I.R.E.M. D'AQUITAINE

Mathématiques du Signal

Séries de Fourier

Ont participé à l'élaboration de ce fascicule :

Fabrice BALEMBITS: Professeur de Mathématiques; Institut Universitaire de Technologie, 47 AGEN
Raymond BOUDIE: Professeur de Physique appliquée; Lycée J.B. de Baudre, 47 AGEN
Serge DUPUY: Professeur de Mathématiques honoraire
Michel PUJOS: Professeur de Mathématiques; Université de Bordeaux I antenne d'Agen, 47 AGEN
Joël RIVOAL: Professeur de Maths-Sciences; Lycée Professionnel J. Monnet, 47 FOULAYRONNES

AGEN:1996

AVANT PROPOS

Cet ouvrage est le troisième d'une collection intitulée << ***MATHEMATIQUES DU SIGNAL*** >> et qui s'adresse aussi bien à ceux qui enseignent ou étudient la physique appliquée qu'à ceux qui enseignent ou étudient les Mathématiques. Nous avons tenu, comme pour les précédents, à développer la plupart des notions mathématiques abordées avec le soucis constant d'un lien avec la physique. Ce lien permet, soit d'introduire une notion ou une propriété mathématique nouvelle à partir d'une situation rencontrée en physique, soit de préciser certaines applications des mathématiques à la physique

Le ***Tome I*** a été rédigé de manière à ce que son contenu soit accessible aux étudiants des classes de Techniciens Supérieurs.Il contient un exposé complet, mais très élémentaire sur les équations différentielles linéaires du premier et du deuxième ordre et traite le programme des classes de Techniciens Supérieurs sur la Transformation de LAPLACE. De plus, on y trouve une approche simple et détaillée de l'impulsion de DIRAC et on ne s'y limite pas à donner la relation entre la transformée d'une fonction f primitive large (cf. tome I)d'une fonction g localement continue par morceaux sur $[\ 0\ ;\ +\infty\ [$ et la transformée de g. Enfin y figurent aussi des notions sur l'utilisation de la Transformation de LAPLACE dans les systèmes (physiques) linéaires, invariants dans le temps et causaux. Ces notions sont élémentaires mais font apparaitre néammoins tout l'intérêt des fonctions de transfert qui, contrairement aux équations différentielles, modélisent complètement les systèmes physiques.

Le contenu du Tome I ne nous a pas paru suffisant pour fournir les notions nécessaires à la justification mathématique de la totalité du programme de physique de certaines sections de Techniciens Supérieurs. Aussi nous avons conçu un ***Tome II*** notamment destiné aux enseignants de Mathématiques et de

Sciences Physiques de ces sections et qui doit pouvoir aussi être utile aux étudiants Techniciens Supérieurs, ainsi qu'aux étudiants de certains I.U.T. et écoles d'Ingénieurs. Il reprend l'étude des systèmes de convolution et l'utilisation de la fonction de Transfert Isomorphe en se plaçant dans l'ensemble des DISTRIBUTIONS. Il complète le Tome I en montrant, entre autres, l'insuffisance des FONCTIONS mais cependant évite toute théorie sur l'ensemble des DISTRIBUTIONS.

Le Tome III est un ouvrage qui s'adresse aux mêmes lecteurs que ceux du Tome I ou du Tome II. Cependant, des compléments insérés dans certaines parties sont réservés aux lecteurs du Tome II. C'est ainsi qu'il présente une approche classique du développement d'une fonction périodique en Série de FOURIER mais, montre aussi le lien de ce développement avec les systèmes de convolution et les distributions. Pour les séries de FOURIER nous avons donné des propriétés permettant de faciliter les calculs ou liées à des problèmes que l'on rencontre en Physique. Nous avons insisté, chaque fois que cela nous a paru utile pour éviter des erreurs, sur les conditions d'application de ces propriétés. Pour certaines la démonstration, bien que faisant appel à des notions élémentaires, peut s'avérer un peu compliquée et ne retenir l'attention que de ceux qui s'intéressent à leur justification mathématique. Mais, toutes les propriétés sont accompagnées de <<modes d'emploi>>, d'exemples et d'exercices qui permettront à tout lecteur de s'initier à leur utilisation.

INTRODUCTION

■ Les séries trigonométriques se sont introduites au $18^{\text{ème}}$ siècle et au début du $19^{\text{ème}}$ siècle en liaison avec certains problèmes de Physique (mouvement des cordes vibrantes, propagation de la chaleur).

Le problème qui se posait était de savoir si une fonction périodique pouvait se représenter par une série trigonométrique.

Le Mathématicien et Physicien Joseph Fourier (1768-1830) a souligné l'importance de ce problème dans une note présentée en 1807 à l'Académie des Sciences puis dans son ouvrage sur la "Théorie analytique de la chaleur" en 1822. On trouve dans cet ouvrage les premiers exemples de fonctions discontinues représentables trigonométriquement.

Le problème de la représentation d'une fonction périodique par une série trigonométrique se ramène à l'étude de la convergence de la série de Fourier. C'est le Mathématicien Allemand Lejeune-Dirichlet qui en 1929 donna le premier théorème de convergence des séries de Fourier.

On rencontre souvent en Acoustique, en Mécanique, en Optique, en Electrotechnique , en Electronique ... des fonctions périodiques qu'il sera nécessaire de représenter par une série de Fourier.

■■ Dans ce document, nous nous limiterons à l'étude du développement en série de Fourier de fonctions qui, ainsi que leurs dérivées, sont localement continues par morceaux sur $\mathbb{R}$ (c'est le seul cas rencontré en Physique jusqu'au niveau B.T.S. Cf Tome 1 et Chapitre 2- II- 4°).

Nous donnerons des règles pratiques pour obtenir le développement en série de Fourier et des applications à la Physique.

■■■ D'une façon générale, le traitement du signal a pour but de faire ressortir au mieux ce que l'on désire observer (le signal) d'un environnement parasite (le bruit). La fonction de base du traitement du signal est donc le filtrage, qui consiste essentiellement à éliminer des bruits superposés aux signaux utiles.

On envisagera ici uniquement le cas d'un traitement linéaire et permanent qui à un signal d'entrée $\mathcal{E}(t)$ fait correspondre un signal de sortie $\mathcal{S}(t)$.

Un traitement linéaire et permanent doit pouvoir se résumer à une relation simple entre l'entrée et la sortie.

Exprimée dans le domaine des temps cette relation s'appelle EQUATION DE CONVOLUTION.

Il est possible d'obtenir également une relation caractéristique du système en considérant l'entrée et la sortie comme une somme de signaux élémentaires indépendants. Pour connaître la réponse du système à n'importe quel signal d'entrée, il suffira de connaître la réponse à chaque signal élémentaire.

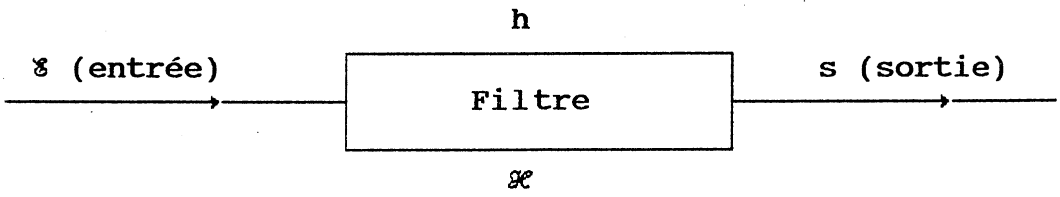
Dans le cas de signaux d'entrée périodiques une décomposition particulièrement bien adaptée à l'étude des systèmes linéaires et permanents est la décomposition en Série de Fourier.

La variable de référence n'est plus le temps mais la fréquence, le système est alors décrit par une fonction de transfert $\mathcal{H}$.

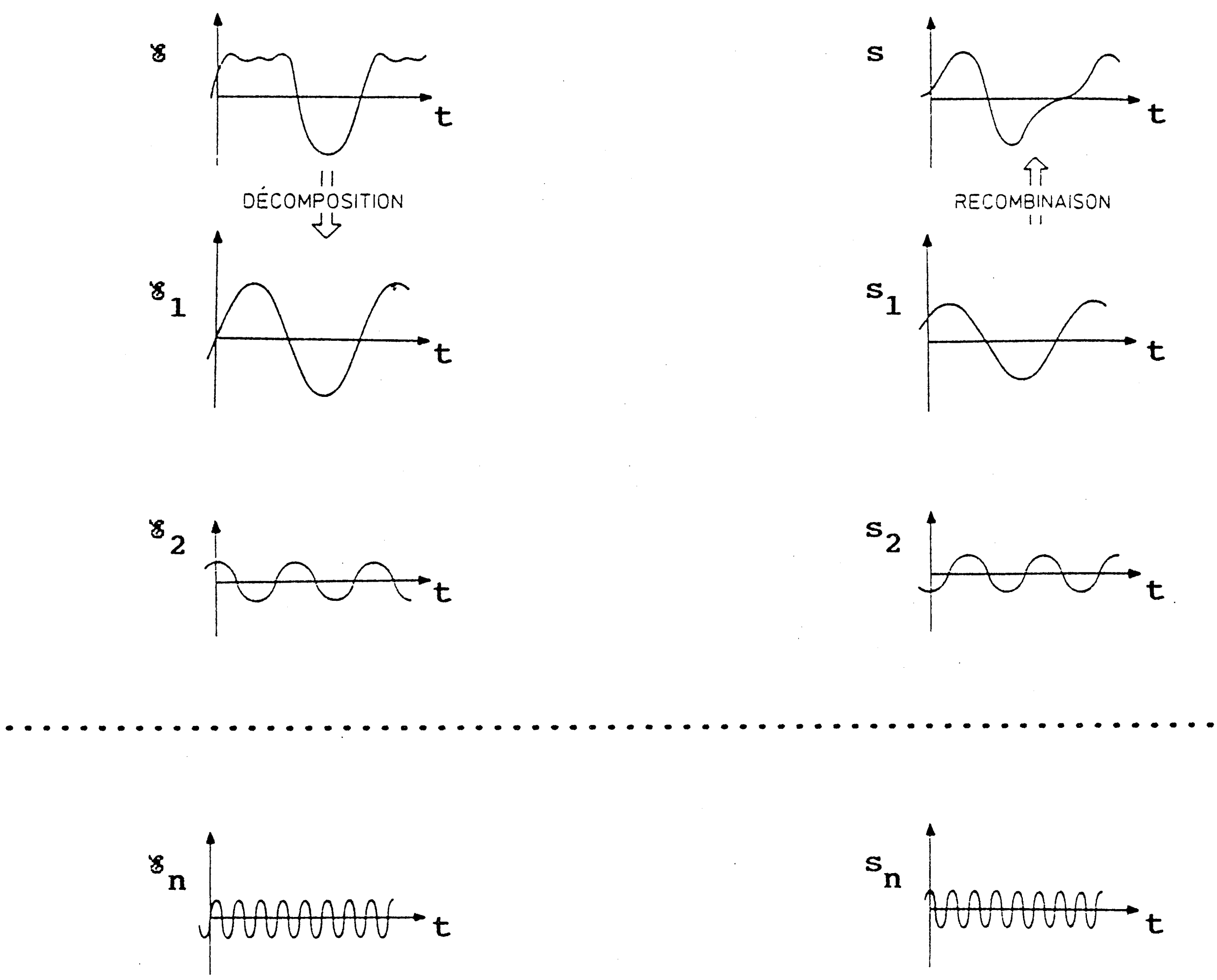
Par la décomposition en série de Fourier un signal temporel peut être décrit comme la "superposition" d'un certain nombre de signaux sinusoïdaux de la forme $\rho_n \cos(n\omega t - \varphi_n)$.

On peut donc décrire le signal par la donnée de l'amplitude ρ_n et de la phase origine φ_n pour chaque sinusoïde.

Dans le cas d'un traitement linéaire et permanent il suffit de connaître son action sur chaque sinusoïde élémentaire pour en déduire par recombinaison le signal de sortie.



$\mathscr{E} = \mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2 + \dots + \mathscr{E}_n + \dots$ $\qquad$ $s = s_1 + s_2 + \dots + s_n + \dots$



cf Chapitre 1- II- 2°)

TABLE DES MATIERES

CHAPITRE I : APPROCHE DES SERIES DE FOURIER

CHAPITRE II : SERIE DE FOURIER D'UNE FONCTION PERIODIQUE

CHAPITRE III : QUELQUES PROPRIETES DES SERIES DE FOURIER ET REGLES PRATIQUES

CHAPITRE IV : PRIMITIVE LARGE, << DERIVEE >>, PRODUIT D'UNE FONCTION PAR $\sin\frac{\omega}{k}t$ OU $\cos\frac{\omega}{k}t$

CHAPITRE V : FORMULE DE PARSEVAL

CHAPITRE VI : EXERCICES

ANNEXE : QUELQUES RAPPELS SUR LES SERIES NUMERIQUES

CHAPITRE I

APPROCHE
DES
SÉRIES DE FOURIER

Dans ce chapitre les paragraphes I et II s'adressent aux lecteurs du Tome 2.

I- FONCTION DE TRANSFERT ISOCHRONE

Rappelons que :

- $\mathcal{D}'$ désigne l'ensemble des distributions
- un système de convolution est une application d'un sous ensemble de $\mathcal{D}'$ dans $\mathcal{D}$ et qu'il est caractérisé par sa réponse impulsionnelle.

1°) Introduction

Soit $\mathcal{S}$ un système de convolution défini par :

$$\mathcal{E} \in \mathcal{A} \subseteq \mathcal{D}' \xrightarrow{\mathcal{S}} s = h * \mathcal{E}$$

Dans le cas où h, réponse impulsionnelle (cf Tome 2- Ch 4- VII-) du système est une distribution régulière [f] (f application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$) nous supposerons que l'intégrale

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ e^{-i\omega x}\, dx$ est absolument convergente pour tout $\omega \in \mathbb{R}$.

f n'est pas nécessairement nulle sur $]-\infty\ ;\ 0[$, mais rappelons que les systèmes physiquement réalisables ont une réponse impulsionnelle causale c'est à dire nulle sur $]-\infty\ ;\ 0[$.

2°) Transformée de Fourier dans le cas où h est une distribution régulière

a) "Fonctions propres"

(cf Tome 2- Ch 5- I- 2°)- A)-)

Prenons pour entrée $\mathcal{E}_\omega = \left[e^{i\omega t} \right]$, ω réel fixé, alors

$$s_\omega = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ e^{i\omega(t-x)}\, dx \right] = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ e^{-i\omega x}\, dx \right) \left[e^{i\omega t} \right]$$

On constate donc que :

$$s_\omega = \hat{f}(\omega)\left[e^{i\omega t}\right], \text{ où } \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-i\omega x}\, dx \text{ est application}$$

de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ indépendante de t.

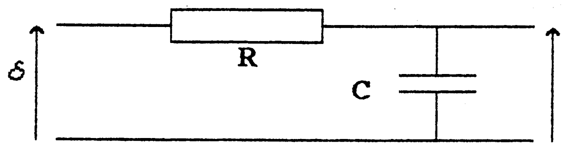
En résumé, si l'entrée $\mathcal{E}_\omega = \left[e^{i\omega t}\right]$, la sortie $s_\omega = \hat{f}(\omega)\, \mathcal{E}_\omega$ ce qui montre que $\mathcal{E}_\omega$ est un signal propre de $\mathcal{S}$.

b) Définitions

On notera $\mathcal{H} = \hat{h} = \left[\hat{f}\right]$.

> La distribution régulière $\left[\hat{f}\right]$ s'appelle fonction de transfert isochrone de $\mathcal{S}$.
> Par définition $\hat{h}$ est la transformée de Fourier de [f].
> La fonction $\hat{f}$ est appelée transformée de Fourier de f.

c) Exemple de fonction de transfert isochrone



$$[s(t)] = \left[\frac{1}{\tau}\, e^{-\frac{t}{\tau}}\, \mathcal{U}(t)\right] = h$$

$$\tau = RC$$

$$\hat{f}(\omega) = \int_0^{+\infty} e^{-i\omega t}\, \frac{1}{\tau}\, e^{-\frac{t}{\tau}}\, dt = \frac{1}{\tau}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{1+i\,\omega\tau}{\tau}t}\, dt = \frac{1}{1+i\,\omega\tau}$$

On pose $\omega_0 = \frac{1}{\tau}$ d'où $\hat{f}(\omega) = \dfrac{1}{1 + i\,\dfrac{\omega}{\omega_0}}$

$\hat{h} = \left[\dfrac{1}{1 + i\,\dfrac{\omega}{\omega_0}} \right]$ transformée de Fourier de h est la fonction de transfert isochrone du système "RC".

d) Remarque 1 :

Dans ce cas où la réponse impulsionnelle h est une distribution régulière, on nommera indifféremment fonction de transfert isochrone la fonction $\hat{f}$ ou la distribution $[\hat{f}]$.

e) Remarque 2 :

Rappelons que dans le tome 2 nous avons noté J_a le sous ensemble de $\mathbb{C}$ défini par : $z \in J_a \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z) > \mathrm{Re}(a)$ (cf Tome 2- Chap 4- VII-).

Plaçons nous dans le cas où f est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, nulle sur $]-\infty,0[$ qui admet une transformée de Laplace : $p \longrightarrow F(p)$ F étant définie pour tout $p \in J$ ($J=\mathbb{C}$ ou $J=J_a$) (cf Tome 2- Chapitre 5- I- 2°)- B-).

$$F(p)=\int_0^{+\infty} f(x)\, e^{-px}\, dx \quad \text{et} \quad \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-i\omega x}\, dx$$

Si de plus l'ensemble des nombres complexes imaginaires purs est contenu dans J, c'est à dire si F est définie pour tout $p=i\omega, \omega \in \mathbb{R}$, alors l'application $\omega \longrightarrow F(i\omega)$ est la transformée de Fourier $\hat{f}$ de f.

Exemple :

Dans le cas du système "RC",

$F(p) = \dfrac{1}{1 + \tau p}$ définie sur $J_{-\frac{1}{\tau}}$, τ = RC > 0.

(cf Tome 2- Chapitre 5- I- 2°)- C-)

donc $\hat{f}(\omega) = F(i\omega) = \dfrac{1}{1 + i\,\tau\omega} = \dfrac{1}{1 + i\,\dfrac{\omega}{\omega_0}}$

ATTENTION :

Soit par exemple $f(t) = e^t\mathcal{U}(t)$ alors $F(p) = \dfrac{1}{p - 1}$ est définie sur J_1.

J_1 ne contient pas l'ensemble des imaginaires purs, on ne doit

évidemment pas écrire $\hat{f}(\omega) = \dfrac{1}{i\omega - 1}$ puisque $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^x \; e^{-i\omega x} \; dx$

n'est convergente pour aucun $\omega \in \mathbb{R}$.

3°) Transformée de Fourier dans le cas où h est un signal discret ou la dérivée d'ordre n d'un signal discret.

On conserve l'entrée $\gamma_\omega = \left[e^{i\omega t}\right]$

a) $h = \delta_\alpha$

$$s_\omega = \delta_\alpha * \left[e^{i\omega t}\right] = \left[e^{i\omega(t-\alpha)}\right] = e^{-i\omega\alpha}\,\gamma_\omega$$

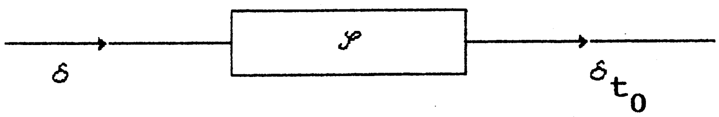
On définira donc $\hat{\delta}_\alpha = \left[e^{-i\omega\alpha}\right]$ transformée de Fourier de δ_α

Observons que $\hat{\delta}_0 = \hat{\delta} = [1]$

Rappelons que la fonction de transfert isomorphe de ce système, transformée de Laplace de sa réponse impulsionnelle est l'application $p \longrightarrow e^{-\alpha p}$ définie sur $J = \mathbb{C}$

(cf Tome 2- Chapitre 5- I- 3°-).

Remarque :



$\mathcal{S}$ ligne à retard idéale.

La fonction de transfert isochrone associée à l'opérateur retard est $\hat{\delta}_{t_0} = \left[e^{-t_0 i\omega}\right]$

Et la fonction de transfert isomorphe est : $p \longrightarrow e^{-t_0\, p}$ définie sur $J = \mathbb{C}$.

b) $h = D^{(n)}(\delta_\alpha)$

$D^{(n)}(\delta_\alpha) = \delta_\alpha * D^{(n)}(\delta)$

(cf Tome 2- Chap 4- V- 2°-)

$$s_\omega = D^{(n)}(\delta_\alpha) * \left[e^{i\omega t}\right] = \delta_\alpha * D^{(n)}(\delta) * \left[e^{i\omega t}\right] = \delta_\alpha * \left[(i\omega)^n\, e^{i\omega t}\right]$$

donc $s_\omega = (i\omega)^n\, e^{-i\omega\alpha} \left[e^{i\omega t}\right]$

et par définition :

la transformée de Fourier de $D^{(n)}(\delta_\alpha)$ est $(i\omega)^n\, e^{-i\omega\alpha}$

Rappelons que la fonction de transfert isomorphe de ce système est : $p \longrightarrow p^n\, e^{-\alpha p}$ définie sur $J = \mathbb{C}$

c) $h = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n\, \delta_{nT}$, $a_n \in \mathbb{C}$

$$
\begin{array}{ccc}
\displaystyle\sum_{n=0}^{m} a_n \delta_{nT} & \xrightarrow{\quad\mathcal{F}\quad} & \displaystyle\sum_{n=0}^{m} a_n \left[\, e^{-inT\omega}\,\right] \\
m \longrightarrow +\infty \quad \Big\downarrow \mathcal{D}'_t & & \Big\downarrow \mathcal{D}'_\omega \\
\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \delta_{nT} & \xrightarrow{\quad\mathcal{F}\quad} & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \left[\, e^{-inT\omega}\,\right]
\end{array}
$$

On admet que h a une transformée de Fourier $\hat{h} = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \left[\, e^{-inT\omega} \,\right]$

si la série de distributions définissant $\hat{h}$ converge dans $\mathcal{D}'$.

Rappelons que les conditions de convergence d'une telle série dans $\mathcal{D}'$ sont très larges puisqu'il suffit qu'il existe $q \in \mathbb{R}$ et $k > 0$ tels que pour n assez grand, $|a_n| \leq k\, n^q$

Rappelons enfin que si une série de distributions converge dans $\mathcal{D}'$ elle est indéfiniment dérivable terme à terme (cf. Tome 2 - chapitre 3 - VI - 5°).

Remarque 1 :

Des définitions plus générales que celle que nous avons donnée de la transformation de Fourier permettent de définir la transformée de Fourier de certaines distributions. Par exemple la distribution $[\mathcal{U}]$ admet une transformée de Fourier qui n'est pas une distribution régulière bien que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{U}(x)\, e^{-i\omega x}\, dx$ ne converge pour aucun $\omega \in \mathbb{R}$.

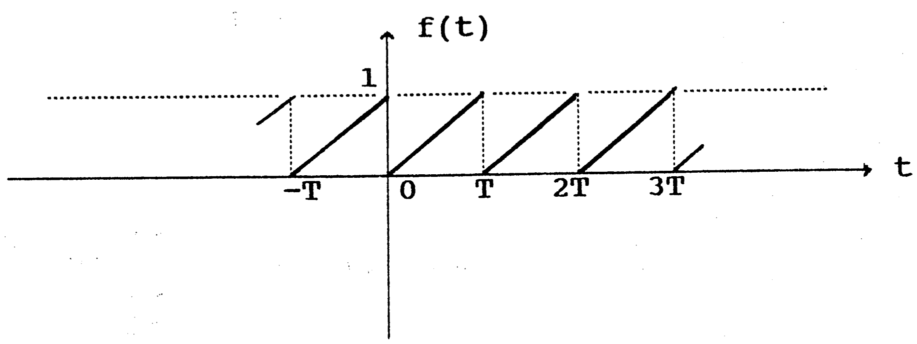
4°)Transformée de Fourier du peigne de Dirac

a) Soit $u = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n\, \delta_{nT}$ un signal discret, nous admettrons que si la série de distributions $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \left[e^{-inT\omega}\right]$ converge dans $\mathcal{D}'$ alors la distribution ainsi définie est la transformée de Fourier $\hat{u}$ de u

$$u = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n\, \delta_{nT} \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{u} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \left[e^{-inT\omega}\right]$$

b) Soit la fonction f, de période T, définie sur]0 ; T[par :

$$\forall\ t \in]0\ ;\ T[\ :\quad f(t) = \frac{t}{T}$$

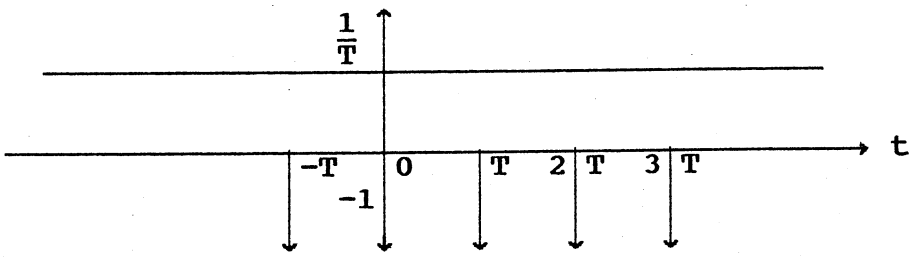


Nous verrons que : $\forall\ t \neq kT,\ k \in \mathbb{Z}$

$$f(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n\Omega t}{n} \quad , \text{ où } \Omega = \frac{2\pi}{T} \quad \text{donc}$$

$$(1) \qquad [f] = [\frac{1}{2}] - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{\sin n\Omega t}{n} \right] , \text{ où } \Omega = \frac{2\pi}{T} \ .$$

En dérivant directement la distribution [f], on obtient D([f]) que l'on peut représenter par :



Somme d'un signal constant <<dérivée>> de f et d'un signal peigne d'impulsions

$$D([f]) = [\frac{1}{T}] - \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_{nT} \qquad (2)$$

En dérivant terme à terme (1), on obtient :

$$D([f]) = - \frac{\Omega}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} [\cos n\Omega t] = - \frac{2}{T} \sum_{n=1}^{+\infty} [\cos n\Omega t] \qquad (3)$$

D'après (2) et (3), on déduit :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_{nT} = [\frac{1}{T}] + \frac{2}{T} \sum_{n=1}^{+\infty} [\cos n\Omega t] = \frac{1}{T} \sum_{n\in\mathbb{Z}} [e^{-in\Omega t}]. \ (4)$$

D'autre part

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_{nT} \xrightarrow{\mathcal{F}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} [e^{-inT\omega}] = 1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} [\cos nT\omega] .$$

En utilisant (4), avec $\Omega = \frac{2\pi}{T}$, on a :

$$1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} [\cos 2\pi n \frac{\omega}{\Omega}] = \frac{2\pi}{T} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_{\frac{2\pi n}{T}} \in \mathcal{D}'_{\omega} .$$

On rappelle que $\mathcal{D}'$ est l'ensemble des distributions , l'indice ω dans $\mathcal{D}'_{\omega}$ signifiant que la variable réelle est notée ω , c'est à dire que si φ est une fonction test (cf Tome 2- Ch 2-), elle est définie par :

$$\varphi : \omega \in \mathbb{R} \longrightarrow \varphi(\omega)$$

On en déduit donc la formule suivante, donnant la transformée de Fourier d'un peigne de Dirac :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_{nT} \xrightarrow{\mathcal{F}} \Omega \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_{n\Omega}$$

Notons que : $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_{nT} \in \mathcal{D}'_{t}$ et $\Omega \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_{n\Omega} \in \mathcal{D}'_{\omega}$.

II.- UTILISATION DE LA FONCTION DE TRANSFERT ISOCHRONE

1°) L'entrée $\mathscr{E}$ est une distribution associée à une fonction sin ou cos.

Soit $\mathscr{S}$ un système de convolution de réponse impulsionnelle $h = [f]$ admettant une transformée de Fourier $\mathscr{H} = \hat{h} = \left[\hat{f} \right]$, $\hat{f}$ est la transformée de Fourier de f.

Si nous appliquons à $\mathscr{S}$ l'entrée :

$$\mathscr{E}_\omega = [\ \cos(\omega t - \varphi)\ ] = \frac{1}{2}\ [\ e^{i\omega t}.e^{-i\varphi} + e^{-i\omega t}.e^{i\varphi}\ ]$$

la sortie correspondante est donnée par :

$$s_\omega = \frac{1}{2}\ e^{-i\varphi}\ \ \hat{f}(\omega)\ [\ e^{i\omega t}\ ] + \frac{1}{2}\ e^{i\varphi}\ \ \hat{f}(-\omega)\ [\ e^{-i\omega t}]$$

Alors, si $\overline{\hat{f}(\omega)} = \hat{f}(-\omega)$, ce qui est le cas lorsque f est à valeurs réelles ,puisque $\hat{f}(-\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ e^{i\omega x}\ dx$, on obtient :

$$s_\omega = \left[\ \mathscr{R}e\left(\ \hat{f}(\omega)\ e^{i(\omega t - \varphi)}\ \right)\ \right]$$

Donc en posant $\hat{f}(\omega) = A(\omega)\ e^{i\psi(\omega)}$, $A(\omega) = |\hat{f}(\omega)|$,

$$s_\omega = \left[\ \mathscr{R}e\left(\ A(\omega)\ e^{i(\omega t - \varphi + \psi(\omega))}\ \right)\ \right]$$

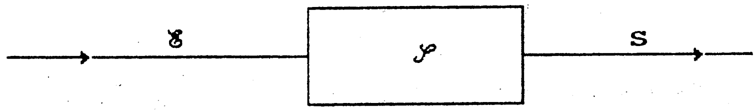
$$s_\omega = A(\omega)\ \cos(\omega t - \varphi + \psi(\omega))$$

De même si $\mathscr{E}_\omega = [\ \sin(\omega t - \varphi)\ ]$,

$$s_\omega = \left[\ \mathscr{I}m\left(\ A(\omega)\ e^{i(\omega t - \varphi + \psi(\omega))}\ \right)\ \right]$$

$$s_\omega = A(\omega)\ \sin(\omega t - \varphi + \psi(\omega))$$

2°) L'entrée $\mathcal{E}$ est une distribution régulière associée à une combinaison linéaire de sinus et cosinus:



$$\mathcal{E}_1(t) = E_{1M}\cos(\omega_1 t-\varphi_1) \longrightarrow s_1(t) = E_{1M}A(\omega_1)\cos(\omega_1 t-\varphi_1+\psi(\omega_1))$$

$$\mathcal{E}_2(t) = E_{2M}\cos(\omega_2 t-\varphi_2) \longrightarrow s_2(t) = E_{2M}A(\omega_2)\cos(\omega_2 t-\varphi_2+\psi(\omega_2))$$

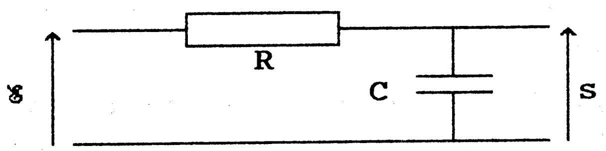
....

$$\mathcal{E}_n(t) = E_{nM}\cos(\omega_n t-\varphi_n) \longrightarrow s_n(t) = E_{nM}A(\omega_n)\cos(\omega_n t-\varphi_n+\psi(\omega_n))$$

$\mathcal{S}$ étant linéaire, on a (théorème de superposition) :

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \ldots + \mathcal{E}_n \longrightarrow s = s_1 + s_2 + \ldots + s_n$$

Exemple du système "RC" :



$$\mathcal{H} = \left[\frac{1}{1 + i\dfrac{\omega}{\omega_0}} \right] \quad , \text{ où } RC = \frac{1}{\omega_0}$$

$$A(\omega) = \frac{1}{\left(1 + \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^{\frac{1}{2}}} \quad \text{et}$$

$$\psi(\omega) = -\operatorname{Arctan}\frac{\omega}{\omega_0} \quad , \text{ car } \mathcal{R}e\left[\frac{1}{1 + i\,\frac{\omega}{\omega_0}}\right] > 0 \; .$$

$$\text{Soit } \mathcal{E}(t) = E_M \cos \omega_0 t + \frac{E_M}{3} \cos 3\omega_0 t + \frac{E_M}{5} \cos 5\omega_0 t \; ,$$

$$\mathcal{E}_1(t) = E_M \cos \omega_0 t \longrightarrow s_1(t) = E_M \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{4}\right)$$

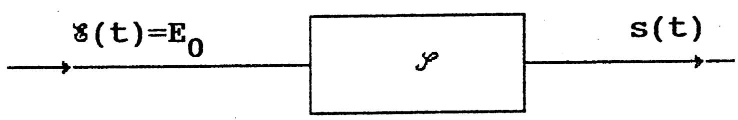
$$\mathcal{E}_2(t) = \frac{E_M}{3} \cos 3\omega_0 t \longrightarrow s_2(t) = \frac{E_M}{3} \frac{1}{\sqrt{10}} \cos\left(3\omega_0 t - \operatorname{Arctan}3\right)$$

$$\mathcal{E}_3(t) = \frac{E_M}{5} \cos 5\omega_0 t \longrightarrow s_3(t) = \frac{E_M}{5} \frac{1}{\sqrt{26}} \cos\left(5\omega_0 t - \operatorname{Arctan}5\right)$$

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3 \longrightarrow s = s_1 + s_2 + s_3 \; .$$

$$s(t) = \frac{E_M}{\sqrt{2}} \cos\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{E_M}{3\sqrt{10}} \cos\left(3\omega_0 t - \operatorname{Arctan}3\right) + \frac{E_M}{5\sqrt{26}} \cos\left(5\omega_0 t - \operatorname{Arctan}5\right)$$

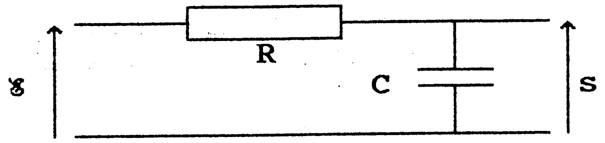
3°) **L'entrée $\mathcal{E}$ est constante**



Soit $\mathcal{S}$ un système de fonctions de transfert isochrone $\hat{h} = [\hat{f}]$, alors la sortie s correspondant à un signal d'entrée constant $[E_0]$ est $[E_0 \; \hat{f}(0)]$

III. REGIME TRANSITOIRE ET REGIME PERMANENT

Reprenons l'exemple du système "RC" :



Soit $\mathcal{E}$ l'entrée causale définie par :

$$\mathcal{E}(t) = E_M \cos(\ \omega t - \varphi\ )\ \mathcal{U}(t)\ .$$

$$\mathcal{E}(t) = E_M \left[\cos\varphi \cos\omega t + \sin\varphi \sin\omega t \right] \mathcal{U}(t)$$

$$H(p) = \frac{1}{1 + \dfrac{p}{\omega_0}} \quad \text{et} \quad \mathcal{H} = \left[\frac{1}{1 + i\,\dfrac{\omega}{\omega_0}} \right] = [\hat{f}(\omega)]$$

$$|\hat{f}(\omega)| = A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}}} \quad \text{et } \operatorname{Arg}(\hat{f}(\omega)) = -\operatorname{Arctan}\frac{\omega}{\omega_0} = \psi(\omega).$$

Pour trouver la sortie, utilisons la transformation de Laplace

$$E(p) = E_M \left[\cos\varphi \ \frac{p}{p^2 + \omega^2} + \sin\varphi \ \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} \right]$$

$$S(p) = H(p)\ E(p)$$

$$S(p) = E_M \left[\cos\varphi \ \frac{\omega_0\, p}{(p^2 + \omega^2)(p + \omega_0)} + \sin\varphi \ \frac{\omega\, \omega_0}{(p^2 + \omega^2)(p + \omega_0)} \right]$$

$$\frac{\omega_0\, p}{(p^2+\omega^2)(p+\omega_0)} = -\frac{\omega_0^2}{\omega_0^2+\omega^2}\,\frac{1}{p+\omega_0} + \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2+\omega^2}\,\frac{p}{p^2+\omega^2} +$$

$$\frac{\omega^2}{\omega_0^2+\omega^2}\,\frac{\omega_0}{p^2+\omega^2}$$

$$\frac{\omega\,\omega_0}{(p^2+\omega^2)(p+\omega_0)} = \frac{\omega\,\omega_0}{\omega_0^2+\omega^2}\,\frac{1}{p+\omega_0} + \frac{\omega\,\omega_0}{\omega_0^2+\omega^2}\,\frac{\omega_0-p}{p^2+\omega^2}$$

Ecrivons l'original de S(p) :

$s(t) =$

$$E_M \cos\varphi \left[-\frac{\omega_0^2}{\omega_0^2+\omega^2}\,e^{-\omega_0 t} + \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2+\omega^2}\cos\omega t + \frac{\omega\,\omega_0}{\omega_0^2+\omega^2}\sin\omega t\right]\mathcal{U}(t)$$

$$+\,E_M \sin\varphi \left[\frac{\omega\,\omega_0}{\omega_0^2+\omega^2}\,e^{-\omega_0 t} - \frac{\omega\,\omega_0}{\omega_0^2+\omega^2}\cos\omega t + \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2+\omega^2}\sin\omega t\right]\mathcal{U}(t)$$

$$s(t) = E_M\,\frac{\omega_0}{\omega_0^2+\omega^2}\Big[(\omega\sin\varphi - \omega_0\cos\varphi)\,e^{-\omega_0 t} + \omega_0\cos\varphi\cos\omega t$$

$$+\,\omega\cos\varphi\sin\omega t - \omega\sin\varphi\cos\omega t + \omega_0\sin\varphi\sin\omega t\Big]$$

$$s(t) = E_M\,\frac{\omega_0}{\omega_0^2+\omega^2}\left[(\omega\sin\varphi - \omega_0\cos\varphi)\,e^{-\omega_0 t}\right]$$

$$+\,E_M\,\frac{\omega_0}{\omega_0^2+\omega^2}\left[\omega_0\cos(\omega t-\varphi) + \omega\sin(\omega t-\varphi)\right]$$

Cette sortie s est appelée régime transitoire.

Lorsque t est grand, les physiciens négligent

$$E_M \frac{\omega_0}{\omega_0^2 + \omega^2} \left[(\omega \sin \varphi - \omega_0 \cos \varphi)\, e^{-\omega_0 t} \right]$$ qui est voisin de 0.

On nomme alors régime permanent :

$$s_{perm}(t) = E_M \frac{\omega_0}{\omega_0^2 + \omega^2} \left[\omega_0 \cos (\omega t - \varphi) + \omega \sin (\omega t - \varphi) \right]$$

$$s_{perm}(t) = E_M \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}} \cos \left(\omega t - \varphi - \text{Arctan} \frac{\omega}{\omega_0} \right)$$

Conclusion :

$$s_{perm}(t) = E_M\, A(\omega) \cos (\omega t - \varphi + \psi(\omega))$$

Pour un signal d'entrée sinusoïdal de pulsation ω, d'amplitude E_M et de phase φ à l'instant t = 0, appliquée à l'entrée d'un système linéaire $\mathcal{S}$ de fonction de transfert isochrone $\mathcal{H} = [A(x) \quad e^{i\psi(x)}]$, le signal de sortie en régime permanent est sinusoïdal de même pulsation que le signal d'entrée, d'amplitude $E_M\, A(\omega)$ et de phase $- \varphi + \psi(\omega)$ à l'instant t = 0.

Remarque :

Nous savons traiter les signaux "sinusoïdaux" en régime permanent donc pour traiter un signal périodique en régime permanent, on sera amené à le décomposer en une somme de signaux sinusoïdaux.

IV- POLYNOMES TRIGONOMETRIQUES :

1°) Définition :

Soit f_m la fonction périodique, de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$ définie sur $\mathbb{R}$, par $f_m(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{m} \left[a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t \right]$

avec $\omega > 0$, $a_0 \in \mathbb{C}$, $a_n \in \mathbb{C}$, $b_n \in \mathbb{C}$, $m \in \mathbb{N}^*$

f_m *est continue sur* $\mathbb{R}$

On peut écrire :

$$f_m(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{m} \left[a_n \frac{e^{in\omega t} + e^{-in\omega t}}{2} + b_n \frac{e^{in\omega t} - e^{-in\omega t}}{2\,i} \right]$$

et $f_m(t) = \sum_{n=-m}^{n=+m} c_n\, e^{in\omega t}$

avec

$$c_0 = a_0 \text{ et pour } n \geq 1 \left\{ \begin{array}{l} c_n = \dfrac{a_n - i\, b_n}{2} \\ \\ c_{-n} = \dfrac{a_n + i\, b_n}{2} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_n = c_n + c_{-n} \\ \\ b_n = i\,(c_n - c_{-n}) \end{array} \right.$$

Définition :

On appelle polynôme trigonométrique toute fonction f_m de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$\forall\, t \in \mathbb{R},\ f_m(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{m} \left[a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t \right]$$

Remarques :

α) $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, a_n et b_n réels $\Leftrightarrow \forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $C_{-n} = \overline{C_n}$

β) Dans tous les cas traités en Physique jusqu'au niveau B.T.S. compris, les coefficients a_n et b_n sont réels.

2°) Quelques propriétés utiles :

a) *Si f est péridique de période* T alors

$$\int_0^T f(t)\,dt = \int_\alpha^{\alpha+T} f(t)\,dt \text{ que l'on notera } \int_{(T)} f(t)\,dt.$$

En effet $\displaystyle\int_0^T f(t)\,dt = \int_0^\alpha f(t)\,dt + \int_\alpha^{\alpha+T} f(t)\,dt + \int_{\alpha+T}^T f(t)\,dt$.

Posons $t = T + x$ il vient $\displaystyle\int_{\alpha+T}^T f(t)\,dt = \int_\alpha^0 f(x+T)\,dx = \int_\alpha^0 f(t)\,dt$

b) *Soit* $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in \mathbb{N}^*$, *on montre facilement* en décomposant les produits en somme que si :

$n \neq p$ $\displaystyle\int_{(T)} \cos n\omega t \cos p\omega t\,dt = 0$

$$\int_{(T)} \sin n\omega t \sin p\omega t\,dt = 0$$

$$\int_{(T)} \sin n\omega t \cos p\omega t\,dt = 0$$

$n = p$ $\qquad \displaystyle\int_{(T)} \sin^2 n\omega t \; dt = \frac{T}{2}$

$$\int_{(T)} \cos^2 n\omega t \; dt = \frac{T}{2}$$

$$\int_{(T)} \sin n\omega t \cos n\omega t \; dt = 0$$

3°) Un calcul des coefficients a_0, a_n et b_n :

f étant un polynôme trigonométrique défini par :

$$\forall\, t \in \mathbb{R},\; f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+m} \left[a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t \right] \text{ avec } m > 0$$

En intégrant terme à terme et compte tenu des propriétés indiquées au 1°) b) :

■ $\displaystyle\int_{(T)} f(t)\, dt = T\, a_0$ donc $\boxed{a_0 = \frac{1}{T} \int_{(T)} f(t)\, dt}$

■ $\displaystyle\int_{(T)} f(t) \cos n\omega t \; dt = a_0 \int_{(T)} \cos n\omega t \; dt + \ldots\ldots$

$$\ldots + a_p \int_{(T)} \cos n\omega t \cos p\omega t \; dt + b_p \int_{(T)} \cos n\omega t \sin p\omega t \; dt + \ldots\ldots$$

$$\ldots + a_n \int_{(T)} \cos^2 n\omega t \; dt + b_n \int_{(T)} \cos n\omega t \sin n\omega t \; dt + \ldots\ldots$$

$$\ldots + a_m \int_{(T)} \cos n\omega t \cos m\omega t \; dt + b_m \int_{(T)} \cos n\omega t \sin m\omega t \; dt \;=\; a_n \frac{T}{2}$$

donc $\boxed{a_n = \frac{2}{T} \int_{(T)} f(t) \cos n\omega t \, dt}$

■ On obtiendrait de même, en calculant $\int_{(T)} f(t) \sin n\omega t \, dt$

que $\boxed{b_n = \frac{2}{T} \int_{(T)} f(t) \sin n\omega t \, dt}$

<u>Nota</u> : *Ce calcul montre l'unicité des coefficients* a_0, a_n *et* b_n.

C'est à dire :

soient ψ et φ définies par

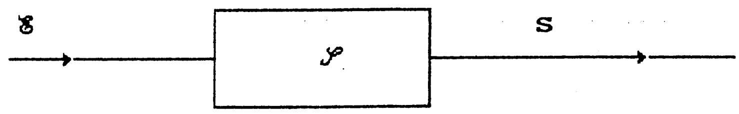
$$\forall\, t \in \mathbb{R},\ \psi(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{m} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t)$$

$$\forall\, t \in \mathbb{R},\ \varphi(t) = a'_0 + \sum_{n=1}^{p} (a'_n \cos n\omega t + b'_n \sin n\omega t)$$

Si $\forall\, t \in \mathbb{R},\ \psi(t) = \varphi(t)$

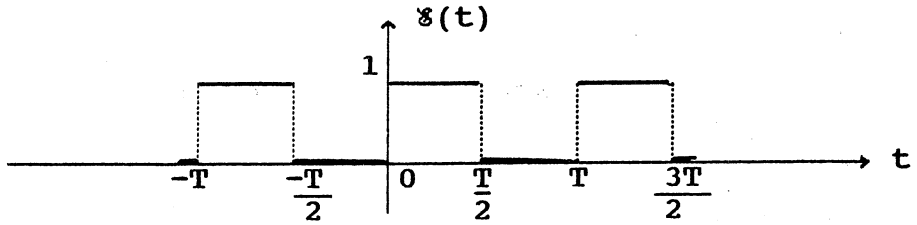
alors $m = p$, $a_0 = a'_0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\begin{cases} a_n = a'_n \\ b_n = b'_n \end{cases}$

V- INSUFFISANCE DES POLYNOMES TRIGONOMETRIQUES



Soit $\mathfrak{s}$ le signal d'entrée dans le système $\mathscr{S}$.

Considérons par exemple le signal périodique $\mathfrak{s}$ représenté ci-dessous :



où $\mathfrak{s}(k\,\frac{T}{2}) = 0$

Peut-on trouver un polynôme trigonométrique tel que :

$$\forall\, t \in \mathbb{R},\ \mathfrak{s}(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{m} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t)\ ?$$

NON car un polynôme trigonométrique définit une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et $\mathfrak{s}$ n'est pas continue sur $\mathbb{R}$.

On va essayer de voir comment on peut approcher la fonction $\mathfrak{s}$ par un polynôme trigonométrique.

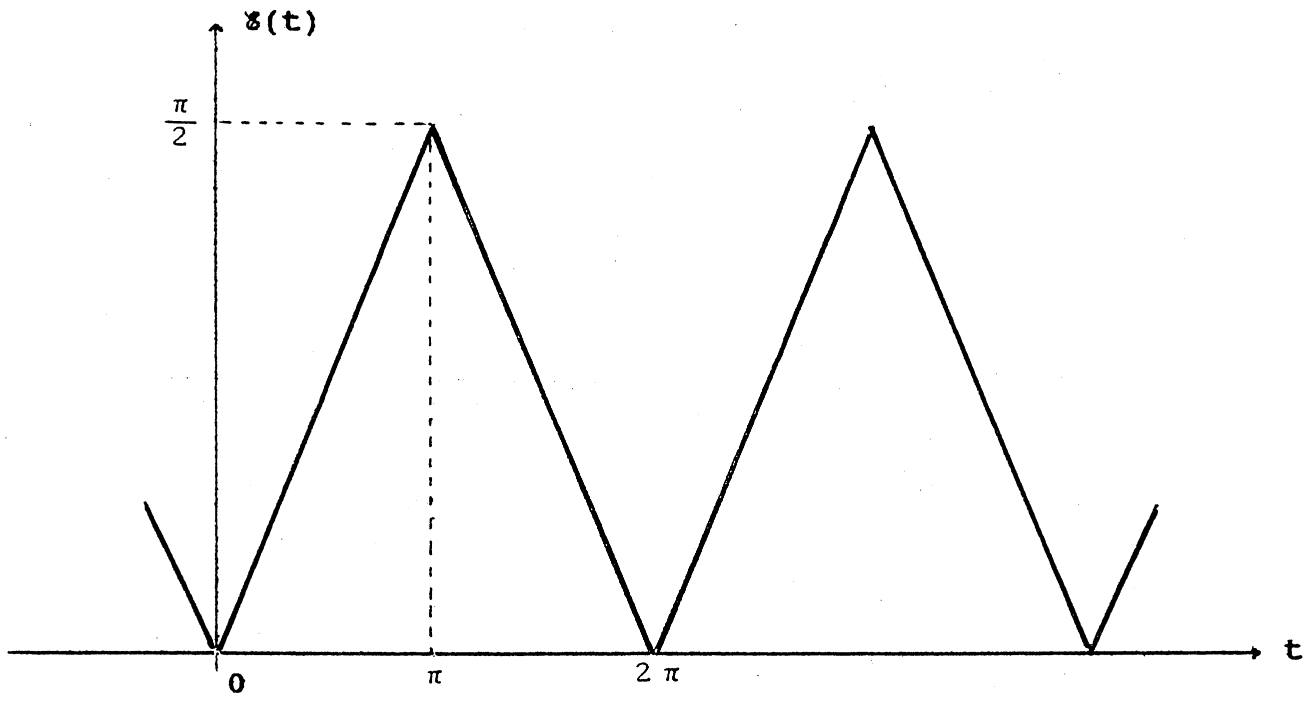
En prenant

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{(T)} \mathfrak{s}(t)\,dt,\quad a_n = \frac{2}{T}\int_{(T)} \mathfrak{s}(t)\cos n\omega t\,dt,\quad b_n = \frac{2}{T}\int_{(T)} \mathfrak{s}(t)\cos n\omega t\,dt$$

obtient-on des polynômes trigonométriques qui approchent $\mathfrak{s}$?

