc un système décimal de mesure, en passant par sa première apparition dans l'enseignement populaire en France après 1792, cette didactique a changé, non seulement de forme mais aussi, corrélativement, d'inspiration et même de signification politique. Ces significations politiques et culturelles pèsent toujours sur son enseignement et se constituent parfois en véritables obstacles (Brousseau, 1976).

2.3. Conclusions de l'étude didactique

L'analyse épistémologique fournit en outre un grand nombre des variantes de conditions, de méthodes, de sens. La difficulté consiste à regrouper ces variantes et à en hiérarchiser les caractères en fonction de leur importance *présumée* pour la reproduction et le contrôle des situations pouvant provoquer l'apparition du savoir.

2.3.1. Principes

Nous allons laisser cette question ouverte, et selon notre projet, montrer comment produire un processus. Les genèses artificielles que nous envisageons de construire devront faire fonctionner la notion de décimal de façon à simuler les différents aspects actuels du concept. Il ne s'agit pas de reproduire le processus historique mais de produire des effets similaires par d'autres moyens. La phénoménotechnique épistémologique consiste à faire, sur *certains* points, des choix très différents de ceux que suggérerait l'histoire, et de restaurer, par l'exercice des règles et des principes que l'on a pu découvrir, un processus néanmoins équivalent.

L'expérience épistémologique porte sur les effets et les corrections que ces modifications produisent sur l'ensemble du système.

Mais cette expérience se glisse dans une activité d'enseignement. Elle doit être compatible avec elle, se plier à ses exigences et subir d'inévitables transpositions didactiques.

Nous allons donc placer désormais notre réflexion dans ce cadre didactique.

2.3.2. Objectifs de l'enseignement des décimaux

a) Examinons les objectifs classiques de l'enseignement des décimaux. Il s'agit de rendre les élèves capables de résoudre les problèmes classiques et pratiques, mettant en œuvre les opérations et l'ordre des décimaux, ce qui implique l'emploi de mesures décimales (et sexagésimales), une maîtrise convenable des situations comprenant des applications linéaires décimales (et rationnelles) : échelles, changement d'unités, pourcentages, placements de fonds, vitesse, volumes, surfaces, densités...

Dans la plupart de ces problèmes, les enfants sont invités à présenter ou à désigner leur résultat dans les termes de la situation proposée. Par exemple, «le prix de vente en francs du transistor est... ?» Puis à exprimer ce résultat dans $\mathbb{Q}^+$ par une formule (par exemple "$\frac{280 \times 4}{3}$") puis à reproduire un décimal raisonnablement proche de ce résultat. Le calcul consiste essentiellement à passer de $\mathbb{Q}^+$ à $\mathbb{D}^+$. Aucune explication n'est écrite; la justification consiste dans la décomposition du calcul final en une suite de calculs intermédiaires «simples», c'est-à-dire appartenant au répertoire reconnu des occasions d'utiliser cette opération.

b) Le curriculum s'adresse à des élèves d'au moins 9-10 ans et d'au plus 12-13 ans qui peuvent avoir appris les opérations sur les décimaux en référence avec l'usage du système métrique. Il vise fondamentalement les mêmes objectifs.

Ceci implique la possibilité de faire tous les calculs usuels avec les décimaux (et avec les fractions). Mais il devra favoriser la reprise théorique qui conduira les élèves vers 13-14 ans à réorganiser de façon définitive la notion de décimal et à l'utiliser sous sa forme mathématique actuelle (exemple : $1{,}394 \ . \ 10^{-4}$), en particulier celle qui est utilisée sur les machines à calculer.

2.3.3. Conséquences : Types de situations

Si l'on veut obtenir que les élèves aient la possibilité, non seulement d'appliquer des méthodes et de produire des solutions, mais aussi d'en comprendre et d'en discuter le bien-fondé, il faut rendre possible cette attitude réflexive, en leur donnant l'usage d'un vocabulaire, même simplifié, et d'une théorie, même non satisfaisante, des applications linéaires et de leurs propriétés.

a) Notre étude épistémologique permet de comprendre que, pour qu'une théorie puisse être institutionnalisée, il est nécessaire qu'au préalable, elle ait fonctionné comme telle dans des débats scientifiques et dans des discussions entre élèves, comme moyen d'établir des preuves ou d'en rejeter. Ce processus correspond à la troisième étape de notre analyse, celle où la notion est maniée comme notion mathématique. Nous appelons situations de *«validation»* et *«d'institutionnalisation»* les situations didactiques qui permettent de simuler ce processus.

b) Mais pour que ces théories aient un sens pour celui qui les utilise, il «faut» qu'elles aient préalablement fonctionné comme solution à un problème posé à chaque élève dans des conditions qui lui permettent, soit de trouver lui-même cette solution, ou plus exactement de la construire (éventuellement progressivement), soit de l'emprunter toute faite, de lui-même, entre plusieurs qu'il pouvait envisager sans qu'une intention didactique ou une pression culturelle l'y contraigne en se substituant à son jugement. Nous disons alors que la théorie fonctionne comme un modèle implicite et nous appelons *situations «d'action»* les situations didactiques qui permettent l'apparition de cette théorie dont le statut est alors dans la classe celui d'une notion protomathématique.

c) Pour que le vocabulaire soit acquis, et que les termes aient du sens, il «faut» qu'ils servent suffisamment à exprimer et à communiquer des informations dans des situations qui en justifient l'emploi et le contrôlent. De telles *situations dites de «formulation»* permettent l'acquisition des modèles explicites et de langages qui, dans le cas où ils ne sont pas encore des notions mathématiques, se voient ainsi conféré un statut de notions paramathématiques (l'ostension et l'usage y tiennent lieu de définition).

2.3.4. Nouveaux objectifs

Les objectifs comprendront donc des connaissances, des savoir-faire, un vocabulaire et des acquisitions théoriques. Ces objectifs ne peuvent être indépendants; un certain équilibre s'établit entre eux dès lors qu'on veut respecter leurs fonctions réciproques dans une genèse authentique. D'ailleurs, un savoir théorique, non justifié, serait perdu et n'aurait pas de sens et une pratique excessive sans débats, conduirait à des apprentissages par conditionnement et prématurés qui feraient obstacle aux étapes ultérieures.

Ainsi, dans la phase finale, l'élève devra calculer dans le demi-corps $\mathbb{Q}^+$ et en particulier dans le demi-groupe $(\mathbb{Q}^+ - \{0\}, \times)$. Les domaines d'application choisis conduisent à envisager tous les types de réalisations que nous avons évoqués au paragraphe précédent.

On pourrait estimer que le fait que les élèves peuvent s'expliquer le produit de deux décimaux se présentant tous les deux sous la forme d'opérateurs ou d'applications linéaires est un bon test de l'acquisition de la structure visée (Rouchier 1980).

Exemples: 1. Quelle est la distance parcourue en 4,25 tours par un disque de 0,38 m de périmètre ? *(1 opérateur, 1 longueur)*.
4,25 × 0,38 égal à 4 fois 0,38 plus 2 dixièmes de fois 0,38 plus $\frac{5}{100}$ de fois 0,38
C'est aussi $\frac{425}{100} \times 0{,}38$

2. On estime que la répartition normale d'un budget logement est la suivante :
loyer : 0,68
charges : 0,18
chauffage : 0,14

La part de revenu qu'une personne a prévue de consacrer à son logement est 0,23. Quelle est la part de ce revenu que cette personne consacre au chauffage ? *(2 opérateurs)*.

Mais cette hypothèse reste à vérifier expérimentalement. Il faudrait que la réussite à ces exercices domine hiérarchiquement toutes les autres, c'est-à-dire les implique.

Les recherches sur les rapports entre ces organigrammes d'objectifs, les hiérarchies de connaissances et les implications d'acquisitions retiennent l'attention de nombreux chercheurs depuis une quinzaine d'années (Gras, 1980).

Malgré le grand intérêt de ces travaux, on n'a pas encore pu en tirer des conclusions décisives.

2.3.5. *Options*

Nous avons finalement retenu les options principales suivantes sur lesquelles nous reviendrons plus tard :

a) L'acquisition des décimaux-mesure suivra un processus distinct de celui visant les décimaux-application. Ils se succèderont dans cet ordre.

b) Dans les deux cas, les décimaux seront présentés comme des rationnels, simple réécriture des fractions décimales. Les rationnels seront donc construits les premiers dans les deux étapes. Cela n'est pas très original pour les opérateurs. Par contre, pour les mesures, cela va à l'encontre des habitudes culturelles les mieux établies.

c) Les fractions décimales-mesures seront choisies par les élèves pour approcher les rationnels à cause des facilités de calcul qu'elles présentent.

Les problèmes topologiques exigent justement de nombreuses comparaisons et des calculs d'intervalles. Ils mettront de plus, en évidence, les propriétés de l'ordre naturel de $\mathbb{Q}$ et de $\mathbb{D}$ qui s'opposent à celles de $\mathbb{N}$.

d) Cette approche topologique ne sera pas reproduite dans l'étude des applications linéaires rationnelles. Il s'agit bien d'une option : nous avons montré dans une autre partie de la recherche* que nous ne rapportons pas ici qu'une telle approche est possible.

e) Nous tenterons de faire acquérir, ou fonctionner, s'ils sont acquis, les modèles implicites avant d'en provoquer la formulation ou l'analyse. Nous admettrons que les enfants possèdent un modèle implicite de la proportionnalité dans $\mathbb{N}$.

f) Les sommes et les différences d'applications rationnelles bien que rencontrées, ne seront pas théorisées ni institutionnalisées.

g) Nous expliciterons les autres options au cours de l'exposé des situations.

2.4. Le canevas du processus

2.4.1.

Ce canevas est formulé en termes mathématiques visiblement exclus du vocabulaire des élèves et organisé comme un exposé où les définitions et les théorèmes se succèdent

* Il s'agissait d'approcher à l'aide d'une fonction linéaire qui représentait la probabilité — en tant que moyen de prévoir une fréquence théorique — une application statistique attribuant des effectifs observés correspondant à des nombres de tirages. L'approche des statistiques par ces applications «probabilité» est traitée par des méthodes similaires en 33 séances. Les élèves suivent une démarche expérimentale et de redécouverte. Cf. «L'enseignement des probabilités à l'école élémentaire» IREM de Bordeaux - 1974.

de façon classique. Cela pourrait faire croire que tout exposé du même genre, c'est-à-dire articulé comme un discours de mathématique, pourrait constituer un canevas. Il n'en est rien. Il représente en fait une suite de questions et de problèmes qui tendent à constituer une genèse : la question de rang n naît des problèmes rencontrés avec les solutions trouvées à la question de rang $n-1$, ou des conséquences et développements de ces solutions. Un tel canevas ne peut pas être obtenu automatiquement comme séquence de l'analyse mathématique et épistémologique. Il faut s'assurer constamment de la capacité de la conception générale à permettre l'invention, l'organisation et le déroulement des situations locales.

Cet aller et retour, cette dialectique entre la conception du processus et celle des situations est inévitable à cause de la nature même de la didactique.

L'articulation à partir de la connaissance seule ne suffit pas à déterminer le sens donné aux acquisitions par les situations spécifiques choisies.

Il est classique d'analyser les curricula à rebours pour mettre en évidence les implications entre les objectifs terminaux et les objectifs subordonnés. Le lecteur ne sera pas surpris que nous l'ayons utilisé dans ce texte. Malgré nos mises en doute réitérées de la possibilité de déterminer les acquisitions indépendamment des situations qui les produisent, nous allons utiliser le même procédé dans la représentation des activités, au chapitre suivant. Ce procédé augmentera peut-être les difficultés du lecteur à comprendre quelles sont réellement les connaissances des élèves qui sont disponibles au moment de la leçon, mais nous espérons ainsi le conduire à prendre mieux conscience, à la fois de la nécessité de préciser les conditions du déroulement des situations et du rôle de l'histoire du sujet dans ses acquisitions. Si notre tentative est un échec, nous conseillons au lecteur de lire les paragraphes dans l'ordre chronologique.

2.4.2. La phase II : Du mesurage aux homothéties de $\mathbb{D}^+$

a) Suivant ces options dans la phase finale, nous prévoirons une *identification* institutionnalisée, c'est-à-dire raisonnée et convenue de $(\mathbb{Q}^+, \times)$ (mesure) et $\mathcal{L}(\mathbb{Q}^+, 0)$

impliquant en particulier l'utilisation systématique des applications inverses dans le calcul du rapport de deux décimaux (Phase II . 7 : 2 séances).

b) Il aura fallu pour cela être capable de manier *la composition* et *la décomposition* des applications rationnelles en effaçant le rôle des couples objet-image pour pouvoir fournir diverses décompositions d'une même application. Nous avons retenu d'exposer les situations d'introduction de cette phase (II . 6 (3 séances) : «composition de 2 applications linéaires» où les élèves utilisent un pantographe. Cette étude ne peut se dérouler elle-même convenablement si les fractions et les décimaux n'ont pas été identifiés comme ensemble d'applications *opérant* sur les fractions et les décimaux-mesure.

c) Au cours de la phase II . 5 (2 séances) : les enfants cherchent à donner un sens au produit de 2 fractions ou de deux décimaux. Ils y parviennent en interprêtant l'un comme application linéaire opérant sur l'autre. A cette occasion, les élèves récupèrent le vocabulaire traditionnel décrivant le «produit» d'un rationnel par un rationnel opérateur (par exemple prendre une fraction d'un nombre, un pourcentage, etc.) et ils formalisent et institutionnalisent le calcul des images par les éléments de $\mathcal{L}$ ($\mathbb{Q}^+$) qu'ils pratiquaient déjà dans la phase précédente mais avec des méthodes très diverses, non fixées, voire par tâtonnements. Les rapports entre multiplier, diviser, agrandir, rapetisser font l'objet d'un débat.

L'introduction de ces applications linéaires va occuper les 3 phases précédentes qu'il vaut mieux exposer dans leur ordre naturel.

d) La phase II. 1 (2 séances) consiste à demander aux élèves «d'agrandir» un puzzle, morceau par morceau, sans préciser autrement ce que veut dire «agrandir» et de façon à ce que tel côté qui mesurait 4 cm en mesure 7. Nous exposerons cette situation de façon détaillée (Par. 3.2.). Les élèves s'acharnent à essayer divers moyens de calculer les longueurs-images mais seul, celui qui (implicitement) fait correspondre la somme des images à l'image de la somme permet un remontage satisfaisant du puzzle. Ce que les enfants construisent «empiriquement», est un ensemble de quelques couples et n'a pas de nom. «L'application linéaire $\frac{7}{4}$ » s'inscrit seulement dans les schémas d'action du sujet.

Déjà, pourtant il faut trouver l'image de longueurs décimales et fractionnaires.

e) La phase II. 2 (1 séance) reproduit une situation presque identique à la précédente. L'agrandissement d'une mosaïque régulière repose les mêmes problèmes; les côtés ont des longueurs décimales. Dans les débats, l'image 1 émerge comme moyen d'établir les autres images ainsi que la division d'un décimal par 10^n, $n \in \mathbb{N}$.

f) La phase II.3 (2 séances) commence par une situation identique. On considère un dessin de bateau et 6 photographies de ce dessin obtenues avec des agrandissements différents. Chaque élève cherche à prévoir de sa place les longueurs de tous les segments reproduits sur une des photos. Ils peuvent aller vérifier le résultat de leurs prévisions et éventuellement les reprendre (Il y a des «agrandissements» et des «rapetissements»). Puis de nouvelles photographies apparaissent et il s'agit de trouver le moyen de désigner et de ranger les photos pour gagner dans un jeu de communication (assez semblable à celui que nous exposerons au paragraphe 4.1. dans la leçon «« épaisseur d'une feuille de papier »). C'est naturellement l'image de 1 qui sert à désigner les photos et à les ordonner. Ainsi, les élèves ont été conduits à identifier, à désigner des applications linéaires à l'aide des nombres décimaux. Mais ces nombres restent attachés à une des photos, à un ensemble de valeurs. Le jeu reprend mais le modèle est changé à chaque fois. Le calcul d'images devient familier, le vocabulaire et les discussions portent sur les agrandissements et les rapetissements (ce qui implique le débat ultérieur que nous avons signalé plus haut). En conclusion, les élèves déclarent savoir désigner les applications linéaires (de $\mathbb{Q}^+$ dans $\mathbb{Q}^\times$ et de $\mathbb{D}^\times$ dans $\mathbb{D}^\times$).

g) Il est temps de proposer quelques situations où des applications non linéaires viennent se glisser comme solutions « obligées » ? aux applications linéaires (phase II.4., 2 séances).

A cette occasion, les élèves prennent connaissance des pratiques et des langages dans le domaine des «échelles» et dans celui du commerce (taxes, remises en pourcentage, etc.)

2.4.3. *La phase I : Des mesures rationnelles aux mesures décimales*

Dans La phase II, au lieu de définir directement les opérateurs rationnels comme composés d'opérateurs naturels (qui ne sont pas alors des applications), méthode dont nous avons signalé les difficultés et les contradictions, nous avons admis l'existence de $\mathbb{Q}^+$ et de $\mathbb{D}^+$ en tant qu'ensembles d'arrivée des mesures. L'objet de la phase I est donc de construire un tel ensemble : les enfants créent et expérimentent des nombres nouveaux pour mesurer diverses grandeurs.

a) La phase I.1. permet aux élèves d'inventer d'abord les «rationnels» (act. 1 séance) par une méthode de passage au quotient sur l'ensemble des couples de rationnels (activité 1, 4 séances). Nous analyserons longuement cette première activité : «mesure de l'épaisseur d'une feuille de papier» pour bien montrer l'évolution du statut de ces rationnels. (Paragraphe 4.).

b) Ils apparaissent comme solution à une situation favorable, sans statut cognitif. Cette solution pose des problèmes d'identification car elle peut prendre bien des formes équivalentes. Les élèves sont donc conduits à un débat : «ces objets nouveaux sont-ils des nombres ?» c'est le moteur de l'activité 2 (5 séances) qui amène les enfants à les identifier, à les additionner, les soustraire, les multiplier et les diviser par un naturel, les comparer et les ranger.

Les fractions sont alors reconnues comme des nombres nouveaux englobant les nombres déjà connus, mais dont certaines propriétés sont différentes.

c) Dans la phase I.3., pour mesurer d'autres grandeurs, capacités, poids, longueurs, les élèves utilisent ces mêmes nombres et passent de la conception d'une définition des fractions par *commensuration* à *une définition constructive* (cette phase sera commentée au paragraphe V, elle n'est pas essentielle dans le processus).

d) La phase I.4 «$\mathbb{D}$ moyen d'étude de $\mathbb{Q}$ » comprend 7 séances. Les propriétés nouvelles qui sont recherchées dans les rationnels pour fabriquer des mesures sont surtout des propriétés topologiques : on veut, entre deux nombres rationnels, pouvoir en placer toujours un nouveau et on veut pouvoir mesurer tous les intervalles obtenus. Grâce à un jeu convenable de bataille navale où ils lanceront des filets de plus en plus fins (des filtres) pour cerner des « poissons » rationnels, les enfants vont donc explorer la structure topologique de $\mathbb{Q}^+$ (cette activité sera présentée elle aussi au paragraphe 3.3.). Mais il se trouve que parmi toutes les opérations que l'on peut faire avec les rationnels sous leur forme fractionnaire, les plus longues, les moins faciles, sont justement les comparaisons et les sommes ou les différences. De telle sorte que, pour des raisons d'efficacité, les enfants vont très vite choisir d'eux-mêmes, parmi les fractions rationnelles, certaines — les décimales — qui permettent à la fois des calculs rapides et une représentation commode — une approche — des mesures rationnelles.

e) Phase I.5. Construction et étude de $\mathbb{D}$. (6 séances). Ces fractions décimales se prêtent à une écriture simplifiée qui permet d'étendre les règles du calcul (addition, soustraction, multiplication par un scalaire) de $\mathbb{N}$ à $\mathbb{D}$ au prix de modifications mineures (activité 6).

f) Phase I.6 (4 séances). Densité de $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{Q}$ — Division — Approche d'un rationnel par un décimal.

Evidemment, tous les rationnels ne sont pas décimaux, mais on peut approcher n'importe lequel d'entre eux d'aussi près que l'on veut avec des décimaux.

Cette approche, organisée, standardisée et institutionnalisée va permettre de convertir en décimal le résultat d'une division d'un rationnel par un naturel et donnera implicitement la méthode de la division des décimaux par des entiers.

g) Dans cette partie I, les nombres sont maniés par les enfants comme des mesures. La construction comporte donc des limitations de sens qu'il faudra respecter (cf. paragraphe 3.3.3.).

Les seuls opérateurs utilisables sont les naturels, on saura multiplier ou diviser par 2,3... mais pas par 2/7 ni 2,5. (cet apprentissage sera l'objet de la 2ème partie). Et ces opérateurs ne sont pas introduits comme des objets mathématiques. Ils fonctionnent comme un modèle implicite de linéarité emprunté à $\mathbb{N}$. Ils serviront au plus à exprimer les *rapports scalaires naturels* que l'on utilisera au cours des calculs.

La méthode a été conçue de telle sorte que le fait pour les élèves d'avoir déjà appris à utiliser les décimaux pour les mesurages, et à faire les opérations ou non, ne modifie pas sensiblement le processus. Cela ne veut pas dire qu'il faudra faire semblant d'ignorer ce qu'on sait déjà, ni qu'on va reprendre une connaissance acquise en rejetant son sens ancien et y substituant un sens «nouveau».

