Université Bordeaux I

Institut de Recherche
sur l'Enseignement des Mathématiques

40, Rue Lamartine

33400 Talence

☎ : *56 84 89 76*

Télécopie : 56 84 89 72

UNIVERSITÉ BORDEAUX 1

Les angles des secteurs d'un plan

ou encore les angles vus sous un autre angle

Groupe Géométrie

BORDEAUX 1995

L'IREM *de l'Université Bordeaux* I *a été créé par le Professeur Jean Colmez en 1969*

Les angles des secteurs d'un plan

ou encore les angles vus sous un autre angle.

à Pierre et à Claire,

et, à tous les jeunes qui, comme eux, se destinent à l'enseignement des mathématiques.

à ceux aussi, plus anciens, qui se consacrent déjà à cette tâche

Je voudrais remercier ici mon pote Jean-Marie Bouscasse qui m'a décidé à écrire cet article - Remercier également mes autres copains du groupe de géométrie de l'Irem de Bordeaux qui ont bien voulu partager mes états d'âme et m'ont fait part de leurs impressions - Comme toujours, les remarques de Pierre Damey m'ont été extrêmement utiles.

A.G.

Le groupe de géométrie de l'Irem de Bordeaux:

Jean-Marie Bouscasse - Collège Théophile de Viau - Passage d'Agen
Marie-Claude Brauner - Lycée Camille Jullian - Bordeaux
Pierre Damey - Université de Bordeaux I - Bordeaux
Antoine Goutefon - Lycée René Cassin - Bayonne
Bernard Pinet - Lycée Jean-Baptiste de Baudre - Agen
Jacques Puyou - Lycée Bernard Palissy - Agen
Yves Robert - Lycée René Cassin - Bayonne.

Pour la petite histoire -

Vers la fin des années 70, lors de la table ronde qui clôturait immanquablement les mercredis irémiques, le professeur Jean Colmez (*) me confia : « A voir comment les étudiants manipulent les congruences modulo π ou 2π, l'enseignement des angles dans le secondaire doit être un véritable merdier - J'aimerais bien que vous y mettiez un peu votre nez ! »

J'essayais donc de m'acquitter de mon mieux de cette alléchante mission. Compte tenu de la remarque qui m'avait été faite, dès le départ, je portais mon dévolu sur les angles dits "orientés". La mise au point concernant tant la présentation de cette notion que les modalités de son utilisation fut longue et laborieuse - Trois ou quatre années d'expérimentation dans une classe de terminale C furent notamment mises à profit pour peaufiner une méthode visant à transformer les angles et les doubles d'angle de couples de vecteurs non nuls en outils performants et facilement maniables pour résoudre des problèmes de géométrie plane -

Il m'a fallu plus d'une décennie pour comprendre que mon étude aurait dû, en premier lieu, porter sur les angles dits "géométriques" - Je les avais boudés à tort sous le fallacieux prétexte qui veut que lorsqu'on sait utiliser "les angles de vecteurs" on peut fort bien, en géométrie plane, se passer des autres -

C'est maintenant, à l'heure où mon mandat s'achève, que je tente de remédier à mes erreurs passées - Après tout, il n'est jamais trop tard pour bien faire -

(*) Directeur, fondateur de l'Irem de Bordeaux -

L'étude que nous allons conduire a pour cadre un plan de l'espace de la géométrie ordinaire. Nous le désignerons une fois pour toutes par la lettre $\mathcal{P}$.

Ce plan naît "naturellement" porteur d'une structure affine euclidienne. Il revient au professeur de faire émerger au cours des années-collège les divers ingrédients spécifiques à cette structure :

1. distance de deux points

   Lorsqu'on a doté le plan $\mathcal{P}$ d'une unité de longueur (par le choix d'un segment étalon) la distance de deux points A et B est la mesure du segment [AB](*). Cette distance sera notée AB

2. Relation d'orthogonalité (équerre)

   Lien avec la distance : médiatrice d'un segment.

3. Relation de parallélisme

   Deux droites orthogonales à une même droite sont parallèles.

4. Propriété de Pythagore

5. Propriété de Thalès.

Bien entendu il n'y a pas à faire de distinguo et, a fortiori, de cloisonnement entre les propriétés de type affine et celles de type métrique

Dans ce document,

- Sous le vocable de « configurations géométriques élémentaires » nous rangeons les configurations suivantes :

  1°. droite, demi-droite, segment, cercle, demi-plan dites configurations de "première génération"

  2°. triangle, secteur de plan, arc de cercle, parallélogramme (y compris les

---

(*) L'unité de longueur la plus utilisée est le centimètre car on trouve facilement dans le commerce des instruments de mesure faisant référence à cette unité.

parallélogrammes haut de gamme que sont le rectangle, le losange, le carré)
Ces derniers configurations sont dites de "deuxième génération" car elles sont élaborées à partir des premières - Pour ce qui concerne le parallélogramme, les propriétés spécifiques à ses différents aspects sont supposées connues -

• Nous utiliserons les expressions : demi-droites parallèles, demi-droites orthogonales pour signifier que les droites qui portent ces demi-droites sont respectivement parallèles, orthogonales -

Notre exposé se veut à la fois critique et constructif - Il sera émaillé de nombreux commentaires comportant de fréquents retours sur les pratiques actuelles afin d'en montrer les travers - Nous vivons une époque où les mathématiques sont mises à mal par tout un tas de gens qui ne connaissent rien ou à peu près rien à cette discipline - Ceci peut expliquer que, dans certaines digressions, nos propos tiennent plus du pamphlet que du discours scientifique - Nous demandons donc aux lecteurs qui pourraient s'en offusquer de bien vouloir nous pardonner.

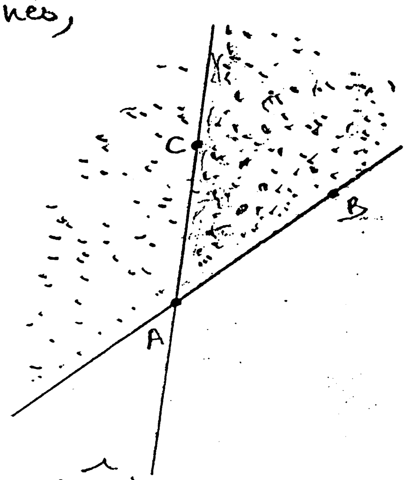
Chapitre 1

Secteurs du plan

I - Présentation

1 - Secteur du plan $\mathcal{P}$: définitions

Etant donné trois points A, B, C non alignés,



- La partie du plan $\mathcal{P}$ commun
  - au demi-plan de bord (AB) qui contient le point C
  - ——— (AC) ——— B

est appelé indifféremment "secteur B, A, C" ou "secteur C, A, B"

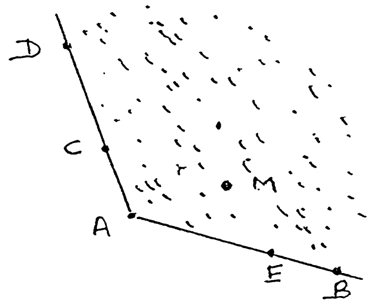
Ce secteur est noté $(\widehat{BAC})$ ou $(\widehat{CAB})$

- On dit que :
  - le point A est le sommet
  - les demi-droites [AB) et [AC) sont les côtés

du secteur $(\widehat{BAC})$

Remarques

- La notation "$(\widehat{BAC})$" se lit : « secteur B, A, C »
- Pour la figure ci-contre, il est clair que les notations $(\widehat{BAC})$ et $(\widehat{DAE})$ désignent le même secteur
- De par la définition, les points situés sur les côtés d'un secteur sont des éléments de ce secteur. Les points d'un secteur qui n'appartiennent pas à ses côtés sont dits intérieurs à ce secteur.



Legende : le point M est intérieur au secteur $(\widehat{BAC})$

Commentaire

La description consistant à dire qu'un secteur est une partie du plan $\mathcal{P}$ comprise entre deux demi-droites de même origine est à proscrire car, outre son libellé approximatif, elle peut accréditer l'idée que les points situés sur les côtés d'un secteur n'appartiennent pas à ce secteur -

2 - Axe de symétrie d'un secteur

a - Mise en évidence

Etant donné un secteur $(\widehat{BAC})$, notons B' le point du côté [AC) tel que AB' = AB

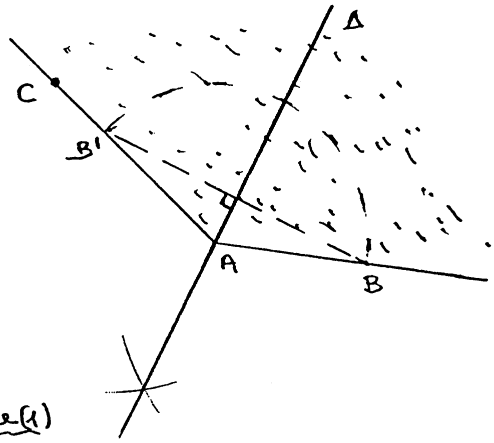


figure (1)

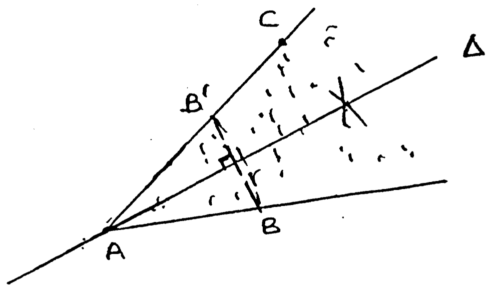


figure (2)

Alors la médiatrice Δ du segment [BB'] passe par le sommet A.

Intuitivement, il apparaît que l'axe de symétrie Δ du triangle BAB' isocèle en A est aussi celui du secteur $(\widehat{BAC})$

Pour le prouver, considérons la réflexion S_Δ de droite (d'axe) Δ. Nous avons :

$$A \xrightarrow{S_\Delta} A$$
$$B \longrightarrow B'$$
$$B' \longrightarrow B$$

Donc la réflexion S_Δ transforme le demi-plan de bord (AB) qui contient B' en le demi-plan de bord (AB') qui contient B, et vice-versa.

Il s'ensuit que la partie de P commune à ces deux demi-plans reste globalement invariante (inchangée). Or cette partie commune est le secteur $(\widehat{BAB'})$ c'est à dire le secteur $(\widehat{BAC})$

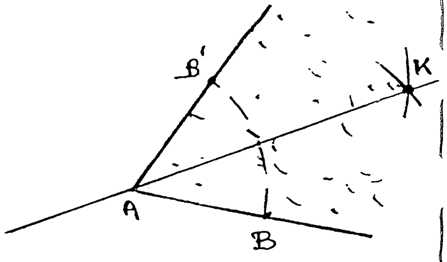
L'étude qui vient d'être faite est valable pour n'importe quel secteur du plan P. On peut donc énoncer :

Théorème

Chaque secteur du plan P admet un axe de symétrie

b - Construction de l'axe de symétrie d'un secteur

Etant donné un secteur de sommet A,



- On construit à l'aide d'un compas les points B et B' équidistants(*) du point A ; puis un point K, autre que A, équidistant de B et de B'
- On trace la droite (AK)

Cette droite est l'axe de symétrie du secteur donné

(*) équidistant signifie "à égale distance"

II - Secteurs superposables : introduction expérimentale

Pour aller plus avant dans cet exposé, nous devons faire usage de la notion de "secteurs isométriques" - Or il est clair qu'au niveau collège cette notion est inabordable - Afin de contourner l'obstacle, nous allons introduire expérimentalement - en utilisant du papier calque - la notion de "secteurs superposables" - Pour codifier l'usage de ce papier, nous prendrons appui, mine de rien, sur les deux résultats théoriques suivants :

- Sachant que tout secteur possède un axe de symétrie, dire que deux deux secteurs sont isométriques équivaut à dire qu'il existe un déplacement qui envoie l'un sur l'autre
- Tout déplacement peut se factoriser en la composée d'une translation suivie d'une rotation

Ainsi se trouve justifié le déroulement de la manipulation que nous explicitons ci-après -

1- Description sommaire de la manipulation

Les secteurs $(\widehat{BAC})$ et $(\widehat{EDF})$ sont donnés - voir figures (1.) et (2.)

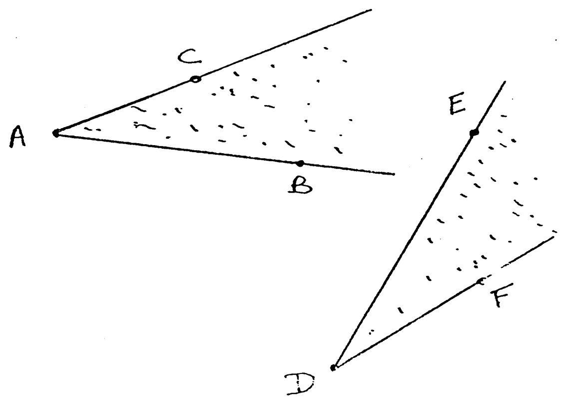


figure (1)

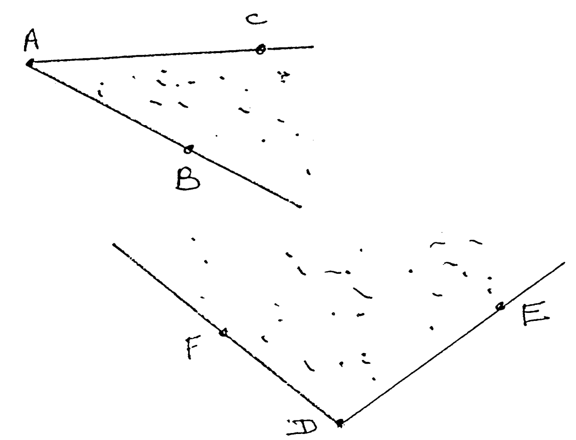


figure (2)

1°- Reproduire le secteur $(\widehat{BAC})$ sur une feuille de papier calque -

2°- Faire glisser le papier calque de façon que le sommet du nouveau secteur obtenu vienne se superposer au point D.

3°- Faire éventuellement pivoter le papier calque de manière que le sommet du secteur reproduit reste en coïncidence avec D - L'objectif à atteindre étant de superposer les côtés de ce nouveau secteur au secteur $(\widehat{EDF})$

Il est clair que cette expérience comporte deux issues suivant que la reproduction du secteur ($\widehat{BAC}$) est ou non superposable au secteur ($\widehat{EDF}$)

- Lorsque la reproduction du secteur ($\widehat{BAC}$) vient se superposer au secteur ($\widehat{EDF}$), le secteur tracé sur la feuille de papier calque est aussi une reproduction du secteur ($\widehat{EDF}$). Cette reproduction du secteur ($\widehat{EDF}$) est évidemment superposable au secteur ($\widehat{BAC}$) - Pour traduire cette situation, on dira que les secteurs ($\widehat{BAC}$) et ($\widehat{EDF}$) sont superposables

Plus généralement, nous dirons que deux secteurs sont superposables dès lors que la reproduction d'un de ces secteurs sur papier calque est superposable à l'autre secteur -

Commentaire

L'expression "secteurs superposables" qui peut toucher un large public se substitue donc ici à celle de "secteurs isométriques". Ceci dit, d'un point de vue purement théorique, le fait marquant de cette séquence devrait être : « dans l'ensemble des secteurs du plan $\mathcal{P}$ la relation de "superposabilité" est une relation d'équivalence - On appelerait alors "angles de secteur" les classes d'équivalence issues de cette relation

Or il ne peut être question d'en faire état au niveau Collège - Certes nous avons évoqué la propriété de symétrie de cette relation pour des raisons de vocabulaire - Mais, dans le même temps, nous avons volontairement ignoré ses propriétés de réflexivité et de transitivité - Pour une raison très simple : les élèves tiendraient à coup sûr la première pour une histoire de fous, la deuxième pour une lapalissade -
Qui plus est ces propriétés seraient inopérantes car à cet âge on ne peut maîtriser avec profit les concepts de "classe d'équivalence", de "partition d'un ensemble" et "d'ensemble-quotient"

Reste à dire que, du point de vue "enseignement", le dommage subi est minime - En effet, tant au niveau collège qu'au niveau lycée, l'important n'est pas de définir stricto-sensu le concept "angle de secteur" mais de faire en sorte qu'on puisse en disposer et qu'on sache l'utiliser de façon convenable et à bon escient

2- La notion "angle de secteur"

Pour traduire que deux secteurs du plan $\mathcal{P}$ sont superposables, on est tenté de dire que ces secteurs ont la même "ouverture" ou encore le même "évasement" - Les mathématiciens qui aiment bien se singulariser ont préféré dire : « ces secteurs ont le même "angle" »

- L'angle d'un secteur $(\widehat{BAC})$ est noté $\widehat{BAC}$ (sans parenthèses)
La notation $\widehat{BAC}$ se lit : « angle B, A, C »
- Pour signifier que deux secteurs $(\widehat{BAC})$ et $(\widehat{EDF})$ ont le même angle (sont superposables) on écrit banalement : $\widehat{BAC} = \widehat{EDF}$

Commentaire

- Le concept "angle de secteur" est comparable à celui de "longueur d'un segment" - En effet, outre le fait que ce dernier concept n'a jamais été défini au niveau de l'enseignement secondaire, son introduction relève du même processus : on dit que deux segments du plan P ont la même longueur pour signifier qu'ils sont superposables.

- L'angle de secteur n'est pas une figure géométrique mais un concept abstrait lié à la figure géométrique élémentaire "secteur du plan" son immatérialité fait qu'il est stupide d'attribuer à un angle un sommet, des côtés, un axe de symétrie .... ou encore un intérieur.

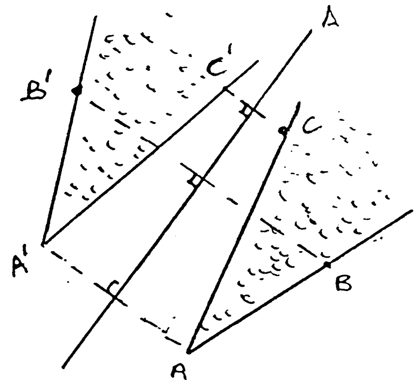
- Le mot "angle" étant à connotations diverses, le professeur devra rappeler souvent, au moins dans les classes de collège, que la locution "angle de secteur" est synonyme de "ouverture de secteur"

3- Effet des transformations géométriques connues sur les secteurs

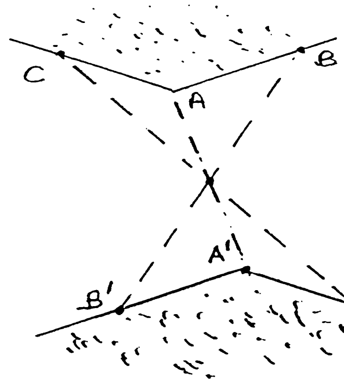
Les transformations suivantes sont rangées en se référant à leur ordre d'apparition dans le cursus scolaire

a - Description de la manipulation

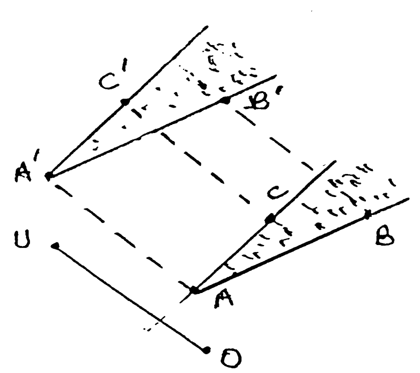
- Réflexion S_Δ (6ème)



- Symétrie centrale S_O (5ème)



- Translation $t_{\vec{OU}}$ (4ème)



Dans chacune de ces trois figures, le secteur $(\widehat{BAC})$ est donné - On fait construire les images respectives A', B', C' des points A, B, C par la transformation indiquée - L'objectif de cette manipulation est de faire vérifier - selon le procédé indiqué plus haut - que les secteurs $(\widehat{ABC})$ et $(\widehat{A'B'C'})$ sont superposables -

b - Institutionnalisation du résultat

On tiendra désormais pour acquis que :

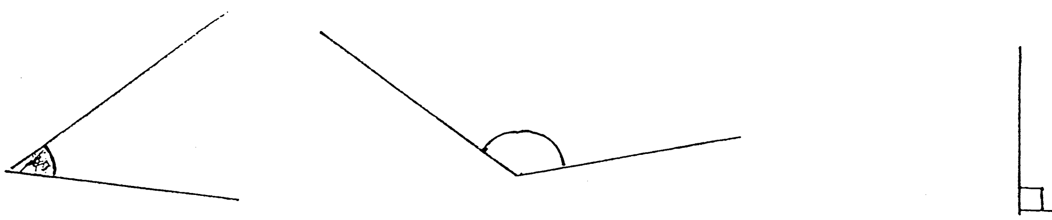
Les réflexions, les symétries centrales, les translations transforment un secteur en un secteur superposable (de même angle)

Commentaire

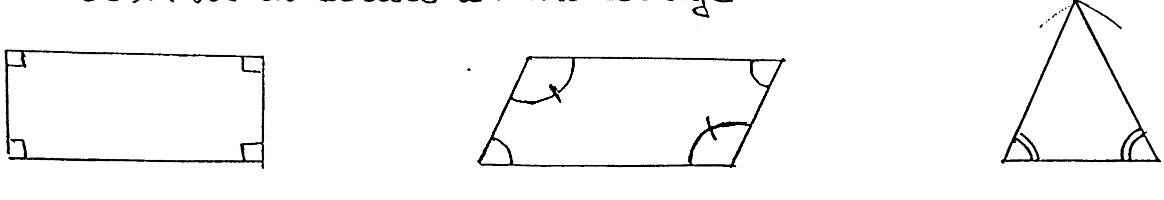
On pourrait sous-titrer cet alinéa par : « le revers de la médaille ». En effet, faire vérifier que des secteurs isométriques sont superposables a de quoi surprendre si l'on ne se place pas dans le présent contexte. Les potaches quant à eux n'ont pas d'état d'âme à propos de ce problème. De surcroît l'expérience montre qu'une majorité d'entre eux considère que la manipulation est superflue - Tous, après coup, tiennent le résultat acquis pour évident - Avouons que c'est bien là l'essentiel -

4 - Comment visualiser un secteur sur une figure

Pour visualiser les secteurs pris en considération lors de l'étude d'une figure, on utilise ordinairement divers codages - En voici un échantillon :



Pour signifier que deux secteurs sont superposables (ont le même angle) on convient de les visualiser avec le même codage

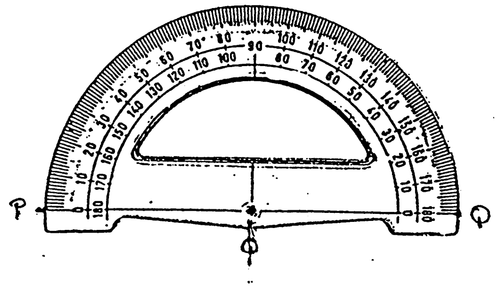


III - Mesure d'un secteur.

1- Le rapporteur

a - Présentation

Voici la reproduction photographique d'un instrument de mesure qu'on appelle rapporteur -



Cet instrument porte deux graduations demi-circulaires numérotées de 0 à 180 -

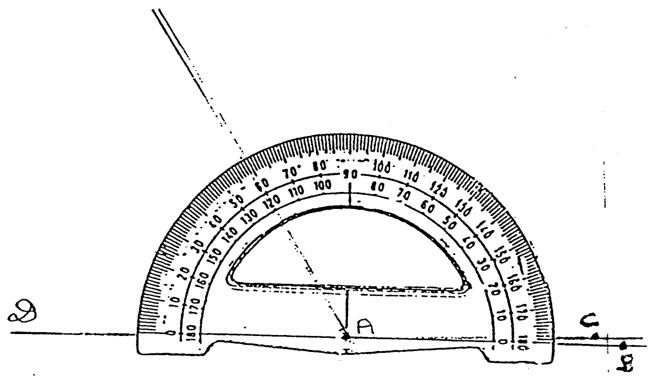
Le segment - noté [PQ] - et son milieu - noté O - sont respectivement appelés diamètre et centre du rapporteur -

b - Propriétés des graduations

Dans le plan $\mathcal{P}$, étant donné une droite $\mathcal{D}$ et un point A de cette droite, plaçons le rapporteur de façon que :

1°- Son centre coïncide avec le point A
2°- Son diamètre se superpose à la droite $\mathcal{D}$

Alors :



- Chaque demi-droite d'origine A qui passe par le tiret d'une graduation passe aussi par un tiret de l'autre graduation
- Si on traçait les demi-droites d'origine A qui passent par tous les tirets de l'une des deux graduations on partagerait un des demi-plans de bord $\mathcal{D}$ en 180 secteurs superposables (de même angle)

2- Secteur étalon - Unité d'angle

Dans le plan $\mathcal{P}$, mesurer un secteur c'est l'évaluer en prenant comme calibre un secteur de référence - ou secteur-étalon -

L'ouverture - ou angle - du secteur-étalon est appelée "unité d'angle"

Afin que le secteur-étalon soit facilement reproductible dans le plan $\mathcal{P}$ on décide de choisir comme unité d'angle, l'angle de l'un quelconque des 180 secteurs superposables que l'on peut reproduire à l'aide d'un rapporteur.

Cet angle est appelé "degré" - Sur la figure ci-dessus, on peut prendre le secteur $(\widehat{BAC})$ pour secteur-étalon - Son angle (ouverture) est de 1 degré

3- Mode d'emploi du rapporteur -

Pour mesurer un secteur $(\widehat{BAC})$ du plan $\mathcal{P}$, on place le rapporteur sur la feuille de papier matérialisant le plan $\mathcal{P}$ de façon que :

1°- Le centre du rapporteur coïncide avec le sommet A

2°- Le tiret - numéroté 0 - d'une des graduations se superpose à l'un des côtés du secteur $(\widehat{BAC})$, le côté [AB] par exemple -

Deux éventualités sont à envisager :

- Le côté [AC] passe par un tiret d'une des graduations - voir figure (1)
Alors la mesure du secteur s'obtient par simple lecture à l'aide de la graduation dont on a positionné le tiret numéroté 0 -

- Le côté [AC] ne passe pas par un tiret d'une des graduations - voir figure (2)
En procédant comme précédemment, on obtient un encadrement de la mesure du secteur $(\widehat{BAC})$.