1°) Examinons deux exemples :

a) Considérons la fonction périodique γ représentée ci-dessous :

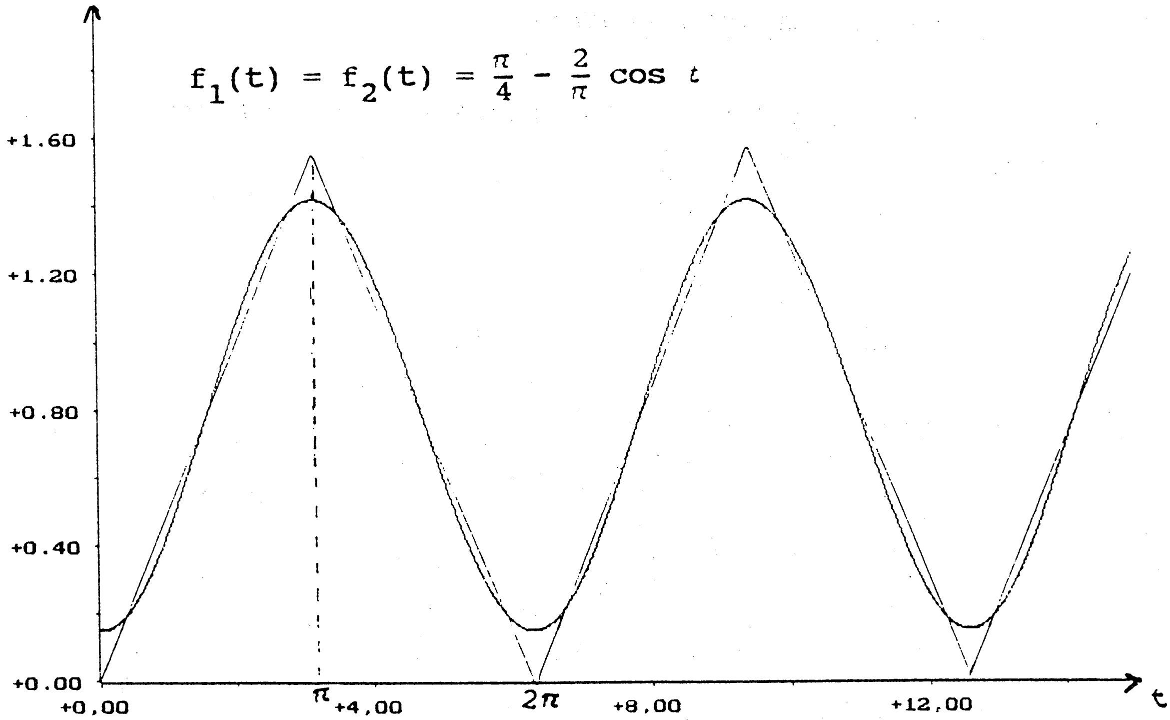


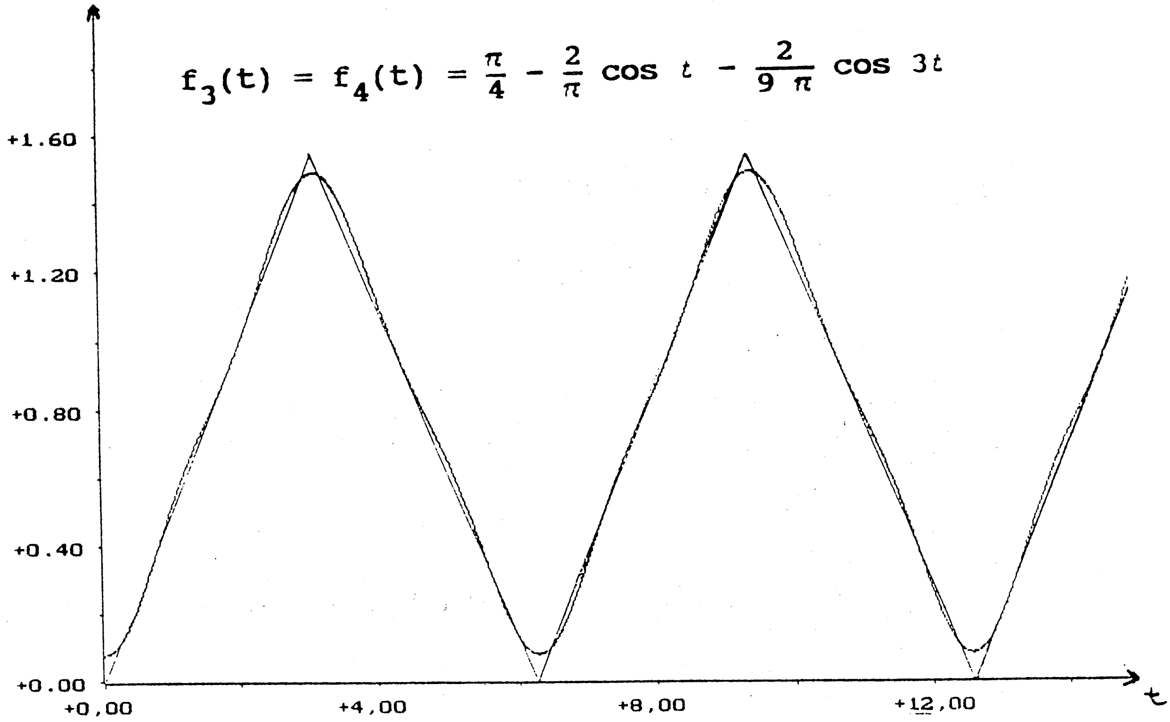
Soit le polynôme trigonométrique :

$$f_m(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{m} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t)$$

ici $a_0 = \frac{\pi}{4}$, $a_{2p} = 0$, $a_{2p+1} = -\frac{2}{\pi(2p+1)^2}$ et $b_n = 0$

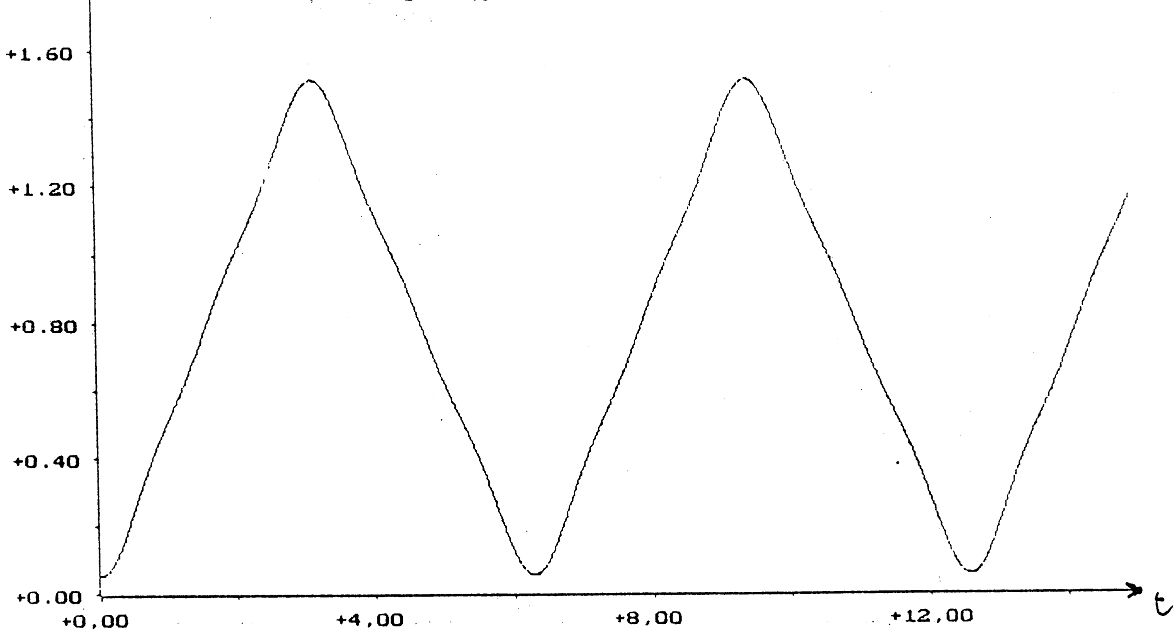
Considérons les courbes représentant les fonctions f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8, f_9, f_{10}, f_{11}, f_{12} :


f1(t) = f2(t) = π/4 − 2/π cos t
+1.60
+1.20
+0.80
+0.40
+0.00
+0,00
π
+4,00
2π
+8,00
+12,00
t

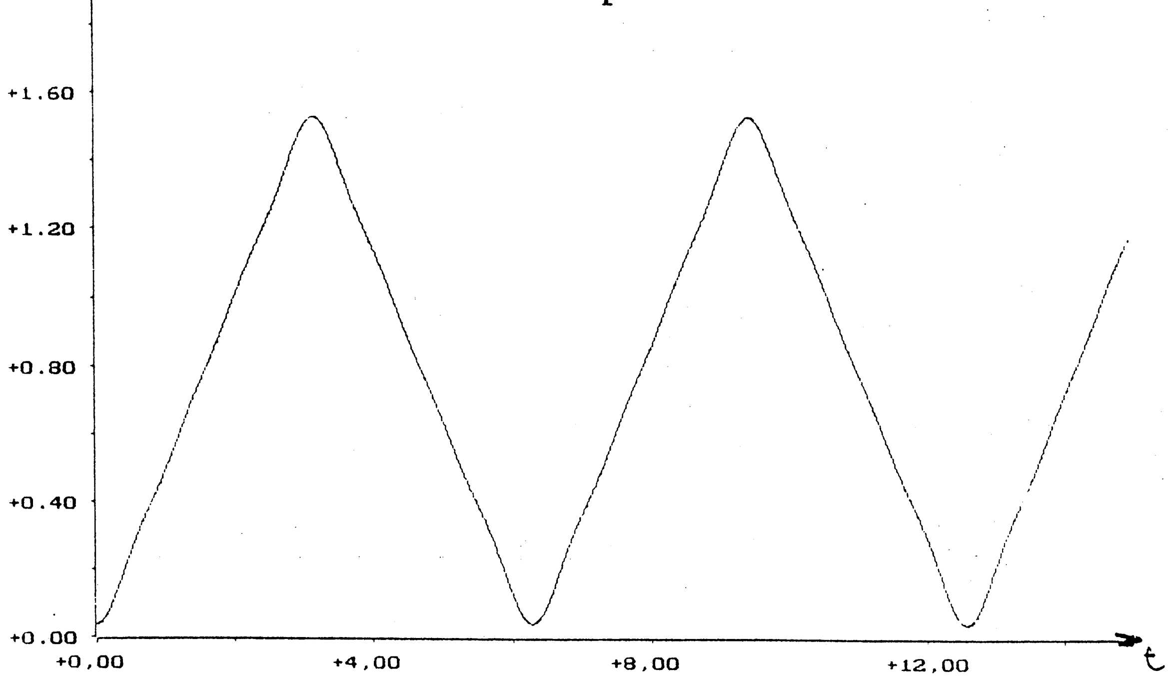

f3(t) = f4(t) = π/4 − 2/π cos t − 2/(9π) cos 3t
+1.60
+1.20
+0.80
+0.40
+0.00
+0,00
+4,00
+8,00
+12,00
t

$$f_5(t) = f_6(t)$$

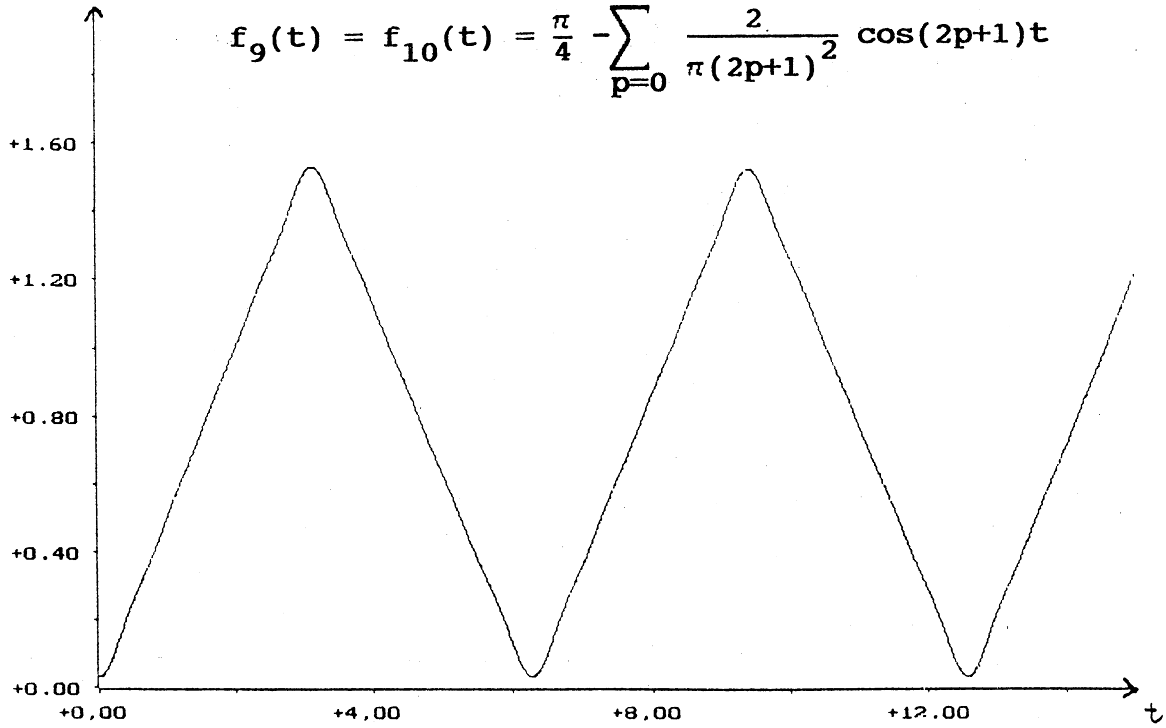
$$= \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \cos t - \frac{2}{9\pi} \cos 3t - \frac{2}{25\pi} \cos 5t$$



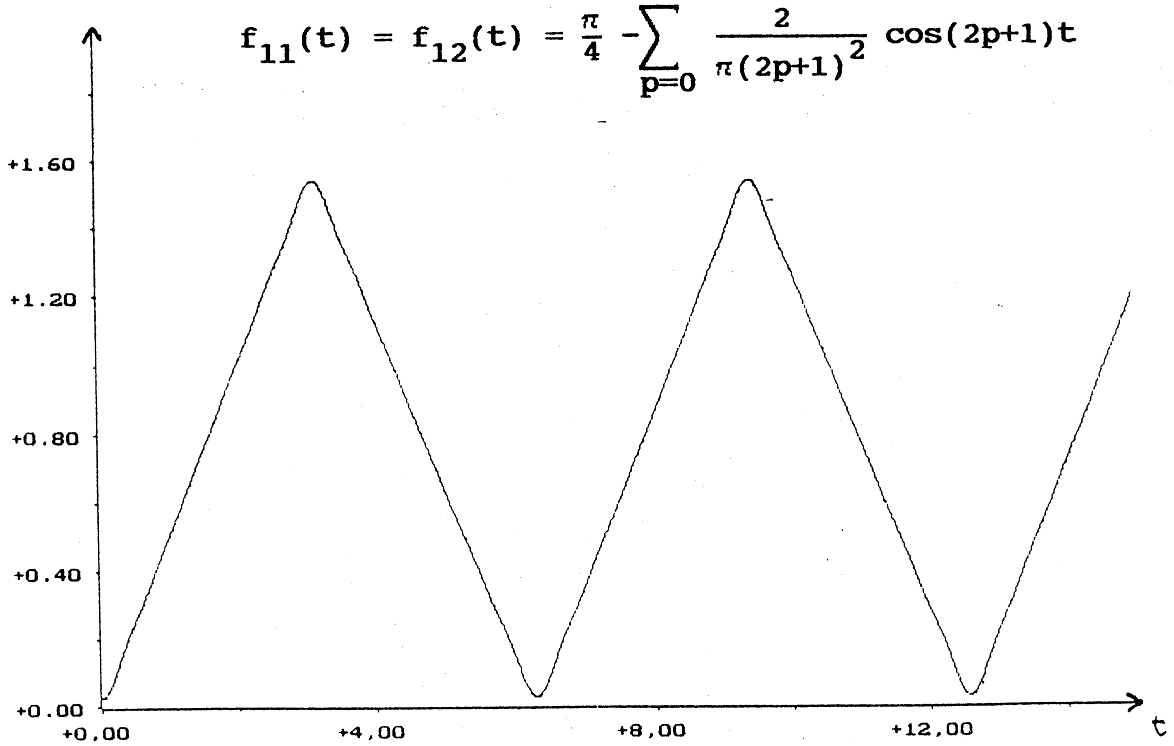
$$f_7(t) = f_8(t) = \frac{\pi}{4} - \sum_{p=0}^{3} \frac{2}{\pi(2p+1)^2} \cos(2p+1)t$$



$$f_9(t) = f_{10}(t) = \frac{\pi}{4} - \sum_{p=0}^{4} \frac{2}{\pi(2p+1)^2} \cos(2p+1)t$$

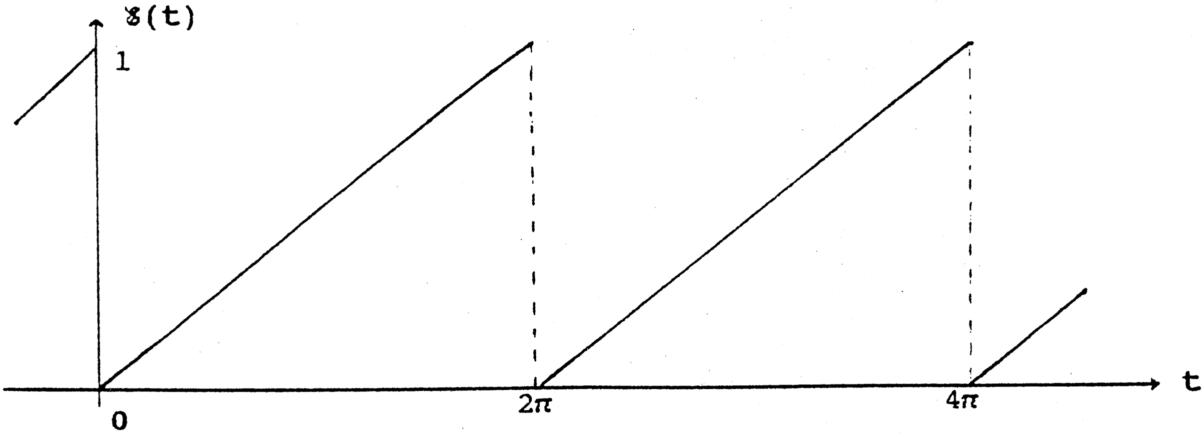


$$f_{11}(t) = f_{12}(t) = \frac{\pi}{4} - \sum_{p=0}^{5} \frac{2}{\pi(2p+1)^2} \cos(2p+1)t$$



On constate que pour **m** *assez grand on approche de manière satisfaisante la fonction* γ.

b) Considérons la fonction périodique γ représentée ci-dessous :



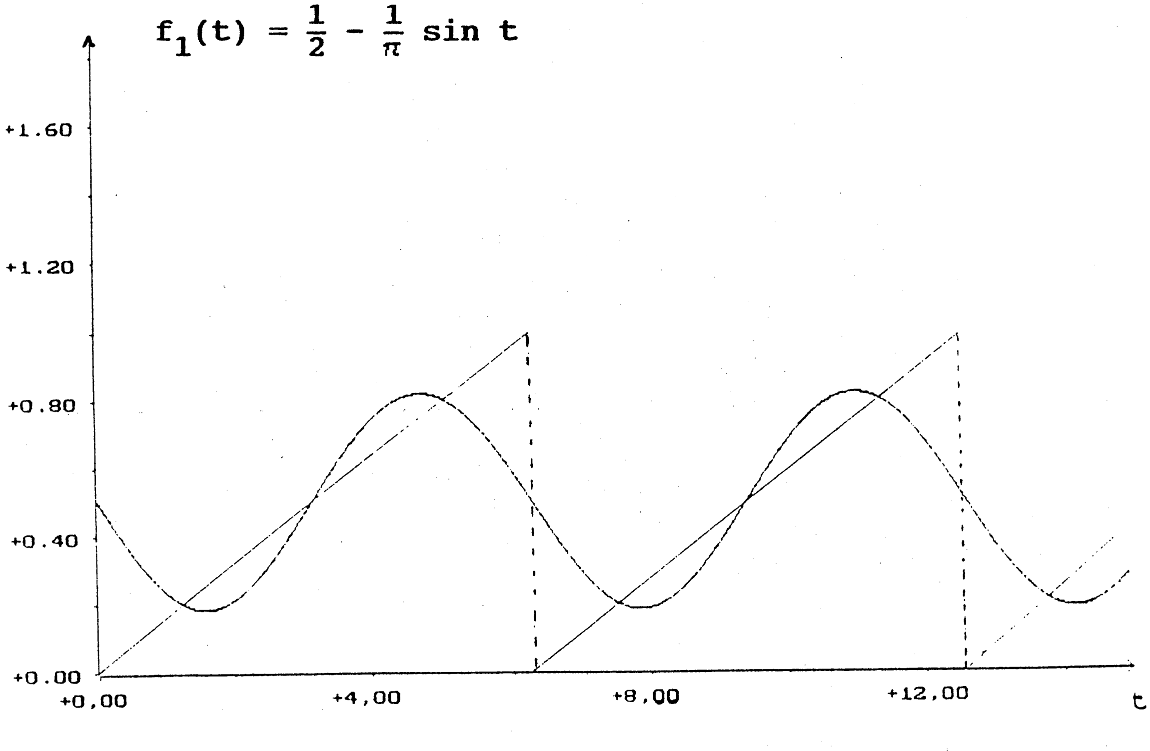
ici $a_0 = \frac{1}{2}$, $a_n = 0$ et $b_n = \frac{-1}{n\pi}$

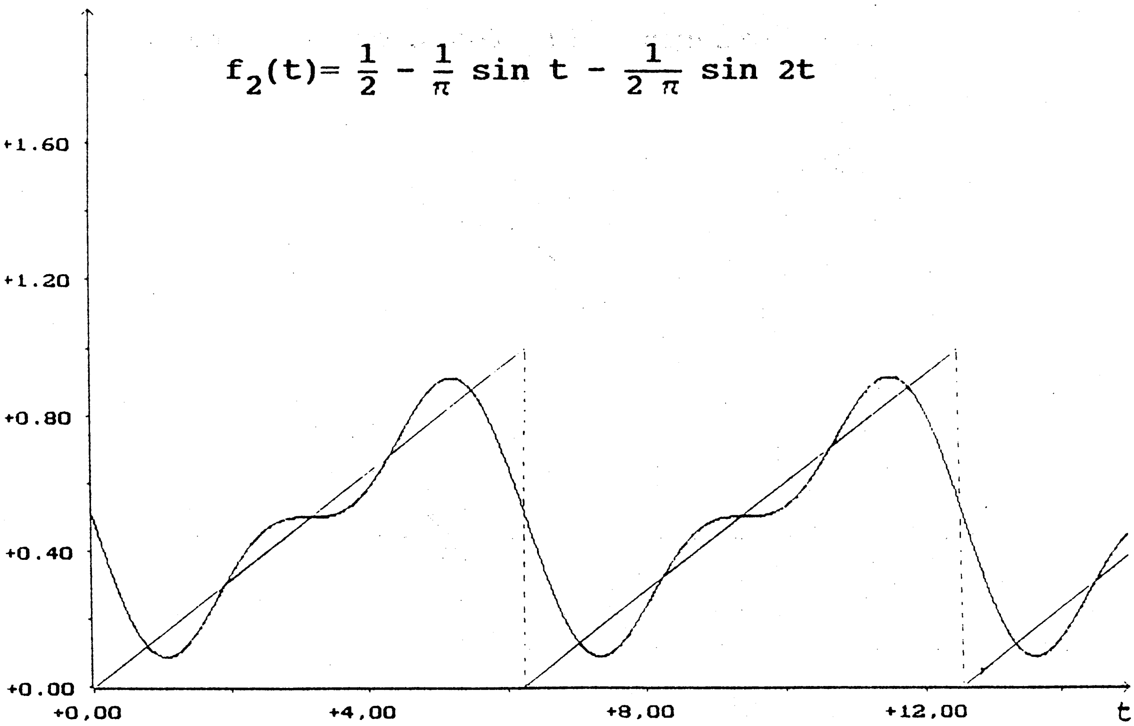
On obtient donc le polynôme trigonométrique :

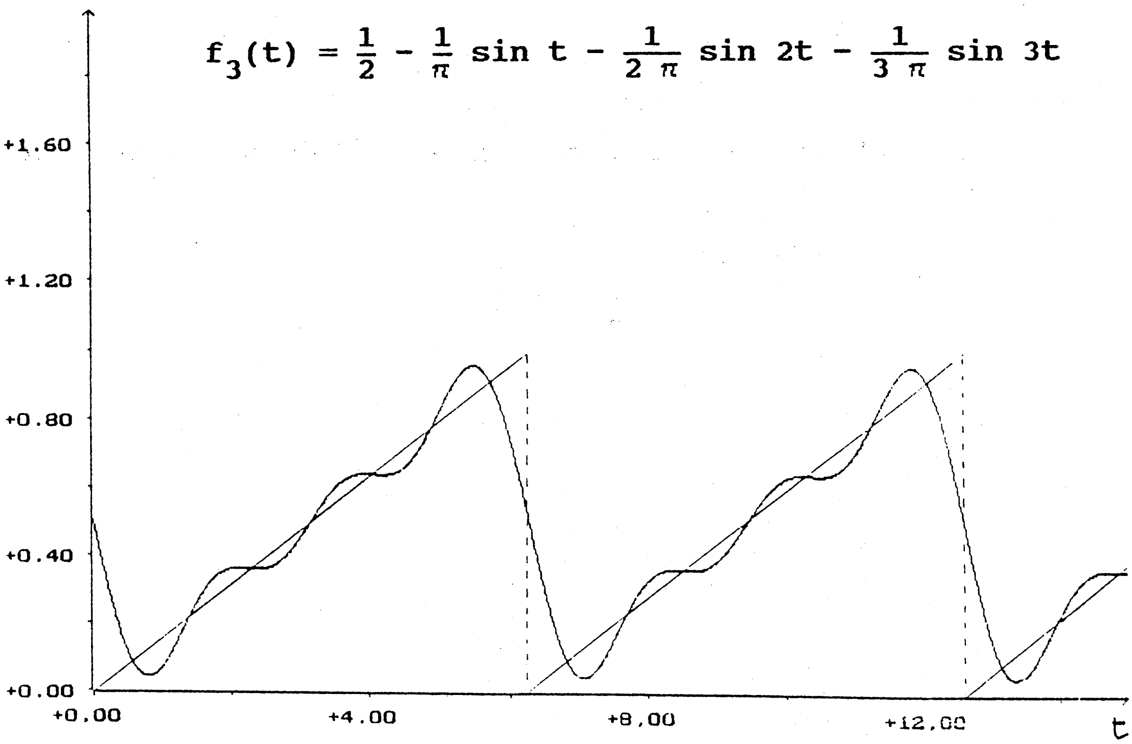
$$f_m(t) = \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n\pi} \sin nt$$

Soient ci dessous les courbes représentant les fonctions f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_{12} :

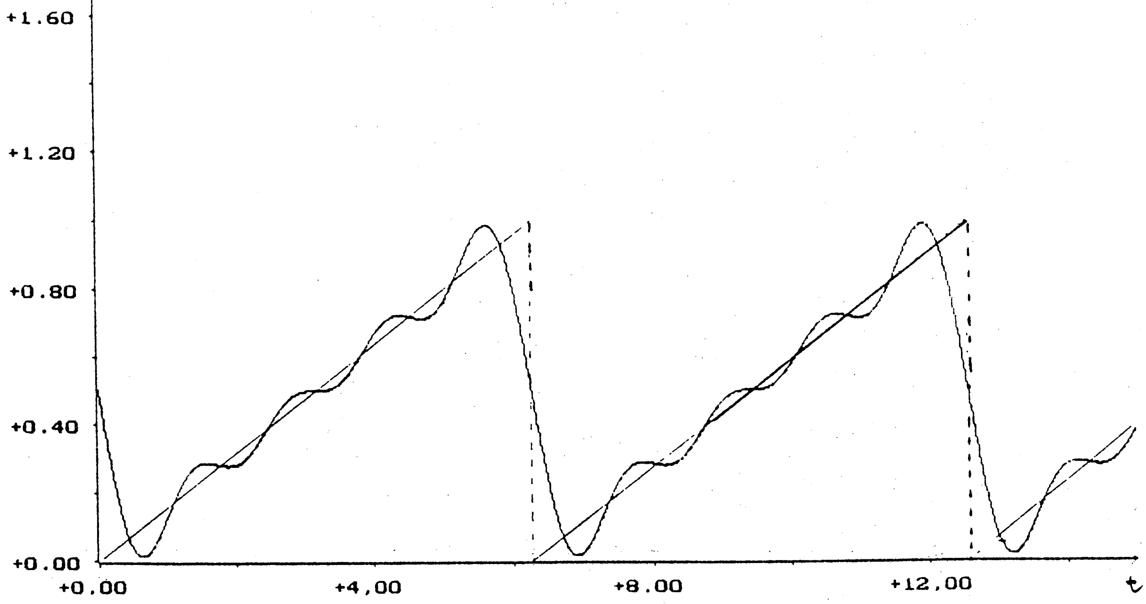
$$f_1(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sin t$$



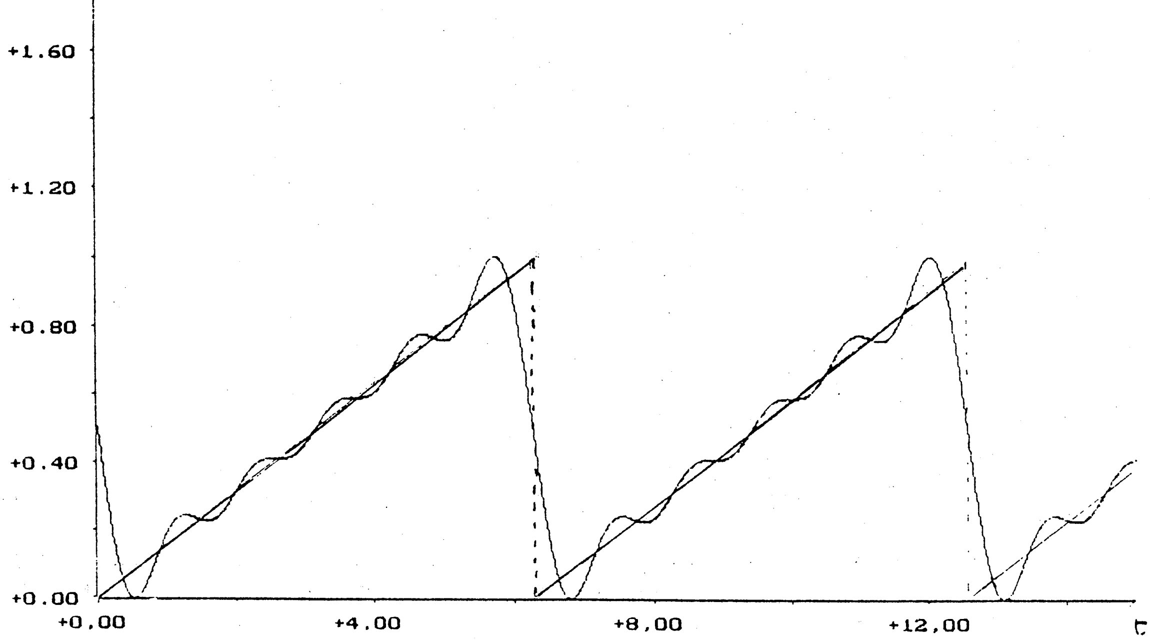

$f_2(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\sin t - \frac{1}{2\pi}\sin 2t$
+1.60
+1.20
+0.80
+0.40
+0.00
+0,00
+4,00
+8,00
+12,00
t


$f_3(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\sin t - \frac{1}{2\pi}\sin 2t - \frac{1}{3\pi}\sin 3t$
+1.60
+1.20
+0.80
+0.40
+0.00
+0.00
+4.00
+8,00
t

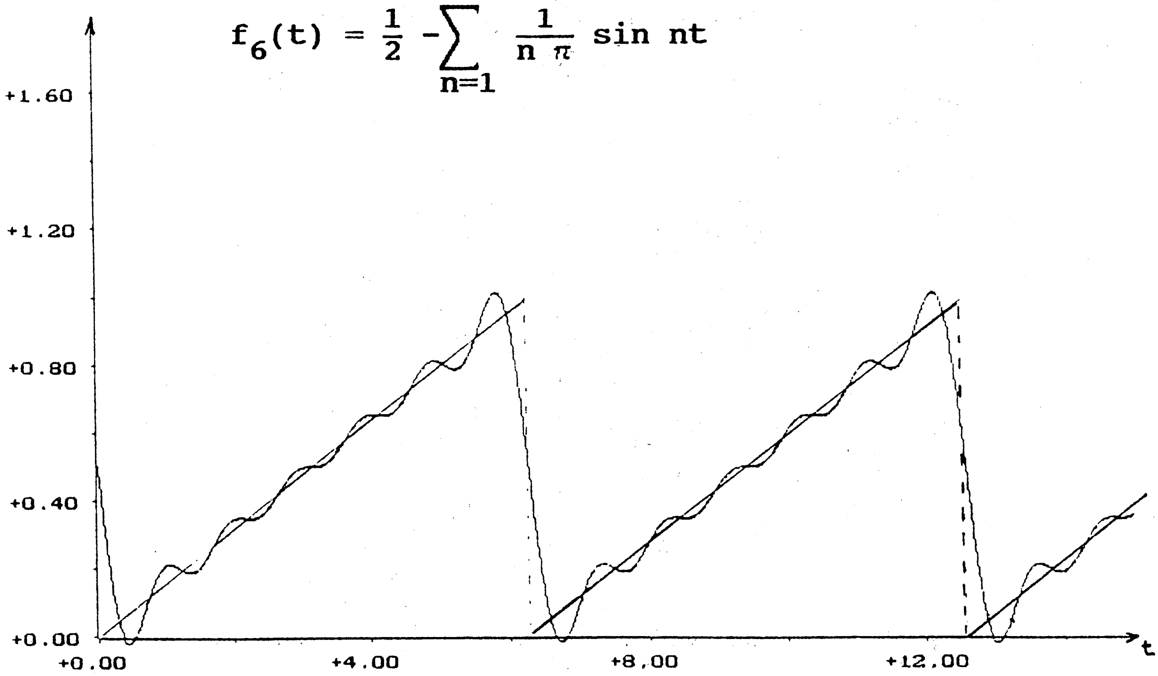
$$f_4(t) = \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{4} \frac{1}{n\pi} \sin nt$$



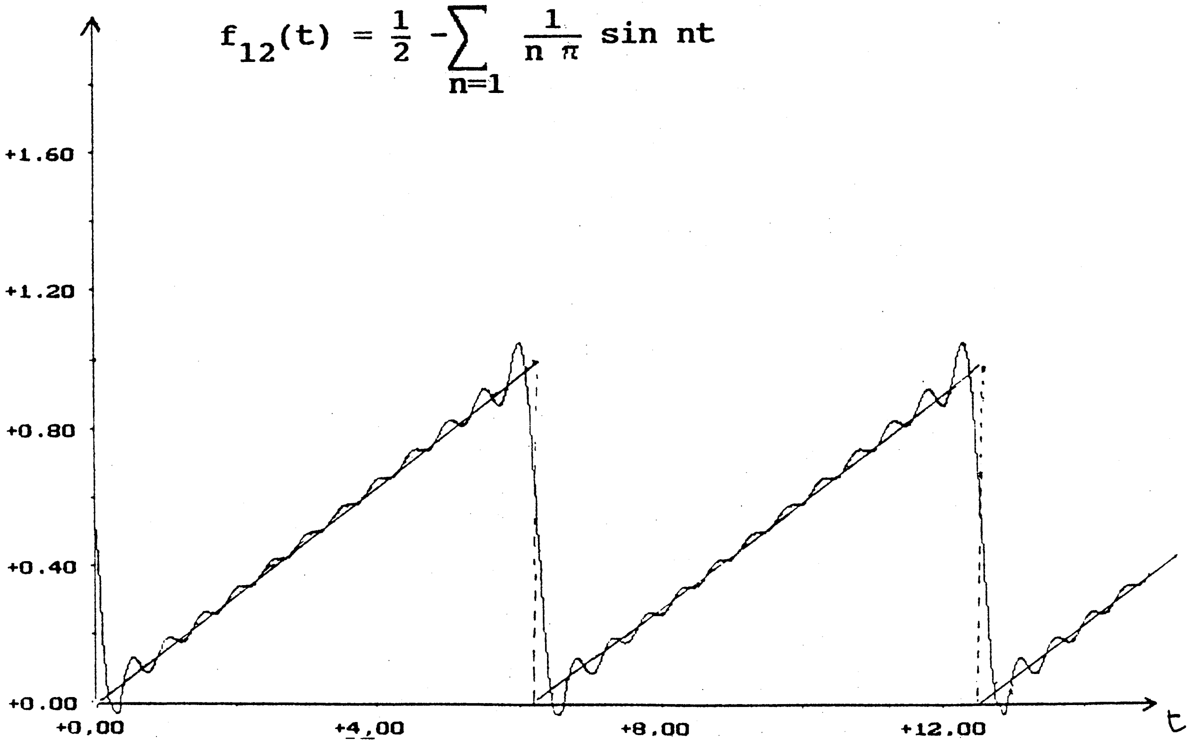
$$f_5(t) = \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{5} \frac{1}{n\pi} \sin nt$$



$$f_6(t) = \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{6} \frac{1}{n\pi} \sin nt$$



$$f_{12}(t) = \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{12} \frac{1}{n\pi} \sin nt$$



On constate dans ce cas aussi que pour m *assez grand on approche de manière satisfaisante, quoique plus lentement, la fonction* γ *sur les intervalles* $]k2\pi,(k+1)2\pi[$ *(sauf pour les valeurs voisines des points de discontinuité).*

2°) Conclusion :

On est donc amené pour approcher les signaux d'entrée γ à utiliser des fonctions f_m définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_m(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{m} \left[a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t \right]$$

et en conséquence à se poser, entre autres, les deux questions suivantes :

- Est ce que pour tout $t \in \mathbb{R}$, la suite $f_m(t)$ converge ?
- Si cette suite converge, converge-t-elle vers $\gamma(t)$?

On rappelle que la suite converge pour t fixé si

$$\lim_{N \to +\infty} \left[a_0 + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t) \right] \text{ existe et est finie.}$$

Exemples :

a) Soit la suite définie par $f_N(t) = 1 + \sum_{n=1}^{N} \cos n\omega t$

pour $t = 0$ $\quad 1 + \sum_{n=1}^{N} \cos n\omega t = 1 + N$

Cette suite ne converge pas pour $t = 0$.

On peut démontrer que cette suite ne converge pour aucune valeur de $t \in \mathbb{R}$.

b) Soit la suite définie par $f_N(t) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \cos nt$

Cette suite converge pour $t \neq 2k\pi$

Si $t = 2\pi$ $\quad f_N(t) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$ ne converge pas.

c) Soit la suite définie par $f_N(t) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} \cos nt$

Cette suite converge pour tout t.

CHAPITRE II

SÉRIE DE FOURIER D'UNE FONCTION PÉRIODIQUE

I- SERIE TRIGONOMETRIQUE :

1°) Définition :

Soit une suite $(C_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ de nombres complexes. On appelle série trigonométrique de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$ associée à la suite $(C_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ la série de terme général $a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t$ avec $n \geq 0$ telle que $a_0 = C_0$ et que pour $n \geq 1$ $a_n = C_n + C_{-n}$ et $b_n = i\,(C_n - C_{-n})$

Nota :

a_n et b_n sont nommés coefficients trigonométriques.

C_n est nommé coefficient exponentiel.

2°) Deux cas de convergence :

Nous n'étudierons pas d'une manière générale la convergence d'une série trigonométrique, signalons cependant quelques résultats que nous admettrons sans démonstration.

a) ■ *Si la série trigonométrique converge pour tout* t, sa limite est une fonction de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

■ *Si la série trigonométrique converge sur* $[\alpha, \alpha+T]$, elle converge pour tout t.

b) *Si la série* $\sum \left(|a_n| + |b_n|\right)$ *converge* alors la série trigonométrique converge pour tout t et sa limite est une fonction continue.

Exemple : la série de termè général $\dfrac{\cos n\omega t + \sin n\omega t}{n^2}$

Remarque : On démontre que :

$$\sum \left[|a_n| + |b_n|\right] \text{ converge} \Leftrightarrow \sum \left[|c_n| + |c_{-n}|\right] \text{ converge}$$

c) *Si pour tout n, $a_n \in \mathbb{R}^+$, $b_n \in \mathbb{R}^+$ et si les suites (a_n) et (b_n) sont décroissantes et convergent vers 0* alors la série trigonométrique converge pour tout $t \neq k\,T$ $(k \in \mathbb{Z})$ et la limite de la série est continue sur chaque intervalle $]\,k\,T\,,\,(k+1)\,T\,[$.

Exemple : la série de terme général $\dfrac{\cos n\omega t}{n}$ converge pour $t \neq k\,T$ (la suite de terme général $a_n = \dfrac{1}{n}$ est décroissante et convergente) et pour $t = k\;T = \dfrac{2\,k\,\pi}{\omega}$ la série a pour terme général $\dfrac{1}{n}$ et diverge.

3°) Remarque :

a) La convergence de la série trigonométrique associée à une suite $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ n'implique pas toujours la convergence de la série $\displaystyle\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n\, e^{in\omega t}$.

En effet, une série $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \alpha_n$ est dite convergente si et seulement si les séries $\displaystyle\sum_{n=0}^{n=+\infty} \alpha_n$ et $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{n=0} \alpha_n$ sont toutes deux convergentes.

b) Par exemple, nous verrons au Chapitre 3 VII- Exercices 2°) b),

que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n\omega t}{n}$ converge pour tout $t \in \mathbb{R}$, et que sa limite est la fonction f de période T définie par :

$$f(t) = -\frac{\pi}{T} t + \frac{\pi}{2} \text{ si } t \in]0,T[\text{ et } f(0) = 0$$

On sait que : $\sum_{n=1}^{+m} \frac{\sin n\omega t}{n} = \sum_{-m}^{+m} c_n \, e^{in\omega t}$ (cf Chapitre 1- IV- 1°))

Ici $a_n = 0$ et $b_n = \frac{1}{n}$, donc :

$c_0 = 0$ et pour $n \geq 1$, $c_n = -\frac{i}{2n}$ et $c_{-n} = \frac{i}{2n}$

$$\sum_{-m}^{+m} \alpha_n = \sum_{-m}^{n=-1} \left(-\frac{i}{2\,n}\right) e^{in\omega t} + \sum_{n=1}^{+m} \left(-\frac{i}{2\,n}\right) e^{in\omega t} \quad \text{avec } m > 0$$

Remarquons que pour $t = 0$

$$\sum_{-m}^{+m} \alpha_n = \sum_{-m}^{n=-1} \left(-\frac{i}{2\,n}\right) + \sum_{n=1}^{+m} \left(-\frac{i}{2\,n}\right)$$

et que les deux séries $\sum_{-\infty}^{n=-1} \left(-\frac{i}{2\,n}\right)$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(-\frac{i}{2\,n}\right)$ sont divergentes.

On a donc un exemple de série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n\omega t}{n}$ convergeant pour tout t alors que la série correspondante $\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n \, e^{in\omega t}$ diverge pour certaines valeurs de t.

On peut donc écrire $\forall$ t $\in \mathbb{R}$, $f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n\omega t}{n}$ *alors que* $f(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n \, e^{in\omega t}$ *n'a pas de sens pour certaines valeurs de* t.

II- COEFFICIENTS DE FOURIER D'UNE FONCTION PERIODIQUE

L'étude faite dans le chapitre 1 nous conduit à la définition suivante :

1°) Définition :

Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, de période T bornée et localement intégrable (les fonctions localement continues par morceaux et de période T sont des cas particuliers de telles fonctions).

cf Tome 1 Transformation de Laplace A- I- 13°)

On appelle suite des coefficients de Fourier de f la suite :

$$(C_n)_{n \in \mathbb{Z}} \quad \text{où} \quad C_n = \frac{1}{T}\int_{(T)} f(t)\, e^{-in\omega t}\, dt \,.$$

$a_0 = C_0$ et pour $n \geq 1$ on obtient :

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{(T)} f(t)\cos n\omega t\, dt \qquad \text{et} \qquad b_n = \frac{2}{T}\int_{(T)} f(t)\sin n\omega t\, dt$$

Si f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ alors a_n et b_n sont réels donc $C_{-n} = \overline{C_n}$

Remarque : Il peut être commode de noter les coefficients de Fourier d'une fonction f : $C_n(f)$, $a_n(f)$, $b_n(f)$.

2°) Théorème :

Si f *et* g *sont deux fonctions de période* T *telles que* $\forall\, t \in [0,T]$, $f(t) = g(t)$ *sauf éventuellement en un nombre fini de valeurs de* t, *alors* f *et* g *ont mêmes coefficients de Fourier.*

3°) Règles pratiques pour le calcul des coefficients :

a) *Les fonctions que l'on intègre* étant de période T, on a pour tout α, $c_n = \frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)\, e^{-in\omega t}\, dt$ et pour $n \geq 1$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t) \cos n\omega t\, dt \quad \text{et} \quad b_n = \frac{2}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t) \sin n\omega t\, dt$$

(cf Chapitre 1- IV- 2°) a))

On peut donc choisir l'intervalle d'intégration de longueur T pour calculer les coefficients de Fourier.

b) *Cas de fonctions paires ou impaires :*

Rappelons que si φ est une fonction paire $\int_{-a}^{+a} \varphi(t)\, dt = 2\int_{0}^{+a} \varphi(t)\, dt$

et si φ est une fonction impaire $\int_{-a}^{+a} \varphi(t)\, dt = 0$

α) Cas d'une fonction paire

Si $n \geq 1$ $\quad a_n = \frac{2}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t) \cos n\omega t\, dt = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos n\omega t\, dt$

en choisissant $\alpha = -T/2$

On obtient $$\boxed{a_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos n\omega t\,dt}$$

car la fonction $t \longmapsto f(t)\cos n\omega t$ est paire.

On démontre de même que $$\boxed{a_0 = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} f(t)\,dt}$$

et puisque la fonction $t \longmapsto f(t)\sin n\omega t$ est impaire $\forall\, n \geq 1$,

$$\boxed{b_n = 0}$$

β) Cas d'une fonction impaire

On démontre de même que :

$\forall\, n \geq 1$ $$\boxed{b_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\sin n\omega t\,dt}$$

$\forall\, n \in \mathbb{N}$ $$\boxed{a_n = 0}$$

c) *Fonction dont le développement est celui d'une fonction paire ou impaire :*

Examinons ce cas sur un exemple.

Soit la fonction f de période T, définie sur $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}[$ par $f(t) = t$.

Cette fonction n'est pas impaire.

En effet, $\forall\ t \in]-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}[$ $f(-t) = -f(t)$ mais $f(-\frac{T}{2}) = f(\frac{T}{2})$

Toutefois (cf 2°) Théorème), ses coefficients de Fourier sont les mêmes, par exemple, que ceux de la fonction g, impaire, de période T, définie par $g(t) = t$ si $t \in]-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}[$ et $g(\frac{T}{2}) = g(-\frac{T}{2}) = 0$.

Il est courant que, comme dans l'exemple ci-dessus, on se ramène au développement d'une fonction paire ou d'une fonction impaire.

d) *Si le développement de* f *n'est ni celui d'une fonction paire, ni celui d'une fonction impaire* il est souvent plus avantageux de calculer C_n pour obtenir a_n et b_n que de calculer directement ces coefficients.

4°) Exercice :

Calculer les coefficients de Fourier exponentiels de la fonction f, périodique, de période 2, définie par $f(t) = t$ si $t \in [0, 1[$ et $f(t) = 1$ si $t \in [1, 2[$. Ecrire la série trigonométrique associée.

III- SERIE DE FOURIER D'UNE FONCTION PERIODIQUE

1°) Définition :

> f de période T étant donnée, la série trigonométrique associée à la suite $(C_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ des coefficients de Fourier de f se nomme *série de Fourier* associée à f.

Remarques :

a) Pour distinguer la fonction f de la série de Fourier qui lui est associée on notera :

$$\left\{f(t)\right\} = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t \right] \quad \text{avec} \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

Cette écriture ne signifie donc pas que, pour $t \in \mathbb{R}$, donné, quelconque, la série $a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t \right]$ converge et à fortiori converge vers f(t). (voir par exemple la fonction définie dans I- 2°)- c))

b) Si f est un polynôme trigonométrique, il y a seulement un nombre fini de coefficients de Fourier non nuls.

2°) Forme de la série de Fourier utilisée en Physique

$$\text{Soit } \left\{f(t)\right\} = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t \right]$$

a) On nomme $u_1 = a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t$: *terme fondamental* et $u_n = a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t$: *$n^{ième}$ harmonique ou harmonique de rang n.*

b) Autre écriture de $u_n = a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t$

α) $a_n \neq 0$ et $b_n \neq 0$

$$u_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \left[\frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \cos n\omega t + \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \sin n\omega t \right]$$

Posons $\rho_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$. Soit Φ_n tel que $\cos \Phi_n = \dfrac{a_n}{\rho_n}$ et $\sin \Phi_n = \dfrac{b_n}{\rho_n}$

alors $u_n = \rho_n \cos (n\omega t - \Phi_n)$

si $a_n > 0$ $\quad \Phi_n = \text{Arctan } \dfrac{b_n}{a_n} + k\, 2\pi$

si $a_n < 0$ $\quad \Phi_n = \text{Arctan } \dfrac{b_n}{a_n} + \pi + k\, 2\pi$

β) $a_n \neq 0$ et $b_n = 0$

si $a_n > 0$, $u_n = a_n \cos n\omega t$, $\rho_n = a_n$ et $\Phi_n = k\, 2\pi$

si $a_n < 0$, $u_n = - a_n \cos (n\omega t-\pi)$, $\rho_n = - a_n$ et $\Phi_n = \pi + k\, 2\pi$

γ) $a_n = 0$ et $b_n \neq 0$

si $b_n > 0$, $u_n = b_n \cos (n\omega t-\frac{\pi}{2})$, $\rho_n = b_n$ et $\Phi_n = \frac{\pi}{2} + k\, 2\pi$

si $b_n < 0$, $u_n = - b_n \cos (n\omega t-(-\frac{\pi}{2}))$, $\rho_n = - b_n$ et $\Phi_n = -\frac{\pi}{2} + k\, 2\pi$

δ) $a_n = 0$ et $b_n = 0$

$u_n = 0$, $\rho_n = 0$ et Φ_n n'est pas défini

Pour une description "Physique" du signal on préfère l'écriture
$u_n = \rho_n \cos (n\omega t - \Phi_n)$

ρ_n (amplitude maximum du terme de rang n) et Φ_n(phase en zéro du terme de rang n) sont utilisés pour reconstituer le signal.

c) La fonction : $t \longmapsto \rho_n \cos (n\omega t - \Phi_n)$ a pour "amplitude" ρ_n, période $\frac{2\pi}{\omega}$, pulsation ω, phase Φ_n .

On pourra écrire :

$$\boxed{\left\{f(t)\right\} = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \rho_n \cos (n\omega t - \Phi_n)}$$

3°) fonction continûment dérivable sur l'intervalle [a,b]

a) définition

On dit que f est continûment dérivable sur [a,b] si et seulement si les conditions suivantes sont remplies :

- f admet en tout $t_0 \in]a,b[$ un nombre dérivé noté $f'(t_0)$
- f admet en a un nombre dérivé à droite noté $f'(a)$
- f admet en b un nombre dérivé à gauche noté $f'(b)$
- la fonction f' ainsi définie sur $[a,b]$ est continue sur $[a,b]$

Nota : Si f est continûment dérivable sur [a,b], on dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur [a,b].

b) Contre exemple :

Soit f définie par $f(t) = t^2 \sin \frac{1}{t}$ si $t \neq 0$ et $f(0) = 0$

$\lim\limits_{t \to 0} \frac{f(t)}{t} = \lim\limits_{t \to 0} t \sin \frac{1}{t} = 0$ donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$

Si $t \neq 0$ $\qquad f'(t) = 2\, t \sin \frac{1}{t} - \cos \frac{1}{t}$

f est donc dérivable sur [-1,1] mais pas continûment dérivable.

En effet f' est définie sur [-1,1] par :

$f'(0) = 0$ et $f'(t) = 2\, t \sin \frac{1}{t} - \cos \frac{1}{t}$ si $t \neq 0$ donc f' n'est pas continue en 0 car $\lim\limits_{t \to 0} (2\, t \sin \frac{1}{t} - \cos \frac{1}{t})$ n'existe pas.

4°) Une règle de convergence : *Conditions de Dirichlet*

f de période T étant donnée, la série de Fourier associée à f

converge-t-elle en t_0 ? Si cette convergence est vraie sur $\mathbb{R}$, la limite de la série est elle égale à f ?

a) Conditions de Dirichlet

> Nous dirons que f, fonction périodique, de période T vérifie les conditions de Dirichlet si et seulement
>
> si f est une fonction continûment dérivable sur $[0,T]$
>
> ou
>
> s'il existe un nombre fini de valeurs $t_0, \dots, t_k, \dots, t_n$ de l'intervalle $[0,T]$ telles que $0 = t_0 < \dots < t_k < \dots < t_n = T$ et que les restrictions $f_1, \dots, f_k, \dots, f_n$ de f à chaque intervalle ouvert $]0,t_1[, \dots,]t_{k-1},t_k[, \dots,]t_{n-1},T[$ sont continûment dérivables et peuvent être prolongées par continuité, respectivement sur chaque intervalle fermé $[0,t_1], \dots, [t_{k-1},t_k] \dots, [t_{n-1}, T]$ par une fonction $g_1, \dots, g_k, \dots g_n$ continûment dérivable sur l'intervalle concerné.