3. Analyse du processus et de sa réalisation

3.1. Le pantographe

3.1.1. Introduction des pantographes : La réalisation de la phase 2.6.

Le pantographe est un parallélogramme articulé utilisé sur les planches à dessiner pour produire des figures homothétiques d'une figure donnée. Les appareils utilisés dans cette activité sont des jouets de plastique beaucoup moins précis que les appareils professionnels — et c'est précisément cette particularité qui sera utilisée. Ils sont susceptibles selon le réglage, de produire quelques homothéties décimales bien précises : 1,5 ; 2 ; 2,5 ; 3 ; 4 ; et leurs inverses (un autre modèle peut produire $1\frac{1}{2}$; 2 ; $2\frac{1}{4}$; $2\frac{1}{2}$; $2\frac{3}{4}$; 3 ; $3\frac{1}{2}$; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 10).

Dans la séance d'introduction, les élèves apprennent du maître, banalement, comment se servir de l'appareil : la ventouse ne doit pas bouger, ni le papier, la pointe suit le modèle, le crayon dessine l'image... Ils s'essayent à agrandir et à rapetisser des dessins personnels puis mettent en commun leurs observations et leurs hypothèses :

- On peut «agrandir» ou «rapetisser» en échangeant la pointe et le crayon
- L'image ne change pas de forme quelle que soit la manière dont on dispose le pantographe
- L'agrandissement varie suivant les pantographes ou suivant le choix des trous de montage
- Si le pantographe ne forme pas un parallélogramme, la transformation est déformée.
- A certaines longueurs, le pantographe fait correspondre d'autres; à la somme des longueurs, il fait correspondre la somme des images.
- Le pantographe effectue des agrandissements bien connus, les élèves reconnaissent les noms des agrandissements sur les trous... etc.

3.1. I. : Exemples de situations didactiques différentes fondées sur ce schémas de situation

a) L'exposé banal basé sur l'ostension : le maître montre *l'appareils,* montre *ses effets magiques, enseigne le mode d'emploi,* présente *les différents calculs possibles : calcul d'image, de modèle et d'agrandissement et fait reproduire des exercices.*

b) La méthode heuristique (de redécouverte), voisine de celle que nous venons d'évoquer ci-dessus. Elle donne des résultats collectifs assez rapides et est convenable si les élèves ont l'habitude de la recherche individuelle et des débats, mais sans aucun projet autre que de «dire des choses intéressantes», une telle méthode tourne souvent court.

c) Une méthode active et maïeutique : chaque élève a son pantographe ; une suite de questions lui sont posées pour lui faire énoncer successivement les différentes propriétés ou corriger les erreurs qu'il a commises.

d) Un processus plus élaboré comprenant plusieurs phases :

— une phase d'action : le maître annonce aux élèves que dans un moment il choisira une longueur entre 1 et 15 cm : chaque élève (ou groupe de 2) devra prévoir *la longueur correspondante transformée par son pantographe. Cette prévision fera l'objet d'un pari, puis d'une épreuve : on vérifiera avec l'appareil si la valeur annoncée est exacte. En attendant ce moment, les élèves peuvent s'entraîner à prévoir : ils cherchent les images de quelques nombres et vérifient. Ils peuvent venir parier dès qu'ils pensent avoir découvert la loi et s'en sentent assez sûrs.*

— Une phase de validation : les résultats concrets sont assez imprécis et présentent des écarts parfois troublants avec le modèle; d'autre part, il est facile de monter un pantographe faux. Le jeu oppose donc plusieurs groupes : il s'agit, pour chacun, de deviner si les pantographes des autres — et qui sont cachés — font ou non des agrandissements corrects — et lesquels. Pour cela, chaque groupe demande à un autre de lui montrer des images de différents segments ou figures (qu'il choisit) donnés par son appareil. Lorsqu'un groupe croit avoir deviné l'agrandissement donné par ce pantographe caché, il annonce sa conclusion. Si cette conclusion paraît fausse à un des autres groupes (qui n'ont pas non plus ce pantographe) celui-ci prend position contre cette conclusion. Alors s'engage un débat où il faut prouver aux autres élèves que les assertions de l'adversaire sont fausses et que les siennes sont vraies, en ne recourant que le plus tard possible à la preuve contingente. (Cette preuve consiste à montrer le pantographe caché et ce qu'il produit). Une règle de prise de parole et un système de points laissent à chaque groupe le choix entre des décisions qui consistent à accepter ou à refuser les preuves produites par l'adversaire ou à demander de nouvelles informations (de nouvelles images) (Brousseau, 1979). Certains élèves obtiennent ainsi la conviction que, si le pantographe donne le même agrandissement d'un segment quelconque dans toutes les positions, l'application doit être *(est nécessairement) linéaire car alors l'image de la somme est la somme des images.*

3.1.II. Place de cette situation dans le processus.

Avec peu de modifications, cette situation du pantographe pourrait être prise comme situation initiale dans l'étude des applications linéaires. Mais alors les hypothèses que font les élèves pour interpréter les agrandissements du puzzle (cf. par. 3.2.) avec de simples translations ($x \rightarrow x + a$) *seraient envisagées moins sérieusement. Elles seraient rejetées presque sans examen, puisque l'appareil fournirait la bonne image. Au lieu de construire le modèle et de prévoir le résultat satisfaisant, les conditions voulues, il suffirait de le découvrir comme une loi de la nature. Or, le modèle additif est un obstacle résistant à la mise en place du modèle multiplicatif et doit pouvoir lui être oppo-*

sé dans des situations ouvertes, ce choix devant se faire sur des critères rationnels et intellectuels.

3.1.2. Compositions d'applications (2 séances)

- D'abord les élèves, par groupe de 2, doivent construire l'image d'une figure simple, que l'on obtient par deux agrandissements successifs (par exemple × 2,5 suivi de × 1,5). L'image la plus «jolie» et «correcte» l'emportera après vérification. La consigne est donnée de telle façon, qu'il est clair, que la manière d'obtenir cette image n'importe pas, c'est seulement le résultat qui compte.

En fait, la manipulation réelle produit un agrandissement tellement erroné qu'il est nécessaire de retracer les segments à la règle et les mesurer, en calculant leur longueur (Fig. 1).

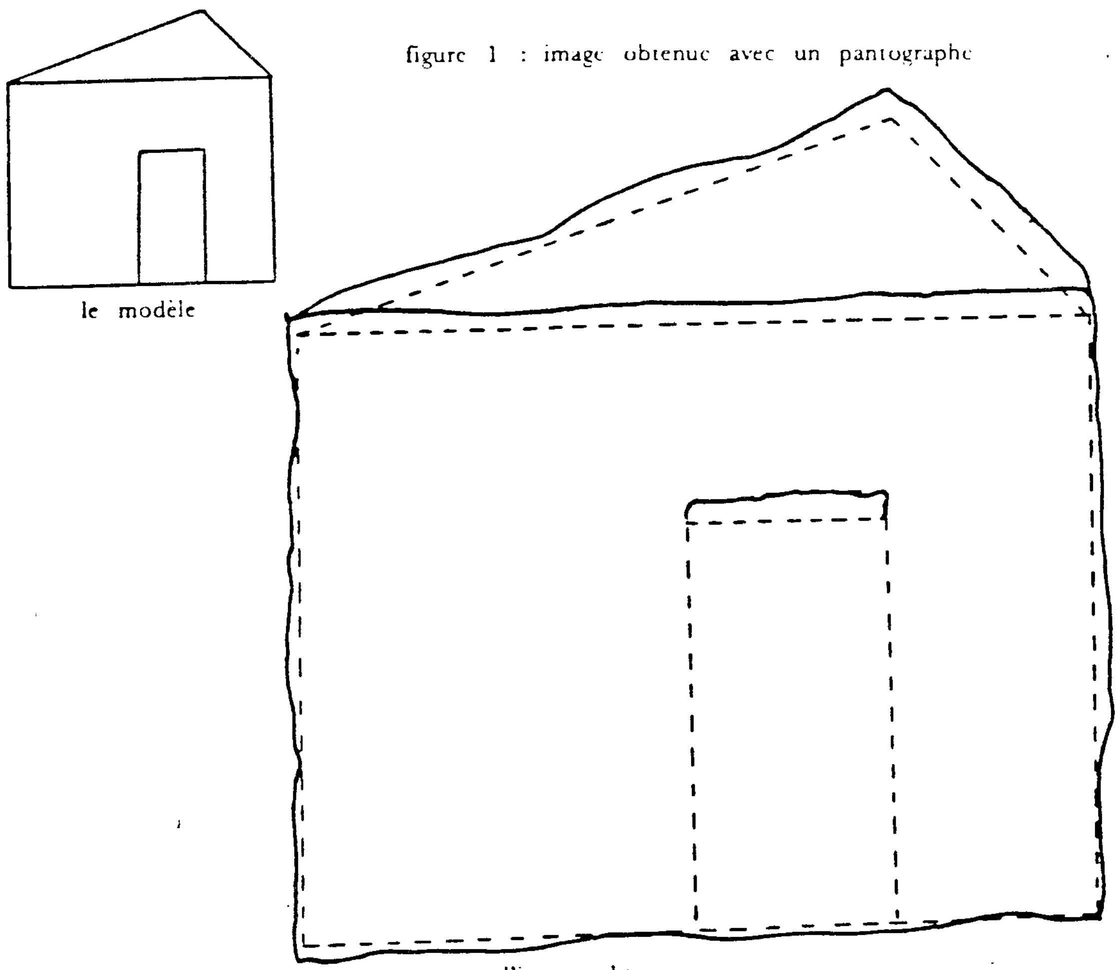


figure 1 : image obtenue avec un pantographe

l'image obtenue —
l'image homothétique - - - (X3)

Alors la pointe et le crayon étant guidés tous les deux convenablement, on peut «prouver» que l'agrandissement est correct. Les élèves doivent donc être convaincus (implicitement) que la composition de deux applications linéaires conserve les formes.

3.1.III : Rapports théorie mathématique/pratique.

Les 2 dernières situations-problèmes du paragraphe 3.1.1. sont un exemple correct des fonctions que doivent remplir d'abord une théorie, (une structure ou une connaissance mathématique) par rapport à une manipulation : cette théorie doit fournir un modèle qui permet la prévision, de manière plus simple, plus économique, plus précise, que la pratique, et non une complication inutile. Et c'est parce qu'on veut prévoir *qu'il faut exiger des mathématiques qu'elles soient non contradictoires. Elle reçoit de cette pratique un certain* type *de preuve et de justification et à son tour, elle sert de preuve (intellectuelle) à la pratique.*

- *La 2ème séance consiste à proposer aux élèves de prévoir les longueurs de nombreux segments formant une image (au sens commun) obtenue ainsi par une composition d'homothétie. Ils possèdent les dimensions du modèle et* à leur demande — *soit les longueurs des segments correspondants dans chacun des agrandissements — soit les décimaux désignant les applications linéaires (en fait l'image de 1)*

Exemple :

1er dessin		2ème dessin		3ème dessin
4	× 3 →	12		
		3,5	× 1,5 →	5,25

il faut calculer pour le troisième dessin les images des longueurs 2,5 ; 6 ; 2 ; 5,1 ; 14,6 ; 2,25 sur le premier. Dans le calcul de cette image ils emploient diverses procédures :

P_0) La plus longue, par linéarité et en calculant les intermédiaires, est la trace des premières découvertes : de moins en moins d'élèves s'accrochent à la définition initiale qui conduit aux calculs suivants où $\frac{3,75}{2,5}$ est assez dissuasif :

1er dessin	2ème dessin	3ème dessin
4 →	12	
1 →	12 : 4 = 3	
2,5 →	3 × 2,5 = 7,5	
	2,5 →	3,75
	1 →	$\frac{3,75}{2,5} = 1,5$
	7,5 →	7,5 × 1,5 = 11,25
2,5 →	→	11,25

P_1) **Par linéarité directe, sans calculs intermédiaires, le premier et le troisième dessin :**

$$\begin{array}{l} 4 \longrightarrow 12 \longrightarrow 12 \times 1,5 = 18 \\ 1 \longrightarrow 18 : 4 = 4,5 \\ 2,5 \longrightarrow 2,5 \times 4,5 = 11,25 \end{array}$$

P_2) Par la composition des deux applications linéaires avec un calcul intermédiaire

$$2,5 \xrightarrow{\times 3} 7,5 \xrightarrow{\times 1,5} 11,25$$

P3) Par l'utilisation directe de la composée des deux applications,

$$\begin{array}{l} 2,5 \xrightarrow{\times 4,5} 11,25 \\ 1 \longrightarrow 4,5 \\ 2 \xrightarrow{\times 4,5} 9 \end{array}$$

cette composée étant calculée une fois pour toutes, d'une manière ou d'une autre.

Dans cette situation, il est très avantageux d'utiliser implicitement le fait que la composée des deux homothéties est une homothétie, de la calculer, et l'utiliser pour obtenir l'image finale de chaque segment du modèle.

Comme précédemment, les images sont réellement accrochées au tableau, chaque élève fait une prévision, va la contrôler lui-même, revient, la corrige si elle est fausse et cherche à modifier son calcul ou son système de prévision.

Le remplacement de deux similitudes par une seule est apparu dans les comportements en tant que solution de la situation-problème. Mais les différentes procédures témoignent de niveaux cognitifs différents : Dans la procédure P_0, l'élève a *effectué* une composition d'applications mais rien ne permet de penser qu'il s'est intéressé à l'application composée. Celle-ci est présente pour un observateur, dans la situation au sens habituel, elle ne l'est pas dans la procédure P_0 ; elle l'est dans la situation-problème car elle est la connaissance caractéristique du passage d'une solution moins bonne à une solution meilleure du point de vue de la complexité des calculs.

3.1.IV. : Différents «niveaux de connaissance» relatifs à la composition des applications linéaires.

Ces niveaux dépendent à la fois des comportements qui manifestent la connaissance et des types de situations qui provoquent ces comportements. La classification en niveaux tend à permettre d'expliquer a priori leurs différences par des différences de complexité entre les situations, entre les procédures ou entre les modèles cognitifs qui les caractérisent. Ces différences de complexité sont fondées sur *des informations d'origine mathématique, épistémologique, psychologique qui doivent se justifier de façon intrinsèque dans l'analyse de la situation ou du processus didactique.*

Expérimentalement, l'existence de tels niveaux peut se manifester par des indices que nous évoquerons plus loin (par. 5.3.5.) et dans certains cas particuliers, importants par ce que G. Vergnaud a appelé «niveaux de complexité psychogénétique».

a) Pour mémoire, nous pourrions noter Niveau (0) celui que révèle la procédure P_0 : la structure est agie.

b) Niveau (1) : c'est celui que révèle le remplacement dans l'action d'une suite de similitudes par une seule (procédure P_1). On peut supposer que ce comportement n'est possible que si le sujet a un modèle, encore implicite peut-être, qui lui permet d'admettre ce remplacement, lequel peut apparaître sans que le sujet ait la possibilité de reconnaître, de formuler, de considérer comme un objet d'étude et a fortiori de justifier ce remplacement autrement que par des preuves contingentes.

c) Niveau (2) : un premier pas est franchi si un élève dit : «j'ai les pantographes $\boxed{\times\ 2,5}$ *et* $\boxed{\times\ 0,25}$ *alors je calculerai les images avec une seule application »;* $\boxed{\times\ 0,625}$ *celle-ci est obtenue après calculs sur des longueurs particulières (Procédure P_2).*

d) Niveau (3) : S'il dit : «Avec les deux pantographes que vous me donnez : $\boxed{\times\ 4,5}$ *et* $\boxed{\times\ 1/3}$ *je prévois que l'agrandissement sera* $\boxed{\times\ 4,5\ \times\ 1/3}$ *un autre pas est franchi. La vérification est possible par le calcul (procédure P_3).*

e) Niveau (4) : L'élève dit : «on devrait toujours pouvoir remplacer l'action des deux ou de plusieurs pantographes par l'action d'un seul que l'on peut calculer en faisant le produit des deux premiers».

f) Niveau (5) : considérer que les mêmes propriétés pourraient valoir dans d'autres domaines et acquérir des formulations spécialisées : «prendre une fraction de ... — un pourcentage... » demande d'autres types de situations, où le concept peut gagner en familiarité, en extension, et recevoir un statut culturel nouveau sans changer beaucoup du point de vue mathématique. Par contre, le calcul des mesure-produits *affecte la conception même de la notion de fraction et doit être traité à part à ce stade (voir à ce sujet (Vergnaud et Al (1979) ; Rouchier (1980)).*

g) Niveau (6) : bien que certaines remarques antérieures aient permis à l'élève de mettre en difficulté sinon en doute, le modèle suivant né de la pratique des naturels :

agrandir ———— *multiplier (ou ajouter)*
diminuer ———— *diviser (ou soustraire)*

et bien qu'il ait remarqué que $\left(\times\frac{1}{3}\right)$ *était le même opérateur que* $(:3)$ *sur les entiers (Phase II.3), l'obstacle que constitue ce modèle ainsi que tous ceux bâtis sur l'usage de* $\mathbb{N}$ *est loin d'être franchi.*

Ainsi les élèves ne savent pas directement ce que signifie $3,2 \xrightarrow{:\ 3}$ *ni calculer l'image correspondante, bien qu'ils aient les moyens de découvrir.*

Il est clair que le jeu qui peut conduire les élèves à identifier les différentes manières de désigner les « similitudes », à unifier les méthodes de calcul exige qu'ils s'occupent non plus d'une ou de quelques applications mais de toutes. Il faudra un débat intellectuel, et seul un jeu social convenable peut promouvoir de telles problématiques et conduire à se poser la question. « est-ce que tout pantographe a un inverse ». Au niveau 6, l'élève peut s'occuper de certaines propriétés des opérations dans la mesure où ces propriétés servent une action.

Il y a un saut de complexité très important entre les situations qui, comme celle du pantographe, conduisent à utiliser le fait que cet inverse existe et celles qui conduisent à se poser la question, surtout si l'on veut que cette question se pose pour des raisons mathématiques (ce serait utile de le savoir) et non didactiques et formelles et que ces raisons qpparaissent aux yeux de l'élève.

h) Niveau (7) : L'étape suivante consiste à faire fonctionner cette opération comme moyen d'analyse. Par exemple, en se rendant compte que toutes les applications rationnelles peuvent s'exprimer comme composées d'une application entière et de l'inverse d'une application entière. Exemple : $(\times\ 3/4) = (\times\ 3)\ .\ (\times \frac{1}{4})$

Les calculs dans ce système assurent la possibilité d'établir de véritables théorèmes sur les rationnels comme celui que demandait de façon un peu abrupte Mme Touyarot (Brousseau 1980 , p. 36)
Exemple de question : « Pour passer d'un modèle à son image, j'ai utilisé l'application linéaire × 4/7 ; quelle est l'application linéaire qui permet de passer de l'image au modèle ? Pouvez-vous le prouver à un camarade sans calculer aucune image ? »

Cette étape permet de rechercher et de trouver comment résoudre tous les cas de divisions des décimaux au sens *le plus général. Les élèves ont la possibilité de mettre au point la technique de la division dans un des niveaux de connaissance précédents, sans avoir recours à la composition d'applications linéaires, mais avec des sens différents : implicitement, lors de l'encadrement des rationnels-mesure (par exemple dans la phase I.5, puis I.7), pour calculer l'image dans certaines homothéties* ($\times \frac{1}{4}$ *par exemple, phase II.3.), par la recherche de l'image au moyen de l'application réciproque ou de la composition de deux applications exceptionnellenent évidentes à cause du contexte. Par exemple, pour calculer 3,25 × 1,25 sans avoir recours à la composition, l'élève recherche quelle est l'application équivalente à × 1,25, qui, il le sait, fait correspondre à* $1{,}25 \longrightarrow 1$ *— ce qui le conduit péniblement à rechercher une fraction décimale équivalente à* $\frac{100}{125}$ *c'est-à-dire* $\frac{800}{1000} = 0{,}8$*. On effectue alors 3,25 × 0,8.*

Il est clair que ces procédés, même s'ils sont apparus une ou deux fois dans le comportement, ne méritent pas à ce moment-là d'être érigés en méthodes et de faire l'objet d'apprentissages. Les élèves peuvent les produire une fois, en situation, grâce à un investissement exceptionnel et au support sémantique qui en découle. Ce serait une *méprise complète de vouloir faire détacher cette "procédure" de son contexte et de l'ériger directement en méthode à coups d'exercices.*

C'est le niveau (7) qui permet la solution raisonnable et contrôlée de ces problèmes.

i) Niveau (8) : il consiste à prendre conscience de l'étape 7, à la prendre comme objet d'étude à la décrire de façon à la formaliser, en utilisant un langage algébrique et une théorie mathématique axiomatisée. L'intérêt d'une telle aventure peut être une classification des structures numériques. Une telle construction entrait bien dans les intentions des réformateurs des années 70, pour la classe de 4ème (élèves de 13-14 ans). Mais en l'absence d'un contrat didactique clair avec les élèves au sujet de l'enjeu de l'activité mathématique, tous les niveaux épistémologiques que nous venons de détailler étaient confondus et la tentative vouée à l'échec dans la plupart des cas.

Une pratique comparable, courante, dans l'enseignement élémentaire, consiste pour le maître à "exploiter" le genre de situations didactiques présenté plus haut, en institutionnalisant immédiatement la découverte d'un élève : «Vous avez découvert *tel objet (affirmation implicite du fait qu'il a un caractère général) ; il s'appelle "composé de deux applications", sous-entendu il a un statut cognitif et culturel, reconnaissez-le, utilisez-le, dans les exercices suivants...)».*

Cette pratique court-circuite tout le travail mathématique et même le nie ; elle revient à affirmer implicitement qu'il suffisait d'y penser pour transformer un concept protomathématique en notion mathématique. Certes, ce procédé didactique fonctionne et on peut légitimement l'employer localement. Mais nous sommes fondés à penser que le rejet de son emploi systématique est nécessaire pour changer fondamentalement les rapports du "sujet- s'apprenant" avec la connaissance.