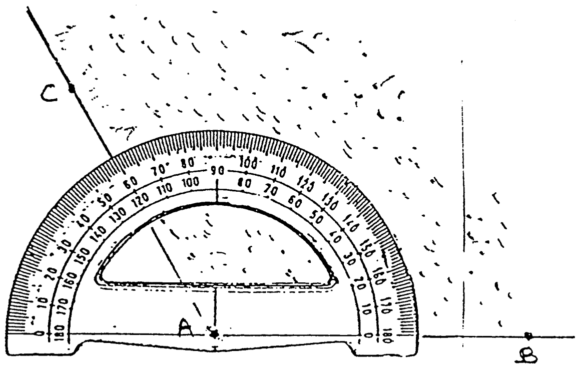


figure (1)

Le secteur $(\widehat{BAC})$ a pour mesure 121

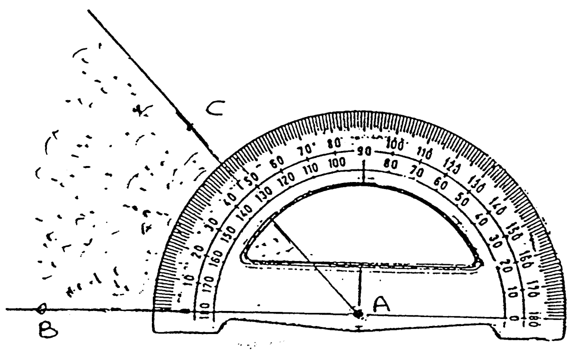


figure (2)

La mesure du secteur $(\widehat{BAC})$ est comprise entre 46 et 47 -

4 - Mesure d'un secteur : notation, propriétés

a - Notation

La mesure d'un secteur $(\widehat{EDF})$ se note $mes(\widehat{EDF})$

Ainsi, pour le secteur $(\widehat{BAC})$ de la figure (1), on a : $mes(\widehat{BAC}) = 121$

- - - - - - - - - - - - - - - - (2), on a : $46 < mes(\widehat{BAC}) < 47$

b - Propriétés admises

(P_1) : Si deux secteurs sont superposables alors ils ont la même mesure

(P_2) : Si deux secteurs ont la même mesure alors ils sont superposables.

(P_3) : **Si** x est un nombre strictement compris entre 0 et 180 alors on peut trouver au moins un secteur du plan $\mathcal{P}$ dont la mesure est égale à x.

Commentaire

• La propriété (P_3) s'avère indispensable, ne serait-ce que pour justifier le moment venu, l'obtention à l'aide d'une calculatrice de $\cos 27{,}34°$ ou encore de $\cos 19\sqrt{2}\,°$

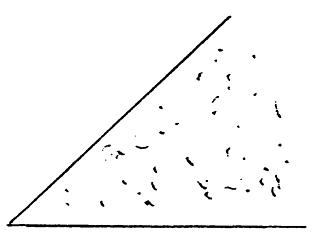
• Si besoin est, on fera précéder l'énoncé des propriétés (P_1) et (P_2) par une étude expérimentale adéquate. Quoi qu'il en soit, le professeur se doit d'énoncer ces propriétés, même s'il court le risque de passer pour un attardé mental auprès de certains élèves qui vont trouver ces résultats on ne peut plus évidents.

c- Secteur droit, secteur aigu, secteur obtus

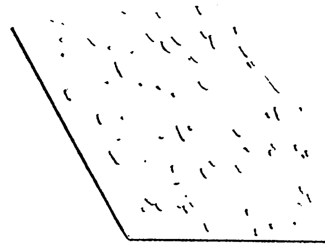
On dit qu'un secteur du plan $\mathcal{P}$ est :

- droit pour signifier que sa mesure est égale à 90
- aigu - - - - - - - - - - - - - - est strictement inférieure à 90
- obtus - - - - - - - - - - - - - - est strictement supérieure à 90

secteur droit



secteur aigu



secteur obtus

Remarque : les côtés d'un secteur droit sont orthogonaux (perpendiculaires)

d- Secteurs supplémentaires, secteurs complémentaires

• On dit que deux secteurs du plan $\mathcal{P}$ sont supplémentaires (resp complémentaires) pour signifier que la somme de leurs mesures est égale à 180 (resp à 90).

• On dit qu'un secteur est le supplément (resp le complément) d'un autre secteur pour signifier que ces deux secteurs sont supplémentaires (resp complémentaires)

5- Autre notation pour un angle de secteur - Mesure d'un angle

Pour signifier que deux secteurs sont superposables nous avons décidé de dire que ces secteurs ont le même angle - Par suite, les propriétés (P_1) et (P_2) énoncées dans l'alinéa précédent peuvent se traduire par :

(P_1) si deux secteurs ont le même angle alors ils ont la même mesure.
(P_2) Si deux secteurs ont la même mesure alors ils ont le même angle.

Ceci étant, on peut envisager d'exprimer l'angle d'un secteur à l'aide de la mesure de ce secteur - On adopte donc les définitions suivantes :

Définitions

• On dit que l'angle d'un secteur est égal à x degrés pour signifier que la mesure de ce secteur est x. On note cet angle "$x°$"
• On dit aussi que x est la mesure de l'angle $x°$

Ainsi, les notations "30°", "64,7°" et plus généralement "$x°$" lorsque x est un nombre vérifiant $0 < x < 180$, désignent des angles de secteur - La notation "$x°$" se lit : « x degrés »

6- Expressions synonymes :

En ce qui concerne les secteurs du plan P, nous avons vu que les expressions : « être superposables », « avoir la même mesure » et « avoir le même angle » sont synonymes donc interchangeables.

Pour des raisons que nous justifierons plus tard, de ces trois locutions celle qui sera la plus utilisée, dans les classes de collège tout au moins, sera la seconde : « avoir même mesure »
Ainsi, par exemple, nous utiliserons souvent le résultat suivant :

Les réflexions, les symétries centrales transforment un secteur en un secteur de même mesure -

Commentaires

I- Objectifs

L'étude de ce premier chapitre nous amène à faire de nombreux commentaires à destination des enseignants pour expliciter son contenu. Le niveau du discours utilisé n'est donc plus le même. Ces commentaires font l'objet des pages suivantes. Elles précèdent le chapitre ② consacré aux secteurs du plan P qui occupent des positions relatives particulières : secteurs adjacents, alternes-internes, ...etc.

Le mot "angle" fait de nos jours partie du vocabulaire courant. Il est abondamment utilisé par différents corps de métier, physiciens, architectes, artilleurs .... sans oublier les diplomates qui possèdent en outre, paraît-il, le privilège de savoir les arrondir. Les géomètres qui sont leurs pères géniteurs, pour ne pas être en reste utilisent pour leur propre compte, soit par nécessité, soit par "coquetterie" trois voire quatre types d'angle. A l'école, on a donc pour mission de les introduire sur le marché pour en faire le meilleur usage possible.

Au niveau de l'enseignment secondaire, si l'on s'en tient pour l'heure aux "angles des secteurs du plan P" dénommés actuellement "angles géométriques" sans que l'on sache trop pourquoi, pour les présenter, leur donner un semblant de définition, le professeur débite traditionnellement un tas de boniments qui certes feraient peut être merveille pour appâter les badauds sur les champs de foire d'Yssingeaux ou d'Espelette mais qui, par manque de rigueur, ne peuvent suffir à cerner cette notion lorsqu'on déambule devant un parterre d'élèves avec pour mission de leur enseigner, au sein des mathématiques, le bon usage de ces outils. Dès lors la mise en oeuvre de concepts invalides de naissance pour résoudre des problèmes de géométrie engendre quasi inévitablement des raisonnements où prolifèrent des incohérences en tous genres même si, en filigrane, la démarche suivie pour parvenir au résultat visé s'avère quant au fond approximativement convenable.

Si on admet comme il se doit que le professeur est tenu de prêcher par l'exemple devant des potaches, il est donc souhaitable-voire nécessaire-de clarifier une situation pour le moins confuse. Ceci nous amène à faire la mise au point suivante. Pour la rendre plus percutante, nous allons délibérement la conduire sur deux fronts.

II. Longueur de segment et angle de secteur

1. Traitement mathématique de ces deux concepts

Nous avons déjà dit que des segments de $\mathcal{P}$ ont la même longueur pour signifier qu'ils sont superposables et qu'ils sont des figures géométriques mesurables. On admet pour les mesures des segments des propriétés analogues à celles concernant les mesures des secteurs :

(P_1) : Si deux segments ont la même longueur alors ils ont la même mesure

(P_2) : Si deux segments ont la même mesure alors ils ont la même longueur

(P_3) : Si x est un nombre positif alors on peut trouver au moins un segment du plan $\mathcal{P}$ dont la mesure est égale à x.

Au départ, le traitement de ces deux concepts peut se faire en "parallèle". Désignons par :

- S (resp Σ) l'ensemble des segments (resp des secteurs) du plan $\mathcal{P}$
- $\mathcal{L}$ (resp $\mathcal{A}$) l'ensemble des longueurs des segments (resp des angles des secteurs) de $\mathcal{P}$
- f l'application "mesure" de S dans $\mathbb{R}_+$ (resp de Σ dans $]0;180[$)
- g la surjection canonique de S sur $\mathcal{L}$ (resp de Σ sur $\mathcal{A}$)

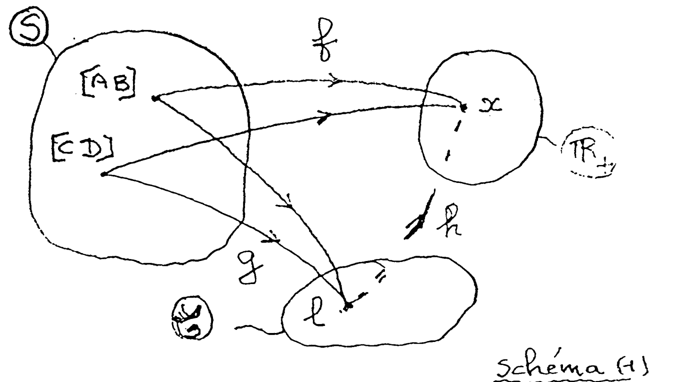


Schéma (1)

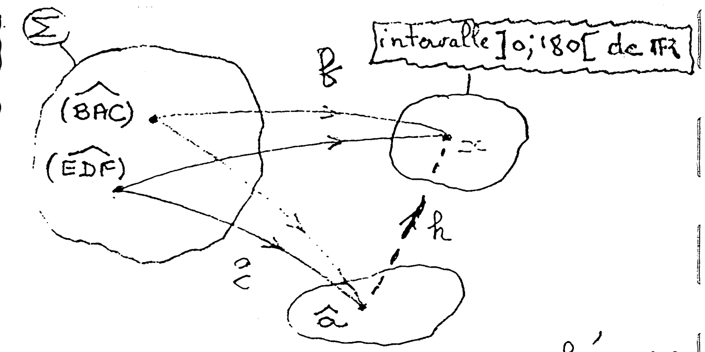


Schéma (2)

Alors, dans chacune de ces deux situations :

- La propriété (P_1) entraîne que l'application f est factorisable. Cela signifie que : il existe au moins une application h de $\mathcal{L}$ dans $\mathbb{R}_+$ (resp de $\mathcal{A}$ dans $]0;180[$) telle que $f = h \circ g$
- L'unicité de h résulte du fait que g est banalement surjective
- L'apport supplémentaire des propriétés (P_2) et (P_3) permet respectivement de conclure que l'application h est injective et surjective, donc bijective

Ceci nous permet d'introduire :

a- <u>Le concept de mesure d'une longueur</u> (<u>resp de mesure d'un angle</u>)

On dira que x est la mesure de <u>la</u> longueur ℓ (resp de l'angle $\hat{a}$) pour signifier que x est la mesure <u>d'un</u> segment de longueur ℓ (resp <u>d'un</u> secteur d'angle $\hat{a}$) -

On écrira alors : $\underline{\ell = x \text{ cm}}$ (*) (resp $\underline{\hat{a} = x^\circ}$)

b- <u>Une relation d'ordre total dans $\mathcal{L}$</u> (<u>resp dans $\mathcal{A}$</u>)

On "transporte" au moyen de la bijection h^{-1} l'ordre de $(\mathbb{R}_+ , \leq)$ dans $\mathcal{L}$ (resp l'ordre de $(]0;180[, \leq)$ dans $\mathcal{A}$)

On écrira alors : $x \text{ cm} \leq y \text{ cm}$ (resp $x^\circ \leq y^\circ$) pour traduire que dans $\mathbb{R}_+$ (resp dans $]0;180[$) on a : $x \leq y$

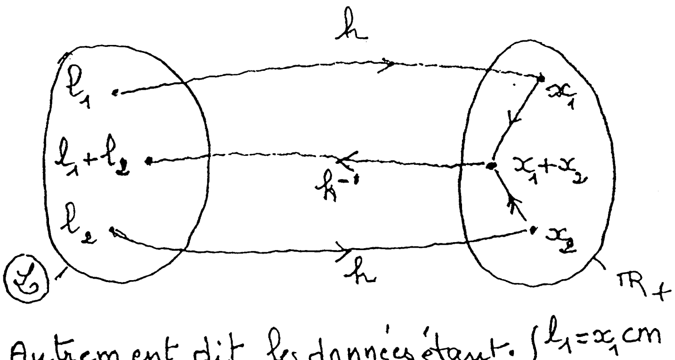
<u>Nota</u> : Pour ce qui concerne les angles des secteurs du plan $\mathcal{P}$ se trouve donc explicité et justifié le rôle respectif des propriétés énoncées dans le chapitre (1)

2- <u>Dissemblance structurelle entre les ensembles $\mathcal{L}$ et $\mathcal{A}$</u> -

a- <u>L'ensemble $\mathcal{L}$ des longueurs des segments du plan $\mathcal{P}$</u>

Reportons nous au schéma (1) de la page précédente - Sachant que $\mathbb{R}_+$ est une partie de $\mathbb{R}$ <u>stable</u> pour les opérations + (addition) et × (multiplication) on peut transférer ces opérations dans l'ensemble $\mathcal{L}$ des longueurs des segments de $\mathcal{P}$ au moyen de la bijection h^{-1} - Les schémas suivants explicitent la manoeuvre :

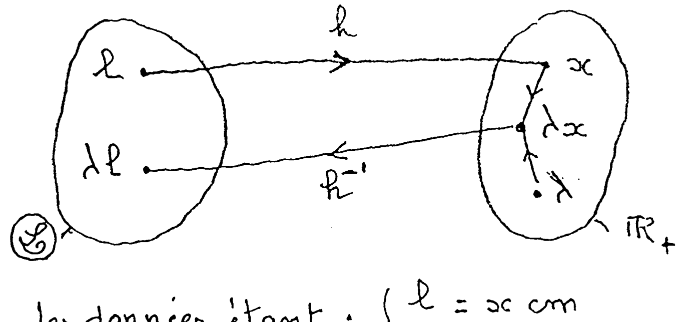
· <u>addition</u>



Autrement dit, les données étant : $\begin{cases} \ell_1 = x_1 \text{ cm} \\ \ell_2 = x_2 \text{ cm} \end{cases}$

on a le résultat : $\boxed{\ell_1 + \ell_2 = (x_1 + x_2) \text{ cm}}$

· <u>multiplication</u> <u>par un réel de $\mathbb{R}_+$</u>



Les données étant : $\begin{cases} \ell = x \text{ cm} \\ \text{le réel } \lambda \text{ de } \mathbb{R}_+ \end{cases}$

on a le résultat : $\boxed{\lambda \ell = \lambda (x \text{ cm}) = (\lambda x) \text{ cm}}$

(*) Lorsque l'unité de longueur en usage dans $\mathcal{P}$ est le centimètre

Il est clair que l'addition dans $\mathcal{C}$ et la multiplication d'une longueur par un réel positif bénéficient des propriétés des lois + et × dans $\mathbb{R}_+$ - On justifie ainsi, a posteriori, les calculs savants que l'on pratique couramment, et sans état d'âme à l'école primaire - Par exemple :

$$16\text{ cm} + 3{,}5\text{ dm} = 16\text{ cm} + 3{,}5 \times (10\text{ cm}) = 16\text{ cm} + (3{,}5 \times 10)\text{ cm}$$
$$= 16\text{ cm} + 35\text{ cm} = (16+35)\text{ cm}$$
$$= 51\text{ cm}$$

Bien évidemment, maîtres et élèves du cours moyen ne détaillent pas autant la résolution de cet exercice - Le "bon sens" qui ne leur fait pas défaut leur permet de prendre des raccourcis -

b - L'ensemble $\mathcal{A}$ des angles des secteurs du plan $\mathcal{P}$

L'intervalle $]0;180[$ de $\mathbb{R}$ n'étant pas une partie de $\mathbb{R}$ stable pour les opérations + et ×, le procédé précédent est inapplicable pour structurer l'ensemble $\mathcal{A}$ -

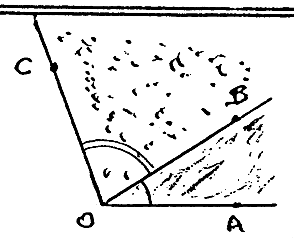
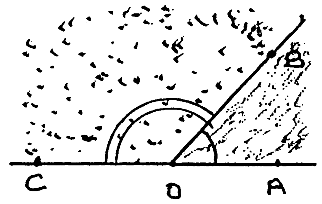
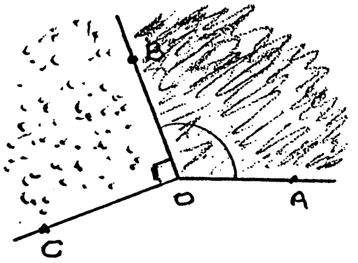
Pour parer à cette carence, on peut alors concevoir d'introduire une loi additive dans un ensemble "$\mathcal{A}$ élargi" à partir du groupe additif $\frac{\mathbb{R}}{180\mathbb{Z}}$
Pour cela il serait nécessaire de considérer les demi-droites du plan $\mathcal{P}$ comme étant des secteurs de ce plan qui auraient leurs côtés confondus. Ces nouveaux secteurs étant de toute évidence isométriques donc de même angle, la mesure de cet angle ne pouvant être que zéro, on l'appellerait angle nul et il serait noté "0°" - L'ensemble $\overline{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \cup \{0°\}$ serait alors équipotent à $\frac{\mathbb{R}}{180\mathbb{Z}}$ et on pourrait, au moyen de la bijection $\frac{\mathbb{R}}{180\mathbb{Z}} \longrightarrow \overline{\mathcal{A}}$, conférer à ce dernier ensemble une structure de groupe additif

Or deux obstacles s'opposent successivement à la réalisation de ce projet

1° - L'addition dans l'ensemble $\overline{\mathcal{A}}$, c'est à dire, au degré près, l'addition - modulo 180 - des réels de l'intervalle $[0;180[$ n'est pas commercialisable dans les classes de collège

2° - L'interprétation géométrique de la somme de deux angles de $\overline{\mathcal{A}}$ à l'aide de secteurs "adjacents" présente de singulières anomalies - Les quelques rares données du tableau illustré dans la page qui suit suffisent, semble-t-il, à nous en convaincre -

- - - - / - - - -

Données	$\widehat{AOB} = 30°$, $\widehat{BOC} = 80°$	$\widehat{AOB} = 130°$, $\widehat{BOC} = 50°$	$\widehat{AOB} = 110°$, $\widehat{BOC} = 90°$
figures			
Résultats	$\widehat{AOB} + \widehat{BOC} = 110°$	$\widehat{AOB} + \widehat{BOC} = 0°$	$\widehat{AOB} + \widehat{BOC} = 20°$

Le résultat de la première colonne paraît du point de vue géométrique tout à fait "naturel" - Quant à ceux des deux autres colonnes on ne peut pas leur donner une interprétation géométrique satisfaisante -

Il faut donc se faire une raison - L'introduction de l'angle nul s'avère inopportune - C'est pourquoi nous renvoyons l'intrus aux oubliettes et revenons, sans amertume ni regret, à notre bon vieil ensemble $\mathcal{A}$ des angles des "authentiques" secteurs du plan $\mathcal{P}$ - Reste à informer les foules ou pour le moins la communauté enseignante :

L'ensemble $\mathcal{A}$ des angles des secteurs du plan $\mathcal{P}$ est dépourvu d'opération "addition"

Que les gens inquiets de nature se rassurent : les mathématiques n'auront pas à souffrir de son dénuement -

3 - Le merdier des longueurs et des angles.

Il suffit de compulser quelques manuels scolaires pour se faire une idée de la situation - On découvrira vite que dans ce domaine, pour devenir un bon élève, il est préférable d'avoir la foi du catéchumène plutôt que l'esprit cartésien -

a - A propos des longueurs

Considérons par exemple les deux exercices suivants :

Exercice (1) : (niveau 4^{ième})

Soit un carré ABCD de côté a (a nombre strictement positif) - Calculer au moyen de a, les longueurs de ses diagonales puis le rayon r de son cercle circonscrit -

Quelle réponse apporter à la première question ? Que dire à l'élève qui

donne $a\sqrt{2}$ cm comme réponse ? à celui qui donne $a\sqrt{2}$ (*)
Que désigne la lettre r : un nombre ? une longueur ?

Explications

La première équivoque prend source dans la phrase : « soit un carré ABCD de côté a, $a \in \mathbb{R}_+^*$ » La lettre a ne peut alors que désigner la mesure d'un côté du carré (segment) - Or pour parler "mesure" il convient au préalable d'avoir fixé une unité de longueur dans le plan - Ce qui n'a pas été fait

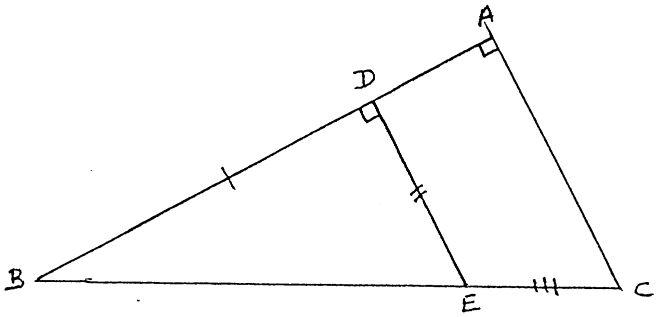
Pour la deuxième équivoque, mieux vaudrait convenir que r désigne un nombre - Encore faut-il le dire !

Exercice (2) - (niveau 3ième)

Dans la figure ci-contre : DB = 5 cm

DE = 2,7 cm , EC = 2 cm

Calculer les longueurs des segments [AB] et [AC]



Explications

Il est manifeste que la notation BD et les autres de même type désignent ici des longueurs - Ceci dit, la résolution de cet exercice nécessite l'emploi des propriétés de Pythagore et de Thalès - Dans ces conditions :

- Que représentent DB^2, DE^2 et BE^2 dans l'égalité : $BE^2 = BD^2 + DE^2$?
- .... AC, DE, BC et BE dans l'égalité : $\frac{AC}{DE} = \frac{BC}{BE}$?

La solution de ce problème est mathématiquement abordable, sans explications aléatoires et de surcroît superflues lorsqu'on effectue les calculs sur des nombres - Comme il n'est pas question de remettre en cause les égalités précédentes, pour être cohérent, il est donc judicieux voire nécessaire qu'une notation du type BD désigne un nombre (de $\mathbb{R}_+^*$) et non une longueur. (BD doit désigner la mesure du segment [BD], l'unité de longueur utilisée étant ici le centimètre) -

b - A propos des angles

L'étude de certaines propriétés d'une figure peut être favorisée par la prise en considération de "secteurs du plan P" déterminés par la dite figure - Pour

* En pareille circonstance l'élève qui fait "juste" est bien souvent celui qui donne la même réponse que le livre du maître -

exposer le raisonnement que nécessite cette étude on utilise non pas le langage des secteurs mais en exclusivité celui des angles. On parle ainsi de sommet, de côté, d'intérieur, de bissectrice d'un angle ; d'angles adjacents, d'angles alternes-internes .... alors que toutes ces expressions sont en réalité non fondées.

Que penser aussi d'une égalité telle que " $\widehat{ABC} + \widehat{EDF} = 210°$ " alors que l'on sait que l'ensemble $\mathcal{A}$ des angles des secteurs du plan $\mathcal{P}$ est dépourvu de structure additive ?

Qui plus est, certains professeurs pour parfaire leur enseignement, introduisent les notions d'angles saillants et d'angles rentrants. L'alchimie concernant ces angles ne fait qu'accroître et embellir le merdier existant.

III. Conclusion

1. Le bilan

Dans la pratique enseignante :

a. On confond allègrement les notions de longueur et de mesure d'un segment. Il s'ensuit que les énoncés de géométrie "métrique" qui sont proposés aux élèves sont trop souvent incomplets ou incorrectement libellés, donc sujets à caution

b. Pour ce qui concerne les exercices où interviennent des secteurs du plan, le langage des angles est inadapté puisque, hormis ce qui touche les relations d'égalité et d'ordre, il est sans fondement.