Si f vérifie les conditions de Dirichlet on dit aussi que f est de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux sur $[0, T]$.

b) Remarque

g_k prolongement sur $[t_{k-1},t_k]$ de f_k restriction de f à $]t_{k-1},t_k[$ est définie par $g_k(t_{k-1}) = f(t_{k-1}^+)$ et $g_k(t_k) = f(t_k^-)$

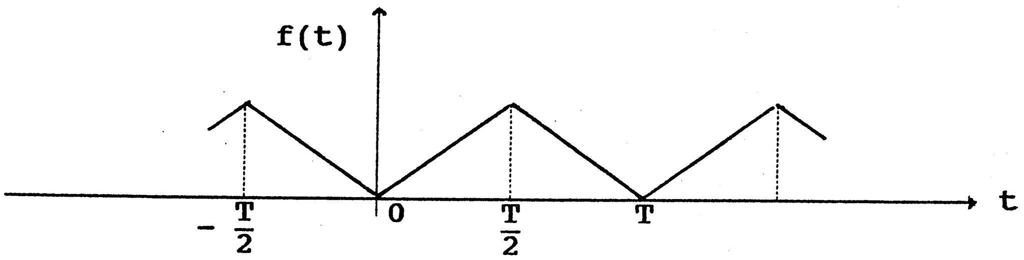
c) Exemples

α) Soit f définie sur $\mathbb{R}$, par $f(t) = t^3 - t$
f est continûment dérivable sur $[-1,1]$. Donc f vérifie les conditions de Dirichlet.

β) Soit f périodique de période 1 définie par $f(t) = t$ si $t \in [0,1[$ et f_1 la restriction de f à $]0,1[$.

g_1 définie sur $[0,1]$ par $g_1(t) = t$ prolonge par continuité f_1 sur $[0,1]$ et est continûment dérivable sur $[0,1]$. Donc f vérifie les conditions de Dirichlet.

γ) Soit f de période T définie par $f(t) = t$ si $t \in [0,\frac{T}{2}[$ et $f(t) = -t + T$ si $t \in [\frac{T}{2},T[$.



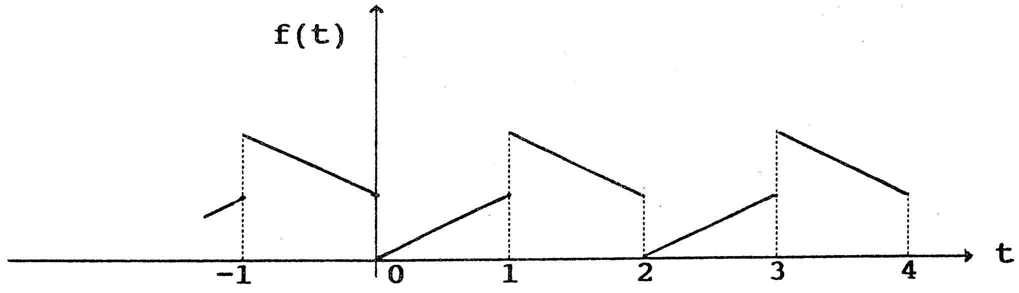
Ici, on considérera les fonctions g_1 et g_2 définies par :

$\forall\, t \in [0,\frac{T}{2}]\quad g_1(t) = t \quad ; \quad \forall t \in [\frac{T}{2},T]\quad g_2(t) = -t + T$

pour vérifier que f remplit les conditions de Dirichlet

δ) Soit f de période 2 définie par :

$f(t) = t$ si $t \in]0,1[$ et $f(t) = -t + 3$ si $t \in]1,2[$



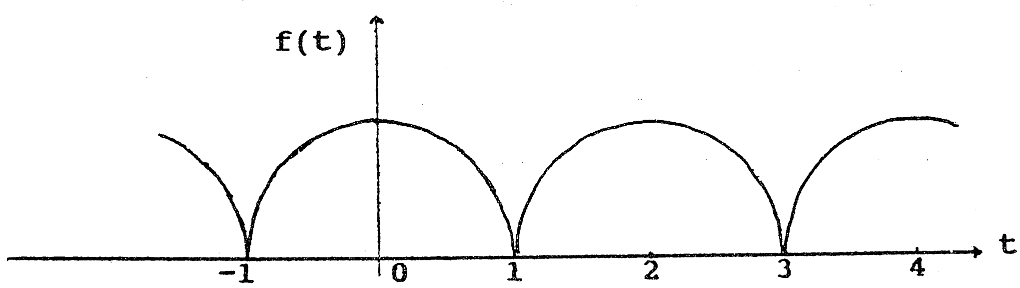
Remarquons que f n'est définie ni en 1, ni en 2, mais en définissant g_1 et g_2 par :

$\forall\ t \in [0,1] \quad g_1(t) = t \quad ; \quad \forall\ t \in [1,2] \quad g_2(t) = 3 - t$

On vérifie que f remplit les conditions de Dirichlet.

ε) Soit f de période 2 définie sur [-1,1] par :

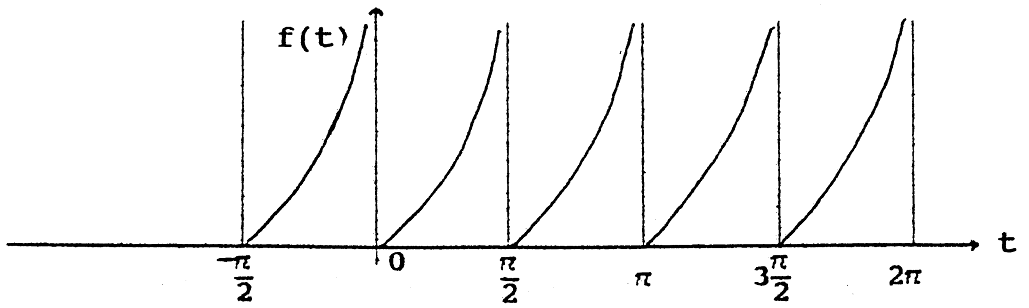
$f(t) = \sqrt{1-t^2}$



g_1 définie par $g_1(t) = \sqrt{1-t^2}$ si $t \in [0,1]$ n'est pas dérivable à gauche en 1 donc f ne remplit pas les conditions de Dirichlet.

φ) Soit f de période $\frac{\pi}{2}$ et définie sur $[0,\frac{\pi}{2}[$ par

$f(t) = \tan t$



f_1 définie sur $]0,\frac{\pi}{2}[$ par $f_1(t) = \tan t$ ne peut être prolongée par continuité sur $[0,\frac{\pi}{2}]$ car $\lim\limits_{t \overset{<}{\to} \frac{\pi}{2}} \tan t = +\infty$.

Donc f ne remplit pas les conditions de Dirichlet.

d) Théorème admis :

> Si la fonction f périodique de période T vérifie les conditions de Dirichlet alors la série de Fourier associée à f converge pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$ vers $\dfrac{f(t_0^-) + f(t_0^+)}{2}$

Nota : Le cas des fonctions vérifiant les conditions de Dirichlet est le seul cas intéressant en Physique jusqu'au niveau B.T.S. (Cf Tome 1)

e) Conséquence de ce Théorème :

α) En tout t_0 où f est continue

$$f(t_0) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[a_n \cos n\omega t_0 + b_n \sin n\omega t_0 \right] \text{ donc}$$

β) si f est continue sur ℝ alors ∀ t ∈ ℝ,

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t \right]$$

γ) ∀ t ∈ ℝ,

$$\frac{f(t^-) + f(t^+)}{2} = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t \right]$$

CHAPITRE III

QUELQUES PROPRIÉTÉS DES SÉRIES DE FOURIER ET RÈGLES PRATIQUES

I- SOMME D'UNE FONCTION PERIODIQUE ET D'UNE CONSTANTE

1°) Théorème 1

Soient la fonction f de période T dont le développement en série de Fourier est :

$$\{f(t)\} = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t \right]$$

et la fonction g définie par g(t) = f(t) + K

$$a_0(g) = \frac{1}{T}\int_0^T (f(t) + K)\, dt = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\, dt + \frac{1}{T}\int_0^T K\, dt = a_0(f) + K$$

$$a_n(g) = \frac{2}{T}\int_0^T (f(t) + K) \cos n\omega t\, dt$$

$$a_n(g) = \frac{2}{T}\int_0^T f(t) \cos n\omega t\, dt + \frac{2}{T}\int_0^T K \cos n\omega t\, dt = a_n(f)$$

car $\int_0^T \cos n\omega t\, dt = 0$

On montre de même que $b_n(f) = b_n(g)$

Donc le développement en série de Fourier de la fonction g est :

$$\{g(t)\} = K + a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t \right]$$

2°) Exercice

Donner le développement en série de Fourier de la fonction f

périodique, de période T tel que $\begin{cases} f(t) = \frac{2}{3} \text{ si } t \in [\ 0\ ,\ \frac{T}{2}\ [\\ f(t) = -\ \frac{1}{3} \text{ si } t \in [\ \frac{T}{2}\ ,\ T\ [\end{cases}$

en utilisant le développement en série de Fourier d'une fonction impaire.

II- EFFET D'UNE "TRANSLATION" SUR LA VARIABLE (Phénomène du retard)

1°) Approche du problème

exercice :

■ Soit la fonction f, paire, de période 2π, telle que :

$$\begin{cases} f(t) = 1 \text{ si } t \in [0 , \frac{\pi}{2}[\\ f(t) = 0 \text{ si } t \in]\frac{\pi}{2} , \pi] \end{cases}$$

et la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(t) = f(t - \frac{\pi}{2})$

a) Représenter graphiquement f et vérifier que cette fonction remplit les conditions de Dirichlet.

b) Montrer que le développement en série de Fourier de f est : $\left\{f(t)\right\} = \frac{1}{2} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{2}{(2p+1)\pi} (-1)^p \cos(2p+1)t$

b) Si $\left\{g(t)\right\} = \frac{1}{2} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{2}{(2p+1)\pi} (-1)^p \cos\left[(2p+1)(t - \frac{\pi}{2})\right]$

en remarquant que $\cos\left[(2p+1)(t - \frac{\pi}{2})\right] = (-1)^p \sin(2p+1)t$

on obtient $\left\{g(t)\right\} = \frac{1}{2} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{2}{(2p+1)\pi} \sin(2p+1)t$

Représenter graphiquement g et par calcul direct des coefficients montrer que le développement obtenu ci-dessus est bien le développement en série de Fourier de g.

2°) Cas général et théorème :

■ Nous allons montrer que comme dans l'exercice du a) pour obtenir le développement en série de Fourier de $t \longmapsto f(t - \varphi)$ on peut remplacer dans le développement de f, t par $(t - \varphi)$.

a) Soit f une fonction de période T vérifiant les conditions de Dirichlet et g la fonction définie par $g(t) = f(t - \varphi)$, peut-on déduire les coefficients de Fourier de g de ceux de f ?

$$C_n(g) = \frac{1}{T}\int_0^T g(t)\, e^{-in\omega t}\, dt = \frac{1}{T}\int_0^T f(t - \varphi)\, e^{-in\omega t}\, dt .$$

Faisons le changement de variable $u = t - \varphi$

$$C_n(g) = \frac{1}{T}\int_{-\varphi}^{T-\varphi} f(u)\, e^{-in\omega(u + \varphi)}\, du = e^{-in\omega\varphi}\ C_n(f)$$

donc $a_0\ (g) = C_0(g) = C_0(f) = a_0\ (f)$

$$\forall\, n \geq 1 \quad a_n(g) = C_n(g) + C_{-n}(g) = e^{-in\omega\varphi}\, C_n(f) + e^{+in\omega\varphi}\, C_{-n}(f)$$

$$a_n(g) = e^{-in\omega\varphi}\left[\frac{a_n(f) - i\, b_n(f)}{2}\right] + e^{+in\omega\varphi}\left[\frac{a_n(f) + i\, b_n(f)}{2}\right]$$

soit $a_n(g) = a_n(f) \left[\dfrac{e^{+in\omega\varphi} + e^{-in\omega\varphi}}{2} \right] - b_n(f) \left[\dfrac{e^{+in\omega\varphi} - e^{-in\omega\varphi}}{2i} \right]$

d'où $\quad a_n(g) = a_n(f) \cos n\omega\varphi - b_n(f) \sin n\omega\varphi$

On démontre de même que : $b_n(g) = b_n(f) \cos n\omega\varphi + a_n(f) \sin n\omega\varphi$

b) Théorème 2

> Soient f une fonction de période $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$, vérifiant les conditions de Dirichlet et g la fonction : $t \longrightarrow f(t-\varphi)$, $\varphi \in \mathbb{R}$.
>
> Les coefficients de Fourier de g sont donnés par :
>
> $\forall n \in \mathbb{Z} \qquad C_n(g) = C_n(f)\, e^{-in\omega\varphi}$
>
> $a_0(g) = a_0(f)$
>
> $\forall n \geq 1 \qquad a_n(g) = a_n(f) \cos n\omega\varphi - b_n(f) \sin n\omega\varphi$
>
> $b_n(g) = b_n(f) \cos n\omega\varphi + a_n(f) \sin n\omega\varphi$

3°) Règle pratique

Soit $A = a_n(g) \cos n\omega t + b_n(g) \sin n\omega t$ d'où

$$A = \left[a_n(f) \cos n\omega\varphi - b_n(f) \sin n\omega\varphi\right] \cos n\omega t + \left[b_n(f) \cos n\omega\varphi + a_n(f) \sin n\omega\varphi\right] \sin n\omega t$$

donc $a_n(f) \cos n\omega(t-\varphi) + b_n(f) \sin n\omega(t-\varphi)$
$= a_n(g) \cos n\omega t + b_n(g) \sin n\omega t$

On en déduit la règle suivante :

Soit $a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t\right]$ la série de Fourier associée à f, alors la série de Fourier associée à g avec $g(t) = f(t - \varphi)$ est obtenue en développant les termes $a_n\cos n\omega(t - \varphi) + b_n\sin n\omega(t - \varphi)$ puis en regroupant les coefficients de cos $n\omega t$ et sin $n\omega t$ dans

$$a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[a_n\cos n\omega(t-\varphi) + b_n\sin n\omega(t-\varphi)\right]$$

4°) Exemple

Soit la fonction f définie au a) et la fonction f_1 périodique de période 2π définie par $\begin{cases} f_1(t) = \frac{1}{3} \text{ si } t \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right[\\ f_1(t) = -\frac{2}{3} \text{ si } t \in \left]\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right[\end{cases}$

On remarque que $f_1(t) = -\frac{2}{3} + f(t - \frac{\pi}{4})$, pour obtenir le développement en série de Fourier de f_1 on peut:

- partir de :

$$\left\{f(t)\right\} = \frac{1}{2} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{2}{(2p+1)\pi} (-1)^p \cos(2p+1)t \text{ d'où}$$

$$\left\{f_1(t)\right\} = -\frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{2}{(2p+1)\pi} (-1)^p\cos\left[(2p+1)(t - \frac{\pi}{4})\right]$$

donc $a_0(f_1) = -\frac{1}{6}$, $a_{2p}(f_1) = b_{2p}(f_1) = 0$,

$$a_{2p+1} = \frac{2(-1)^p}{(2p+1)\pi} \cos(2p+1)\frac{\pi}{4} \text{ et } b_{2p+1} = \frac{2(-1)^p}{(2p+1)\pi} \sin(2p+1)\frac{\pi}{4}$$

- partir de :

$$\left\{f(t)\right\} = \frac{1}{2} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{2}{(2p+1)\pi} \cos\left[(2p+1)t + p\pi\right]$$

($\rho_{2p+1}(f) = \frac{2}{(2p+1)\pi}$, $\Phi_{2p+1}(f) = -p\,\pi$ et $\rho_{2p}(f) = 0$)

d'où

$$\left\{f_1(t)\right\} = -\frac{1}{6} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{2}{(2p+1)\pi} \cos\left[(2p+1)(t - \frac{\pi}{4}) + p\pi\right]$$

$$\left\{f_1(t)\right\} = -\frac{1}{6} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{2}{(2p+1)\pi} \cos\left[(2p+1)t - (\frac{\pi}{4} - p\,\frac{\pi}{2})\right]$$

donc $\rho_{2p+1}(f_1) = \frac{2}{(2p+1)\pi}$, $\Phi_{2p+1}(f_1) = \frac{\pi}{4} - p\,\frac{\pi}{2}$ et $\rho_{2p}(f_1) = 0$

III- EFFET D'UN CHANGEMENT D'ECHELLE SUR LA VARIABLE

1°) Approche du problème :

Exercice :

■ Soit la fonction g_2 définie sur $\mathbb{R}$ par $g_2(t) = g(2t)$, la fonction g étant celle définie au II- 1°)

a) Représenter graphiquement la fonction g_2.

b) On a obtenu $\left\{g(t)\right\} = \frac{1}{2} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{2}{(2p+1)\pi} \sin[(2p+1)t]$

A-t-on $\left\{g_2(t)\right\} = \frac{1}{2} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{2}{(2p+1)\pi} \sin[(2p+1)2t]$?

Calculer directement le coefficient c_n de g_2 et constater que le développement ci-dessus est bien le développement en série de Fourier de g_2.

■ On constate que pour obtenir le développement en série de Fourier de g_2 on peut remplacer dans le développement de g, t par 2t.

Nous allons montrer que cette méthode peut toujours s'appliquer pour obtenir le développement en série de Fourier de $f_k : t \longmapsto f(kt)$ à partir de celui de f.

2°) Cas général et théorème :

a) Soit la fonction f_k définie par $f_k(t) = f(kt)$ où f de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$ vérifie les conditions de Dirichlet.

$k \in \mathbb{R}^*$, f_k est de période $T' = \frac{T}{|k|} = \frac{2\pi}{\omega'}$ et $\omega' = \frac{2\pi}{T}|k| = |k|\,\omega$

Remarquons notamment que si f est de période 2π alors si $k = \frac{2\pi}{T'}$, f_k est de période T'.

b) Calculons les coefficients de Fourier de f_k :

$$C_n(f_k) = \frac{|k|}{T} \int_0^{\frac{T}{|k|}} f(kt)\, e^{-in|k|\omega t}\, dt$$

Faisons le changement de variable $u = k\,t$, $d\,t = \frac{d\,u}{k}$

$$C_n(f_k) = \frac{\varepsilon}{T} \int_0^{\varepsilon T} f(u)\, e^{-in\varepsilon\omega u}\, du \qquad \text{avec } \varepsilon = \frac{|k|}{k}$$

Si $k > 0$ alors $\varepsilon = +1$ donc $C_n(f_k) = C_n(f)$

De même on montre que $C_{-n}(f_k) = C_{-n}(f)$

Si $k < 0$ alors $\varepsilon = -1$ et

$$C_n(f_k) = -\frac{1}{T} \int_0^{-T} f(u)\, e^{in\omega u}\, du = \frac{1}{T} \int_{-T}^{0} f(u)\, e^{in\omega u}\, du$$

$$C_n(f_k) = \frac{1}{T}\int_0^T f(u)\, e^{in\omega u}\, du = C_{-n}(f)$$

De même on montre que $C_{-n}(f_k) = C_n(f)$

c) On obtient donc $a_0(f_k) = C_0(f_k) = C_0(f) = a_0(f)$ et

$$a_n(f_k) = C_n(f_k) + C_{-n}(f_k) = a_n(f)$$

$$b_n(f_k) = i\,(C_n(f_k) - C_{-n}(f_k)) = \varepsilon\, b_n(f)$$

d) *Théorème 4*

Soit f une fonction de période T , vérifiant les conditions de Dirichlet et la fonction h de période $\frac{T}{|k|}$ définie par $f_k(t) = f(kt)$ avec $k \in \mathbb{R}^*$, alors les coefficients de Fourier de h sont :

$$a_n(f_k) = a_n(f) \qquad \text{si } n \geq 0$$

$$b_n(f_k) = \varepsilon\, b_n(f) \qquad \text{si } n \geq 1 \quad \text{avec } \varepsilon = \frac{k}{|k|}$$

3°) Règle pratique :

Soit $a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t\right]$ la série de Fourier associée à f, alors la série de Fourier associée à f_k avec $f_k(t) = f(kt)$ est : $a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[a_n \cos n\omega kt + b_n \sin n\omega kt \right]$

En effet $\quad a_n(f_k) \cos n\omega|k|t + b_n(f_k) \sin n\omega|k|t =$

$$a_n(f) \cos n\omega kt + \varepsilon\, b_n(f) \sin n\omega\varepsilon kt$$

Si $\varepsilon = 1$, $\quad \varepsilon\, b_n(f) \sin n\omega\varepsilon kt = b_n(f) \sin n\omega kt$

Si $\varepsilon = -1$, $\quad \varepsilon\, b_n(f) \sin n\omega\varepsilon kt = -\, b_n(f) \sin n\omega(-k)t$

$$= b_n(f) \sin n\omega kt$$

IV- LINEARITE

1°) Développement en série de Fourier de $\lambda f + \mu g$ dans le cas où f et g sont deux fonctions périodiques de même période T.

Il est évident que $\lambda f + \mu g$ a pour période T et que si f et g vérifient les conditions de Dirichlet, $\lambda f + \mu g$ vérifie aussi les conditions de Dirichlet.

$n \in \mathbb{N}$, $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall \mu \in \mathbb{R}$,

$$\int_0^T (\lambda f + \mu g)(t)\, e^{-in\omega t}\, dt = \lambda \int_0^T f(t)\, e^{-in\omega t}\, dt + \mu \int_0^T g(t)\, e^{-in\omega t}\, dt$$

d'où
$$\boxed{C_n(\lambda f + \mu g) = \lambda C_n(f) + \mu C_n(g)}$$

On en déduit que :
$$\boxed{\begin{array}{l} a_n(\lambda f + \mu g) = \lambda a_n(f) + \mu a_n(g) \\ b_n(\lambda f + \mu g) = \lambda b_n(f) + \mu b_n(g) \end{array}}$$

Exemple :

Les fonctions f et g sont celles définies au **II- 1°)** , elles ont pour période 2π, donc $\frac{1}{2} f + 2 g$ est périodique de période 2π.

On a vu que :

$$a_0(f) = \frac{1}{2} \,,\ a_{2p}(f) = 0 \,,\ a_{2p+1}(f) = \frac{2}{(2p+1)\pi}(-1)^p \,,\ b_n(f) = 0$$

$$a_0(g) = \frac{1}{2} \ , \ a_n(g) = 0 \ , \ b_{2p}(g) = 0 \ , \ b_{2p+1}(f) = \frac{2}{(2p+1)\pi}$$

d'où : $a_0(\frac{1}{2} f + 2 g) = \frac{1}{2} a_0(f) + 2 a_0(g) = \frac{3}{4}$

$$a_{2p}(\frac{1}{2} f + 2 g) = \frac{1}{2} a_{2p}(f) + 2 a_{2p}(g) = 0$$

$$a_{2p+1}(\frac{1}{2} f + 2 g) = \frac{1}{2} a_{2p+1}(f) + 2 a_{2p+1}(g) = \frac{1}{(2p+1)\pi} (-1)^p$$

$$b_{2p}(\frac{1}{2} f + 2 g) = \frac{1}{2} b_{2p}(f) + 2 b_{2p}(g) = 0$$

$$b_{2p+1}(\frac{1}{2} f + 2 g) = \frac{1}{2} b_{2p+1}(f) + 2 b_{2p+1}(g) = \frac{4}{(2p+1)\pi}$$

et on obtient :

$$\left\{(\tfrac{1}{2}f+2g)(t)\right\} = \frac{3}{4} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)\pi} \left[(-1)^p \cos(2p+1)t + 4 \sin(2p+1)t\right]$$

2°) Calcul préliminaire :

Soit f une fonction de période $T' = \frac{2\pi}{\omega'}$ et $T = k\,T'$, $k \in \mathbb{N}^*$, posons $T = \frac{2\pi}{\omega}$ d'où $\omega' = k\,\omega$.

Nous allons calculer $\boxed{I = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)\, e^{-in\omega t}\, dt, \qquad n \in \mathbb{N}}$

$$I = \frac{1}{k\,T'}\int_0^{kT'} f(t)\, e^{-in\frac{\omega'}{k}t}\, dt = \frac{1}{k\,T'}\sum_{p=0}^{k-1}\int_{pT'}^{(p+1)T'} f(t)\, e^{-in\frac{\omega'}{k}t}\, dt$$

Faisons le changement de variable $t = u + p\,T'$, il vient :

$$I = \frac{1}{k\,T'}\sum_{p=0}^{k-1}\int_0^{T'} f(u)\, e^{-in\frac{\omega'}{k}(u + pT')}\, du$$

<u>1^{er}cas : *n est multiple de k, n pouvant être nul*</u>

Posons $n = \alpha\, k$, $\alpha \in \mathbb{N}$

$-in\,\frac{\omega'}{k}(u + pT') = -i\alpha\omega' u - i2\alpha p\pi$, or $e^{-i2\alpha p\pi} = 1$ donc

$$f(u)\, e^{-in\frac{\omega'}{k}(u + pT')} = f(u)\, e^{-in\frac{\omega'}{k}u}$$

d'où $I = \frac{1}{k\,T'}\, k \int_0^{T'} f(u)\, e^{-in\frac{\omega'}{k}u}\, du$

$$\boxed{I = \frac{1}{T'}\int_0^{T'} f(u)\, e^{-i\alpha\omega' u}\, du}$$

<u>2^{eme}cas : *n n'est pas un multiple de k*</u>

$$I = \frac{1}{k\,T'}\int_0^{T'} f(u)\, e^{-in\frac{\omega'}{k}u}\left[\sum_{p=0}^{k-1} e^{-in\frac{\omega'}{k}pT'}\right] du$$

$$\text{Soit } S_k = \sum_{p=0}^{k-1} e^{-in \frac{\omega'}{k} pT'} = \sum_{p=0}^{k-1} e^{-in \frac{1}{k} 2p\pi} = \frac{1 - \left(e^{-in \frac{1}{k} 2\pi}\right)^k}{1 - e^{-in \frac{1}{k} 2\pi}}$$

somme des k premiers termes de la suite géométrique de premier terme 1 et de raison $e^{-in \frac{1}{k} 2\pi}$.

$$S_k = \frac{1 - e^{-in2\pi}}{1 - e^{-in \frac{1}{k} 2\pi}} = 0 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{I = 0}$$

3°) <u>Développement en série de Fourier de $\lambda f + \mu g$ si f et g n'ont pas même période.</u> ($\lambda \in \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{R}$)

Soient les fonctions périodiques f et g telles que:

- f a pour période T_1
- g a pour période T_2
- f et g vérifient les conditions de Dirichlet

a) $\frac{T_1}{T_2}$ *n'est pas rationnel*

(f et g n'ont pas de période commune).Dans ce cas $\lambda f + \mu g$ n'est pas périodique ,donc n'a pas de développement en série de Fourier.

b) $\frac{T_1}{T_2}$ *est rationnel*

Soit T la plus petite période (positive) commune à f et g.

On pose : $T = k_1T_1 = k_2T_2$, $k_1 \in \mathbb{N}^*$, $k_2 \in \mathbb{N}^*$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \ , \ T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}, \ T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2}$$

d'où $\omega_1 = k_1\omega$ et $\omega_2 = k_2\omega$

Il est immédiat que $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda f + \mu g$ vérifie les conditions de Dirichlet et que $\lambda f + \mu g$ est périodique de période T. On va calculer les coefficients de Fourier de $\lambda f + \mu g$ en fonction des coefficients de Fourier de f et de g.

α) Calcul de c_0

$$c_0(\lambda f + \mu g) = \frac{1}{T}\int_0^T (\lambda f + \mu g)(t)\, dt \quad \text{d'où}$$

$$c_0(\lambda f + \mu g) = \frac{\lambda}{k_1T_1}\int_0^{k_1T_1} f(t)\, dt + \frac{\mu}{k_2T_2}\int_0^{k_2T_2} g(t)\, dt$$

d'après le résultat du 2°) 1^{er}cas

$$c_0(\lambda f + \mu g) = \frac{\lambda}{T_1}\int_0^{T_1} f(t)\, dt + \frac{\mu}{T_2}\int_0^{T_2} g(t)\, dt$$

$c_0(\lambda f + \mu g) = \lambda c_0(f) + \mu c_0(g)$
$a_0(\lambda f + \mu g) = \lambda a_0(f) + \mu a_0(g)$

β) Calcul de c_n $\quad n\geq 1$

$$c_n(\lambda f + \mu g)= \frac{1}{T}\int_0^T (\lambda\ f(t) + \mu\ g(t))\ e^{-in\omega t}\ dt \quad \text{d'où}$$

$$c_n(\lambda f + \mu g) = \frac{\lambda}{k_1T_1}\int_0^{k_1T_1} f(t)\ e^{-in\omega t}dt + \frac{\mu}{k_2T}\int_0^{k_2T_2} g(t)e^{-in\omega t}dt$$

■ *1ercas: n est un multiple de* k_1 *et de* k_2

posons $n = \alpha k_1 = \beta k_2$, $\alpha \in \mathbb{N}^*, \beta \in \mathbb{N}^*$ d'après b)

$$c_n(\lambda f + \mu g)= \frac{\lambda}{T_1}\int_0^{T_1} f(u)\ e^{-i\beta\omega_1 u}\ du + \frac{\mu}{T_2}\int_0^{T_2} g(u)\ e^{-i\beta\omega_2 u}\ du$$

d'où
$$\boxed{C_n\ (\lambda\ f + \mu\ g\ ) = \lambda\ C_\alpha(f) + \mu\ C_\beta(g)}$$

sachant que $C_n=\dfrac{a_n-ib_n}{2}$ il en résulte que :

$$\boxed{a_n\ (\lambda\ f + \mu\ g\ ) = \lambda\ a_\alpha(f) + \mu\ a_\beta(g)}$$
$$\boxed{b_n\ (\lambda\ f + \mu\ g\ ) = \lambda\ b_\alpha(f) + \mu\ b_\beta(g)}$$

■ $2^{ème}$ *cas: n est un multiple de* k_1 *et n'est pas un multiple de* k_2

Posons $n = \alpha k_1$, $\alpha \in \mathbb{N}^*$

d'après 2°)

$c_n (\lambda f + \mu g) = \lambda c_\alpha(f)$
$a_n (\lambda f + \mu g) = \lambda a_\alpha(f)$
$b_n (\lambda f + \mu g) = \lambda b_\alpha(f)$

■ $3^{ème}$ *cas : n n'est pas un multiple de* k_1 *et est un multiple de* k_2

Posons $n = \beta k_2$, $\beta \in \mathbb{N}^*$

d'après 2°)

$c_n (\lambda f + \mu g) = \mu c_\beta(f)$
$a_n (\lambda f + \mu g) = \mu a_\beta(f)$
$b_n (\lambda f + \mu g) = \mu b_\beta(f)$

■ $4^{ème}$ *cas: n n'est ni multiple de* k_1 *, ni multiple de* k_2

d'après 2°)

$c_n (\lambda f + \mu g) = 0$
$a_n (\lambda f + \mu g) = 0$
$b_n (\lambda f + \mu g) = 0$

Remarque:

Si $T_1=T_2$ nous sommes dans le premier cas, $k_1=k_2$, $n = \alpha = \beta$

$C_n\ (\lambda\ f + \mu\ g\ ) = \lambda\ C_n(f) + \mu\ C_n(g)$
$a_n\ (\lambda\ f + \mu\ g\ ) = \lambda\ a_n(f) + \mu\ a_n(g)$
$b_n\ (\lambda\ f + \mu\ g\ ) = \lambda\ b_n(f) + \mu\ b_n(g)$

On retrouve les résultats obtenus en 1°)

4°) Deux règles pratiques

Soient f de période T_1 et g de période T_2 telles que $T = k_1T_1 = k_2T_2$

$k_1 \in \mathbb{N}^*$, $k_2 \in \mathbb{N}^*$

$\forall\ \lambda \in \mathbb{R},\ \forall\ \mu \in \mathbb{R}\quad \lambda\ f + \mu\ g$ est de période T

Soient les développements en série de Fourier de f, g, $\lambda\ f + \mu\ g$

$$\left\{f(t)\right\} = a'_0 + \sum_{\alpha=0}^{+\infty} \left[a'_\alpha \cos \alpha\omega_1 t + b'_\alpha \sin \alpha\omega_1 t\right]$$

avec $a'_\alpha = a_\alpha(f)$, $b'_\alpha = b_\alpha(f)$ et $a'_0 = a_0(f)$

$$\left\{g(t)\right\} = a''_0 + \sum_{\beta=0}^{+\infty} \left[a''_\beta \cos \beta\omega_2 t + b''_\beta \sin \beta\omega_2 t\right]$$

avec $a''_\beta = a_\beta(g)$, $b''_\beta = b_\beta(g)$ et $a''_0 = a_0(g)$

$$\left\{(\lambda f + \mu g)(t)\right\} = a_0 + \sum_{n=0}^{+\infty} \left[a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t\right]$$

avec $a_n = a_n(\lambda f + \mu g)$, $b_n = b_n(\lambda f + \mu g)$ et $a_0 = a_0(\lambda f + \mu g)$

On a : $\omega = \frac{2\pi}{T}$, $\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$, $\omega_2 = \frac{2\pi}{T_2}$, $\omega_1 = k_1\,\omega$, $\omega_2 = k_2\,\omega$

d'où : $\left\{\lambda\ f(t)\right\} = \lambda\ a'_0 + \sum_{\alpha=0}^{+\infty} \left[\lambda\ a'_\alpha \cos \alpha k_1\omega\ t + \lambda\ b'_\alpha \sin \alpha k_1\omega\ t\right]$

et $\left\{\mu\ g(t)\right\} = \mu\ a''_0 + \sum_{\beta=0}^{+\infty} \left[\mu\ a''_\beta \cos \beta k_2\omega\ t + \mu\ b''_\beta \sin \beta k_2\omega\ t\right]$

a) *Première règle*

D'après les résultats obtenus en 3°), on constate que :

Pour obtenir le développement en série de Fourier de $\lambda\ f + \mu\ g$ on peut faire la somme des harmoniques du développement de $\lambda\ f$ et du développement de $\mu\ g$ et les ordonner dans l'ordre croissant des pulsations.

b) *Deuxième règle*

D'après les résultats obtenus en 3°) :

$a_n(\lambda f + \mu g) = \lambda\, a_{\frac{n}{k_1}}(f) + \mu\, a_{\frac{n}{k_2}}(g)$ en convenant que si $\frac{n}{k_1}$ (resp $\frac{n}{k_2}$) n'est pas entier $a_{\frac{n}{k_1}}(f)$ (resp $a_{\frac{n}{k_2}}(g)$) est nul

et

$b_n(\lambda f + \mu g) = \lambda\, b_{\frac{n}{k_1}}(f) + \mu\, b_{\frac{n}{k_2}}(g)$ en convenant que si $\frac{n}{k_1}$ (resp $\frac{n}{k_2}$) n'est pas entier $b_{\frac{n}{k_1}}(f)$ (resp $b_{\frac{n}{k_2}}(g)$) est nul

ATTENTION : On ne doit chercher à appliquer ces deux règles que si $\frac{T_1}{T_2}$ est rationnel.

c) *Exemple d'utilisation des règles pratiques*

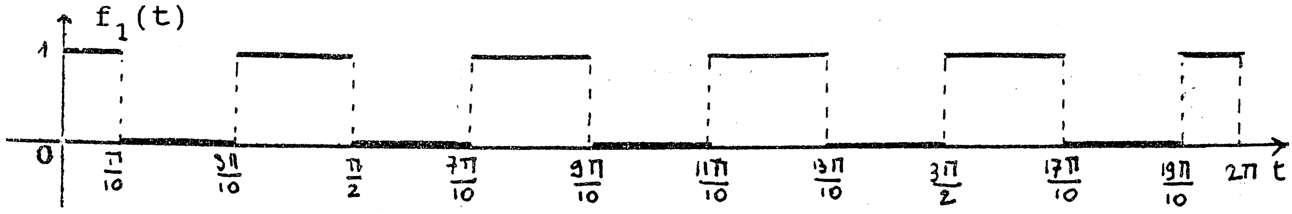
Soient les fonctions :

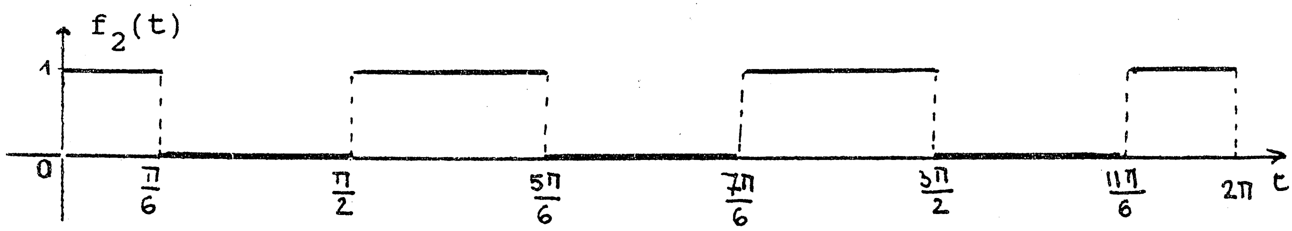
f_1 paire, périodique de période $T_1 = \frac{2\pi}{5}$, définie par

$f_1(t) = 1$ si $t \in [0, \frac{\pi}{10}[$ et $f_1(t) = 0$ si $t \in]\frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{5}]$

f_2 paire, périodique de période $T_2 = \frac{2\pi}{3}$, définie par

$f_2(t) = 1$ si $t \in [0, \frac{\pi}{6}[$ et $f_2(t) = 0$ si $t \in]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$





Soit la fonction f définie au II- 1°), on remarque

que pour tout $t \neq \frac{\pi}{10} + k\,\frac{\pi}{5}$ $\qquad f_1(t) = f(5t)$

et que pour tout $t \neq \frac{\pi}{6} + k\,\frac{\pi}{5}$ $\qquad f_2(t) = f(3t)$

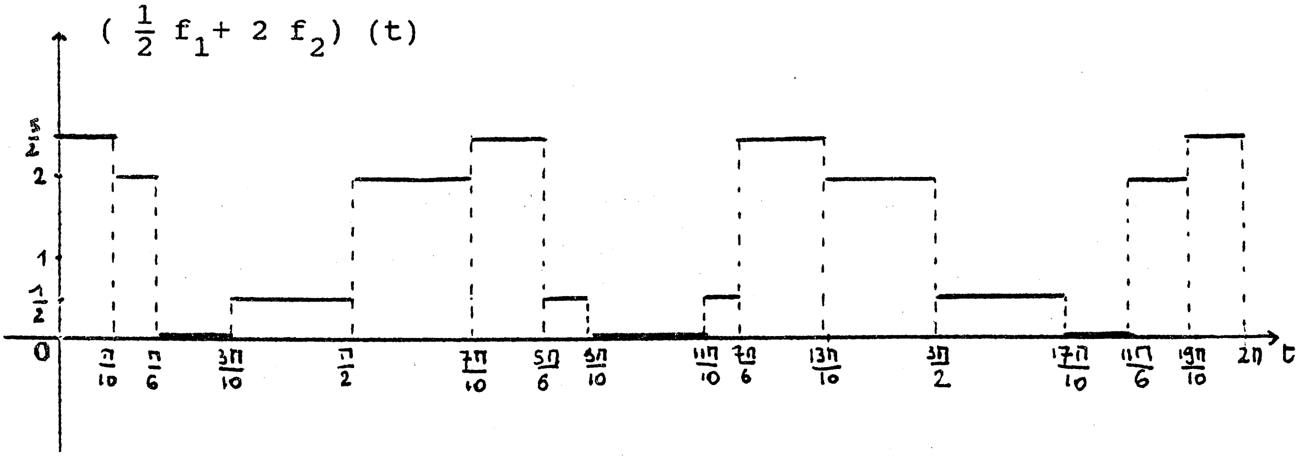
On en déduit que :

$$\left\{f_1(t)\right\} = \frac{1}{2} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{2}{(2p+1)\pi}\,(-1)^p \cos\left[(2p+1)5t\right] \qquad (1)$$

et $$\left\{f_2(t)\right\} = \frac{1}{2} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{2}{(2p+1)\pi}\,(-1)^p \cos\left[(2p+1)3t\right] \qquad (2)$$

La fonction $\frac{1}{2} f_1 + 2 f_2$ est périodique de période $T = 2\pi$

$T = 5\,T_1 = 3\,T_2$, $\omega = 5\,\omega_1 = 3\,\omega_2$



■ On va écrire le développement en série de Fourier de $\frac{1}{2} f_1 + 2 f_2$ jusqu'au rang 57. On déduit de (1) et (2) que :

$$\left\{ \frac{1}{2} f_1(t) \right\} = \frac{1}{4} + \frac{1}{\pi} \cos 5t - \frac{1}{3\pi} \cos 15t + \frac{1}{5\pi} \cos 25t - \frac{1}{7\pi} \cos 35t + \frac{1}{9\pi} \cos 45t - \frac{1}{11\pi} \cos 55t + \frac{1}{13\pi} \cos 65t - \ldots\ldots.$$

$$\left\{ 2 f_2(t) \right\} = 1 + \frac{4}{\pi} \cos 3t - \frac{4}{3\pi} \cos 9t + \frac{4}{5\pi} \cos 15t - \frac{4}{7\pi} \cos 21t + \frac{4}{9\pi} \cos 27t - \frac{4}{11\pi} \cos 33t + \frac{4}{13\pi} \cos 39t - \frac{4}{15\pi} \cos 45t + \frac{4}{17\pi} \cos 51t - \frac{4}{19\pi} \cos 57t + \ldots\ldots\ldots$$

En appliquant la première règle on obtient :

$$\left\{ (\frac{1}{2} f_1 + 2 f_2)(t) \right\} = \frac{5}{4} + \frac{4}{\pi} \cos 3t + \frac{1}{\pi} \cos 5t - \frac{4}{3\pi} \cos 9t + \frac{7}{15\pi} \cos 15t - \frac{4}{7\pi} \cos 21t + \frac{1}{5\pi} \cos 25t + \frac{4}{9\pi} \cos 27t - \frac{4}{11\pi} \cos 33t$$

$- \frac{1}{7\pi} \cos 35t + \frac{4}{13\pi} \cos 39t - \frac{7}{45\pi} \cos 45t + \frac{4}{17\pi} \cos 51t - \frac{1}{11\pi} \cos 55t$

$+ \frac{4}{19\pi} \cos 57t + \ldots\ldots\ldots$

■ En utilisant la deuxième règle, on va calculer : $a_{135}(\frac{1}{2} f_1 + 2 f_2)$, $a_{150}(\frac{1}{2} f_1 + 2 f_2)$, $a_{153}(\frac{1}{2} f_1 + 2 f_2)$ $a_{154}(\frac{1}{2} f_1 + 2 f_2)$, $a_{155}(\frac{1}{2} f_1 + 2 f_2)$, $a_{156}(\frac{1}{2} f_1 + 2 f_2)$ et $a_{160}(\frac{1}{2} f_1 + 2 f_2)$.

On peut remarquer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ b_n(f_1) = b_n(f_2) = 0$
d'où $\forall n \in \mathbb{N}^*\ \ b_n(\frac{1}{2} f_1 + 2 f_2) = 0$

$a_{135}(\frac{1}{2} f_1 + 2 f_2) = \frac{1}{2} a_{27}(f_1) + 2\, a_{45}(f_2)$

on obtient $a_{27}(f_1)$ en faisant $p = 13$ dans (1) et $a_{45}(f_2)$ en faisant $p = 22$ dans (2) d'où

$a_{135}(\frac{1}{2} f_1 + 2 f_2) = - \frac{1}{27\pi} + \frac{4}{45\pi} = \frac{7}{135\pi}$

$a_{150}(\frac{1}{2} f_1 + 2 f_2) = \frac{1}{2} a_{30}(f_1) + 2\, a_{50}(f_2) = 0$

car $a_{2p}(f_1) = a_{2p}(f_2) = 0$

$a_{153}(\frac{1}{2} f_1 + 2 f_2) = \frac{1}{2} a_{\frac{153}{5}}(f_1) + 2\, a_{51}(f_2) = - \frac{4}{51\pi}$

car $a_{\frac{153}{5}}(f_1) = 0$

De même :

$$a_{154}(\frac{1}{2} f_1 + 2 f_2) = \frac{1}{2} a_{\frac{154}{5}}(f_1) + 2 a_{\frac{154}{3}}(f_2) = 0$$

$$a_{155}(\frac{1}{2} f_1 + 2 f_2) = \frac{1}{2} a_{31}(f_1) + 2 a_{\frac{155}{3}}(f_2) = - \frac{1}{31\pi}$$

$$a_{156}(\frac{1}{2} f_1 + 2 f_2) = \frac{1}{2} a_{\frac{156}{5}}(f_1) + 2 a_{52}(f_2) = 0$$

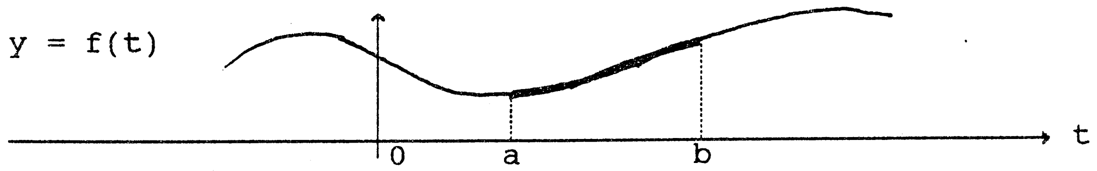
$$a_{160}(\frac{1}{2} f_1 + 2 f_2) = \frac{1}{2} a_{32}(f_1) + 2 a_{\frac{160}{3}}(f_2) = 0$$

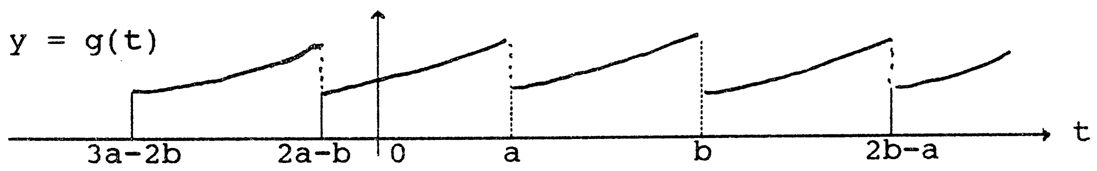
V- SERIE ASSOCIEE A UNE FONCTION f SUR L'INTERVALLE [a, b]

Même si la fonction f n'est pas périodique on peut envisager de lui associer une série de Fourier pour tout $t \in]a,b[$ $(b > a)$.

1°) Cas général

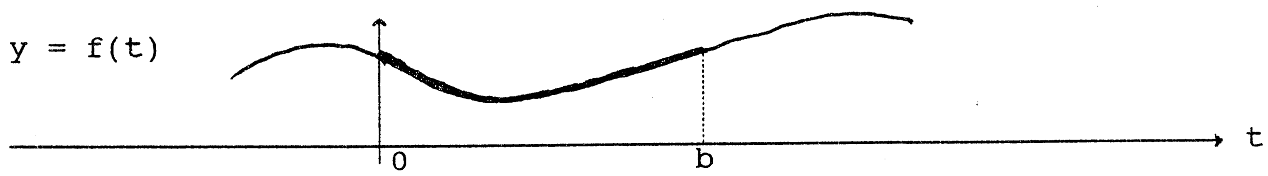
Il suffit de chercher la série de Fourier associée à la fonction g de période $T = b - a$ telle que pour tout $t \in]\, a \,,\, b\, [$ $\quad g(t) = f(t)$.

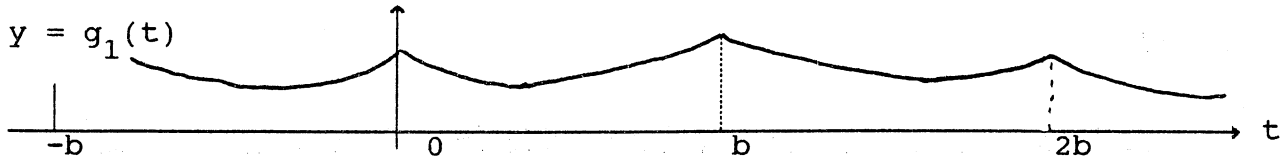




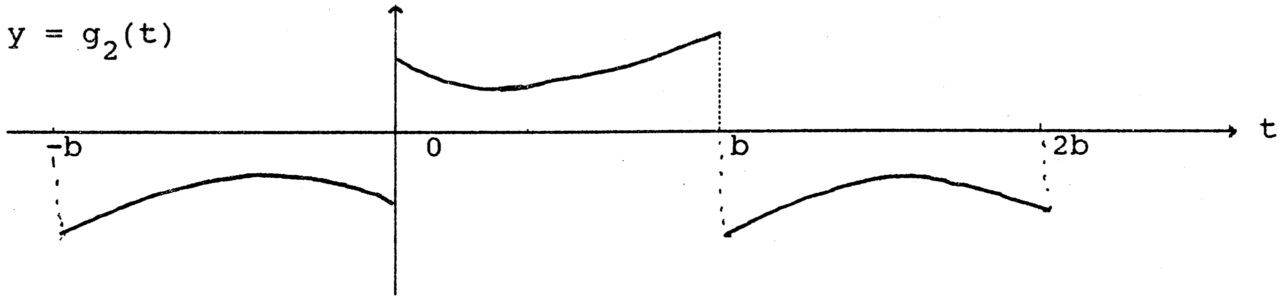
2°) Cas où a = 0

On peut chercher la série de Fourier de la fonction g_1 paire, périodique, de période $T = 2b$ telle que pour tout $t \in]\, 0 \,,\, b\, [$ $g_1(t) = f(t)$.





ou bien on peut chercher la série de Fourier de la fonction g_2 impaire, périodique, de période $T = 2b$ telle que pour tout $t \in]0,b[$ $g_2(t) = f(t)$



Nota: si $b = 0$, on pourrait de même chercher la série de Fourier d'une fonction paire ou d'une fonction impaire.

3°) Exercice

Soit la fonction f définie sur $]\,0\,,\,1\,[$ par $f(t) = e^t$.

a) Donner le développement en série de Fourier de la fonction g périodique, de période 1, définie sur $]\,0\,,\,1\,[$ par $g(t) = f(t)$.

b) Développer sur $]\,0\,,\,1\,[$ la fonction f en série de cosinus (donner le développement en série de Fourier de la fonction g_1, paire, périodique, de période 2, définie sur $]\,0\,,\,1\,[$ par $g_1(t) = f(t)$.

c) Développer sur $]\,0\,,\,1\,[$ la fonction f en série de sinus.