3.1.V : sur la recherche en didactique.

Parmi les conditions qui confèrent à la situation-problème ses propriétés didactiques (voir paragraphe 5.2.2), figurent :

- la possibilité pour chaque élève d'avoir un nombre suffisant d'occasions de changer de niveau de connaissances,

- des pénalisations implicites des procédures les plus complexes, elles-mêmes dues à une connaissance plus simple, par l'intermédiaire de coûts d'exécution et de probabilités d'erreurs plus élevés.

La situation où l'élève doit prévoir l'image donnée par la composition de deux applications, possède ces propriétés.

Le problème qui se pose au didacticien est alors un problème de faisabilité : il faut prévoir dans la situation du pantographe un minimum de dessins et de segments par dessin, il existe un maximum d'opérations, compatible avec le temps disponible, et la motivation des élèves. L'intersection est-elle vide ? il faut obtenir une évolution plus rapide, généralement en diminuant l'incertitude de l'élève, soit par un apport d'information soit par le choix d'une situation plus fermée. Dans quelle mesure le sens des acquisitions en est-il affecté ? Seule l'expé-

rimentation peut répondre. Mais elle peut apporter beaucoup plus d'informations sur l'effet de ces conditions : Il est possible dans certains cas de s'aider d'études a priori, de « calculs des situations ». Par exemple, on peut ici comparer les coûts des diverses stratégies en nombre d'opérations à effectuer (mentales ou écrites).

	P_0	P_1	P_2	P_3
coût d'un résultat	2D + 2M	D + M	$2M + \frac{2D}{n}$	$\frac{D}{n} + M$
fiabilité d'un résultat	$d^2 . m^2$	d . m	$d^2 . m^2$	d . m

D: coût d'une division
M : coût d'une multiplication
d: proba (division juste)
m: proba (mult. juste)
n : nombre de segments

On peut s'essayer à prévoir l'effet de celles de ces variables que l'on peut faire varier (D, M en choisissant la grandeur des nombres, n). Nous appellerons variables didactiques *les variables de commande dont on montrera qu'elles ont un effet important — qualitatif — sur les évolutions de procédures.*

En s'aidant d'autres considérations, on peut formuler certaines hypothèses : par exemple, la méthode P_1 conduit à P_3 plus rapidement que P_2.

L'observation de deux classes (50 élèves), telle que nous la pratiquons régulièrement au Centre pour l'observation de l'école Jules Michelet de Talence, permet, par de simples χ^2 de tester des hypothèses de ce genre, pour peu que la prise d'information ait lieu au moment où les effectifs du choix sont suffisants pour chaque méthode.

Nous en donnerons quelques exemples au paragraphe 5.

3.1.3. Résumé de la suite du processus (2 séances)

Les activités, qui suivent les deux que nous avons décrites plus haut, ont pour objet de provoquer les modifications de sens détaillées ci-dessus du niveau 1 au niveau 7.

Le processus tend à amener les élèves à se poser des questions mathématiques à propos des propriétés des compositions : Est-ce que

$\times$ 2. (($\times$ 1,5) . (2,5)) est la même application que $\times$ (2 $\times$ (1,5 $\times$ 2,5)) ? Que signifie (:3), quels autres noms peut-on lui donner? (la définition de l'égalité de deux applications fonctionne ici comme moyen de preuve). Quels agrandissements peut-on obtenir par composition de deux pantographes (puis de 3, etc.), pris dans un certain ensemble, par exemple ($\times$ 2; $\times$ 3; $\times$ 4; $\times$ 7; $\times$ 10). Quelle est la réciproque de $\times$ 4/7, etc. Que produit $\times \frac{4}{7}$ $\times \frac{5}{3}$. Un des buts de ces activités consiste à interesser les élèves à la recherche des propriétés des objets dont ils s'occupent, ou à s'intéresser à des curiosités, comme par exemple, les situations où il faut choisir entre deux modèles d'augmentations de prix par somme ou alors par composition. Par exemple : $\times$ (1 +0,03 +0,05) et $\times$ (1 +0,03) (1 +0,05).

Bien sûr, chaque étape pose un problème spécifique qui appelle le choix de situations elles aussi spécifiques. Toutefois, un certain nombre de concepts de didactique et de tours de mains dont nous parlerons au chapitre suivant, permettent d'en produire et d'estimer leur adéquation. La plupart d'entre elles relèvent du schéma de la validation. L'habitude de ce genre de situations qui, au début, suit des règles précises, permet aux élèves d'instaurer et de conduire des débats sans que les règles soient explicitées chaque fois et d'en choisir des sujets.

L'activité finale consiste à identifier les fractions-mesures, les fractions-applications linéaires et les rapports, à unifier les expressions et les explications particulières produites au cours du processus, et à les reformuler dans le langage nouveau commun.

3.1.VI : Limites des processus de reprise

Cette réorganisation "après coup" de la connaissance est une activité fondamentale à laquelle on serait tenté de voir un bon entraînement aux mathématiques pour les élèves (Brousseau 1976); mais il n'est pas prouvé que cette transposition de la genèse historique en genèse didactique soit si intéressante. H.Ratsimba-Rajohn (1981) a montré que, contrairement à ce qu'on pourrait attendre et malgré un choix convenable des situations, dans certains cas, le modèle le plus ancien, celui dans lequel les autres prennent leur source et leur justification, sort renforcé d'un processus destiné à le faire remplacer par un autre, même si l'élève sort convaincu que le nouveau modèle est meilleur et si les situations lui donnent une grande supériorité. Le conditionnement par la répétition de l'emploi n'est pas effacé par la signification du processus. Aussi, l'étude des caractéristiques des situations didactiques ne peut pas plus être rabattue sur l'épistémologie qu'elle ne peut l'être sur la psychologie.

3.2. Le puzzle

3.2.1. La situation problème

La première situation d'étude des applications linéaires proposée aux élèves est la suivante.

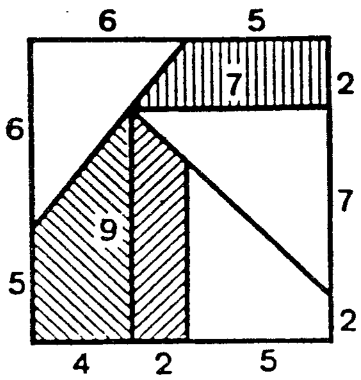


fig. 2

Consigne: «Voici des puzzles (Exemple : Tan-gran, fig. 2) vous allez en fabriquer de semblables, plus grands que les modèles, en respectant la règle suivante : le segment qui mesure quatre centimètres sur le modèle devra mesurer sept centimètres sur votre reproduction. Je donne un puzzle par équipe de 5 ou 6, mais chaque élève fait au moins une pièce ou un groupe de 2 en fait 2. Lorsque vous aurez fini, vous devez pouvoir reconstituer les mêmes figures qu'avec le modèle».

Déroulement: Après une brève concertation par équipes, les élèves se séparent. Le maître a affiché au tableau une représentation agrandie des puzzles complets.

Presque tous les enfants pensent qu'il faut ajouter 3 centimètres à toutes les dimensions : même si certains doutent de ce modèle, ils parviennent rarement à s'expliquer et jamais à convaincre leurs partenaires à ce moment-là. Le résultat évidemment, c'est que les morceaux ne se raccordent pas. Discussions, diagnostics, les leaders accusent leurs camarades d'avoir manqué de soin. Ce n'est pas le modèle, c'est la réalisation qui est mise en accusation; vérifications, certains refont tous les morceaux. Il faut se rendre à l'évidence, ce n'est pas facile! Le maître n'intervient que pour encourager et constater les faits, sans exigences particulières. Certains enfants produisent, par retouches successives, un puzzle qui reproduit grossièrement la forme du modèle. D'autres se tirent d'affaire en découpant un grand carré : les raccordements sont impeccables. Le maître invité, ainsi que les autres groupes d'élèves, à constater le succès, suggère dans ce cas aux compétiteurs de former avec *le modèle une figure(fig.3)* qui ne peut pas être reproduite avec l'image (fig.4) il est assez facile en

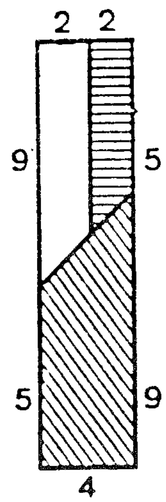


fig. 3 : modèle

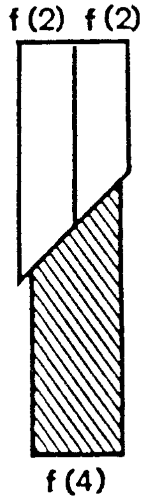


fig. 4 : image

général de trouver 3 côtés, a, b, c, tels que
$a + b = c$ et $f(a) + f(c) \neq f(c)$. Ceci amène souvent les élèves à remarquer la nécessité de réaliser la condition caractéristique de la linéarité.

Divers processus sociaux et intellectuels se conjuguent pour rendre difficile la remise en cause du modèle. On peut assister à des manifestations affectives extrêmement vives : disputes, acharnement, pleurs, menaces.

Lorsque les enfants admettent qu'il doit y avoir une autre loi et se mettent à la chercher, les choses vont beaucoup plus vite, surtout si l'un d'eux, ou le maître dispose les longueurs dans le tableau (fig.5).

4 —— 7
5 ——
6 ——
2 ——
9 ——
7 ——

Fig. 5

Ils trouvent d'abord l'image de 8 : 4 → 7 alors 8 → 14, qui ne sert pas et curieusement, cette idée n'est pas contestée, comme si dès que l'autre modèle est rejeté, celui-ci s'imposait. « Il faudrait l'image de 1 » « Oui, ça permettrait de trouver toutes les autres» «pour celà, il faut partager 4 en 4 parties, il faut diviser 7 en quatre aussi »». Le modèle de commensuration qui leur est enseigné leur permettrait d'écrire directement : 4 fois l'image de 1 mesure 7, l'image de 1 est donc 7/4 (voir par. 4.2.6.). Ils ne l'utilisent pas spontanément. Ils calculent par des procédés du genre suivant :

$$7 = \frac{70}{40} = \frac{280}{40} \quad \frac{280}{40} : 4 = \frac{70}{40} = \frac{35}{20} = \frac{175}{100} = 1{,}75$$

alors $\frac{350}{100} : 2 = \frac{175}{100} = 1{,}75$ etc. Il est sûr que ces calculs ne peuvent avoir lieu que parce que la fraction-mesure est connue.

On observe peu de remarques à ce moment sur la nécessité d'avoir des segments tels que $f(a) + f(b) = f(c)$ dès lors que $a + b = c$. Ces calculs permettent enfin le succès dûment constaté par la construction effective.

3.2.2. *Résumé de la suite du processus*

La leçon suivante consiste à proposer de chercher l'image — dans la même situation — d'une longueur fractionnaire. Les enfants peuvent vérifier leurs prévisions pour des fractions simples en utilisant les puzzles construits.

Pour enseigner le calcul de l'image des décimaux, le maître introduit à nouveau une situation semblable à celle du puzzle; il s'agit d'agrandir et de reproduire une pièce en T qui par juxtaposition, produira une mosaïque. Cette fois, les remarques sur la relation fondamentale abondent et le modèle linéaire est adopté d'emblée mais on aurait tort de supposer qu'il s'est définitivement installé, car, dans une activité ultérieure (6 séances plus tard) les élèves accepteront sans sourciller l'idée que les applications $\xrightarrow{\times 2,2}$, $\xrightarrow{x+5}$, et $\xrightarrow{2x+3}$ sont toutes les trois des applications linéaires (des « agrandissements » comme les autres). Et il faudra aussi les distinguer des fonctions quadratiques (Ex. : côté → surface du carré) pour qu'ils utilisent systématiquement le critère fondamental afin de s'assurer dans chaque cas du bien fondé de l'emploi de la linéarité.

Le lecteur aura remarqué que dans cette première séance sur le puzzle, l'agrandissment n'a pas besoin d'avoir de nom. Les activités suivantes vont multiplier ces agrandissements et lorsqu'il faudra les comparer, trouver ceux qui sont équivalents, les ranger, la domination par l'image de 1 sera choisie consciemment. Alors la question « est-ce que les agrandissements sont des nombres » sera posée comme elle l'a été pour les fractions-mesures, et laissée sans réponse officielle.

3.2.I : Fondements affectifs et sociaux de la preuve mathématique

Cette situation du puzzle est du même type didactique que celle du pantographe mais la prévision correcte s'y heurte, de façon beaucoup plus dramatique, à un obstacle épistémologique : la preignance du modèle additif.

Il est essentiel que le maître ait pu, au préalable, donner à ses élèves l'habitude d'accepter de chercher leurs solutions dans la situation — problème et non d'essayer d'interprêter les indices qu'il pourrait leur fournir. Il aura besoin de tout son crédit de « neutralité cognitive » pour pouvoir soutenir les élèves au niveau affectif sans interrompre les processus psychologiques et sociaux qui doivent s'accomplir. De prime abord, la situation leur paraît parfaitement innocente, familière et sans mystère : chacun a le temps de se faire une idée et de s'investir personnellement dans une tâche matérielle qui va engager sa responsabilité à l'égard de l'équipe. Le suspense est tout-à-fait modéré, mais il existe tout de même. Le scandale éclate dans un ciel serein ça ne marche pas ! Il faut que ça marche ! Les convictions se heurtent et s'expriment selon les caractères et positions sociales au sein de l'équipe. C'est alors que commence le processus scientifique, il faut chercher la cause, s'obstiner. Il ne sert à rien de séduire ou d'intimider l'opposant, il faut se convaincre, convaincre, prouver. L'équipe éclate en écoles : les uns contrôlent le travail fait, d'autres veulent agrandir le carré, le doubler et couper un petit bout. Les amitiés sont à rude épreuve, les mises en doute sont reçues comme des trahisons, les « faibles » mettent en doute la compétence des « forts ». Rien à faire, la réthorique devra céder le pas à la preuve scientifique et intellectuelle, seul moyen honorable de se rendre à l' « adversaire ». Lorsque, l'obstacle franchi, la solution apparaîtra à chacun démystifiante, contingente, banale, et même un peu désenchanteresse, chacun se la sera appropriée, et aura triomphé, non pas *de ses camarades, mais de lui-même, tout le monde a gagné sans que le maître ait besoin de tirer aucune leçon. Le mérite d'abandonner une idée qu'on trouve fausse est aussi grand que celui d'en trouver directement une juste, l'obstination est aussi nécessaire que le renoncement à l'obstination. Les enfants ont été conduits à prendre plus passionnément le parti de la vérité.*

Nous avons constamment observé qu'ils tirent aussi le plus grand plaisir de ces jeux, comparables sur bien des points aux jeux sportifs. Ce plaisir les conduira à aimer les mathématiques et à leur donner la signification humaine et philosophique qu'elles n'auraient pas pu prendre. Le maître doit gérer l'investissement affectif, le désir de ses élèves et les leçons de ce type sont de nature à leur faire, non seulement accepter, mais demander éventuellement des exercices ou des entraînements. Nous n'avons pas décrit le système très complexe qui règle ses interventions, non plus strictement didactiques, mais dont l'importance n'échappera pas au lecteur. A.N. Perret Clermont (1979 et 1980) étudie cette construction de l'intelligence dans l'intégration sociale et N. Balacheff (1980) observe de façon fine les conduites de preuves des élèves de divers niveaux.

3.3. Approche décimale des rationnels (5 séances)

Ces situations font partie de la phase II.4 qui intervient dès que les élèves ont construit l'ensemble des rationnels munis des opérations, addition, soustraction, produit et division par un naturel et ordre.

3.3.1. Localisation d'un rationnel dans un intervalle naturel

Le joueur A choisit une fraction comprise entre 0 et 10 (sans la dire à haute voix). Il l'écrit sur un papier qu'il met dans sa poche.

Le joueur B cherche à deviner dans quel intervalle de naturels consécutifs se trouve cette fraction. Pour cela, il a le droit de poser des questions, par exemple :
« est-ce que ta fraction se trouve entre 7 et 9 ? »
A n'a le droit de répondre que par « oui » ou par « non ». B pose des questions jusqu'à ce qu'il ait trouvé les 2 entiers consécutifs entre lesquels se trouve la fraction. La maîtresse n'intervient dans cette phase que si les enfants font appel à elle, soit pour arbitrer un conflit, soit pour apporter des précisions ou des renseignements.

Le jeu oppose d'abord des équipes, puis très vite des élèves 1 à 1 qui choisissent en même temps deux fractions et se posent mutuellement des questions à tour de rôle. Le jeu est suivi d'une mise en commun des observations.

Il conduit les enfants à manier le langage désignant les intervalles de N et leurs intersections, éventuellement. Assez rapidement, la recherche d'un nombre minimum de questions conduit à une stratégie de partitions linéaires successives en intervalles à peu près égaux.
Ex. [0, 5[? R : oui ; [0, 3[? R : non ; [3, 4[? R : non
Je sais : [4, 5[!. Beaucoup d'élèves de 10 ans ont besoin après « [0, 5[? R : oui ; [0, 3[? R : non » de s'assurer de [3, 5[? Le jeu en

équipe conduit à des explications intéressantes.

Dans les phases antérieures, les élèves avaient remarqué que les entiers correspondaient à certaines fractions mais cette activité demande l'usage systématique du plongement de N dans Q.

3.3.2. *Intervalles rationnels*

Le maître demande aux élèves de chercher des fractions, par exemple entre 3 et 4. La comparaison leur fournit le moyen d'en trouver beaucoup :

$3 = \frac{12}{4}$ $4 = \frac{16}{4}$ alors $\frac{13}{4}$, $\frac{14}{4}$, $\frac{15}{4}$ répondent à la question. Il introduit alors de nouvelles règles au jeu précédent : on va essayer de continuer le jeu en essayant d'encadrer la fraction de l'adversaire dans l'intervalle le plus petit possible (sans préciser d'abord).

Remarque : Une année, ce jeu s'est appelé le « jeu du radar » (connu aussi sous le titre : « jeu de l'explorateur ») car la fraction de l'adversaire était un avion qu'il fallait localiser le mieux possible avec un faisceau radar de plus en plus étroit, mais cette « justification » n'a été proposée qu'une fois et n'aide pas beaucoup les enfants.

La difficulté consiste autant à trouver des fractions entre deux autres, qu'à comparer celle qu'on a choisie de celles du « filet » de l'adversaire.

Après quelques essais, la méthode du jeu s'éclaire un peu mais il faut se mettre d'accord sur ce que veut dire intervalle plus petit. Les élèves discutent, dessinent une droite. Séance *difficile* : la règle du jeu est difficile à apprendre et nécessite de nombreux calculs — l'enjeu n'est pas évident, cette activité consomme du « capital-plaisir » lors de la première séance. Les enfants s'arrêtent d'eux-mêmes dès le premier encadrement inférieur à 1 et comparent les longueurs des intervalles. Dans la séance suivante, certains peuvent poursuivre et raffiner une fois leur partition. Les enfants n'ont le temps que d'accomplir 2 parties. Cependant déjà, des encadrements décimaux apparaissent bien que les enfants voient que les calculs *de l'adversaire* sont facilités. C'est une faiblesse du jeu, car les élèves ne comprennent pas d'eux-mêmes qu'on n'a aucun intérêt à compliquer le calcul de l'adversaire. Dès que la question est réglée par une mise au point collective, les parties se déroulent beaucoup plus vite et les dénominateurs des fractions s'enflent : 99/10 est attrapée sous la forme 9900/1000. Encadrée dans un intervalle très petit : 1/100 000 la fraction 22/7 n'est pas encore attrapée. Une discussion animée s'installe : on ne pourra jamais *l'attraper ! disent les uns... mais si ! pourquoi ?* Certains donnent la raison : parce que 10, 100, 1000... ne sont pas multiples de 7, mais bien peu sont convaincus et le maître paraissant intéressé mais ignorant ou neutre, le problème reste ouvert pour le moment.

3.3.3. *Suite du processus*

Les fractions décimales dont nous nous sommes servis dans le jeu précédent, peuvent être placées très vite sur une droite graduée. Cette activité permet d'établir une relation avec les nombres à virgules (les décimaux) si les élèves les connaissent déjà et avec les longueurs. Sinon, le maître introduit l'écriture décimale. Est-ce que ce sont des nombres ? discussions assez courtes, les élèves déduisent les calculs sur les décimaux de ceux sur les fractions...

Le jeu de la localisation reparaît à la fin de cette série de leçons : où se trouve $\frac{221}{35}$? mais il prend aussi la forme : on veut partager 4319 entre 29. Les élèves « redécouvrent » la division dans les entiers et la prolongent.

Voici ci-contre le tableau final dressé par la classe et qui présente le travail effectué et les améliorations apportées. La disposition de la division a été perfectionnée.

3.4. Expérimentation du processus

3.4.1. Remarques méthodologiques

La méthode que nous avons utilisée pour identifier les problèmes d'enseignement des décimaux et pour observer le fonctionnement des concepts de didactique est bien connue en physique et en technologie empirique: c'est celle des «comparaisons à résultats constants».

Après avoir identifié un certain nombre de variables ou d'options que l'on croit susceptibles d'agir de façon significative, on réalise des expériences basées sur des choix différents avec l'intention de les comparer, indépendamment de l'idée que l'on se fait de l'intérêt de ces choix pour l'enseignement.