2. Propositions pour l'avenir.

La façon contestable d'enseigner qui prévaut actuellement est d'autant plus regrettable que, en employant un langage mathématiquement correct, d'une part on véhicule des idées justes, d'autre part on met le raisonnement à portée de compréhension des élèves. Deux arguments viennent étayer nos dires.

a. Le premier argument est péremptoire

En mathématiques on n'effectue pas des calculs mettant en oeuvre des longueurs de segments, des aires de surfaces, des angles de secteurs .... car il s'avère on ne peut plus maladroit d'avoir à expliciter au coup par coup la cohérence des calculs entrepris. Il est donc recommandé d'effectuer les calculs sur les mesures correspondantes puisque, ce faisant, on manipule des nombres réels positifs - On évite ainsi, de façon judicieuse et non pénalisante tous les ..... embêtements

b. Le deuxième argument concerne le langage utilisé

Les problèmes de géométrie abordés dans l'enseignement secondaire consistent à démontrer des propriétés liées à des configurations du plan P - Lorsque la configuration à étudier peut s'illustrer de plusieurs façons au regard de la propriété à établir, il semble raisonnable - notamment au niveau du premier cycle - de limiter cette étude à un - voire deux - cas de figure qu'il convient alors de préciser - Cela revient donc en somme à dire que la figure fait partie intégrante de l'énoncé du problème

Dès lors, pour véhiculer un raisonnement déductif, il est possible de rester dans le domaine "concret" en utilisant un langage ne faisant référence qu'à des configurations géométriques élémentaires facilement reconnaissables au sein de la figure étudiée - Qui plus est, cette possibilité devient obligation lorsqu'on veut tenir un discours qui se situe à portée de compréhension d'un maximum d'élèves -

Pour ce qui concerne les problèmes du moment, il est clair que les segments et les secteurs du plan P entrent dans la catégorie "configurations géométriques élémentaires" ce qui n'est pas le cas pour les longueurs et les angles qui sont des concepts abstraits liés respectivement à ces configurations - En conséquence nous utiliserons prioritairement les notions de segments et de secteurs et feront porter les calculs sur leurs mesures - D'ailleurs pour les angles nous avons vu qu'il n'est pas possible d'agir autrement -

Lorsque, dans des problèmes empruntés à la vie courante ou à des sciences autres que les mathématiques, on demandera de calculer des longueurs (resp des angles), nous commencerons par "mathématiser" le problème en le transformant en un problème de calcul de mesures de segments (resp de mesures de secteurs) - Pour obtenir les réponses au problème posé, il ne restera plus qu'à faire qu'un ajustement en fin de parcours - Par exemple, lorsqu'on aura déterminé la mesure x d'un secteur, on aura aucune peine à donner son angle "x^{o}" à son destinataire

Dans les pages qui suivent nous allons rester fidèles à la ligne de conduite que nous nous sommes fixés - Notre objectif essentiel est de convaincre le lecteur de cet article que parler "juste" rime avec faire "simple"

Dans les autres chapitres, hormis le dernier, nous éviterons délibérément d'utiliser le concept d'angle qui ne peut qu'apporter des complications d'ordre pédagogique. Nous ne ferons intervenir que les secteurs du plan $\mathcal{P}$ et leurs mesures et nous irons même jusqu'à recommander aux professeurs du premier cycle de l'enseignement secondaire d'en faire tout autant.

En fait, ce qui a motivé en priorité l'introduction de la notion d'angle dans les petites classes est surtout la volonté de ne pas couper les mathématiques du monde environnant et des autres disciplines qui utilisent souvent ce concept avec plus ou moins de "bonheur".

Chapitre ②

Positions relatives remarquables de deux secteurs; Propriétés de ces secteurs -

Pour établir certaines propriétés propres à une figure donnée : alignement, parallélisme, équidistance, ------- on peut prendre appui sur des propriétés concernant des secteurs lorsqu'ils occupent dans la figure étudiée des positions relatives particulières -

L'objet de ce chapitre est d'introduire les notions de secteurs adjacents, de secteurs opposés par le sommet, de secteurs alternes - internes et de secteurs correspondants puis, d'énoncer les propriétés de tels secteurs -

Par souci d'ordre pédagogique, leur présentation sera faite selon le schéma décrit ci - après - l'ordre dans lequel sont présentés les alinéas (a) et (b) n'est pas d'une parfaite orthodoxie, mais ceci est voulu -

a - Quelques illustrations du concept -

Le but poursuivi est triple - Il s'agit de permettre à l'élève :

1° - de découvrir puis de se faire une idée "globale" du concept en question
2° - de le mémoriser visuellement
3° - de l'identifier au sein d'une figure plus complexe -

b - Définition

Son contenu consiste à caractériser le concept - Pour ce faire le professeur pourra ici solliciter le concours de l'ensemble de ses élèves - Il n'a donc pas à "parachuter" la définition, mais il devra présider à sa mise en forme -

c - Exercice d'appoint

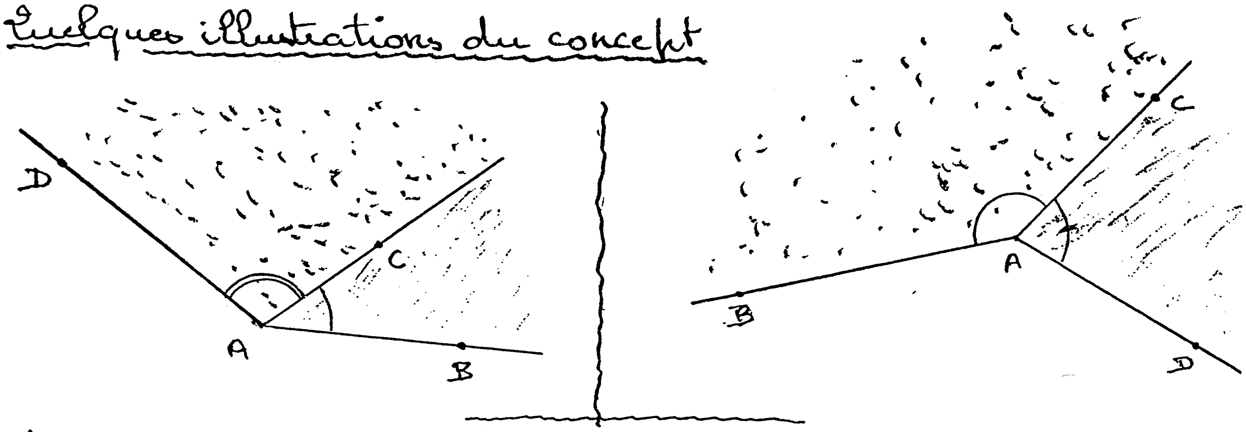
Son but est d'assurer la maîtrise de la notion présentée - Chaque professeur, suivant les réactions de son auditoire, pourra amender voire étendre le contenu de cet exercice, faire en somme du "sur mesure"
En pareille situation la définition sert de référence pour corriger éventuellement des interprétations erronées du concept -

- L'équivalent de ce chapitre est actuellement programmé en classe de cinquième. Nous prendrons d'abord en considération des secteurs de même sommet puis des secteurs de sommets distincts.

I. Secteurs adjacents : présentation et propriétés

1. Présentation

a. Quelques illustrations du concept



Dans chacune de ces deux figures les secteurs $(\widehat{ABC})$ et $(\widehat{CAD})$ dits adjacents

b. Définition

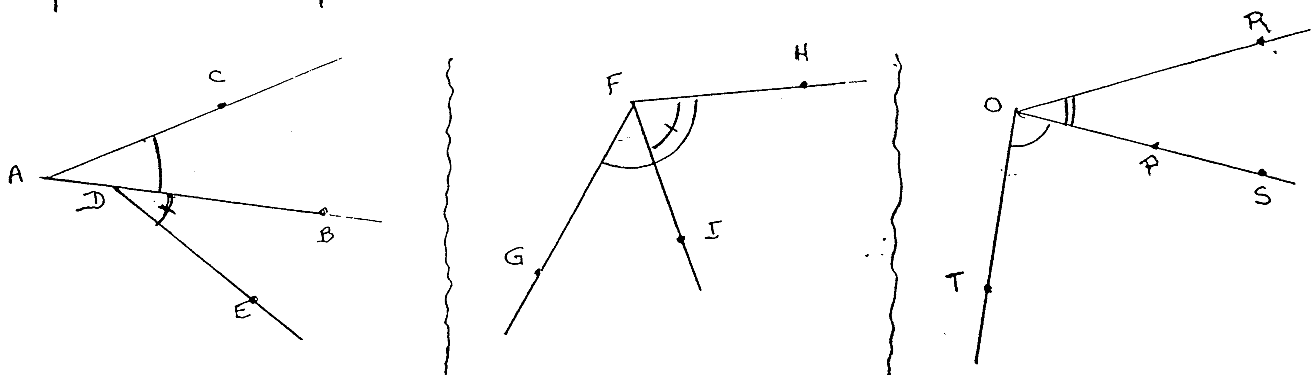
On dit que deux secteurs sont <u>adjacents</u> pour signifier que ces deux secteurs ont un côté commun (donc le même sommet) et que leur partie commune <u>se réduit à</u> ce côté commun.

Remarque

La "réunion" de deux secteurs adjacents n'est pas nécessairement un secteur

c. Exercice d'appoint

Les secteurs suivants sont-ils ou non adjacents ? Justifier dans chaque cas votre réponse !



1°. $(\widehat{BAC})$ et $\widehat{BDE}$.   2°. $\widehat{GFH}$ et $\widehat{HFI}$ 3°. $\widehat{POR}$ et $\widehat{SOT}$

2. Partage d'un secteur en secteurs adjacents

a- Travaux pratiques expérimentaux

1°- Construire un secteur $(\widehat{BAC})$ puis choisir un point M intérieur à ce secteur - Mesurer alors les secteurs $(\widehat{BAM})$, $(\widehat{MAC})$ et $\widehat{BAC}$. puis comparer les nombres $mes(\widehat{BAM}) + mes\, \widehat{MAC}$ et $mes(\widehat{BAC})$

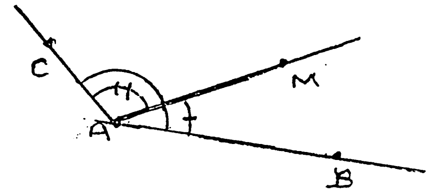
2°- Recommencer cette expérience en changeant les données $(\widehat{BAC})$ et M - Que constatez-vous ? -

b- Institutionnalisation du résultat

Nous tiendrons désormais pour acquis le résultat suivant :

(Po) : Etant donné un secteur $(\widehat{BAC})$ et un point M intérieur à ce secteur, on a :

$$mes(\widehat{BAM}) + mes(\widehat{MAC}) = mes(\widehat{BAC})$$



3- Secteurs adjacents et supplémentaires (*) : propriétés

a- Travaux pratiques expérimentaux

Manipulation (1)

1°- Construire un secteur $(\widehat{BAM})$ de mesure x (x entier compris entre 0 et 180) Quel est alors la mesure d'un secteur supplémentaire au secteur $(\widehat{BAM})$

2°- Construire le secteur $(\widehat{MAC})$ de sorte que les secteurs $(\widehat{BAM})$ et $(\widehat{MAC})$ soient à la fois adjacents et supplémentaires - Que constatez-vous alors quant à la position relative des cotés [AB) et [AC) ?

Manipulation (2)

1°- Placer trois points A, B, C sur une droite de sorte que le point A soit élément du segment [BC] - Prendre un point M non situé sur la droite (BC) puis tracer la demi-droite [AM)

2°- Mesurer les secteurs $(\widehat{BAM})$ et $(\widehat{MAC})$ - (on pourra utiliser judicieusement les deux graduations du rapporteur) - Quelles sont les caractéristiques des secteurs $(\widehat{BAM})$ et $(\widehat{MAC})$?

b - Institutionnalisation des résultats

Nous tiendrons désormais pour acquis les deux propriétés suivantes :

(P_1) : Etant donné deux secteurs adjacents, si on sait qu'ils sont supplémentaires alors on peut affirmer que leurs côtés distincts sont opposés (sont des demi-droites opposées)

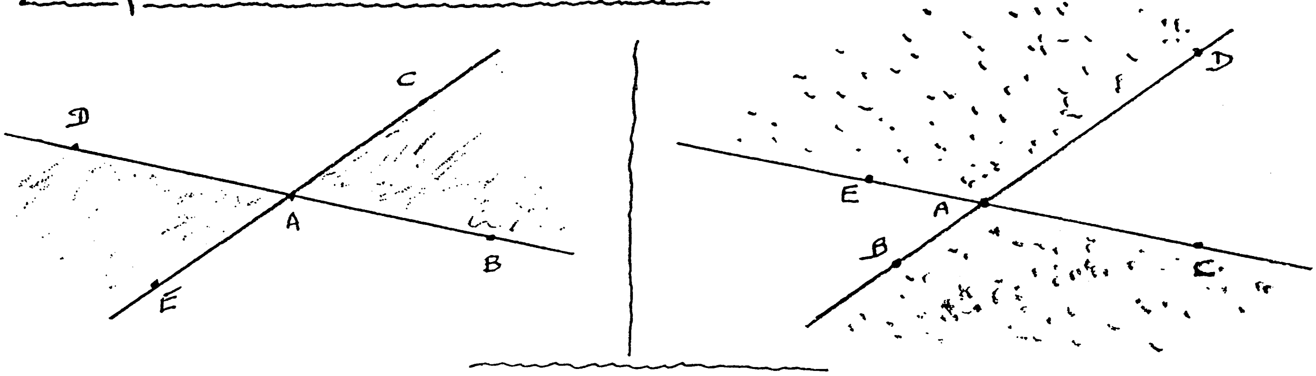
(*) voir chapitre ① §(III-4-d)

(P_2) : Etant donné deux secteurs adjacents, si on sait que leurs côtés distincts sont opposés alors on peut affirmer qu'ils sont supplémentaires

II - Secteurs opposés par le sommet

1 - Présentation

a - Quelques illustrations du concept



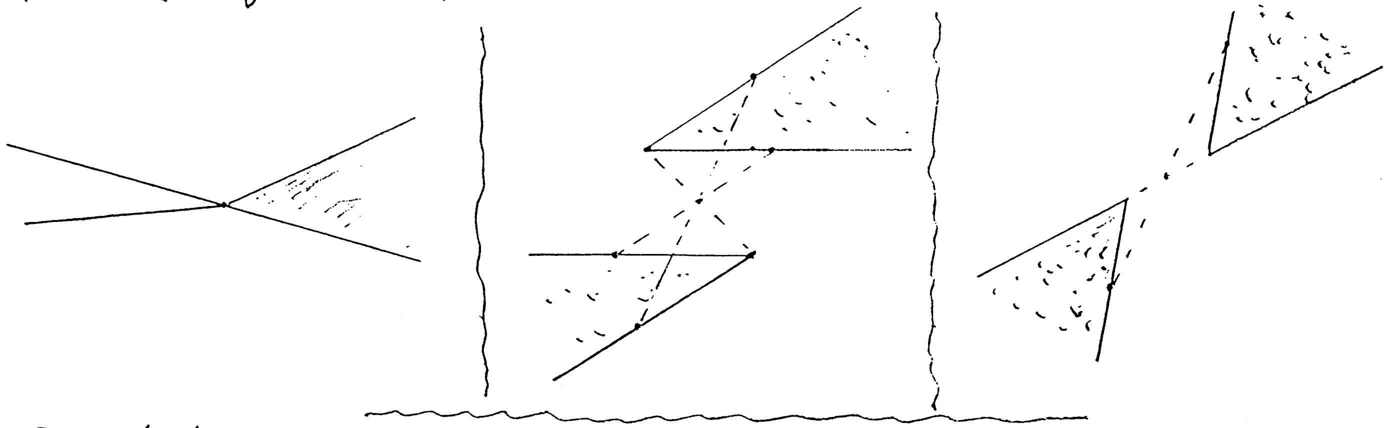
Dans chacune de ces deux figures les secteurs $\widehat{BAC}$ et $\widehat{DAE}$ sont dits opposés par le sommet

b - Définition

Deux secteurs sont dits opposés par le sommet pour signifier que :
1° - ils ont le même sommet
2° - La symétrie ayant pour centre ce sommet échange les secteurs considérés -

c - Exercice d'appoint

Les secteurs suivants sont-ils ou non opposés par le sommet ? Dans chaque cas justifier votre réponse.



2 - Propriété -

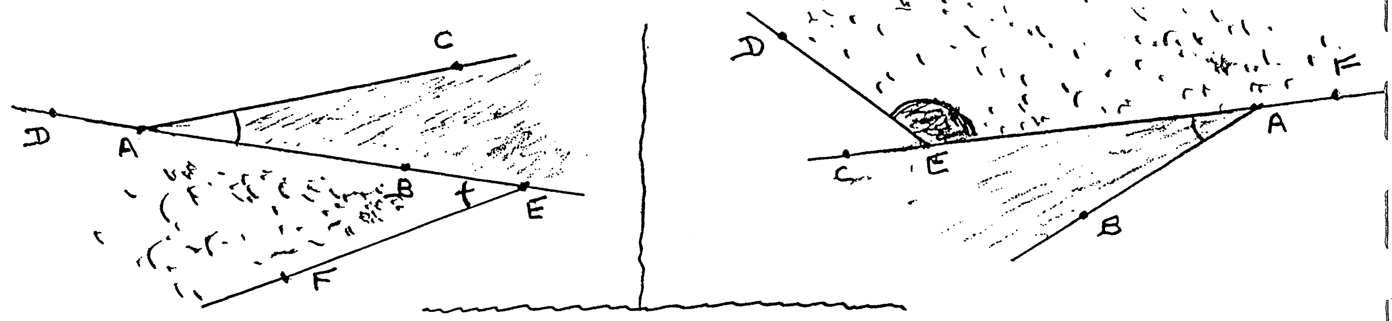
Elle est une conséquence directe de l'effet sur les secteurs de la symétrie centrale

(P_3) : Deux secteurs opposés par le sommet ont la même mesure (le même angle

III - Secteurs alternes-internes : présentation et propriétés

1 - Présentation

a - Quelques illustrations du concept



Dans chacune des deux figures les secteurs $\widehat{BAC}$ et $\widehat{EDF}$ sont dits alternes-internes.

b - Définition

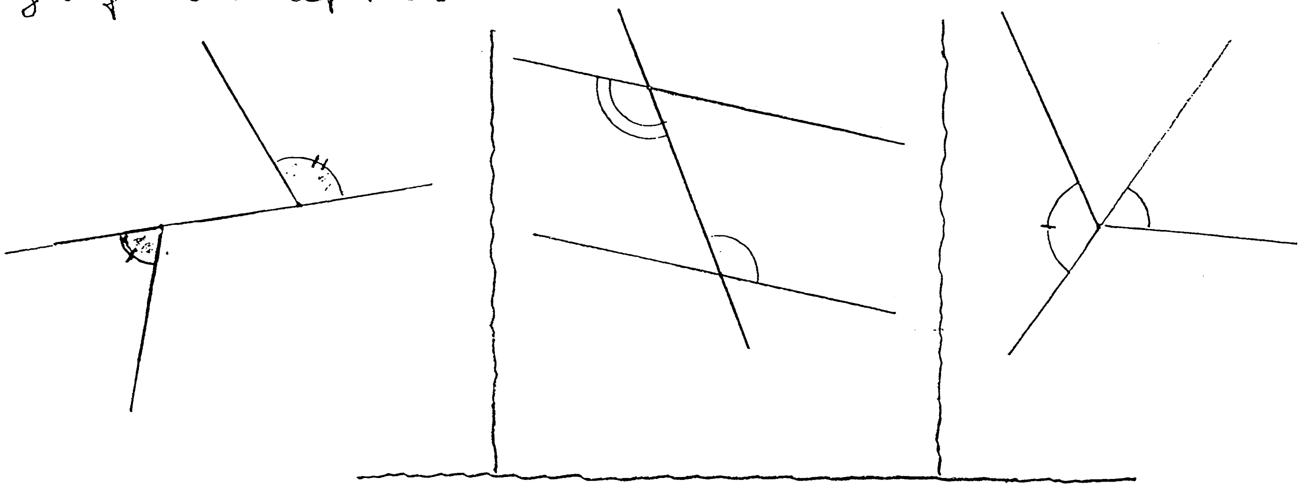
Deux secteurs de sommets distincts sont dits alternes-internes pour signifier que :

1° chaque secteur a un côté(*) qui passe par le sommet de l'autre secteur

2° ces secteurs ne sont pas contenus dans un même demi-plan ayant pour bord la droite des sommets (celle qui passe par les deux sommets)

c - Exercice d'appoint

Les secteurs suivants sont-ils ou non alternes-internes ? - Dans chaque cas justifier votre réponse.



2 - Propriétés

Nous allons établir les deux résultats suivants : voir ..../.....

(*) Ne pas oublier de rappeler que les côtés d'un secteur sont des demi-droites ayant pour origine le sommet du secteur considéré -

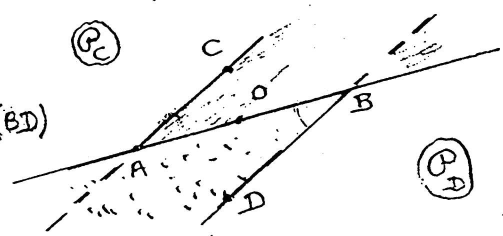
(P_4) : Etant donné deux secteurs alternes-internes, si on sait que leurs côtés à supports distincts sont parallèles alors on peut affirmer que ces secteurs ont la même mesure (le même angle)

(P_5) : Etant donné deux secteurs alternes-internes, si on sait qu'ils ont la même mesure alors on peut affirmer que leurs côtés à supports distints sont parallèles -

Démonstration

Soit deux secteurs alternes-internes $(\widehat{BAC})$ et $(\widehat{ABD})$; On désigne par :
O le milieu du segment [AB] et s_o la symétrie de centre O
$\mathcal{P}_C$ (resp $\mathcal{P}_D$) le demi-plan de bord (AB) qui contient le point C (resp le point D)

1° On suppose que les demi-droites [AC) et [AD) sont parallèles - Alors :



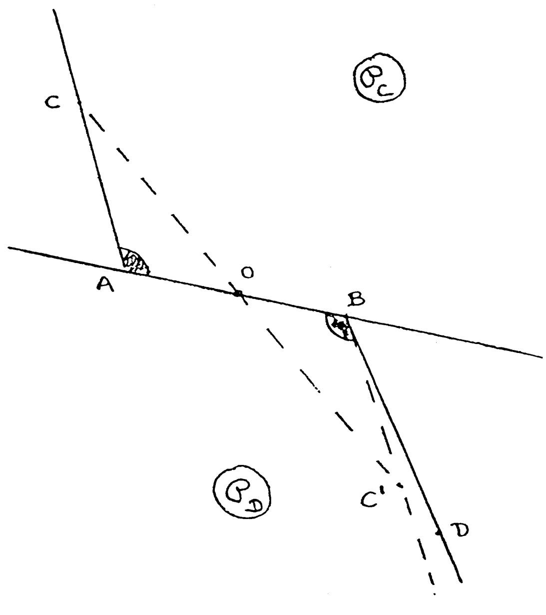
. d'une part : $[AB) \xrightarrow{s_o} [BA)$

. d'autre part : $\left\{ \begin{array}{l} (AC) \xrightarrow{s_o} (BD) \text{ .... car } (AC) \parallel (BD) \\ \mathcal{P}_C \longmapsto \mathcal{P}_D \end{array} \right.$

Il s'ensuit que $[AC) \xrightarrow{s_o} [AD)$ car la demi-droite [AC) (resp [AD)) est la partie commune à la droite (AB) et au demi-plan $\mathcal{P}_C$ (resp à la droite (BD) et au demi-plan $\mathcal{P}_D$)

En resumé, s_o transforme le secteur $(\widehat{BAC})$ en le secteur $(\widehat{ABD})$ - Ces deux secteurs ont donc la mesure (effet de s_o)(*)

2° On suppose que $mes(\widehat{BAC}) = mes(\widehat{ABD})$



Notons C' le transformé de C par s_o

Nous avons alors : $(\widehat{BAC}) \xrightarrow{s_o} (\widehat{ABC'})$

puis : $mes(\widehat{BAC}) = mes(\widehat{ABC'})$ (effet de s_o)(*)

d'où, compte tenu de l'hypothèse, il vient :

$mes(\widehat{ABC'}) = mes(\widehat{ABD})$

Dès lors les secteurs $(\widehat{ABC'})$ et $(\widehat{ABD})$ sont superposables et contenus dans le demi-plan $\mathcal{P}_D$

Ces deux dernières conditions suffisent à prouver l'égalité : [BD) = [BC')

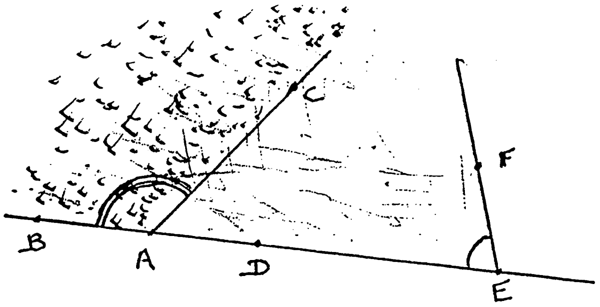
Comme, par construction, [BC') est parallèle à [AC) .... (effet de s_o)(**)
il s'ensuit que les côtés [AC) et [BD) sont parallèles .... (c-q-f-d)

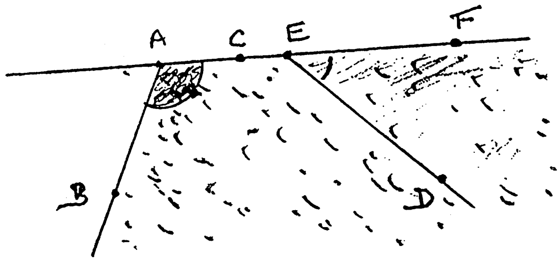
(*) une symétrie centrale transforme un secteur en un secteur de même mesure
(**) - - - - - - - - - - - - - - - une droite en une droite parallèle -

IV - Secteurs correspondants : présentation et propriétés

1- Présentation

a- Quelques illustrations du concept





Dans chacune des deux figures les secteurs $(\widehat{BAC})$ et $(\widehat{EDF})$ sont dits correspondants -

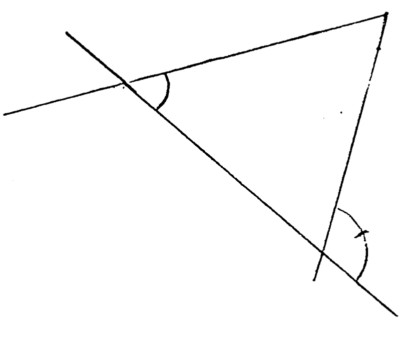
b- Définition

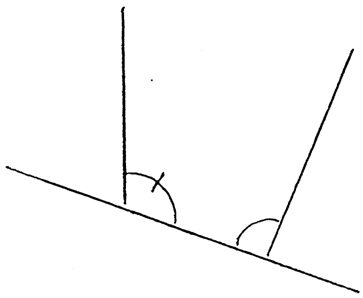
Deux secteurs de <u>sommets distincts</u> sont dits <u>correspondants</u> pour signifier que