VI - REMARQUE

1°) Un cas de signal n'ayant que des harmoniques "impairs"

Soit f périodique de période T vérifiant pour tout t et $t + \frac{T}{2}$ où f est définie $f(t + \frac{T}{2}) = -f(t)$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\,dt + \frac{1}{T}\int_{\frac{T}{2}}^{T} f(t)\,dt$$

Faisons le changement de variable $u = t - \frac{T}{2}$

$$\int_{\frac{T}{2}}^{T} f(t)\,dt = \int_0^{\frac{T}{2}} f(u + \frac{T}{2})\,du = -\int_0^{\frac{T}{2}} f(u)\,du \quad \text{d'où } a_0 = 0$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos n\omega t\,dt = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\cos n\omega t\,dt + \frac{2}{T}\int_{\frac{T}{2}}^{T} f(t)\cos n\omega t\,dt$$

Faisons le changement de variable $u = t - \frac{T}{2}$

$$\int_{\frac{T}{2}}^{T} f(t)\cos n\omega t\,dt = \int_0^{\frac{T}{2}} f(u + \frac{T}{2})\cos(n\omega\, u + n\omega\,\frac{T}{2})\,du$$

$$= -\int_0^{\frac{T}{2}} f(u)\cos(n\omega\, u + n\pi)\,du$$

donc si n est pair, $a_n = 0$

On démontre de même que si n est pair $b_n = 0$ donc

$$\left\{f(t)\right\} = \sum_{p=0}^{+\infty} a_{2p+1} \cos (2p+1)\omega t + b_{2p+1} \sin (2p+1)\omega t$$

2°) Exemple

Soit f paire, périodique, de période 2π, définie par :

$f(t) = \frac{1}{2}$ si $t \in [0,\frac{\pi}{2}[$ et $f(t) = -\frac{1}{2}$ si $t \in [\frac{\pi}{2},\pi[$

$\forall\ t \neq \frac{\pi}{2} + \lambda\pi,\ \lambda \in \mathbb{Z},\ f(t+\pi) = -\ f(t)$

En effet $\forall\ t \in]-\frac{\pi}{2} + k\ 2\pi\ ,\ \frac{\pi}{2} + k\ 2\pi[\ ,\ k \in \mathbb{Z},\quad f(t) = \frac{1}{2}$ et

$t + \pi \in]\frac{\pi}{2} + k\ 2\pi\ ,\ \frac{3\ \pi}{2} + k\ 2\pi[$ d'où $f(t + \pi) = -\ \frac{1}{2} = -\ f(t)$

Si on se reporte à 2°) a) on peut constater que

$$\left\{f(t)\right\} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{2}{(2p+1)\pi} (-1)^p \cos (2p+1)\ t$$

3°) Exercice

Soit la fonction f, périodique, de période 4, définie par :

$f(t) = e^t$ si $t \in]-1,1[$ et $f(t) = -\ e^{t\ -\ 2}$ si $t \in]1,3[$

Vérifier que $\forall\ t \in \mathcal{D}_f\ ,\ f(t+2) = -\ f(t)$

Calculer le coefficient de Fourier C_{2p+1} puis en déduire $\left\{f(t)\right\}$

VII- EXERCICES

1°) *Donner la série de Fourier* associée à la fonction g, paire, périodique, de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$ et définie par :

$$\begin{cases} g(t) = E & \text{si } t \in [\ 0\ ,\ \frac{\tau}{2}\ [\\ g(t) = 0 & \text{si } t \in\ ]\ \frac{\tau}{2}\ ,\ \frac{T}{2}\ [\end{cases} \qquad \text{avec } 0 < \tau < T$$

En déduire la série de Fourier associée à la fonction f, périodique, de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$ et définie par :

$$\begin{cases} f(t) = E & \text{si } t \in\ ]\ 0\ ,\ \tau\ [\\ f(t) = 0 & \text{si } t \in\ ]\ \tau\ ,\ T\ [\end{cases}$$

2°) *Donner la série de Fourier* associée à la fonction g, périodique, de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$, impaire, définie sur $[\ 0\ ,\ \frac{T}{2}\ [$ par $g(t) = \frac{1}{T}\, t$.

En déduire :

a) la série de Fourier associée à la fonction f_1 de période T, définie par $f_1(t) = \frac{1}{T}\, t + 1$ si $t \in\ ]\ 0\ ,\ T\ [$.

b) la série de Fourier associée à la fonction f_2 de période T, définie sur $]\ 0\ ,\ T\ [$ par $f_2(t) = -\frac{\pi}{T}\, t + \frac{\pi}{2}$.
(Cf Chapitre 2 I- 3°) b))

c) la série de Fourier associée à la fonction f_3 de période $\frac{T}{2}$, impaire, définie sur $[\ 0\ ,\ \frac{T}{4}\ [$ par $f_3(t) = \frac{2}{T}\,t$.

3°) *Donner la série de Fourier* associée à f, paire, de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$ définie par :

$$\begin{cases} f(t) = \cos \omega t & \text{si } t \in [\ 0\ ,\ \frac{\pi}{2\omega}\ ] \\ f(t) = 0 & \text{si } t \in [\ \frac{\pi}{2\omega}\ ,\ \frac{\pi}{\omega}\ ] \end{cases}$$

En déduire :

a) la série de Fourier associée à g, périodique, de période T, définie par :

$$\begin{cases} g(t) = \sin \omega t & \text{si } t \in [\ 0\ ,\ \frac{\pi}{\omega}\ ] \\ g(t) = 0 & \text{si } t \in [\ \frac{\pi}{\omega}\ ,\ \frac{2\pi}{\omega}\ ] \end{cases}$$

b) la série de Fourier associée à v définie par :

$$\forall\, t \in \mathbb{R},\quad v(t) = g(-t)$$

c) la série de Fourier associée à la fonction $u = g + v$.

CHAPITRE IV

PRIMITIVE LARGE <<DÉRIVÉE>> PRODUIT D'UNE FONCTION PAR $\sin\frac{\omega}{k}t$ OU $\cos\frac{\omega}{k}t$

I- INTEGRATION

1°) Approche du Problème

a) Une référence à la Physique

■ En Physique on utilise des intégrateurs (schéma ci-dessous).

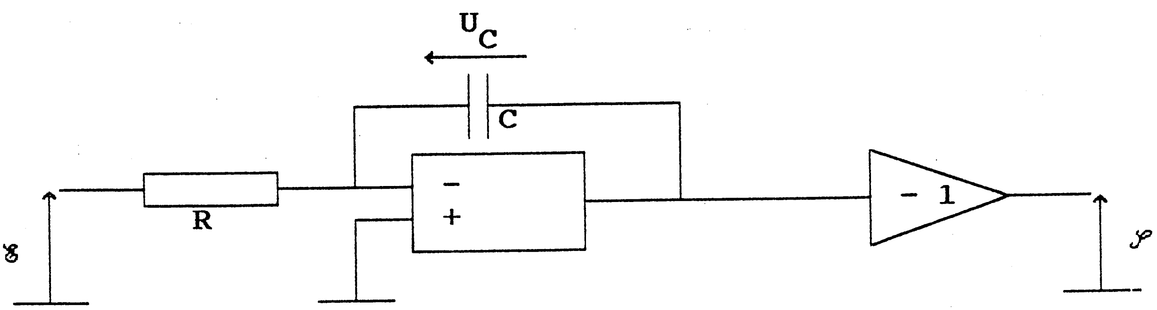
Si l'on met à l'entrée de l'intégrateur un signal périodique g, de période T, de valeur moyenne nulle ($\frac{1}{T}\int_{(T)} g(t)\ dt = 0$), on sait que :

- le signal de sortie s est un signal continu, car s est égal à la tension aux bornes du condensateur, tension qui ne peut varier brusquement.

- le signal de sortie s est défini par :

$$s(t) = \frac{1}{RC}\,\mathcal{U}(t - t_0) \int_{t_0}^{t} g(x)\ dx$$ si l'intégrateur commence à fonctionner à l'instant t_0 .

- s est un signal périodique, de période T.(voir par ailleurs b).



Remarque : La fonction f défine par : $f(t) = \int_{t_0}^{t} g(x)\ dx$

est la primitive large de g qui prend en t_0 , la valeur 0.

Donc f est continue sur $\mathbb{R}$ (cela est cohérent avec l'hypothèse physique de continuité de s) .

b) Primitives larges d'une fonction de période T.

α) *Remarque préliminaire*

Soit g une fonction localement continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et G définie par $G(t) = \int_{t_0}^{t} g(x)\, dx$. G est la primitive large de g nulle en t_0. Donc, si G est constante, alors g est constamment nulle sur tout intervalle ouvert sur lequel elle est continue.

β) *Primitive large périodique*

Soit γ une fonction localement continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, montrons que :

> si f telle que $f(t) = \int_{t_0}^{t} \gamma(x)\, dx$ est une fonction de période θ,
>
> alors γ est de valeur moyenne nulle sur $[0 ; \theta]$ et γ est de période θ.

■ $$f(t+\theta) = \int_{t_0}^{t+\theta} \gamma(x)\, dx = \int_{t_0}^{t} \gamma(x)\, dx + \int_{t}^{t+\theta} \gamma(x)\, dx$$

$$f(t+\theta) = f(t) + \int_{t}^{t+\theta} \gamma(x)\, dx .$$

Si f est de période θ, alors pour tout t, $f(t + \theta) = f(t)$.

Il en résulte que pour tout t, $\displaystyle\int_t^{t+\theta} g(x)\, dx = 0$; donc que la valeur moyenne de g sur $[0\ ;\ \theta]$ est nulle.

■ Soit φ_θ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi_\theta(t) = \int_t^{t+\theta} g(x)\, dx\ .$$

$$\varphi_\theta(t) = \int_t^{t_0} g(x)\, dx + \int_{t_0}^{t+\theta} g(x)\, dx\ ,\ \text{or} \int_{t_0}^{t+\theta} g(x)\, dx = \int_{t_0-\theta}^{t} g(x+\theta)\, dx\ ,$$

$$\text{donc } \varphi_\theta(t) = \int_{t_0-\theta}^{t} g(x+\theta)\, dx - \int_{t_0}^{t} g(x)\, dx$$

$$\varphi_\theta(t) = \int_{t_0}^{t} g(x+\theta)\, dx - \int_{t_0}^{t} g(x)\, dx + \int_{t_0-\theta}^{t_0} g(x+\theta)\, dx\ ,$$

$$\text{et} \int_{t_0-\theta}^{t_0} g(x+\theta)\, dx = \int_{t_0}^{t_0+\theta} g(x)\, dx\ .$$

$$\text{D'où } \varphi_\theta(t) = \int_{t_0}^{t} \Big[g(x+\theta) - g(x) \Big]\, dx + \varphi_\theta(t_0).$$

Nous avons vu que si f est de période θ, φ_θ est constamment nulle,

$$\text{donc pour tout } t : \int_{t_0}^{t} \Big[g(x+\theta) - g(x) \Big]\, dx\ .$$

D'après α), nous en déduisons que la fonction

$$x \longrightarrow g(x+\theta) - g(x)$$

est constamment nulle sur tout intervalle ouvert où elle est continue. Cela montre que γ est de période θ en supposant que γ n'est pas définie en ses éventuels points de discontinuité.

γ) Primitives larges d'une fonction périodique

Réciproquement, montrons que :

> si γ est périodique de période T et de valeur moyenne nulle sur $[0 ; T]$, alors la fonction f définie par $f(t) = \int_{t_0}^{t} \gamma(x)\, dx$ est de période T.

$$f(t + T) = \int_{t_0}^{t+T} \gamma(x)\, dx = \int_{t_0}^{t} \gamma(x)\, dx + \int_{t}^{t+T} \gamma(x)\, dx$$

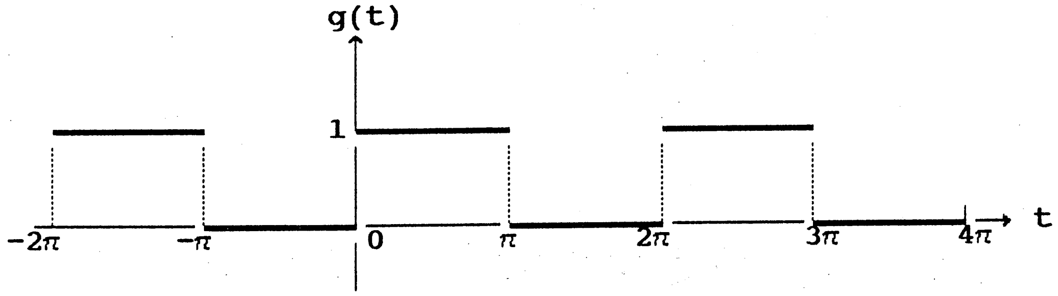
$$f(t + T) = f(t) + \int_{t}^{t+T} \gamma(x)\, dx \quad \text{et} \quad \int_{t}^{t+T} \gamma(x)\, dx = 0 \text{ , donc}$$

pour tout t : $f(t + T) = f(t)$.

■ Notons que d'après ce que nous avons vu ci-dessus, si γ n'est pas de valeur moyenne nulle sur tout intervalle $[t ; t + \theta]$ aucune primitive large de γ n'est périodique.

c) Etude d'exemple

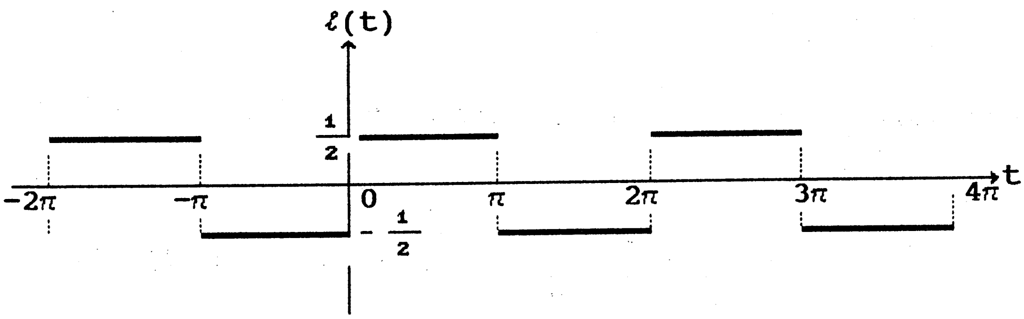
Soit g la fonction définie par $\begin{cases} g(t) = 1 \text{ si } t \in \left]0 , \pi\right[\\ g(t) = 0 \text{ si } t \in \left]\pi , 2\pi\right[\end{cases}$



On a vu que : $\left\{g(t)\right\} = \frac{1}{2} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{2}{(2p+1)\pi} \sin(2p+1)t$

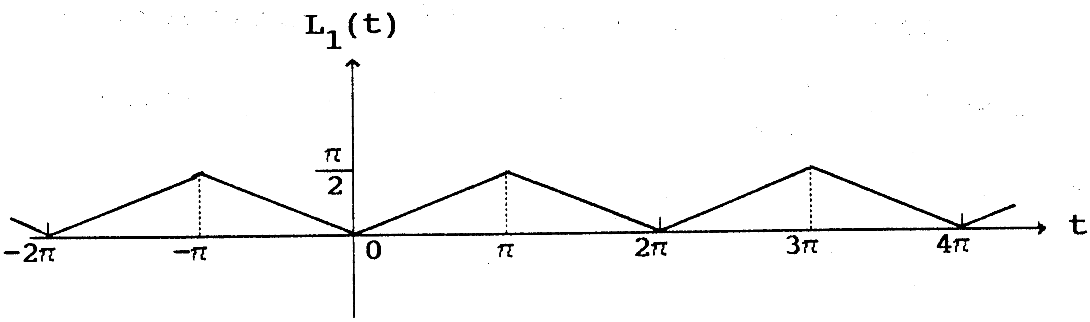
(Chapitre 3 II- 1°))

α) Soit ℓ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\ell(t) = g(t) - \frac{1}{2}$.

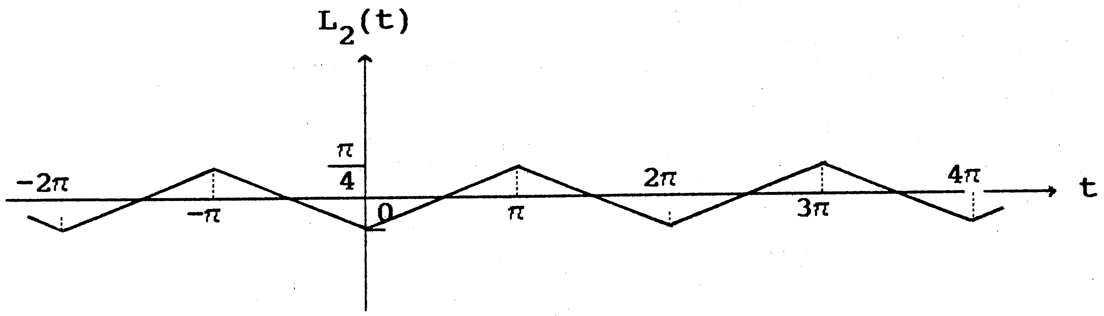


Il est immédiat que : $\left\{\ell(t)\right\} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{2}{(2p+1)\pi} \sin(2p+1)t$

β) Soit L_1 la primitive large de ℓ, nulle en 0.



et L_2 la primitive large de ℓ nulle en $t = \frac{\pi}{2}$.



On remarque que $L_1(t)$ et $L_2(t)$ sont de la forme $\int_{t_0}^{t} \ell(x)\,dx$:

$$L_1(t) = \int_0^t \ell(x)\,dx \quad \text{et} \quad L_2(t) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{t} \ell(x)\,dx .$$

On peut vérifier que : (cf. Chapitre 1 - V - 1° - a)

$$\left\{L_1(t)\right\} = \frac{\pi}{4} - \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{2}{(2p+1)^2\,\pi} \cos(2p+1)t$$

On en déduit que : $\left\{L_2(t)\right\} = - \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{2}{(2p+1)^2\,\pi} \cos(2p+1)t$

Si on intègre terme à terme la série de Fourier associée à ℓ en choisissant $-\frac{1}{(2p+1)}\cos(2p+1)t$ pour primitive de chaque terme $\sin(2p+1)t$, on obtient :

$$C - \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{2}{(2p+1)^2 \pi} \cos(2p+1)t$$

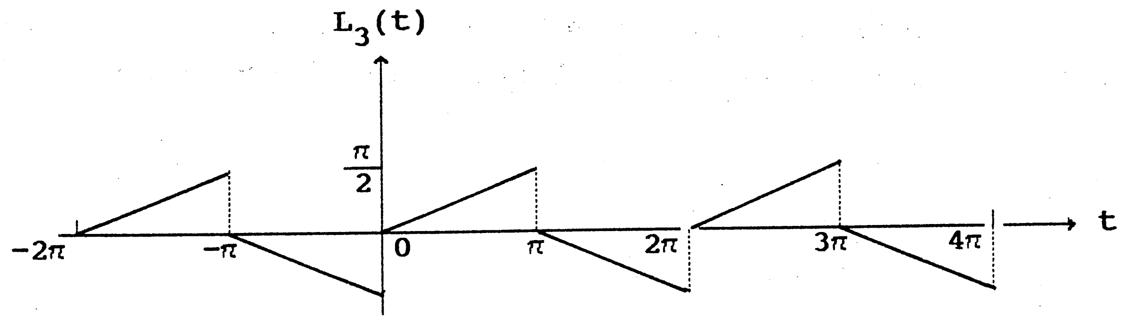
où $C \in \mathbb{R}$ est une constante arbitraire .

En choisissant $C = \frac{1}{2\pi} \int_{(2\pi)} L_1(x)\, dx$, on obtient $\{L_1(t)\}$ et

en choisissant $C = \frac{1}{2\pi} \int_{(2\pi)} L_2(x)\, dx$, on obtient $\{L_2(t)\}$.

γ) Soit la fonction L_3 de période 2π définie par

$$\begin{cases} L_3(t) = \frac{1}{2} t \text{ si } t \in \left]0, \pi\right[\\ L_3(t) = -\frac{1}{2} t + \frac{\pi}{2} \quad \text{si } t \in \left]\pi, 2\pi\right[\end{cases}$$



On remarque que pour tout t où L_3 est dérivable, $L_3'(t) = \ell(t)$, mais L_3 n'est pas une primitive large de ℓ (L_3 n'est pas continue).

On vérifiera que les coefficients de Fourier de L_3 sont les suivants : $a_0 = 0$, $a_{2p} = 0$, $a_{2p+1} = -\frac{2}{\pi(2p+1)^2}$,

$b_{2p} = 0$ et $b_{2p+1} = \dfrac{1}{2p+1}$.

On observe que le développement en série de Fourier de L_3 ne peut être obtenu en "intégrant terme à terme" $\{\ell(t)\}$.

δ) Si on intègre terme à terme la série de Fourier associée à g on obtient :

$$A + \frac{t}{2} - \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{2}{(2p+1)^2\pi} \cos(2p+1)t$$

Il faut remarquer que :

- la fonction g n'est pas à valeur moyenne nulle sur un intervalle d'une période

- que le développement en intégrant terme à terme $\{g(t)\}$, quelle que soit la valeur attribuée à la constante A ,ne peut être un développement en série de Fourier car en raison du terme $\frac{t}{2}$ la fonction obtenue n'est pas périodique.(cf a) remarque)

ε) Conclusion

L'étude des exemples ci-dessus nous conduit au constat suivant :

Soit une fonction F de <<dérivée>> f (cf Tome 1-Transformation de Laplace-B-III) connaissant le développement en série de Fourier de f

■ *si f est à valeur moyenne nulle*

- si F est une primitive large de f on peut intégrer terme à terme le développement de f pour obtenir celui de F.

- si F n'est pas une primitive large de f l'intégration terme à terme du développement de f ne permet pas d'obtenir celui de F.

■ *si f n'est pas à valeur moyenne nulle*, l'intégation terme à terme du développement de f ne peut donner un développement en série de Fourier.

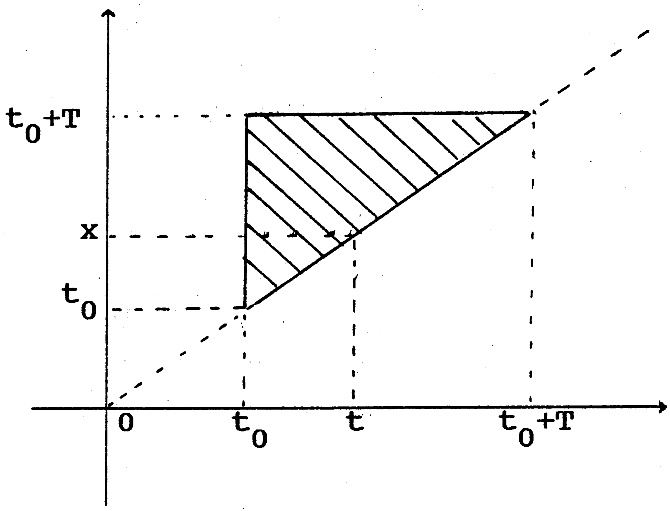
Nous allons dans ce qui suit généraliser les propriétés constatées sur les exemples que nous venons d'examiner.

d) Remarque

La valeur moyenne sur un intervalle d'une période de la fonction f définie par $f(t)=\int_{t_0}^{t} \gamma(x)\, dx$ est:

en calculant de deux manières différentes l'intégrale double

$$\iint_{\Delta} \gamma(x)\, dx\, dt \text{ avec } (t,x) \in \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} t_0 \le t \le t_0+T \\ t \le x \le t_0+T \end{cases}$$



$$f_{moy} = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\ dt = \frac{1}{T}\int_{t=t_0}^{t=t_0+T}\left[\int_{x=t_0}^{x=t} \gamma(x)\ dx\right]dt = \frac{1}{T}\int_{x=t_0}^{x=t_0+T}\left[\int_{t=x}^{t=t_0+T} \gamma(t)\ dt\right]dx$$

$$\boxed{f_{moy} = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} (t_0 + T - x)\ \gamma(x)\ dx}$$

Voir aussi - Chapitre VI - Exercice 8

Exercice:

Vérifier en utilisant ce résultat les valeurs trouvées en c)-β)

2°) Intégration terme à terme d'une série de Fourier

Examinons le cas d'une fonction f vérifiant les conditions de Dirichlet, de période T, de valeur moyenne nulle sur une période et dont la série de Fourier associée est $\sum_{n=1}^{+\infty}\left[a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t\right]$

On suppose donc que $a_0 = 0$, c'est-à-dire que $\int_{(T)} f(t)\, dt = 0$.

a) Soit une primitive large de f :

- F est continue sur $\mathbb{R}$.
- F est de période T.(cf 1°)-b))

b) F primitive large de f vérifiant les conditions de Dirichlet est continue et F vérifie les conditions de Dirichlet, elle admet donc un développement en série de Fourier tel que :

$$\forall\, t \in \mathbb{R},\ F(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(A_n \cos n\omega t + B_n \sin n\omega t \right)$$

Calculons A_n et B_n pour $n \geq 1$

$$A_n = \frac{2}{T} \int_{(T)} F(t) \cos n\omega t\, dt = \frac{2}{T} \left[\frac{\sin n\omega t}{n\omega} F(t) \right]_0^T - \frac{2}{n\omega T} \int_{(T)} f(t) \sin n\omega t\, dt$$

or $\left[\frac{\sin n\omega t}{n\omega} F(t) \right]_0^T = 0$ d'où $A_n = - \frac{2}{n\omega T} \int_{(T)} f(t) \sin n\omega t\, dt = - \frac{b_n}{n\omega}$

$B_n = \frac{2}{T} \int_{(T)} F(t) \sin n\omega t\, dt$, on va choisir pour les calculs l'intervalle $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2} \right]$.

$$B_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} F(t)\sin n\omega t\, dt$$

$$B_n = \frac{2}{T}\left[-\frac{\cos n\omega t}{n\omega}F(t)\right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} + \frac{2}{n\omega T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos n\omega t\, dt$$

$$\text{Soit } I = \frac{2}{T}\left[-\frac{\cos n\omega t}{n\omega}F(t)\right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = -\frac{\cos n\pi}{n\omega}F(\tfrac{T}{2}) + \frac{\cos n\pi}{n\omega}F(-\tfrac{T}{2})$$

$$I = -\frac{\cos n\pi}{n\omega}\left[F(\tfrac{T}{2}) - F(-\tfrac{T}{2})\right] \quad \text{or } F(\tfrac{T}{2}) - F(-\tfrac{T}{2}) = 0$$

$$\text{d'où } B_n = \frac{2}{n\omega T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos n\omega t\, dt = \frac{a_n}{n\omega}$$

c) Conclusion :

Théorème

Soit f vérifiant les conditions de Dirichlet, de période T, de valeur moyenne sur [0 , T] nulle et de série de Fourier associée

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t\right)$$

Soit F une primitive large de f , alors $\forall\, t \in \mathbb{R}$

$$F(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n\,\omega}\left(-b_n \cos n\omega t + a_n \sin n\omega t\right)$$

$$\text{avec } A_0 = \frac{1}{T}\int_{(T)} F(t)\, dt$$

Rappelons que si F est la primitive large de f nulle en t_0 alors

$$A_0 = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} (t_0 + T - x)\, f(x)\, dx$$

(cf. 1°a) pour la signification physique de t_0).

Ceci montre que la valeur moyenne du signal de sortie de l'intégrateur dépend de l'instant t_0 auquel ce dernier commence à fonctionner .

d) Règle pratique

Soit $\sum_{n=1}^{+\infty} \left[a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t\right]$ la série de Fourier associée à f,alors la série de Fourier associée à F,primitive large de f,est: $\frac{1}{T}\int_0^T F(t)\, dt + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\,\omega}\left[- b_n \cos n\omega t + a_n \sin n\omega t\right]$

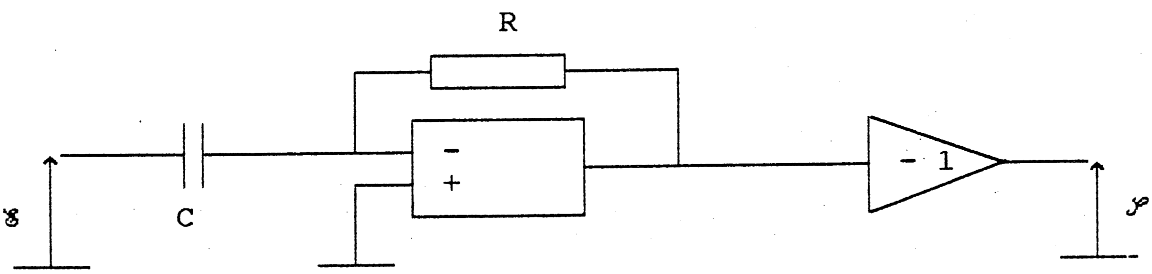
ATTENTION : Si $a_0 \neq 0$ on n'intègrera pas terme à terme la série de Fourier.

II- DERIVATION

1°) Approche du problème

a) Une référence à la Physique

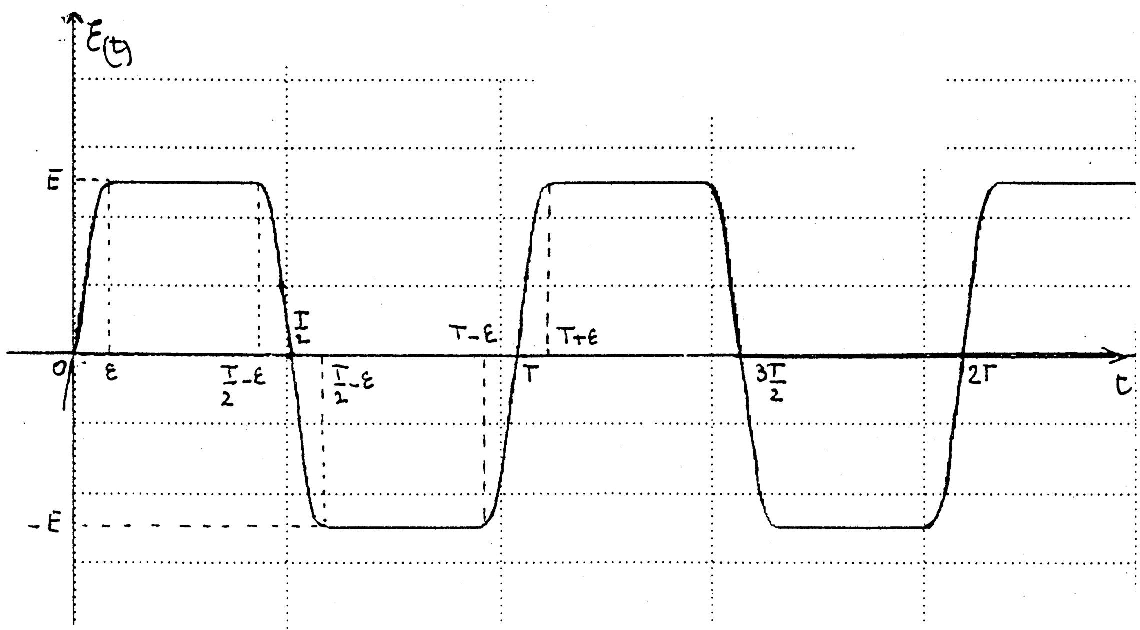
■ En Physique on utilise des dérivateurs (schéma ci-dessous). Si on met à l'entrée du dérivateur un signal périodique $\mathcal{E}$, de période T, la sortie est un signal périodique s de période T.



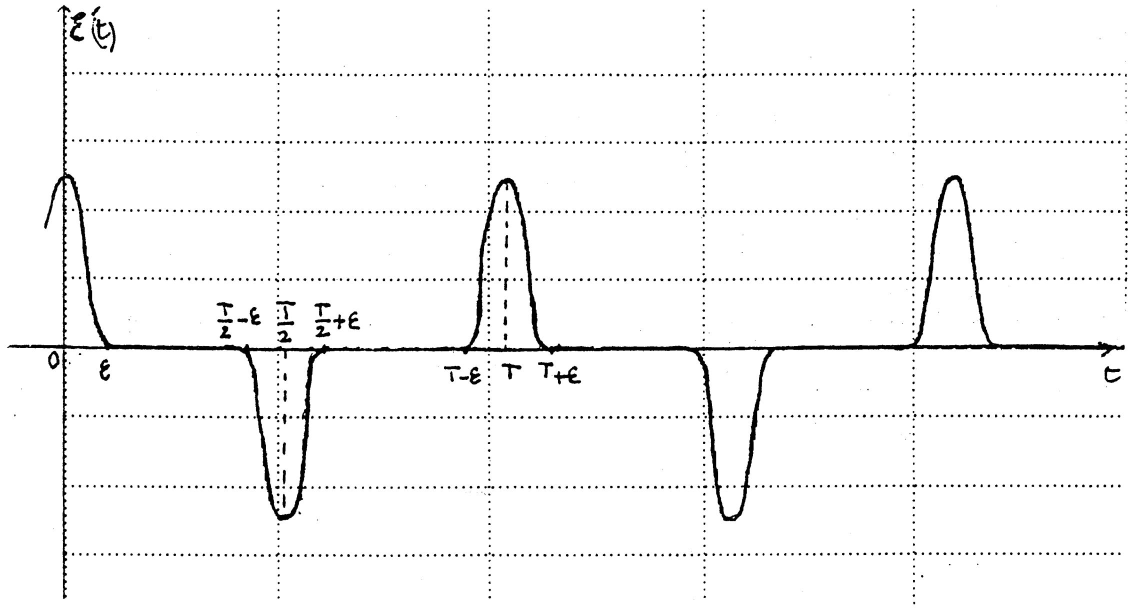
■ Exemple de modélisation d'un signal physique :

(On se reportera au Tome 1 - Transformation de Laplace - B-V- Impulsion de Dirac)

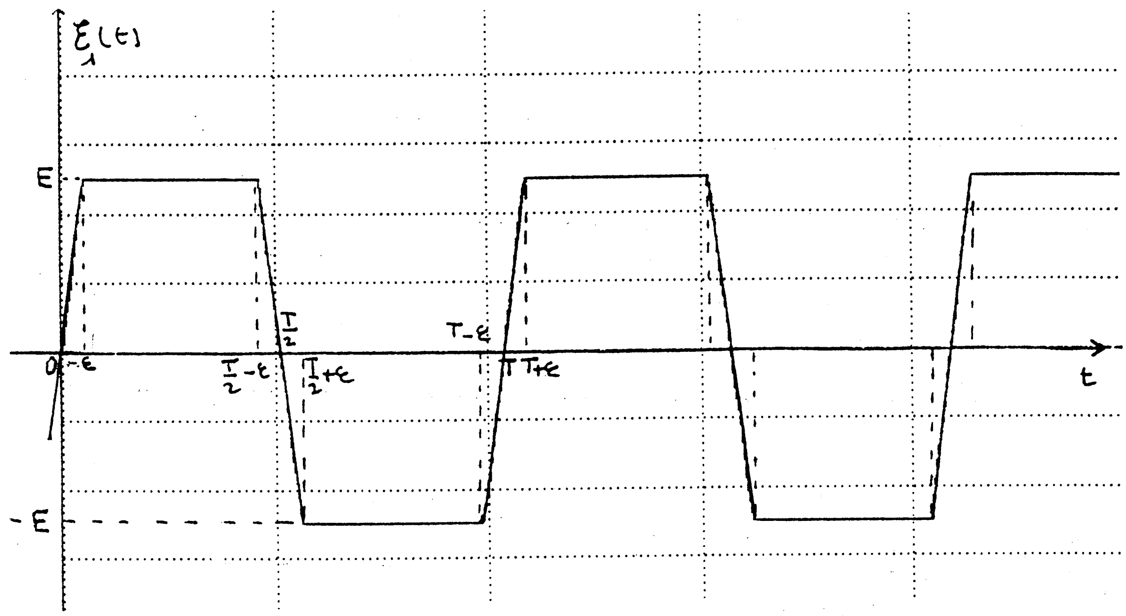
α) Cas d'un signal physique $\mathcal{E}$ (réel) modélisé par une fonction indéfiniment dérivable .



Dans ce cas, la sortie est le signal $s = \tau\, \mathcal{E}'$ avec $\tau = \frac{1}{R\,C}$ et $\mathcal{E}'$, représentée ci-dessous, dérivée de $\mathcal{E}$.

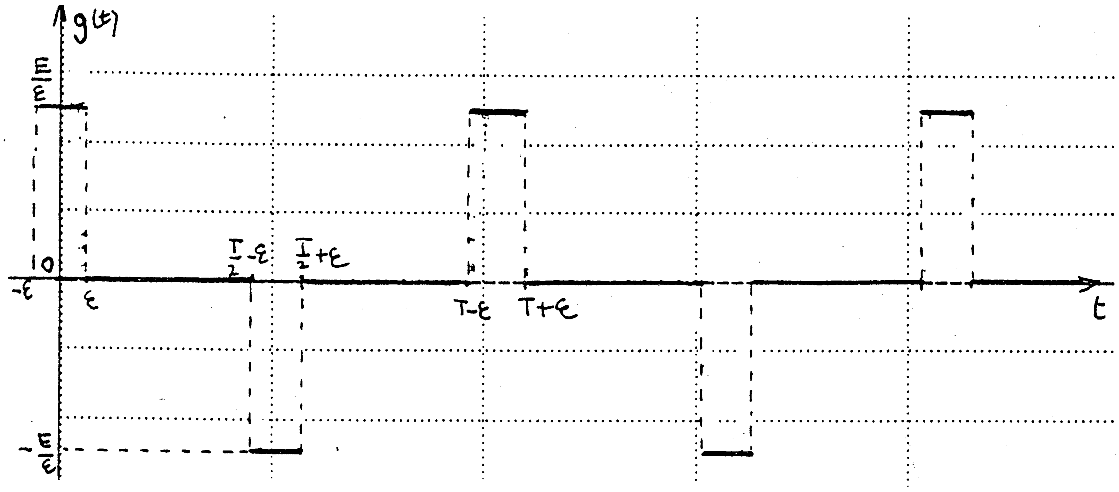


β) Cas où le signal $\mathcal{E}$ défini en α est modélisé par la fonction continue $\mathcal{E}_1$ représentée ci-dessous, vérifiant les conditions de Dirichlet.



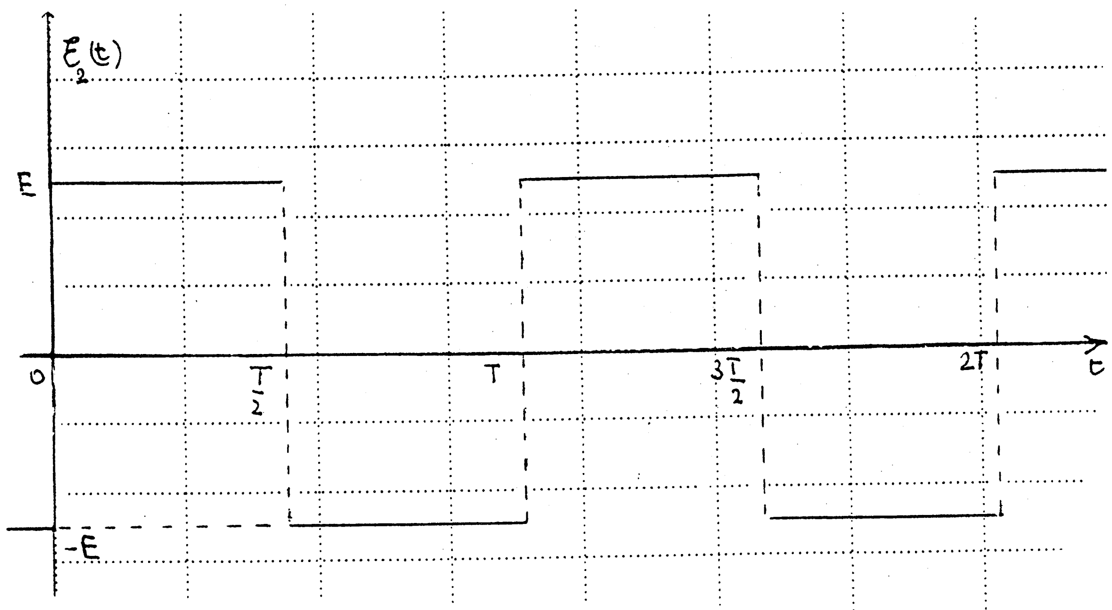
Ici la sortie est le signal $s = \tau\ g$, avec $\mathcal{E}_1$ primitive large de g

Pour tout t où $\mathcal{E}_1$ est dérivable , $\mathcal{E}_1'(t) = g(t)$.



γ) Cas où ε est très petit .

On modélise alors le signal $\mathcal{E}$ défini en α par une fonction non continue $\mathcal{E}_2$ représentée ci-dessous.

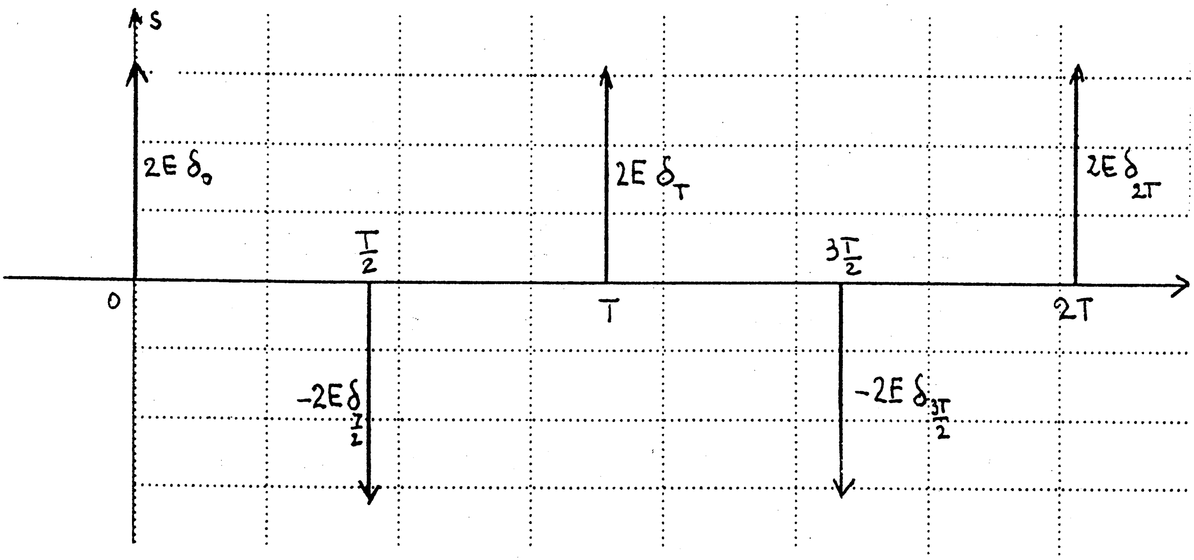


Alors la sortie est le signal $s = \tau\ D(\gamma_2)$

s est une distribution, et $D(\gamma_2)$ est la dérivée (au sens des distributions) de γ_2 (voir Tome 2).

$$s = 2\ \tau\ E \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n\ \delta_{n\frac{T}{2}}$$

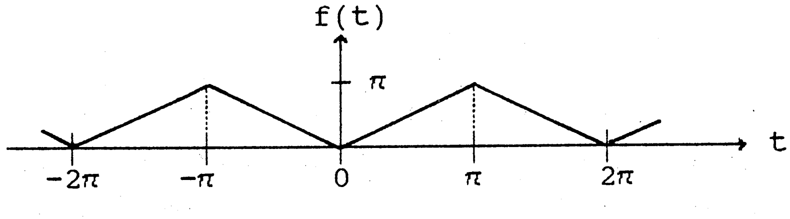
où $\delta_{n\frac{T}{2}}$ est l'impulsion de Dirac en $n\ \frac{T}{2}$ de poids 1.



b) Etude d'exemples

α) Soit la fonction f de période 2π définie par :

$$\begin{cases} f(t) = t & \text{si } t \in\ ]\ 0\ ,\ \pi\ [\\ f(t) = 2\pi - t & \text{si } t \in\ ]\ \pi\ ,\ 2\pi\ [\end{cases}$$

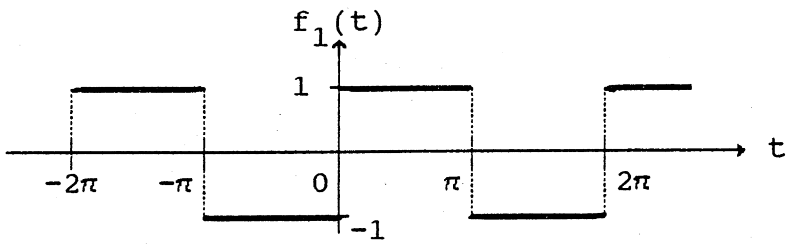


On remarque que $f = 2\,L_1$, (cf I- 1°) c))

d'où :

$$\{f(t)\} = \frac{\pi}{2} - \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{4}{(2p+1)^2\,\pi} \cos(2p+1)t$$

On peut observer que f est continue sur $\mathbb{R}$. Soit f_1 la fonction << dérivée >> de f, c'est à dire la fonction telle que pour tout $t \neq k\pi$, $f_1(t) = f'(t)$.



On remarque que $f_1 = 2\ell$, ℓ étant la fonction définie dans V-1°-c, d'où :

$$\{f_1(t)\} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{4}{(2p+1)\pi} \sin(2p+1)t$$

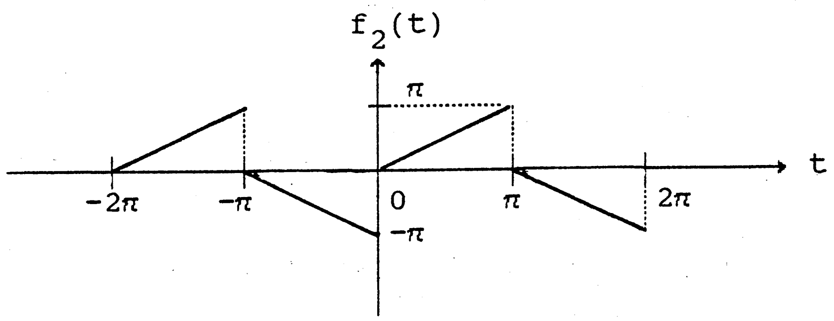
Si f est le signal d'entrée d'un dérivateur, on sera amené en physique à chercher la série de Fourier associée à f_1 pour déterminer le signal de sortie.

On constate dans cet exemple que f est continue sur $\mathbb{R}$ et que l'on peut obtenir la série de Fourier associée à f_1 << dérivée >> de f en dérivant terme à terme la série associée à f .

β) Soit la fonction f_2, de période 2π, définie par :

$$\begin{cases} f_2(t) = t & \text{si } t \in \,]\,0\,,\,\pi\,[\\ f_2(t) = \pi - t & \text{si } t \in \,]\,\pi\,,\,2\pi\,[\end{cases}$$

Notons que f_2 n'étant pas continue n'est pas une primitive large.



On remarque que $f_2 = 2\ L_3$ (cf. I- 1°)- c)- γ)) .

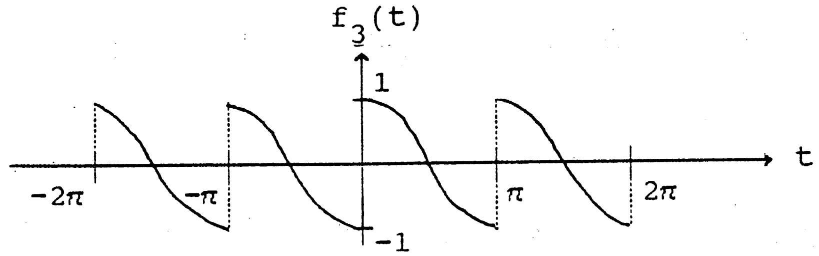
$$\left\{f_2(t)\right\} = \sum_{p=0}^{+\infty} \left[\frac{-\ 2}{\pi(2p+1)^2} \cos(2p+1)t + \frac{1}{2p+1} \sin(2p+1)t \right]$$

La fonction f_1 est la << dérivée >> de f_2 .

On constate dans cet exemple que f_2 n'est pas continue sur $\mathbb{R}$ et que la série de Fourier associée à f_1 << dérivée >> de f_2 ne s'obtient pas en dérivant terme à terme la série associée à f_2.

γ) Soit la fonction f_3 de période π définie par :

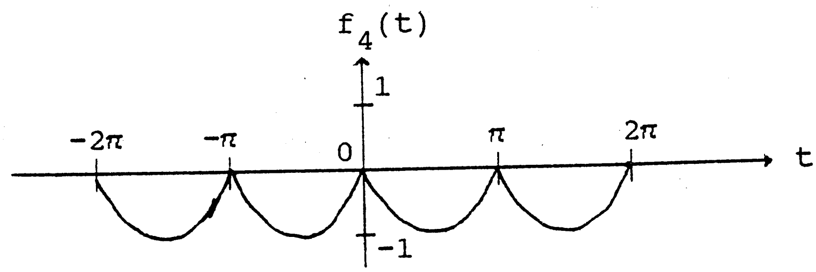
$$f_3(t) = \cos t \quad \text{si } t \in \,]\,0\,,\,\pi\,[$$



On peut montrer que $\left\{f_3(t)\right\} = \frac{8}{\pi} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{p}{4\,p^2 - 1} \sin 2pt$.

La fonction f_4 << dérivée >> de f_3 est de période π et définie par :

$$f_4(t) = -\sin t \quad \text{si } t \in \left]\, 0 \,,\, \pi \,\right[$$



On peut montrer que $\left\{f_4(t)\right\} = -\frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{4\,p^2 - 1} \cos 2pt$.

Si on dérive terme à terme $\left\{f_3(t)\right\}$ on obtient :

$$\frac{8}{\pi} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{2\,p^2}{4\,p^2 - 1} \cos 2pt \neq \left\{f_4(t)\right\}$$

On constate encore que ici f_3 n'est pas continue sur $\mathbb{R}$ et que l'on n'obtient pas la série de Fourier associée à f_4 << dérivée >> de f_3 en dérivant terme à terme la série associée à f_3.

c) Conclusion

L'étude de ces trois exemples nous permet de constater que, en dérivant terme à terme le développement en série de Fourier d'une fonction f on n'obtient pas nécessairement le développement en série de Fourier de sa << dérivée >> .

Nous allons voir comment, connaissant les coefficients de Fourier a_0 , a_n et b_n d'une fonction f on peut déduire ceux de la fonction << dérivée >> de f et nous indiquerons un cas où l'on peut dériver terme à terme.

2°) Calcul des coefficients de Fourier

Les fonctions f et f_1 sont périodiques, de période T et vérifient les conditions de Dirichlet. De plus, la fonction f_1 est la dérivée de f sur chacun des intervalles ouverts où f est dérivable. (f_1 <<dérivée>> de f: cf tome 1- Tranformation de Laplace- III- 2°)).

Nous nous proposons, connaissant les coefficients de Fourier a_0 , a_n et b_n de f de calculer les coefficients de Fourier a'_0 , a'_n , et b'_n de f_1.

Supposons que sur l'intervalle $[t_0 , t_0 + T[$ la fonction f présente p + 1 sauts en t_0 , ... , t_k , ... , t_p.

a) Calcul de a'_0

$a'_0 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f_1(t)\, dt$, on pourra poser dans ce qui suit $t_0+T = t_{p+1}$

Soit $I_0 = \int_{t_0}^{t_{p+1}} f_1(t)\, dt = \sum_{k=0}^{p} \int_{t_k}^{t_{k+1}} f_1(t)\, dt$

Nous savons que :

- f est continue sur tout $]t_k, t_{k+1}[$
- f_1 est localement continue par morceaux sur tout $]t_k, t_{k+1}[$
- f est primitive large de f_1 sur tout $]t_k, t_{k+1}[$

Donc $\int_{t_k}^{t_{k+1}} f_1(t)\, dt = f(t_{k+1}^-) - f(t_k^+)$ (cf tome 1- Transformation de Laplace- Préliminaires- II- 10°)- théorème 3)

$$I_0 = -\sum_{k=0}^{p} \left[f(t_k^+) - f(t_{k+1}^-)\right] = -f(t_0^+) - \sum_{k=1}^{p} \left[f(t_k^+) - f(t_k^-)\right] + f(t_{p+1}^-)$$

Or $t_{p+1} = t_0 + T$ d'où $f(t_{p+1}^-) = f(t_0^-)$

$$I_0 = -\sum_{k=0}^{p} \left[f(t_k^+) - f(t_k^-)\right] = -\sum_{k=0}^{p} \sigma_k$$ en désignant par σ_k le saut de f en t_k.