La méthode expérimentale classique consiste à organiser alors en plan d'expérience les différents choix et à conclure au vu des variations des résultats statistiques.

Elle ne convient pas à notre propos:

— d'une part, elle n'est pas déontologiquement recevable. Aucun professionnel ne peut accepter, a priori d'enseigner «pour voir», en se désintéressant du résultat.

— d'autre part, elle n'est pas possible; par fonction, le système éducatif réagit à ses propres résultats en modifiant ses conditions d'enseignement et donc, la base de la comparaison, fondée sur l'identité des conditions, est caduque et par conséquent, elle exige l'analyse des réactions du système éducatif et donc, celle des conditions d'enseignement.

Ces comparaisons « à résultats constants » portent sur les conditions d'obtention et les moyens mis en œuvre pour contrôler les résultats, et non sur les résultats eux-mêmes : nous cherchons à savoir si les mêmes résultats sont plus

Tableau II

Ce que nous avons cherché	Ce que nous avons fait		
1. Je cherche les entiers **Je cherche combien de fois 35/35 est contenu dans 221/35** **$6 < 221/35 < 7$**	$221 \div 35 = 6$ reste 11		Une fillette propose alors de remplacer les soustractions successives par une division, ce qui est fait aussitôt par les enfants. Cette même fillette demande alors si on ne pourrait pas mettre toutes ces divisions dans une seule.
2. Je cherche les 1/10 **Je cherche combien de fois 1/10 est contenu dans 11/35** **$6{,}3 < 221/35 < 6{,}4$**	11/35 - 1/10 110/350 - 35/350 = 75/350 75/350 - 35/350 = 40/350 40/350 - 35/350 = 5/350 on l'enlève 3 fois	$110 \div 35 = 3$ il reste 5 qui représente 5/350	**IV – Division.** Algorithme
3. Je cherche les 1/100 **Je cherche combien de fois 1/100 est contenu dans 5/350** **$6{,}31 < 221/35 < 6{,}32$**	5/350 - 1/100 50/3 500 = 15/3 500 on peut l'enlever 1 fois	$50 \div 35 = 1$ il reste 15 qui représente 15/3 500	35 $35 \times 6 = 210$ $35 \times 3 = 105$
4. Je cherche les 1/1 000	15/350 - 1/1 000 150/3 500 - 35/3 500 = 115/3 500 ici les enfants proposent d'écrire etc... parce qu'ils se rendent compte que «c'est toujours pareil».		6 , 3 1 2 2 1 2 1 0 0 1 1 | 0 1 0 | 5 0 0 | 5 0 3 5 1 5

ou moins coûteux à obtenir selon divers choix. De très nombreuses raisons, que nous n'exposerons pas ici, plaident en faveur de ce procédé.

Il faut rompre néanmoins avec certaines routines de la recherche fondamentale : ainsi, au lieu de comparer des processus peu différents pour observer l'effet d'une modification des conditions, en maintenant toutes les autres constantes, il est préférable, au contraire, de produire des processus très différents en faisant varier des conditions jugées importantes. Cependant, pour rendre possible l'enseignement, c'est-à-dire pour réaliser et conduire ces situations concurrentes, nous avons vu que nous étions amenés à répondre à de nombreuses questions et à faire de nombreux choix. Ces questions et ces choix forment le tissu que les concepts et les théories didactiques ont à charge de décrire en même temps que de fournir les moyens *d'analyser* les réalisations obtenues.

3.4.2. La situation expérimentale

a) Le curriculum a été conçu et préexpérimenté au cours de la période 1974-1976 (à la suite de tentatives qui ont débuté en 1971-1972) avec la collaboration de Mme Llorens et Mme Brousseau, institutrices, dans deux classes de CM2* à l'école J. Michelet de Talence, où se trouve implanté le centre d'observation de l'IREM de Bordeaux.

Il a été présenté sous forme d'une suite de textes comparables à celui du chapitre 4 et d'un film réalisé par l'OFRATEME en collaboration avec M. C. Prouteau. Sa communicabilité a été éprouvée au même niveau à l'Ecole Normale de Pau (5 classes), à l'Ecole Normale de Périgueux (3 classes), à Orléans, la Source (1 classe) et 3 fois au CM1*.

b) La population

Nous allons rendre compte de sa reproduction dans 2 classes de CM2 de l'école J. Michelet pendant 3 ans, (d'octobre 1977 à juin 1980) par Mmes N. Brousseau et D. Greslard : les effectifs étaient de ce fait 54, 50 et 47 enfants.

c) Techniques

Nous nous assurons de la « reproduction » effectuée du processus dans son ensemble. A l'intérieur de ce processus, nous aménageons des modifications des conditions et nous comparons les efforts nécessaires à l'obtention des mêmes résultats. Le recueil d'un grand nombre d'observations dans des conditions déterminées permet l'étude expérimentale classique de certaines questions de didactique dont nous parlerons au paragraphe 5.

* CM1 : Cours moyen 1ère année, enfants de 9-10 ans.
CM2 : Cours moyen 2ème année, enfants de 10-11 ans.

3.4.3. Les résultats scolaires

Les résultats que nous présentons ont été choisis parmi tous ceux qui ont été recueillis de façon à montrer, autant que possible, quel est le niveau des élèves en fin d'année sur les différentes catégories mathématiques d'exercices. Dans le tableau V, nous donnons donc tous les résultats obtenus au cours des différents CAS (contrôles de l'année scolaire), tous ceux figurant aux TAS (tests d'acquisitions scolaires) et certains résultats à des contrôles, aussi tardifs que possible, dans les catégories où, ni les CAS ni les TAS ne présentent de questions.

Le TAS est un test QCM étalonné à l'échelon national et porte sur les acquisitions en français aussi bien qu'en mathématique. Il permet de contrôler que les résultats de l'école expérimentale ne s'écartent pas significativement des résultats nationaux.

Le CAS est une liste d'exercices, correpondant aux objectifs de l'expérience, parmi lesquels sont choisis ceux constituant l'épreuve de fin de chaque année (les questions peuvent donc différer d'une année à l'autre).

Rappelons que ces résultats sont donnés à titre indicatif et que le curriculum n'a pas été choisi de façon à produire les effets scolaires maxima. Les seules exigences déontologiques de l'expérience étant que :

i) les maîtres cherchent à obtenir les meilleurs résultats dans les conditions qu'on leur a proposées.

ii) les résultats obtenus sont au moins aussi bons que ceux produits par les autres méthodes.

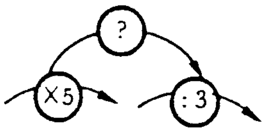
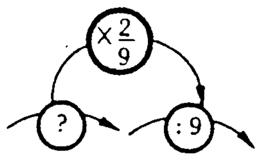
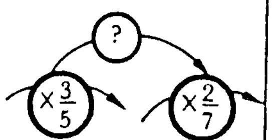
Le tableau ci-après montre que les exigences ont été satisfaites. Il n'est pas question de tirer argument scientifique de différences entre des méthodes dont on sait bien qu'elles peuvent être produites par des conditions fort variées que nous n'avons pas les moyens de contrôler.

Tableau V : LES RESULTATS SCOLAIRES CAS – TAS

I – Mesure

FRACTIONS				DECIMAUX			
Enoncés	Résultats en %			Enoncés	Résultats en %		
Années Effectifs	77-78 54	78-79 50	79-80 47	Années Effectifs	77-78 54	78-79 50	79-80 47
I – Rangement							
Ranger du plus petit au plus grand les nombres suivants : $\frac{1\,109}{1\,000}$; 0,802 ; 1,019 $\frac{41}{50}$; $\frac{4}{50}$ (CAS 78) CAS : contrôles d'acquisition scolaires passés en fin d'année scolaire	78,5			Entoure le plus petit des nombres suivants et mets une croix sous le plus grand : 8,709 ; 8,09 ; 8,079 ; 8,90 ; 8,097 CAS 80			70 72
				$0{,}12 < 0{,}097 < 0{,}107$ $0{,}097 < 0{,}107 < 0{,}12$ $0{,}097 < 0{,}12 < 0{,}0107$ TAS : tests d'acquisitions scolaires (cocher la bonne réponse)	39,5	39	70
II – Repérage							
Placer les fractions suivantes sur une droite : $\frac{75}{50}$; $\frac{160}{75}$; $\frac{450}{50}$ (contrôle du 4-2-78 et février 79)	62	84,5		Place sur la droite graduée les nombres suivants : 2,2 ; 2,63 ; 2,04			50 50 52
				Place sous chaque flèche le nombre qui correspond : (c'était : 0,8 ; 3,7 ; 8,5) CAS 80			70 72 90
III – Encadrements							
Ecrire 3 fractions comprises entre : $\frac{5}{10}$ et $\frac{45}{25}$ (comp. 1er février)	67,7	77,7		Ecris un nombre décimal situé entre 1,2 et 1,3.			67
				Peux-tu écrire un décimal entre $3{,}14 < \quad < 3{,}15$ CAS 79		53	
				Ecrire 5 nombres décimaux entre 1,019 et 1,021 CAS 78	33		

			IV – Transformations				
Fractions → décimal				**Passage de l'écriture en lettre → en chiffre**			
Ecrire sous forme de nombre à virgule $\frac{123}{100}$; $\frac{12}{25}$; $\frac{2}{125}$ (CAS 78)	56			Ecris en chiffres : quarante huit unités sept dixièmes ; douze unités trois centièmes ; trente cinq centièmes. CAS 80			80 80 70
				Ecris sous forme de nombre décimal : quanrante huit unités sept dixièmes ; douze unités trois centièmes; deux cents unités huit millièmes ; quatre vingt neuf millièmes ; six cent quarante huit centièmes CAS 79		79	
Equivalence Ecrire 3 fractions égales à 15/25 (comp. I. 1978-1979)	65,5	82,5					
Quelle est la série exacte de fractions équivalentes : $\frac{2}{3}$; $\frac{4}{5}$; $\frac{6}{7}$ / $\frac{2}{3}$; $\frac{4}{6}$ $\frac{6}{9}$ / $\frac{2}{3}$; $\frac{4}{9}$; $\frac{16}{81}$ (TAS)	50,5	54	62,5				
			V – Additions				
Calculer : $\frac{84}{10} + \frac{425}{100} + 7 + \frac{3}{5}$ (composition I)	24	38	52	Effectuer : 12,04 + 108,974 CAS 78 – CAS 80	82,5		90
				2 763 + 554,65 CAS 79		89	
				0,07+0,05+0,01=0,013 0,07+0,05+0,01=1,3 0,07+0,05+0,01=0,13 Cocher la bonne réponse TAS (Test d'acquisition scolaire)	84,5	75	82
			VI – Soustractions				
Calculer : $5/8 - \frac{24}{100}$	57,5	69	71	Effectuer : 8,043 - 7,95 CAS 78	65,5		
				273,08 - 67,5 CAS 79		78,5	

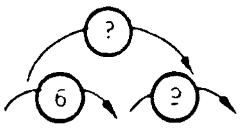
				8,14 - 7,956 **CAS 80**			87
				1 - 0,991 = 0,009 □ 1 - 0,009 = 0,091 □ 1 - 0,001 = 0,099 □ TAS (cocher la bonne réponse)	47	45	45
				VIII – Multiplications			
				Effectuer : 17,03 × 4,507 CAS 78	53,5		
				2,6 × 30,5 CAS 79		89	
				2,68 × 30,9 CAS 80			67
				10000 × 0,042 | 42 □ 420 □ 4200 □ (TAS) (cocher la bonne réponse).	52,5	66	62
				VIII – Divisions			
				Effectuer : 50,25 : 33,5 (CAS 78)	58,5		
				491,4 : 0,7 (CAS 79)		61	
				50,25 : 33,5 (CAS 80)			62
				0,17342 : 0,0017342 = 1000 □ 100 □ 10000 □ (TAS) (cocher la bonne réponse).	67,5	64	75
				PRODUITS 1 – Opérateurs			
	82,5	87	82,5				
 TAS	86,5	93,5	90				
 TAS	63,5	75	75,5				

2 – Applications courantes

Un fromage contient 45 % de matière grasse. Trouve la masse de matière grasse contenue dans 250 g de ce fromage.	C : 64 R : 45,5						
Quelle distance représentent 12 cm sur une carte à l'échelle 1/5000000 ? La distance entre 2 villes est de 35 km. Quelle sera la distance entre ces 2 villes sur la carte CAS 78	C : 79,5 R : 53						

DIVISIONS

1 – Opérateurs

 TAS	63,5	75	75,5				

2 – Applications courantes

				Un casier de douze bouteilles coûte 56,40 F. Quel est le prix d'une bouteille ? CAS 80			C : 95 R : 72
				Un casier de dix bouteilles coûte 36,50 F. Quel est le prix d'une bouteille ? CAS 78 – CAS 79	79	C : 93 R : 82	
				Un marchand de fruits et légumes a acheté au marché un lot de 14 kg d'oranges pour 20 F. A quel prix lui revient 1 kg d'oranges ? Donne ta réponse sous forme de fraction puis au centime près. CAS 78	C : 79,5 R : 53		
C* : opérations posées et explications correctes. R : résultat.							

II — Problèmes

Sur un cadran d'horloge, la grande aiguille tourne de 5/12 de tours. Quelle est la durée de cette rotation ? 25 mn ☐ 5 mn ☐ un quart d'heure ☐ TAS	37,5	43	32	**Maman a payé 25,20 un bifteck de 900 g. Quel est le prix du kilo ? Combien aurait-elle payé 350 g de bifteck ? CAS 78**	C : 55,5 R : 28		
Sur le plan au $\frac{1}{200}$ d'un appartement, les dimensions de la salle de séjour en murs sont de 35 et 20. Les dimensions réelles en m sont : 2,35 et 2,20 ☐ 70 et 40 ☐ 7 et 4 ☐ TAS (cocher la bonne réponse).	26	31	27	Sur une carte routière 4,5 cm représentent une distance de 9 km. Quelle est l'échelle de cette carte ? CAS 78	C : 31 R : 18,5		
				A 40 F le kg, combien coûte un gigot de 1500 g ? CAS 78 – CAS 79	64	C : 58 R : 53,5	
				A 40 F le kg, combien coûte un rôti de 3550 g ? CAS 1980			
				Colette veut acheter des pommes. Elle a le choix entre 4 catégories, A, B, C, D, présentées en sachets de poids différents : (voir tableau ci-dessous) Quelle est la catégorie la plus intéressante ? (Celle qui revient le moins cher au kg). CAS 78 – CAS 79	49	C : 43 R : 43	

	A	B	C	D
poids du sachet (kg)	1	2	3	5
prix du sachet (F)	2,30	5	6,9	10,5

3.4.4. Reproductibilité — Obsolescence

a) La reproductibilité doit être envisagée d'abord à travers la stabilité des résultats à des exercices comparables, proposés au cours de chacune des trois années de l'expérience principale, dans des conditions comparables.

Une grande latitude ayant été laissée aux maîtres pour ajuster leur enseignement, on retrouve seulement 40 exercices commun aux trois années (sur 75 posés chaque année) : 21 ont été posés en cours des processus, 8 figurent dans les contrôles de fin d'année et 11 que nous traiterons à part, appartiennent au TAS.

L'examen du tableau VI permet d'observer :

— une assez bonne stabilité des *résultats aux contrôles* annuels malgré, selon l'opinion des maîtres, des différences importantes entre les niveaux des élèves des différentes promotions : les résultats ne diffèrent pas significativement d'une année à l'autre. Par contre une bonne corrélation entre ces exercices montre qu'ils sont très comparables.

Tableau VI

% de réussite / années	X 77-78	Y 78-79	Z 79-80		XY t de student r corrélation	XZ t r	YZ t r
effectif des élèves	54	50	47				
exercices r = 21 — m	65,93	75,23	76,05	t	1,57 NS	1,98 NS	NS
σ	20,21	18,08	11,75	r	0,97 S.001	0,67 S.001	0,64 S.001
contrôle annuel r = 8 — m	73,25	77,50	72,50	t	0,65 NS	NS	NS
σ	11,46	14,17	10,12	r	0,75 S.05	0,80 S.02	0,47 NS

— Les résultats aux *exercices en cours d'apprentissage* paraissent moins utilisables, mais il n'y a pas non plus entre eux de différences significatives. Les corrélations sont excellentes : au prix d'une correction linéaire, les pourcentages pourraient presque être confondus. L'examen des corrélations partielles permet d'éliminer, dans une certaine mesure, l'influence de la « nature des exercices ». Alors que les deux premières années restent fortement corrélées, la troisième ne l'est plus :
($r_{xz/y} = -0{,}055$(NS); $r_{xz/y} = 0{,}26$ (NS); $r_{xy/z} = 0{,}95$ (S))

b) L'observation du graphe de contingence montre, qu'en fait, une correction quadratique serait plus indiquée car les résultats des exercices ayant eu la première année les pourcentages de réussite les plus faibles : 5 exercices au-dessous de 50 % font l'objet d'une amélioration importante les années suivantes : 3 au-dessous de 50 la 2ème année, et seulement 2 entre 50 et 60 la 3ème. Seuls les exercices proposés en cours de processus sont dans ce cas, mais ne sont pas caractérisés par un type d'opérations mathématique.

c) L'hypothèse de *reproduction* du même processus doit être envisagée principalement contre les deux suivantes :

1. Celle d'une « amélioration », au moins locale, comme celle que nous venons de signaler et dont l'effet, visible ici, est un resserrement de la dispersion des résultats (l'écart type des exercices diminue fortement d'une année à l'autre).

2. Celle d'une obsolescence des situations didactiques. *Nous entendons par* obsolescence *le phénomène suivant : les maîtres, d'une année à l'autre, ont de plus en plus de mal à reproduire les conditions susceptibles d'engendrer chez leurs élèves, à travers peut-être des réactions différentes, une même compréhension de la notion enseignée. Au lieu de reproduire des conditions, qui, tout en produisant le même résultat laissent libres les trajectoires, ils reproduisent au contraire une « histoire », un déroulement semblable à celui des années précédentes, par des interventions qui, même discrètes, dénaturent les conditions didactiques garantes d'une signification correcte des réactions des élèves : les comportements obtenus sont apparem-*

ment les mêmes maiś les conditions dans lesquelles ils ont été obtenus en modifient le sens, *plus proche du comportement culturel.*

L'enfant puise alors les informations nécessaires à l'établissement de ses réponses, moins dans l'analyse de la situation et la compréhension du problème (qui lui est proposé) que dans les indications « pédagogiques » qui lui sont fournies d'instant en instant, selon un contrat didactique implicite indépendant du contenu. (Brousseau 1979). Ce processus présente l'avantage de réaliser l'institutionnalisation de la connaissance : l'élève prend connaissance des questions qu'on veut lui poser, des réponses qu'on attend de lui, de leur statut culturel... etc.

La situation didactique envisagée initialement comme une situation d'adaptation *de l'élève dans une situation-problème est devenue en fait une situation de* communication d'un savoir institutionnalisé *avec les inconvénients que l'on connait pour la compréhension et l'acquisition.*

Les travaux de E. Filloy permettent de prévoir que certains objectifs de haut niveau taxonomique échappent au contrôle des maîtres et donc aux corrections didactiques. On peut espérer que l'obsolescence, si elle se produit, entraînera d'une part, une évolution des questions choisies par le maître dans le sens d'une augmentation du nombre des problèmes formés et d'autre part une diminution des réussites sur les questions les plus ouvertes.

On peut noter des tendances dans les sens indiqué en observant, par exemple, dans le tableau VII, l'évolution des pourcentages de réussite aux opérations et en les comparant à ceux des structures problèmes. Ces tendances ne sont pas significatives.

d) Sans rapporter ici plus longuement les moyens du même ordre par lesquels on l'obtient, nous accepterons cette conclusion : si l'expérience a reproduit les conditions prévues — ce que l'observation clinique et d'autres statistiques ont à charge de déterminer — elle a produit sensiblement les mêmes résultats. C'est pourquoi nous rapportons ces résultats au processus que nous étudions, quelle que soit l'année qui fournisse l'information étudiée dans le tableau.

Tableau VII

		78	79	80
opérations	m	72	77.4	77.2
	σ	12.8	11.08	10.97
problèmes	m	73.8	73.7	67.2
	σ	8.13	17.43	5.87

Résultats

	78	79	80
opérations	19	15	15
problèmes	7	1	1

Nombre de contrôles

3.4.5. *Brefs commentaires*

a) Comparaisons externes

En rapprochant, sous réserve des remarques précédentes, ces résultats sur ID de ceux des tableaux de la première partie de l'article (Brousseau 1980, p. 47) on peut remarquer qu'ils leur sont assez comparables, sans leur être inférieurs, sur les objectifs considérés comme fondamentaux par les maîtres (opérations). Ils s'échelonnent dans le même ordre de réussite entre 60 et 90 %.

On peut attribuer les fluctuations à des différences entre les questions posées.

De même, on assiste, ici comme là, à une importante baisse des réussites dans les « Problèmes ».

b) Comparaisons internes : les décimaux

L'analyse factorielle des résultats indique que le mode de questionnement (TAS ou CAS) est le premier facteur de dispersion des élèves et des questions. Les opérations sur les décimaux sont raisonnablement acquises. Les différences entre les réussites aux additions et aux soustractions ont tendance à s'effacer, sauf pour les TAS qui présentent des difficultés spécifiques (1 — 0,09 etc). De même, la réussite est à peu près la même aux multiplications et aux divisions et en moyenne 10 à 15 % inférieure à celle des opérations précédentes.

La relation d'ordre et ses manifestations, rangements, repérages, encadrements ont des taux de réussite qui sont du même niveau que les opérations (contrairement à ce qui se produit habituellement).