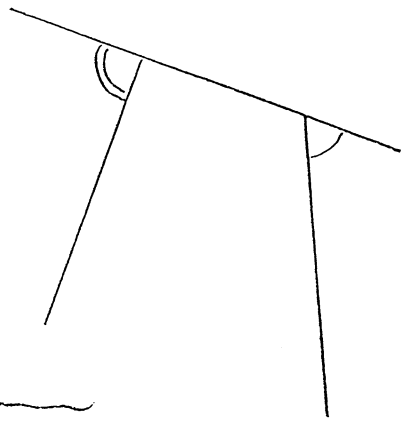
1° <u>l'un</u> des secteurs a un côté qui <u>contient</u> un côté de l'autre secteur

2° ces deux secteurs sont contenus dans le même demi-plan ayant pour bord <u>la droite des sommets</u>

c- Exercice d'appoint



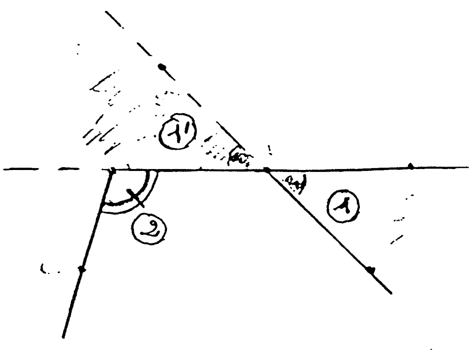




Pour chacune de ces trois figures, justifier si les secteurs désignés sont correspondants ou non -

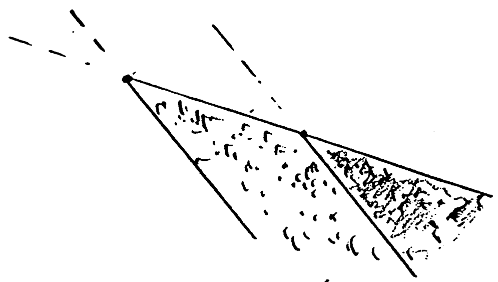
2- Propriétés

Lorsque deux secteurs sont correspondants, le sommet de l'un de ces secteurs - noté secteur ① - appartient à l'un des côtés de l'autre secteur - noté secteur ② -

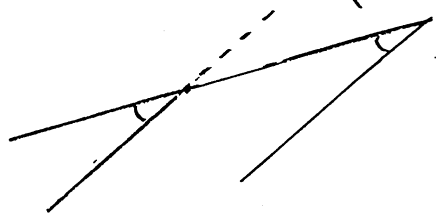


Notons (1') le secteur opposé par le sommet au secteur (1) – Alors il est facile de vérifier que les secteurs (1') et (2) sont alternes-internes – Sachant que les secteurs (1) et (1') ont la même mesure, les propriétés (P_4) et (P_5) relatives aux secteurs alternes-internes entraînent, de façon immédiate, les deux résultats suivants concernant les secteurs correspondants –

(P_6) : Etant donné deux secteurs correspondants, si on sait que leurs côtés à supports distincts sont parallèles alors on peut affirmer que ces secteurs ont la même mesure. (le même angle)



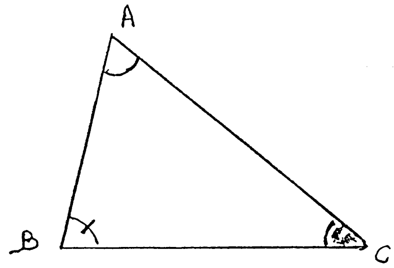
(P_7) : Etant donné deux secteurs correspondants, si on sait que ces secteurs ont la même mesure alors on peut affirmer que leurs côtés à supports distincts sont parallèles



V - Application : somme des mesures des secteurs d'un triangle

1 - Explicitation de la terminologie employée

Sous le vocable " secteurs d'un triangle ABC " on designe les secteurs $(\widehat{BAC})$, $(\widehat{CBA})$ et $(\widehat{ACB})$



2 - Somme des mesures des secteurs d'un triangle

Etant donné un triangle ABC, on place le point D tel que le quadrilatère ABCD soit un parallélogramme et un point E tel que les secteurs $(\widehat{CBA})$ et $(\widehat{DAE})$ soient correspondants

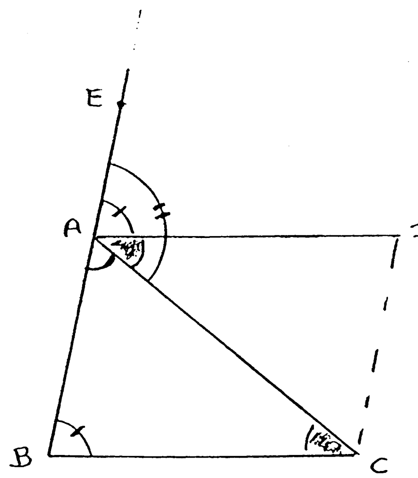
Il s'ensuit que :

$\text{mes}(\widehat{BCA}) = \text{mes}(\widehat{CAD})$ .... propriété (P_4)

$\text{mes}(\widehat{CBA}) = \text{mes}(\widehat{DAE})$ .... (P_6)

d'où : $\text{mes}(\widehat{BCA}) + \text{mes}(\widehat{CBA}) = \text{mes}(\widehat{CAE})$

Ceci dit ; les secteurs adjacents $(\widehat{BAC})$ et $(\widehat{CAE})$ ont leurs cotés distincts opposés – Ils sont donc supplémentaires .... Propriété (P_2) –



Finalement, on obtient :

$\text{mes}(\widehat{ABC}) + \text{mes}(\widehat{BCA}) + \text{mes}(\widehat{CBA}) = \text{mes}(\widehat{ABC}) + \text{mes}(\widehat{CAE}) = 180$

Le raisonnement que nous venons de faire est valable pour n'importe quel triangle - On peut donc énoncer :

Théorème

La somme des mesures des secteurs d'un triangle est égale à 180

Commentaire

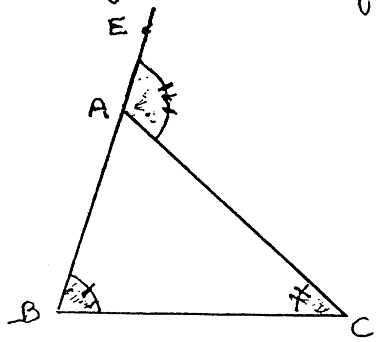
Cet énoncé vient supplanter la célèbre ritournelle canulée (*) de A à Z : « la somme des angles d'un triangle est égale à 180 degrés »

Remarque

Dans une configuration identique à celle qui est reproduite ci-contre, le résultat :

$\text{mes}(\widehat{CAE}) = \text{mes}(\widehat{CBA}) + \text{mes}(\widehat{ACB})$

établi au cours de la démonstration précédente peut servir de "raccourci" dans une démonstration



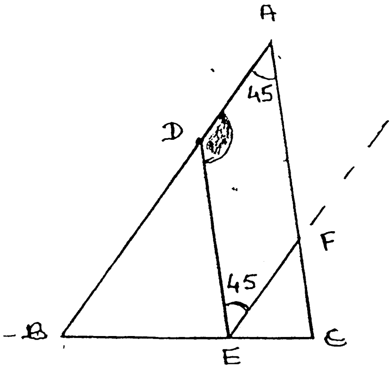
3 - Un petit échantillon d'exercices

Nous allons ici, à titre d'exemple, proposer trois exercices de difficultés inégales - Rappelons à ce propos que la difficulté d'un exercice portant sur une configuration géométrique ne dépend pas uniquement du choix de la configuration et de la propriété à établir mais aussi, en grande partie, de la façon dont est libellé son énoncé -

Il appartient donc à chaque professeur de jouer sur ces deux critères pour bâtir des exercices adaptés au niveau de la classe dont il a la charge -

a - Exercice (1) - (niveau 5ème)

Soit un triangle ABC tel que $\text{mes}(\widehat{BAC}) = 45$; un point D du segment [AB] autre que A et B - La parallèle à la droite (AC) passant par D coupe le segment [BC] en E



1 - Calculer la mesure du secteur $(\widehat{EDA})$

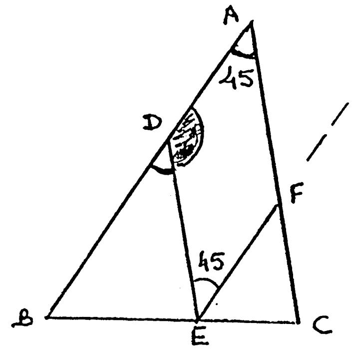
Indication : on pourra commencer par calculer la mesure du secteur $(\widehat{BDE})$

2 - Soit F le point de la droite (AC) tel que $\text{mes}(\widehat{DEF}) = 45$ - Quelle est la nature du quadrilatère ADEF ? Justifier votre réponse -

(*) pour employer un adjectif que m'a fait découvrir Jean-Louis Ovaert -

Solution

1° - Les secteurs correspondants $(\widehat{BDE})$ et $(\widehat{BAC})$ ont leurs côtés à supports distincts parallèles - On a donc : $mes(\widehat{BDE}) = mes(\widehat{BAC}) = 45$ (propriété (P_6))
Ceci dit, les secteurs adjacents $(\widehat{BDE})$ et $(\widehat{EDA})$ ont leurs côtés distincts opposés - Ces deux secteurs sont donc supplémentaires - (propriété (P_3))
On en déduit :



$mes(\widehat{EDA}) = 180 - mes(\widehat{BDE}) = 180 - 45 = 135$

2° - Les secteurs alternes-internes $(\widehat{BDE})$ et $(\widehat{DEF})$ ont la même mesure - Leurs côtés à supports distincts sont donc parallèles - (propriété (P_5))
Il s'ensuit que le quadrilatère ADEF a ses côtés opposés parallèles -
Ce quadrilatère est donc un parallélogramme -

b - Exercice (2) : (Niveau 5ème - 4ème)

1° - Démontrer les propriétés suivantes (*) :

(P_8) : Etant donné un triangle ABC, si on sait que ce triangle est isocèle en A (AB = AC) alors on peut affirmer que $mes(\widehat{ABC}) = mes(\widehat{ACB})$

Indication - On pourra faire intervenir la médiatrice Δ du segment [BC] puis la réflexion s_Δ d'axe Δ -

(P_9) : Etant donné un triangle ABC, si on sait que $mes(\widehat{ABC}) = mes(\widehat{ACB})$ alors on peut affirmer que ce triangle est isocèle en A -

Indication : on pourra faire intervenir le symétrique A' du point A par rapport à la droite (BC), puis démontrer que le quadrilatère BACA' est un parallélogramme "haut de gamme" (rectangle, losange ou carré)

2° - Montrer que les trois secteurs d'un triangle équilatéral ont pour mesure 60

3° - Un triangle a deux secteurs de mesure 60 - Quelle est sa nature ? Justifier et énoncer le résultat obtenu -

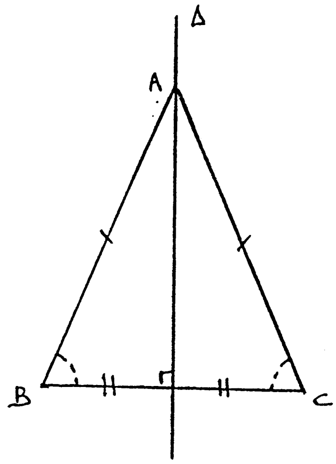
4° - Un triangle est isocèle et l'un de ses secteurs a pour mesure 60 - Quelle est sa nature ? Justifier et énoncer le résultat obtenu -

Indication : Deux éventualités et deux seulement sont à considérer :
- les côtés du secteur de mesure 60 portent les côtés de même longueur du triangle
- — — — — — — — — — — — ne portent pas — — — — — — — —

(*) Ces propriétés sont à retenir - Elles pourront être utilisées dans d'autres exercices -

Solution

1° a - Démonstration de la propriété (P_8)



On suppose ici que le triangle ABC est isocèle en A

On sait alors que la médiatrice Δ du segment [BC] est un axe de symétrie du triangle ABC

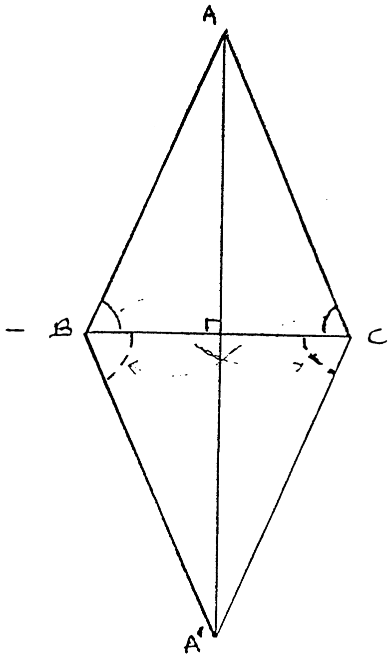
On a alors, de façon évidente :

$$(\widehat{ABC}) \xmapsto{s_\Delta} (\widehat{ACB})$$

on en déduit : $mes(\widehat{ABC}) = mes(\widehat{ACB})$ .... effet de s_Δ (*)

La propriété (P_8) est donc établie -

1° b - Démonstration de la propriété (P_9) -



On suppose que le triangle ABC vérifie l'égalité $mes(\widehat{ABC}) = mes(\widehat{ACB})$.

On construit alors le transformé A' du point A par la réflexion s d'axe (BC)

on a alors : $(\widehat{ABC}) \xmapsto{s} (\widehat{A'BC})$

$(\widehat{ACB}) \longmapsto (\widehat{A'CB})$

on en déduit : $\begin{cases} mes(\widehat{ABC}) = mes(\widehat{A'BC}) \\ mes(\widehat{ACB}) = mes(\widehat{A'CB}) \end{cases}$ effet de s (*)

ce qui, compte tenu de l'hypothèse, conduit aux égalités : $\begin{cases} mes(\widehat{ABC}) = mes(\widehat{A'CB}) \\ mes(\widehat{ACB}) = mes(\widehat{A'BC}) \end{cases}$

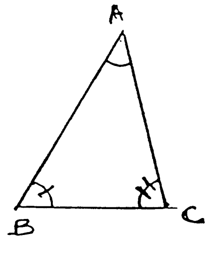
Dès lors, d'après la propriété (P_5), on peut affirmer :

- les côtés [BA) et [CA') des secteurs alternes-internes $(\widehat{ABC})$ et $(\widehat{A'CB})$ sont parallèles.
- ------ [CA) et [BA') ------ ------ $(\widehat{ACB})$ et $(\widehat{A'BC})$ ------

Par suite le quadrilatère BACA' qui a ses côtés opposés parallèles est un parallélogramme - En outre ses diagonales (AA') et (BC) sont orthogonales - Ce quadrilatère est donc un losange - D'où : AB = AC - Autrement dit le triangle ABC est isocèle en A - La propriété (P_9) est donc établie -

---

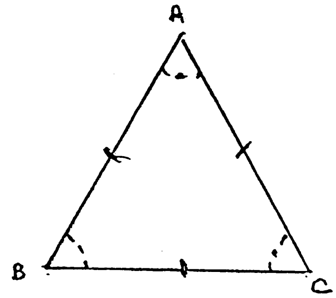
Dans les questions suivantes, il n'y a aucune ambiguïté à désigner par $(\hat{A})$, $(\hat{B})$ et $(\hat{C})$ les secteurs de sommets A, B et C d'un triangle ABC donné -



(*) une réflexion transforme un secteur en un secteur de même mesure -

2°- Le triangle donné est équilatéral - Il est donc :

$\left|\begin{array}{l} \bullet \text{ isocèle en } A \text{ - D'où } mes(\hat{B}) = mes(\hat{C}) \\ \bullet \text{ isocèle en } B \text{ - D'où } mes(\hat{C}) = mes(\hat{A}) \end{array}\right\}$ voir (P_8)



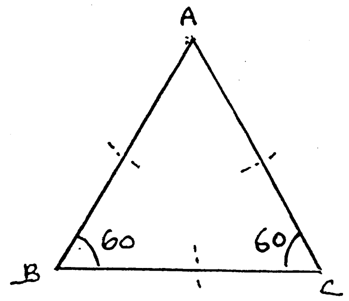
Par ailleurs, on sait que : $mes(\hat{A}) + mes(\hat{B}) + mes(\hat{C}) = 180$

On a donc $\begin{cases} mes(\hat{A}) = mes(\hat{B}) = mes(\hat{C}) \\ 3mes(\hat{A}) = 180 \end{cases}$

d'où on tire : $mes(\hat{A}) = mes(\hat{B}) = mes(\hat{C}) = 60$.

Conclusion : Les trois secteurs d'un triangle équilatéral ont pour mesure 60

3°- Le triangle donné a deux secteurs de mesure 60



Si $mes(\hat{B}) = mes(\hat{C}) = 60$ alors,

$mes(\hat{A}) = 180 - [mes(\hat{B}) + mes(\hat{C})] = 180 - 120 = 60$

Ceci fait, en utilisant la propriété (P_8) :

$\left|\begin{array}{l} \bullet \text{ de } mes(\hat{B}) = mes(\hat{C}) \text{ on déduit : } AB = AC \\ \bullet \text{ de } mes(\hat{C}) = mes(\hat{A}) \text{ on déduit : } AB = BC \end{array}\right.$

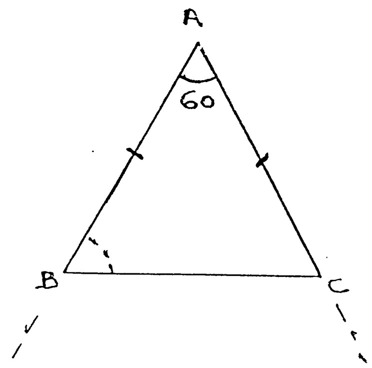
Le triangle ABC qui a ses trois côtés de même mesure est donc équilatéral

On peut donc énoncer :

Si un triangle a deux secteurs de mesure 60 alors il est équilatéral

4°- Le triangle donné est isocèle et l'un de ses secteurs a pour mesure 60

• 1ère éventualité : les côtés du secteur de mesure 60 portent les côtés de même longueur du triangle



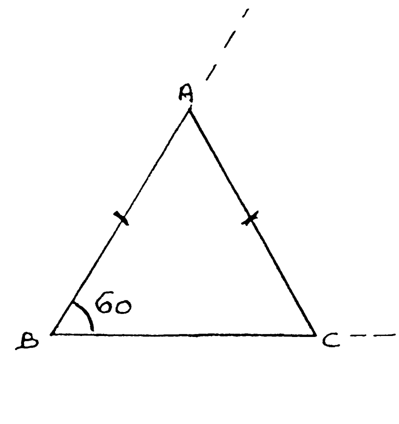
Dans ce cas, on a :

$\left|\begin{array}{l} \bullet\ mes\ \hat{B} = mes(\hat{C}) \text{ .... d'après } (P_8) \\ \bullet\ mes(\hat{B}) + mes(\hat{C}) = 180 - mes(\hat{A}) = 180 - 60 = 120 \end{array}\right.$

On en déduit : $2mes\ \hat{B} = 120$ puis $mes(\hat{B}) = 60$

Le triangle donné a donc deux secteurs de mesure 60 - Par conséquent, le résultat du 3°/ permet d'affirmer que ce triangle est équilatéral

• 2ème éventualité : les côtés du secteur de mesure 60 ne portent pas les côtés de même longueur du triangle



Dans ce cas, on a :

$mes(\hat{B}) = mes(\hat{C})$ .... d'après (P_8)

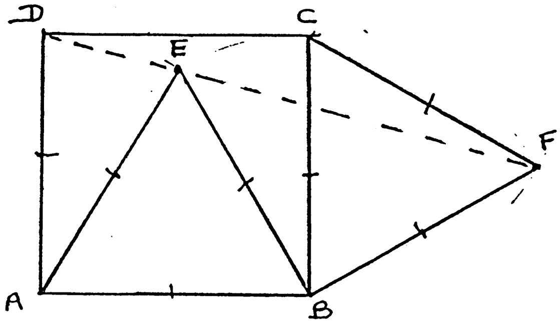
Le triangle donné a donc deux secteurs de mesure 60 - D'après le résultat obtenu au 3°/ on peut affirmer que ce triangle est équilatéral

On peut donc énoncer :

Si un triangle isocèle a un secteur de mesure 60 alors ce triangle est équilatéral -

c - Exercice (3)

Dans la figure ci-contre le quadrilatère ABCD est un carré ; les triangles ABE et BCF sont équilatéraux -



L'objectif de l'exercice est de montrer que les points D, E et F sont alignés -

Nous proposons ci-après un "plan d'attaque" de cet exercice de manière à le mettre à portée des élèves d'une classe de 5ème ou de 4ème

1°- Quelles sont les mesures des secteurs ($\widehat{EAB}$), ($\widehat{AEB}$), ($\widehat{ABE}$) ? Justifier vos réponses -

2°- Quelle est la nature du triangle ADE ? Calculer la mesure du secteur ($\widehat{DAE}$) - En déduire les mesures des secteurs ($\widehat{DEA}$) puis ($\widehat{DEB}$)

3°- Calculer les mesures des secteurs ($\widehat{EBC}$) puis ($\widehat{EBF}$) - En déduire la nature du triangle EBF.

4°- Montrer que les secteurs ($\widehat{DEB}$) et ($\widehat{BEF}$) sont supplémentaires -

5°- Que peut-on affirmer lorsque deux secteurs adjacents sont supplémentaires ? Citer la propriété utilisée - Permet-elle de parvenir à la conclusion visée ? -

Nous laissons au lecteur le soin d'amender l'énoncé précédent pour que l'exercice garde quelques attraits pour des élèves de 3ème

Commentaires

En préambule à ce chapitre, nous avons manifesté notre intention de recourir à certaines propriétés mises en place en son sein pour établir des propriétés propres à une figure donnée : alignement, parallélisme, équidistance .... C'est d'ailleurs ce que nous avons fait dans les trois exercices proposés en fin de chapitre - Il nous reste maintenant à attirer l'attention des professeurs sur certaines pratiques actuelles concernant les problèmes de ce type -

I. Problèmes d'alignement et "angle plat"

Il est manifeste que la propriété (P_1) peut servir "d'outil" pour établir l'alignement de trois points -

Or actuellement on fait grand usage de "l'angle de 180°" dénommé "angle plat" pour traiter certains de ces problèmes - Afin de suggérer son intervention on utilise la formulation suivante : « pour montrer que trois points A, B, C sont alignés avec A élément de [BC], il suffit de montrer que l'angle $\widehat{BAC}$ est plat » Mais le plus souvent cette suggestion est remplacée par une recommandation moins embêtante à énoncer : « pour montrer que des points sont alignés, on montre qu'on a un angle plat » -

L'intervention de l'angle plat ne se limite pas à l'exemple précédent - On lit, on entend encore ici ou là :
« Deux angles sont dits supplémentaires lorsque leur somme est égale à l'angle plat »
« L'angle au centre associé à un angle droit inscrit est plat »
« Un demi-tour est une rotation d'angle plat » .... etc --

Dans le présent contexte, faire un quelconque usage de "l'angle plat" est sans fondement - En effet on ne trouve pas trace de cet "individu" dans l'ensemble $\mathcal{Q}$ des angles des secteurs du plan P. Pire, lorsqu'on a tenté de structurer additivement cet ensemble, en pure perte d'ailleurs, "l'angle plat" n'a même pas eu le privilège de faire une brève apparition comme l'a fait son compère "l'angle nul"

Par ailleurs, si on dresse par anticipation l'inventaire des cas où on a l'habitude de le faire intervenir, on pourra constater qu'il n'est en fait qu'un artifice de vocabulaire - Par conséquent la géométrie n'aura pas à souffrir de sa disparition -

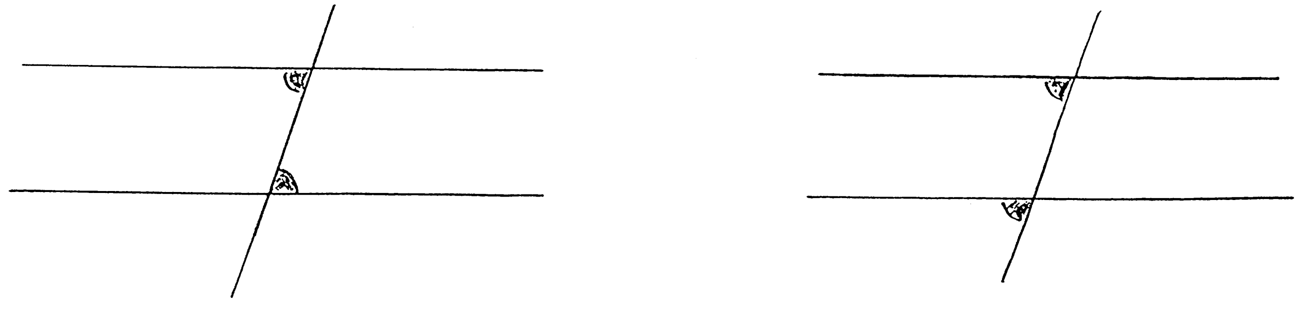
Il nous appartient donc dès maintenant d'affirmer catégoriquement: « En tant qu'angle de secteur, l'angle plat n'existe pas »
Ceux qui, comme nous, l'ont connu, tutoyé, doivent hélas désormais le considérer comme ...... un mythe inutile - Cela dit nous avons conscience que de telles affirmations vont surprendre, déboussoler voir courroucer certains de nos collègues, perturber aussi leur pratique enseignante - Mais programmer la disparition de "l'angle plat" des manuels scolaires d'abord, des cahiers des élèves ensuite devient une impérieuse nécessité si l'on veut tenir un discours cohérent
Ajoutons qu'il a urgence à le faire car habituellement les mythes ont la vie dure -