Or $a'_0 = \frac{1}{T} I_0$ donc

$$\boxed{a'_0 = -\frac{1}{T} \sum_{k=0}^{p} \sigma_k} \quad \text{(A)}$$

b) Calcul de a'_n

$$a'_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f_1(t) \cos n\omega t \, dt = \frac{2}{T} \sum_{k=0}^{p} \int_{t_k}^{t_{k+1}} f_1(t) \cos n\omega t \, dt$$

Les hypothèses sur f et f_1 sont les mêmes que pour le calcul de a'_0

Posons $J_k = \int_{t_k}^{t_{k+1}} f_1(t) \cos n\omega t \, dt$ donc

$$J_k = \Big[f(t) \cos n\omega t\Big]_{t_k}^{t_{k+1}} + n\omega \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t) \sin n\omega t \, dt$$

en intégrant par parties.

$$J_k = f(t_{k+1}^-) \cos n\omega t_{k+1} - f(t_k^+) \cos n\omega t_k + n\omega \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t) \sin n\omega t \, dt$$

(cf tome 1- Transformation de Laplace- Préliminaires- II- 12°)- théorème 4)

$$\sum_{k=0}^{p} J_k = - \sum_{k=0}^{p} \Big[-f(t_{k+1}^-) \cos n\omega t_{k+1} + f(t_k^+) \cos n\omega t_k\Big]$$
$$+ n\omega \sum_{k=0}^{p} \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t) \sin n\omega t \, dt$$

$$\sum_{k=0}^{p} J_k = - f(t_0^+) \cos n\omega t_0 - \sum_{k=1}^{p} \Big[f(t_k^+) \cos n\omega t_k - f(t_k^-) \cos n\omega t_k \Big]$$
$$+ f(t_{p+1}) \cos n\omega t_{p+1} + n\omega \int_{t_0}^{t_{p+1}} f(t) \sin n\omega t \, dt$$

$$\sum_{k=0}^{p} J_k = - \sum_{k=0}^{p} \left[f(t_k^+) - f(t_k^-) \right] \cos n\omega t_k + n\omega \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \sin n\omega t \, dt$$

Or $a'_n = \frac{2}{T} \sum_{k=0}^{p} J_k$ donc

$$\boxed{a'_n = - \frac{2}{T} \sum_{k=0}^{p} \sigma_k \cos n\omega t_k + n\omega \, b_n} \quad (B)$$

c) Calcul de b'_n

$$b'_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f_1(t) \sin n\omega t \, dt = \frac{2}{T} \sum_{k=0}^{p} \int_{t_k}^{t_{k+1}} f_1(t) \sin n\omega t \, dt$$

Posons $J'_k = \int_{t_k}^{t_{k+1}} f_1(t) \sin n\omega t \, dt$ donc

$$J'_k = \Big[f(t) \sin n\omega t \Big]_{t_k}^{t_{k+1}} - n\omega \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t) \cos n\omega t \, dt$$

On démontrerait comme pour J_k que

$$\sum_{k=0}^{p} J'_k = - \sum_{k=0}^{p} \left[f(t_k^+) - f(t_k^-) \right] \sin n\omega t_k - n\omega \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cos n\omega t \, dt$$

Donc que

$$\boxed{b'_n = -\frac{2}{T}\sum_{k=0}^{p} \sigma_k \sin n\omega t_k - n\omega\, a_n} \quad (C)$$

d) Conclusion

Les formules (A), (B), (C) montrent que la série de Fourier associée à f_1 <<dérivée>> de f ne s'obtient pas en général par simple dérivation terme à terme de la série de Fourier associée à f.

e) Remarque

Une condition suffisante pour pouvoir dériver terme à terme: Si f est continue sur $\mathbb{R}$ alors $\forall$ k, $\sigma_k = 0$ donc

$a'_0 = 0$, $a'_n = n\omega\, b_n$ et $b'_n = -n\omega\, a_n$.

Si f et f_1 vérifient les conditions de Dirichlet et si f est continue (f primitive large de f_1) la série de Fourier associée à f_1 peut s'obtenir en dérivant terme à terme la série de Fourier associée à f.

Si $\forall\, t \in \mathbb{R}$, $f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t)$ alors

$$\forall\, t \in \mathbb{R},\ \frac{1}{2}\left[f_1(t^-) + f_1(t^+)\right] = \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t)'$$

ou encore $$\left\{f_1(t)\right\} = \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t)'$$

$$\left\{f_1(t)\right\} = \sum_{n=1}^{+\infty}(n\omega b_n \cos n\omega t - n\omega a_n \sin n\omega t)$$

3°) Détermination du développement en série de Fourier de la <<dérivée>> en utilisant les distributions

Ce paragraphe s'adresse aux lecteurs du tome 2.Rappelons que l'on note $\left[f\right]$ la distribution régulière associée à la fonction f.

a) Préliminaires

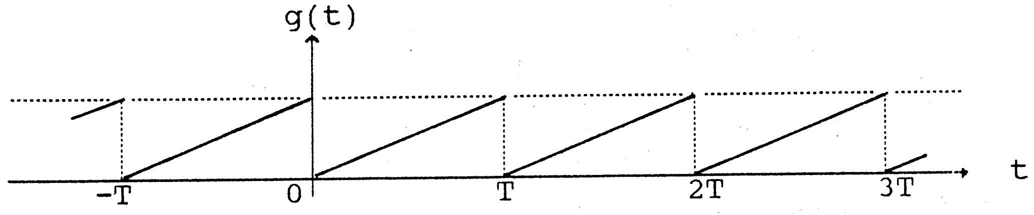
On pourra démontrer (cf tome 2-chapitre 3-VI-5°-sur un exemple-) que si la fonction est périodique de période T et vérifie les conditions de Dirichlet alors :

$$\left[f\right] = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \left[e^{in\omega t}\right]$$

où les c_n sont les coefficients exponentiels de Fourier de f.

La série étant convergente dans $\mathcal{D}'$.

b) Une formule sommatoire de Poisson



Soit la fonction g périodique, de période T définie sur [0 , T [par $g(t) = \frac{t}{T}$ avec $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Calculons le coefficient de Fourier c_n de g pour $n \geq 1$.

$$c_n = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{t}{T}\, e^{-in\omega t}\, dt = \frac{1}{T^2}\left[-\frac{t}{in\omega}\, e^{-in\omega t}\right]_0^T + \frac{1}{in\omega T^2}\int_0^T e^{-in\omega t}\, dt$$

$$= \frac{1}{T^2}\left[\frac{it}{n\omega} e^{-in\omega t} + \frac{1}{n^2\omega^2} e^{-in\omega t}\right]_0^T$$

$$= \frac{1}{T^2}\left(\frac{iT}{n\omega} e^{-2in\pi} + \frac{1}{n^2\omega^2} e^{-2in\pi} - \frac{1}{n^2\omega^2}\right]$$

$$= \frac{i}{2n\pi}$$

d'où $c_n = \frac{i}{2n\pi} = -\frac{1}{2in\pi}$.

Si $n = 0$, $c_0 = a_0 = \frac{1}{2}$ et on en déduit que :

$$[g] = \frac{1}{2} - \frac{1}{2i\pi}\sum_{n \in \mathbb{Z}^*}\left[\frac{e^{in\omega t}}{n}\right]$$

Or $D([g]) = \left[\frac{1}{T}\right] - \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_{nT}$ (cf: tome 2-ch3-III-2-corollaire)

Donc $\left[\frac{1}{T}\right] - \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_{nT} = -\frac{\omega}{2\pi}\sum_{n \in \mathbb{Z}^*}\left[e^{in\omega t}\right]$

$$= -\frac{1}{T}\sum_{n \in \mathbb{Z}^*}\left[e^{in\omega t}\right]$$

On en déduit que:

$$\boxed{\sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_{nT} = \frac{1}{T}\sum_{n \in \mathbb{Z}} \left[e^{in\omega t}\right]}$$

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \left[e^{in\omega t}\right] = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left[\cos n\omega t + i \sin n\omega t\right]$$

On démontre que $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{Z}} \left[\cos n\omega t + i \sin n\omega t\right] = 1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \left[\cos n\omega t\right]$

d'où $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_{nT} = \left[\frac{1}{T}\right] + \frac{2}{T}\sum_{n=1}^{+\infty} \left[\cos n\omega t\right]$

Soit $u = \displaystyle\sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_{nT}$, en notant $*$ la convolution des distributions

et t_k un réel fixé. On a :

$\displaystyle\delta_{t_k} * u = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_{nT + t_k}$ (cf tome 2-ch 4-IV-1 et 2)

$$\delta_{t_k} * u = \frac{1}{T}\sum_{n \in \mathbb{Z}} \left[e^{in\omega(t-t_k)}\right] = \frac{1}{T}\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-i\omega t_k} \left[e^{in\omega t}\right]$$

$$\boxed{\sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_{nT + t_k} = \frac{1}{T} + \frac{2}{T}\sum_{n=1}^{+\infty} \left[\cos n\omega(t-t_k)\right]}$$

c) Développement en série de Fourier de f_1

Soient les fonctions f et f_1 vérifiant les conditions de Dirichlet considérées dans le 2°, f_1 <<dérivée>> de f est localement continue par morceaux sur tout $\left]t_k\ ,\ t_{k+1}\right[$ et f est primitive large de f_1 sur tout $\left]t_k\ ,\ t_{k+1}\right[$.

Soit σ_k le saut de f en t_k

Donc $D\left(\left[f\right]\right) = \left[f_1\right] + \sum_{k=0}^{p} \left(\sigma_k \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_{t_k+nT} \right)$

or $\delta_{t_k+nT} = \delta_{t_k} * \delta_{nT}$

d'où $D\left(\left[f\right]\right) = \left[f_1\right] + \sum_{k=0}^{p} \left(\sigma_k \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_{t_k} * \delta_{nT} \right)$

$$D\left(\left[f\right]\right) = \left[f_1\right] + \sum_{k=0}^{p} \left(\sigma_k\, \delta_{t_k} * \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_{nT} \right)$$

$$D\left(\left[f\right]\right) = \left[f_1\right] + \left(\sum_{k=0}^{p} \sigma_k\, \delta_{t_k} \right) * \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_{nT}$$

Par ailleurs $\left[f\right] = \left[a_0\right] + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \left[\cos n\omega t\right] + b_n \left[\sin n\omega t\right] \right)$

donc $D\left(\left[f\right]\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(- n\omega a_n \left[\sin n\omega t\right] + n\omega b_n \left[\cos n\omega t\right] \right)$

d'où

$$\left[f_1\right] + \left(\sum_{k=0}^{p} \sigma_k\, \delta_{t_k}\right) * \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_{nT}$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(- n\omega a_n \left[\sin n\omega t\right] + n\omega b_n \left[\cos n\omega t\right] \right)$$

on sait que (cf b) $\delta_{t_k} * \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_{nT} = \frac{1}{T} + \frac{2}{T} \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\cos n\omega(t-t_k)\right]$

d'où:

$$\left(\sum_{k=0}^{p} \sigma_k\, \delta_{t_k}\right) * \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_{nT} = \sum_{k=0}^{p} \sigma_k \left(\frac{1}{T} + \frac{2}{T} \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\cos n\omega(t-t_k)\right] \right)$$

On en déduit que

$$\left[f_1\right] = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(n\omega b_n \left[\cos n\omega t\right] - n\omega a_n \left[\sin n\omega t\right] \right)$$

$$- \sum_{k=0}^{p} \sigma_k \left(\frac{1}{T} + \frac{2}{T} \sum_{n=1}^{+\infty} \cos\ n\omega t_k \left[\cos n\omega t\right] + \sin n\omega t_k \left[\sin n\omega t\right] \right)$$

$$\left[f_1\right] = -\frac{1}{T} \sum_{k=0}^{p} \sigma_k + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(n\omega b_n - \frac{2}{T} \sum_{k=0}^{p} \sigma_k \cos n\omega t_k\right) \left[\cos n\omega t\right]$$

$$+ \left(- n\omega a_n - \frac{2}{T} \sum_{k=0}^{p} \sigma_k \sin n\omega t_k\right) \left[\sin n\omega t\right]$$

On constate que l'on retrouve ici les résultats obtenus au 2°:

$$a'_0 = -\frac{1}{T}\sum_{k=0}^{p} \sigma_k$$

$$a'_n = n\omega b_n - \frac{2}{T}\sum_{k=0}^{p} \sigma_k \cos n\omega t_k$$

$$b'_n = -n\omega a_n - \frac{2}{T}\sum_{k=0}^{p} \sigma_k \sin n\omega t_k$$

d) Conclusion

Dans tous les cas, y compris pour f <u>non continue</u> on obtient les formules précédentes en dérivant <u>au sens des distributions</u> chaque membre de l'égalité ci-dessous

$$[f] = [a_0] + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n [\cos n\omega t] + b_n [\sin n\omega t] \right)$$

et en utilisant

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_{nT+t_k} = \frac{1}{T} + \frac{2}{T}\sum_{n=1}^{+\infty} [\cos n\omega(t-t_k)]$$

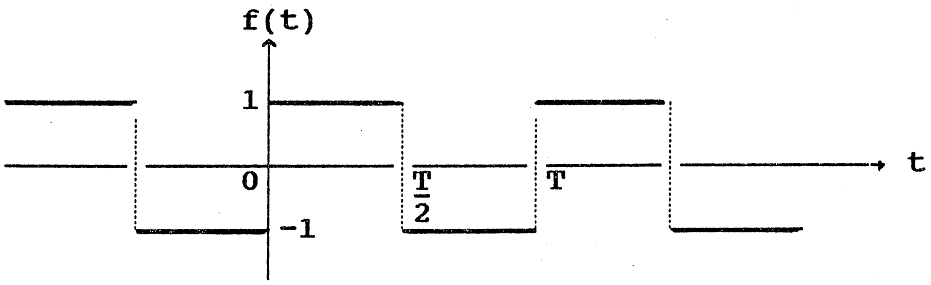
e) Exemples

On va utiliser ici la <<dérivée>> de f pour obtenir le développement en série de Fourier de f

■ Exemple 1

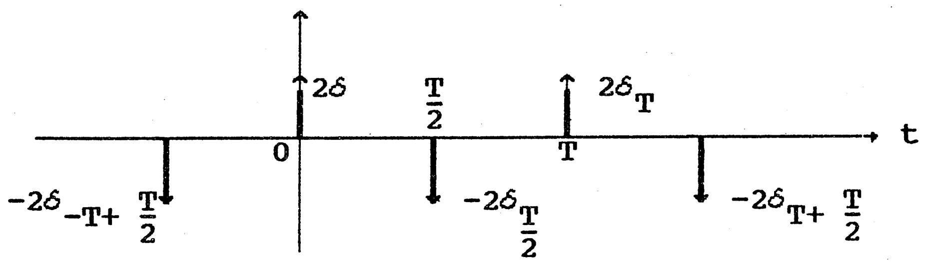
Soit la fonction f, impaire, de période T, définie par :

$$\forall\, t \in \left]\, 0\ ;\ \frac{T}{2} \,\right[\quad ,\ f(t) = 1$$



$$\left[f\right] = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \left[\sin n\omega t\right] \qquad (1)$$

On peut représenter D([f]) par le schéma ci-dessous :



$$D\left(\left[f\right]\right) = 2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_{kT} - 2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_{\frac{T}{2}+kT} \qquad (2)$$

et en dérivant membre à membre (1)

$$D\left(\left[f\right]\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\omega b_n \left[\cos n\omega t\right]$$

D'après le résultat obtenu en b) on déduit de (2) que :

$$D\left(\left[f\right]\right) = \frac{2}{T} + \frac{4}{T}\sum_{n\geq 1}\left[\cos n\omega t\right] - \frac{2}{T} - \frac{4}{T}\sum_{n\geq 1}\left[\cos n\omega(t-\frac{T}{2})\right]$$

$$= \frac{4}{T}\sum_{n\geq 1}\left[\cos n\omega t - \cos n\omega(t-\frac{T}{2})\right] \qquad T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$D\left(\left[f\right]\right) = \frac{4}{T}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(1-\cos n\omega\frac{T}{2}\right)\cos n\omega t = \frac{4}{T}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(1-\cos n\pi\right)\cos n\omega t$$

Dans le développement ci-dessus

– *si* n *est pair*, $n = 2k$, le coefficient de $\cos(2k\omega t)$ est nul donc $b_{2k} = 0$

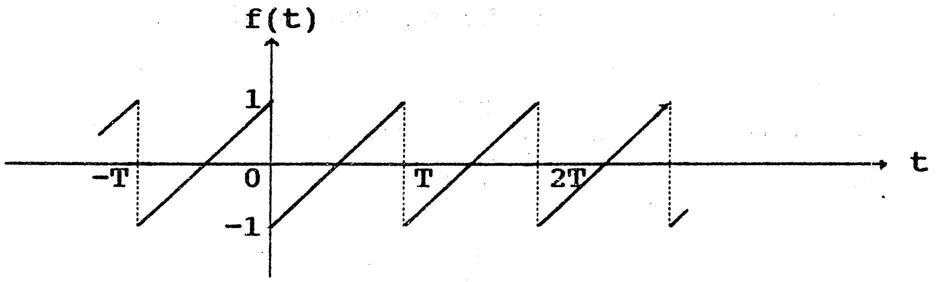
–*si* n *est impair*, $n = 2k+1$, le coefficient de $\cos((2k+1)\omega t)$ est $\frac{8}{T}$ donc $n\omega b_{2k+1} = (2k+1)\frac{2\pi}{T}b_{2k+1} = \frac{8}{T}$ d'où $b_{2k+1} = \frac{4}{(2k+1)\pi}$

donc $[f] = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{4}{(2k+1)\pi}\left[\sin(2k+1)\omega t\right]$ et

$$\left\{f(t)\right\} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{4}{(2k+1)\pi}\sin(2k+1)\omega t$$

■ Exemple 2

Soit la fonction f, impaire, de période T, définie sur]0 ; T[par : $f(t) = \frac{2}{T}t - 1$.



$$\left[f\right] = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \left[\sin n\omega t\right]$$

$$D\left(\left[f\right]\right) = \left[\ \frac{2}{T}\ \right] - 2\sum_{n\ \in\ \mathbb{Z}} \delta_{nT} = \sum_{n=1}^{+\infty} n\omega b_n \left[\cos n\omega t\right]$$

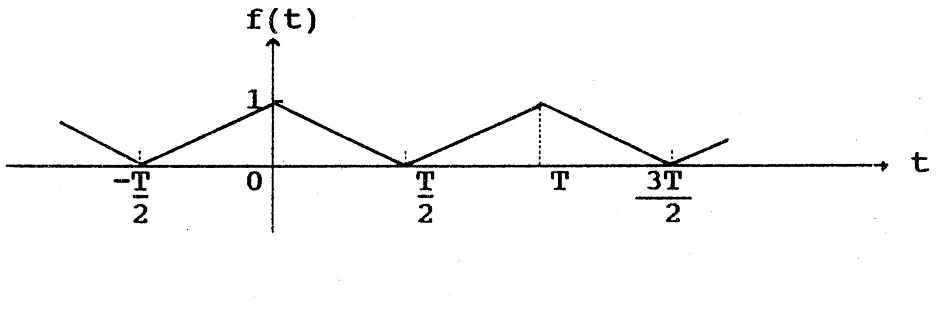
$$\left[\ \frac{2}{T}\ \right] - \left[\ \frac{2}{T}\ \right] - \frac{4}{T} \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\cos n\omega t\right] = \sum_{n=1}^{+\infty} n\omega b_n \left[\cos n\omega t\right]$$

d'où $n\omega b_n = -\frac{4}{T}$; $b_n = -\frac{4}{n\omega T} = -\frac{2}{n\pi}$

$$\left\{f(t)\right\} = \sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{2}{n\pi}\ \sin n\omega t$$

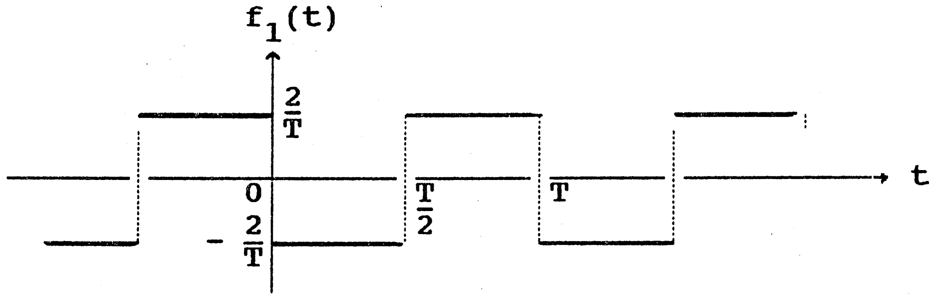
■ Exemple 3

Soit la fonction f, paire, de période T, définie sur $[0 ; \frac{T}{2}]$ par : $f(t) = -\frac{2}{T}t + 1$.



$$\left[f\right] = \left[a_0\right] + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \left[\cos n\omega t\right]$$

la fonction f_1 << dérivée >> de f est impaire, de période T, définie sur $]0\ ; \frac{T}{2}[$ par : $f_1(t) = -\ \frac{2}{T}$.



f étant continue on a :

$$\left[f_1\right] = D\left(\left[f\right]\right) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \left[a_n n\omega \sin n\omega t\right]$$

$$D\left(\left[f_1\right]\right) = D^{(2)}\left(\left[f\right]\right) = -\ \frac{4}{T} \sum_{n\,\in\,\mathbb{Z}} \delta_{nT} + \frac{4}{T} \sum_{n\,\in\,\mathbb{Z}} \delta_{nT+\frac{T}{2}}$$

D'autre part

$$D^{(2)}\left(\left[f\right]\right) = -\sum_{n=1}^{+\infty} a_n n^2 \omega^2 \left[\cos n\omega t\right]$$

d'où

$$\frac{4}{T}\left(\frac{1}{T}+\frac{2}{T}\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\cos n\omega t\right]\right)-\frac{4}{T}\left(\frac{1}{T}+\frac{2}{T}\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\cos n\omega\left(t-\frac{T}{2}\right)\right]\right.$$

$$=\sum_{n=1}^{+\infty} a_n n^2\omega^2\left[\cos n\omega t\right]$$

$$\frac{8}{T^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\cos n\omega t-\cos\left(n\omega t-n\pi\right)\right]=\sum_{n=1}^{+\infty} a_n n^2\omega^2\left[\cos n\omega t\right]$$

$$\frac{8}{T^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(1-(-1)^n\right)\left[\cos n\omega t\right]=\sum_{n=1}^{+\infty} a_n n^2\omega^2\left[\cos n\omega t\right]$$

d'où $a_n n^2\omega^2 = \frac{8}{T^2}\left(1-(-1)^n\right)$ pour $\underline{n \geq 1}$

il en résulte que

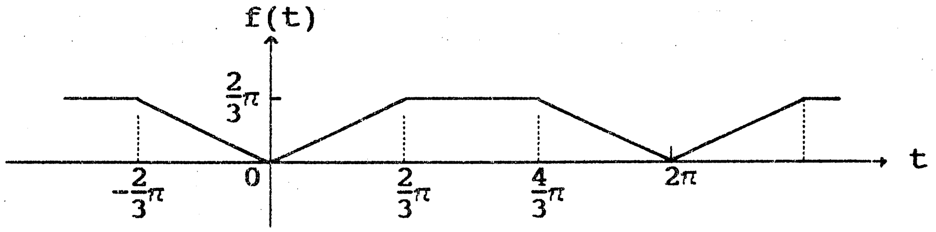
$$a_{2k}=0 \quad \text{et} \quad a_{2k+1}(2k+1)^2\omega^2=\frac{16}{T^2} \quad \text{soit} \quad a_{2k+1}=\frac{4}{(2k+1)^2\pi^2}$$

Par ailleurs on doit calculer directement a_0, on obtient $a_0 = \frac{1}{2}$

d'où $\left\{f(t)\right\} = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\cos(2k+1)\omega t$

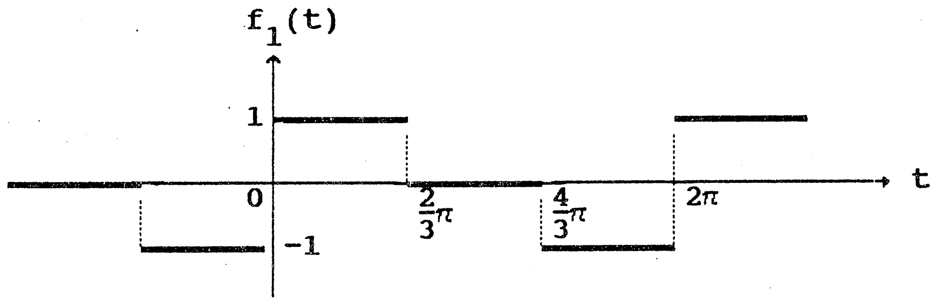
■ Exemple 4

Soit la fonction f, de période 2π, définie par sa représentation graphique



En utilisant ses <<dérivées>> première f_1 et seconde f_2 on va calculer le développement en série de Fourier de f.

$$\left[f\right] = \left[a_0\right] + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \left[\cos nt\right]$$



$$\text{ici, } \left[f_1\right] = D\left(\left[f\right]\right) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \left[a_n\, n \sin nt\right]$$

f_2 est définie pour tout $t \neq k\,\frac{2}{3}\,\pi$ et nulle partout où elle est définie d'où :

$$D^{(2)}\left(\left[f\right]\right) = 2\sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_{k2\pi} - \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_{\frac{2\pi}{3}+k2\pi} - \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_{\frac{4\pi}{3}+k2\pi}$$

$$D^{(2)}\left(\left[f\right]\right) = \frac{2}{T} + \frac{4}{T}\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\cos nt\right] - \frac{1}{T} - \frac{2}{T}\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\cos n(t-\frac{2\pi}{3})\right]$$

$$- \frac{1}{T} - \frac{2}{T}\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\cos n(t-\frac{4\pi}{3})\right]$$

$$D^{(2)}\left(\left[f\right]\right) = \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\left[2\cos nt - \cos n(t-\frac{2\pi}{3}) - \cos n(t-\frac{4\pi}{3})\right]$$

$$D^{(2)}\left(\left[f\right]\right) = \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\left(2 - \cos\frac{2n\pi}{3} - \cos\frac{4n\pi}{3}\right)\cos nt\right.$$

$$\left. - \left(\sin\frac{2n\pi}{3} + \sin\frac{4n\pi}{3}\right)\sin nt\right]$$

or $\sin\frac{2n\pi}{3} + \sin\frac{4n\pi}{3} = 0$ et $\cos\frac{2n\pi}{3} + \cos\frac{4n\pi}{3} = 2(-1)^n\cos\frac{n\pi}{3}$

d'où $D^{(2)}\left(\left[f\right]\right) = \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\left(2 - 2(-1)^n\cos\frac{n\pi}{3}\right)\cos nt\right]$

Par ailleurs $D^{(2)}\left(\left[f\right]\right) = -\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 a_n\left[\cos nt\right]$

donc $-n^2 a_n = \frac{2}{\pi}\left(1 - (-1)^n\cos\frac{n\pi}{3}\right)$ et $n \geq 1$

$$a_n = \frac{-4}{\pi n^2}\left(1 - (-1)^n\cos\frac{n\pi}{3}\right)$$

$a_0 = \frac{4\pi}{9}$ (calcul direct)

D'où $\left\{f(t)\right\} = \frac{4\pi}{9} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \left[1 - (-1)^n \cos \frac{n\pi}{3}\right] \cos nt$.

Remarque :

Si on note $\left[f_1\right] = \sum_{n=1}^{+\infty} b'_n \left[\sin nt\right]$ on en déduit immédiatement que

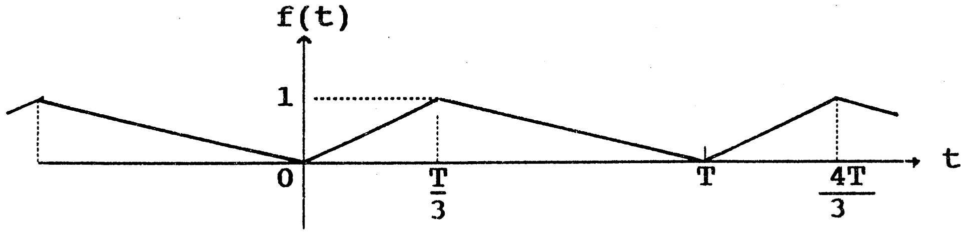
$$b'_n = -na_n = \frac{4}{\pi n} \left[1 - (-1)^n \cos \frac{n\pi}{3}\right]$$

d'où

$$\left\{f_1(t)\right\} = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \left[1 - (-1)^n \cos \frac{n\pi}{3}\right] \sin nt .$$

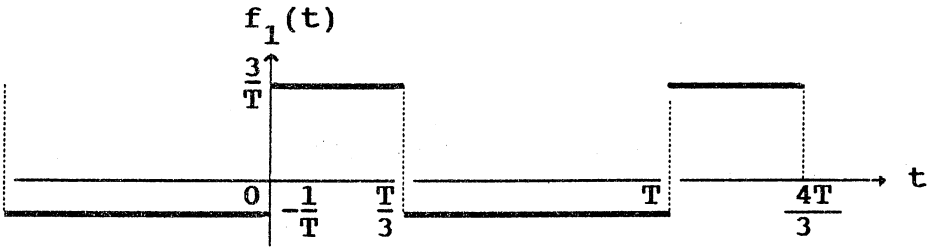
■ Exemple 5

Soit la fonction f, de période T, définie par sa représentation graphique



En utilisant ses <<dérivées>> première f_1 et seconde f_2 on va calculer le développement en série de Fourier de f.

$$\left[f\right] = \left[a_0\right] + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t\right]$$



$$\left[f_1\right] = D\left(\left[f\right]\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[-n\omega a_n \sin n\omega t + n\omega b_n \cos n\omega t\right]$$

$$D^{(2)}\left(\left[f\right]\right) = \frac{4}{T} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_{nT} - \frac{4}{T} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_{nT+\frac{T}{3}}$$

$$D^{(2)}\left(\left[f\right]\right) = \frac{8}{T^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\cos n\omega t - \cos n\omega\left(t - \frac{T}{3}\right)\right]$$

or $\cos\left(n\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) = \cos n\omega t \cos\frac{2\pi}{3} + \sin n\omega t \sin\frac{2\pi}{3}$

$$= -\frac{1}{2} \cos n\omega t + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin n\omega t$$

donc

$$D^{(2)}\left(\left[f\right]\right) = \frac{8}{T^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{3}{2} \cos n\omega t - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin n\omega t\right]$$

et par ailleurs

$$D^{(2)}\left(\left[f\right]\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[-n^2\omega^2 a_n \cos n\omega t - n^2\omega^2 b_n \sin n\omega t\right]$$

On en déduit que :

$$\frac{12}{T^2} = -a_n n^2\omega^2 \text{ et } \frac{4\sqrt{3}}{T^2} = b_n n^2\omega^2 \quad (\omega^2 T^2 = 4\pi^2)$$

donc

$$a_n = - \frac{3}{n^2\pi^2} \text{ et } b_n = \frac{\sqrt{3}}{n^2\pi^2} .$$

d'où

$$\left\{f(t)\right\} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \left[- \frac{3}{n^2} \cos n\omega t + \frac{\sqrt{3}}{n^2} \sin n\omega t \right]$$

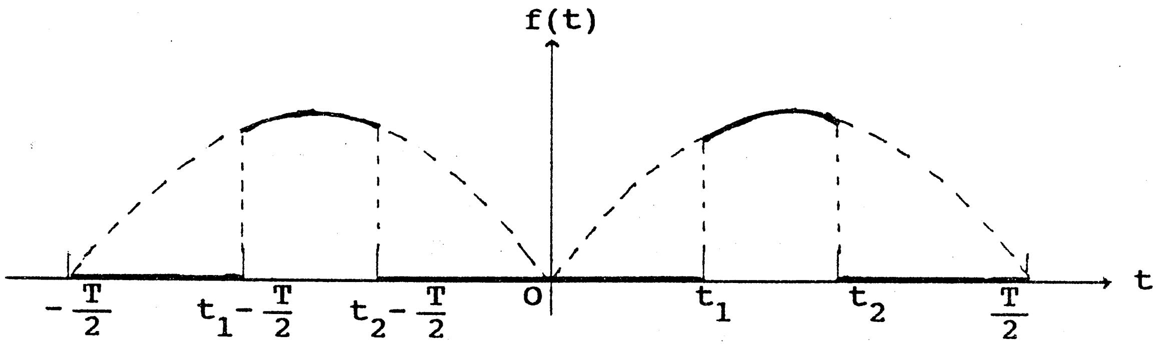
■ Exemple 6

Nous allons trouver le développement en série de Fourier d'une fonction par deux méthodes différentes : la méthode classique de calcul des coefficients à l'aide d'intégrales puis la dérivation au sens des distributions.

Soit f de période $T' = \frac{T}{2}$ définie par : $0 < t_1 < t_2 < \frac{T}{2}$ et

$$\forall\, t \in [0\ ; \frac{T}{2}]\ ,\ f(t) = (\sin\omega t)\ (\mathcal{U}(t - t_1) - \mathcal{U}(t - t_2))\ .$$

où on a posé $\omega = \frac{2\pi}{T}$. (Attention f a pour pulsation $\omega' = 2\omega$) .



α) Méthode classique

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_2} \sin \omega t \, dt = \frac{\cos \omega t_1 - \cos \omega t_2}{\pi}$$

$$\forall\, n \geq 1, \quad a_n = \frac{4}{T} \int_{t_1}^{t_2} \sin \omega t . \cos 2n\omega t . dt \, .$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\cos (2n+1)\omega t_1 - \cos (2n+1)\omega t_2}{2n + 1} - \frac{\cos (2n-1)\omega t_1 - \cos (2n-1)\omega t_2}{2n - 1} \right]$$

$$\forall\, n \geq 1, \quad b_n = \frac{4}{T} \int_{t_1}^{t_2} \sin \omega t . \sin 2n\omega t . dt \, .$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin (2n+1)\omega t_1 - \sin (2n+1)\omega t_2}{2n + 1} - \frac{\sin (2n-1)\omega t_1 - \sin (2n-1)\omega t_2}{2n - 1} \right]$$

$$\left\{ f(t) \right\} = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos 2n\omega t + b_n \sin 2n\omega t) \, .$$

β) Méthode utilisant la dérivation des distributions

Considérons d'abord la distribution

$$u_1 = \left[(\sin\omega t) \; (\mathcal{U}(t - t_1) - \mathcal{U}(t - t_2)) \right]$$

$$D(u_1)=\Big[(\omega\cos\omega t)(\mathcal{U}(t-t_1)-\mathcal{U}(t-t_2))\Big]+(\sin\omega t_1)\,\delta_{t_1}-(\sin\omega t_2)\,\delta_{t_2}.$$

$$D^{(2)}(u_1)= -\omega^2 u_1+(\omega\cos\omega t_1)\,\delta_{t_1}-(\omega\cos\omega t_2)\,\delta_{t_2}$$
$$+(\sin\omega t_1)\,D(\delta_{t_1})-(\sin\omega t_2)\,D(\delta_{t_2})$$

$$[f]=u_1 * \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_{n\frac{T}{2}}$$

$$D^{(2)}([f]) = D^{(2)}\Big[u_1*\sum_{n\in\mathbb{Z}}\delta_{n\frac{T}{2}}\Big] = D^{(2)}(u_1) * \sum_{n\in\mathbb{Z}}\delta_{n\frac{T}{2}}$$

$$D^{(2)}([f]) = \Big[-\omega^2 u_1+(\omega\cos\omega t_1)\,\delta_{t_1}-(\omega\cos\omega t_2)\,\delta_{t_2}$$
$$+(\sin\omega t_1)\,D(\delta_{t_1})-(\sin\omega t_2)\,D(\delta_{t_2})\Big] * \sum_{n\in\mathbb{Z}}\delta_{n\frac{T}{2}}$$

Or $-\omega^2 u_1 * \sum_{n\in\mathbb{Z}}\delta_{n\frac{T}{2}} = -\omega^2\,[f]$; donc

$$D^{(2)}([f]) = -\omega^2\,[f] + \Big[(\omega\cos\omega t_1)\,\delta_{t_1}-(\omega\cos\omega t_2)\,\delta_{t_2}$$
$$+(\sin\omega t_1)\,D(\delta_{t_1})-(\sin\omega t_2)\,D(\delta_{t_2})\Big] * \sum_{n\in\mathbb{Z}}\delta_{n\frac{T}{2}}$$

$$D^{(2)}([f]) + \omega^2\,[f] = \Big[(\omega\cos\omega t_1)\,\delta_{t_1}-(\omega\cos\omega t_2)\,\delta_{t_2}$$
$$+(\sin\omega t_1)\,D(\delta_{t_1})-(\sin\omega t_2)\,D(\delta_{t_2})\Big] * \sum_{n\in\mathbb{Z}}\delta_{n\frac{T}{2}}$$

$$D^{(2)}([f]) + \omega^2 [f] = \Big[(\omega \cos\omega t_1)\, \delta_{t_1} - (\omega \cos\omega t_2)\, \delta_{t_2}$$

$$+ (\sin\omega t_1)\, D(\delta_{t_1}) - (\sin\omega t_2)\, D(\delta_{t_2})\Big] * \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_{n\frac{T}{2}}$$

En utilisant la formule de Poisson

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_{n\frac{T}{2}} = \left[\frac{2}{T}\right] + \frac{4}{T} \sum_{n=1}^{+\infty} [\cos 2n\omega t]$$

On obtient, puisque : $\delta_\alpha * [1] = [1]$,

$\delta_\alpha * [\cos\omega t] = [\cos\omega(t - \alpha)]$, $\delta_\alpha * [\sin\omega t] = [\sin\omega(t - \alpha)]$,

$D(\delta_\alpha) * [\cos\omega t] = -\omega\, [\sin\omega(t - \alpha)]$ et

$D(\delta_\alpha) * [\sin\omega t] = \omega\, [\cos\omega(t - \alpha)]$.

$$D^{(2)}([f]) + \omega^2 [f] = 2\, \frac{\omega \cos\omega t_1 - \omega \cos\omega t_2}{T}$$

$$+ \frac{4}{T} \sum_{n=1}^{+\infty} \Big[\omega \cos\omega t_1\, [\cos 2n\omega(t-t_1)] - \omega \cos\omega t_2\, [\cos 2n\omega(t-t_2)]$$

$$- 2n\omega \sin\omega t_1\, [\sin 2n\omega(t-t_1)] + 2n\omega \sin\omega t_2\, [\sin 2n\omega(t-t_2)]\Big]$$

(Formule (1))

D'autre part,

$$[f] = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n [\cos 2n\omega t] + b_n [\sin 2n\omega t]) .$$

$$D^{(2)}([f]) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-4n^2\omega^2 a_n [\cos 2n\omega t]-4n^2\omega^2 b_n[\sin 2n\omega t]) .$$

D'où

$$D^{(2)}([f]) + \omega^2 [f] =$$

$$\omega^2 a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\omega^2(1 - 4n^2) a_n [\cos 2n\omega t]+ \omega^2(1 - 4n^2)b_n[\sin 2n\omega t]\right)$$

On en déduit, en admettant l'unicité d'un tel développement :

$$\omega^2 a_0 = 2 \frac{\omega \cos\omega t_1 - \omega \cos\omega t_2}{T}$$

$\omega^2(1 - 4n^2) a_n$ et $\omega^2(1 - 4n^2)b_n$ sont égaux aux coefficients respectifs de $[\cos 2n\omega t]$ et $[\sin 2n\omega t]$ dans la formule (1) précédente . On en déduit a_n et b_n.

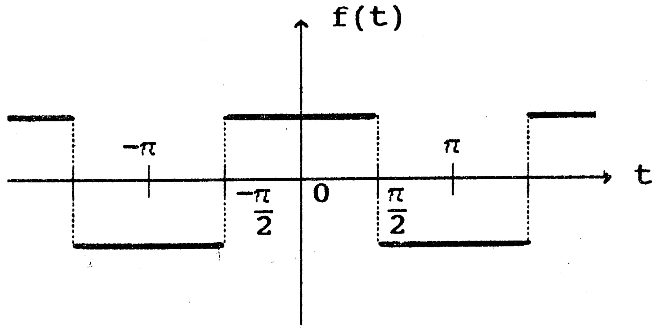
On retrouve évidemment les résultats du calcul classique qui est dans ce cas le plus rapide.

III- EXEMPLES OU EXERCICES UTILISANT DES RESULTATS OBTENUS AU I ET II

1°) Exemple 1

a) *Soit* f *paire, périodique, de période* 2π, *définie par :*

$$\begin{cases} f(t) = 1 & \text{si } t \in [\, 0 \,,\, \frac{\pi}{2} \,[\\ f(t) = -1 & \text{si } t \in]\, \frac{\pi}{2} \,,\, \pi \,] \end{cases}$$



f est paire, sa valeur moyenne sur $[\,-\pi \,,\, \pi\,]$ est nulle donc $a_0 = 0$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $b_n = 0$.

Il y a des discontinuités de première espèce sur $[-\frac{\pi}{2} \,,\, \frac{3\pi}{2}[$ en $t_0 = -\frac{\pi}{2}$ et $t_1 = \frac{\pi}{2}$.

Les sauts correspondants sont : $\sigma_0 = 2$ et $\sigma_1 = -2$.

La << dérivée >> est nulle donc $a'_0 = a'_n = b'_n = 0$.

D'aprés la formule (C) on peut écrire :

$$0 = -\frac{1}{\pi}\left[\, 2 \sin\left(-n \frac{\pi}{2}\right) - 2 \sin\left(n \frac{\pi}{2}\right)\right] - n\, a_n \qquad \text{d'où :}$$

$$a_n = \frac{4}{n\,\pi} \sin n \frac{\pi}{2} \qquad \text{donc } a_{2p} = 0 \text{ et } a_{2p+1} = \frac{4}{(2p+1)\,\pi}\,(-1)^p$$

La série de Fourier associée à f est :

$$\left\{ f(t) \right\} = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2\,p+1} \cos\,(2\,p+1)t$$

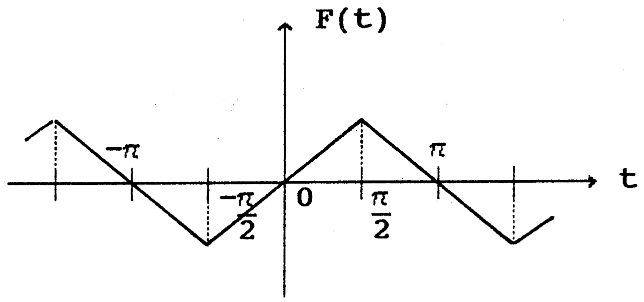
b) *Soit F définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $F(t) = \int_0^t f(x)\,dx$

F est impaire, périodique, de période 2π, continue sur $\mathbb{R}$ et telle

que : $\begin{cases} F(t) = t & \text{si } t \in [\,0\,,\,\frac{\pi}{2}\,] \\ F(t) = -\,t + \pi & \text{si } t \in [\,\frac{\pi}{2}\,,\,\pi\,] \end{cases}$

$F(0) = 0$ et F est une primitive large de f.

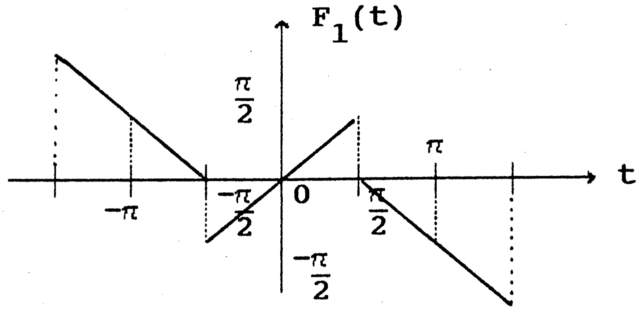
$A_0 = 0$ car F est impaire.



Pour obtenir la série de Fourier associée à F on peut intégrer terme à terme la série associée à f.

$$\left\{ F(t) \right\} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{4}{n^2\pi} \sin n\,\frac{\pi}{2} \right] \sin nt = \frac{4}{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)^2} \sin\,(2p+1)t$$

c) *Soit la fonction* F_1 , *périodique, définie par sa représentation graphique*



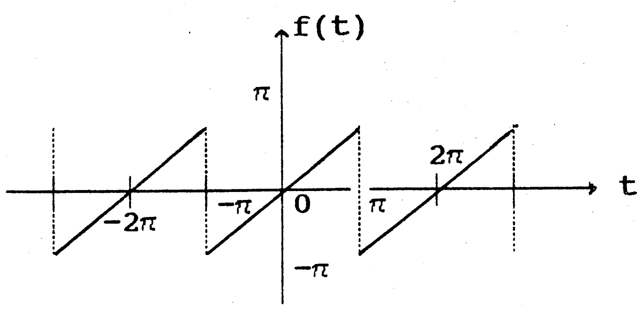
f est la << dérivée >> de F_1.

Pour tout $t \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, $F_1'(t) = f(t)$, mais pour obtenir la série de Fourier associée à F_1 , on ne peut pas intégrer terme à terme la série associée à f, car F_1 n'est pas continue sur $\mathbb{R}$ et n'est pas une primitive large de f.

2°) Exemple 2

a) *Soit la fonction* f, *de période* 2π, *définie par :*

$$f(t) = t \quad \text{si } t \in]-\pi , \pi[$$



f est impaire, sa valeur moyenne sur $]-\pi , \pi[$ est nulle donc $a_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = 0$

La fonction << dérivée >> f_1 est définie par $f_1(t) = 1$ sur tout $]-\pi + 2k\pi \, , \pi + 2k\pi[$ donc $a'_n = 0$.

Sachant que sur $[-\pi \, , +\pi[$ la fonction f présente un seul saut $\sigma_0 = -2\pi$ en $t_0 = -\pi$ et que, de plus, $\omega = 1$, $T = 2\pi$ et $a'_n = 0$, en utilisant la formule (B) , on a :

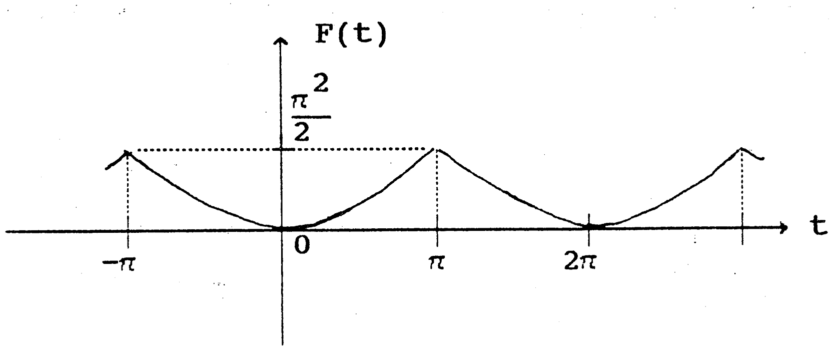
$$0 = -\frac{1}{\pi}(-1)^n(-2\pi) + n\,b_n \quad \text{d'où} \quad b_n = 2\,\frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

et $$\{f(t)\} = 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nt$$

b) *Soit* F *définie sur* $\mathbb{R}$ par $F(t) = \displaystyle\int_0^t f(x)\,dx$.

F est paire, de période 2π et continue sur $\mathbb{R}$, $F(0) = 0$ et F est une primitive large de f. F est définie sur $[-\pi \, , \pi]$ par $F(t) = \frac{t^2}{2}$

$$A_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{t^2}{2}\,dt = \frac{1}{2\pi}\,2\int_0^{\pi}\frac{t^2}{2}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}t^2\,dt = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{6}$$



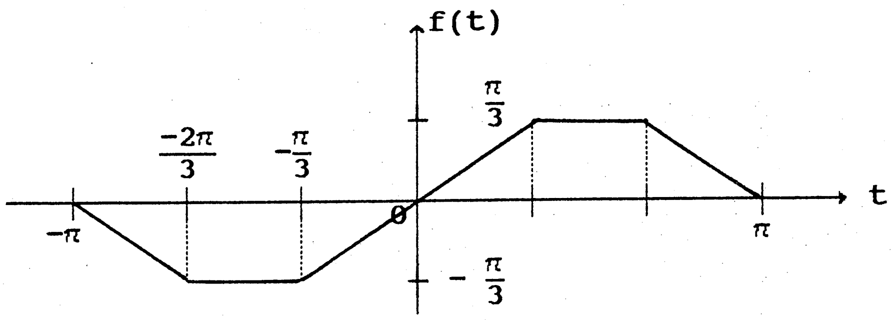
Pour obtenir $\left\{F(t)\right\}$ on peut "intégrer" terme à terme $\left\{f(t)\right\}$, il vient donc $\left\{F(t)\right\} = \frac{\pi^2}{6} + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nt$

3°) Exemple 3

a) *Soit la fonction* f, *de période* 2π, *impaire définie par :*

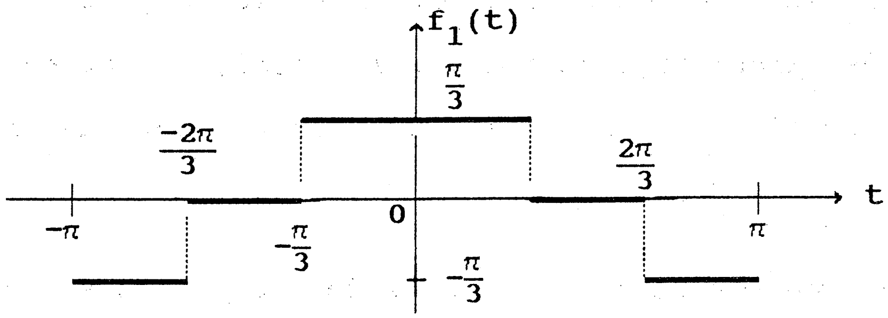
$$\begin{cases} f(t) = t & \text{si } t \in [\, 0 \,,\, \frac{\pi}{3} \,] \\ f(t) = \frac{\pi}{3} & \text{si } t \in [\, \frac{\pi}{3} \,,\, \frac{2\pi}{3} \,] \\ f(t) = -t + \pi & \text{si } t \in [\, \frac{2\pi}{3} \,,\, \pi \,] \end{cases}$$

f est continue sur $\mathbb{R}$



La fonction f_1 <<dérivée>> de f est de période 2π, paire et définie par

$$\begin{cases} f_1(t) = 1 & \text{si } t \in \,]\, 0 \,,\, \frac{\pi}{3} \,[\\ f_1(t) = 0 & \text{si } t \in \,]\, \frac{\pi}{3} \,,\, \frac{2\pi}{3} \,[\\ f_1(t) = -1 & \text{si } t \in \,]\, \frac{2\pi}{3} \,,\, \pi \,[\end{cases}$$



Enfin la fonction f_2 <<dérivée>> seconde de f est partout nulle sur chacun des intervalles partiels limités par les points de discontinuité de f_1.

La série de Fourier associée à f_2 a tous ses coefficients nuls.

Soient a_0, a_n et b_n les coefficients de Fourier de f_1, la valeur moyenne de f_1 sur un intervalle d'amplitude 2π est nulle donc $a_0 = 0$.

f_1 étant paire, tous les coefficients des termes en sin nt sont nuls.

Sur $[-\pi,\pi[$, les points de discontinuité de f_1 sont $t_0 = -\frac{2\pi}{3}$, $t_1 = -\frac{\pi}{3}$, $t_2 = \frac{\pi}{3}$, $t_3 = \frac{2\pi}{3}$ et $\sigma_0 = 1$, $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = -1$, $\sigma_3 = -1$.