La conception des décimaux en tant qu'application linéaire est bien acquise : les opérations sont posées à bon escient (compréhension de 80 à 95 %) et bien réussies.

Les situations et problèmes sont moins bien réussis et c'est la compréhension des situations qui est en cause.

c) Les rationnels. Les rangements, repérages et encadrements sont un peu mieux réussis dans les rationnels que dans les décimaux et les résultats sont honorables. Il faut voir là l'effet de renforcement du modèle initial dont nous avons parlé : les fractions servent à établir les règles de comparaison des décimaux. Leur connaissance est renforcée.

Ce phénomène se produit aussi pour la soustraction des fractions qui est utilisée au début de l'approche des rationnels (65 %) alors que l'addition l'est beaucoup moins (40 %) mais dans ce dernier exercice, c'est la présence du 7 qui a fait baisser les résultats.

L'utilisation des opérateurs et du symbolisme fonctionnel est efficace malgré un apprentissage finalement très court sur ce sujet (75 à 90 %).

d) Le fait que la réussite aux exercices sur les décimaux soit assez comparable à la réussite aux exercices correspondants sur les rationnels, est un indice nouveau et positif d'un fonctionnement mieux contrôlé du concept.

e) L'analyse du processus ne sera pas faite ici. La principale question qui nous intéresse (voir paragraphe 5.4.) exigerait l'examen du nombre d'exercices et de leçons et celui des dépendances et des implications entre les résultats des élèves. Cet examen doit porter sur leurs comportements d'erreurs et non seulement, comme ici, sur leurs réussites à propos de situations relevant de niveaux taxonomiques plus élevés.

4. Analyse d'une situation : l'épaisseur d'une feuille de papier

4.1. Description de la situation didactique : séance 1 (phase I.1)

4.1.1. Préparation du matériel et des lieux

L'enseignant a disposé :

— sur une table devant les enfants : 5 tas d'environ 200 feuilles de même format, de même couleur, mais d'épaisseurs différentes (par exemple, des feuilles de polycopie, de bristol etc.) placés dans un ordre quelconque.

Certaines différences d'épaisseur ne doivent pas pouvoir être appréciées au simple toucher. Le maître ne cherche pas à « savoir » ces épaisseurs à l'avance : il n'y a pas de « bonne mesure » à découvrir.

— sur une autre table au fond de la classe 5 autres tas de 200 feuilles des mêmes types de papier placés dans un ordre différent qui servira pendant la phase 2.

— 10 pieds à coulisse en plastique (2 par groupe de 5 enfants)

— Un rideau ou un paravent permet de partager la classe en 2.

4.1.2. 1ère Phase : Recherche d'un code (durée 20 à 25 mn)

La maîtresse place les enfants par équipes de quatre ou cinq.

a) Présentation de la situation — Consigne

— « Voyez ces feuilles que j'ai préparées dans ces boîtes A, B, C, D, E. Dans un même tas, toutes les feuilles ont la même épaisseur mais d'un tas à l'autre, les épaisseurs ne sont peut-être pas les mêmes. Pouvez-vous sentir ces différences ? »

Quelques feuilles de chaque tas circulent dans la classe — les enfants les touchent, les comparent. « Comment fait-on dans le commerce pour distinguer les différentes qualités de papiers ? » (d'après le poids).

— Objectif

« Vous allez essayer d'inventer un autre moyen pour désigner et reconnaître ces différents types de papier, et pour les distinguer seulement d'après leur épaisseur.

Vous êtes groupés par équipes concurrentes. Chaque équipe va réfléchir pour trouver un moyen de désigner les épaisseurs des feuilles. Dès que vous en aurez trouvé un, vous l'essairerez dans un jeu de communication.

Vous pouvez faire des essais avec le papier et ces instruments appelés « pieds à coulisse » (les doubles décimètre suffiraient mais le pied à coulisse a été déjà utilisé) ».

b) Déroulement et remarques

Les enfants essaient presque tous de mesurer l'épaisseur d'une seule feuille afin d'obtenir immédiatement la désignation cherchée.

Il font des remarques du genre : « c'est beaucoup trop fin, une feuille n'a pas d'épaisseur » ou « c'est beaucoup plus petit qu'un millimètre », ou « ce n'est pas possible de mesurer une feuille ! »

Il y a souvent à ce moment-là une phase de désarroi, de découragement même des enfants. Puis ils demandent à la maîtresse s'ils peuvent prendre plusieurs feuilles. Très vite alors, ils font des essais de mesure avec 5 feuilles, 10 feuilles, jusqu'à ce qu'ils obtiennent une épaisseur suffisante pour la mesurer au pied à coulisse ou avec le double décimètre. Alors, ils échangent des systèmes de désignation tels que :

— *10 feuilles 1 mm*
60 feuilles 7 mm

ou

— *31 = 2 mm* (le maître fera remarquer lors de la discussion que cet emploi du signe égal n'est pas correct)

Dans l'une des équipes, les enfants ont refusé le pied à coulisse et ont établi ce système de désignation : A = TG B = TF D = M

A, B, C, étant le nom des différents types de papier, TG, TF, M voulant dire : très gros, très fin, moyen. Dans cette phase, le maître intervient le moins possible. Il ne fait de remarques que s'il s'aperçoit, que, dans les groupes, les enfants ne respectent pas — ou simplement ont oublié — la consigne.

Les enfants peuvent se lever, aller chercher des feuilles, les changer, etc.

Lorsque la plupart des équipes a trouvé un système de désignation (et que les cinq enfants de chacune sont d'accord avec ce système ou ce code) ou si le temps est écoulé, le maître passe à la phase suivante : le jeu de communication, et ceci même si toutes les équipes n'ont pas encore trouvé.

4.1.3. 2ème Phase : jeu de communication (10 à 15 mn)

a) Présentation de la situation — consigne

« Pour éprouver le code que vous venez de trouver, vous allez faire un jeu de communication. Vous verrez au cours de ce jeu, si la désignation des épaisseurs de feuilles que vous avez inventée vous permet de reconnaître le type de feuille désignée.

— Les enfants d'une même équipe vont se séparer en 2 groupes (de 2 émetteurs et de 3 récepteurs, suivant qu'ils sont 4 ou 5 dans l'équipe) : un groupe d'émetteurs et un groupe de récepteurs.

— Tous les groupes émetteurs vont se placer d'un même côté du rideau. Tous les groupes récepteurs de l'autre.

— Les émetteurs vont choisir un des types de papier placés sur la première table (A ou B, ou C ou D ou E) (que les récepteurs ne voient pas grâce au rideau). Ils vont envoyer à leurs récepteurs un message qui devra permettre à ceux-ci de trouver le type de papier choisi. Les récepteurs utilisent les tas de papier disposés sur la deuxième table au fond de la classe pour trouver le type de papier choisi par les récepteurs.

Quand les récepteurs ont trouvé, ils deviennent émetteurs (après vérification avec les émetteurs). Des points seront attribués aux équipes dont les récepteurs auront bien trouvé le type de papier choisi par les émetteurs ».

b) Déroulement et remarques

Dès le début du jeu, la maîtresse met en place le rideau qui sépare émetteurs et récepteurs.

La maîtresse :

- *fait passer les messages des émetteurs aux récepteurs*
- *reçoit les réponses des récepteurs*
- *va contrôler que cette réponse est conforme au choix des des émetteurs et constate, avec toute l'équipe, l'échec ou la réussite.*

Tous les messages sont écrits sur une même feuille — que nous pourrions appeler ici « carnet de messages » (fig. 1) — qui circule entre les émetteurs et les récepteurs d'une même équipe — cette feuille porte le numéro de l'équipe. De plus, les émetteurs notent sur une autre feuille — que nous pourrions appeler « fiche de contrôle » — et qu'ils gardent, le type de papier qu'ils ont choisi à chaque jeu afin que la maîtresse puisse constater la réussite ou l'échec.

Remarque : *Il est clair que la maîtresse n'a pas introduit de vocabulaire superflu comme « carnet de messages » « fiche de contrôle »... ni d'exigences formelles à propos de la présentation des messages — que les enfants devraient apprendre à respecter. Il n'y a pas eu de consigne générale à ce sujet, seulement des aides et des corrections particulières auprès des enfants mal inspirés.*

(1)

numéro de l'équipe 1er jeu : message émis	I E : 10 = 1 mn	
réponse	R : D	réussi
2ème jeu : message émis	E : 21 = 1 mn	
réponse	R : B	réussi
3ème jeu : message émis	E : 8 = 2 mn	
réponse	R : A	réussi

carnet de messages

1er jeu	I 1 D
3ème jeu	3 A

feuille de contrôle

Si certaines équipes n'étaient pas arrivées à faire des messages efficaces, la maîtresse aurait organisé une nouvelle phase de concertation, par équipe, pour la recherche d'un code (même consigne que dans la première phase).

Mais ce fait ne s'est jamais produit (sur 8 expériences identiques). Les enfants sont arrivés à faire 2 ou 3 parties de jeu.

Pendant ce jeu, on observe 3 attitudes différentes chez les enfants :

— *certains choisissent un nombre de feuilles dont ils mesurent l'épaisseur*
— *certains choisissent une épaisseur et comptent le nombre de feuilles*
— *d'autres cherchent au hasard épaisseur et nombre de feuilles*

On remarque aussi que les enfants choisissent de préférence les types de feuilles d'épaisseur extrême : les plus fines ou les plus épaisses pour faciliter le travail de leurs camarades.

4.1.4. *3ème Phase : Résultat des jeux et des codes* (20 à 25 mn) (confrontation)

a) Présentation de la situation et consigne

Pour cette phase, les enfants reprennent leur place en équipes de 5 comme pour la 1ère phase de la séance. La maîtresse annonce une comparaison des résultats et prépare le tableau à double entrée : (équipes) X (types de papier) dans lequel elle inscrira les messages échangés et les points obtenus par les équipes (voir tableau I CM2 b 1977) au fur et à mesure de leur compte rendu.

b) Déroulement et remarques

A tour de rôle, chaque équipe envoie un « représentant » qui lit les messages à haute voix, explique le code choisi et indique le résultat du jeu.

Les différents messages sont comparés et discutés par les enfants. Comme ils sont souvent très différents, la maîtresse leur demande d'adopter un code commun.

Exemple : 10 = 1 mm
TF
60 feuilles 7 mm

Après discussion, la classe entière a décidé de marquer :
10 f ; 1 mm
60 f ; 7 mm

Lorsque tous les messages sont inscrits, les enfants observent le tableau et font spontanément des remarques du type : « ça, ça ne va pas » ou « ici, c'est bien » etc.

Ces remarques pourraient être classées en 4 catégories :

1ère catégorie :

Si les feuilles sont de type différent, à un même nombre de feuilles doivent correspondre des épaisseurs différentes.

Exemples du tableau I :

$$\left.\begin{array}{l} 19\ f\ ;\ 3\ mm \rightarrow \text{Type } A \\ 19\ f\ ;\ 3\ mm \rightarrow \text{Type } B \end{array}\right\} \quad \text{« ça ne va pas »}$$

$$\left.\begin{array}{l} 19\ f\ ;\ 2\ mm \rightarrow \text{Type } C \\ 19\ f\ ;\ 2\ mm \rightarrow \text{Type } D \end{array}\right\} \quad \text{« ça ne va pas »}$$

2ème catégorie :

Pour un même type de feuilles, au même nombre de feuilles correspond la même épaisseur

Exemple du tableau I :

$$\left.\begin{array}{l} 30\ f\ ;\ 2\ mm \rightarrow \text{Type } C \\ 30\ f\ ;\ 3\ mm \rightarrow \text{Type } C \end{array}\right\} \quad \text{« ça ne va pas »}$$

3ème catégorie :

S'il y a 2 fois plus de feuilles, l'épaisseur est 2 fois plus grande.

Exemple du tableau I :

$$\left.\begin{array}{l} 30\ f\ ;\ 3\ mm \rightarrow \text{Type } C \\ 15\ f\ ;\ 1\ mm \rightarrow \text{Type } C \end{array}\right\} \quad \text{« ça ne va pas »}$$

et les enfants rajoutent « on aurait dû trouver » :

$$\begin{array}{l} 30\ f\ ;\ 3\ mm \\ 15\ f\ ;\ 1\ mm \end{array} \quad \text{parce que} \quad x2\left(\begin{array}{l} 15\ f\ ;\ 1\ mm \\ 30\ f\ ;\ 2\ mm \end{array}\right)x2$$

4ème catégorie :

Des différences sur le nombre de feuilles ne doivent pas correspondre à des différences égales de mesures :

Exemple :

19 f ; 3 mm } *« ça ne va pas parce qu'une feuille ne peut*
20 f ; 4 mm } *pas mesurer 1 mm »*

A la fin de la séance, le maîtresse propose aux enfants de reprendre l'examen de ce tableau à la prochaine séance de vérifier collectivement les mesures par la manipulation et de les rectifier si c'est nécessaire.

Remarque : *La présentation des opérations effectuées sur les nombres dans la recherche de couples équivalents à l'aide de flèches n'a aucun caractère formel ni obligatoire, c'est une « manifestation » familière de l'emploi des opérateurs naturels auquel les enfants sont habitués.*

4.1.5. Résultats

Les enfants savent tous mesurer l'épaisseur d'un certain nombre de feuilles de papier, écrire le couple correspondant et rejeter un type de papier ne correspondant pas à une écriture qui leur est donnée. La plupart est alors capable de mettre en œuvre une stratégie de comparaison et en conclusion d'accepter un type de papier comme correspondant à une mesure. Quelques-uns ont formulé cette stratégie. La plupart des enfants peut analyser un tableau de mesures et signaler des incohérences en se servant implicitement du modèle linéaire.

4.2. Comparaison d'épaisseurs et couples équivalents (Activité 1, Séance 2)

4.2.1. Préparation du matériel et des lieux

Le matériel est le même que pour la séance 1 : les tas de feuilles disposés de la même manière, les pieds à coulisse.

4.2.2. 1ère phase (25 à 30 mn)

a) Présentation de la situation — Consigne

La maîtresse demande aux enfants de reprendre l'examen du tableau réalisé au cours de la 1ère séance.

Cette observation se fait d'abord silencieusement, pour que les enfants puissent repérer les incompatibilités les plus évidentes de certaines mesures. Puis la maîtresse leur propose de relever les erreurs qu'ils ont vues, ligne après ligne (pour chaque type de papier).

b) Déroulement et remarques

Les enfants, après observation, et sur leur demande, viennnent à tour de rôle au tableau pour montrer les « messages » qui leur apparaissent inexacts et proposent éventuellement une correction.

Ces corrections sont discutées par l'ensemble des enfants. S'ils sont tous d'accord, la correction est faite sinon, ils proposent de vérifier par une manipulation : ils recomptent le nombre de feuilles indiquées dans le message et font la mesure. Après vérification collective, le nouveau message est adopté et inscrit sur le tableau (cette manipulation est faite par groupes : 2 groupes vérifient un message, 2 autres, un autre message... etc). Il est arrivé souvent que lorsque le même type de papier est mesuré par des groupes d'enfants différents ces groupes ne trouvent pas des mesures compatibles. Ceci est dû souvent aux erreurs de lecture ou au fait que les enfants ont plus ou moins tassé les feuilles. Ils s'en rendent compte très vite et le disent.

Il est arrivé également pour des types de papier d'épaisseurs très voisines que les mesures trouvées ne permettent pas de reconnaître de quel papier il s'agit. C'est au cours de cette phase que les enfants se sont rendu compte qu'ils ont plus de chance de distinguer des épaisseurs de papier voisines en prenant un plus grand nombre de feuilles. En effet, 15 ou 20 feuilles seulement de papiers d'épaisseurs très voisines ont des mesures si proches que les enfants ne peuvent pas les distinguer avec précision. C'est alors qu'ils proposent souvent de mesurer l'épaisseur de 50, 80 ou 100 feuilles.

Exemples de remarques d'enfants *(ces exemples sont pris dans le tableau II)*

10 f ; 2 mm
et 5 f ; 1 mm *pour le type B, c'est bien.*

Un enfant ajoute :

$$\times 3 \begin{pmatrix} 5\ f\ ;\ 1\ mm \\ 15\ f\ ;\ 3\ mm \end{pmatrix} \times 3$$

Ces trois mesures : 5 f ; 1 mm — 10 f; 2 mm et 15 f ; 3 mm sont donc conservées.

Par contre dans la ligne du type C, les mesures :

12 f ; 1 mm
et 8 f ; 1 mm sont contestées et rejetées par les enfants qui proposent de les refaire.

Autre exemple (tableau II)

Equipes	Type C	Type D	Conclusions des enfants
1	100 f ; 8 mm	100 f ; 11 mm	1) D > C (D est plus épais que C)
2	12 f ; 1 mm	10 f ; 1 mm	2) D > C (D est plus épais que C)
3	8 f ; 1 mm		3) C > D (C est plus épais que D)
4		14 f ; 1 mm	

Les deux premières conclusions ne correspondent pas à la 3ème — les enfants décident de conserver la 1ère conclusion car ils voient que sur 100 feuilles, il y a 3 mm de différence alors qu'avec 8 f, 14 f, 12 f, il n'y a pas de différence de mesure.

Ils disent aussi qu'une différence de 3f (12—8) ou de 2 f (14—12) ne change pas la mesure (ils vérifient par une manipulation).

4.2.3. *2ème phase : finition du tableau : recherche des valeurs manquantes* (20 à 25 mn)

a) Présentation de la situation — consigne

Les enfants remarquent que certains types de papier n'ont pas été choisis au cours du jeu de communication et qu'il manque des mesures.

La maîtresse propose alors aux enfants de compléter le tableau en mesurant les types de papier manquant.

b) Déroulement et remarques

Les enfants se partagent le travail par groupes de 5 non plus concurrents mais coopérants et pas forcément les mêmes que dans la séance précédente (plusieurs groupes prennent le même type de papier et vérifient ensuite la comptabilité des mesures)

Exemple pour le type C :

$$x8 \left(\begin{array}{l} 12\ f\ ;\ 1\ mm \\ 96\ f\ ;\ 8\ mm \end{array} \right) x8$$

Quand tous les enfants sont d'accord, les nouvelles mesures sont inscrites dans le tableau (tableau III). A la fin de cette phase, le tableau est donc entièrement corrigé et complété. Il y a plusieurs messages compatibles pour chaque type de papier.

4.2.4. *3ème phase : jeu de communication* (15 mn)

— La maîtresse propose aux enfants de refaire le jeu de communication de la 1ère activité en tenant compte de toutes les remarques et corrections qu'ils ont faites (grand nombre de feuilles, tassement du papier...)

— Le jeu est donc repris une fois à la grande satisfaction des enfants qui réussisent tous, même si on ajoute un ou deux nouveaux types de papier.

4.2.5. *Résultats*

Ces enfants savent adapter le nombre des feuilles choisies aux besoins de la discrimination de leurs épaisseurs (augmenter le nombre de feuilles lorsque les épaisseurs sont très voisines). Ils savent trouver par le calcul, des couples correspondants au même type de papier. Tous savent maintenant utiliser le modèle linéaire pour analyser un tableau. Une partie d'entre eux est capable d'utiliser des relations de voisinage entre les couples. Un grand nombre d'enfants a été conduit à juger des déclarations et à argumenter lui-même.

EXEMPLES DE 1er TABLEAU DE MESSAGES (non corrigé)

type des feuilles	équipe 1	équipe 2	équipe 3	équipe 4
A	19 f ; 3 mm	10 f ; 2 mm	20 f ; 4 mm	
B	19 f ; 3 mm		4 f ; 1 mm	15 f ; 2 mm
C	19 f ; 2 mm	30 f ; 2 mm	100 f ; 8 mm	30 f ; 3 mm 15 f ; 1 mm 20 f ; 2 mm
D	19 f ; 2 mm 12 f ; 1 mm		100 f ; 9 mm	
E			9 f ; 4 mm	13 f ; 5 mm 7 f ; 3 mm

Tableau III – classe de CM2 b (1977)

type des feuilles	équipe 1	équipe 2	équipe 3	équipe 4
A	48 f ; 9 mm			
B			10 f ; 2 mm	5 f ; 1 mm 15 f ; 3 mm
C	100 f ; 8 mm	12 f ; 1 mm 96 f ; 8 mm	8 f ; 1 mm 64 f ; 8 mm 12 f ; 1 mm	
D	100 f ; 11 mm	10 f ; 1 mm 100 f ; 10 mm		14 f ; 1 mm 154 f ; 11 mm
E	23 f ; 10 mm	10 f ; 4 mm 8 f ; 3 mm	6 f ; 2 mm	

4.2.6. *Résumé de la suite de la séquence* (Séance3)

Après avoir vérifié que les élèves savaient reconnaître des feuilles désignées par leur épaisseur : (48 ; 9) par exemple, l'enseignant demande de trouver d'autres écritures pour désigner chaque épaisseur, puis de ranger les feuilles de la plus mince à la plus épaisse (25 f; 7 mm) qu'il faut ranger avec les autres.

En fin de séance, l'enseignant *expose* aux élèves une méthode d'écriture de l'épaisseur d'une feuille : (50 ; 4) désigne un tas de 50 feuilles qui mesure 4 mm d'épaisseur, l'épaisseur d'une de ces feuilles s'écrit $\frac{4}{50}$ que l'on lit : « quatre cinquantièmes de millimètres ». Il vérifie par des exercices que cette information est transmise.

La distinction entre l'épaisseur d'une feuille et la désignation d'un tas de feuilles est essentielle mais difficile et ne sera apprise que progressivement.