Afin d'appaiser les esprits, ramener le calme chez les adeptes inconditionnels de "l'angle nul" et de "l'angle plat" il nous reste à les informer qu'ils pourront se consoler en se reportant au document: « Rotations planes et angles de couples de vecteurs non nuls » publié par l'irem de Bordeaux - Là ces deux angles ont droit de cité - Qui plus est, ils y tiennent le haut du pavé tant leur rôle est essentiel -

II - Problèmes de parallélisme

Pour établir le parallélisme de deux droites on peut, entre autres méthodes, utiliser les propriétés (P_5) et (P_7) concernant respectivement les secteurs alternes-internes et les secteurs correspondants -

Ceci dit, dans tous les manuels scolaires que nous avons consultés, l'introduction des "angles alternes-internes" et des "angles correspondants" se fait sommairement à partir de droites parallèles



Dès lors, en toute rigueur, il ne peut plus être question d'utiliser ces "angles" pour établir le parallélisme de deux droites - Et pourtant, il n'est un secret pour personne que la chose se pratique couramment au collège et ailleurs - Pour le potache, mécréant qui n'a pas une foi aveugle en ce qu'on lui professe et qui n'a pas encore ses neurones en état d'hibernation, mieux vaut donc ne pas trop s'interroger sur les fondements de cette méthode sinon l'évaluation de ses savoirs-faire risque d'en souffrir -

III - Un peu de logique

Dès la classe de quatrième, il est souhaitable d'apprendre aux élèves à énoncer, de façon automatique, la contraposée d'une propriété (P) bâtie comme suit :

(P) : Etant donné une configuration F, si F vérifie l'énoncé (E_1) alors F vérifie l'énoncé (E_2)

L'énoncé de sa contraposée (P') étant :

(P') : Etant donné une configuration F, si F ne vérifie pas l'énoncé (E_2) alors F ne vérifie pas l'énoncé (E_1)

énoncé qui peut éventuellement se traduire par :

(P') : Etant donné une configuration F, si F vérifie l'énoncé (non E_2) alors F vérifie l'énoncé (non E_1)

Il s'agit ensuite de leur faire comprendre que les propriétés (P) et (P') sont "interchangeables" (*) puisque l'une entraîne l'autre et vice-versa -

1° Montrons que si on dispose de la propriété (P) alors on obtient la propriété (P')

Hypothèse de (P')

Etant donné une configuration F, si on sait que $\boxed{\text{F ne vérifie pas l'énoncé } (E_2)}$ alors on ne peut avoir « F vérifie l'énoncé (E_1) » car, d'après (P), F vérifierait l'énoncé (E_2) - Donc, on peut affirmer $\boxed{\text{F ne vérifie pas l'énoncé } (E_1)}$

conclusion de (P') (c.q.f.d)

(*) Nous avons préféré l'adjectif "interchangeable" à l'adjectif "équivalent(e)" car, à ce niveau, il semble mieux à même de traduire la situation

2°- Montrons que si on dispose de la propriété (P') alors on obtient la propriété (P)

{Etant donné une configuration F, si on sait que, $\boxed{\text{F vérifie l'énoncé } (E_1)}$ alors on ne peut avoir « F ne vérifie pas l'énoncé (E_2) » car, d'après (P'), F ne vérifierait pas l'énoncé (E_1). Donc, on peut affirmer $\boxed{\text{F vérifie l'énoncé } (E_2)}$

(c-q-f-d)

A titre anecdotique, depuis quelques années, une question revient souvent à l'oral des concours du C.A.P.E.S: « Quelle propriété utilise-t-on pour montrer que le triangle ABC avec BC = 6, CA = 4 et AB = 3 n'est pas rectangle en A ? »

Dans les premières années cette question a fait pas mal de dégâts car les candidats n'étaient pas habitués à formuler puis à manier les contraposées de propriétés connues, entre autres celle de Pythagore.
Or, pour énoncer la contraposée de la dite propriété, encore faut-il qu'elle soit énoncée de façon convenable.
Considérons par exemple l'énoncé suivant :
« Si le triangle ABC est rectangle en A alors $BC^2 = AB^2 + AC^2$ »
qui est parfaitement correct pour ce qui concerne le fond.
L'énoncé de sa contraposée devient automatiquement :
« Si $BC^2 \neq AB^2 + AC^2$ alors le triangle ABC n'est pas rectangle en A »
Or, de par sa forme, cette dernière proposition n'est pas très satisfaisante car dans la locution initiale " si $BC^2 \neq AB^2 + AC^2$ " on ne sait pas, a priori, ce que désignent les notations BC, AB et AC.
Mieux vaut donc libeller la propriété de Pythagore en ces termes :

{Etant donné un triangle ABC, si ce triangle est rectangle en A alors $BC^2 = AB^2 + AC^2$

La transcription automatique de sa contraposée donnant :

{Etant donné un triangle ABC, si $BC^2 \neq AB^2 + AC^2$ alors ce triangle n'est pas rectangle en A.

énoncé qui est correct aussi bien en ce qui concerne la forme que le fond.

Nous voudrions aussi mettre en garde certains collègues qui croient bon de mêler en toutes circonstances mathématiques et réalité. Faire énoncer la contraposée de la proposition prétendument empruntée à la vie courante :
« S'il pleut alors j'ouvre mon parapluie »
ou encore celles des propositions devenues dictons célèbres :
« Si ma tante en avait alors elle serait mon oncle »
« Si mon oncle en était alors il serait ma tante »
ne peut, nous semble-t-il, que desservir la maîtrise de ce savoir-faire, son entendement et sa fécondité.

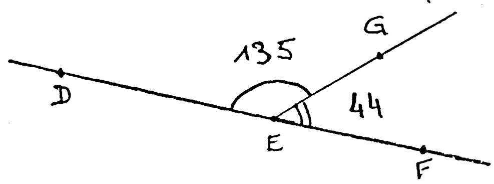
Ceci dit, il est indispensable de proposer aux élèves des exercices de "logique" si l'on veut parfaire leurs capacités à formuler un raisonnement déductif - Avant d'aborder les quelques exercices proposés ci-après, il convient de leur signaler que les locutions "prouver que", "montrer que" ou encore "établir que" signifient qu'on attend d'eux une démonstration (une preuve) théorique et non une justification expérimentale -

Exercice (1) :

Quelle propriété utiliser pour prouver que, dans le triangle ABC où AB = 9 et AC = 8, les secteurs $(\widehat{ABC})$ et $(\widehat{ACB})$ n'ont pas la même mesure ? Enoncer cette propriété -

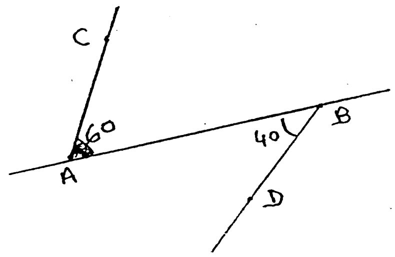
Exercice (2)

Pour montrer que les points E, D et F ne sont pas alignés, quelle propriété peut-on utiliser ? Enoncer cette propriété -



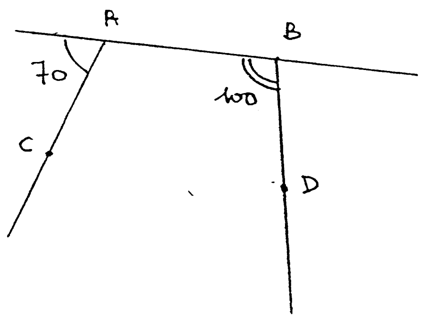
Exercice (3)

Quelle propriété peut-on utiliser pour établir que les demi-droites [AC) et [BD) ne sont pas parallèles ? Enoncer cette propriété -



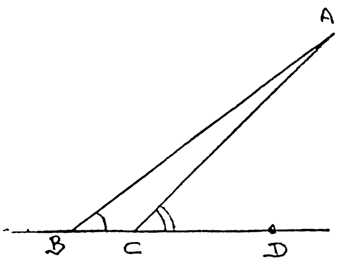
Exercice (4)

Quelle propriété peut-on utiliser pour montrer que les demi-droites [AC) et [BD) sont non parallèles ? Que peut-on en déduire pour les droites (AC) et (BD) ?



Exercice (5)

Quelle propriété peut-on utiliser pour prouver que les secteurs $(\widehat{ABD})$ et $(\widehat{ACD})$ n'ont pas la même mesure ? Enoncer cette propriété -



Nota : Pour citer une propriété on pourra faire référence à celles établies jusqu'ici ; par exemple : contraposée de la propriété P_n, chapitre ◯, §(-) -

Exercice (6) : (à présenter en classe de $4^{ème}$)

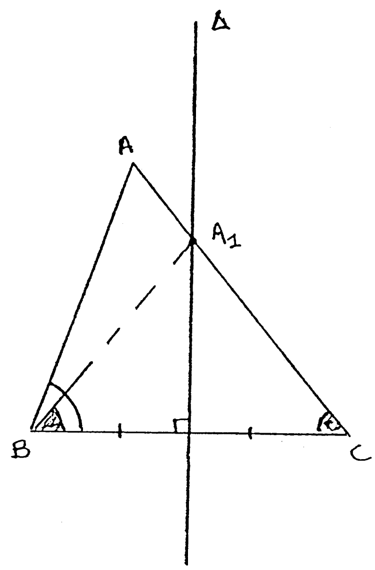
Nous donnons ici une autre démonstration de la propriété (P_9) :

Etant donné un triangle ABC, si on sait que $mes(\widehat{ABC}) = mes(\widehat{ACB})$ alors on peut affirmer que ce triangle est isocèle en A.

La méthode proposée est appelée "méthode par contraposée" — Elle consiste à établir la contraposée (P'_9) de la propriété (P_9)

Solution

On suppose donc que le triangle ABC n'est pas isocèle en A — Prenons, par exemple, $AB < AC$ — Alors les points A et C sont situés de part et d'autre de la médiatrice Δ du segment [BC] — (on pourra à ce propos rappeler les résultats concernant la partition du plan par la médiatrice d'un segment) Désignons par A_1 le point d'intersection de la droite Δ et du segment [AC] (*) —



- Le triangle A_1BC étant isocèle en A_1, la propriété (P_8) nous permet d'affirmer que : $mes(\widehat{A_1BC}) = mes(\widehat{ACB})$
- Le point A_1 étant intérieur au secteur $(\widehat{ABC})$ (**) il est manifeste que les secteurs $(\widehat{ABC})$ et $(\widehat{A_1BC})$ ne sont pas superposables et donc que : $mes(\widehat{ABC}) \neq mes(\widehat{A_1BC})$

Compte tenu de l'égalité précédente, on arrive à la conclusion : $mes(\widehat{ABC}) \neq mes(\widehat{ACB})$

On vient donc d'établir la propriété :

(P'_9) : Etant donné un triangle ABC, si on sait que ce triangle n'est pas isocèle en A alors on peut affirmer que $mes(\widehat{ABC}) \neq mes(\widehat{ACB})$

Reste à dire que (P'_9) entraîne (P_9) pour obtenir le résultat annoncé —

Nota : La méthode par contraposée n'est autre que le fameux raisonnement par l'absurde en un peu mieux ficelé —

(*) L'existence et l'unicité du point A_1 sont tacitement admises —

(**) ce résultat est tenu comme allant de soi.

Chapitre ③

Bissectrice d'un secteur

Bissectrices intérieures d'un triangle, cercle inscrit

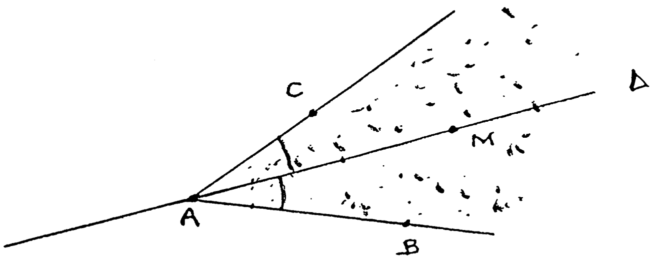
Ce chapitre fait actuellement partie du programme de la classe de $4^{ème}$

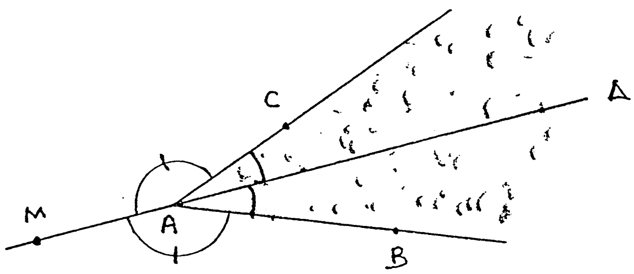
I - Bissectrice d'un secteur

Dans tout ce paragraphe, la configuration sur laquelle porte notre étude est constituée d'un secteur $(\widehat{BAC})$ et d'un point M n'appartenant pas aux supports des côtés

1 - Définition et première propriété

Désignons par Δ l'axe de symétrie du secteur $(\widehat{BAC})$ - Si M est un point de Δ alors :





La réflexion s_Δ d'axe Δ transforme le secteur $(\widehat{MAB})$ en le secteur $(\widehat{MAC})$

On a donc : $mes(\widehat{MAB}) = mes(\widehat{MAC})$ ...... effet de s_Δ

Ainsi la droite Δ partage le secteur $(\widehat{BAC})$ en deux secteurs de même mesure - Ce résultat justifie en partie la terminologie adoptée dans la définition suivante :

La droite (axe) de symétrie d'un secteur est également appelée <u>bissectrice</u> de ce secteur -

Le résultat obtenu peut donc s'énoncer :

(P_1) : Etant donné un secteur $\widehat{BAC}$ et un point M n'appartenant pas aux supports des côtés, <u>Si</u> on sait que la droite (AM) est la bissectrice du secteur $\widehat{BAC}$ <u>alors</u> on peut affirmer que : $mes(\widehat{MAB}) = mes(\widehat{MAC})$

2- Condition suffisante pour que M appartienne à la bissectrice de $(\widehat{BAC})$

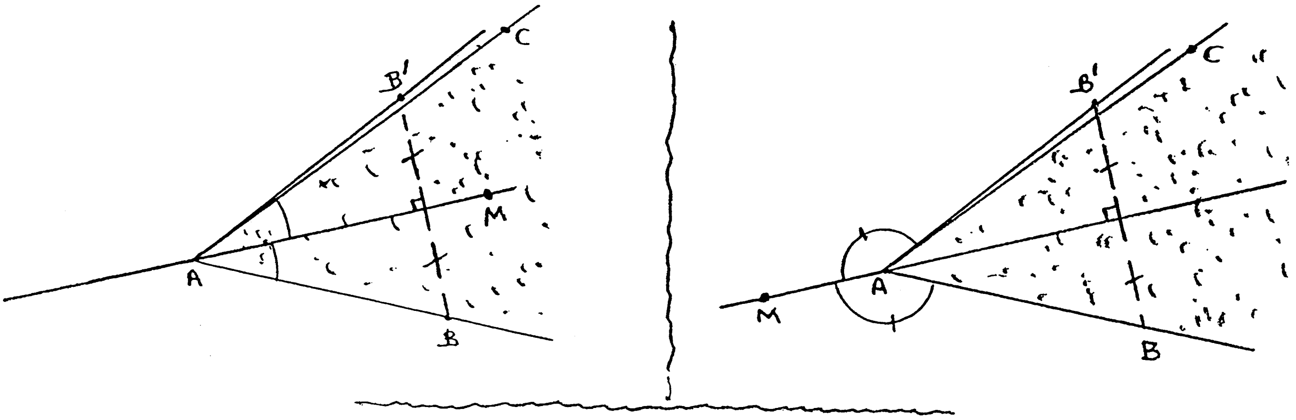
a- Exposé du problème -

On se propose de répondre à la question suivante :

La condition $mes(\widehat{MAB}) = mes(\widehat{MAC})$ suffit-elle pour que la droite (AM) soit la bissectrice du secteur $(\widehat{BAC})$?

b- Solution

On suppose donc que le point M est tel que $mes(\widehat{MAB}) = mes(\widehat{MAC})$



La réflexion s d'axe (AM) transforme le point B en le point B' et donc le secteur $(\widehat{MAB})$ en le secteur $(\widehat{MAB'})$ - On a alors :

$mes(\widehat{MAB'}) = mes(\widehat{MAB})$ .... effet de s.

$= mes(\widehat{MAC})$ .... d'après l'hypothèse.

Dès lors les secteurs $(\widehat{MAB'})$ et $(\widehat{MAC})$ sont superposables et contenus dans le même demi-plan de bord (AM) (*) - Ces deux dernières conditions suffisent à prouver l'égalité : [AB') = [AC) -

Les notations $(\widehat{BAB'})$ et $(\widehat{BAC})$ désignent donc le même secteur - La droite (AM) qui est l'axe de symétrie du secteur $(\widehat{BAB'})$ est alors banalement l'axe de symétrie du secteur $(\widehat{BAC})$ - Autrement dit, la droite (AM) est la bissectrice du secteur $(\widehat{BAC})$ -

On peut donc énoncer la propriété suivante :

(P_2) : Etant donné un secteur $(\widehat{BAC})$ et un point M n'appartenant pas aux supports des côtés, si on sait que $mes(\widehat{MAB}) = mes(\widehat{MAC})$ alors on peut affirmer que la droite (AM) est la bissectrice du secteur $\widehat{BAC}$

Remarque

• La propriété (P_1) permet d'affirmer que la bissectrice d'un secteur est une droite qui partage ce secteur en deux secteurs de même mesure (de même angle)

(*) Les secteurs $(\widehat{MAB})$ et $(\widehat{MAC})$ ne sont pas dans le même demi-plan de bord (AM) sinon on aurait [AB) = [AC)

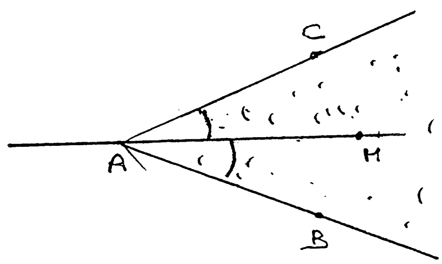
La propriété (P_2) permet d'affirmer que la bissectrice d'un secteur est <u>la seule</u> droite qui partage ce secteur en deux secteurs de même mesure.
(la contraposée (P_2') de la propriété (P_2) paraît d'ailleurs plus convaincante pour s'assurer de cette unicité)

On traduit souvent cette situation en disant que :
{ La bissectrice d'un secteur est <u>la</u> droite qui partage ce secteur en deux secteurs de même mesure.

<u>Commentaire</u>

Cette traduction doit éclipser, dans le présent contexte, la traditionnelle ritournelle : « la bissectrice d'un angle est la droite qui partage cet angle en deux angles égaux » qui est, quant à elle, d'une <u>totale stupidité</u>.

En effet, un angle n'est pas une figure géométrique. Donc il est absurde de dire qu'une droite partage un angle. Et même s'il en était autrement, c'est à dire si on considérait un angle comme une figure géométrique, l'énoncé précédent resterait erroné car, par exemple, dans la figure ci-contre les "angles" $\widehat{MAB}$ et $\widehat{MAC}$ ne seraient pas égaux(*) mais seulement superposables (isométriques)



II - Secteurs particuliers de même sommet et bissectrices.

1 - Bissectrices de deux secteurs adjacents et supplémentaires

a - <u>Pour se faire une idée.</u>

1 - Dessiner deux secteurs adjacents et supplémentaires $\widehat{BAC}$ et $\widehat{CAD}$ tels que mes$(\widehat{BAC}) = 40$. Quelle est la mesure du secteur $\widehat{CAD}$?

2 - Tracer les bissectrices $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ de ces deux secteurs. Soit X un un point de $\mathcal{B}_1$ intérieur au secteur $(\widehat{BAC})$ et Y un point de $\mathcal{B}_2$ intérieur au secteur $\widehat{CAD}$.

a - Quelle conjecture peut-on émettre quant au secteur $(\widehat{XAY})$?

b - Justifier cette conjecture par un calcul

3 - Reprendre les deux questions précédentes avec mes$(\widehat{BAC}) = 110$

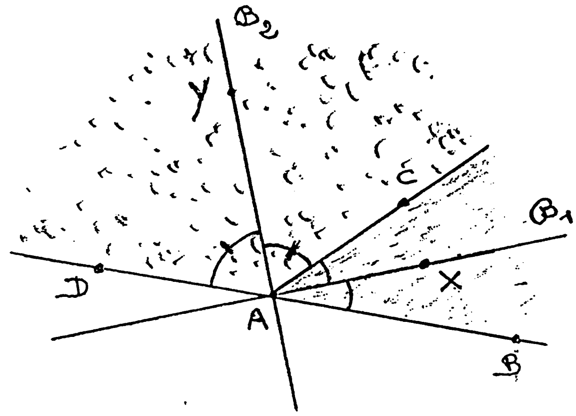
(*) En mathématiques, "<u>égalité</u>" est synonyme de "<u>indiscernabilité</u>"

b- Le résultat

Théorème ①

Les bissectrices de deux secteurs adjacents et supplémentaires sont orthogonales (perpendiculaires)

Démonstration



Soit deux secteurs $(\widehat{BAC})$ et $(\widehat{CAD})$ deux secteurs adjacents et supplémentaires ; un point X de la bissectrice $\mathcal{B}_1$ du secteur $(\widehat{BAC})$ intérieur à ce secteur ; un point Y de la bissectrice $\mathcal{B}_2$ du secteur $\widehat{CAD}$ intérieur à ce secteur.

Nous avons :

$$\begin{aligned} mes(\widehat{XAY}) &= mes(\widehat{XAC}) + mes(\widehat{CAY}) \\ &= \frac{1}{2} mes(\widehat{BAC}) + \frac{1}{2} mes(\widehat{CAD}) \\ &= \frac{1}{2}\left[mes(\widehat{BAC}) + mes(\widehat{CAD})\right] = \frac{1}{2} \times 180 \\ &= 90 \end{aligned}$$

Le secteur $(\widehat{XAY})$ est donc droit. D'où le résultat annoncé.

Commentaire

Le professeur n'a pas à faire cette démonstration, il doit seulement présider à sa mise en forme. Son déroulement a déjà été préparé dans les activités précédentes. Pour les élèves il s'agit ici de passer d'un calcul numérique à un calcul littéral.

2- Bissectrice de deux secteurs opposés par le sommet.

a- Pour se faire une idée

1- Dessiner deux secteurs $(\widehat{BAC})$ et $(\widehat{DAE})$ opposés par le sommet, puis tracer la bissectrice $\mathcal{B}$ du secteur $(\widehat{BAC})$.

2- Soit Y un point de $\mathcal{B}$ intérieur au secteur $(\widehat{DAE})$. Mesurer les secteurs $(\widehat{YAD})$ et $(\widehat{YAE})$. Quelle conjecture peut-on faire quant à la droite $\mathcal{B}$?

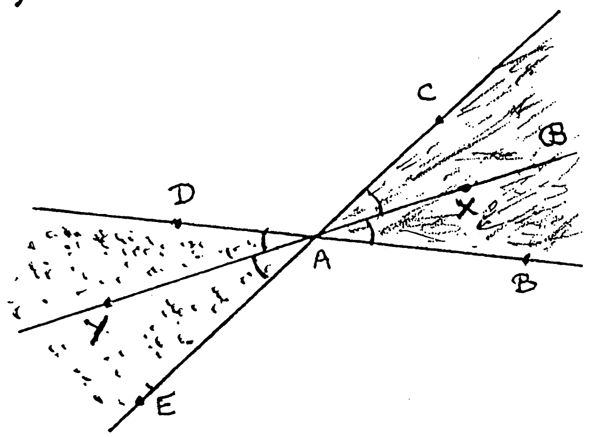
b- Le résultat

Théorème ②

Deux secteurs opposés par le sommet ont la même bissectrice

Démonstration : (à diriger et non à faire)

Soit deux secteurs $(\widehat{BAC})$ et $(\widehat{DAE})$ opposés par le sommet ; un point X de la bissectrice $\mathcal{B}$ du secteur $(\widehat{BAC})$ intérieur à ce secteur et un point Y de $\mathcal{B}$ intérieur au secteur $(\widehat{DAE})$.



Désignons par s_A la symétrie de centre A.

Nous avons :

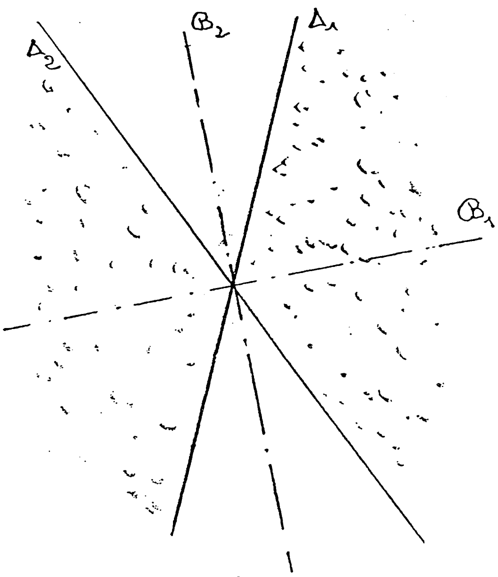
$$\left|\begin{array}{ll} \bullet\ mes(\widehat{XAB}) = mes(\widehat{XAC}) & \text{...... d'après } (P_1) \\ \bullet\ mes(\widehat{XAB}) = mes(\widehat{YAD}) & \\ \bullet\ mes(\widehat{XAC}) = mes(\widehat{YAE}) & \Big\}\text{...... effet de } s_A \end{array}\right.$$

On en déduit : $mes(\widehat{YAD}) = mes(\widehat{YAE})$ ...... égalité qui prouve - d'après la propriété (P_2) - que la droite (AY) est la bissectrice du secteur $\widehat{DAE}$. Or la droite (AY) n'est autre de la droite $\mathcal{B}$ - D'où le résultat annoncé -

3 - Bissectrices de deux droites sécantes :

a - Définition.