La formule (C) nous donne $\frac{2}{\pi}\left[\sin\frac{2n\pi}{3} + \sin\frac{n\pi}{3}\right] = n\, a_n$ d'où

$$a_n = \frac{4}{\pi n}\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(n\frac{\pi}{6}\right) \qquad \text{donc}$$

$$\left\{f_1(t)\right\} = \frac{2\sqrt{3}}{\pi}\left[\cos t - \frac{\cos 5t}{5} + \frac{\cos 7t}{7} - \dots - \frac{\cos(6p-1)t}{6p-1} + \frac{\cos(6p+1)t}{6p+1} - \dots\right]$$

La fonction f_1 vérifie les conditions de Dirichlet, elle est de période 2π, de valeur moyenne nulle sur $[-\pi,\pi[$, f continue sur $\mathbb{R}$ est donc une primitive large de f_1 de valeur moyenne nulle sur $[-\pi,\pi]$.

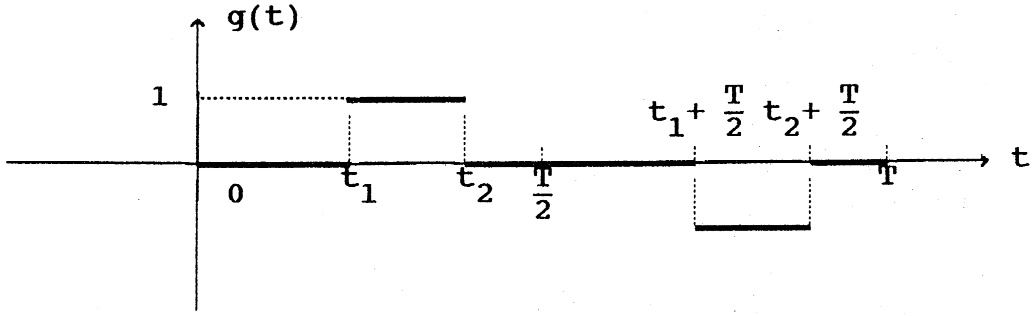
On peut donc intégrer terme à terme le développement en série de Fourier de f_1 pour obtenir celui de f.

$$\{f(t)\} = \frac{2\sqrt{3}}{\pi}\left[\sin t - \frac{\sin 5t}{5^2} + \frac{\sin 7t}{7^2} - \dots - \frac{\sin(6p-1)t}{(6p-1)^2} + \frac{\sin(6p+1)t}{(6p+1)^2} - \dots\right]$$

4°) Exemple 4 (Le résultat obtenu dans cet exemple sera utilisé en IV)

Soit la fonction g de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$ définie sur $[0,T]$ par :

$$g(t) = \mathcal{U}(t - t_1) - \mathcal{U}(t - t_2) - \left[\mathcal{U}(t - t_1 - \tfrac{T}{2}) - \mathcal{U}(t - t_2 - \tfrac{T}{2})\right]$$



Soient a_0, a_n et b_n les coefficients de Fourier de g, la valeur moyenne de g sur $[0,T]$ est nulle donc $a_0 = 0$.

g_1 <<dérivée>> de g est nulle pour tout t où elle est définie, d'où les coefficients de g_1 : $a'_0 = a'_n = b'_n = 0$.

Considérons les sauts de g sur [0,T[, le saut en t_1 est $\sigma_1 = 1$, le saut en t_2 est $\sigma_2 = -1$, le saut en $t_1 + \frac{T}{2}$ est $\sigma_3 = -1$, le saut en $t_2 + \frac{T}{2}$ est $\sigma_4 = 1$.

En utilisant les résultats du II- 2°) Formules B et C, on a :

$$0 = -\frac{2}{T}\left[\cos n\omega t_1 - \cos n\omega t_2 - \cos n\omega(t_1 + \frac{T}{2}) + \cos n\omega(t_2 + \frac{T}{2})\right] + n\omega b_n$$

$$\text{d'où } n\omega b_n = \frac{2}{T}\left[1 - (-1)^n\right]\left[\cos n\omega t_1 - \cos n\omega t_2\right]$$

On en déduit que $\quad b_{2p} = 0 \quad$ et

$$b_{2p+1} = \frac{2}{\pi}\,\frac{\cos(2p+1)\omega t_1 - \cos(2p+1)\omega t_2}{2p+1}$$

$$0 = -\frac{2}{T}\left[\sin n\omega t_1 - \sin n\omega t_2 - \sin n\omega(t_1 + \frac{T}{2}) - \sin n\omega(t_2 + \frac{T}{2})\right] - n\omega a_n$$

$$\text{d'où } n\omega a_n = -\frac{2}{T}\left[1 - (-1)^n\right]\left[\sin n\omega t_1 - \sin n\omega t_2\right]$$

On en déduit que $\quad a_{2p} = 0 \quad$ et

$$a_{2p+1} = -\frac{2}{\pi}\,\frac{\sin(2p+1)\omega t_1 - \sin(2p+1)\omega t_2}{2p+1}.$$

$$\left\{g(t)\right\} = -\frac{2}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty}\left[\frac{\sin(2p+1)\omega t_1 - \sin(2p+1)\omega t_2}{2p+1}\cos(2p+1)\omega t - \frac{\cos(2p+1)\omega t_1 - \cos(2p+1)\omega t_2}{2p+1}\sin(2p+1)\omega t\right]$$

5°) Exercice 1

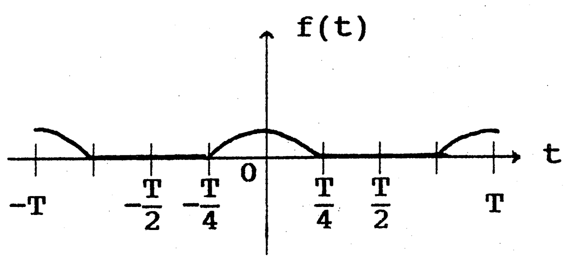
Soit f *paire, périodique, de période* $T = \frac{2\pi}{\omega}$ *définie par :*

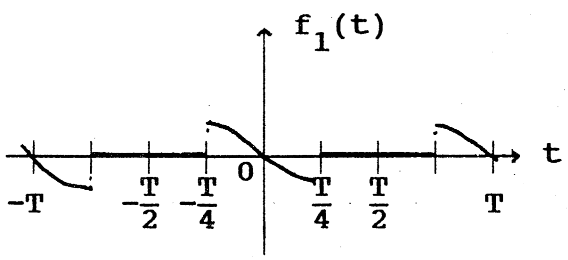
$$\begin{cases} f(t) = \cos \omega t & \text{si } t \in [\, 0 \, , \frac{\pi}{2\omega} \, [\\ f(t) = 0 & \text{si } t \in [\, \frac{\pi}{2\omega} \, , \frac{\pi}{\omega} \, [\end{cases}$$

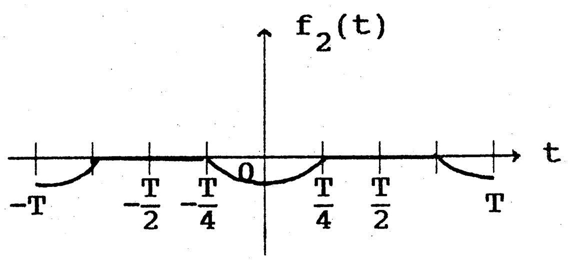
cf Chapitre 3- VII- 3°)

f est continue sur $\mathbb{R}$, les << dérivées >> première et seconde f_1 et f_2 vérifient les conditions de Dirichlet.

La série de Fourier associée à f_1 peut s'obtenir en dérivant terme à terme la série de Fourier associée à f.





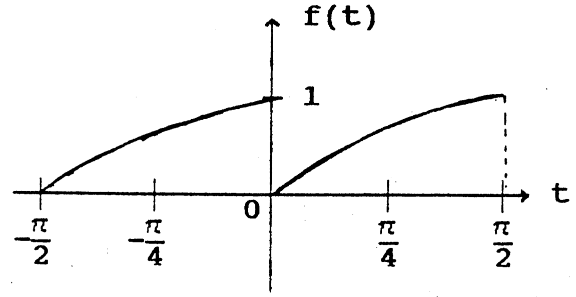


En utilisant l'exercice Chapitre 3- VII- 3°) en déduire les séries de Fourier associées à f_1 et à f_2.

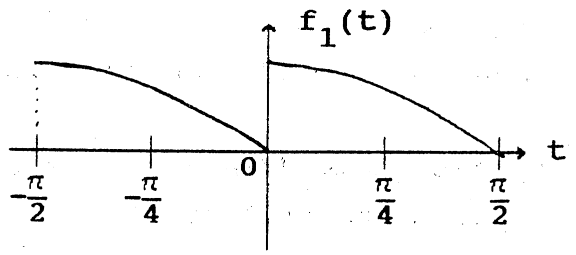
6°) Exercice 2

Soit f *périodique, de période* $T = \frac{\pi}{2}$ *définie par :*

$$f(t) = \sin t \qquad \text{si } t \in [\,0\,,\,\frac{\pi}{2}\,[$$



et f_1 *la << dérivée >> de* f.

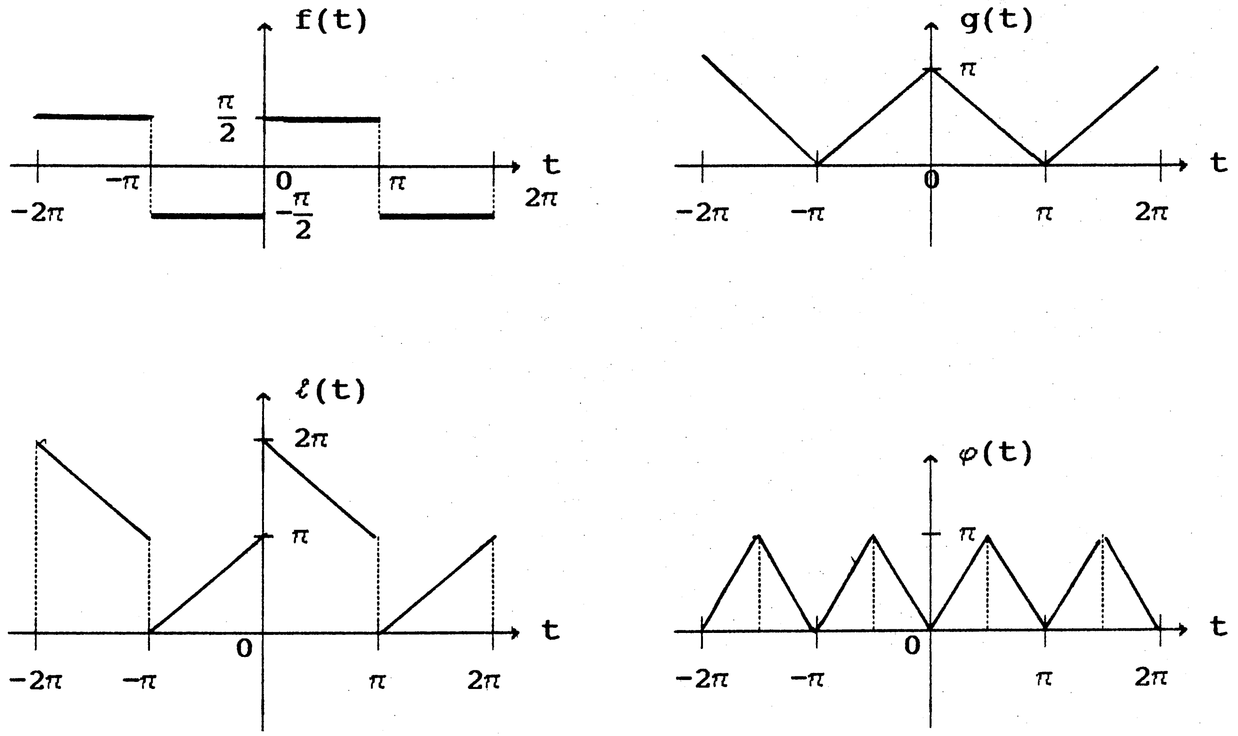


Calculer le développement en série de Fourier de f et en déduire celui de f_1.

7°) Exercice 3

On considère les fonctions f, g, ℓ, *et* φ.

f, g, ℓ sont de période 2π, φ est de période π. Ces fonctions sont définies par leurs représentations graphiques :



α) Déterminer les développements en série de Fourier de f et g .

β) En déduire le développement en série de Fourier de ℓ après avoir calculé $\ell(t)$ en fonction de f(t) et g(t).

γ) Montrer que $\varphi(t) = g(2t - \pi)$ puis en déduire le développement en série de Fourier de φ.

IV- DEVELOPPEMENT EN SERIE DE FOURIER DE :

$\ell : t \longrightarrow f(t) \sin \frac{\omega}{k} t$ ET DE $\ell_1 : t \longrightarrow f(t) \cos \frac{\omega}{k} t$

La fonction f est une fonction périodique de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$

1°) Introduction

En traitement du signal en électronique on est amené à faire le produit d'un signal sinusoïdal de pulsation $\frac{\omega}{k}$ (de période kT) par un signal périodique de pulsation ω (de période T)
(voir aussi 4°) ci-après modulation par découpage)

2°) Approche du problème

Traitons deux cas particuliers :

Soit la fonction f, de période 2π, définie par

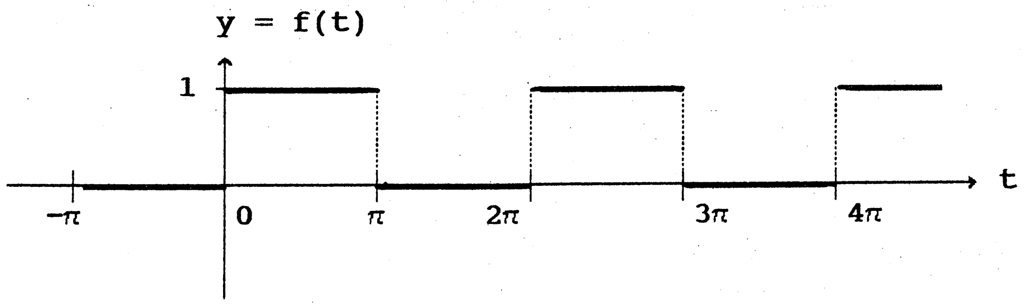
$$\begin{cases} f(t) = 1 & \text{si } t \in \,]\, 0 \, , \pi \, [\\ f(t) = 0 & \text{si } t \in \,]\, \pi \, , 2\pi \, [\end{cases}$$

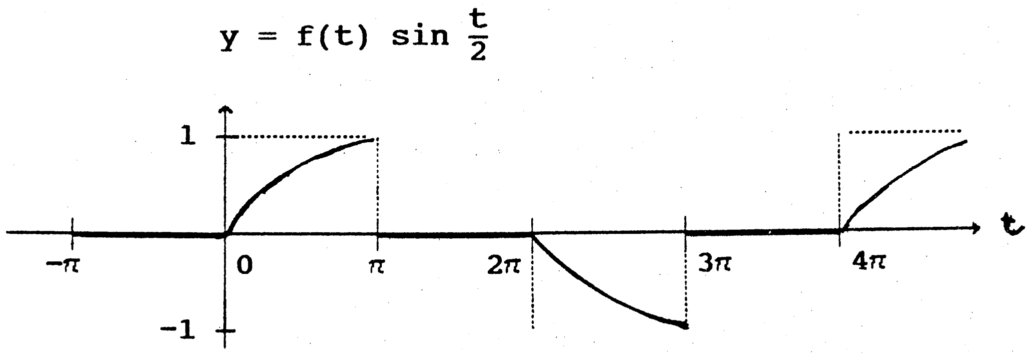
Voir Chapitre 3 $$- 1°) c)

$$\left\{ f(t) \right\} = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{2p+1} \sin (2p+1)t$$

Remarquons que $a_0 = \frac{1}{2}$ $\quad a_n = 0$ $\quad b_{2p} = 0$ $\quad b_{2p+1} = \frac{2}{\pi(2p+1)}$

a) *Etude de la fonction ℓ définie par* $\ell(t) = f(t) \sin \frac{t}{2}$





■ Remarquons que ℓ est de période 4π donc

$$\left\{\ell(t)\right\} = a'_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[a'_n \cos n\frac{t}{2} + b'_n \sin n\frac{t}{2} \right]$$

■ Multiplions $\left\{f(t)\right\}$ terme à terme par $\sin \frac{t}{2}$,

soit P ce produit,

il vient $P = \frac{1}{2} \sin \frac{t}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \left[\frac{1}{2p+1} \sin (2p+1)t \sin \frac{t}{2} \right]$

$$P = \frac{1}{2} \sin \frac{t}{2} + \frac{1}{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{2p+1}\left[\cos (4p+1)\frac{t}{2} - \cos (4p+3)\frac{t}{2}\right]$$

□ <u>En supposant que</u> $P = \left\{\ell(t)\right\}$ on en déduit que :

$a'_0 = 0 \quad , \quad b'_1 = \frac{1}{2} \quad , \quad b'_n = 0$ si $n \neq 1$

$$a'_{4p+1} = \frac{1}{\pi\,(2p+1)} \quad , \quad a'_{4p+3} = -\frac{1}{\pi\,(2p+1)} \quad , \quad a'_{4p} = a'_{4p+2} = 0$$

□ <u>On peut observer entre autres</u>, si on admet que $P = \left\{\ell(t)\right\}$, que :

si n est pair $a'_n = 0$

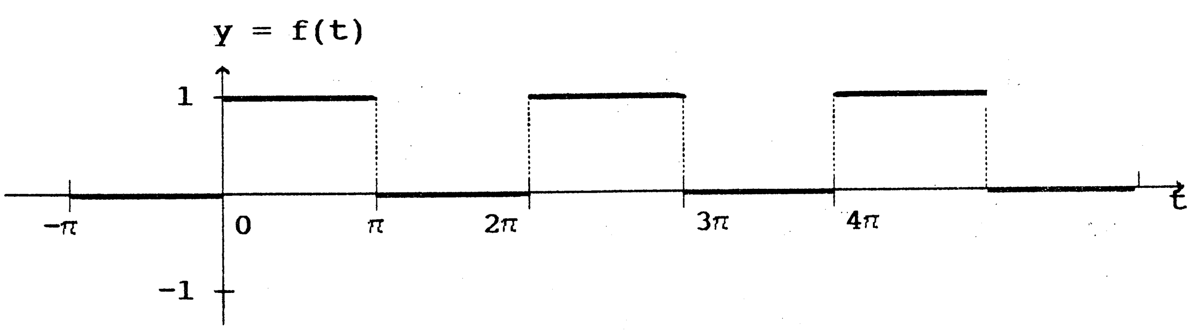
si n est impair $a'_{4p+1} = \dfrac{b_{2p+1} - b_{2p}}{2}$, $a'_{4p+3} = \dfrac{b_{2p+2} - b_{2p+1}}{2}$

c'est à dire que $a'_{2\alpha+1} = \dfrac{b_{\alpha+1} - b_{\alpha}}{2}$.

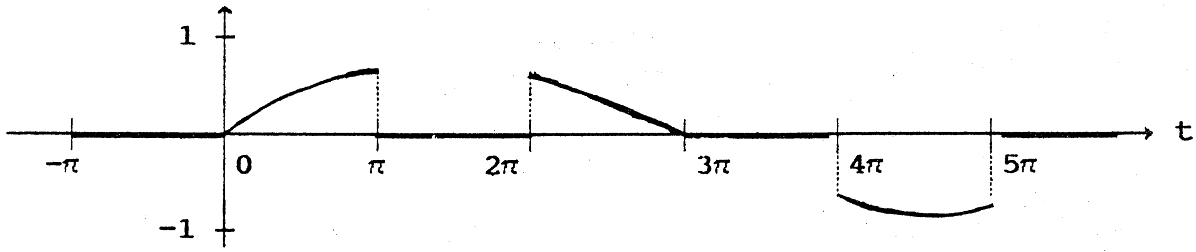
S'agit-il là d'une règle générale ?

Peut-on considérer que P est la série de Fourier associée à ℓ ?

b) <u>*Etude de la fonction ℓ_1 définie par $\ell_1(t) = f(t)\sin\frac{t}{3}$*</u>



$y = f(t) \sin \frac{t}{3}$



■ Remarquons que ℓ_1 est de période 6π donc

$$\left\{\ell_1(t)\right\} = a'_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[a'_n \cos n\frac{t}{3} + b'_n \sin n\frac{t}{3} \right]$$

■ Multiplions $\left\{f(t)\right\}$ terme à terme par $\sin \frac{t}{3}$, soit P_1 ce produit, il vient $P_1 = \frac{1}{2} \sin \frac{t}{3} + \frac{2}{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \left[\frac{1}{2p+1} \sin (2p+1)t \sin \frac{t}{3} \right]$

$$P_1 = \frac{1}{2} \sin \frac{t}{3} + \frac{1}{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{2p+1}\left[\cos (6p+2)\frac{t}{3} - \cos (6p+4)\frac{t}{3}\right]$$

□ <u>En supposant que</u> $P_1 = \left\{\ell_1(t)\right\}$ on en déduit que :

$a'_0 = 0$, $b'_1 = \frac{1}{2}$, $b'_n = 0$ si $n \neq 1$

$a'_{6p+2} = \frac{1}{\pi\ (2p+1)}$, $a'_{6p+4} = - \frac{1}{\pi\ (2p+1)}$,

$a'_{6p} = a'_{6p+1} = a'_{6p+3} = a'_{6p+5} = 0$

○ Si $n = 3\alpha + 1$

Si α est pair alors n est de la forme $n = 6p + 1$ $(\alpha = 2p)$

Si α est impair alors n est de la forme $n = 6p + 4$ $(\alpha = 2p + 1)$

On remarque que $a'_{6p+1} = -\frac{1}{2} b_{2p}$ et $a'_{6p+4} = -\frac{1}{2} b_{2p+1}$

donc que $a'_{3\alpha+1} = -\frac{1}{2} b_{\alpha}$

○ Si $n = 3\alpha - 1$

Si α est pair alors n est de la forme $n = 6p + 5$ $(\alpha = 2p + 2)$

Si α est impair alors n est de la forme $n = 6p + 2$ $(\alpha = 2p + 1)$

On remarque que $a'_{6p+2} = \frac{1}{2} b_{2p+1}$ et $a'_{6p+5} = \frac{1}{2} b_{2p+2}$

donc que $a'_{3\alpha-1} = \frac{1}{2} b_{\alpha}$

○ Si $n \neq 3\alpha + 1$ et $n \neq 3\alpha - 1$

On remarque que $a'_n = 0$ $(a'_{6p} = 0$ et $a'_{6p+3} = 0)$

Les propriétés observées ici obéissent-elles à une règle générale ?

Peut-on considérer que P_1 *est la série de Fourier associée à* ℓ_1 ?

c) *Conclusion :*

■ Si on calcule directement les coefficients de Fourier de ℓ et ℓ_1 on constate que l'on obtient les séries P et P_1.

■ Nous allons établir la règle pratique suivante :

Théorème : Pour obtenir le développement en série de Fourier de $\ell : t \longmapsto f(t) \sin \frac{\omega}{k} t$ ou de $\ell_1 : t \longmapsto f(t) \cos \frac{\omega}{k} t$, avec $k \in \mathbb{N}^*$, on peut multiplier respectivement par $\sin \frac{\omega}{k} t$ ou par $\cos \frac{\omega}{k} t$ le développement en série de Fourier de f puis ordonner convenablement la somme obtenue .

Cette méthode est couramment utilisée par les Physiciens. Nous avons tenu à la démontrer. Il va de soi que le lecteur peut être rebuté par les calculs fastidieux ci-dessous, il se reportera alors directement à l'énoncé du théorème et ses applications (3°) d) et suivant).

3°) Calcul des coefficients de Fourier de ℓ et ℓ_1

$\ell(t) = f(t) \sin \frac{\omega}{k} t$ et $\ell_1(t) = f(t) \cos \frac{\omega}{k} t$, $k \in \mathbb{N}^*$

f est de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$ donc $T' = kT$ est aussi une période de f.

$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)\, e^{-in\omega t}\, dt$ est coefficient de Fourier de f.

a) *Calcul de* $\gamma_n = \frac{1}{T'} \int_0^{T'} f(t)\, e^{-in\omega t}\, dt$

$$\gamma_n = \frac{1}{kT} \int_0^{kT} f(t)\, e^{-in\omega t}\, dt$$

On a vu en Chapitre 3- IV- que :
(si $\alpha \in \mathbb{Z}$ au lieu de $\alpha \in \mathbb{N}$, cela ne change rien à la démonstration faite au Chapitre 3- IV-)

□ Si n est un mutiple de k :

$n = \alpha k$ et $\alpha \in \mathbb{Z}$

$$\boxed{\gamma_{\alpha k} = C_\alpha}$$

□ Si n n'est pas un mutiple de k :

$$\boxed{\gamma_n = 0}$$

□ En Conclusion :

Soit f de période T et C_α, $\alpha \in \mathbb{Z}$, les coefficients de Fourier de f

$$\gamma_n = \frac{1}{k\,T}\int_0^{kT} f(t)\, e^{-in\frac{\omega}{k}t}\, dt = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ n'est pas un multiple de } k \\ C_\alpha & \text{si } n = \alpha\, k \end{cases}$$

b) *Calcul des coefficients de Fourier de ℓ :*

α) Coefficients de Fourier de $g : t \longrightarrow f(t)\, e^{\varepsilon i\omega' t}$

f a pour période T, $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$, $\omega' = \dfrac{\omega}{k}$, $\varepsilon = \pm 1$

Remarquons que g est de période $T' = k\,T$.

Appelons C'_n les coefficients de Fourier de g

$$C'_n = \frac{1}{T'} \int_0^{T'} g(t)\, e^{-in\omega' t}\, dt = \frac{1}{k\,T} \int_0^{k\,T} g(t)\, e^{-in\frac{\omega}{k}t}\, dt$$

$$C'_n = \frac{1}{k\,T} \int_0^{k\,T} f(t)\, e^{\varepsilon i\frac{\omega}{k}t}\, e^{-in\frac{\omega}{k}t}\, dt = \frac{1}{k\,T} \int_0^{T} f(t)\, e^{-i(n-\varepsilon)\frac{\omega}{k}t}\, dt$$

En conclusion

- Si $n - \varepsilon$ est un multiple de k, $n = \alpha k + \varepsilon \Leftrightarrow n-\varepsilon = \alpha k,\ \alpha \in \mathbb{Z}$

  alors $C'_n = C_\alpha$

  ($n - 1 = \alpha\, k$ si $\varepsilon = 1$ et $n + 1 = \alpha\, k$ si $\varepsilon = -1$)

- Si $n - \varepsilon$ n'est pas un multiple de k alors $C'_n = 0$

β) Coefficients de Fourier de $\ell : t \longmapsto f(t) \sin \frac{\omega}{k} t$

$k \in \mathbb{N}^*$

Remarquons que ℓ est de période k T.

Notons d_n les coefficients de Fourier de ℓ

$$\sin \frac{\omega}{k} t = - i\, \frac{e^{i\frac{\omega}{k}t} - e^{-i\frac{\omega}{k}t}}{2} \qquad \text{d'où}$$

$$d_n = - \frac{i}{2kT} \left[\int_0^{kT} f(t)\, e^{-i\,(n-1)\,\frac{\omega}{k}\,t}\, dt - \int_0^{kT} f(t)\, e^{-i\,(n+1)\,\frac{\omega}{k}\,t}\, dt \right]$$

□ $\boxed{1^{er} \text{ Cas : } k \geq 3}$

○ Remarques

⊖ Si $n - 1$ et $n + 1$ sont simultanément multiples de k alors
$n - 1 = \alpha k$ et $n + 1 = \alpha' k$ avec $\alpha \in \mathbb{Z}$ et $\alpha' \in \mathbb{Z}$ d'où $\alpha' - \alpha = \frac{2}{k}$

ce qui est impossible car si $k \geq 3$, $\frac{2}{k} \notin \mathbb{Z}$.

donc si $k \geq 3$,
$n - 1$ et $n + 1$ ne sont pas simultanément des multiples de k.

⊖ Si $n - 1 = \alpha\, k$ et $n' + 1 = \alpha\, k$
alors
$n - n' = 2$, il en résulte que :

■ si $n = \alpha k + 1$ et $\alpha \in \mathbb{Z}$

$n - 1$ est un multiple de k donc $n + 1$ n'est pas un multiple de k et d'après la conclusion du α) :

$$\int_0^{kT} f(t)\, e^{-i\,(n+1)\,\frac{\omega}{k}\,t}\, dt = 0 \text{ et } \int_0^{kT} f(t)\, e^{-i\,(n-1)\,\frac{\omega}{k}\,t}\, dt = C_\alpha$$

■ si $n = \alpha k - 1$ et $\alpha \in \mathbb{Z}$

$n + 1$ est un multiple de k donc $n - 1$ n'est pas un multiple de k

et d'après la conclusion du α) :

$$\int_0^{kT} f(t)\, e^{-i\,(n-1)\,\frac{\omega}{k}\,t}\, dt = 0 \text{ et } \int_0^{kT} f(t)\, e^{-i\,(n+1)\,\frac{\omega}{k}\,t}\, dt = C_\alpha$$

En conclusion :

Si $n = \alpha k + 1$ et $\alpha \in \mathbb{Z}$ $\quad d_{\alpha k+1} = \frac{1}{2i} C_\alpha = -\frac{1}{2} i C_\alpha$
Si $n = \alpha k - 1$ et $\alpha \in \mathbb{Z}$ $\quad d_{\alpha k-1} = \frac{-1}{2i} C_\alpha = \frac{1}{2} i C_\alpha$
Si $\alpha \in \mathbb{Z}$ et $n \neq \alpha k + 1$ et $n \neq \alpha k - 1$ alors $d_n = 0$ d'où $d_0 = 0$

○ **Calcul des coefficients de Fourier de ℓ : a'_0, a'_n, b'_n**

▓ **Il est immédiat que** $\boxed{a'_0 = d_0 = 0}$

▓ **Calcul de $a'_{\alpha k+1}$, $b'_{\alpha k+1}$, $a'_{\alpha k-1}$, $b'_{\alpha k-1}$:**

$\boxed{\text{Si } \alpha = 0}$:

$$a'_1 = d_1 + d_{-1} = -\frac{1}{2} i\left(C_0 - C_0 \right) \qquad \boxed{a'_1 = 0}$$

$$b'_1 = i \left(d_1 - d_{-1} \right) = \frac{1}{2} \left(C_0 + C_0 \right) \qquad \boxed{b'_1 = a_0}$$

$\boxed{\text{Si } \alpha \geq 1}$:

$$a'_{\alpha k+1} = d_{\alpha k+1} + d_{-\alpha k-1} = -\frac{1}{2} i C_\alpha + \frac{1}{2} i C_{-\alpha}$$

$$a'_{\alpha k+1} = -\frac{1}{2} i \left(C_\alpha - C_{-\alpha}\right) \qquad \boxed{a'_{\alpha k+1} = -\frac{1}{2} b_\alpha}$$

$$a'_{\alpha k-1} = d_{\alpha k-1} + d_{-\alpha k+1} = \frac{1}{2}\, i\, c_\alpha - \frac{1}{2}\, i\, c_{-\alpha}$$

$$a'_{\alpha k-1} = \frac{1}{2}\, i \left[c_\alpha - c_{-\alpha}\right] \qquad \boxed{a'_{\alpha k-1} = \frac{1}{2}\, b_\alpha}$$

$$b'_{\alpha k+1} = i \left[d_{\alpha k+1} - d_{-\alpha k-1}\right] = i \left[-\frac{1}{2}\, i\, c_\alpha - \frac{1}{2}\, i\, c_{-\alpha}\right]$$

$$b'_{\alpha k+1} = \frac{1}{2}\left[c_\alpha + c_{-\alpha}\right] \qquad \boxed{b'_{\alpha k+1} = \frac{1}{2}\, a_\alpha}$$

de même $\boxed{b'_{\alpha k-1} = -\frac{1}{2}\, a_\alpha}$

$\boxed{\text{Si } n \neq \alpha\, k + 1 \text{ et } n \neq \alpha\, k - 1}$ alors $\boxed{a'_n = b'_n = 0}$

□ $\boxed{2^{\text{ème}} \text{ Cas : } k = 2}$

○ Remarques

⊖ $n - 1 = 2\,\alpha$ et $n + 1 = 2\,\alpha' \Longleftrightarrow$ n impair ($\alpha \in \mathbb{Z}$, $\alpha' \in \mathbb{Z}$)

⊖ Si n est impair

soit $n = 2\,\alpha - 1$ alors $n + 1 = 2\,\alpha$ et $n - 1 = 2\,(\alpha - 1)$ $\alpha \in \mathbb{Z}$
$n + 1$ et $n - 1$ sont multiples de 2, d'où :

$$\frac{1}{kT}\int_0^{kT} f(t)\, e^{-i\,(n-1)\,\frac{\omega}{k}\,t}\, dt = C_{\alpha-2} \qquad \text{et}$$

$$\frac{1}{kT}\int_0^{kT} f(t)\, e^{-i\,(n+1)\,\frac{\omega}{k}\,t}\, dt = C_{\alpha}$$

On en déduit que $\boxed{d_{2\alpha-1} = \frac{i}{2}(C_\alpha - C_{\alpha-1})}$

⊖ Si n est pair

$n = 2\alpha$, $n + 1$ et $n - 1$ ne sont pas multiples de 2, donc

$$\frac{1}{kT}\int_0^{kT} f(t)\, e^{-i\,(n-1)\,\frac{\omega}{k}\,t}\, dt = \frac{1}{kT}\int_0^{kT} f(t)\, e^{-i\,(n+1)\,\frac{\omega}{k}\,t}\, dt = 0$$

Il en résulte que : $\boxed{d_{2\alpha} = 0}$

⊙ Calcul des coefficients de Fourier de ℓ : a'_0, a'_n, b'_n

⊖ Si n est pair,

il est immédiat que $\boxed{a'_n = b'_n = 0}$

d'où $\boxed{a'_0 = 0}$

⊖ Si n est impair :

$\boxed{\text{Si } \alpha = 1}$

$$a'_1 = d_1 + d_{-1} = \frac{1}{2}\, i \left[c_1 - c_0\right] + \frac{1}{2}\, i \left[c_0 - c_{-1}\right]$$

$$a'_1 = \frac{1}{2}\, i \left[c_1 - c_{-1}\right] = \frac{1}{2}\, b_1$$

$$\boxed{a'_1 = \frac{1}{2}\, b_1}$$

$$b'_1 = i \left[\, d_1 - d_{-1} \,\right] = -\frac{1}{2} \left[c_1 - c_0\right] + \frac{1}{2} \left[c_0 - c_{-1}\right]$$

$$b'_1 = c_0 - \frac{1}{2} \left[\, c_1 + c_{-1}\right]$$

$$\boxed{b'_1 = a_0 - \frac{1}{2}\, a_1}$$

$\boxed{\text{Si } \alpha \geq 2}$

$$a'_{2\alpha-1} = d_{2\alpha-1} + d_{-2\alpha+1} = d_{2\alpha-1} + d_{-2(\alpha-1)-1}$$

$$a'_{2\alpha-1} = \frac{1}{2}\, i \left[\, c_\alpha - c_{\alpha-1}\right] + \frac{1}{2}\, i \left[\, c_{-(\alpha-1)} - c_{-\alpha}\right]$$

$$a'_{2\alpha-1} = \frac{1}{2}\, i \left[\, c_\alpha - c_{-\alpha}\right] - \frac{1}{2}\, i \left[c_{\alpha-1} - c_{-(\alpha-1)}\right]$$

$$\boxed{a'_{2\alpha-1} = \frac{b_\alpha - b_{\alpha-1}}{2}}$$

$$b'_{2\alpha-1} = i \left[d_{2\alpha-1} - d_{-2\alpha+1} \right]$$

$$b'_{2\alpha-1} = -\frac{1}{2} \left[C_{\alpha} - C_{\alpha-1} \right] + \frac{1}{2} \left[C_{1-\alpha} - C_{-\alpha} \right]$$

$$b'_{2\alpha-1} = -\frac{1}{2} \left[C_{\alpha} + C_{-\alpha} \right] + \frac{1}{2} \left[C_{\alpha-1} + C_{-(\alpha-1)} \right]$$

$$\boxed{b'_{2\alpha-1} = - \frac{a_{\alpha} - a_{\alpha-1}}{2}}$$

□ $\boxed{3^{\text{ème}} \text{ Cas : } k = 1}$

$$d_n = -\frac{i}{2} \left[\frac{1}{T} \int_0^T f(t)\, e^{-i(n-1)\omega t} dt - \frac{1}{T} \int_0^T f(t)\, e^{-i(n+1)\omega t} dt \right]$$

$$d_n = \frac{i}{2} \left(C_{n+1} - C_{n-1} \right).$$

$$a'_0 = d_0 = \frac{i}{2} \left(C_1 - C_{-1} \right) = \frac{1}{2} b_1.$$

$$\boxed{a'_0 = \frac{1}{2} b_1}$$

$$a'_n = d_n + d_{-n} = \frac{i}{2} \left(C_{n+1} - C_{n-1} + C_{-n+1} - C_{-n-1} \right)$$

Si $n = 1$

$$a'_1 = \frac{i}{2} \left(C_2 - C_0 + C_0 - C_{-2} \right) = \frac{i}{2} \left(C_2 - C_{-2} \right) = \frac{1}{2} b_2 .$$

$$\boxed{a'_1 = \frac{1}{2} b_2}$$

Si $n \neq 1$

$$\boxed{a'_n = \frac{1}{2}\,(b_{n+1} - b_{n-1})}$$

$$b'_n = i(d_n - d_{-n}) = \frac{1}{2}(- (C_{n+1} - C_{n-1}) + (C_{-n+1} - C_{-n-1}))$$

$$b'_n = i(d_n - d_{-n}) = \frac{1}{2}((C_{n-1} + C_{-(n-1)}) - (C_{n+1} + C_{-(n+1)}))$$

Si $n = 1$,

$$b'_1 = \frac{1}{2}((C_0 + C_0) - (C_2 + C_{-2}))$$

$$\boxed{b'_1 = a_0 - \frac{1}{2}a_2}$$

Si $n \neq 1$,

$$\boxed{b'_n = \frac{1}{2}\,(a_{n-1} - a_{n+1})}$$

c) *Méthode pratique pour calculer les coefficients*

$$\square \left\{ f(t) \right\} = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t$$

f de période $T = \frac{2\,\pi}{\omega}$ et ℓ de période $T' = k\,T$

■ Calcul de $P = \left[a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t \right] \sin \frac{\omega}{k} t$

□ $\boxed{k \geq 3}$ ici ℓ est de période $T' = k\,T$

On remarque que :

$$\cos n\omega t \quad \sin \frac{\omega}{k} t = \frac{1}{2} \sin (kn+1) \frac{\omega}{k} t - \frac{1}{2} \sin (kn-1) \frac{\omega}{k} t$$

$$\sin n\omega t \quad \sin \frac{\omega}{k} t = \frac{1}{2} \cos (kn-1) \frac{\omega}{k} t - \frac{1}{2} \cos (kn+1) \frac{\omega}{k} t$$

donc $$P = a_0 \sin \frac{\omega}{k} t + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \left[a_n \left[\sin (kn+1) \frac{\omega}{k} t - \sin (kn-1) \frac{\omega}{k} t \right] - b_n \left[\cos (kn+1) \frac{\omega}{k} t - \cos (kn-1) \frac{\omega}{k} t \right] \right]$$

$$P = a_0 \sin \frac{\omega}{k} t + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{-b_n}{2} \cos (kn+1) \frac{\omega}{k} t + \frac{b_n}{2} \cos (kn-1) \frac{\omega}{k} t + \frac{a_n}{2} \sin (kn+1) \frac{\omega}{k} t - \frac{a_n}{2} \sin (kn-1) \frac{\omega}{k} t \right)$$

On obtient bien les coefficients de Fourier figurant dans b) β) pour $k \geq 3$.

$$\left\{ \ell(t) \right\} = a_0 \sin \frac{\omega}{k} t + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{-b_n}{2} \cos (kn+1) \frac{\omega}{k} t + \frac{b_n}{2} \cos (kn-1) \frac{\omega}{k} t + \frac{a_n}{2} \sin (kn+1) \frac{\omega}{k} t - \frac{a_n}{2} \sin (kn-1) \frac{\omega}{k} t \right)$$

$\boxed{k = 2}$

On remarque que :

$$\cos n\omega t \ \sin \frac{\omega}{2} t = \frac{1}{2} \sin (2n+1) \frac{\omega}{2} t - \frac{1}{2} \sin (2n-1) \frac{\omega}{2} t$$

$$\sin n\omega t \ \sin \frac{\omega}{2} t = \frac{1}{2} \cos (2n-1) \frac{\omega}{2} t - \frac{1}{2} \cos (2n+1) \frac{\omega}{2} t$$

donc $P = a_0 \sin \frac{\omega}{2}t + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \left[a_n \left[\sin (2n+1)\frac{\omega}{2}t - \sin (2n-1)\frac{\omega}{2}t \right] - b_n \left[\cos (2n+1)\frac{\omega}{2}t - \cos (2n-1)\frac{\omega}{2}t \right] \right]$

$$P = \left[a_0 - \frac{1}{2} a_1\right] \sin \frac{\omega}{2}t + \frac{1}{2} b_1 \cos \frac{\omega}{2}t + \sum_{n=2}^{+\infty} \left[- \frac{b_{n-1} - b_n}{2} \cos (2n-1)\frac{\omega}{2}t + \frac{a_{n-1} - a_n}{2} \sin (2n-1)\frac{\omega}{2}t \right]$$

On obtient bien les coefficients de Fourier figurant dans b) β) pour k = 2

$$\left\{\ell(t)\right\} = \left[a_0 - \frac{1}{2} a_1\right] \sin \frac{\omega}{2}t + \frac{1}{2} b_1 \cos \frac{\omega}{2}t + \sum_{n=2}^{+\infty} \left[- \frac{b_{n-1} - b_n}{2} \cos (2n-1)\frac{\omega}{2}t + \frac{a_{n-1} - a_n}{2} \sin (2n-1)\frac{\omega}{2}t \right]$$

$\boxed{k = 1}$

Par un calcul analogue, on montre qu'on retrouve également dans ce cas les résultats du b) β).

d) *Conclusion :*

■ On constate que pour obtenir le développement en série de Fourier de $\ell : t \longmapsto f(t) \sin \frac{\omega}{k} t$ il suffit de multiplier par $\sin \frac{\omega}{k} t$ le développement en série de Fourier de f et d'ordonner convenablement la somme obtenue.

■ On montrerait de même que cette méthode de calcul peut être utilisée pour obtenir le développement en série de Fourier de $\ell_1 : t \longmapsto f(t) \cos \frac{\omega}{k} t$.

Cela justifie la règle énoncée au début et rappelée ci-dessous :

Théorème : Pour obtenir le développement en série de Fourier de $\ell : t \longmapsto f(t) \sin \frac{\omega}{k} t$ ou de $\ell_1 : t \longmapsto f(t) \cos \frac{\omega}{k} t$, avec $k \in \mathbb{N}$ et $k \geq 1$, on peut multiplier respectivement par $\sin \frac{\omega}{k} t$ ou par $\cos \frac{\omega}{k} t$ le développement en série de Fourier de f puis ordonner convenablement la somme obtenue .

e) *Application : Calcul de* $\{\ell_1(t)\}$

■ $k \geq 3$

ici ℓ_1 est de période $T' = k\, T = \frac{2k\pi}{\omega}$

$$\cos n\omega t \quad \cos \frac{\omega}{k} t = \frac{1}{2} \cos (kn+1) \frac{\omega}{k} t + \frac{1}{2} \cos (kn-1) \frac{\omega}{k} t$$

$$\sin n\omega t \quad \cos \frac{\omega}{k} t = \frac{1}{2} \sin (kn+1) \frac{\omega}{k} t + \frac{1}{2} \sin (kn-1) \frac{\omega}{k} t$$

$$\left\{\ell_1(t)\right\} = a_0 \cos \frac{\omega}{k}t + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left[a_n\left[\cos (kn+1)\frac{\omega}{k}t + \cos (kn-1)\frac{\omega}{k}t\right] + b_n\left[\sin (kn+1)\frac{\omega}{k}t + \sin (kn-1)\frac{\omega}{k}t\right]\right]$$

$$\left\{\ell_1(t)\right\} = a_0 \cos \frac{\omega}{k}t + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{a_n}{2} \cos (kn+1)\frac{\omega}{k}t + \frac{a_n}{2} \cos (kn-1)\frac{\omega}{k}t + \frac{b_n}{2} \sin (kn+1)\frac{\omega}{k}t + \frac{b_n}{2} \sin (kn-1)\frac{\omega}{k}t \right]$$

■ $k = 2$

$\ell_1(t) = f(t) \cos \frac{\omega}{2}t$ $\quad$ ℓ_1 de période $T' = \frac{4\pi}{\omega}$

$$\cos n\omega t \ \cos \frac{\omega}{2} t = \frac{1}{2} \cos (2n+1) \frac{\omega}{2} t + \frac{1}{2} \cos (2n-1) \frac{\omega}{2} t$$

$$\sin n\omega t \ \cos \frac{\omega}{2} t = \frac{1}{2} \sin (2n+1) \frac{\omega}{2} t + \frac{1}{2} \sin (2n-1) \frac{\omega}{2} t$$

$$\left\{\ell_1(t)\right\} = a_0 \cos \frac{\omega}{2}t + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left[a_n\left[\cos (2n+1)\frac{\omega}{2}t + \cos (2n-1)\frac{\omega}{2}t\right] + b_n \left[\sin (2n+1)\frac{\omega}{2}t + \sin (2n-1)\frac{\omega}{2}t\right]\right]$$

$$\left\{\ell_1(t)\right\} = \left[a_0+\frac{1}{2}a_1\right]\cos \frac{\omega}{2}t + \frac{1}{2} b_1\sin \frac{\omega}{2}t + \sum_{n=2}^{+\infty} \left[\frac{a_{n-1}+ a_n}{2} \cos (2n-1)\frac{\omega}{2}t + \frac{b_{n-1} + b_n}{2} \sin (2n-1)\frac{\omega}{2}t\right]$$

■ $k = 1$

$$\left\{\ell_1(t)\right\} = \frac{1}{2} a_1 + \left[a_0 + \frac{1}{2} a_2\right] \cos \omega t + \frac{1}{2} b_2 \sin \omega t +$$

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \left[\frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} \cos n\omega t + \frac{b_{n-1} + b_{n+1}}{2} \sin n\omega t\right]$$

f) <u>*Exemples*</u> :

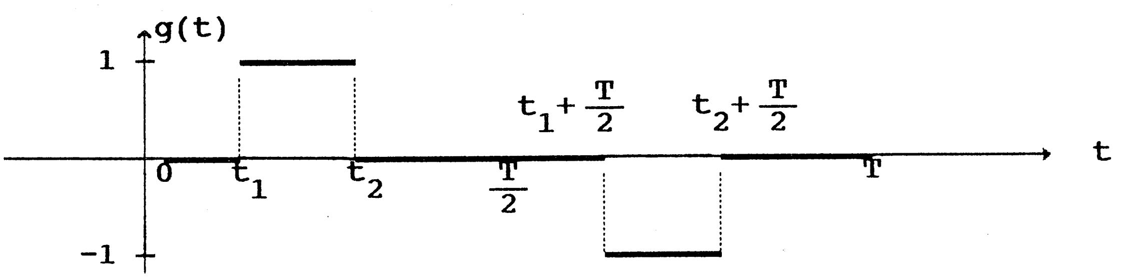
Nous allons retrouver par une troisième méthode les résultats de l'exemple 6 du paragraphe II-3°)- e).

Soit la fonction g de période T définie sur [0;T] par :

$$g(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \le t_1 < t < t_2 \le \frac{T}{2} \\ -1 & \text{si } t_1 + \frac{T}{2} < t < t_2 + \frac{T}{2} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Considérons la fonction f de période $\frac{T}{2}$ définie par :

$f(t) = (\sin \omega t)\, g(t)$, $\omega = \frac{2\pi}{T}$.



g est de période T, f de période $\frac{T}{2}$, donc $k = 2$.

On trouve $a_0(g) = 0$, $a_{2p}(g) = 0$ et $b_{2p}(g) = 0$.

$$a_{2p+1}(g) = -\frac{2}{\pi}\,\frac{\sin(2p+1)\omega t_1 - \sin(2p+1)\omega t_2}{2p+1}$$

$$b_{2p+1}(g) = \frac{2}{\pi}\,\frac{\cos(2p+1)\omega t_1 - \cos(2p+1)\omega t_2}{2p+1}\,.$$

(Voir III- 4°)- Exemple 4)

Donc, en appliquant la règle précédente :

$$\left\{f(t)\right\} = \frac{2}{\pi}\sin\omega t \sum_{p=0}^{+\infty}\left[-\frac{\sin(2p+1)\omega t_1 - \sin(2p+1)\omega t_2}{2p+1}\cos(2p+1)\omega t\right.$$

$$\left.+\frac{\cos(2p+1)\omega t_1 - \cos(2p+1)\omega t_2}{2p+1}\sin(2p+1)\omega t\right]$$

donc $a_0 = \dfrac{\cos\omega t_1 - \cos\omega t_2}{\pi}$,

$$a_p = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos(2p+1)\omega t_1 - \cos(2p+1)\omega t_2}{2p+1} - \frac{\cos(2p-1)\omega t_1 - \cos(2p-1)\omega t_2}{2p-1}\right]$$

$$b_p = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(2p+1)\omega t_1 - \sin(2p+1)\omega t_2}{2p+1} - \frac{\sin(2p-1)\omega t_1 - \sin(2p-1)\omega t_2}{2p-1}\right]$$

g) *Exercices*

α) La fonction f étant celle utilisée en 2°) Approche du problème, donner le développement en série de Fourier de la fonction ℓ_1 définie par $\ell_1(t) = f(t) \cos \frac{t}{3}$.

β) Soit la fonction f de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$, paire,

définie par : $\begin{cases} \forall\, t \in [\, 0 \,,\, \frac{\tau}{2} \,[& f(t) = 1 \\ \forall\, t \in \,]\, \frac{\tau}{2} \,,\, \frac{T}{2} \,[& f(t) = 0 \end{cases}$ avec $0 < \tau < T$

et la fonction $\ell : t \longmapsto f(t) \sin \frac{\omega}{4} t$

■ Préciser la période de ℓ et représenter par rapport à un même repère les fonctions f, $t \longmapsto \sin \frac{\omega}{4} t$ et ℓ pour $t \in [\, -2T \,,\, 2T \,]$

■ On rappelle que :

$$\{f(t)\} = \frac{\tau}{T} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \sin n\omega\tau \cos n\omega t$$

En déduire le développement en série de Fourier de ℓ.

γ) Soit la fonction g de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$, définie

par : $\begin{cases} \forall\, t \in \,]\, 0 \,,\, \tau \,[& g(t) = 1 \\ \forall\, t \in [\, \tau \,,\, T \,[& g(t) = 0 \end{cases}$ $0 < \tau < T$

et la fonction φ : $t \longmapsto g(t) \cos \frac{\omega}{2} t$.

■ Préciser la période de φ et représenter par rapport à un même repère les fonctions g , $t \longmapsto \cos \frac{\omega}{2} t$ et φ pour $t \in] -T , T [$.

■ On rappelle que :

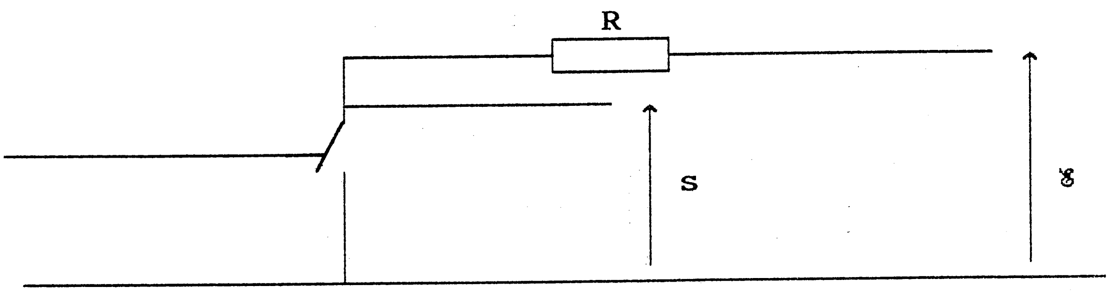
$$\left\{g(t)\right\} = \frac{\tau}{T} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \left[\sin n\omega\tau \cos n\omega t + (1 - \cos n\omega\tau) \sin n\omega t\right]$$

En déduire le développement en série de Fourier de φ.