4.2.7. *Résultats*

Les enfants savent trouver des couples équivalents. Ils savent comparer les épaisseurs de feuilles (beaucoup avec 2 méthodes). Ils ont une stratégie de rangement des couples, d'après ces comparaisons. Ils savent désigner l'épaisseur d'une feuille de papier à l'aide d'une fraction et trouver des fractions égales.

Ils ne savent pas trouver l'égalité de 2 fractions dans le cas général.
Remarque : Ces savoir-faire sont constatés en situations. Il n'est pas possible à ce moment-là de détacher une question du contexte et de la poser de façon indépendante. On ne pourra donc pas encore s'appuyer sur ces résultats en tant que connaissances « acquises » et identifiées comme telles par l'enfant.

4.3. *Analyse de la situation : le jeu*

4.3.1. *La situation-problème*

a) Analyse de la tâche des élèves : Emetteurs

La tâche d'émetteur est bien plus légère que celle de récepteur : on ne doit compter que les feuilles du tas choisi et prendre soin de bien les mesurer. Le désir d'avoir des nombres simples et corrects conduit à choisir un nombre de feuilles tel

— que l'épaisseur soit aussi voisine que possible d'un nombre entier de millimètres
— que les erreurs dues au tassement des feuilles restent faibles
— que le nombre de feuilles à compter reste assez faible.

Une analyse plus approfondie ou une pratique répétée conduirait l'émetteur à choisir :

— un nombre de feuilles assez grand pour que la différence entre leur épaisseur et l'épaisseur d'un même nombre de feuilles du type le plus voisin soit assez nette par exemple, excède 1 mm (tassement éliminé)
— un nombre de feuilles tel que le coût de l'opération soit minimum (Le coût de l'opération est évalué en coût du du comptage des feuilles et en prix des erreurs par tentative. Le coût des erreurs dépend de l'erreur relative par l'intermédiaire de la probabilité d'erreur qu'elle engendre).

Ce point a mérité une étude mathématique qui n'est pas publiée ici.

b) Analyse de la tâche des élèves : Récepteurs

La tâche des récepteurs est plus lourde. S'ils « appliquaient » un algorithme rationel, ils devraient pour interprêter le message (60 f ; 7 mm)
— compter 60 feuilles de chaque type de papier
— mesurer l'épaisseur de ces 5 tas de 60 feuilles
— comparer: les tas dont la mesure serait la plus proche de 7 mm seraient retenus.

En fait, cette procédure, si elle était systématiquement appliquée, ferait perdre le bénéfice essentiel de la situation : les enfants peuvent (doivent) éliminer certaines hypothèses en utilisant l'expérience qu'ils ont acquise dans la première phase et en mettant en œuvre une représentation (un modèle implicite) de l'épaisseur. Dans cette phase d'action, des relations, des appréciations, des opérations, encore floues, incomplètes, approximatives, vont s'éprouver, se clarifier, se complexifier avant même d'être formulables.
Exemple : « 60 f ; 7 mm, c'est du (papier) fin, c'est pas du A, on avait trouvé pour A (3 f ; 1 mm » — Sous-entendu 60 f de A feraient bien plus de 7 mm...

Si les enfants se trompent dans leurs hypothèses, ils peuvent s'en apercevoir sans trop de retard et sans autre sanction qu'une petite perte de temps. La représentation permet d'anticiper, d'économiser des tentatives, elle est contrôlée par l'action, sans la conditionner complètement, ni être conditionnée par elle. Elle commande toutefois ces décisions d'action car une fois écartés les « papiers » improbables, il faut retenir les autres. « C donne pour 30 f. 2 mm et D aussi, on ne peut pas savoir. Tiens remesure... Si 30 f de C font un peu moins que 2 ça doit être D... Il faudrait plus de feuilles... »

Pour les récepteurs, deux messages ont tendance à être équivalents s'ils permettent la même discrimination parmi les papiers, donc s'ils sont voisins topologiquement.

Il est nécessaire que chaque enfant soit tour à tour émetteur et récepteur.

Même si tous les enfants n'acquièrent pas une égale aisance dans le raisonnement sur les épaisseurs, tous acquièrent une bonne connaissance des conditions que devra satisfaire le modèle qu'on choisira : ce qu'il devra permettre.

4.3.2. La situation didactique

a) Analyse de la tâche du maître : phase 1

Dans les deux premières phases, la tâche du maître la plus importante ne consiste pas à contrôler le contenu et le déroulement des réflexions des enfants : il ne doit pas intervenir, qu'il entende une proposition intéressante ou une déclaration fausse. C'est la situation qui doit exercer ces feed-back nécessaires. Il n'est plus — provisoirement — le gardien de la vérité, le garant, le recours, le destinataire obligé et final de toutes les interventions des enfants.

b) Il doit — par son attitude — convaincre les enfants de sa neutralité à l'égard de leurs appréciations de la situation afin qu'ils renoncent à tirer de lui les informations et les aides qu'ils ne doivent tirer que d'eux-mêmes.

Neutralité mais pas indifférence : il reçoit avec un égal intérêt toutes les suggestions et les renvoie avec conviction sans en modifier le contenu mais il essaie de les rendre réalisables. Le maître renvoie les enfants à la situation mais s'attache à accroître leur investissement, leur désir de réussir. Il facilite la solution des problèmes subalternes, surveille le respect des règles et des consignes qu'il précise et répète à l'occasion, résout les problèmes d'organisation, aide l'évolution favorable des conflits dans les groupes. Il veille à ce que tous s'investissent et concourent au résultat cherché. Pour cela, il s'intéresse beaucoup au résultat final qu'il enregistre, participant aux succès, comme aux déceptions, heureux avec les uns, encourageant les autres, dans une sorte d'esprit « bon sportif ».

Ici comme là, ce sont les efforts qui sont éducatifs et non les buts marqués.

En particulier, le décompte des points des équipes ne donne lieu à aucune déclaration de sa part, les équipes se défont d'une leçon à l'autre. Les points servent à déterminer les stratégies pendant le jeu, pas à classer les gens après le jeu.

c) La phase 3 de la 1ère activité est une phase de confrontation (ce n'est pas une situation de validation formelle). Là encore, le maître est un conducteur de jeu qui fait jouer mais ne joue pas lui-même. Pour tous les enfants, les problèmes qu'il réussit à faire résoudre par ses exigences : formulations claires, renseignements précis... sont ceux qui empêcheraient le fonctionnement de la situation. Il n'a pas d'exigences « externes ». Il laisse arriver à leur formulation correcte les déclarations fausses ou absurdes, il laisse aux autres le temps de formuler leur jugement. Il ne confirme pas une déclaration correcte avant que tous se soient déclarés d'accord.

Il encourage les minoritaires à exprimer leurs réserves, clarifie les débats même s'il ne peut pas les résoudre.

4.3.3. Le maintien des conditions d'ouverture et leur rapport avec la signification du savoir

Dans les situations de recherche, *la pédagogie* classique conduit le maître à « exploiter » immédiatement ou presque la « bonne » déclaration. Il parle avec le premier ou un des premiers « qui trouvent ». Finalement les échanges concernent 20 % des enfants (les plus « vifs »). Pour que ces échanges soient compris des autres, les questions posées doivent être telles que 80 % d'entre eux seraient capables d'y répondre presque directement, s'ils avaient le temps nécessaire : les questions seront donc assez fermées et la recherche consistera en une sorte d'épreuve de vitesse mettant à l'honneur les algorighmes. Ainsi, 60 % des enfants participent par procuration. Quant aux 20 % qui ne sauraient pas répondre, il ne s'agit jamais pour eux de chercher, mais d'apprendre un savoir tout fait, qu'ils devraient posséder, qu'il est même « honteux » de ne pas posséder, puisqu'il ne s'agit finalement ici que de savoir « qui l'a » ou « qui ne l'a pas ». Donc, pour 80 % des enfants, la recherche est une situation sanctionnée négativement où l'accent est mis sur le savoir : devoir chercher est l'aveu d'une faiblesse qui ne pardonne pas. Devoir apprendre est le fait d'une minorité défavorisée et méprisée.

Les situations que nous proposons ne doivent pas être conduites de la même façon.

Les questions sont souvent plus ouvertes, en ce sens que le nombre des enfants capables d'y répondre directement est très faible : presque tous ont à chercher. Les échanges vont concerner 80 % des élèves sur des problèmes que moins de 20 % d'entre eux peuvent résoudre directement. Le maître maintient la situation ouverte en n'exploitant pas les idées. Il se contente de les faire prendre en considération. Le fait d'être le premier à avoir une idée perd un peu de l'importance.

Les enfants qui ont trouvé plus vite doivent apprendre à faire partager leur conviction sans la sécurité de la validation par l'adulte. Ainsi, la recherche et l'apprentissage devient l'affaire principale de la majorité.

Ces situations sont délicates à conduire : la voie y est ouverte à un champ d'attitudes sociales très diverses. Le maître a appris à contrarier les actions de diversions; certains enfants égarent l'opinion des autres pour avoir le temps de chercher eux-mêmes, accaparent l'attention, ne respectent pas la recherche des autres, etc... C'est toute la fonction et l'usage du savoir et de la vérité qui s'apprennent à ce moment-là. Certains enfants, habitués à un statut dans la classe et à un contrat didactique classique, vivent mal les changements subits de mode d'action didactique du maître comme l'absence de sécurité, de valorisation immédiate, la dépendance par rapport à l'action ou à l'opinion d'autrui, etc. Pour les enfants et même pour les parents, le maître a dû parfois faire provisoirement le médiateur des changements, souvent profonds, qu'il avait provoqués. De toute façon, les changements fréquents de types d'interventions utilisés favorisent les évolutions en douceur et l'adaptation des attitudes malgré leur diversité.

L'évolution s'opère correctement dans la mesure où on parvient à faire en sorte que les relations avec l'objet de l'étude, et les relations avec les autre sujets apprenant deviennent sources de plaisir et enjeu du désir. Les prises de décisions, les actions, les échanges, les jugements... doivent devenir d'abord des occasions d'une jubilation fondamentale de la classe. Le maître est conduit à renoncer à l'objet unique du désir des enfants.

Le savoir, l'alibi symbolique d'une lutte entre les enfants, doit pouvoir devenir l'objet d'une activité libidinale.

La relation maître-élève s'efface ainsi devant les relations enfant-savoir, enfant-milieu-savoir et enfant-autrui-savoir.

4.3.4. Le contrat didactique

Le maître est la mémoire de référence de la classe. Il se souvient des conventions, des accords et des faits pertinents. Il les rappelle à bon escient. C'est par ce rôle qu'il commande et contrôle les apprentissages.

Enfin, le maître représente le savoir des adultes. Lorsqu'il fournit des informations sur ce sujet (par exemple : Activité 1 — Séance 3 — Phase 3). Les enfants, qui ont leur propre système, peuvent comprendre la notation en cours et ses avantages — ou son équivalence — avec le système qu'ils ont construit, et l'adopter, non pas librement mais consciemment (situations d'institutionnalisation).

Bien sûr, les éventuels changements de notations ou de vocabulaire coûtent aux enfants et aux maîtres.

C'est pourquoi les conditions d'apprentissages ont un caractère critique et dépendent essentiellement du contrat didactique.

A aucun moment au cours de cette première activité, le maître n'indique qu'il faut apprendre quelque chose. A aucun moment, il ne fait répéter une activité en ayant convenu avec les enfants qu'elle devrait être sue, connue, apprise. (Cela viendra plus tard peut-être) et en reconnaissant qu'une phase n'était pas justifiée par d'autres raisons.

En fait, la phase 1 de la 1ère séance : « recherche de couples équivalents », doit permettre à tous les enfants d'effectuer la recherche d'au moins deux couples équivalents à un couple donné, de comparer deux couples une dizaine de fois au moins, d'expliquer une équivalence au moins une fois, d'entendre plusieurs méthodes de comparaisons. Tout cela dans une situation de contrôle collectif. Mais le contrat passé avec eux n'est pas « vous devez apprendre et *savoir faire* ceci pour pouvoir répondre à la question suivante comme je le veux », mais « vous devez *faire* ceci pour pouvoir participer au défi suivant ». L'apprentissage de la recherche de couples d'équivalence se poursuit dans la phase 2 et plus loin, il n'est pas nécessaire de l'« achever » dès la phase 1. De plus, cela exigerait le plus souvent la *formulation* d'une méthode de recherche comme par exemple : on peut multiplier ou diviser les deux termes du couple par un même nombre, « ou pire » deux couples sont équivalents si « immanquablement » à ce moment-là on devra dire, ou une sottise, ou une phrase incompréhensible. D'ailleurs, ces formulations de méthodes ne sont que rarement économiques à long terme. Nous le refusons catégoriquement ici.

La solution de la situation de la phase 2 : rangement des épaisseurs, n'est pas plus compliquée si l'on ne *sait* pas chercher des équivalents, puisque l'enfant réfléchit dans la représentation de la situation :
— en nombre de feuilles et épaisseurs des tas — au lieu d'appliquer un algorithme sur l'écriture de l'épaisseur d'une feuille.

Tout apprentissage *formel* (convenu, institutionnel) à ce moment, serait lourdement hypothéqué de contresens. Par contre il faut que le maître vérifie que *tous* les élèves ont bien *réfléchi, choisi et calculé* un couple nouveau... au besoin au tableau, avec l'aide des autres.
— Ceci ne veut pas dire qu'il n'y a pas d'apprentissages ni d'apports d'information. La phase 3 de la 3ème séance montre un exemple d'apport d'information. Il s'agit de conventions à enregistrer et à utiliser. Ces conventions seront désormais de règle et le maître « exigera » leur emploi dans les communications « publiques » des enfants. En fait, il exercera une pression croissante au fur et à mesure de la banalisation de la convention, sans refuser de comprendre, surtout au début, d'autres formulations.

4.4. *Analyse des variables didactiques. Choix du jeu*

4.4.1. *Le type de situation*

Nous ne reviendrons pas sur le caractère fondamentalement *cybernétique* de la situation de communication :

Le codage le plus économique, si on admet que l'on peut augmenter à volonté le nombre des types de papiers, consiste à les désigner à l'aide d'un couple, nombre de feuilles, épaisseur en millimètre — Remarquons toutefois que la situation de recherche de code n'est pas répétée. Il n'y a pas de dialectique de la formulation des couples. Le code est mis en place de façon presque immédiate. La situation de communication ne fonctionne donc pas beaucoup en situation d'apprentissage, elle sert seulement à donner « du sens » à la phase d'action des émetteurs et des récepteurs. Le caractère « optimal » du message n'a fait l'occasion d'aucun commentaire avec les enfants. Il nous assure seulement une bonne acceptation de leur part.

4.4.2. Le choix des épaisseurs : modèle implicite

Par contre la composante « action » de la situation est l'occasion de la création d'un modèle implicite du système des épaisseurs.

Pourquoi, puisqu'il s'agit finalement de mesurer des longueurs, n'avoir pas choisi des objets de longueurs appréciables ? L'enfant possède à cet âge une représentation efficace des « longueurs » comprises entre 1 mm et 50 mm. C'est-à-dire qu'il peut les comparer, les mettre bout à bout, les partager, et au besoin les évaluer (c'est-à-dire leur faire correspondre approximativement un entier à l'aide des systèmes d'unités en usage).

Mais justement, cette représentation est assez efficace pour permettre de résoudre la plupart des situations pratiques *sans* qu'il soit nécessaire d'utiliser de système numérique nouveau : perception, mesurage entier, etc.

L'enfant peut imaginer ou effectuer des opérations sur des « longueurs » : somme, différence, sans utiliser de modèle, de représentation.

Par exemple, il peut indiquer la longueur désirée d'une baguette en envoyant une ficelle de « longueur » égale.

L'activité mathématique peut alors au mieux traduire, transcrire « la réalité » supposée préexister.

Comme en géométrie, le modèle implicite dont disposent les enfants est si riche qu'il commande toutes les décisions. Lorsqu'il ne parvient pas à résoudre une situation, la théorie mathématique qui pourrait lui suppléer est alors trop complexe pour être construite à ce moment. Si on utilise ce modèle implicite, la théorie mathématique construite, ici, le mesurage, n'apparaît jamais que comme une complication, une exigence supplémentaire ou superflue. Elle doit être guidée, contrôlée par « l'intuition », elle fournit au mieux des renseignements plus précis... etc.

Nous avons donc choisi pour la variable didactique « grandeur des objets », un domaine mettant en défaut le modèle implicite naturel sans toutefois exclure des manipulations.

Avec des longueurs de quelques centièmes de millimètres, on peut « concevoir » les opérations visées mais sûrement pas les percevoir ni les effectuer directement. Certaines sont mêmes carément inconcevables comme partager une de ces longueurs (un cheveu en quatre ! dans le sens de la longueur). Nous verrons que cette impossibilité est voulue pour d'autres raisons. Le nombre qui mesure l'épaisseur devient alors le moyen — le seul « concret » d'appréhender cette épaisseur, de construire les expériences de comparaisons, de prévoir la somme, etc... La représentation mathématique a été réintégrée dans son rôle fondamental de théorie en construction, dans son rapport dialectique avec le constructeur et avec la situation.

De plus, l'enrichissement de cette représentation va pouvoir être contrôlé si, dans un premier temps, on favorise le développement du modèle implicite en rendant inutile l'explication des méthodes (de comparaison par exemple). On pourra provoquer une phase de formulation (Activité 1 — Séance 2) puis de formalisation progressive dans le module 4., au moment opportun pour chaque notion : avant que le modèle implicite ne soit trop efficace, assez tôt pour être utile, mais assez tard pour avoir du sens ; assez tôt pour que le sens attribué au langage soit indispensable à l'action et à sa formulation, assez tard pour que les concepts formulés ne soient pas isolés les uns des autres, mais fonctionnent ensemble.

4.4.3. Du modèle implicite à l'explication

Le modèle implicite développé par les enfants dans la 1ère séance comprend une approche de la relation d'équivalence algébrique fondamentale (nombre de feuilles du tas 1 x épaisseur dù tas 2 = nombre de feuilles du tas 2 x épaisseur du tas 1, mais sûrement pas sous cette forme), sous la forme d'un ensemble d'application linéaires de N dans N.

Cette application est approchée par ses propriétés :
— la première remarque des enfants signifie qu'ils veulent des applications différentes pour des feuilles perçues comme différentes (injection de l'ensemble des applications dans l'ensemble des types de papiers).
Remarquons qu'il n'est pas réaliste de la part des enfants de vouloir que des applications différentes indiquent des types de papiers différents : ils ont des exemples sous les yeux où pour un même type de papier, et pour un même nombre de feuilles, on obtient des épaisseurs différentes, et où cependant le message a marché. Il suffit d'avoir des résultats suffisamment voisins les uns des autres et suffisamment éloignés des autres résultats.
— Cependant cette exigence est formulée : il semble que l'on voudrait un nombre par type et un type par nombre. En fait, ce sont seulement les résultats scandaleux qui sont rejetés ;

« 30 f ; 2 mm ; 30 f → 3 mm quelqu'un se trompe ! » (ces résultats ne sont pas algébriquement équivalents, ni topologiquement assez voisins).
— C'est seulement ensuite que la linéarité est formulée, par sa propriété caractéristique de conserver les rapports. Les enfants relèvent les couples qui contrarient cette propriété et l'énoncent ensuite.
Remarque : S'il n'y avait pas eu des tentatives un peu variées, avec la liberté de prendre le nombre de feuilles qu'on veut, des rapports simples ne seraient pas apparus. Si le jeu n'avait pas été rapide, un peu anarchique, bon enfant, les contradictions non plus ne seraient pas apparues.

Il faut remarquer que le modèle explicite n'apparaît pas comme une formulation positive des propriétés connues à l'occasion de leur existence. Les couples qui obéissent à la loi implicite ne donnent lieu à aucune remarque : ce sont les couples qui ne lui obéissent pas, qui, par l'accident qu'ils révèlent, rendent la formulation nécessaire : comme une théorie, le modèle se révèle par ses contradictions — apparentes ou réelles — avec l'expérience et non par ses accords.

Il faut voir dans ce fait un phénomène tout à fait général et important qui contredit formellement certaines théories didactiques empiristes, .comme par exemple le processus psychodynamique de Dienès : ce ne sont pas les ressemblances (les isomorphismes) entre les situations rencontrées qui sont le moteur principal des « abstractions » non plus que la transcription ou la schématisation des structures ne sont la clé de la formulation. La simple familiarité, même active, avec des situations bien structurées, ne suffit jamais à provoquer une mathématisation. Au contraire, les problèmes posés par une situation à la mise en œuvre d'un modèle (implicite ou explicite) préexistant, ou par une théorie à la prise d'une décision, provoquent l'évolution, la reprise ou le rejet et la formulation des théories.

Cette dialectique caractérise la plupart des mathématisations.

Ici, la situation initiale (1ère séance, phases 1 et 2) peut être envisagée sans modèle initial particulier (dénombrements et mesures entières — homothéties de $\mathbb{N}$). Sa résolution conduit à un langage et à des méthodes peu satisfaisants du point de vue logique. La résolution de ce problème théorique (phase 3) exige de nouvelles « expériences » et confrontations (2ème séance) qui amènent la réduction des contradictions et l'usage d'un modèle en partie explicite. Surtout en ce qui concerne la technique de mesurage des feuilles de papiers et un peu aussi la relation d'équivalence fondamentale entre les écritures.

Avec la 3ème séance, commence une autre étape : la mise à l'épreuve du système de mesure. Permet-il de reconnaître l'écriture de l'épaisseur d'une des feuilles connues, de la distinguer de l'écriture d'une nouvelle épaisseur ? Ici, le codage devient à nouveau l'objet de l'étude des enfants avec la formulation de l'équivalence, la création des classes d'équivalences et l'étude de la compatibilité de la relation d'ordre sur les couples avec la relation d'équivalence : les conclusions doivent être les mêmes, quels que soient les couples qui servent d'équivalence.