Deux droites sécantes Δ_1 et Δ_2 déterminent quatre secteurs deux à deux "opposés par le sommet" ou "adjacents et supplémentaires"



Deux secteurs opposés par le sommet ayant la même bissectrice (théorème 2) on obtient ainsi deux droites $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ qui sont les bissectrices des deux paires de secteurs opposés par le sommet déterminés par Δ_1 et Δ_2

| Par définition, on dit que les droites $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ sont les bissectrices des droites sécantes Δ_1 et Δ_2

b - Propriétés immédiates

• Il est clair que les droites $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ sont des (*) axes de symétrie de la figure formée par les droites Δ_1 et Δ_2

• Il découle immédiatement du théorème (1) du § - II - 1 - b -

| Les bissectrices de deux droites sécantes sont orthogonales

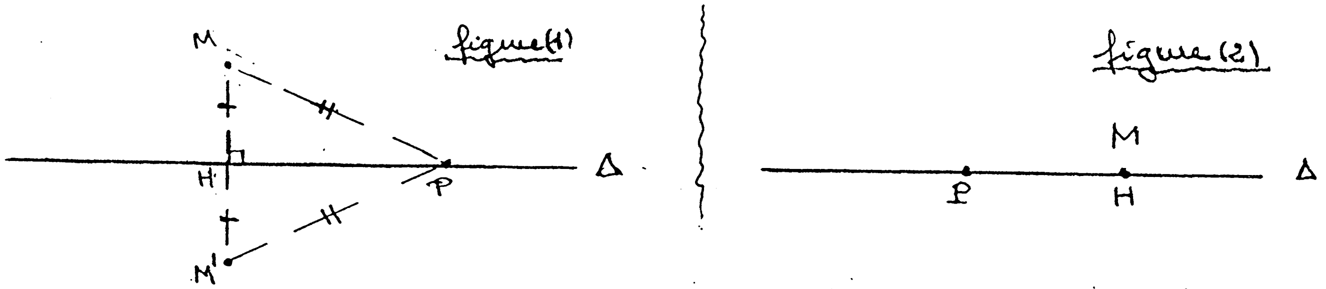
---

(*) La figure formée par deux droites sécantes Δ_1 et Δ_2 admet quatre ou deux axes de symétrie selon que Δ_1 et Δ_2 sont orthogonales ou non

III- Distance d'un point à une droite

1- Etude préliminaire

Soit une droite Δ, un point M et son projeté orthogonal H sur cette droite ; un point P de Δ. Deux cas de figure se présentent :



- Lorsque M n'appartient pas à Δ : si $PH \neq 0$ alors, en désignant par M' le symétrique de M par rapport à Δ, on a : $MM' < MP + PM'$ (inégalité triangulaire) soit $2MH < 2MP$. Donc $MH < MP$.
  En résumé : si $PH \neq 0$ alors $MP > MH$.
- Lorsque M appartient à Δ ce dernier résultat est banalement vérifié puisque $MH = 0$

Ainsi, dans les deux cas envisageables les mesures des segments [MP] admettent une valeur minimale : la mesure de [MH]

2- Distance d'un point à une droite

a- Définition

Étant donné une droite Δ et un point M, on appelle distance du point M à la droite Δ la plus petite des mesures des segments [MP], P étant un point quelconque de Δ.

b- Le résultat

La distance d'un point M à une droite Δ est la mesure du segment [MH], H désignant le projeté orthogonal de M sur la droite Δ

(*) Les notations "MP" et "MH" désignent les mesures des segments [MP] et [MH]. Ce sont des nombres positifs -

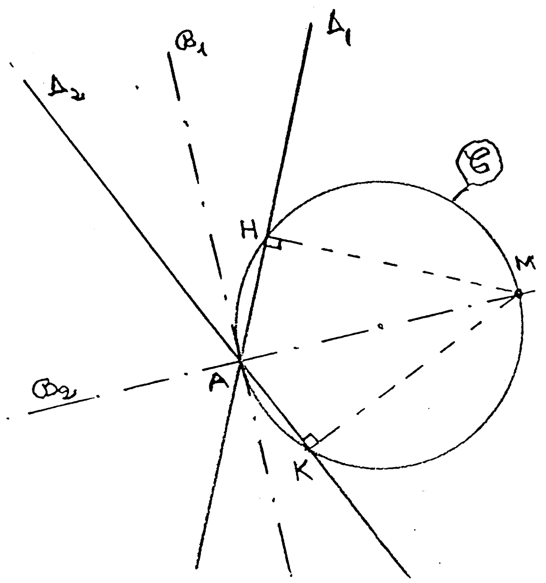
IV - Bissectrices de deux droites sécantes : propriétés métriques (*)

Dans tout ce paragraphe, la configuration sur laquelle porte notre étude est constituée de deux droites Δ_1 et Δ_2 sécantes en un point A et d'un point M

Nous désignerons par H et K les projetés orthogonaux respectifs de M sur Δ_1 et Δ_2 et par $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ les bissectrices de ces deux droites -

1 - Première propriété métrique

On suppose ici que M appartient à $\mathcal{B}_1$ ou $\mathcal{B}_2$.



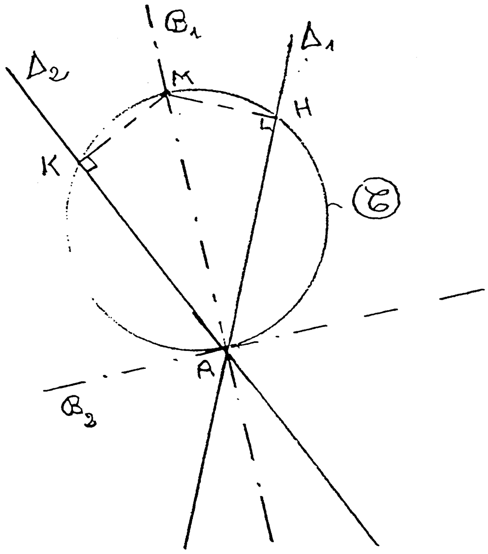
• Lorsque $M \neq A$, les triangles AMH et AMK sont rectangles en H et K - Donc le cercle $\mathcal{C}$ de diamètre [AM] passe par les points H et K

En désignant par s la réflexion d'axe (AM)

nous avons : $\Delta_1 \xmapsto{s} \Delta_2$

$\mathcal{C} \longmapsto \mathcal{C}$

Par suite le point H qui est un point autre que A commun à Δ_1 et $\mathcal{C}$ a pour transformé par la réflexion s le point, autre que A, commun à Δ_2 et $\mathcal{C}$: c'est à dire le point K -



Ceci étant, il vient : $H \longmapsto K$

$M \longmapsto M$

et par suite : MH = MK .... effet de s (**)

Donc le point M est équidistant des droites Δ_1 et Δ_2

• Lorsque M = A, le resultat précédent est conservé puisque la distance de M à chacune des droites Δ_1 et Δ_2 est nulle.

D'où la propriété suivante :

(P_3) : Etant donné deux droites sécantes et un point, si on sait que ce point appartient à l'une ou l'autre des bissectrices de ces deux droites alors on peut affirmer que ce point est équidistant des deux droites données

(*) ce sont des propriétés qui concernent la distance

(**) Une réflexion transforme un segment en un segment de même mesure -

2 - Condition suffisante pour que M appartienne à l'une des bissectrices de Δ_1 et Δ_2

a - Exposé du problème

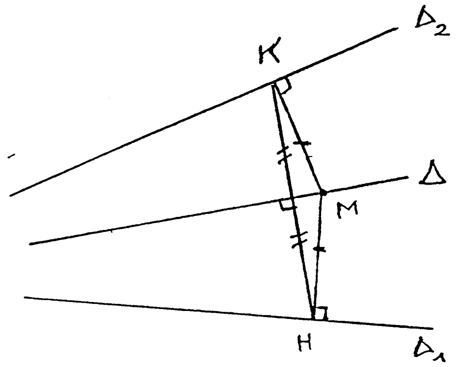
On se propose de répondre à la question suivante :

La condition " M équidistant de Δ_1 et Δ_2 " suffit-elle pour affirmer que que M appartient à l'une des bissectrices de Δ_1 et Δ_2 ?

b - Solution

On suppose donc que M est équidistant des droites Δ_1 et Δ_2 -

- Lorsque $M \neq A$, on a $H \neq K$ -



Notons Δ la médiatrice du segment [HK] et par s_Δ la réflexion d'axe Δ

La condition imposée : MH = MK fait que M appartient à la médiatrice Δ de [HK] -

Nous avons alors : $M \xrightarrow{s_\Delta} M$

$H \longmapsto K$

Par suite, la droite Δ_1 qui est orthogonale en H à la droite (MH) a, pour transformée par s_Δ, la droite orthogonale en K à la droite (MK), c'est à dire la droite Δ_2 (*)

Le schéma : $\Delta_1 \xrightarrow{s_\Delta} \Delta_2$ montre alors que Δ est l'une des bissectrices des droites Δ_1 et Δ_2 (**). Donc le point M appartient à l'une ou l'autre des bissectrices $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ des droites Δ_1 et Δ_2

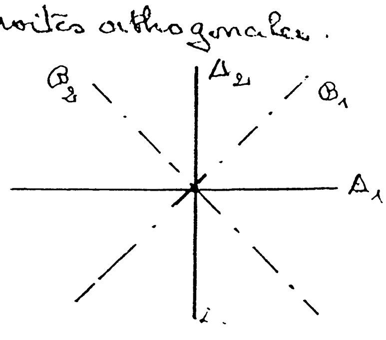
- Lorsque M = A, ce résultat est banalement vérifié

D'où la propriété suivante :

(P_4) : Etant donné deux droites sécantes et un point, si on sait que ce point est équidistant de ces deux droites alors on peut affirmer que ce point appartient à l'une ou l'autre des bissectrices des droites données -

(*) Une réflexion transforme deux droites orthogonales en deux droites orthogonales.

(**) Lorsque les droites Δ_1 et Δ_2 sont orthogonales, la figure formée par les droites Δ_1 et Δ_2 admet quatre axes de symétrie, à savoir : $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$, Δ_1 et Δ_2 -
Il reste alors à remarquer que la réflexion d'axe Δ_1 et celle d'axe Δ_2 ne transforment pas Δ_1 en Δ_2

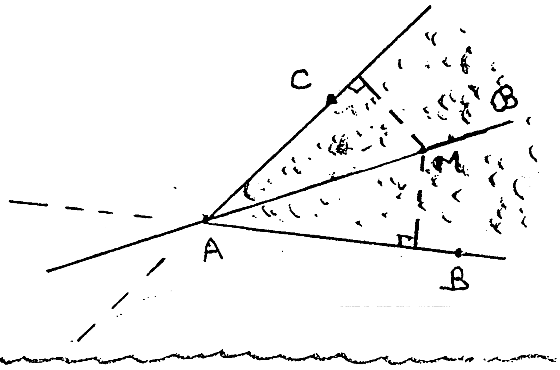


V- Bissectrice d'un secteur : propriétés métriques

Dans tout ce paragraphe, la configuration sur laquelle porte notre étude est constituée d'un secteur $(\widehat{BAC})$ et d'un point M de son intérieur -

1- Première propriété

On suppose ici que le point M appartient à la bissectrice $\mathcal{B}$ du secteur $(\widehat{BAC})$



Alors, d'après la propriété (P_3), le point M est équidistant des droites (AB) et (AC)

D'où la propriété suivante :

(P_5) : Etant donné un secteur et un point de son intérieur, Si on sait que ce point appartient à la bissectrice du secteur donné alors on peut affirmer que ce point est équidistant des supports des côtés

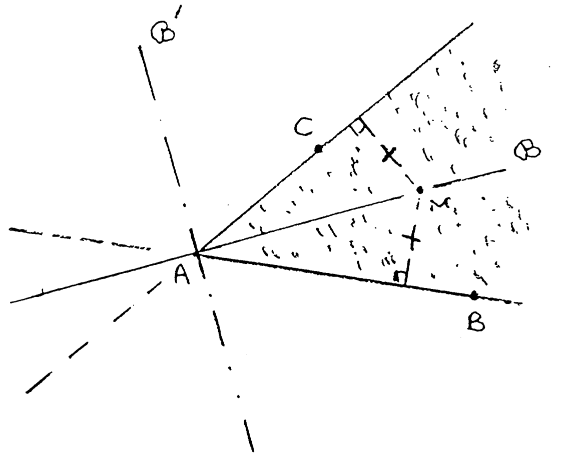
2- Condition suffisante pour que M appartienne à bissectrice de $(\widehat{BAC})$

a- Exposé du problème

On se propose de porter réponse à la question suivante :
La condition "M équidistant des droites (AB) et (AC)" suffit-elle pour affirmer que M appartient à la bissectrice du secteur $\widehat{BAC}$?

b- Solution

On suppose donc le point M équidistant des droites (AB) et (AC)



D'après la propriété (P_4), on peut affirmer que M appartient à l'une ou l'autre des bissectrices de ces deux droites -
Or, du fait que M est intérieur au secteur $(\widehat{BAC})$, on est assuré que M appartient à la bissectrice de ce secteur -

D'où la propriété suivante :

(P_6) : Etant donné un secteur et un point de son intérieur, Si on sait que ce point est équidistant des supports des côtés alors on peut affirmer que ce point appartient à la bissectrice du secteur donné -

VI - Bissectrices intérieures d'un triangle - Cercle inscrit.

1 - Bissectrices intérieures, bissectrices extérieures d'un triangle

Par côtés d'un triangle ABC, on entend :

- soit les segments [BC], [CA] et [AB]
- soit les droites (BC), (CA) et (AB)

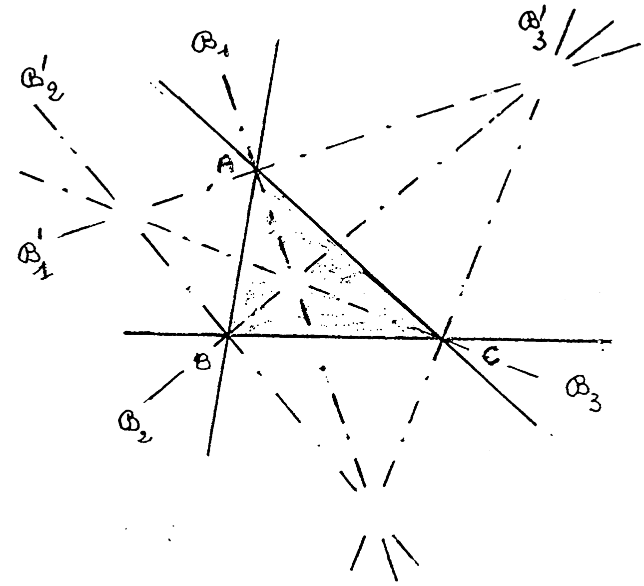
Nous allons ici privilégier ce deuxième aspect et considérer les bissectrices des paires de droites {(AB),(AC)}, {(BC),(BA)} et {(CA),(CB)}.

Définitions

Etant donné un triangle ABC,

- La bissectrice du secteur $(\widehat{BAC})$ est appelée bissectrice intérieure du triangle ABC relative au sommet A

- L'autre bissectrice des droites (AB) et (AC) est appelée bissectrice extérieure du triangle ABC relative au sommet A



Un triangle ABC a donc

- trois bissectrices intérieures : celles relatives aux sommets A, B et C.
- trois bissectrices extérieures : -

Commentaire

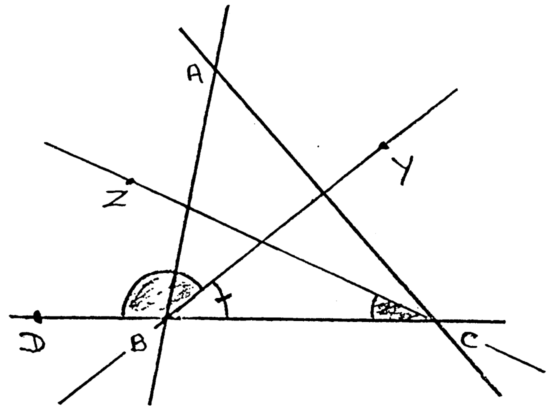
L'étude des bissectrices extérieures d'un triangle ne fait pas partie des programmes du premier cycle de l'enseignement secondaire. Si nous avons introduit ici ces bissectrices c'est uniquement pour justifier la terminologie " bissectrices intérieures d'un triangle"

2 - Etude des bissectrices intérieures d'un triangle

Etant donné un triangle ABC, au vu de la figure précédente, il semble que les bissectrices intérieures $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ et $\mathcal{B}_3$ de ce triangle relatives respectivement aux sommets A, B et C soient concourantes - Il nous reste donc à valider cette conjecture.

La démonstration comporte trois étapes -

• $1^{ère}$ étape : Les bissectrices $\mathcal{B}_2$ et $\mathcal{B}_3$ sont sécantes - En effet, soit Y un point de $\mathcal{B}_2$ intérieur au secteur $(\widehat{ABC})$
et Z ---------- $\mathcal{B}_3$ ------------ $(\widehat{ACB})$



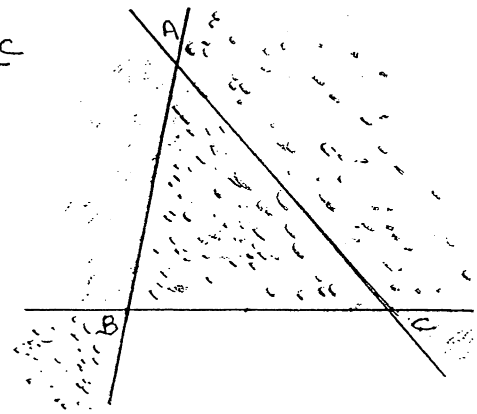
Nous avons :

$$\begin{cases} mes(\widehat{CBY}) = \frac{1}{2} mes(\widehat{ABC}) \\ mes(\widehat{BCZ}) = \frac{1}{2} mes(\widehat{ACB}) \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} mes(\widehat{CBY}) < 90 \\ mes(\widehat{BCZ}) < 90 \end{cases}$$

En désignant par D un point de la droite (BC) tel que les secteurs $(\widehat{BCZ})$ et $(\widehat{DBY})$ soient correspondants, il est clair que le secteur $(\widehat{DBY})$ est obtus puisqu'il est le supplément du secteur aigu $(\widehat{CBY})$. Il s'ensuit que les secteurs correspondants $(\widehat{DBY})$ et $(\widehat{BCZ})$ n'ont pas la même mesure (l'un est obtus, l'autre est aigu)

La contraposée de la propriété (P_6) du chapitre ② - §(II-2) :
[Etant donné deux secteurs correspondants, si on sait que ces secteurs n'ont pas la même mesure alors on peut affirmer que leurs côtés à supports distincts sont non parallèles]
permet ici d'affirmer que les demi-droites [BY) et [CZ) sont non parallèles (*)
Donc les droites $\mathcal{B}_2$ et $\mathcal{B}_3$ sont bien sécantes - On note I leur point d'intersection

• $2^{ème}$ étape : Le point I est intérieur au triangle ABC
En effet, les bissectrices $\mathcal{B}_2$ et $\mathcal{B}_3$ sont respectivement contenues dans la partie pointillée et dans la partie hachurée du plan $\mathcal{P}$
Le point I est un point de l'intérieur de chacune de ces parties (non situé sur les bords) donc de la partie commune aux intérieurs des secteurs $(\widehat{ABC})$ et $(\widehat{BCA})$ - D'où le résultat annoncé.

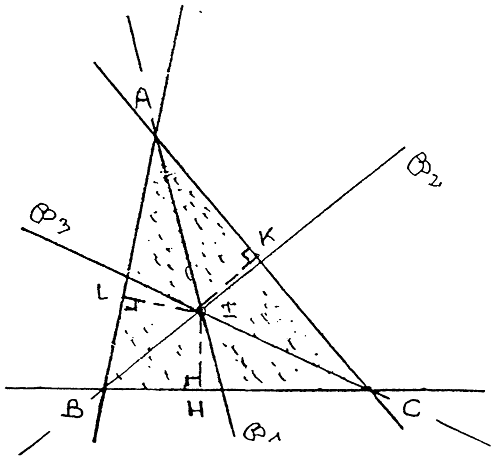


• $3^{ème}$ étape : Le point I appartient à $\mathcal{B}_1$
En effet, désignons par H, K et L les projetés orthogonaux du point I sur les droites (BC), (CA), (AB)

De $I \in \mathcal{B}_2$ on tire : $IH = IL$
De $I \in \mathcal{B}_3$ on tire : $IH = IK$
} voir propriété (P_5) §(III-1)

Dès lors, les conditions : $\begin{cases} IK = IL \\ I \text{ est intérieur au secteur } (\widehat{BAC}) \end{cases}$

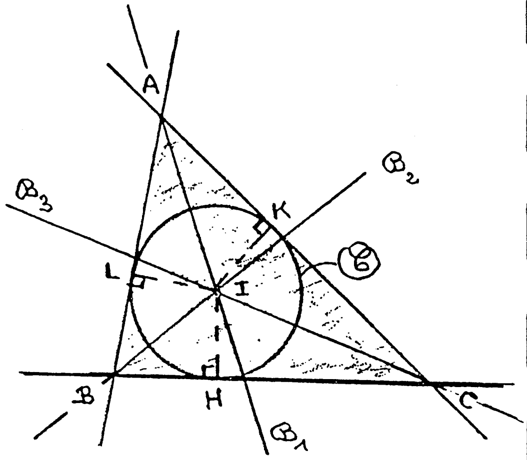
permettent d'affirmer que I appartient à la bissectrice $\mathcal{B}_1$ - voir propriété (P_6) - §(V-2)



Donc les trois bissectrices intérieures d'un triangle sont concourantes

(*) Attention, dire que deux demi-droites sont "non parallèles" ne signifie pas que ces demi-droites sont sécantes

3 - Cercle inscrit dans un triangle



Les notations précédentes étant conservées, considérons maintenant le cercle $\mathcal{C}$ de centre I qui passe par le point H

Comme IH = IK = IL, ce cercle passe aussi par les points K et L. En outre, il est clair que ce cercle est :

- tangent aux trois côtés (BC), (CA) et (AB) du triangle ABC
- contenu dans la <u>surface triangulaire</u> ABC

Ceci dit, le centre de tout cercle vérifiant ces deux dernières conditions ne peut être que :

- intérieur aux secteurs $(\widehat{ABC})$ et $(\widehat{ACB})$
- équidistant des supports des côtés de ces deux secteurs.

Donc, d'après la propriété (P_6) du paragraphe (V-2), son centre ne peut être que le point d'intersection I des bissectrices intérieures $\mathcal{B}_2$ et $\mathcal{B}_3$ du triangle ABC

<u>En résumé</u>, il existe <u>un et un seul</u> cercle contenu dans la <u>surface triangulaire</u> ABC et tangent aux droites (BC), (CA) et (AB) : le cercle $\mathcal{C}$.
On dit que le cercle $\mathcal{C}$ est <u>le cercle inscrit dans le triangle ABC</u>

4 - Conclusion

Les résultats établis dans les alinéas (2) et (3) sont valables pour n'importe quel triangle. On retiendra donc :

<u>Théorème (3)</u>

Les bissectrices intérieures d'un triangle sont concourantes. Leur point de concours est le centre du cercle inscrit dans ce triangle

<u>Commentaire</u>

Il est relativement aisé, compte du travail précédemment entrepris, de mettre en évidence <u>l'existence</u> d'un cercle tangent "intérieurement" aux trois côtés d'un triangle. Mais il est extrêmement rare que des élèves ressentent la nécessité de prouver son unicité. Il appartient donc au professeur de remédier à cette carence : on a trouvé un cercle qui .... Peut-on en trouver d'autres ?

VII - Cercles exinscrits à un triangle - Bissectrices d'un triangle : propriétés

L'étude des cercles exinscrits à un triangle peut être abordée en classe de seconde ou de première lorsqu'on dispose des homothéties et qu'on connaît l'action de ces transformations sur les points ainsi que leur effet sur les configurations géométriques élémentaires -

1- Cercle exinscrit à un triangle dans un secteur fixé.

a- Exposé du problème

On se propose de porter réponse à la question suivante :

Etant donné un triangle ABC et son cercle inscrit $\mathcal{C}$, peut-on trouver un cercle $\mathcal{C}_1$, autre que $\mathcal{C}$, contenu dans le secteur $(\widehat{BAC})$ et tangent aux côtés (BC), (CA) et (AB) du triangle ABC ?

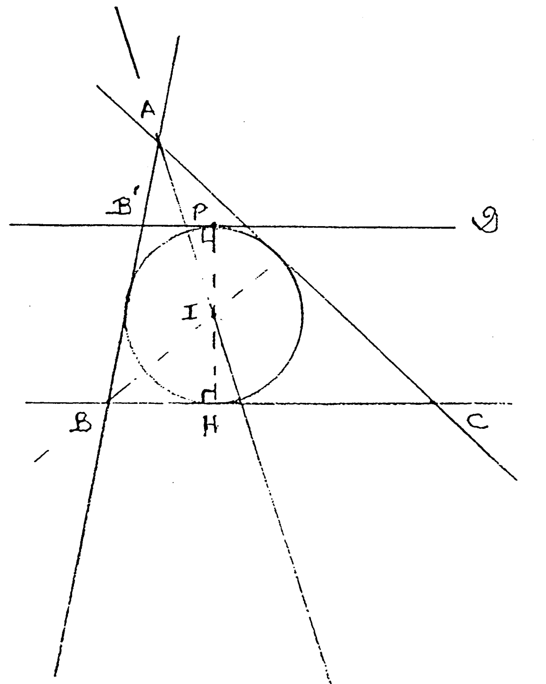
b- Solution

Elle comporte trois étapes -

• 1ère étape : Le problème posé admet au plus une solution (zéro ou une)

En effet, si un tel cercle $\mathcal{C}_1$ existe alors il est centré sur la droite (AI) et l'homothétie positive qui tranforme $\mathcal{C}_1$ en $\mathcal{C}$

- d'une part laisse le secteur $(\widehat{BAC})$ globalement invariant
- d'autre part transforme la droite (BC) en la droite - notée $\mathcal{D}$ - qui vérifie :
  - $\mathcal{D}$ est tangente à $\mathcal{C}$ car (BC) est tangente à $\mathcal{C}_1$
  - $\mathcal{D}$ est parallèle à (BC) et $\mathcal{D} \neq (BC)$ (*)



En notant B' le point d'intersection des droites $\mathcal{D}$ et (AB), l'homothétie qui envoie $\mathcal{C}_1$ sur $\mathcal{C}$ ne peut être que l'homothétie de centre A qui envoie B sur B'

Autrement dit, le cercle $\mathcal{C}_1$ ne peut être que le transformé du cercle $\mathcal{C}$ par l'homothétie h de centre A qui envoie B' sur B - D'où le résultat annoncé -

• 2ème étape : Le problème posé admet une et une seule solution

En effet, considérons le cercle $\mathcal{C}_1$ transformé de $\mathcal{C}$ par l'homothétie h.