4°) Une application à la Physique :

Modulateur d'amplitude à découpage.

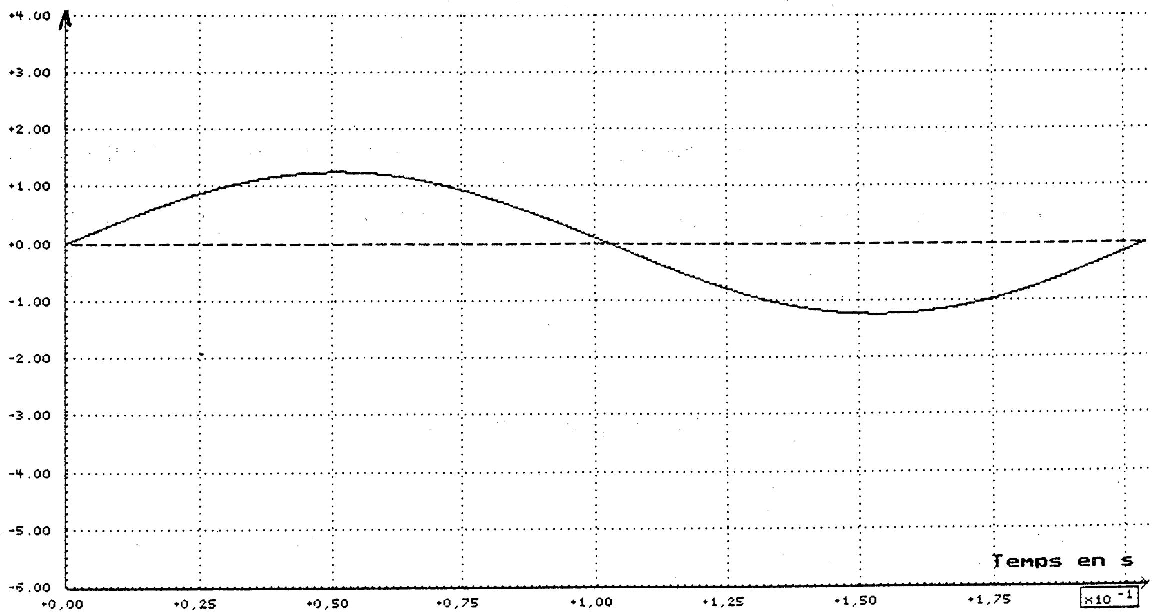
a) Principe :



ℰ signal sinusoïdal d'amplitude $\hat{E}$ et de pulsation Ω

$\mathcal{E}(t) = \hat{E} \sin \Omega t = \hat{E} \sin (2\pi F t)$

et représenté ci dessous :



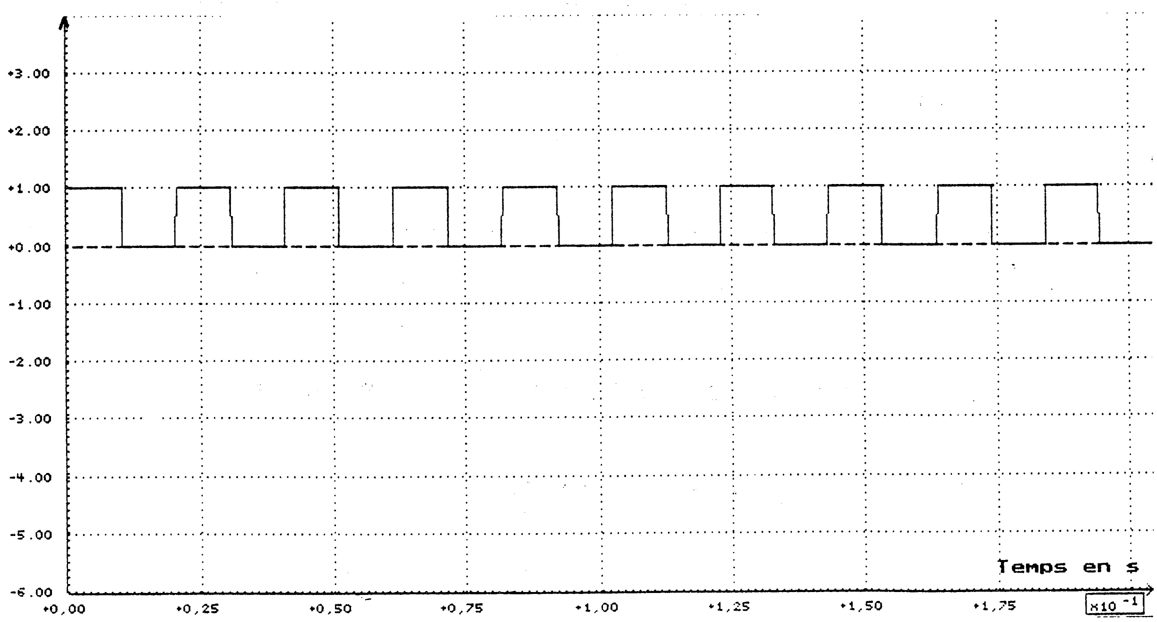
L'interrupteur est commandé périodiquement avec une fréquence f et est tantôt fermé, tantôt ouvert.

f est très supérieur à F, ici f = 10 F

s(t) est donc égal à $\gamma(t)$ si l'interrupteur est ouvert et est égal à zéro si l'interrupteur est fermé.

s(t) peut donc s'écrire : s(t) = D(t) . $\gamma(t)$

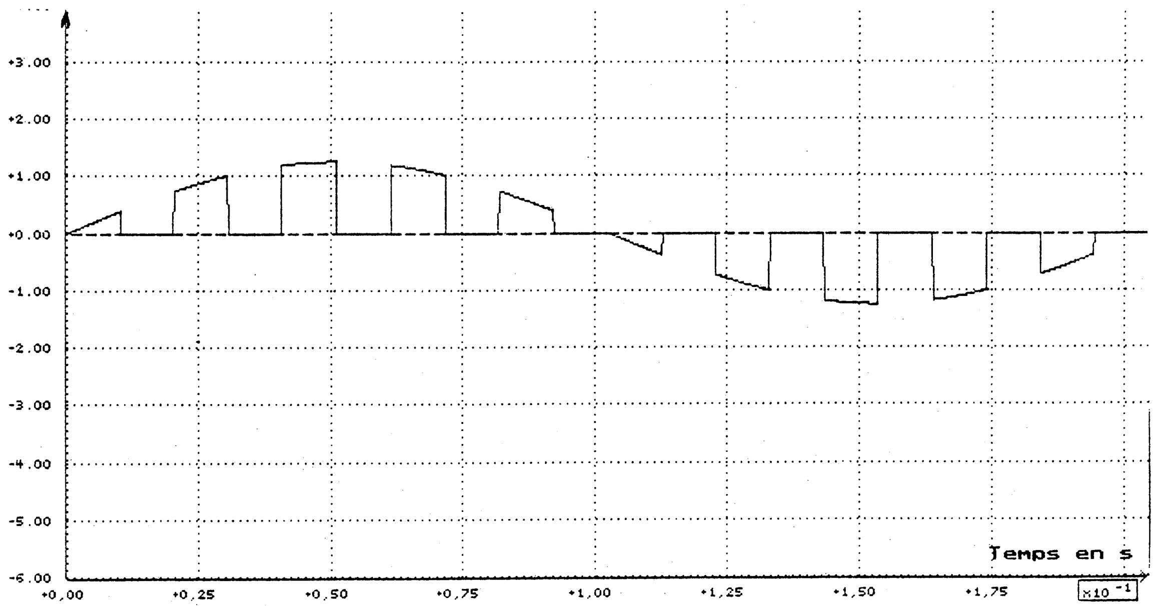
avec D(t) représenté ci dessous :



La série de Fourier associée à D(t) est :

$$\left\{ D(t) \right\} = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin\left((2n+1)\ 2\pi f\ t\right)}{2\ n + 1}$$

s est représenté ci dessous :



D'après le Théorème du 3°) d), on peut déduire la série de Fourier associée à s :

$$\left\{ s(t) \right\} = \left[\hat{E} \sin(2\pi F t) \right] \left\{ D(t) \right\}$$

$$\left\{ D(t) \right\} = \left[\hat{E} \sin(2\pi F t) \right] \left[\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin\left((2n+1)\ 2\pi f t\right)}{2\ n + 1} \right]$$

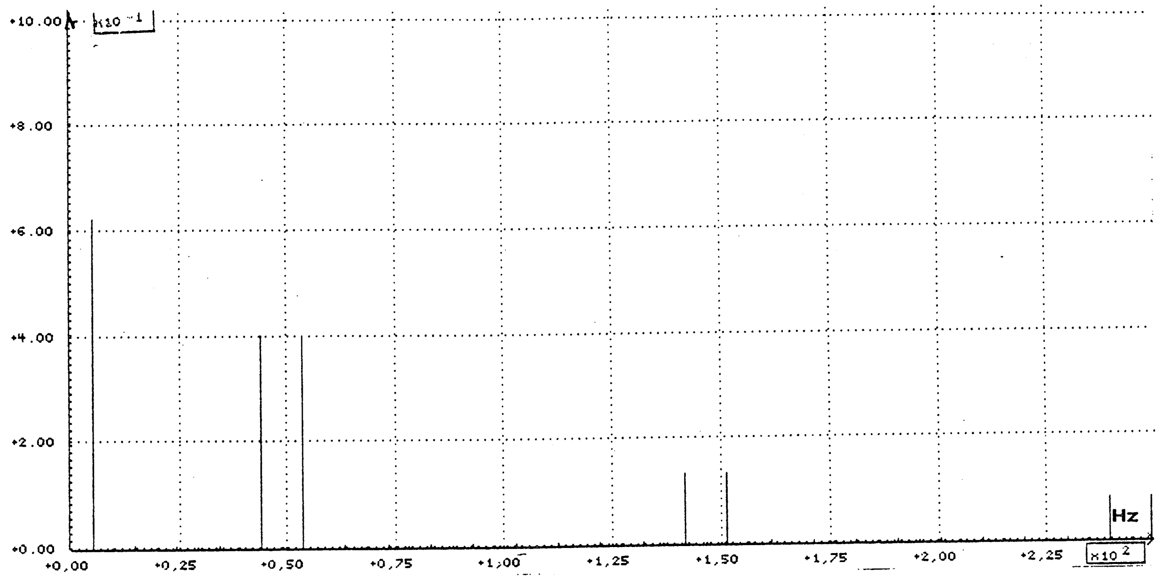
$$\left\{ D(t) \right\} = \frac{1}{2} \hat{E} \sin(2\pi F t) + \frac{2}{\pi} \hat{E} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin\left((2n+1)\ 2\pi f t\right)}{2\ n + 1} \sin(2\pi F t)$$

$$\left\{ D(t) \right\} = \frac{1}{2} \hat{E} \sin(2\pi F t)$$

$$+ \frac{1}{\pi} \hat{E} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos\left[2\pi\left((2n+1)f - F\right)t\right] - \cos\left[2\pi\left((2n+1)f + F\right)t\right]}{2\ n + 1}$$

s est la somme de signaux sinusoïdaux de fréquence F, f − F, f + F, 3f − F, 3f + F, ..., (2n+1)f − F, (2n+1)f + F, ...

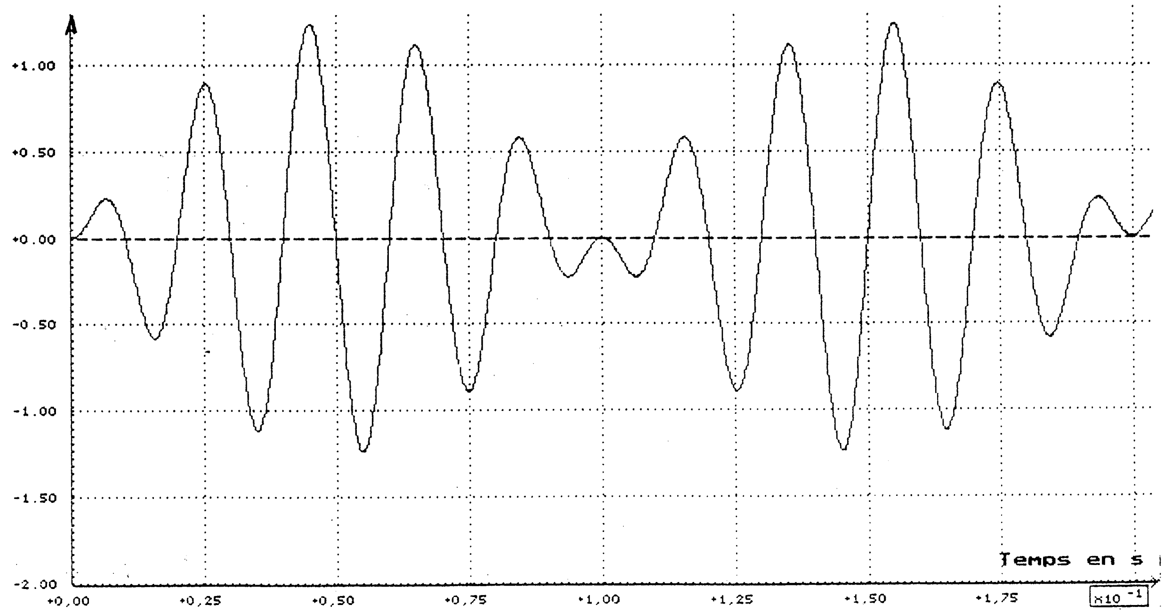
Le spectre de fréquence de ce signal est représenté ci dessous :



Si on ne conserve que les signaux sinusoïdaux de fréquence f − F et f + F, on obtient un signal g tel que :

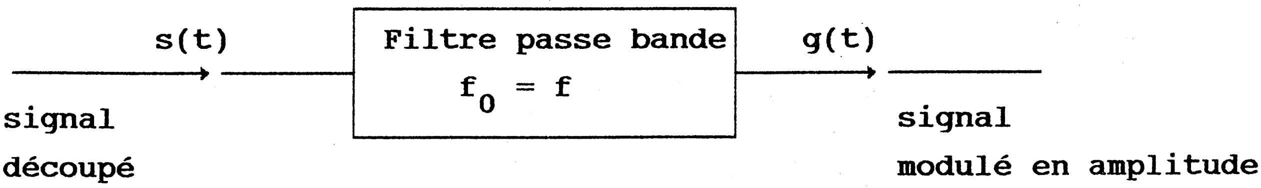
$$g(t) = \frac{1}{\pi} \hat{E} \left[\cos\left(2\pi(f - F)t\right) - \cos\left(2\pi(f + F)t\right)\right]$$

représenté ci-dessous :



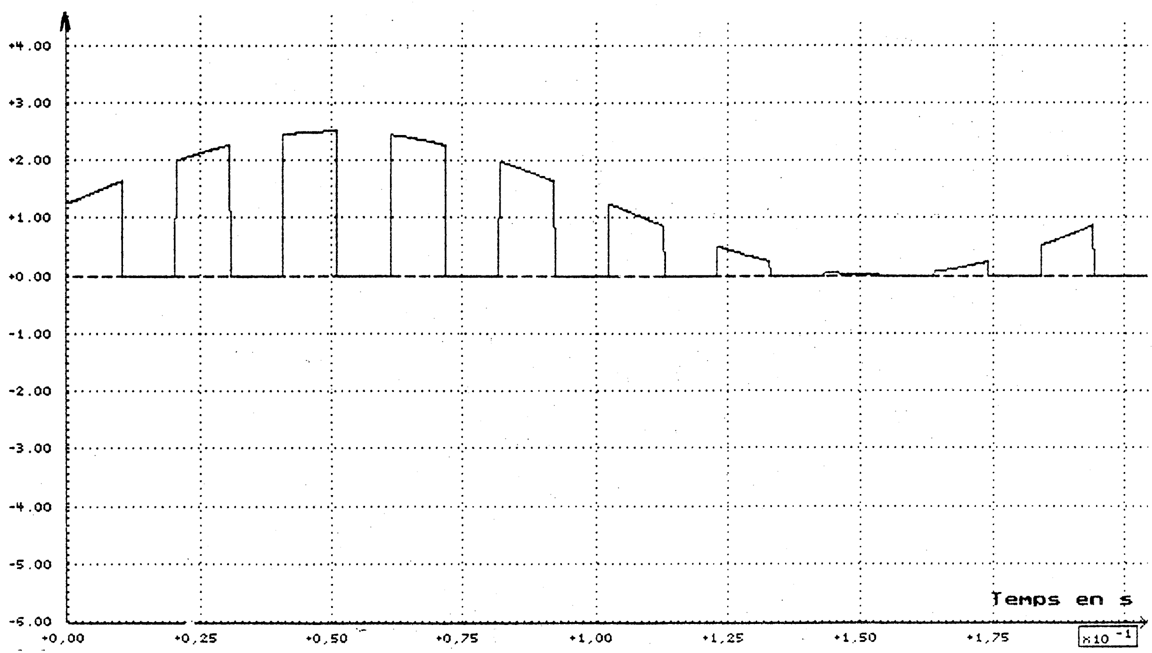
C'est un signal modulé en amplitude avec un taux de modulation infini.

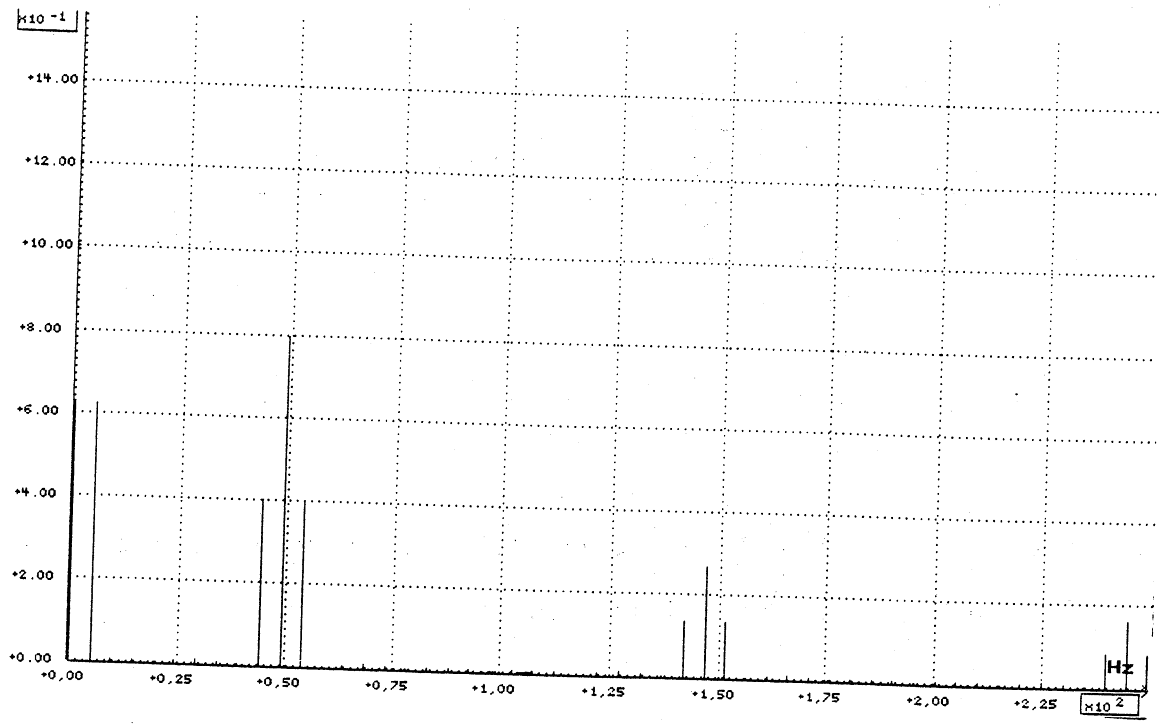
A partir du signal découpé s, il suffit de réaliser un filtrage passe-bande centré autour de la fréquence f pour obtenir le signal modulé en amplitude g.

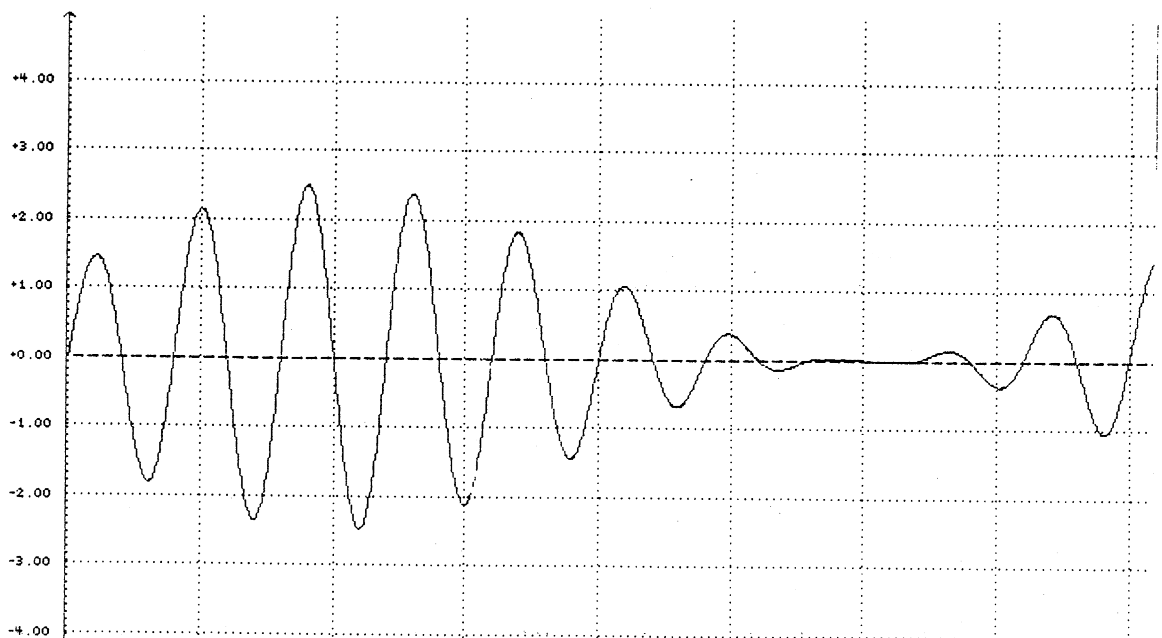


Remarque : si $\gamma(t) = E_0 + \hat{E} \sin(2\pi F t)$ on peut en faisant varier E_0 modifier le taux de modulation du signal g(t)

Exemple avec $E_0 = \hat{E}$




x10 -1
+14.00
+12.00
+10.00
+8.00
+6.00
+4.00
+2.00
+0.00
+0,00
+0,25
+0,50
+0,75
+1,00
+1,25
+1,50
+1,75
+2,00
+2,25
Hz
x10 2


+4.00
+3.00
+2.00
+1.00
+0.00
-1.00
-2.00
-3.00
-4.00
-5.00
Temps en s
+0.00
+0,25
+0,50
+0,75
+1,00
+1,25
+1,50
+1,75
x10 -1

CHAPITRE V

FORMULE DE PARSEVAL ET APPLICATIONS

I- VALEUR EFFICACE D'UNE FONCTION PERIODIQUE

1°) Exemple : Intensité efficace

L'énergie W dissipée pendant une période T par un courant i(t) de pulsation ω ($\omega = 2\pi/T$) est égale à celle dissipée pendant la même durée T par un courant continu d'intensité constante appelée intensité efficace (I_{eff}) du courant périodique i(t). Elle est dissipée uniquement dans la partie résistive du circuit.

On sait que $W = R \int_{(T)} i^2(t)\, dt$ et que $I_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{(T)} i^2(t)\, dt}$

$$W = R\, I_{eff}^2\, T$$

2°) Définition

Soit f une fonction périodique, de période T, on nomme valeur efficace de f, le nombre noté F_{eff} tel que :

$$F_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{(T)} f^2(t)\, dt}$$

Remarque :

F_{eff} est la racine carrée de la valeur moyenne de f^2 sur tout intervalle d'une période.

II- FORMULE DE PARSEVAL

On démontre et nous admettrons le théorème suivant :

Théorème

Soient f une fonction périodique de période T vérifiant les conditions de Dirichlet et a_0 ,a_n ,b_n ,c_n les coefficients de Fourier de f .

Les séries $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|a_n|^2+|b_n|^2}{2}$ et $|c_0|^2+\sum_{n=1}^{+\infty} |c_n|^2 + |c_{-n}|^2$

sont convergentes et

$$\frac{1}{T}\int_{(T)} f^2(t)dt = |a_0|^2+\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|a_n|^2+|b_n|^2}{2} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2$$

Démontrons ce théorème dans le cas où f est continue .

Soit $S_n(x) = a_0 + \sum_{p=1}^{n} (a_p \cos p\omega x + b_p \sin p\omega x)$

Pour établir ce théorème nous allons montrer que :

1°) $\frac{1}{T}\int_{(T)} |f(x)|^2 \, dx = |a_0|^2+\sum_{p=1}^{n} \frac{|a_p|^2+|b_p|^2}{2} + \frac{1}{T}\int_{(T)} |f(x) - S_n(x)|^2 dx$

2°) $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_{(T)} |f(x) - S_n(x)|^2 dx = 0$

Nous ne démontrerons le 2° qu'en ajoutant une hypothèse .

Démonstration :

1°) $$\frac{1}{T} \int_{(T)} |f(x) - S_n(x)|^2 dx = \frac{1}{T} \int_{(T)} (f(x) - S_n(x))(\overline{f(x)} - \overline{S_n(x)})\, dx$$

$$= \frac{1}{T} \int_{(T)} |f(x)|^2 dx - \frac{2}{T} \operatorname{Re}\left[\int_{(T)} f(x)\, \overline{S_n(x)}\, dx\right] + \frac{1}{T} \int_{(T)} |S_n(x)|^2 dx$$

$$\frac{2}{T} \int_{(T)} f(x)\, \overline{S_n(x)}\, dx = \frac{2}{T}\, \overline{a_0} \int_{(T)} f(x)\, dx +$$

$$\frac{2}{T} \sum_{k=1}^{n} \left[\overline{a_k} \int_{(T)} f(x) \cos k\omega x\, dx + \overline{b_k} \int_{(T)} f(x) \sin k\omega x\, dx \right]$$

$$\frac{2}{T} \int_{(T)} f(x)\, \overline{S_n(x)}\, dx = 2\, |a_0|^2 + \sum_{k=1}^{n} \left(|a_k|^2 + |b_k|^2 \right)$$

Calculons maintenant : $\frac{1}{T} \int_{(T)} |S_n(x)|^2 dx$

$$|S_n(x)|^2 =$$

$$\left[a_0 + \sum_{p=1}^{n}(a_p\cos p\omega x + b_p\sin p\omega x)\right]\left[\overline{a_0} + \sum_{p=1}^{n}(\overline{a_p}\cos p\omega x + \overline{b_p}\sin p\omega x)\right]$$

En développant et en intégrant sur $[\alpha ,\alpha+T]$ les seuls termes non nuls sont :

$$T\, a_0\, \overline{a_0} = T\, |a_0|^2 ,$$

$$\int_{(T)} a_p\, \overline{a_p}\, \cos^2 p\omega t\, dt = \frac{T}{2}\, |a_p|^2 \qquad \text{et} \qquad \int_{(T)} b_p\, \overline{b_p}\, \sin^2 p\omega t\, dt = \frac{T}{2}\, |b_p|^2$$

La formule

$$\frac{1}{T}\int_{(T)} |f(x)|^2\, dx = |a_0|^2 + \sum_{p=1}^{n} \frac{|a_p|^2+|b_p|^2}{2} + \frac{1}{T}\int_{(T)} |f(x) - S_n(x)|^2\, dx$$

est donc démontrée .

Remarque :

Cette égalité montre que :

$$\frac{1}{T}\int_{(T)} |f(x)|^2\, dx \geq |a_0|^2 + \sum_{p=1}^{n} \frac{|a_p|^2 + |b_p|^2}{2}$$

donc que la série de terme général positif $\dfrac{|a_p|^2 + |b_p|^2}{2}$ est convergente puisque la suite de ses sommes partielles est majorée.

2°)

- Nous avons vu que :

$$\frac{1}{T}\int_{(T)} |f(x)|^2\,dx = |a_0|^2 + \sum_{p=1}^{n} \frac{|a_p|^2 + |b_p|^2}{2} + \frac{1}{T}\int_{(T)} |f(x) - S_n(x)|^2 dx$$

Examinons le second membre de cette égalité lorsque $n \longrightarrow +\infty$

Si f est continue alors on démontre et nous admettrons que :

$\forall\ x \in [\ \alpha\ ,\ \alpha+T\ ]\ ,\ \forall\ \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe N_ε tel que :

$$n > N_\varepsilon \Longrightarrow |\ f(x) - S_n(x)\ | < \varepsilon$$

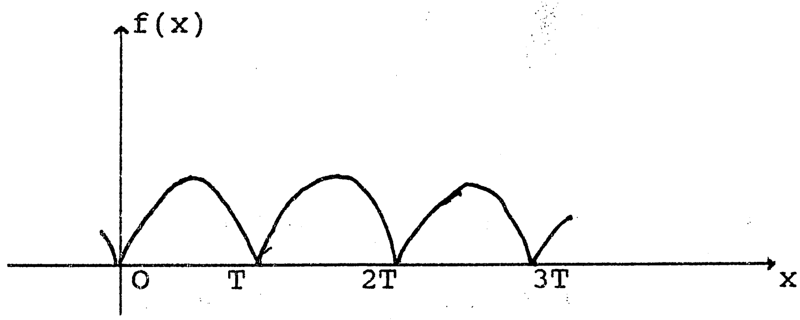
alors $\displaystyle \frac{1}{T}\int_{(T)} |f(x) - S_n(x)|^2\,dx \leq \frac{1}{T}\int_{(T)} \varepsilon^2\,dx = \varepsilon^2$

d'où $\displaystyle \lim_{n\to+\infty} \int_{(T)} |f(x) - S_n(x)|^2\,dx = 0$

et $\displaystyle \frac{1}{T}\int_{(T)} |f(x)|^2\,dx = |a_0|^2 + \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{|a_p|^2 + |b_p|^2}{2}$

III- EXEMPLE

Soit f la fonction périodique, de période T, définie sur [0,T[par : $f(x) = x\,(T - x)$



On montrerait que $\left\{f(x)\right\} = \frac{T^2}{6} - \frac{T^2}{\pi^2} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{\cos p\omega x}{p^2}$

ici f est continue sur $\mathbb{R}$ donc $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\left\{f(x)\right\} = f(x)$

d'où $f(x) - S_n(x) = \left\{f(x)\right\} - S_n(x) = -\frac{T^2}{\pi^2} \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{\cos p\omega x}{p^2}$

$$\left| f(x) - S_n(x) \right| \leq \frac{T^2}{\pi^2} \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} \leq \int_n^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{n}$$

d'où $n > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \left| f(x) - S_n(x) \right| < \varepsilon$

donc $\frac{1}{T} \int_{(T)} x^2\,(T-x)^2\,dx = \frac{T^4}{36} + \frac{T^4}{2\pi^4} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2}$

IV- REMARQUE

Bornons nous au cas où les coefficients a_n et b_n sont réels,

rappelons que $\rho_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ donc $F_{eff}^2 = a_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\rho_n}{\sqrt{2}} \right)^2$

a_0 est la valeur moyenne sur une période, mais aussi la valeur efficace de la <<composante constante>> c'est à dire de la fonction qui à t associe a_0.

$\frac{\rho_n}{\sqrt{2}}$ est la valeur efficace de l'harmonique de rang n en effet :

$$\frac{1}{T} \int_{(T)} \rho_n^2 \sin^2(n\omega x + \varphi)\, dx = \frac{\rho_n^2}{2T} \int_{(T)} [1-\cos(2n\omega x + 2\varphi)]\, dx = \frac{\rho_n^2}{2}$$

On en déduit que la valeur efficace du signal f est égale à la racine carrée de la somme des carrés des valeurs efficaces de la <<composante constante>> et des différents harmoniques .

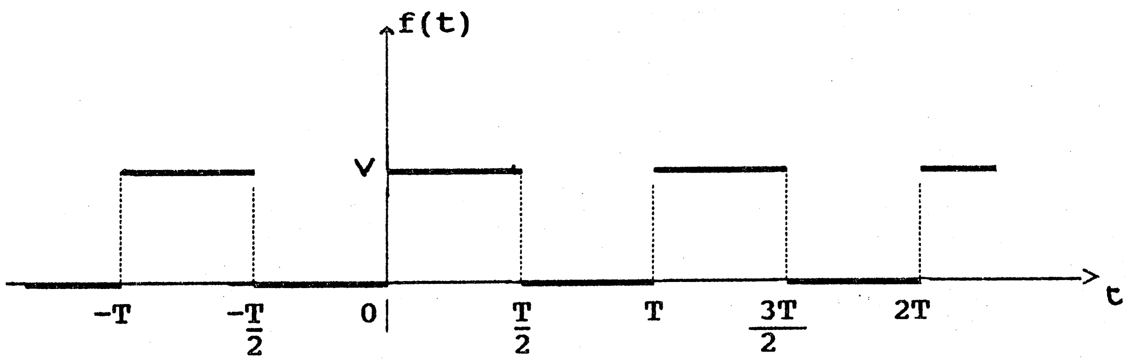
V- EXERCICES

1°) Exercice 1

Soit $f_p(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{p} \left[a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t\right]$ le "développement en série de Fourier" jusqu'à l'harmonique de rang p

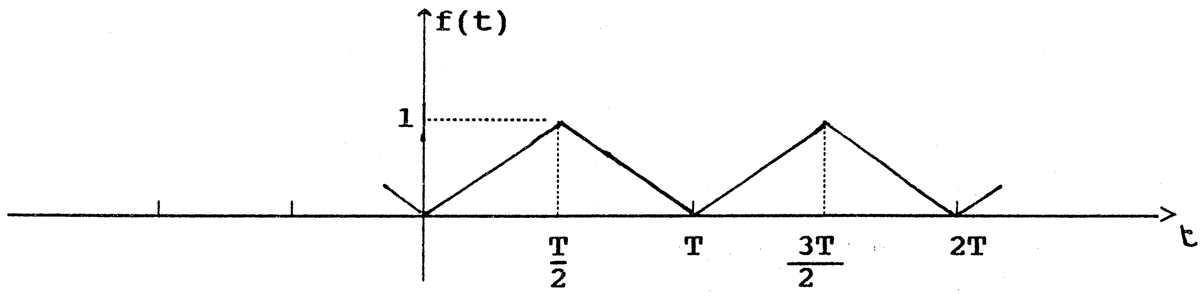
a) Calculer la valeur efficace $F_{p_{eff}}$ de f_p en utilisant la formule de PARSEVAL.

b)Pour le signal <<carré>> d'amplitude V

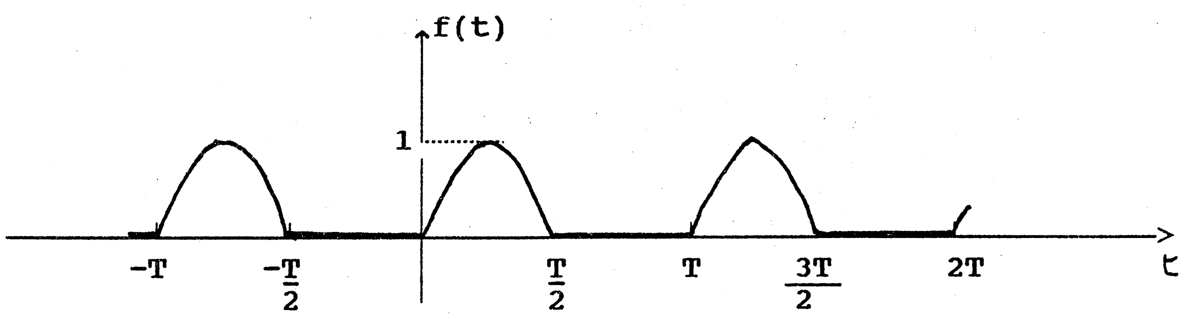


Calculer $\dfrac{F_{p_{eff}}}{F_{eff}}$ pour p = 1,2,3,4,5 même question pour :

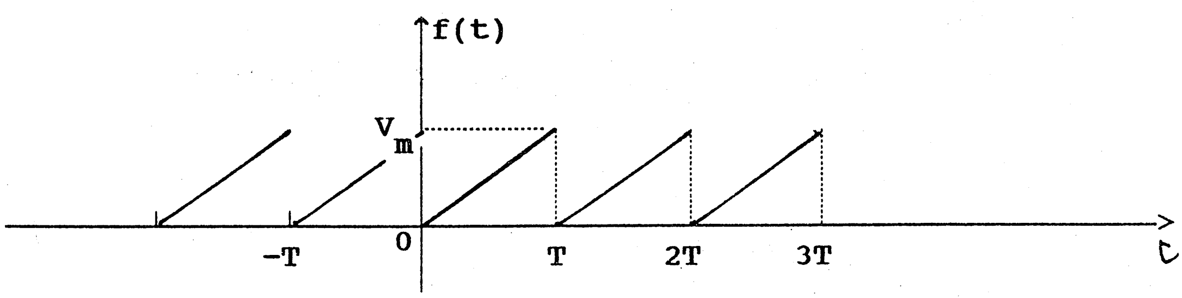
■ le signal en <<dent de scie>>



■ le signal sinusoïdal redressé mono alternance



■ le signal <<base de temps>> d'amplitude V_m



c) quel est pour chaque signal la valeur minimum de p pour laquelle $\dfrac{F_{p_{eff}}}{F_{eff}} \geq 0.95$.

2°) Exercice 2

Sot la fonction f ,de période 1 ,définie sur [0.1[par $f(t) = e^t$

a) Calculer les coefficients de Fourier exponentiels de f.

b) En déduire les coefficients de Fourier trigonométriques puis donner la série de Fourier associée à f.

c) en utilisant la formule de Parseval

■ Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1 + 4\, n^2 \pi^2}$

■ Préciser vers quelle valeur converge la série de Fourier pour t = 0 et vérifier le rsultat obtenu précédemment.

3°) Exercice 3

Soit la fonction f périodique ,de période 2 ,définie sur]-1,1[par f(t) = t.

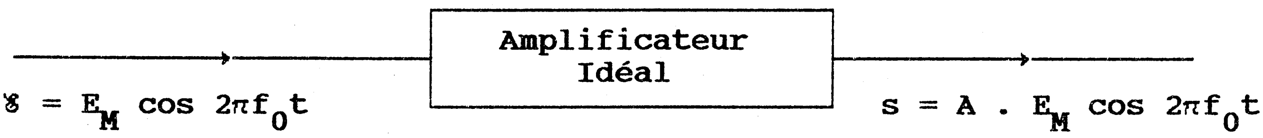
Calculer $\displaystyle\int_{-1}^{1} f^2(t)\, dt$ directement et en utilisant la formule de Parseval . En déduire $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$

VI- TAUX DE DISTORSION HARMONIQUE POUR UN SIGNAL PERIODIQUE A VALEUR MOYENNE NULLE

Problème

En Electronique, on utilise des amplificateurs qui à un signal d'entrée γ font correspondre un signal de sortie $s = A \cdot \gamma$ lorsque l'amplificateur est idéal.

Pour γ sinusoïdal de fréquence f_0, on obtient s sinusoïdal de fréquence f_0.



En réalité, l'amplificateur n'est jamais parfait et le signal de sortie n'est pas parfaitement sinusoïdal (déformation du signal).

s peut donc s'écrire :

$$\left\{s(t)\right\} = \sum_{n=1}^{+\infty} \rho_n \cos(n\omega_0 t - \varphi_n)$$

$$\left\{s(t)\right\} = \sum_{n=1}^{+\infty} \rho_{n\,\mathrm{eff}} \sqrt{2} \cos(n\omega_0 t - \varphi_n)$$

Si l'amplificateur avait été idéal on aurait obtenu :

$$s_1(t) = \rho_{1\,\mathrm{eff}} \sqrt{2} \cos \omega_0 t$$

L'amplificateur réel donne :

$$s(t) = \rho_{1\text{eff}} \sqrt{2} \cos(\omega_0 t - \varphi_1) + \rho_{2\text{eff}} \sqrt{2} \cos(2\omega_0 t - \varphi_2) + \ldots$$

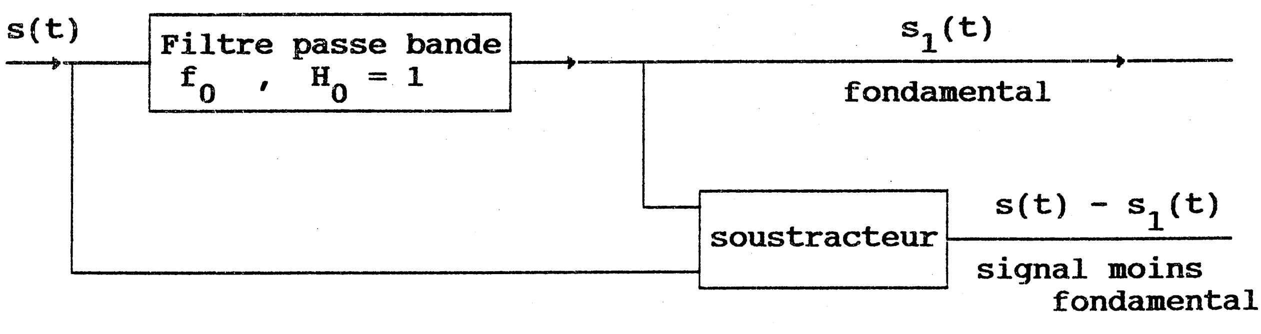
On définit le taux de distorsion harmonique introduit par l'amplificateur :

$$T_{HD} = \frac{\sqrt{\rho^2_{2\text{eff}} + \rho^2_{3\text{eff}} + \ldots}}{\rho_{1\text{eff}}}$$

c'est à dire :

$$T_{HD} = \frac{\text{Valeur efficace du (signal - fondamental)}}{\text{Valeur efficace du fondamental}}$$

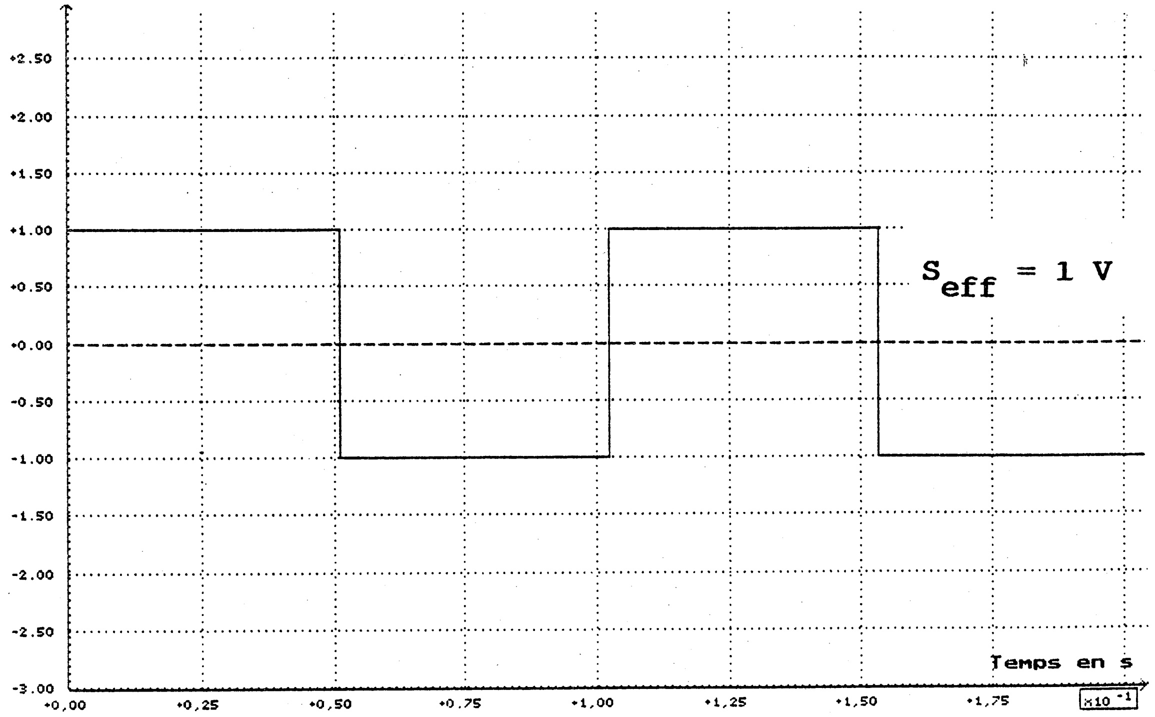
<u>Principe de mesure du taux de distorsion harmonique</u>



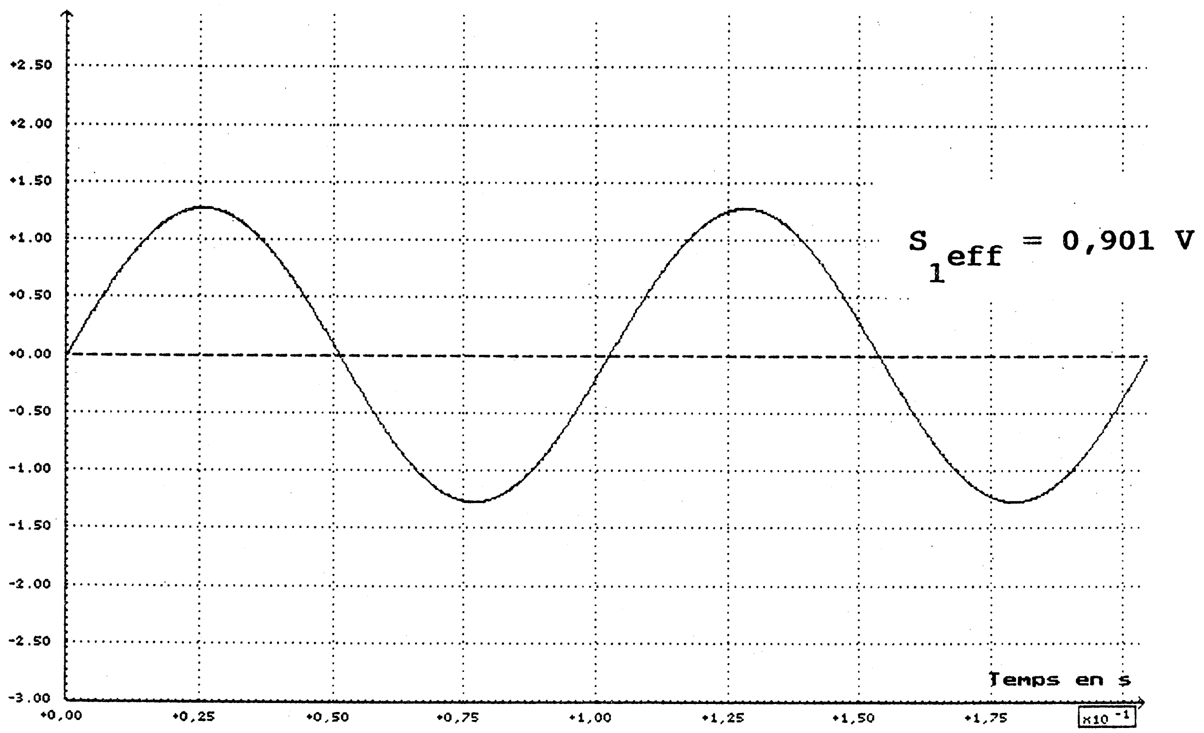
On peut en utilisant un voltmètre R.M.S. mesurer la valeur efficace de $s_1(t)$ (fondamental) et de $s(t) - s_1(t)$ (signal moins fondamental) et donc en déduire le taux de distorsion harmonique.

Exemple

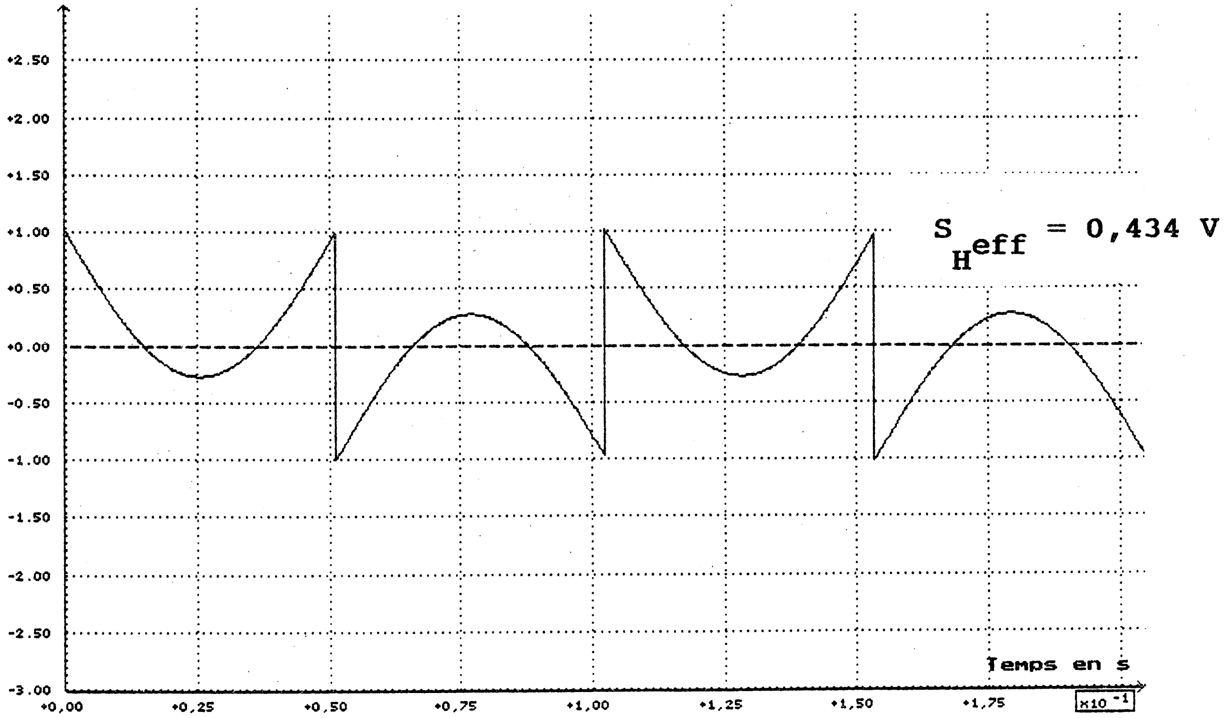
s(t)



s1(t)



$s(t) - s_1(t) = s_H(t)$



$$T_{HD} = \frac{S_{Heff}}{S_{1eff}} = \frac{0,434}{0,901} = 0,47$$

CHAPITRE VI

EXERCICES

Les exercices qui suivent contiennent pour la plupart des indications sur la manière de calculer les coefficients de Fourier ou d'obtenir le développement en série de Fourier de fonctions données. C'est notamment le cas des sujets de B.T.S. dont nous n'avons pas voulu modifier les textes.

Il est bien évident, comme cela est montré dans les chapitres précédents, que se ramener chaque fois au calcul d'intégrales pour obtenir les coefficients de Fourier n'est pas nécessairement la meilleure méthode.

Il est donc conseillé de traiter tous les exercices qui suivent non seulement par la méthode indiquée dans le texte mais aussi par différents autres procédés et notamment en recherchant le moyen le plus rapide d'obtenir les résultats demandés.