La désignation des classes par une « fraction » (le mot n'est pas obligatoirement prononcé), l'écriture de l'égalité des classes, sont des informations apportées par la maîtresse comme des conventions sociales (à respecter pour être compris des autres) et comme une conclusion didactique, une confirmation implicite de la validité de la démarche de la classe.

Les enfants pensent que les types de feuilles peuvent se ranger par ordre croissant d'épaisseur. La théorie qu'ils ont construite permet ce rangement alors que leurs sens ne le peuvent pas, et tout de même ils peuvent avoir des confirmations assez concrètes de leurs inférences — leur théorie fonctionne comme une vraie théorie.

Elle pose de nouveaux problèmes car la méthode de comparaison n'apparaît pas valable pour n'importe quel couple et elle a recours à la fois :
— aux relations algébriques qui permettent de ramener la comparaison de (40 ; 6) avec (20 ; 4) à celle de (40 ; 6) avec (40 ; 8) ou encore de ramener (30 ; 4) et (20 ; 2) à (30 ; 4) et (40 ; 4)
— et aux relations topologiques qui permettent de comparer par exemple (19 ; 3) et (10 ; 2) car (19 ; 3) est moins épais que (20 ; 4) — Commentaire des enfants : « avec une feuille de plus, le tas fait 1 mm de plus, et comme une feuille ne mesure pas 1 mm... ».

Il se trouve que la construction générale de cette séquence suit le modèle d'une construction axiomatique des rationnels — assez moderne (couples, passage au quotient). Il n'est pas niable que la connaissance d'une telle axiomatique a permis de l'envisager comme solution aux problèmes de didactiques des décimaux que nous nous posions. Il serait faux de croire que ce choix a précédé l'analyse didactique. Si nous avions été conduits à choisir un autre domaine des variables didactiques et une autre genèse, les couples auraient pu perdre toute signification, l'équivalence tout intérêt, la construction aurait pu alors coïncider *localement* avec une autre axiomatique classique ou non.

De toute manière, laisser apparaître la trace de cette architecture dans l'activité des enfants sous une forme quelconque, serait sans intérêt pour eux.

5. Questions de didactique des décimaux

5.1. Les objets du discours de didactique

Le discours de didactique porte sur quatre niveaux d'objets :

1. Le niveau des faits contingents : c'est la description des productions effectives du maître ou du système éducatif : objectifs déclarés, informations fournies, consignes, etc. Les productions effectives des élèves, les comportements, les résultats, les réactions du milieu etc.

2. Le niveau de la situation didactique. Il s'agit d'interpréter les décisions du maître, les comportements de l'élève, leurs motivations, etc. en discernant contre quels autres comportements ceux qui sont attestés ont été choisis, et de les relier en stratégies, en modèles de comportement, d'erreurs, si possible explicatifs des « jeux » et des contrats respectifs et réciproques des partenaires. Cette analyse met en évidence les variables qui assurent la reproductibilité de la situation, à travers certaines différences entre les faits observés.

3. Le niveau de l'analyse du concept et de ses genèses. Il s'agit alors de déterminer l'ensemble des situations qui sont susceptibles de faire fonctionner une notion, en lui conférant les différents sens qui déterminent le concept correspondant. Seules, les différences de situations qui affectent le concept, sont dans le champ de la didactique, elles sont le fait de variables à déterminer dans chaque cas.

4. Le niveau des faits et des débats de didactique où sont produits les concepts, les méthodes et les moyens d'analyse nécessaires aux niveaux précédents.

Chaque niveau a ses méthodes propres, d'études et de preuve — et ses problèmes de méthodologie — qui font considérer une expérience de didactique comme une expérience d'épistémologie expérimentale et la font distinguer d'une expérience d'enseignement.

Les interactions de ces quatre niveaux sont évidentes mais la façon dont s'articulent les problèmes d'enseignement et les questions de didactique n'apparaît pas encore bien claire à beaucoup, ainsi que la façon dont s'opposent et se complètent le point de vue scientifique et la phénoménotechnique didactique. C'est pourquoi il nous faut revenir sur le processus que nous venons de décrire de façon très détaillée, pour montrer comment il peut être le lieu où peuvent s'éprouver et s'actualiser les questions qui nous intéressent.

5.2. Quelques concepts de didactique

5.2.1. Les composantes du sens

La définition du sens d'une notion est, nous l'avons dit, un des problèmes centraux de la didactique. Ce qui précède nous permet maintenant d'entrevoir comment nous proposons de le résoudre : il s'agira de *recenser* et de *classer* toutes les situations où cette notion apparaît engagée, soit comme solution, nécessaire ou non, optimale ou non, soit dans l'énoncé, soit dans les comportements des protagonistes du jeu didactique. Ainsi, la notion apparaît dans son fonctionnement et dans ses rapports avec les différents secteurs des mathématiques. On peut identifier diverses conceptions particulières qui permettent de résoudre une classe de situations, alors qu'elles suggèrent des réponses fausses sur une autre, et dont la réunion constitue le concept.

Recensons les critères que nous avons utilisés pour choisir le processus étudié. Ils constituent une première approche des composantes du sens des décimaux et permettent d'engendrer une bonne partie des situations cherchées.

1. Le type mathématique de problèmes : algébriques, topologiques ou d'ordre.

2. Le type d'objets mathématiques qui réalisent la notion et à propos desquels le problème se pose explicitement : le décimal image d'une *mesure*, le décimal *scalaire* ou rapport opérant dans un ensemble de mesures, le décimal-proportion, le décimal-opérateur linéaire dans un espace vectoriel, etc... (cf. Tableau I).

3. Le type de structure mathématique concurrente de $\mathbb{D}$ dans la situation proposée, celle contre laquelle se définit ou se justifie $\mathbb{D}$ (ce peut être $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$, ou $\mathbb{R}$) comme seule ou comme meilleure solution.

4. Le type de situation didactique d'après les manifestations de connaissance, situations d'action, de formulation, de validation, d'institutionnalisation : le décimal y apparaît respectivement comme règle d'action, comme

langage, comme système de preuves ou comme savoir culturel. Cette classification produit aussi les fonctions de $\mathbb{Q}$: calculs, algorithmes, désignation, représentation, objet d'étude, moyen de preuve, théorie...

5. Le domaine de réalisation de la situation (banque, commerce, physique...etc.) et le statut scientifique : nécessité mathématique, loi physique, convention sociale.

6. Le type de présentation formelle du langage exprimant les décimaux et les caractères informationnels qui l'opposent à des solutions voisines : décimaux v.s. séxagésimaux ou v.s. binaire (caractères de numération).

7. La fréquence avec laquelle la situation est susceptible de se présenter.

8. Le type d'engendrement de $\mathbb{D}$ ou de la partie utilisée : — type d'opérations utilisées et caractères de la distribution des fréquences d'emploi sur les décimaux employés.

9. Le statut didactique ou cognitif de la notion dans les comportements du sujet pratiqués par la situation. Voir ce que nous avons appelé dans le paragraphe II, les niveaux de connaissance.

10. Le type de représentation ou de définition, commensuration ou fractionnement par exemple. (voir ci-dessus 5.3.1.)

11. Le type d'organisation axiomatique des savoirs implicites et explicites du sujet.

12. Le type d'opération ou de relation mathématique solution de la situation : rangements, encadrements (entre deux entiers, entre deux fractions, entre deux décimaux à un ordre de grandeur près), repérage (placer, trouver un nombre dans un intervalle), transformations (fractions ⇔ décimaux ⇔ sexagésimaux, changements d'unités, écriture scientifique, décomposition polynomiale, chiffres ⇔ lettres), sommes (de mesure, addition, translations, composition de translations), différences (idem, décimal opposé), produits (mesure x opérateur naturel ou décimal, mesure x mesure, opérateur x opérateur, mesure dérivée etc... tableau II), division (partage, division, multiplication par un inverse, composition, mesure par un rapport, etc...).

Toutes les distinctions ne sont pas d'égale importance et la liste n'est pas exhaustive. Il resterait à réorganiser cet ensemble de situations pour favoriser des analyses moins lourdes.

5.2.2. *Les propriétés didactiques d'une situation-problème*

a) le terme « situation » désigne l'ensemble des circonstances dans lesquelles se trouve l'élève, les relations qui l'unissent à son milieu, l'ensemble des données qui caractérisent une action ou une évolution. Une situation est une situation-problème qui nécessite une adaptation, une réponse de l'élève. En particulier, si la nécessité de cette réponse a fait l'objet d'une consigne précise, si l'élève a un projet, un objectif déclaré, nous aurons une « situation-problème stricte » (ou formelle), et même un « problème » si le milieu est réduit à un énoncé et si aucune contrainte matérielle, due à certains aspects physiques de la situation, ni à aucune condition psychologique ou sociale, n'en modifie l'interprétation. Une *situation didactique* est une situation où se manifeste directement ou indirectement une volonté d'enseigner, un enseignant. En général, on peut distinguer, dans une situation didactique, au moins une situation-problème et un contrat didactique.

b) Quelles conditions font d'une situation-problème une situation d'apprentissage ou une situation d'enseignement ? R. Douady (1980) en propose une liste qui correspond bien en première approche, à celle que j'ai voulu satisfaire dans le processus proposé ci-dessus et que je ne peux pas exposer ici. L'analyse et la théorisation des situations conduit à raffiner et à allonger cette liste, à construire les indices qui permettent d'objectiver et d'étudier les critères trop intuitifs, comme le font Bessot et Richard (1979). C'est un problème central de didactique aussi bien pour l'analyse que pour la réalisation de tels processus, et qui n'a pas encore reçu la place qui lui revient (malgré quelques publications anciennes mais presque confidentielles dont (Brousseau, 1970).

5.2.3. *Situations-Connaissances-Comportements*

Chaque situation-problème appelle de la part de l'élève des comportements qui sont l'indice d'une connaissance. Cette correspondance fondamentale, établie, cas par cas, est justifiée par l'interprétation des situations-problèmes en termes de jeu, et des comportements, en termes d'in-

dices de stratégies dont il faut montrer le caractère adapté dans le modèle ou la représentation attribuée à l'élève. Le tableau VIII a pour objet de montrer que les différents types de situation, produits par l'étude des conditions didactiques d'apprentissage, donnent bien des comportements distincts selon les formes de connaissance. Nous avons depuis (Brousseau 1970) utilisé un modèle à quatre classes dont les noms ont varié selon les nuances qui distinguaient les cas étudiés :
(1) Procédure (ou modèle implicite d'action, ou schéma d'action) (2) Savoir implicite équivalent à un énoncé ; propriété ou relation (3) Savoir explicite (4) langage (code, système formel...). Parfois les classes 2 et 3 étaient fondues. Ce système pourrait être rapproché, dans une certaine mesure, de celui de Skemp (1976) et Skemp/Herscovics/Byers (1980).

(1) témoigne d'une compréhension instrumentale, (2) d'une compréhension intuitive (3) d'une compréhension relationnelle et (4), peut-être d'une compréhension formelle. Il est dommage qu' Herscovics, qui avait eu en 1976 une longue conversation à ce sujet avec Skemp et moi à Karlsruhe n'ait pas examiné cette correspondance.

Nous ne reprenons pas ici les caractères bien connus des situations d'action, de formulation et de validation (Brousseau 1970).

Les situations d'institutionnalisation sont celles par lesquelles on fixe conventionnellement et explicitement le statut cognitif d'une connaissance ou d'un savoir. L'institutionnalisation est interne si un groupe fixe librement ses conventions, selon un processus quelconque qui en fait un système quasi isolé. Elle est externe si elle emprunte ses conventions à une culture : c'est la situation la plus fréquente dans la didactique classique.

5.3. *Retour sur certains caractères du processus*

5.3.1. *Insuffisances du processus*

Nous avons insisté à plusieurs reprises sur le fait que nous ne considérions pas le curriculum comme une méthode à proposer aux enseignants. Il convient d'expliquer pourquoi.

a) La principale raison réside dans la difficulté à com-

Tableau VIII – Comportements observés selon le type de situations et le type de connaissances

Types de situations / Types de connaissances	situations d'action	situation de formulation sous contrôle d'une situation d'action	situation de preuve (ou de validation)	situation d'institutionnalisation
procédure	savoir-faire. Mettre en œuvre la procédure, la choisir de préférence à une autre.	description détallée désignation.	justification de la procédure pertinente (elle peut s'appliquer) adéquate, correcte, optimale.	canonisation d'une procédure en algorithme (terme dû a A. Rouchier).
modèle implicite propriété relation représentation.	faire des choix, prendre des décisions motivées par la connaissance en question (sans pouvoir «formuler» ce savoir)		preuves contingentes expérimentales par exhaustivité.	
savoir énoncé théorie	appliquer un savoir (le savoir pourrait être formulé).	énoncé de la propriété ou de la relation. reformulation plus «correcte».	preuve démonstration traduction plus convaincante organisation axiomatisation.	canonisation d'une théorie, d'un savoir transposition didactique (Chevallard 1980).
langage.	emploi d'un langage pour exprimer. Le comportement manifeste un découpage en objets correspondants aux signes et aux mots.	emploi d'un langage d'un système formel d'une formulation pour communiquer savoir dire.	justification d'un mot d'un langage, d'un modèle formel (pertinence, adéquation, optimisation) définitions. Activités méta-linguistique.	choix de définitions conventions linguistiques et grammaticales.

muniquer toutes les informations nécessaires. En particulier celles relatives aux règles auxquelles le maître doit s'astreindre à obéir. Elles sont fort différentes de celles auxquelles les enseignants ont été habitués et reposent sur une conception didactique très «nouvelle», sur des modes d'évaluation, et même sur une sensibilité nouvelle dans les rapports maître-élève. Il serait probablement dommageable aux enfants de leur enseigner de la manière classique chaque pas de cette longue genèse et d'institutionnaliser des comportements provisoires.

b) D'ailleurs, les nécéssités de l'expérience d'épistémologie ont conduit à des choix qu'il serait au moins prématuré de proposer aux enseignants : par exemple, nous ne savons pas provoquer et contrôler le franchissement des obstacles épistémologiques, ou simplement des reprises, ce qui est indispensable pour remplacer le modèle du gonflement régulier des connaissances compatibles. Ou encore, nous avons choisi une représentation du décimal-mesure très éloignée de ce que suggère l'histoire.

c) Enfin, le processus présente des imperfections notoires du même genre que celles que nous reprochions aux méthodes classiques — par exemple, l'évaporation de l'unité dans la première phase (voir Brousseau 1980 p.33) — et qui sont l'objet d'études. La définition par commensuration ne rend guère à l'élève la notion de fraction plus disponible que l'ancienne définition.

Par exemple dans la phase II. 1., les élèves éprouvent des difficultés à écrire l'image de 1 dans l'application linéaire qui à 4 fait correspondre 7, bien qu'ils sachent que cette image reportée 4 fois forme un segment de 7 cm : l'image est 7/4.

L'effort de définition des fractions-mesure est probablement assez stérile du point de vue culturel etc. Nous allons examiner maintenant quelques unes de ces questions.

5.3.2. Retour sur le décimal-mesure

Une étude épistémologique du mesurage et de ses fonctions a montré qu'il joue un rôle important dans l'émergence des décimaux (par l'intermédiaire des sexagésimaux). Ce rôle est lié à diverses situations où il s'agit de représenter, de communiquer ou de prévoir le résultat de certaines manipulations de la vie courante ; contrôle de la conservation, comparaisons, reproduction de quantités égales, partages. Dans ces situations, les valeurs des variables physiques et leurs rapports avec les caractéristiques humaines sont essentiels. Ainsi, on distingue dans la plupart des civilisations trois fonctions « unités » :

— l'unité à « compter » (C). Les quantités plus grandes qu'elle doivent de toute façon être fractionnées, pour leur transport ou leur évaluation en parts égales que l'on peut compter. L'unité (C) est la plus grande de celles que l'homme peut manier commodément.

— l'unité à « fractionner » (f). Les quantités qui lui sont inférieures peuvent être manipulées « en un coup ». Leur fractionnement en un grand nombre de parts égales que l'on dénombre est moins économique qu'un partage direct.

— l'unité de « précision » (S), la plus petite que l'on prenne en considération.

En général, $S \ll f \ll C$ et $10 \leqslant \frac{C}{f} \leqslant 60$

On peut observer à ce sujet le rôle assez effacé en pratique du « déca » et des « déci » par rapport aux « hecto » ou au « kilo ».

La pratique de quantités dans l'intervalle [f, c] sert de modèle à l'identification du dénombrement et de certaines fractions.

Le système d'écriture a aussi pour objet de ramener les « mesures » des quantités les plus familières dans l'intervalle naturel le mieux connu.

Les négociations historiques entre ces exigences ont produit divers systèmes dont certains, trop bien adaptés, n'ont pu évoluer. On ne peut guère espérer aller au-delà de l'usage que les Babyloniens puis les les astronomes faisaient des sexagésimaux.

Mais cette étude permet de comprendre tout le parti qu'on pourrait tirer de cette problématique dans une perspective dialectique où la pratique du mesurage, l'usage du système décimal de mesure et l'introduction des décimaux seraient dissociés et non pas étroitement confondus, comme c'est le cas actuellement en France. Il serait pour cela très utile de reprendre les études et les observations de F.Colmez

(1974) et de les examiner dans cette perspective « économique » que permet le théorie des situations.

5.3.3. Remarques sur le nombre d'éléments qui permet d'appréhender un ensemble

Il est possible d'engendrer toutes les opérations de la logique binaire à l'aide de systèmes comprenant de une opération (l'incompatibilité de Sheffer) jusqu'à seize. Les systèmes que l'on utilise communément en comprennent quatre ou cinq. Il est fréquemment avantageux, pour appréhender un ensemble, de l'engendrer à partir d'un nombre restreint d'éléments qui deviendront particulièrement familiers. Ce nombre doit être assez petit pour que tous les éléments générateurs puissent être considérés ensemble (moins de 10), et assez grand pour que l'engendrement des éléments plus rares, mais courants, ne soit pas trop long, et pour que le système puisse supporter un nombre suffisant de relations distinctes.

C'est ainsi que d'après Youschkevitch (1976) Abu-ı-Wafa, vers 961-976, « engendre » les fractions à l'aide d'un système de fractions « prononçables » en arabe comprenant lui-même les fractions principales : numérateur 1 dénominateur de 2 à 10, les fractions composées de la forme $\frac{m}{n}$, $m < n \leqslant 10$, les fractions unifiées : produits de la forme $\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{m} \ldots \frac{1}{p}$, celles dont le dénominateur comprend des facteurs premiers supérieurs à 10 sont imprononçables (Il choisit ce système qui remonte à la plus haute antiquité à Bagdad alors que Al Uglidisi a inventé les décimaux à Damas 10 ans plus tôt).

C'est ainsi, enfin, que les enfants ont procédé au cours préparatoire avec les naturels.

Or ici nous avons choisi d'introduire d'un coup un ensemble beaucoup plus vaste de fractions : tous les dénominateurs jusqu'à 50, tous les numérateurs de 1 à 20 ont des probabilités d'apparitions voisines. Aucune fraction ne joue de rôle privilégié.

Il ne semble pas que cette méthode, qui s'oppose aux habitudes culturelles (qui favorisent toujours $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$ et $\frac{1}{5}$ ait rencontré de difficulté spéciale, au contraire, elle semble avoir favorisé le raisonnement sur une fraction quelconque. Il est vraisemblable qu'on ne pourrait pas introduire de la même façon la notion de rapport.

5.3.4. Fractionnement et commensuration

Le système culturel actuel fournit pour les rationnels, en gros la définition suivante :

a) *Définition 1* : (par fractionnement)

Une fraction est restée comme au XVIIème siècle (d'Alembert) *« une ou plusieurs parties d'un entier partagé en plusieurs parties égales ainsi que la moitié, le tiers, les deux tiers... »* Ce « un » est malencontreux et rend difficile la conception de fractions plus grandes que l'unité : $\frac{a}{b}$ c'est donc le résultat d'une opération matérielle qui consiste à partager *des* entiers et non seulement *un* entier en b parties que l'on peut comparer et déclarer égales, puis à prendre un nombre a de ces parties.

C'est une définition constructive. Elle se réfère à la manière de construire l'objet défini.

Elle est bien adaptée à la *construction d'une grandeur correspondant* à un nombre donné (une unité étant donnée), sauf dans les cas où on ne connaît pas de moyen pratique d'effectuer concrètement les opérations nécessaires.

Par exemple, on ne peut pas fabriquer un poids d'or qui soit les 2/3 du poids d'une bague donnée, si on refuse de la détruire (mais on peut partager un poids égal de pâte à modeler en trois par tâtonnements). Dans ces cas où : soit la division n'est pas concevable, soit la comparaison n'est pas possible, (ou bien le résultat n'est pas défini, ou le dénombrement impossible) la définition fonctionne, non comme une représentation de la réalité ou comme une théorie, mais comme un système symbolique auquel il est vain de chercher une signification concrète. Par exemple, cette définition n'est directement d'aucun secours s'il s'agit d'attribuer un nombre à une grandeur donnée. A moins de laisser paraître le procédé de fabrication.

b) La définition utilisée dans le curriculum est bien différente.