(*) sinon l'homothétie considérée serait l'application identique de P et on aurait $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}$

le cercle $\mathcal{C}$ étant $\begin{cases} \text{contenu dans le secteur } (\widehat{BAC}) \\ \text{tangent aux droites } \mathcal{D}, (AB) \text{ et } (AC) \end{cases}$; on est assuré que

le cercle $\mathcal{C}_1$ est $\begin{cases} \text{contenu dans le secteur } h((\widehat{BAC})) \text{ c'est à dire dans } (\widehat{BAC}) \\ \text{tangent aux droites } h(\mathcal{D}),\ h((AB)) \text{ et } h((AC)) \text{ c'est à dire aux} \\ \quad \text{droites } (BC), (AB) \text{ et } (AC) \end{cases}$

le cercle $\mathcal{C}_1$ est donc une solution du problème - D'où le résultat annoncé

• $3^{ème}$ étape : Construction du cercle $\mathcal{C}_1$

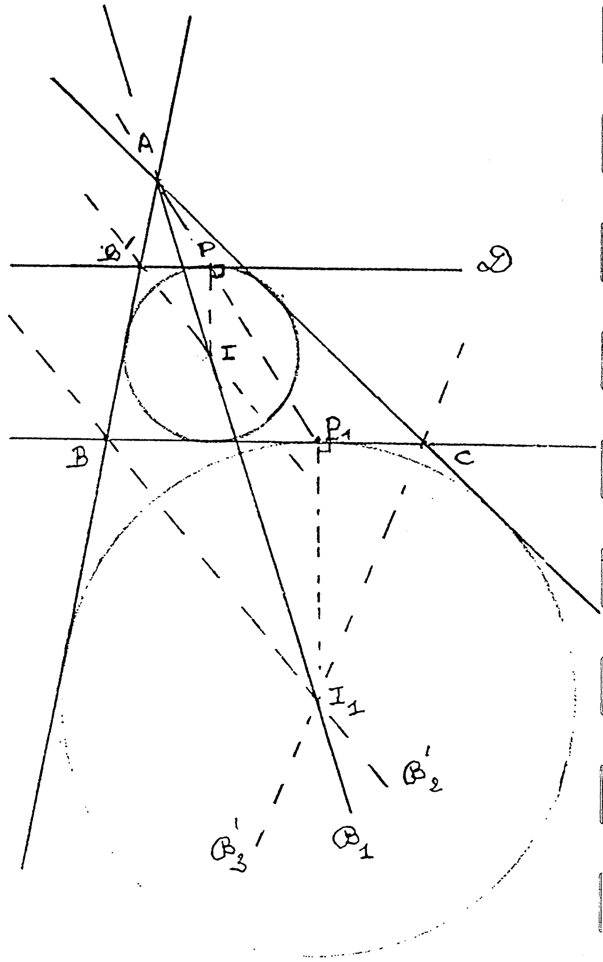
Il s'agit de construire le transformé $\mathcal{C}_1$ du cercle $\mathcal{C}$ par l'homothétie h de centre A qui envoie B' sur B -

Pour cela il suffit de construire les transformés I_1 et P_1 des points I et P par h -

$\mathcal{C}_1$ est alors le cercle de centre I_1 qui passe par P_1

Cette construction classique est réalisée dans la figure ci-contre :

- I_1 est le point d'intersection de la droite (AI) et de la parallèle à $(B'I)$ passant par B
- P_1 est le point d'intersection des droites (AP) et (BC)



On dit que le cercle $\mathcal{C}_1$ est <u>le cercle exinscrit au triangle ABC dans le secteur $(\widehat{BAC})$</u>

3 - <u>Retour sur les bissectrices du triangle ABC</u>

Désignons par :

$\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ et $\mathcal{B}_3$ les bissectrices intérieures du triangle ABC relatives aux sommets A, B et C
$\mathcal{B}_1'$, $\mathcal{B}_2'$ et $\mathcal{B}_3'$ - - - - - - - - - - extérieures - - - - - - - - - - - - - - - - -

Il découle de la construction précédente que I_1 est un point de $\mathcal{B}_1$

En outre, d'après la propriété (P_4) du paragraphe $(\text{IV} - 2)$

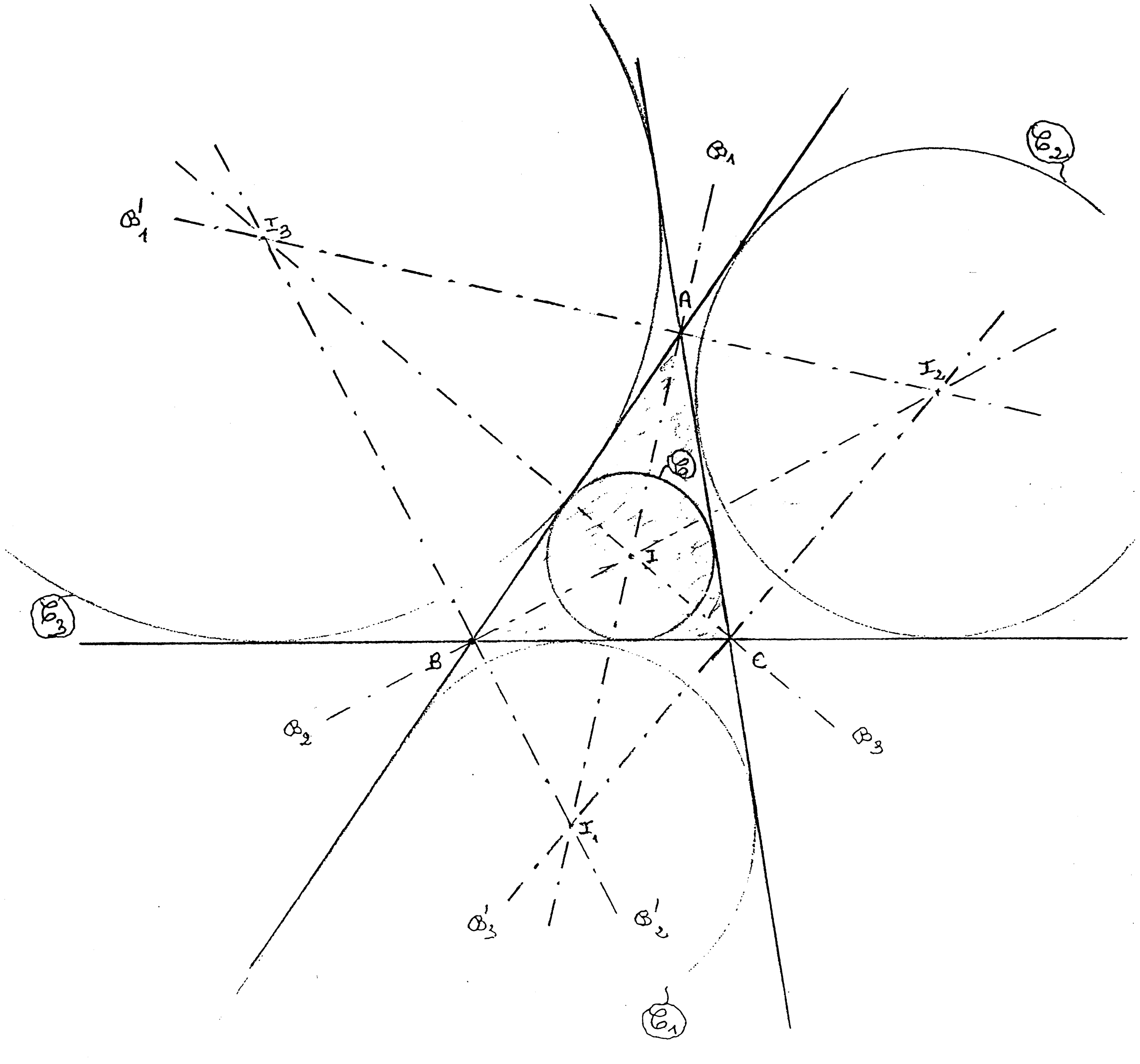
- I_1 étant équidistant des droites (BA) et (BC), il appartient donc à $\mathcal{B}_2$ ou $\mathcal{B}_2'$
- I_1 - - - - - - - - - - - (CA) et (CB), - - - - - - - - - - - - $\mathcal{B}_3$ ou $\mathcal{B}_3'$

Or, sachant que I_1 appartient à $\mathcal{B}_1$, ce point ne peut appartenir ni à $\mathcal{B}_2$, ni à $\mathcal{B}_3$ sinon on aurait $I_1 = I$

<u>Finalement</u>, le centre I_1 du cercle $\mathcal{C}_1$ appartient à $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2'$ et $\mathcal{B}_3'$

On établirait de façon analogue que :

- Le centre I_2 du cercle $\mathcal{C}_2$ exinscrit au triangle ABC dans le secteur $\widehat{CBA}$ appartient aux bissectrices $\mathcal{B}_2$, $\mathcal{B}'_3$ et $\mathcal{B}'_1$ -
- Le centre I_3 du cercle $\mathcal{C}_3$ exinscrit au triangle ABC dans le secteur $\widehat{ACB}$ appartient aux bissectrices $\mathcal{B}_3$, $\mathcal{B}'_1$ et $\mathcal{B}'_2$ -



Il est facile de justifier que le quadruplet (I, I_1, I_2, I_3) est <u>orthocentrique</u> (chaque point est l'orthocentre du triangle ayant pour sommets les trois autres)

<u>En conclusion</u>, pour n'importe quel triangle,

- Les trois bissectrices <u>intérieures</u> sont concourantes
- La bissectrice <u>intérieure</u> relative à un sommet et les bissectrices <u>extérieures</u> relatives aux deux autres sommets sont concourantes.
- Leurs points de concours sont respectivement le centre du cercle inscrit et les centres des cercles exinscrits

4. Cercles tangents aux trois côtés d'un triangle

a - Exposé du problème

Il s'agit maintenant de trouver tous les cercles tangents aux trois côtés d'un triangle ABC donné.

b - Solution

• On connait déjà quatre cercles qui sont des solutions de ce problème : le cercle inscrit dans le triangle ABC et les trois cercles exinscrits à ce triangle. Reste à savoir s'il n'y a pas d'autres cercles tangents aux trois côtés du triangle ABC.

• Si un cercle Γ est tangent aux trois côtés du triangle ABC alors son centre Ω est équidistant de la paire de droites $\{(AB),(AC)\}$, de la paire de droites $\{(BC),(BA)\}$ et de la paire de droites $\{(CA),(CB)\}$

Le point Ω appartient donc à la fois à :

- l'une des deux bissectrices relatives au sommet A
- l'une - B
- l'une - C

du triangle ABC

Autrement dit, en conservant les notations précédentes, le point Ω ne peut être que un des quatre points I, I_1, I_2 et I_3

Conclusion :

Il existe exactement quatre cercles tangents aux trois côtés d'un triangle donné : le cercle inscrit dans ce triangle et les trois cercles exinscrits à ce même triangle.

Nota :

On pourra trouver un prolongement à ce problème dans le fascicule :

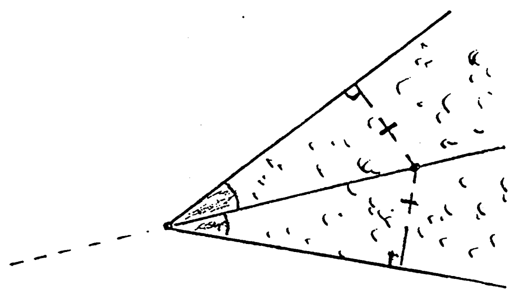
Similitudes planes directes
Similitudes planes inverses
Coniques tangentes aux trois côtés d'un triangle

publié par l'irem de Bordeaux.

Commentaires

Dans ce chapitre, le lecteur a pu constater que les expressions "axe de symétrie d'un secteur" et "bissectrice d'un secteur" désignaient la même droite -

Pour évacuer cette synonymie, il était tentant, et satisfaisant pour l'esprit, de définir la bissectrice d'un secteur comme étant la partie commune à ce secteur et à son axe de symétrie



On aurait alors pu énoncer :

La bissectrice d'un secteur est la demi-droite qui partage ce secteur en deux secteurs de même mesure (de même angle)

Par ailleurs, on aurait pu la caractériser comme étant l'ensemble des points du secteur équidistants de ses côtés
Mais cela imposait d'introduire la notion de "distance d'un point à une demi-droite"

Nous ne l'avons pas fait pour deux raisons :

- La notion de "distance d'un point à une demi-droite" ne fait pas partie des programmes du premier cycle de l'enseignement secondaire
- Définir cette notion compliquait un peu notre tâche. Après essai il nous est apparu que cette affaire n'était pas très rentable -

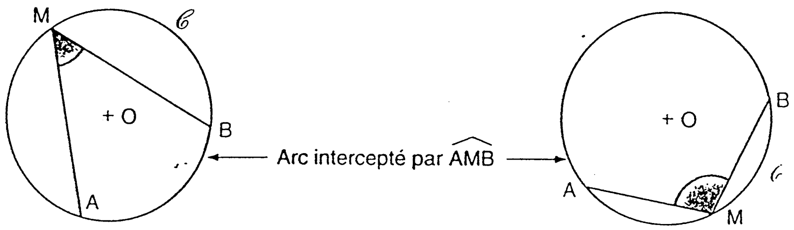
Chapitre ④ Cercles et secteurs

Quadrilatères inscrits dans un cercle : propriétés
quadrilatères inscriptibles dans un cercle : conditions suffisantes

La rubrique « angle inscrit et angle au centre » qui s'apparente au contenu de ce chapitre est actuellement programmée en classe de 3ème. Voici, extraite d'un manuel scolaire(*), la panoplie des armes que doit posséder un élève de cette classe.

1 Angle inscrit et arc intercepté

A, M, B sont trois points distincts d'un cercle $\mathcal{C}$ de centre O.
$\widehat{AMB}$ est un **angle inscrit** dans le cercle $\mathcal{C}$; il **intercepte** l'arc $\overset{\frown}{AB}$ situé à l'« intérieur » de cet angle.



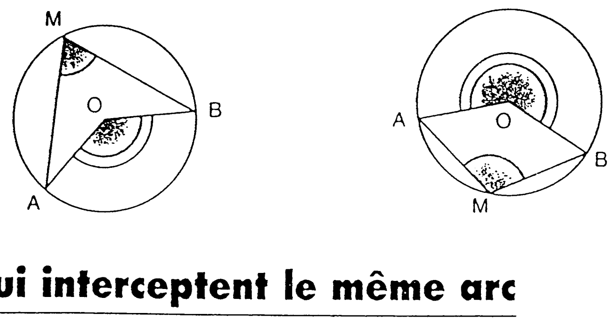
2 Angle inscrit et angle au centre associé

Sur les dessins ci-dessous nous avons indiqué par la même couleur l'angle $\widehat{AMB}$ inscrit dans un cercle de centre O et **l'angle au centre** $\widehat{AOB}$ **associé** à cet angle inscrit.

La mesure d'un angle inscrit est égale à la moitié de l'angle au centre associé.

$$\widehat{AMB} = \frac{1}{2}\widehat{AOB}$$

$$\widehat{AOB} = 2\widehat{AMB}$$

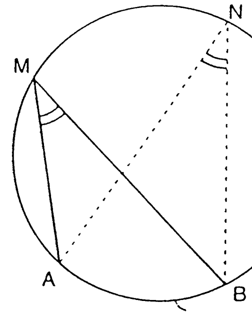


3 Angles inscrits qui interceptent le même arc

Si l'on sait que deux angles inscrits interceptent le même arc *alors on peut dire que* ces deux angles ont la même mesure.

Avec les notations de la figure :

$$\widehat{AMB} = \widehat{ANB}$$



(*) L'un des meilleurs du moment.

Nous allons maintenant présenter ce chapitre tel que nous souhaiterions qu'il fût. Pour ce qui concerne les pratiques actuelles, les commentaires viendront après. Et comme on peut s'en douter, ils ne seront pas des plus élogieux.

II - Cercles, secteurs au centre, secteurs périphériques.

1 - Rappel des acquis antérieurs

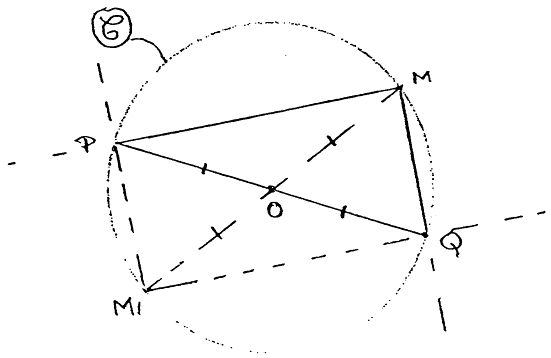
a - Première propriété

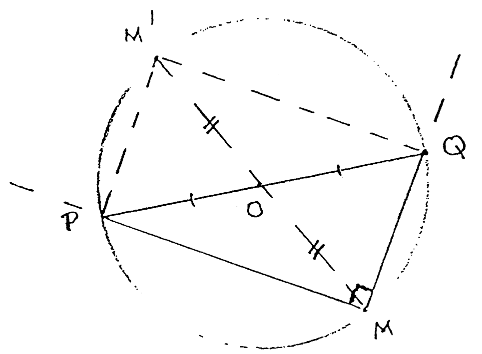
(P_1) : Etant donné un cercle $\mathcal{C}$, une corde diamétrale [P,Q] et un point M distinct de P et de Q, si on sait que M est un point de $\mathcal{C}$ alors on peut affirmer que le secteur $(\widehat{PMQ})$ est droit

b - Deuxième propriété (réciproque)

(P_2) : Etant donné un cercle $\mathcal{C}$, une corde diamétrale [P,Q] et un point M distinct de P et de Q, si on sait que le secteur $(\widehat{PMQ})$ est droit alors on peut affirmer que M est un point de $\mathcal{C}$

Pour établir chacun de ces résultats, on fait intervenir le symétrique M' de M par rapport au centre O du cercle $\mathcal{C}$.





Si M appartient à $\mathcal{C}$ alors M' appartient aussi à $\mathcal{C}$. Les diagonales [PQ] et [MM'] du quadrilatère PMQM' ont ainsi
- même milieu
- même mesure (même longueur)

Ce quadrilatère est donc un rectangle. Il s'ensuit que le secteur $(\widehat{PMQ})$ est droit.

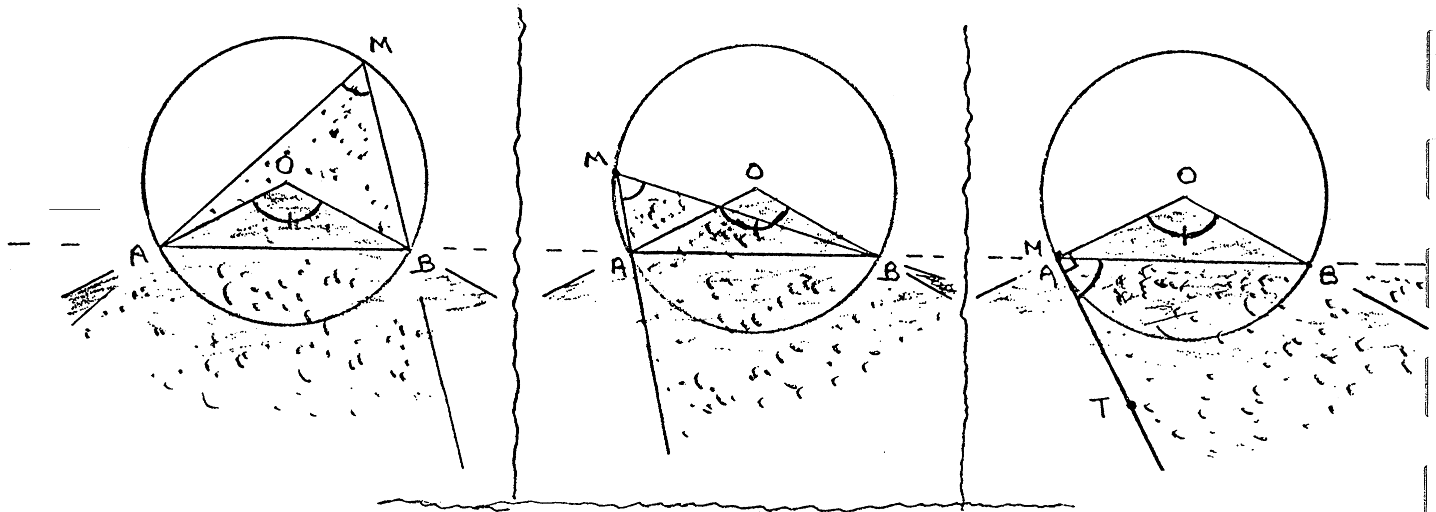
(c-q-f-d)

Si le secteur $(\widehat{PMQ})$ est droit alors les diagonales [PQ] et [MM'] du quadrilatère PMQM' ayant même milieu, ce quadrilatère est un parallélogramme qui a deux côtés consécutifs orthogonaux. C'est donc un rectangle. Par suite :
$OM = \frac{1}{2} MM' = \frac{1}{2} PQ$. Donc le point M appartient au cercle $\mathcal{C}$

(c-q-f-d)

2 - Travaux pratiques expérimentaux

a - Dans chacune des figures suivantes le segment [AB] est une corde non diamétrale d'un cercle $\mathcal{C}$ de centre O. Le point M est un point de ce cercle situé dans le même demi-plan de bord (AB) que le point O.



Pour chacune de ces figures :
mesurer le secteur $(\widehat{AOB})$ puis le secteur $\widehat{AMB}$ ou le secteur $(\widehat{TAB})$ lorsque M = A
Comparer ces mesures. Que constate-t-on ?

b - Reprendre les mêmes consignes que dans l'alinéa précédent en dessinant un autre cercle $\mathcal{C}$, une autre corde [AB] et en choisissant plusieurs points M. Quelle conjecture peut-on émettre si on compare les mesures des secteurs $(\widehat{AOB})$ et $(\widehat{AMB})$?

3 - Secteurs au centre et secteurs périphériques : définitions

Afin de contrôler la validité de la conjecture suscitée par les expériences précédentes, nous allons introduire un nouveau vocabulaire qui rend compte de la position du sommet d'un secteur par référence à un cercle $\mathcal{C}$ donné, de centre O donné.

a - Secteur au centre

On appelle secteur au centre tout(*) secteur dont le sommet est le point O

b - Secteur périphérique

On appelle secteur périphérique tout(*) secteur dont le sommet est un point du cercle $\mathcal{C}$ et dont les côtés recoupent ce cercle, l'un d'entre eux pouvant être une demi-tangente(**) à $\mathcal{C}$

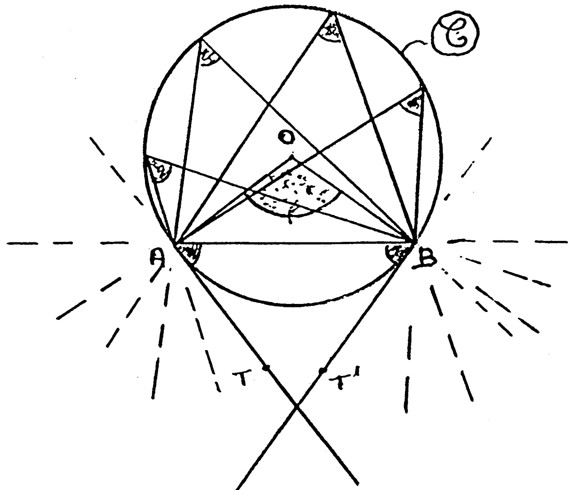
(*) "tout" signifie ici " n'importe quel"
(**) Une demi-droite est dite demi-tangente au cercle $\mathcal{C}$ lorsque son support est une tangente à $\mathcal{C}$ et que son origine est le point de contact de $\mathcal{C}$ avec cette tangente

c - Secteur au centre et secteurs périphériques associés

Etant donné un secteur au centre, il existe une infinité de secteurs périphériques qui contiennent exactement le même arc du cercle $\mathcal{C}$ que le secteur au centre donné.

On dit alors que chacun de ces secteurs est un secteur périphérique associé au secteur au centre donné.

Par exemple, chacun des secteurs périphériques représentés dans la figure ci-contre est associé au secteur au centre $(\widehat{AOB})$.
Tous ces secteurs contiennent exactement le "petit" arc $\widehat{AB}$ du cercle $\mathcal{C}$ - y compris $(\widehat{TAB})$ et $(\widehat{T'BA})$



Remarque

Chaque secteur au centre d'un cercle $\mathcal{C}$ admet une infinité de secteurs périphériques associés.

4. Théorème fondamental

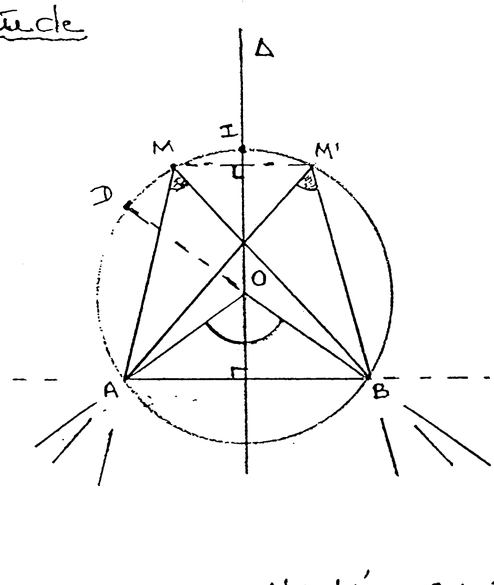
La mesure d'un secteur au centre d'un cercle est le double de celle d'un quelconque des secteurs périphériques qui lui sont associés.