De plus, même lorsque cela n'est pas demandé explicitement, on représentera graphiquement toutes les fonctions étudiées.

Exercice 1 :

Soit f, de période 1, définie sur]0 ; 1[par $f(t) = e^t$.

1°) Calculer les coefficients de Fourier de f en utilisant les résultats du chapitre IV, paragraphe II. Donner le développement en série de Fourier de f.

2°) En déduire le développement en série de Fourier des fonctions suivantes :

a) f_1, de période 1, définie sur]0 ; 1[par :

$f_1(t) = e^t - 1$.

b) f_2, de période 1, définie sur]0 ; 1[par :

$f_2(t) = e^{t - \frac{1}{2}} - 1$.

c) f_3, de période 2, définie sur]0 ; 2[par :

$f_3(t) = e^{\frac{t}{2}} - 1$.

3°) Calculer α pour que la fonction g définie par

$g(t) = f(t) - \alpha$ ait une valeur moyenne nulle sur [0 ; 1] .

Trouver la primitive large G de g nulle en 0. On donnera l'expression de G(t) sur [0 ; 1].

Déduire du développement en série de Fourier de f_1 celui de g, puis celui de G.

Si la fonction g n'était pas de valeur moyenne nulle sur [0 ; 1] existerait-il des primitives larges de g admettant un développement en série de Fourier.

Exercice 2 :

Soit f, de période 1, définie sur [0 ; 1[par $f(t) = 1 - t$.

1°) En se ramenant au calcul des coefficients de Fourier d'une fonction impaire donner ceux de f.

2°) Donner le développement en série de Fourier de f et des fonctions suivantes :

a) f_1, de période 1, définie sur]0 ; 1] par $f_1(t) = 1 - t$.

b) f_2, de période 1, définie sur]0 ; 1[par $f_2(t) = 1 - t$.

et $f_2(0) = \frac{1}{2}$.

c) f_3, de période 1, définie sur]0 ; 1[par $f_3(t) = 1 - t$.

et $f_3(0) = -4$.

3°) Trouver le développement en série de Fourier de la fonction g, de période $\frac{1}{2}$, définie sur $[0 ; \frac{1}{2}[$ par : $g(t) = 1 - 2t$.

4° Trouver le développement en série de Fourier de la fonction $h = 2\ f - g$:

a) En utilisant les résultats précédents.

b) En utilisant le chapitre IV.

Exercice 3 :

Soit la fonction f, de période 3, définie sur [0 ; 3[par

$$f(t) = \mathcal{U}(t) - \mathcal{U}(t - 1) + \mathcal{U}(t - 2) - \mathcal{U}(t - 3)$$

où $\mathcal{U}$ désigne la fonction échelon unité.

1°)En utilisant la fonction "dérivée" de f , donner les coefficients de Fourier a_0 , a_n , b_n de f .

Vérifier ce résultat par le calcul direct à l'aide de la définition des coefficients de Fourier.

2°) Calculer de deux manières, comme dans la question 1°) les coefficients de Fourier de la fonction g, de période 3, définie sur]0 ; 3[par :

$$g(t) = t\left[\mathcal{U}(t)-\mathcal{U}(t-1)\right] + \mathcal{U}(t-1)-\mathcal{U}(t-2) + (t-1)\left[\mathcal{U}(t-2)-\mathcal{U}(t-3)\right]$$

3°) Calculer de deux manières, comme dans la question 1°) les coefficients de Fourier de la fonction h, de période 3, définie

sur]-1 ; 2[par : $\begin{cases} h(t) = t \text{ si } t \in]-1 ; 1] \\ h(t) = 1 \text{ si } t \in [1 ; 2[\end{cases}$.

En déduire le développement en série de Fourier de la fonction ℓ, de période 3, définie

sur $]-2\ ;\ 1[$ par : $\begin{cases} \ell(t) = t + 2 \text{ si } t \in]-2\ ;\ 0] \\ \ell(t) = 2 \text{ si } t \in [0\ ;\ 1[\end{cases}$.

Exercice 4 :

Soient les fonctions f, g et h, de période 1, définies sur $]0\ ;\ 1[$ par : $f(t) = 1 - t$; $g(t) = \frac{1}{2} - t$ et $h(t) = \frac{t}{2}(1 - t) + 2$.

1°) Donner le développement en série de Fourier de f.

2°) En déduire le développement en série de Fourier de g.

3°) Soient les fonctions

F définie par : $F(t) = \int_0^t f(x)\,dx$ et

G définie par : $G(t) = \int_0^t g(x)\,dx$.

a) F et G sont-elles périodiques ? Si oui, admettent-elles un développement en série de Fourier ? Lequel ?

b) Comparer h et G. Donner le développement en série de Fourier de h.

Exercice 5 :

Soit la fonction f, paire, de période 3, définie par :

$$\begin{cases} f(t) = 1 \text{ si } t \in [0\ ;\ 1[\\ f(t) = 0 \text{ si } t \in]1\ ;\ \frac{3}{2}] \end{cases}.$$

1°) Donner le développement en série de Fourier de f.

Exercice 6 :

1°) Soit la fonction f de, période π, définie par :

$$\begin{cases} f(t) = \sin t & \text{si } t \in [0 ; \frac{\pi}{2}[\\ f(t) = 0 & \text{si } t \in]\frac{\pi}{2} ; \pi] \end{cases}.$$

En utilisant les "dérivées" première et seconde de f, calculer les coefficients de Fourier de f et en déduire son développement en série de Fourier.

2°) a) Calculer λ pour que la fonction g définie par $g(t) = f(t) - \lambda$ soit de valeur moyenne nulle sur $[0 ; \pi]$.

b) Soit G la fonction définie par $G(t) = \int_0^t g(x)\, dx$.

Donner le développement en série de Fourier de G.

c) Soit F la fonction définie par $F(t) = \int_0^t f(x)\, dx$.

F est-elle développable en série de Fourier ?

Exercice 7 :

1°) Développer en série de Fourier la fonction f, paire, de période 2π, définie par : $\begin{cases} f(t) = 1 & \text{si } t \in [0 ; \frac{\pi}{2}[\\ f(t) = 0 & \text{si } t \in]\frac{\pi}{2} ; \pi] \end{cases}$.

2°) Développer en série de Fourier la fonction g, impaire, de période 2π, définie par : $\begin{cases} g(t) = \sin t & \text{si } t \in [0 ; \frac{\pi}{2}[\\ g(t) = 0 & \text{si } t \in]\frac{\pi}{2} ; \pi] \end{cases}$.

a) En utilisant la définition des coefficients de Fourier.

b) En remarquant que $g(t) = f(t) \sin t$.

c) En utilisant les formules du chapitre IV.

3°) Développer en série de Fourier la fonction h, paire, de période 2π, définie par : $\begin{cases} h(t) = -\cos t & \text{si } t \in [0 ; \frac{\pi}{2}[\\ h(t) = 0 & \text{si } t \in]\frac{\pi}{2} ; \pi] \end{cases}$.

4°) En déduire le développement en série de Fourier de la fonction h_1 définie par $h_1(t) = h(t - \pi)$;

puis de h_2 définie par $h_2(t) = |\cos t|$.

Exercice 8 :

1°) La fonction γ étant localement continue par morceaux, de période T et de valeur moyenne nulle sur [0 ; T] , soit f la primitive large de γ nulle en t_0.

Montrer à l'aide d'une intégration par parties la formule du chapitre IV Paragraphe I 1°) d).

2°) Soit la fonction γ, de période 1, définie sur]0 ; 1[par $\gamma(t) = e^t - e + 1$.

En appliquant la formule précédente calculer la valeur moyenne sur [0 ; 1] de la primitive large f de γ nulle en $\frac{1}{2}$.

Exercice 9 :

Soit δ tel que $0 < \delta < \pi$. Soit f, paire, de période 2π, définie par $\begin{cases} f(t) = 1 \text{ si } t \in]0 ; \delta[\\ f(t) = 0 \text{ si } t \in]\delta ; \pi[\end{cases}$.

1°) Calculer les coefficients de Fourier de f.

2°) En déduire que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\delta)}{n} = \frac{\pi - \delta}{2}$.

3°) En utilisant la formule de Parseval , montrer que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(n\delta)}{n^2\delta} = \frac{\pi - \delta}{2}$$

Exercice 10 :

Soit f, de période 2π, définie sur $[-\pi ; +\pi]$, par :
$f(t) = (\pi - |t|)^2$.

Trouver le développement en série de Fourier de f et en déduire les valeurs de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$.

Exercice 11

Soit la fonction f définie sur $]0,\pi[$ par : $f(x) = K$, où K est une constante réelle non nulle.
Trouver pour tout $n \geq 1$ les nombres b_n tels que :

$$\forall x \in]0,\pi[\ , \ f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin nx.$$

Exercice 12

On considère deux nombres réels a et T tels que : $0 < a \leq \frac{T}{2}$.
Soit h la fonction définie sur $[0; \frac{T}{2}]$ par :

$$h(t) = \left(1 - \frac{t}{a}\right)\left(\mathcal{U}(t) - \mathcal{U}(t - a)\right)$$

où $\mathcal{U}$ est la fonction échelon-unité.

Développer h sur $[0; \frac{T}{2}]$ en série de cosinus.

Exercice 13

Soit la fonction f définie sur $[0 ; 2a]$ par :
$\forall x \in]0 ; a[$, $f(x) = x$ et $\forall x \in]a ; 2a[$, $f(x) = x - 2a$

1°) Développer f en série de cosinus.
2°) Développer f en série de sinus.

Maintenance d'exploitation des matériels aéronautiques 1987

On considère la fonction numérique f définie et périodique sur $\mathbb{R}$, de période $T = 2\pi$ et telle que l'on ait :

$$\begin{cases} f(x) = \pi - x & \text{si} \quad 0 < x < \pi \\ f(x) = \pi + x & \text{si} \quad -\pi < x < 0 \end{cases}$$

1) Représenter graphiquement cette fonction f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 1 cm).

2) Développer f (x) en série de Fourier et déduire du développement obtenu la valeur de la somme :

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$$

Chimiste 1988

Soit le signal f, dit "dent de scie", périodique, de période $T = 2\pi$, défini sur l'intervalle $]-\pi, +\pi[$ par :

$$f(t) = t$$

L'énergie transporté par le signal est donnée par la formule :

$$E^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f^2(t)\, dt$$

1°) Tracer dans un repère orthonormé $(O', \vec{i}, \vec{j})$ le graphique de f. Calculer l'énergie E transportée.

2°) Calculer les coefficients de Fourier, a_n et b_n de la fonction f. On admettra la convergence de la série de Fourier de f.

3°) La formule de Bessel-Parseval :

$$E^2 = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n^2 + b_n^2}{2}$$

donne l'énergie transportée par le signal en utilisant la série de Fourier associée.

Calculer l'énergie E' transportée par ce signal si l'on ne considère que les 11 premiers harmoniques. Comparer la valeur de E' avec celle de E trouvée à la question 1°); conclusion ?

Assistance technique d'ingénieur 1991

a) On considère les intégrales $I_n = \int_0^{\pi} x \sin nx.dx$

où n est un entier naturel.

Calculer I_0

Calculer I_n pour n non nul.

b) Soit F la fonction périodique de période 2π telle que, pour x élément de l'intervalle $[-\pi, +\pi]$, on ait : $F(x) = x \sin x$.

Calculer les coefficients de la série de Fourier associée à F.

Génie optique 1995

EXERCICE 3 : Développement en série de Fourier d'un signal périodique (10 points).

On considère le signal défini par la fonction f de période 2π telle que

pour tout t de l'intervalle $[-\pi, \pi] : f(t) = \dfrac{e^t + e^{-t}}{4}$

1.1. Vérifier que f est une fonction paire et satisfait aux conditions de Dirichlet.

1.2. Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. (unité graphique : 2 cm).

Représenter la fonction f sur l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$

2.1. Montrer que les coefficients bn de Fourier sont nuls. Calculer a_0. Les notations choisies sont celles du formulaire.

2.2. Pour tout n entier naturel non nul on pose : $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi} (e^t + e^{-t}) \cos(nt)\, dt$.

En posant $\varphi(t) = e^t - e^{-t}$ et après avoir calculé $\varphi'(t)$ et $\varphi''(t)$, calculer In à l'aide d'une double intégration par parties.

En déduire la valeur du coefficient de Fourier a_n de f.

2.3. Ecrire le développement de la fonction f en série de Fourier.

3.1. Justifier la convergence des séries numériques de terme général :

$$\frac{(-1)^n}{n^2+1} \quad ; \quad \frac{1}{n^2+1} \quad \text{où n est un entier naturel.}$$

3.2. En utilisant le développement en série de Fourier de f pour $t = 0$ et $t = \pi$, calculer :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1} \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$$

Photonique 1990

On se propose de développer en série de Fourier un signal périodique et de représenter son spectre de fréquence.

Soit la fonction numérique f de période 4, impaire et définie par :

$$\begin{cases} f(x) = x, & x \in [0 ; 1[\\ f(x) = 1, & x \in [1 ; 2[\\ f(2) = 0 & \end{cases}$$

1.1. Représenter le signal périodique défini par f sur [-4 ; 4] et calculer sa pulsation ω .

1.2. Calculer les quatre premiers termes du développement en série de Fourier de la fonction f.

Photonique 1992

1. Calculer les intégrales suivantes, dans lesquelles a est un réel positif et n un entier nature

$$I_n(a) = \int_0^a t \cos n t \, dt$$

$$Jn(a) = \int_0^a t \sin n t \, dt$$

En déduire $I_n(\pi)$; $I_n(2\pi)$; $J_n(\pi)$ et $J_n(2\pi)$.

2. Représenter sur un intervalle d'amplitude $2T = 4\pi$, les fonctions définies de la façon suivant

$$f : \begin{cases} \text{Période } T = 2\pi \\ f(t) = t \text{ si } t \in [0 ; \pi] \\ f(-t) = f(t) \end{cases}$$

$$g : \begin{cases} \text{Période } T = 2\pi \\ g(t) = t \text{ si } t \in [0 ; \pi] \\ g(-t) = -g(t) \end{cases}$$

$$h : \begin{cases} \text{Période } T = 2\pi \\ h(t) = t \text{ si } t \in [0 ; 2\pi] \end{cases}$$

3. Déduire de la question 1, le développement en série de Fourier, de ces trois fonctions. On écrira les quatre premiers termes pour chaque série.

Photonique 1993

EXERCICE 2 : Développement en série de Fourier d'un signal périodique (8 points).

1. n désignant un entier naturel non nul, justifier la convergence des séries numériques de terme génér

$$\frac{1}{n^2} ; \frac{(-1)^n}{n^2} ; \frac{1}{n^4} .$$

2. On pose pour tout n entier naturel non nul :

$$I_n = \int_0^\pi t \cos 2nt \, dt ; \quad J_n = \int_0^\pi t^2 \cos 2nt \, dt .$$

Calculer I_n. On admettra que $J_n = \dfrac{\pi}{2n^2}$.

3. On considère le signal défini par la fonction f paire, de période π telle que :

$$\forall t \in [0, \pi], f(t) = t(\pi - t).$$

3.1. Représenter ce signal sur $[-2\pi, 2\pi]$.

3.2. Calculer les coefficients de Fourier réels a_n et b_n de f (n, entier naturel).

3.3. Vérifier que f satisfait aux conditions de Dirichlet et en déduire le développement de f en série - Fourier.

4.

4.1. En utilisant le développement en série de Fourier de f pour

$$t = 0 \text{ et } t = \frac{\pi}{2}$$

déterminer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$.

4.2. En utilisant la formule de Parseval, calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$.

Photonique 1994

f est une fonction de la variable réelle t définie et continue sur R, de période 2π, dérivable sur $R - \{k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$, telle que $f(0) = 1$. Sa dérivée f' par rapport à la variable t est définie de la façon suivante :

pour $t \in]0, \pi[$ $\qquad f'(t) = \dfrac{1}{\pi}$

pour $t \in]\pi, 2\pi[$ $\qquad f'(t) = -\dfrac{1}{\pi}$

1) Déterminer l'expression de f sur $[0, \pi]$ et sur $[\pi, 2\pi]$.

2) Sur le même graphique, représenter les fonctions f et f' sur l'intervalle $[-3\pi, 3\pi]$.

3) Montrer que f est paire et qu'elle satisfait aux conditions de Dirichlet.

4) Développer f en série de Fourier.

5) Montrer que la série numérique de terme général $\dfrac{1}{(2n+1)^2}$ $(n \in \mathbb{N})$ est convergente.

En utilisant de développement de f en série de Fourier pour t = 0, déterminer

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

Géologie appliquée 1992

Soit f la fonction périodique de période $T = 2\pi$ définie sur $[-\pi, \pi[$ par :

$$f(x) = x^2 - \frac{\pi^2}{3}$$

1) Déterminer la série de Fourier associée à f.

2) Préciser l'ensemble de convergence de cette série.

3) En déduire les sommes des séries :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$$

Géologie appliquée 1993

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x, paire, périodique de période $T = 2\pi$ définie sur :

$[0, \pi]$ par : $f(x) = \pi$ si $x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right[$; $f(x) = 0$ si $x \in \left]\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right[$; $f(x) = -\pi$ si $x \in \left]\frac{2\pi}{3}, \pi\right]$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{2} = -f\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

1) Construire la représentation graphique de f sur $[-2\pi, 2\pi]$.

2) Développer f en série de Fourier.

Géologie appliquée 1995

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x, impaire, périodique de période $T = 2\pi$ définie sur $[0, \pi]$ par :

$$f(0) = 0 \; ; f(x) = x - \pi \text{ si } x \in \,]0, \pi].$$

1) Construire la représentation graphique de f sur $[-2\pi, 2\pi]$.

2) Développer f en série de Fourier et préciser l'ensemble de convergence de cette série.

3) Justifier la convergence de la série numérique de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{2n+1}$ où $n \in \mathbb{N}$?

Calculer $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$. En déduire la valeur de la somme :

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1}$$

Informatique industrielle 1989

On considère le signal défini par la fonction f de période $T = \pi$, telle que pour tout élément t de l'intervalle $[0, \pi]$:

$$f(t) = t(\pi - t).$$

1°)a/ Etudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0, \pi]$.

Construire la courbe représentative de la fonction f, restreinte à l'intervalle $[0, \pi]$.

b/ Construire la courbe représentative de la fonction f, restreinte à l'intervalle $[-3\pi, 3\pi]$.

2°) a/ Calculer les coefficients de Fourier de la fonction f.

b/ Ecrire le développement en série de Fourier de la fonction f.

Informatique industrielle 1992

Un exemple de développement en série de Fourier d'une fonction périodique.

I) Soit n un entier naturel non nul.

Soit la série dont le terme général est $u_n = \dfrac{1}{4n^2-1}$.

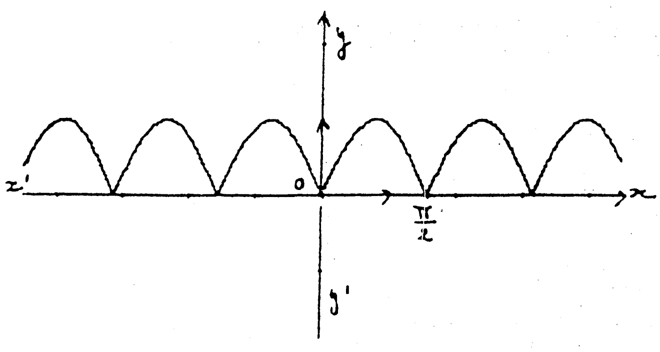
1°) Montrer que cette série est convergente.

2°) Vérifier l'égalité : $\dfrac{1}{4n^2-1} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2n-1} - \dfrac{1}{2n+1}\right)$

3°) a) En déduire que : $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} u_n = \frac{N}{2N+1}$

b) Quelle est la somme de la série de terme général u_n.

II) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = |\sin(2x)|$
dont on donne la représentation graphique.



1) Montrer que f est une fonction paire et périodique de période $\dfrac{\pi}{2}$.

2) Calculer la valeur moyenne de f sur une période.

3)a) En utilisant le formulaire, transformer en somme le produit $\sin(2x).\ \cos(4nx)$.

b) En déduire que : $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x).\ \cos(4nx)dx = \frac{-1}{4n^2-1}$

4) En utilisant le résultat de la question (II.3.b), donner le développement en série de Fourier de la fonction f.

5) En utilisant ce développement pour $x = 0$ retrouver le résultat de (I.3.b).

En utilisant ce développement pour $x = \dfrac{\pi}{4}$, montrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1} = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}.$$

Informatique industrielle 1993

1°/ Soit n appartenant à $\mathbb{N}^*$.

Soit $I_n = \displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} (\pi^2-x^2)\cos(nx)dx$ et $J_n = \displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} x\sin(nx)dx$.

Montrer par une intégration par parties que

$$I_n = \frac{2}{n} J_n.$$

Calculer J_n. En déduire I_n.

2°/ Soit f la fonction réelle, périodique de période 2π telle que pour x appartenant à $[-\pi,+\pi]$, $f(x) = \pi^2-x^2$.

a) Tracer la courbe représentant f sur $[-\pi\ ,\ 5\pi]$.

b) On admet que f est développable sur $\mathbb{R}$ en série de Fourier.
Calculer les coefficients de Fourier a_0, a_n et b_n pour n appartenant à $\mathbb{N}^*$, puis donner le développement de f en série de Fourier.

Contrôle industriel et régulation automatique 1991

L'objet de cet exercice est une utilisation, en électricité, d'une série de Fourier pour étudier un filtre.

Partie A :

1 - Soient b un nombre réel et n un entier naturel non nul. A l'aide d'une intégration par parties, calculer l'intégrale :

$$I = \int_0^b t \cos(nt)\, dt .$$

2 - Un signal "triangle" est modélisé par la fonction u, définie sur $\mathbb{R}$, périodique, de période 2π, telle que :

$$u(t) = t \text{ si } t \in [0, \pi]$$
$$u(t) = 2\pi - t \text{ si } t \in]\pi, 2\pi].$$

a - Tracer, dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la courbe représentative de la restriction de la fonction u à l'intervalle $[-4\pi, 4\pi]$.

b - En observant que u est une fonction paire, calculer ses coefficients de Fourier. On pourra utiliser le résultat de la question 1 - .

c - Vérifier que la fonction u satisfait aux conditions de Dirichlet sur

$[0, 2\pi]$ et en déduire que, pour tout t réel, $u(t) = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{4}{\pi} \displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \dfrac{\cos[(2p+1)t]}{(2p+1)^2}$.

3 - En choisissant des unités convenables, la puissance P du signal u est donnée

par la formule $P = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} u^2(t)\, dt = \dfrac{1}{\pi}\int_0^{\pi} u^2(t)\, dt$.

a - Calculer P puis en donner une approximation décimale à 10^{-3} près.

b - La formule de Bessel-Parseval donne la puissance du signal u en fonction de ses coefficients de Fourier :

$$P = a_0^2 + \frac{1}{2}(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2 + \dots) .$$

Dans la pratique, on décide de ne conserver que les harmoniques de rang 1 et 3. On obtient alors une valeur approchée P_1 de la puissance du signal :

$$P_1 = a_0^2 + \frac{1}{2}(a_1^2 + a_3^2) .$$

Calculer P_1 puis en donner une approximation décimale à 10^{-3} près.

La comparaison de P et P_1 justifie que, dans la pratique, on néglige les harmoniques de rang supérieur ou égal à 4.

Contrôle industriel et régulation automatique 1988

Soit f la fonction numérique périodique , de période 2π, définie sur $\mathbb{R}$ et telle que :

$$f(t) = t \text{ si } t \in [0, \pi] \text{ et } f(t) = 0 \text{ si } t \in]\pi, 2\pi[.$$

1) Tracer la représentation graphique de la restriction de cette fonction à l'intervalle $]-3\pi, 3\pi[$.

2) n étant un naturel , calculer les intégrales :

$$I_n = \int_0^{\pi} t \cos(nt)\,dt \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^{\pi} t \sin(nt)\,dt.$$

3) a) Montrer que f est développable en série de Fourier. Déterminer ce développement.

b) Préciser les trois premiers harmoniques de la fonction f.

Contrôle industriel et régulation automatique 1994

1°) Soit n un entier naturel non nul.
Calculer, à l'aide de deux intégrations par parties successives, l'intégrale :

$$J = \int_0^{\pi} t(\pi - t) \cos 2nt \, dt .$$

2°) On considère la fonction u de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, périodique, de période π , définie par :

$$u(t) = t(\pi - t) \text{ si } t \in [0, \pi[.$$

a) Tracer, dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la courbe représentative de la restriction de la fonction u à l'intervalle $[-2\pi, +2\pi]$.

b) En observant que u est une fonction paire, calculer ses coefficients de Fourier.

c) Vérifier que la fonction u satisfait aux conditions de Dirichlet sur $\mathbb{R}$. En déduire que, pour tout réel t :

$$u(t) = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos 2nt}{n^2} .$$

d) En donnant à t une valeur particulière, montrer que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12} .$$

3°) a) La valeur efficace u_{eff} de la fonction u est telle que :

$$u_{eff}^2 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} u^2(t)\,dt.$$

Calculer u_{eff}^2.

b) La valeur efficace de la fonction u peut également s'exprimer à l'aide des coefficients de Fourier de u :

$$u_{eff}^2 = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2. \qquad \text{(Formule de Parseval)}$$

Soit P le nombre défini par :

$$P = a_0^2 + \frac{1}{2}(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2).$$

Donner l'approximation décimale P_1 de P à 10^{-3} près par excès.

On peut observer que $\dfrac{P_1}{u_{eff}^2}$ *est supérieur à* 0,999. *Le nombre* P_1 *est donc une "bonne" approximation de* u_{eff}^2.

Electrotechnique 1987

Rappel : Quand ils sont définis, on appelle "coefficients de Fourier" de la fonction f les réels :

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\,dx \;,\; a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\cos nx\,dx \;,\; b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\sin nx\,dx$$

pour l'entier naturel n ($n \geqslant 1$).

Soient f et g les fonctions numériques, admettant 2π pour période, définies sur IR par :

$\forall x \in]-\pi ; +\pi[\quad f(x) = 2x \quad$ et $\quad f(-\pi) = f(\pi) = 0$

$\forall x \in [-\pi ; +\pi] \quad g(x) = x^2$

a) On se place dans un plan muni d'un repère orthonormé d'axes Ox et Oy, d'unité 1 cm. Représenter graphiquement f et g pour x appartenant à l'intervalle $[-2\pi ; +2\pi]$.

b) Calculer les coefficients de Fourier de f , puis ceux de g. (On aura à distinguer la parité de n).

c) Déduire de la série de Fourier de f la valeur de la somme :

$$S = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1}$$

Electrotechnique 1989

Soit f la fonction numerique periodique de periode 2π , impaire, definie par

$$\begin{cases} f(x) = x & \text{si } 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ f(x) = x - \frac{\pi}{2} & \text{si } \frac{\pi}{2} \leq x < \pi \\ f(\pi) = 0 & \end{cases}$$

1°) *Le plan est muni d'un repere orthonorme (l'unite est le centimetre) Representer graphiquement f sur l'intervalle* $[-3\pi, +3\pi]$.

2°) *a) Calculer pour tout entier n positif ou nul les coefficients de Fourier* a_n *et* b_n *de la fonction f.*

b) Vérifier que f satisfait aux conditions de Dirichlet sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$ *et preciser la somme de la serie de Fourier de la fonction f pour tout reel x de l'intervalle* $[0, \pi]$.

c) *En utilisant ce développement lorsque* $x = \frac{\pi}{2}$, *determiner la somme de la serie*

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1} .$$

Electrotechnique 1992

Soit un signal électrique défini par la fonction f telle que :

$$\begin{cases} \text{f est paire et de période } 2\pi \\ f(t) = -t^2 + 2\pi t \quad \text{si } t \in [0, \pi] \end{cases}$$

1°) Représenter le signal électrique pour $t \in [-3\pi, 3\pi]$.

Calculer $\int_0^{\pi} f(t)\,dt$. En déduire la valeur moyenne de f sur une période.

2°) On admet que la fonction f satisfait aux conditions de Dirichlet, ce qui permet d'affirmer que la fonction f est la somme de sa série de Fourier, à savoir : pour tout t élément de **R**,

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$$

les nombres a_0, a_n et b_n étant les coefficients de Fourier de f.

a) Calculer a_0.

b) Calculer les intégrales suivantes où n est un entier strictement positif :

$$I_n = \int_0^{\pi} t.\cos nt\,dt \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^{\pi} t^2.\cos nt\,dt$$

Exprimer le coefficient a_n à l'aide de I_n et J_n. En déduire a_n.

3°) En utilisant le développement de f(t) pour t = 0, déterminer la somme de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Electrotechnique 1994

Soit la fonction numérique f de la variable réelle t telle que :

a) f est impaire et de période 2π,
b) $f(t) = 1 - \cos(2t)$, si $0 \leqslant t \leqslant \pi$.

1°) Etudier les variations de f sur $[0, \pi]$.

Tracer, dans un plan muni d'un repère orthonormal $(0;\ \vec{i},\ \vec{j})$ (unité graphique : 1 cm), la courbe représentative de f sur $[-2\pi, 2\pi]$.

2°) Calculer la valeur efficace, E_f, de la fonction f.

3°) On admet que, pour tout réel t,

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)),$$ les nombres a_0, a_n et b_n étant les coefficients de Fourier de f.

a) Justifier que : $a_n = 0$, pour $n \geqslant 0$.

b) Calculer ω et b_2.
c) Calculer b_n pour $n \geqslant 1$, $n = 2$.

(On précisera le résultat suivant la parité de n).

Electrotechnique 1995

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\begin{cases} f \text{ est paire} \\ f \text{ est périodique de période } 4 \\ f(t) = 1 \text{ pour } 0 \leqslant t < 1 \\ f(t) = 2-t \text{ pour } 1 \leqslant t \leqslant 2. \end{cases}$$

A. 1°) Représenter graphiquement f pour t appartenant à l'intervalle [-6, 6].

2°) La fonction f satisfaisant aux conditions de Dirichlet et étant de plus continue sur $\mathbb{R}$, on a :

$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t))$, où a_0, a_n et b_n sont les coefficients de la série de Fourier associée à f.

a- Justifier que $b_n = 0$ pour $n \geqslant 1$.

b- Calculer a_0 et ω.

c- Montrer que pour $n \geqslant 1$, $a_n = \dfrac{4}{\pi^2 n^2}\left(\cos\dfrac{n\pi}{2} - \cos n\pi\right)$

En déduire les valeurs de a_1, a_2, a_3 et a_4.

B. On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi(t) = \frac{3}{4} + \frac{4}{\pi^2}\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) - \frac{2}{\pi^2}\cos(\pi\ t)$$

1°) Montrer que φ est paire et périodique de période 4.

2°) a- Calculer $\varphi'(t)$ pour tout réel t et vérifier que :

$$\varphi'(t) = \frac{4}{\pi}\sin\left(\frac{\pi\ t}{4}\right)\cos\left(\frac{3\pi t}{4}\right)$$

b- En déduire le sens de variation de φ sur [0, 2].

3°) Construire dans un plan rapporté à un repère orthonormal, les courbes représentatives de f et de φ pour t appartenant à [-2, 2].
(Unité graphique : 4 cm)

Electronique 1977

1 - Calculer les intégrales :

$$I = \int_a^b x \cos n\omega x \, dx$$

$$\text{et } J = \int_a^b x \sin n\omega x \, dx$$

2 - Soit la fonction f, périodique, de période $T = \pi$, définie par :
si $0 \leqslant x \leqslant \frac{2\pi}{3}$ $\quad f(x) = \frac{3}{4} x$ $\quad$; $\quad$ si $\frac{2\pi}{3} \leqslant x \leqslant \pi$ $\quad f(x) = \frac{3}{2}(\pi - x)$

2.1. - Tracer le graphe de la fonction f.

2.2. - Calculer la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[0, \pi]$

3 - Soit $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x)$ le développement de la fonction f en série de Fourier.

3.1. - Calculer ω et a_0.

3.2. - Montrer que, pour $n \geqslant 1$, $a_n = \frac{-9}{8 n^2 \pi} \left(1 - \cos \frac{4 n \pi}{3}\right)$ et

$$b_n = \frac{9}{8 n^2 \pi} \sin \frac{4 n \pi}{3}$$

3.3. - Que deviennent les coefficients a_n et b_n lorsque $n = 3p$, $n = 3p + 1$, $n = 3p + 2$?

Electronique 1979

1 - Soit la série numérique de terme général :

$$n \geqslant 1 \qquad u_n = \frac{(-1)^n e^{-\pi} - 1}{1 + n^2}$$

Montrer que $|u_n|$ est majorée par une expression simple de n^2 et en déduire que la série de terme général u_n est convergente.

2 - Calculer les intégrales

$$\int_0^{\pi} e^{-x} \cos n x \, dx \qquad \text{et} \qquad \int_0^{\pi} e^{-x} \sin n x \, dx$$

3 - Soit la fonction f, périodique de période 2π définie par :

$$\begin{cases} x \in [0, \pi[& f(x) = 1 - e^{-x} \\ x \in [\pi, 2\pi[& f(x) = 0 \end{cases}$$

3.1. - Tracer la courbe représentant f pour $x \in [-\pi, +3\pi]$

3.2. - f est-elle développable en série de Fourier ? Préciser la valeur de la somme de la série de Fourier associée à f pour $x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$

3.3. - En se servant des résultats du 2 -, calculer les coefficients de Fourier. On donnera les résultats en distinguant n impair et n pair.

4 - Donner la valeur de la somme de la série de Fourier pour x = 0. En déduire la somme de la série numérique de terme général u_n proposée au 1 -.

Electronique 1987

Soit f la fonction numérique, de période 2π, définie sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$ par

$f(x) = \pi - x$ si $x \in [0, \pi[$

$f(x) = -\pi + x$ si $x \in [-\pi, 0[$

1 - Tracer dans un repère orthonormé la courbe représentative de f.

2 - On suppose que f est développable en série de Fourier. On désigne son terme général par

$u_n(x) = a_n \cos nx + b_n \sin nx$ (n entier naturel)

a) Calculer $a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\,dx$, $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\cos nx\,dx$, $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\sin nx\,dx$.

b) Ecrire le développement de la fonction f en série de Fourier.

c) Enoncer le théorème qui permet de dire que la série de Fourier converge en zéro, en $\frac{\pi}{2}$.

Montrer que la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{2n+1}$ est convergente.

Calculer sa somme en utilisant le développement en série de Fourier de la fonction f.

Electronique 1988

Le but de cet exercice est d'établir, avec un minimum de calculs, le développement en série de Fourier de quelques fonctions périodiques, courantes en électronique.

Les graphiques demandés aux questions 2° et 3° seront réalisés l'un sous l'autre sur la même feuille de papier millimétré.

1°) n étant un entier naturel strictement positif, montrer que :

$$\int_0^{\pi} \sin t \cos 2nt \, dt = \frac{2}{1-4n^2}.$$

2°) Soit f la fonction numérique de période π, telle que pour tout élément t de $[0;\pi]$, $f(t) = \sin t$.

a) Tracer dans un repère orthonormé la courbe représentative de f sur l'intervalle $[-3\pi;3\pi]$ (unité : 1 cm sur chacun des axes).

b) Montrer que f est développable en série de Fourier et expliciter ce développement.

3°) Soit la fonction numérique g de période 2π définie par :

$$g(t) = \sin t \quad \text{si } t \in [0;\pi]$$
$$g(t) = 0 \quad \text{si } t \in [\pi;2\pi]$$

Donner l'allure de la représentation graphique de g sur $[-3\pi;3\pi]$, ainsi que celle des fonctions h, i, j, définies pour tout nombre réel t par :

$$h(t) = g(-t)$$
$$i(t) = g(t) + g(-t)$$
$$j(t) = g(t) - g(-t)$$

4°) Après avoir reconnu les fonctions i et j, déduire des questions précédentes le développement en série de Fourier de g.

Electronique 1990

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$, de période 4 telle que :

$f(t) = t$ si $0 \leq t < 1$.

$f(t) = 1$ si $1 \leq t < 3$.

$f(t) = 4 - t$ si $3 \leq t < 4$.

1) a) Représenter graphiquement (sur la copie) la fonction f sur l'intervalle $[-6, -6]$.

b) Etablir que f est paire.

c) Justifier que f satisfait aux conditions de Dirichlet.

Soit $\sum_{n=0}^{-\infty} a_n \cos n\omega t$ la série de Fourier associée à f.

Déterminer a_0 et ω. Montrer que, pour $n \geq 1$.

$$a_n = \frac{4}{n^2\pi^2}\left[\cos n\frac{\pi}{2} - 1\right].$$

2) Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi(t) = \frac{3}{4} - \frac{4}{\pi^2}\cos\frac{\pi}{2}t - \frac{2}{\pi^2}\cos \pi t.$$

a) Vérifier que φ est paire et a pour période 4.

b) Résoudre sur $[0,2]$ l'équation $\varphi'(t) = 0$. Calculer à

10^{-2} près, $\varphi\left(\frac{n}{3}\right)$ pour $n = 0,1,2,3,4,5$ et 6. Dresser le tableau de variation de φ pour $0 \leq t \leq 2$.

c) Construire dans un même repère orthonormé les courbes $y = f(t)$ et $y = \varphi(t)$ pour $-2 \leq t \leq 2$ puis pour $-4 \leq t \leq 4$. (on prendra 2 cm pour unité graphique).

3) a) Calculer $I = \int_0^2 f^2(t)\, dt$. En déduire le carré de la valeur efficace de f.

b) Calculer le carré de la valeur efficace de φ (on pourra utiliser la formule de Parseval).

c) Comparer les résultats obtenus en a) et b). Ce résultat était-il prévisible ?

Electronique 1992

Soit la fonction numérique $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & f(t) \end{array}$

définie par : $\left\{\begin{array}{l} f \text{ est periodique de periode } \pi \\ \text{pour } t \in [0, \pi[\text{ on a : } f(t) = 1 + \cos t \end{array}\right.$

a) Representer graphiquement f sur $[-\pi, 2\pi]$

b) Calculer fe la valeur efficace de f.

c) Justifier que f satisfait aux conditions de Dirichlet.

d) Soit $S(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t)$ le développement en série de Fourier associé à f.

Montrer que $a_n = 0$ pour $n \geq 1$. Calculer a_0.

Calculer b_n.

e) Comparer les valeurs prises par f et par S, pour les valeurs de la variable

$$t = \frac{\pi}{4} \quad \text{et} \quad t = 0$$

f) Soit maintenant : $g(t) = 1 + \frac{8}{\pi}\left(\frac{\sin 2t}{3} + \frac{2 \sin 4t}{15}\right)$.

Calculer ge la valeur efficace de g en utilisant la formule de Parseval.

Comparer ge avec fe la valeur efficace de f trouvée à la question b).

Electronique 1994

Soit f la fonction numérique $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$t \mapsto f(t)$

définie par $\begin{cases} .\ f(t) = t - 1 \text{ pour } t \in [0,2] \\ .\ f \text{ est paire} \\ .\ f \text{ est périodique de période } 4 \end{cases}$

1°) Représenter graphiquement f sur $[-2,6[$.

2°) Calculer f_e la valeur efficace de f .

3°) Justifier que f satisfait aux conditions de Dirichlet..

4°) Soit $S(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t)$ le développement de Fourier associé à f .

a) Donner la valeur de b_n.

b) Calculer a_0 et, pour $n \geq 1$, a_n (préciser les valeurs de a_{2p} et de a_{2p+1}).

c) $S(t)$ est-il égal à $f(t)$ pour tout réel t ?

5°) Soit g la fonction numérique définie, pour tout réel t , par :

$$g(t) = -\frac{8}{\pi^2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) + \frac{1}{9}\cos\left(\frac{3\pi}{2}t\right)\right]$$

a) Montrer que g est périodique de période 4. Que représente g dans le développement en série de Fourier de f ?

b) Calculer g_e la valeur efficace de g en utilisant la formule de Parseval.

Vérifier que $|f_e - g_e| < 10^{-3}$

Electronique 1995

EXERCICE II (11 points)

Soit la fonction numérique f définie par :
$$\begin{cases} f(t) = 3 \text{ pour } t \in]0, \pi[\\ f(0) = f(\pi) = 0 \\ f \text{ est impaire} \\ f \text{ est périodique de période } 2\pi \end{cases}$$

1°) Représenter graphiquement f dans un repère orthonormal sur l'intervalle $[-2\pi, 3\pi]$.

2°) Justifier que f satisfait aux conditions de Dirichlet.

3°) Soit, $S(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t)$ le développement de Fourier associé à f .

a) Donner les valeurs de a_0 et a_n .

b) Calculer b_n (préciser les valeurs de b_{2p} et de b_{2p+1}).

c) Justifier que $S(t) = f(t)$ pour tout nombre réel t .

4°) Montrer que la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$ est convergente.

En utilisant $S\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$, calculer $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$.

5°) Dans cette question, on se propose de comparer f et la somme du fondamental et du premier harmonique de f.

Soit g la fonction numérique définie sur IR par $g(t) = \dfrac{12}{\pi}\left(\sin t + \dfrac{1}{3}\sin 3t\right)$

a) Montrer que g est impaire et périodique de période 2π .

b) Calculer $g'(t)$, étudier le signe de $g'(t)$ sur l'intervalle $[0, \pi]$ et donner le tableau de variations de g sur $[0, \pi]$.

c) Représenter graphiquement g et f dans le même repère orthonormal (unité 2 cm) sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$.

ANNEXE

QUELQUES RAPPELS SUR LES SÉRIES NUMÉRIQUES

I- PREMIERES NOTIONS :

1°) Définitions :

a) Définition 1 :

a $\in \mathbb{N}$, n $\in \mathbb{N}$, soit $(u_n)_{n\geq a}$ une suite de nombres complexes, on appelle série de terme général u_n la suite $(s_n)_{n\geq a}$ telle que :

$$s_n = \sum_{k=a}^{n} u_k$$

On notera la série de terme général u_n : $\sum u_n$

b) Définition 2 :

La série $\sum u_n$ converge si et seulement si la suite (s_n) est convergente.

Soit L $\in \mathbb{C}$ la limite de (s_n) , on dit que L est la somme de la série et on écrit :

$$L = \sum_{n=a}^{+\infty} u_n$$

Si la suite (S_n) n'est pas convergente on dit que la série $\sum u_n$ est divergente.

c) Exemples de séries convergentes :

$n \geq 1 \quad u_n = \dfrac{1}{n\,(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1} \qquad s_n = 1 - \dfrac{1}{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$

d) Exemples de séries divergentes :

α) $n \geq 1 \quad u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

La suite (u_n) converge vers 0.

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln \frac{k+1}{k} = \ln \frac{2 \times 3 \times 4 \times \ldots \times n+1}{1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n} = \ln(n+1)$$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} s_n = +\infty$ la série $\sum u_n$ diverge.

β) $u_n = (-1)^n$

la suite (u_n) diverge.

$s_{2p} = 1$ et $s_{2p+1} = 0$ la série diverge.

2°) **Théorème 1 :**

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge} \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} u_n = 0}$$

$\lim\limits_{n \to +\infty} s_n = 1$ et $u_n = s_{n+1} - s_n$

La réciproque est fausse : exemple du I- 1°) d) α)

3°) Théorème 2 :

Soit $\sum u_n$ (respectivement $\sum v_n$) une série convergente de somme S (respectivement T) alors, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ et $\forall \mu \in \mathbb{C}$, la série $\sum (\lambda\ u_n + \mu\ v_n)$ est convergente et de somme $\lambda\ S + \mu\ T$.

4°) Séries géométriques :

a) Définition 3 :

On nomme série géométrique toute série de terme général :

$u_n = \lambda\ z^n$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$ et $z \in \mathbb{C}$

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} \lambda\ z^k = \lambda\ \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$$

Si $|z| < 1$ la série converge vers $\frac{\lambda}{1 - z}$

Si $|z| \geq 1$ u_n ne tend pas vers zéro donc la série diverge.

b) Théorème 3 :

Si $|z| < 1$ $\quad \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda\ z^n = \frac{\lambda}{1 - z}$

Si $|z| \geq 1$ la série $\sum \lambda\ z^n$ diverge

5°) **Théorème 4 :** Critère de Cauchy (admis)

$$\sum u_n \text{ convergente} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2$$
$$N_\varepsilon \leq p \leq q \Rightarrow \left| \sum_{k=p}^{k=q} u_k \right| < \varepsilon$$

Corollaire

Toute série absolument convergente est convergente

Exemple :

Soit la série de terme général $u_n = \dfrac{\sin nt}{n^2}$

$|u_n| \leq \dfrac{1}{n^2}$ donc $\sum u_n$ converge (voir II-ci après)

6°) **Règle d'Abel** (admis)

Soit (u_n) une suite de nombres réels ou complexes telle que la suite (S_n), $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$, soit bornée et soit (v_n) une suite de nombres positifs, décroissante et tendant vers zéro, alors la série $\sum v_n u_n$ est convergente.

Exemple :

Soit $u_n = e^{in\alpha}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et $e^{i\alpha} \neq 1$, on a :

$$S_n = \frac{e^{(n+1)i\alpha} - 1}{e^{i\alpha} - 1}$$

d'où $|S_n| \leq \dfrac{2}{|e^{i\alpha} - 1|} = \dfrac{1}{|\sin \frac{\alpha}{2}|}$

Soit $v_n = \frac{1}{n}$ on déduit de la règle d'Abel que les séries numériques $\sum \dfrac{\cos n\alpha}{n}$ et $\sum \dfrac{\sin n\alpha}{n}$ sont convergentes pour $\alpha \neq k2\pi$

II- SERIES A TERMES POSITIFS :

1°) La suite (s_n) est croissante.

Théorème 1 :

Si $\forall\, n,\ u_n \geq 0$, $\sum u_n$ converge $\Leftrightarrow$ la suite (s_n) est majorée.

Dans le cas où $\sum u_n$ diverge, $\lim\limits_{n \to +\infty} s_n = +\infty$

2°) Comparaison de deux séries à termes positifs :

Théorème 2 :

Si à partir d'un certain rang a, $u_n \leq v_n$ alors :

$$\begin{cases} \sum v_n \text{ converge} \Rightarrow \sum u_n \text{ converge} \\ \sum u_n \text{ diverge} \Rightarrow \sum v_n \text{ diverge} \end{cases}$$

$\sum\limits_{k=a}^{k=n} u_k \leq \sum\limits_{k=a}^{k=n} v_k \leq \sum\limits_{k=a}^{+\infty} v_k$ donc la suite des sommes partielles de $\sum u_n$ est majorée (théorème 1).

3°) Théorème 3 :

$$\text{Si } \lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1 \text{ alors les séries } \sum u_n \text{ et } \sum v_n \text{ sont de même nature}$$

Rappelons que : $\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1 \Leftrightarrow u_n \sim v_n$ quand $n \to +\infty$

$\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$ donc il existe a tel que : $n \geq a$, $\frac{1}{2} \leq \frac{u_n}{v_n} \leq \frac{3}{2}$ donc

$\forall\, n \geq a \quad \frac{1}{2} v_n \leq u_n \leq \frac{3}{2} v_n$ d'où le résultat (théorème 2).

Application :

$n \geq 1 \quad u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$

quand $n \to +\infty$ $u_n \sim \frac{1}{2^n}$ donc $\sum u_n$ est de même nature que $\sum \frac{1}{2^n}$.

La série converge.

4°) Comparaison d'une série numérique et d'une intégrale :

f une fonction de $[\, a, +\infty\, [\longrightarrow \mathbb{R}^+$, $a \in \mathbb{N}$, f décroissante.

$k \geq a \quad \forall\, t \in [\, k, k+1\,] \quad f(k+1) \leq f(t) \leq f(k)$

$$\Rightarrow \int_k^{k+1} f(k+1)\,dt \leq \int_k^{k+1} f(t)\,dt \leq \int_k^{k+1} f(k)\,dt$$

$$\Leftrightarrow f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t)\,dt \leq f(k)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=a}^{n} f(k+1) \leq \sum_{k=a}^{n} \int_k^{k+1} f(t)\,dt \leq \sum_{k=a}^{n} f(k)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=a+1}^{n+1} f(k) \leq \int_a^{n+1} f(t)\,dt \leq \sum_{k=a}^{n} f(k)$$

Si la série diverge alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_a^{n+1} f(t)\,dt = +\infty$

Si la série converge alors la suite de terme général

$v_n = \int_a^{n+1} f(t)\,dt$ est croissante et majorée donc convergente.

Remarque :

La convergence de la suite (v_n) est équivalente à la convergence de $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ comme le montre la relation suivante :

$$\int_a^{E(x)} f(t)\,dt \le \int_a^{x} f(t)\,dt \le \int_a^{E(x)+1} f(t)\,dt$$

$E(x)$ désigne la partie entière de x

Théorème 4 :

$f : [\, a \,, +\infty \,[\longrightarrow \mathbb{R}^+ \,, \; a \in \mathbb{N} \,, \; f$ décroissante ,
La série $\sum f(x)$ et l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ sont de même nature.

Application :

$u_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$, $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$

$\displaystyle\int_1^x \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}\left[\frac{1}{x^{\alpha-1}} - 1\right]$ converge si $\alpha > 1$, diverge si $\alpha < 1$.

si $\alpha = 1$ $\displaystyle\int_1^x \frac{dt}{t} = \ln x$ l'intégrale diverge.

donc : $\boxed{\sum \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge} \Leftrightarrow \alpha > 1}$ (série de Riemann)

III- SERIES ALTERNEES :

Théorème :

$(v_n)_{n \geq 0}$, telle que $\forall n$, $v_n \geq 0$
la suite est décroissante et $\lim_{n \to +\infty} v_n = 0$ alors
la série $\sum (-1)^n v_n$ converge

On pose $u_n = (-1)^n v_n$

La suite (s_{2p+1}) des sommes partielles de rang impair est croissante.

$s_{2p+1} - s_{2p-1} = u_{2p+1} + u_{2p}$ et $u_{2p} \geq |u_{2p+1}|$ et $u_{2p} \geq 0$

donc $s_{2p+1} - s_{2p-1} \geq 0$.

On démontre de même que la suite des sommes partielles de rang pair est décroissante.

$s_{2p} - s_{2p-1} = u_{2p} \geq 0$ donc $s_1 \leq s_3 \leq s_5 \leq \ldots \leq s_6 \leq s_4 \leq s_2 \leq s_0$

La suite (s_{2n+1}) croissante et majorée converge vers l,

La suite (s_{2n}) décroissante et minorée converge vers l' et :

$\forall n \quad s_{2n+1} - s_{2n} = u_{2n+1}$ donc $l - l' = \lim_{n \to +\infty} u_{2n+1} = 0$

Exemple :

$u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$

TITRE : **Mathématiques du Signal** *(Tome 3)*

AUTEURS :

Fabrice BALEMBITS,
Raymond BOUDIE
Serge DUPUY
Michel PUJOS
Joël RIVOAL

DATE : **Juin 1996**

PUBLIC CONCERNE :

- **Etudiants des classes de Techniciens Supérieurs ou d'I.U.T.**
- **Etudiants en Mathématiques, Electronique, Electotechnique,.....**
- **Professeurs de Mathématiques ou de Physique des Lycées et des Lycées professionnels .**

RESUME :

Approche des Séries de Fourier. - Série de Fourier d'une fonction périodique. Propriétés des Séries de Fourier et règles pratiques.

Primitive large, << dérivée >>, produit d'une fonction par $\sin \frac{\omega}{k} t$ *ou* $\cos \frac{\omega}{k} t$.

Formule de Parseval et applications.

MOTS CLES :

Séries de Fourier

PUBLICATION:

I.R.E.M. D'AQUITAINE
40 Rue Lamartine
33400 Talence

I . S . B . N . : 2 85633