Définition 2 : (par commensuration)

Une quantité (si elle existe) sera les a/b d'un entier si *en la reportant b fois (en en prenant b identiques à elle-même) on obtient a entiers.*

Cette définition suppose d'abord que la grandeur existe, et les opérations qu'elle évoque sont beaucoup plus fréquemment et facilement effectuables (multiplier). Elle ne dit pas comment construire 3/4. Elle n'est pas constructive, mais elle fournit un algorithme de reconnaissance : elle permet de dire si telle grandeur, est ou non, les 3/4 de telle autre. Encore faut-il pouvoir « reporter plusieurs fois » ou disposer de plusieurs exemplaires des grandeurs évoquées.

c) Ces deux définitions mathématiquement équivalentes correspondent en fait à des conceptions différentes des fractions et des décimaux, en ce sens qu'elles ne sont pas pertinentes, ou plus efficaces, ou mieux adaptées, sur les mêmes situations-problèmes. Selon les valeurs attribuées de l'unité, rapport des dimensions de l'objet à celle de l'unité choisie, présence ou non d'un partage ou de la mesure d'une subdivision, il est possible de bloquer l'utilisation de l'une ou de l'autre, ou de les rendre plus ou moins coûteuses en nombre d'actions élémentaires, ou de contrarier le contrôle de l'incertitude du résultat, ou d'augmenter les probabilités d'erreurs.

Le tableau IX résume une étude théorique que l'on trouvera dans Ratsimba-Rajohn (1981). Il indique celle des deux conceptions que les valeurs de ces variables rendent plus efficaces. Il apparaît qu'elles sont assez complémentaires et que la définition constructive est largement la plus fréquemment utile. Il existe d'autres conceptions que nous n'étudierons pas ici.

d) M. Ratsimba-Rajohn a montré que la stabilité et l'homogénéité des comportements sur un ensemble assez varié d'exercices permettait de parler de deux représentations différentes et dans une certaine mesure incompatibles : il a proposé à un échantillon d'élèves du premier cycle du secondaire des situations bloquant successivement l'une ou l'autre. Il a observé un pourcentage d'élèves capables de pratiquer les deux définitions, très faible par rapport à ce que les probabilités de réussite à chaque épreuve aurait laissé prévoir.

VARIABLES D'UNE SITUATION DIDACTIQUE DE MESURAGE SERVANT A L'EVALUATION DE L'ESPERANCE DE COUT.

Variables de commande	situation problème	1. Grandeur de U l'unité choisie, par rapport aux valeurs de référence : S_1 : seuil de perception ou S_2 : seuil de précision utile f : unité « à fractionner » (commodément et fréquemment) p : unité « à reporter » ou servant à dénombrer
		2. Rapport de la grandeur de □ l'objet, à celle de U. — $\frac{\square}{U} \ll 1$ $\frac{\square}{U} \cong 1$ $\frac{\square}{U} \gg 1$ — « meilleur » attracteur de l'intervalle $\frac{\square}{U} - S_2$, $\frac{\square}{U} + S_2$ Ex : $\frac{3}{5}$ ou $\frac{59}{57}$
		3. Les conditions de « comparaison » : — un à un (Roberval) un à n (graduation) directe ou indirecte (tare)...
		4. Les conditions d'ajustement : — possibilité de fractionnement matériel — possibilités de report nombre maximum de reports... etc (Espace disponible)
		5. Type d'activité : — réalisation d'un objet de grandeur donnée ou mesurage d'un objet
	contrat didactique	1. Conventions au sujet des exigences de la mesure — précision utile (action) convenue (communication) : fractions usuelles, décimales, etc...
		2. Valeur de la réussite, coût de l'erreur ou de l'échec...
		3. Nombre de tentatives permises — Types de rétroactions — ouverture de sa situation
		4. Variables du contrat relatif à l'apprentissage : temps, nombre d'occasion, ... etc
Variables liées		1. Nombre de reports pour une précision donnée
		2. Nombre de fractionnements effectifs
		3. Nombre de comparaisons
		4. Densité relative des points de mesurage facile ou complexe
Variables Culturelles		Distributions de fréquence sur les valeurs des variables de la situation problème — en milieu scolaire (variable plus ou moins ajustable), dans le milieu culturel (libre)

Tableau 9

5.4. *Questions de méthodologie de la recherche en didactique (sur les décimaux)*

Le regroupement des situations en modèles, conceptions, représentations, niveaux etc. pose le problème de savoir ce qui est équivalent et ce qui ne l'est pas, ce qui est différent et ce qui ne l'est pas, puis ces distinctions faites, d'observer éventuellement des relations d'implications internes aux modèles — synchroniques — et des relations entre modèles — diachroniques.

5.4.1. *Les modèles d'erreurs*

M. L. Izoche (1977) a montré que les erreurs et les réussites des élèves s'expliquaient si on leur attribuait le modèle suivant : en présence de plusieurs décimaux (d_i), on cherche n le plus petit par exemple tel que pour tout d_i, $d_i \times 10^n \in \mathbb{N}$ et on identifie avec $\mathbb{N}$, l'ensemble $\mathbb{D}n$ des décimaux tels que $10^n . \mathbb{D}n \subset \mathbb{N}$. L'enfant raisonne et opère sur $\mathbb{D}n$ comme sur $\mathbb{N}$. F.Léonard et C.Grisvard (1981) ont produit, sur un problème d'ordre, un modèle de comportement un peu plus précis rendant compte du fonctionnement indépendant de la partie entière et de la partie décimale. Ces études sont basées sur l'effondrement concommitant de certaines réussites d'ensemble puis sur une hiérarchie de comportements individuels : elles montrent que le modèle souffre peu d'exceptions . Cependant lorsque l'explication porte sur des modifications de probabilités d'erreurs et non sur des modèles déterministes, (supposant que le même élève fait toujours la même erreur) la méthode est rarement satisfaisante.

On pourrait espérer que l'analyse factorielle des correspondances ou l'analyse hiérarchique vont faire apparaître les regroupements de questions et les regroupements d'élèves qui correspondent à ces modèles. Cette méthode est utilisée systématiquement par plusieurs chercheurs mais elle est d'un emploi délicat et l'interprétation s'arrête habituellement aux tous premiers facteurs principaux.

5.4.2. *Les niveaux de complexité*

Si on observe chez les élèves un décolage suffisant dans le temps, entre la maîtrise de deux questions appartenant à première vue à un même concept, on peut inférer qu'il existe, entre leurs solutions ou les conceptions qui les commandent, des différences de complexité suffisantes pour former des niveaux psychogénétiques différents. L'analyse génétique qui découle de ce principe a apporté beaucoup d'observations précieuses de la part de G. Vergnaud (1976) G. Ricco (1978) et A. Rouchier (1980) et de leurs collaborateurs. Il faut pourtant, soit renoncer à s'approcher trop des phénomènes didactiques qui peuvent introduire des décalages d'origine arbitraire et didactique, soit redéfinir une méthodologie spécifique. En particulier, la formalisation de cette notion de niveau, bien que tentée à plusieurs reprises, présente des difficultés.

5.4.3. *L'observation systématique* des différences de comportements, liés à des modalités ou à des conditions didactiques différentes, a été rendue possible par l'utilisation astucieuse de l'analyse des correspondances dans la méthode des questionnaires à modalités de F. Pluvinage (1977) et a produit des observations intéressantes sur la proportionnalité.

5.4.4. *Dépendances et implications*

En didactique, ce sont moins les proximités ou les distances qui sont intéressantes, que les dépendances disymétriques qui évoquent l'implication. Régis Gras (1979) a donc étudié des méthodes hiérarchiques et d'analyses factorielles basées sur un indice d'implication améliorant celui de J. Loevinger. Mais l'implication elle-même évoque une transitivité assez souvent absente en fait, et il faut produire un concept spécifique plus raffiné avant d'en tirer un indice statistiquement satisfaisant.

Peut-être l'analyse des dépendances diachroniques entreprise sur des processus comme celui dont nous disposons conduira-t-elle à ce résultat.

CONCLUSION

Dans ces deux articles, nous avons essayé de présenter les problèmes d'enseignement des décimaux sans détruire le tissu dans lequel ils s'insèrent. Et cela nous a conduits insensiblement à traduire ces problèmes d'enseignement en problèmes de didactique plus ou moins généraux, et à enchaîner les questions jusqu'à la méthodologie de la recherche. Ne nous sommes-nous pas égarés en route ? Nous avons dû résumer ou exclure de nombreuses études trop particulières ou trop centrifuges... alors de quelle unité peut se targuer la didactique, quel est son champ, ses rapports avec l'enseignement ? En quoi avons-nous avancé par rapport à nos premières observations ?

L'enseignement des décimaux, comme celui de la numération pose à mes yeux un problème didactique difficile et primordial.

D'une part, leur usage est si répandu, si commode et si banal que les enfants le rencontrent très tôt, sous leur forme achevée, actuelle. Quelle que soit la forme de l'apprentissage, c'est l'habitude et l'emploi familier qui règlera la signification du concept.

Nous avons vu les insuffisances de cette conception « machinale » et la nécessité de placer cet usage sous le contrôle d'une compréhension et même, dès que possible, d'un savoir rationnel. Seule, la résolution de certaines situations-problèmes peut donner cette conception claire, cette compréhension et ce savoir. Mais ces problèmes sont d'une complexité assez grande et il ne semble guère possible de les proposer aux élèves au moment voulu, trop précoce.

D'autre part, il est impensable de retarder l'enseignement des décimaux ou de les approcher par une genèse trop longue ou qui conduirait à des pratiques insolites. Enfin, au moment où pourraient se faire les reprises et les accommodations nécessaires, dans l'enseignement secondaire, on n'a plus de temps à consacrer à cette question subalterne.

Nous avons ainsi un problème d'enseignement sans solution. Il en existe d'autres qui conduisent à des contradictions semblables.

D'une façon générale, de tels problèmes sont, sinon résolus, du moins traités par une négociation didactique, dont on sait peu de choses encore, mais qui ne suit que de très loin le discours classique. Dans ce discours, toutes les réussites sont perçues comme des fonctions monotones des variables : à une extrémité ce qui est bon, à l'autre ce qui est mauvais. Potentiellement, l'enseignant a tout pouvoir.

Quels sont les rôles réciproques de l'habitude et de la compréhension dans l'acquisition et dans le fonctionnement d'une notion ? Comment ce rôle évolue-t-il ? Quels sont les résultats que l'on peut s'attendre à voir varier, si un meilleur compromis est obtenu ? La traduction de ce débat en une liste d'hypothèses falsifiables, susceptibles d'être étudiées expérimentalement, demande la création de notions nouvelles. C'est le prix que doit payer la didactique pour accéder à un statut scientifique sans cesser d'être une théorie des faits didactiques et de contrôler sa technique. Les problèmes d'enseignement sont des problèmes de décisions. Ils doivent recevoir une réponse, même provisoire, coûte que coûte. Cette réponse ne peut pas être une réponse « pour voir ». L'enseignant ne peut pas s'engager à tirer toutes les conséquences logiques d'un choix et de s'y tenir quoiqu'il arrive. Aussi les problèmes ne donnent-ils pas beaucoup de prix à la méthode expérimentale, ils sont des indices à interpréter. Dans la mesure où elles sont spécifiques du contenu, certaines questions de l'enseignant peuvent être des questions à une « science didactique » qui parviendrait à sursoir à la nécessité des décisions. Quels sont les résultats des élèves ? Quelles décisions peuvent les améliorer ? Quelles alternatives se présentent ? Comment fabriquer d'autres méthodes, comment en choisir une ? Comment la gérer, la conduire ? la communiquer ? Quels indices faut-il surveiller ? Elles le peuvent à condition toutefois de subir une subtile modification du point de vue du vocabulaire et des méthodes : quelles situations et quels comportements correspondent à une appropriation convenable d'un concept ? Quels sont les comportement erronés qui apparaissent et leur signification ? Quelles sont les variables qui sont susceptibles d'agir sur les appropriations, quelles hypothèses peuvent expliquer les bons ou les mauvais résultats ?

Toutefois, la plupart des choix qui apparaissent comme critiqués pour l'enseignant ne fournissent pas de bonnes questions de didactique (Par exemple, faut-il adopter le manuel de Dupond ou celui de Durand ?) La recherche en didactique peut-elle se contenter de fournir des réponses là où elle peut les assurer par une étude scientifique, en laissant le soin et la responsabilité à l'enseignant seul, de décider de l'importance ou de la pertinence de l'information et de l'usage qu'il peut en faire ? Il faudra toujours que quelqu'un rapporte les conclusions à un processus d'enseignement bien précis et choisisse une réponse optimale. De toute façon, toute étude « in vivo » de l'apprentissage en situation scolaire, devra s'inscrire dans une activité d'enseignement dont il faudra bien contrôler les variables. Par conséquent, la didactique scientifique n'échappera pas à la phénoménotechnique didactique. Il faut qu'elle prenne en charge la totalité des interactions des systèmes en présence et qu'elle traite de ce qui peut-être isolé et qui est spécifique du contenu (sans lui être réductible). Elle doit donc produire des processus, non comme proposition optimale aux enseignants, mais comme objet d'étude.

Nous espérons que cet article a indiqué qu'elle pourra parvenir à le faire.

BIBLIOGRAPHIE DU CHAPITRE I (1)

* * *

AEBLI H. : *Didactique psychologique*, Delachaux et Niestle, 1959.

BACHELARD G. : *La formation de l'esprit scientifique*, Vrin. *Essai sur la connaissance approchée*, Vrin.

BROUSSEAU G. : « L'observation des activités didactiques », in *Revue française de pédagogie*, No 45, 1978. « Les obstacles épistémologiques et les problèmes mathématiques », in *Compte rendu du colloque international CIAIEM*, 1976.

BUISSON P. : « Évaluation-sondage dans le 1er cycle (12-16 ans) », in *Educational Studies in mathematics*. Vol. 6, No 4, march 1976.

DELATTRE P. : *Système, structure, fonction, évolution*, Maloine-Doin éditeurs, 1971.

DIENES W. : *Les six étapes du processus d'apprentissage en mathématique*, O.C.D.L., 1970.

DIENES et JEEVES : *Pensée et structure*, O.C.D.L., 1976.

GLAESER G. : Didactique expérimentale - Cours de 3ème cycle, I.R.E.M. de Strasbourg, 1979.

I.N.R.P. : *Evaluation comparée de quatre types d'organisation à l'école élémentaire* (FOUCAMBERT J. mars 1977-février 1979). *Enquête sur l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire.* Tome 1 : Comportement des élèves, 1979.

IZORCHE M.L. : Les réels en classe de seconde - Mémoire de D.E.A. soutenu en novembre 1977. Université de Bordeaux.

LICHNEROWICZ : « Les mathématiques et la réalité », in *Logique et connaissance scientifique*, p. 474-485. Encyclopédie de la Pléïade, NRF, 1969.

MAUDET C. : Etude critique du processus psycho-dynamique selon Diénès - Mémoire de D.E.A. soutenu en novembre 1979. Université de Bordeaux.

MERCIER A. : Etude des notions « opérateur » « machine » - Mémoire de D.E.A. soutenu en novembre 1978. Université de Bordeaux.

PIAGET J. : *Introduction à l'épistémologie génétique*, T. 1 et 2, P.U.F., 1974. *L'équilibration des structures cognitives*, P.U.F., 1975.

PLUVINAGE F. : Difficultés des exercices scolaires en mathématiques - Thèse de doctorat d'état soutenue en sept. 1977 à l'Université de Strasbourg.

SALIN M.H. : Le rôle de l'erreur dans l'apprentissage des mathématiques à l'école primaire - Mémoire de D.E.A. soutenu en novembre 1976. Université de Bordeaux.

VERGNAUD G., ROUCHIER A., et al. : Rapport de recherches D.G.R.S.T. — problèmes multiplicatifs, 1979. Acquisition des « structures multiplicatives » dans le 1er cycle du 2nd degré. Publication IREM - d'Orléans et Centre d'Etude des Processus Cognitifs et du Langage. E.H.E.S.S. - C.N.R.S. Paris - avec le concours de la D.G.R.S.T. - Ed. IREM d'Orléans. Collection « Recherche » No 2, mars 1979.

VIENNOT L. : *Le raisonnement spontané en dynamique élémentaire*, Hermann, 1979.

BIBLIOGRAPHIE DU CHAPITRE I (2)

* * *

ABD EL JAOUAD (1978) Vers une épistémologie des décimaux *Bulletin de l'Association Tunisienne des Sciences Mathématiques No. 50* (1-27)

(1980) *Apprentissages mathématiques à l'école élémentaire. Cycle préparatoire* 1 volume. *Cycle élémentaire* 2 volumes. Collection Ermel — OCDL. Ed.

N.BALACHEFF (1980) *Elaboration d'explications par des élèves de 6ème à propos d'un problème combinatoire (analyse et protocoles)* IMAG Université de Grenoble. Rapport de Rech. no. 224

G. BROUSSEAU (1970) Processus de Mathématisation. In, *la Mathématique à l'Ecole Elémentaire, APMEP. Paris 1972.* (428-442)

G. BROUSSEAU (1979) « Evaluation et théories de l'apprentissage en situations scolaires ». In *« Educacion matematica en las américas »* — UNESCO

G. BROUSSEAU (1980) Problèmes de l'enseignement des décimaux. *Recherches en Didactique des Mathématiques* I.1. pp. 11-59

Y.CHEVALLARD (1980) *« La transposition didactique »* Cours de l'Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques, Chamrousse, (à paraître)

F.COLMEZ (1974) Document d'accompagnement du film « Mesure » *Mesure I et II film RTS* — Melun-Bordeaux

M.DESJARDINS — J.C. HETU (1974) *« Activités mathématiques dans l'enseignement des fractions »* Les presses de l'Université du Québec.

R.DOUADY (1980) Approche des nombres réels en situation d'apprentissage scolaire. In, *Recherches en didactique des Mathématiques I.1 (77-112)*

E.FILLOY Expérimentacion en el area de matématicas del 5° Grado de Educacion primaria 77-78 *Médicion y systemas de Numéracion — Seccin Matématica Educativa del CIEA de IPN.*

GAGNE—BRIEN—PAQUIN (1980) *« Les principes fondamentaux de l'apprentissage »* éd. H.R.W. Montréal.

GONSETH (1936) *Les mathématiques et la réalité* - Paris - Alcan

R.GRAS (1980) « *Deux méthodes d'analyse de données didactiques : Classification implicative et classification hiérarchique — application à une situation réelle* » Publication de l'IREM de Rennes.

G.GUITTEL (1975) *« Histoire comparée des numérations écrites »* Flammarion.

K.HART (1980) From whole numbers to fractions and decimals. In, *Recherches en Didactique des Mathématiques. Vol. I.1. (61-75)*

N.HERSCOVICS (1980) Constructing meaning for linear equations. A problem of representation. In, *Recherches en Didactique des Mathématiques. I.3. (351-385).*

F.LEONARD - C.GRISVARD (1981) « Sur deux règles implicites utilisées dans la comparaison de nombres décimaux positifs ». In, *bulletin APMEP (327) (47-60).*

PERRET - CLERMONT A.N. (1979) *La construction de l'intelligence dans l'interaction sociale.* P. Lang, Berne.

OVAERT et al (1976) *Philosophie et calcul de l'infini.* F.Maspéro, (Ed.)

F. PLUVINAGE - C. DUPUIS (1980) *« La proportionnalité et son utilisation »* IRMA — Université Louis Pasteur. Strasbourg.

H.RATSIMBA-RAJOHN (1981) *« Etude didactique à l'aide de la théorie des jeux, des représentations et de deux stratégies des mesures rationnelles : la commensuration et le fractionnement de l'unité ».* Thèse de 3ème cycle de Didactique des Mathématiques IREM. Université de Bordeaux.

G.RICCO (1978) *Le développement de la notion de fonction linéaire chez l'enfant de 7 à 12 ans.* Travaux du Centre d'Etudes des processus cognitifs et du langage no. 11. EHESS — CNRS — Paris.

F.RICHARD et A.BESSOT (1979) *Commande de variables dans une situation didactique pour provoquer l'élargissement de procédures en vue d'étudier le rôle du schéma.* Thèse de 3ème cycle de Didactique des Mathématiques. IREM, Université de Bordeaux.

A.ROUCHIER et al (1980) « Situations et processus didactiques dans l'étude des nombres rationnels positifs ». *Recherches en Didactique des Mathématiques. I.2. (225-275)*

M.SCHUBAUER-LEONI/PERRET-CLERMONT (1980) Interactions Sociales et représentations symboliques dans le cadre de problèmes additifs — *Recherches en Didactique des Mathématiques I.3. (297-350)*

R.SKEMP (1976) Relational and instrumental understanding. *Mathematics teaching, 77 (20-26)*

S. STEVIN (1585) *La disme enseignant facilement expédier par nombres entiers, sans rompuz, tous comptes se rencontrant aux affaires des hommes 1585.* (Manustrit) 1634 (première édition).
Oeuvre mathématique de Simon Stevin augmentée par Albert Girard 1634.

G.VERGNAUD — C.DURAND (1976) « Structures additives et complexité psychogénétique » *Revue française de pédagogie no. 36 (28-43)*

G.VERGNAUD, J.BENHADJ, A.DUSSOURT (1979) « La coordination de l'enseignement des mathématiques entre le cours moyen 2ème année et la classe de 6ème ». *Recherches Pédagogiques, no.102, INRP.*

H.WHITNEY (1968a) The mathematics of physical quantities. Part I : Mathematical models for measurement. *The American Mathematical Monthly 75 (115-138).*

H.WHITNEY (1968b) The mathematics of physical quantities. Part II: Quantity. Structures and Dimensional Analysis. *The American Mathematical Monthly 76 (227-256).*

A.P.YOUSCHKEVITCH (1976) *« Les mathématiques arabes »* (VIIè et XVè siècles) VRIN.