Démonstration

• Préliminaire : réduction du champ d'étude

Soit un cercle $\mathcal{C}$, son centre O ; un secteur au centre, A et B les points d'intersection des côtés de ce secteur avec le cercle $\mathcal{C}$.

La figure formée par ce cercle et le secteur au centre $(\widehat{AOB})$ admet de toute évidence un axe de symétrie : la médiatrice Δ de la corde $[AB]$.

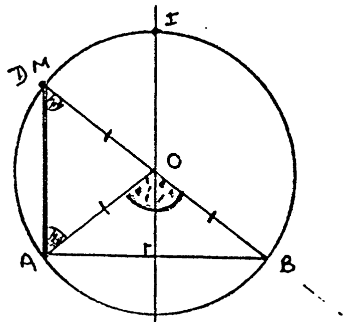


La réflexion d'axe Δ transformant un secteur périphérique $(\widehat{AMB})$ associé au secteur au centre $(\widehat{AOB})$ en un secteur périphérique $(\widehat{AM'B})$ associé à $(\widehat{AOB})$ et tel que $mes(\widehat{AM'B}) = mes(\widehat{AMB})$, on peut assurer l'intégralité de la démonstration en ne considérant que les secteurs périphériques $(\widehat{AMB})$ avec M élément de l'arc $\widehat{ADI}$ du cercle $\mathcal{C}$ - voir figure ci-dessus -

Ceci dit, nous sommes amenés à distinguer quatre cas de figure -

• **1er cas** - figure(1) : $M = D$ (D étant le point diamétralement opposé à B sur $\mathcal{C}$)

Le triangle DAB est alors rectangle en A et nous avons :



figure(1)

$\text{mes}(\widehat{AOB}) = 180 - \text{mes}(\widehat{AOM})$

$= \text{mes}(\widehat{AMB}) + \text{mes}(\widehat{MOA})$ car la somme des mesures des secteurs d'un triangle est égale à 180

$= 2\,\text{mes}(\widehat{AMB})$ car le triangle MOA est isocèle en O

• **2ème cas** - figure(2) : M est un point du "petit" arc $\overset{\frown}{DI}$, $M \neq D$

On investit deux fois le résultat précédent :

1°- dans le triangle MAN rectangle en A

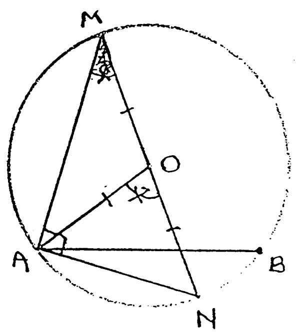


figure extraite de (2)

2°- dans le triangle MBN rectangle en B

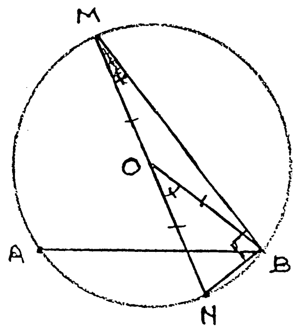


figure extraite de (2)

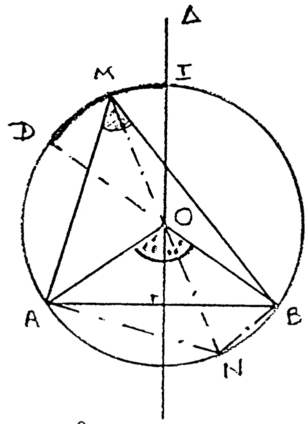


figure (2)

On a donc :

$\text{mes}(\widehat{AON}) = 2\,\text{mes}(\widehat{AMN})$ | $\text{mes}(\widehat{NOB}) = 2\,\text{mes}(\widehat{NMB})$

Il s'ensuit que : - voir maintenant figure (2) -

$\text{mes}(\widehat{AOB}) = \text{mes}(\widehat{AON}) + \text{mes}(\widehat{NOB}) = 2\,\text{mes}(\widehat{AMN}) + 2\,\text{mes}(\widehat{NMB}) = 2\left[(\widehat{AMN}) + (\widehat{NMB})\right]$

$= 2\,\text{mes}(\widehat{AMB})$

• **3ème cas** - figure(3) : M est un point du "petit" arc $\overset{\frown}{AD}$, $M \neq A$ et $M \neq D$

On investit encore deux fois le premier résultat :

1°- dans le triangle MAN rectangle en A

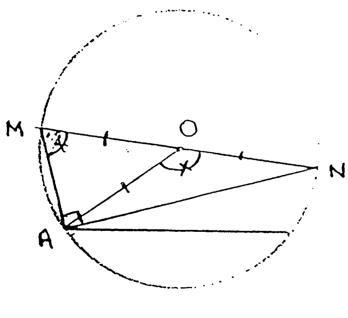


figure extraite de (3)

2°- dans le triangle MBN rectangle en B

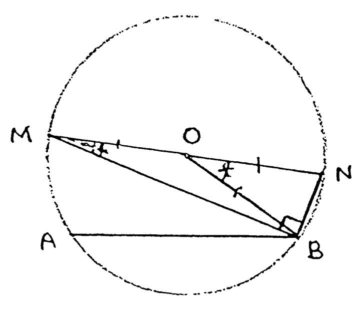


figure extraite de (2)

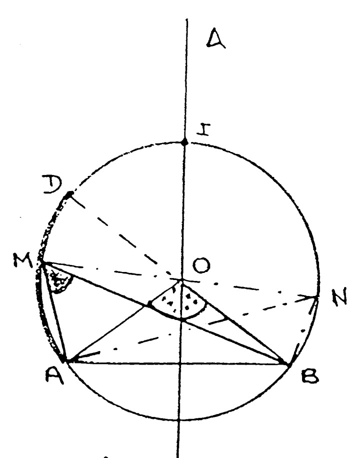


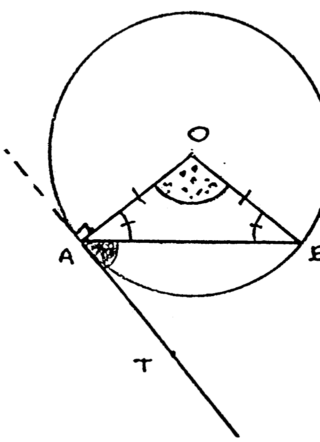
figure (3)

On obtient alors : - voir figure(3) et les figures extraites -

$\underline{mes(\widehat{AOB})} = mes(\widehat{AON}) - mes(\widehat{NOB}) = 2mes(\widehat{AMN}) - 2mes(\widehat{NMB}) = 2\left[mes(\widehat{AMN}) - mes(\widehat{NMB})\right]$

$= \underline{2mes(\widehat{AMB})}$

• __4ème cas__ - __figure(4)__ : __M = A__



Le côté [AT) du secteur périphérique $(\widehat{BAT})$ associé au secteur au centre $(\widehat{AOB})$ est alors une demi-tangente (en A) au cercle $\mathcal{C}$ - D'où : $mes(\widehat{OAT}) = 90$

Ceci dit, en considérant le triangle AOB, on a :

$\underline{mes(\widehat{AOB})} = 180 - \left[mes(\widehat{OAB}) + mes(\widehat{OBA})\right]$

$= 180 - 2mes(\widehat{OAB})$ .... car le triangle AOB est isocèle en O -

$= 2\left[90 - mes(\widehat{OAB})\right] = 2\left[mes(\widehat{OAT}) - mes(\widehat{OAB})\right]$

$= \underline{2mes(\widehat{BAT})}$

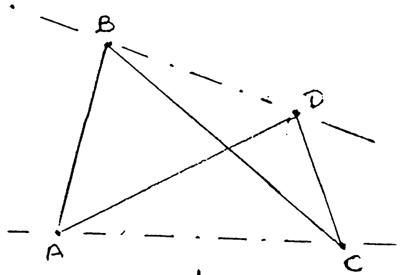
Ainsi, dans les quatre cas de figure qu'il nous restait à envisager, le résultat annoncé est "__théoriquement__" confirmé - Ce qui achève la démonstration du théorème fondamental -

II - __Quadrilatères inscrits dans un cercle : propriétés__

Dans la suite de ce chapitre, deux des trois types de quadrilatères vont jouer un rôle essentiel : les quadrilatères __croisés__ et les quadrilatères __convexes__

1- __Rappels concernant ces quadrilatères__

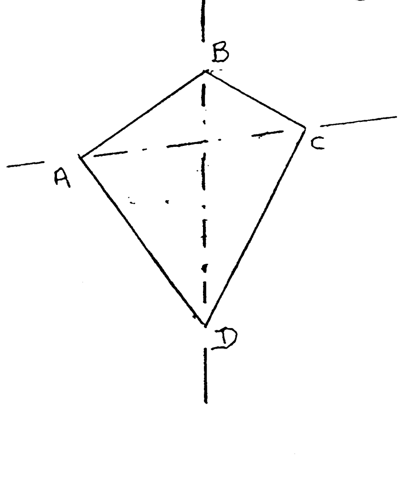
Soit un quadrilatère ABCD croisé ou convexe.



a - Les sommets A et C d'une part, B et D d'autre part sont dits __opposés__

b - On appelle __diagonales__ du quadrilatère ABCD

- Soit les droites (AC) et (BD)
- Soit les segments [AC] et [BD]



c - Dans un quadrilatère croisé (resp convexe) deux sommets __opposés__ sont (resp ne sont pas) situés dans le même demi-plan ayant pour bord la diagonale passant par les deux autres sommets -

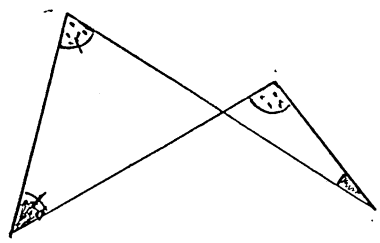
d - On dit qu'un quadrilatère (croisé ou convexe) est __inscrit__ dans un cercle __donné__ pour signifier que ses quatre sommets appartiennent à __ce__ cercle -

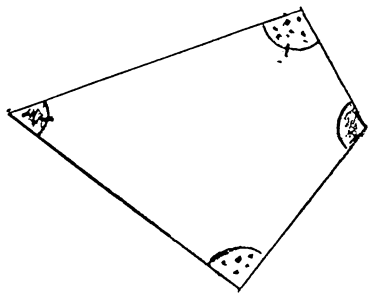
e - Remarque pratique

Conformément à la définition précédente, pour dessiner un quadrilatère (croisé ou convexe) inscrit dans un cercle, on commence d'abord par tracer le cercle puis on trace le quadrilatère.

2 - Secteurs d'un quadrilatère - Secteurs opposés

Sous le vocable « secteur d'un quadrilatère croisé ou convexe » on désigne les secteurs "codés" des figures suivantes :





Les secteurs dont les sommets sont des sommets opposés du quadrilatère sont appelés "secteurs opposés"

3 - Travaux pratiques expérimentaux

a - 1ère manipulation

1° Dessiner un quadrilatère croisé ABCD inscrit dans un cercle - Mesurer les secteurs de ce quadrilatère - Comparer leurs mesures -
2° Reprendre l'expérience précédente en se référant à une autre figure. Quelle conjecture peut-on émettre ?

b - 2ème manipulation

1° - Dessiner un quadrilatère convexe ABCD inscrit dans un cercle. Mesurer les secteurs de ce quadrilatère. Calculer $mes(\widehat{DAB}) + mes(\widehat{BCD})$ et $mes(\widehat{ABC}) + mes(\widehat{CDA})$.
2° - Reprendre l'expérience précédente en se référant à une autre figure. Quelle conjecture peut-on émettre ?

4 - Propriétés des secteurs opposés d'un quadrilatère inscrit dans un cercle

Soit un quadrilatère inscrit dans un cercle $\mathcal{C}$ de centre O.

a - Le quadrilatère est croisé

Une au moins de ses diagonales n'est pas un diamètre du cercle $\mathcal{C}$ (voir § II - 1 - c) - Notons cette diagonale [AC] et E le point d'intersection ~~avec l'autre diagonale [BD]~~ des côtés [AD] et [BC]

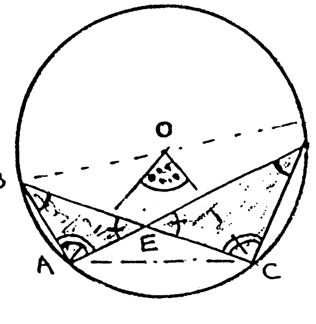


figure (1)

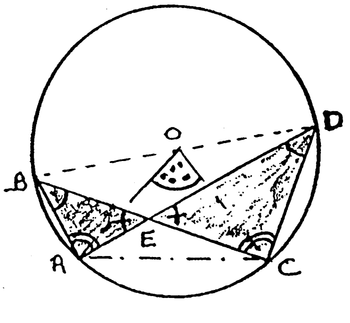


figure (2)

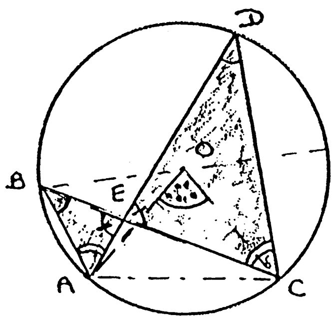


figure (3)

Nous avons, quel que soit le cas de figure :

- $mes(\widehat{ABC}) = \frac{1}{2} mes(\widehat{AOC})$
  $mes(\widehat{ADC}) = \frac{1}{2} mes(\widehat{AOC})$ } théorème fondamental – D'où : $\underline{mes(\widehat{ABC}) \overset{(i)}{=} mes(\widehat{ADC})}$
- Les secteurs $(\widehat{AEB})$ et $\widehat{CED}$ sont opposés par le sommet – D'où : $mes(\widehat{AEB}) \overset{(j)}{=} mes(\widehat{CED})$
- Considérons maintenant les triangles $B\hat{A}E$ et ECD – Il vient :

$mes(\widehat{BAE}) = 180 - [mes(\widehat{ABE}) + mes(\widehat{AEB})]$ ... car, dans le triangle AEB la somme des ------

$\quad = 180 - [mes(\widehat{EDC}) + mes(\widehat{CED})]$ car $\begin{cases} mes(\widehat{ABE}) = mes(\widehat{ABC}) \overset{(i)}{=} mes(\widehat{ADC}) = mes(\widehat{EDC}) \\ mes(\widehat{AEB}) \overset{(j)}{=} mes(\widehat{CED}) \end{cases}$

$\quad = mes(\widehat{ECD})$ ---------------- car, dans le triangle ECD, la somme des .....

Autrement dit : $\underline{mes(\widehat{BAD}) \overset{(k)}{=} mes(\widehat{BCD})}$

Les égalités (i) et (k) justifient le résultat suivant :

Les secteurs opposés d'un quadrilatère <u>croisé</u> inscrit dans un cercle ont <u>deux à deux la même mesure</u> (le même angle)

b. <u>Le quadrilatère est convexe</u> – <u>voir figure (4)</u> –

On investit deux fois le résultat précédent –

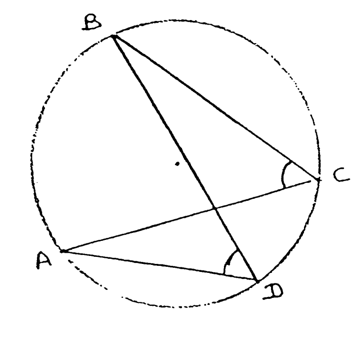


figure extraite de (4)

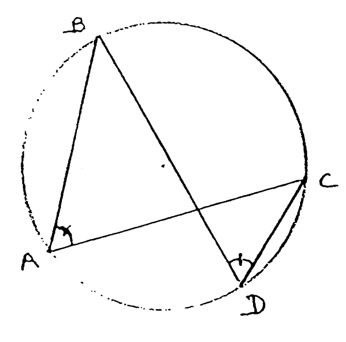


figure extraite de (4)

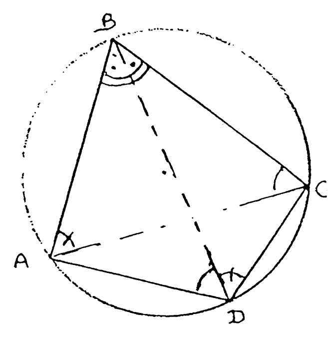


figure (4)

<u>On obtient ainsi</u>

$mes(\widehat{ADB}) = mes(\widehat{ACB})$	$mes(\widehat{BDC}) = mes(\widehat{BAC})$

Il s'ensuit que : voir maintenant figure (4)

$mes(\widehat{ADC}) = mes(\widehat{ADB}) + mes(\widehat{BDC}) = mes(\widehat{ACB}) + mes(\widehat{BAC})$

$\quad = 180 - mes(\widehat{ABC})$ .... car, dans le triangle ABC, la somme des ---- –

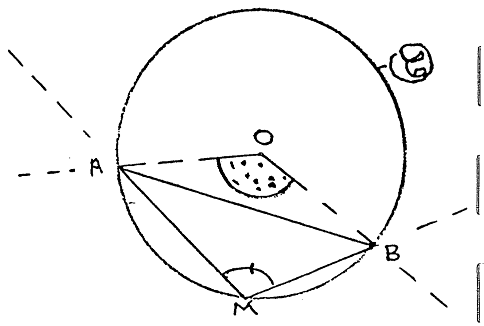
Les secteurs opposés $(\widehat{ABC})$ et $(\widehat{ADC})$ du quadrilatère convexe ABCD sont donc supplémentaires -

On établirait de la même manière que les secteurs $(\widehat{DAB})$ et $(\widehat{BCD})$ sont aussi supplémentaires - D'où le résultat suivant :

Les secteurs opposés d'un quadrilatère convexe inscrit dans un cercle sont deux à deux supplémentaires -

---

5 - Exercice d'application



Dans la figure ci-contre, le secteur $(\widehat{AMB})$ est un secteur périphérique qui n'est pas associé au secteur au centre $(\widehat{AOB})$
(le secteur $(\widehat{AMB})$ contient exactement le "grand" arc $\widehat{AB}$ alors que le secteur $(\widehat{AOB})$ contient exactement le "petit" arc $\widehat{AB}$)

Trouver une relation entre la mesure du secteur $(\widehat{AMB})$ et celle du secteur $(\widehat{AOB})$

Indication : on pourra faire intervenir un secteur périphérique associé au secteur au centre $(\widehat{AOB})$

III - Quadrilatères inscriptibles dans un cercle : conditions suffisantes

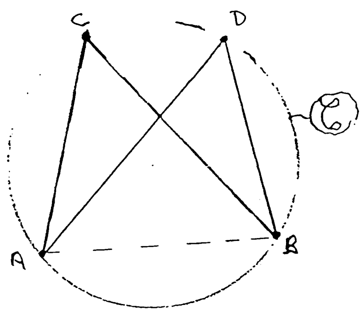
1 - Quadrilatère inscriptible dans un cercle

a - Definition

On dit qu'un quadrilatère donné est inscriptible dans un cercle pour signifier qu'on peut faire passer un cercle par ses quatre sommets

---

b - Remarque -



Etant donné un quadrilatère ABCD, traçons - par exemple - le cercle $\mathscr{C}$ circonscrit au triangle ABC. Lorsque le cercle $\mathscr{C}$ passe - ou semble passer - par le point D, on peut conjecturer que le quadrilatère ABCD est inscriptible - Mais pour donner une réponse catégorique, il reste à justifier "théoriquement" la conjecture précédente -

2 - Quadrilatères croisés inscriptibles dans un cercle : condition suffisante.

a - Exposé du problème

On se propose de porter réponse à la question suivante :

Etant donné un quadrilatère croisé ABCD, la condition " $mes(\widehat{ABC}) = mes(\widehat{ADC})$ " suffit-elle pour affirmer que ce quadrilatère est inscriptible dans un cercle ?

b - Exposé de la méthode mise en oeuvre

Implicitement, on vise ici à établir la propriété suivante :

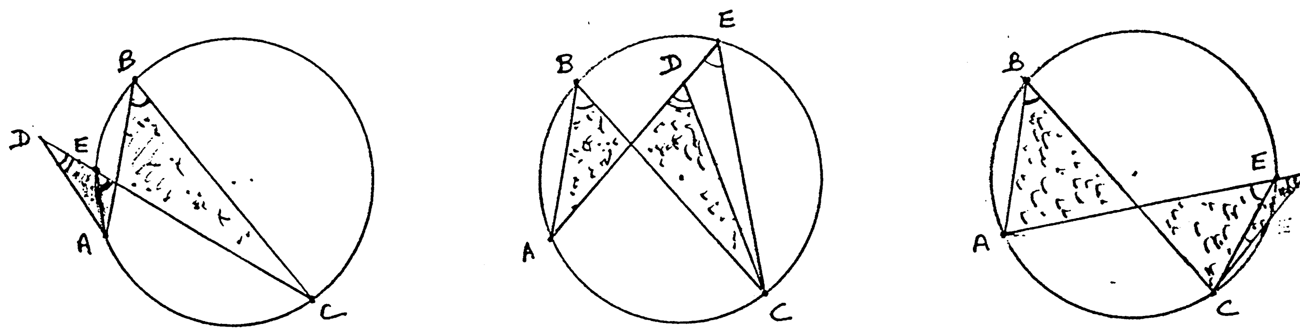
Etant donné un quadrilatère croisé ABCD, si $mes(\widehat{ABC}) = mes(\widehat{ADC})$ alors ce quadrilatère est inscriptible dans un cercle.

Or, comme on sait qu'une propriété de ce type et sa contraposée sont interchangeables, nous allons tenter d'établir sa contraposée :

Etant donné un quadrilatère croisé ABCD, si ce quadrilatère n'est pas inscriptible dans un cercle alors $mes(\widehat{ABC}) \neq mes(\widehat{ADC})$

c - Solution

On suppose donc que le quadrilatère croisé ABCD n'est pas inscriptible.
Soit $\mathcal{C}$ le cercle circonscrit au triangle ABC. L'une des demi-droites [AD) ou [CD) recoupe l'arc de cercle $\overset{\frown}{ABC}$ en un point noté E (*)



Alors :

- Les secteurs correspondants $(\widehat{ADC})$ et $(\widehat{AEC})$ ont leurs côtés à supports distincts non parallèles. En utilisant la contraposée de la propriété (P_7) - chapitre II, § IV - on peut affirmer que $mes(\widehat{ADC}) \neq mes(\widehat{AEC})$ (i)
- Le quadrilatère ABCE étant un quadrilatère croisé inscrit dans le cercle $\mathcal{C}$ on a : $mes(\widehat{ABC}) = mes(\widehat{AEC})$ (e)

Des relations (i) et (e), il découle que : $mes(\widehat{ABC}) \neq mes(\widehat{ADC})$ (c-q-f-d)

On peut donc conclure : La condition " $mes(\widehat{ABC}) = mes(\widehat{ADC})$ " suffit pour affirmer que le quadrilatère croisé ABCD est inscriptible.

(*) L'existence de E est considérée ici comme allant de soi ... sinon on devrait user de propriétés topologiques qui sont inabordables à ce niveau.

On montrerait de la même manière que la condition " $mes(\widehat{BAD}) = mes(\widehat{BCD})$ " suffit pour affirmer que le quadrilatère croisé ABC est inscriptible dans un cercle -
On peut donc énoncer, d'une façon générale :

Pour qu'un quadrilatère croisé soit inscriptible dans un cercle, il suffit qu'il ait deux secteurs opposés de même mesure -

3- Quadrilatères convexes inscriptibles dans un cercle : condition suffisante

a- Exposé du problème

Il s'agit de répondre à la question suivante :

Etant donné un quadrilatère convexe ABCD, la condition " $mes(\widehat{ABC}) + mes(\widehat{ADC}) = 180$ " suffit-elle pour affirmer que ce quadrilatère est inscriptible dans un cercle ?

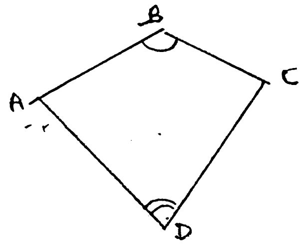


figure (1)

b- Exposé de la méthode mise en oeuvre -

Hormis le cas particulier où $mes(\widehat{ABC}) = 90$ qui est facile à gérer, nous allons prouver que l'une au moins des demi-droites [AD) et [CD) coupe le cercle circonscrit au triangle ABC

Ceci fait, nous appliquerons la méthode précédement employée pour un quadrilatère croisé -

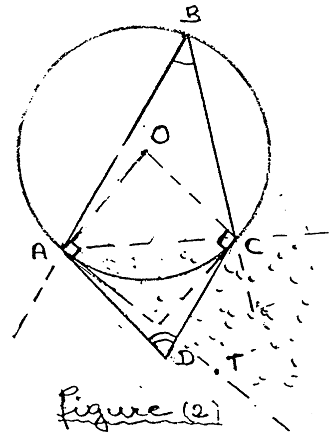


figure (2)

c- Solution

On considère un quadrilatère convexe ABCD vérifiant la condition (c) : $mes(\widehat{ABC}) + mes(\widehat{ADC}) = 180$

Deux éventualités sont à observer :

1°- $mes(\widehat{ABC}) = 90$ - Dans ce cas, on a : $mes(\widehat{ADC}) = 90$
Il s'ensuit que le quadrilatère convexe ABCD est inscriptible dans le cercle de diamètre [AC] - voir propriété (P_2) - § (I-1) -

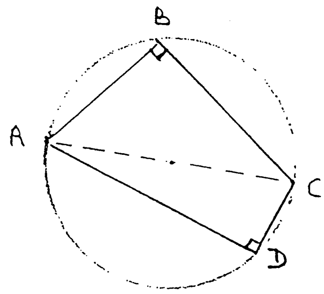


figure (3)

2°- $mes(\widehat{ABC}) \neq 90$ - Dans ce cas, la condition (c) entraîne que, parmi les secteurs opposés $(\widehat{ABC})$ et $(\widehat{ADC})$, l'un est aigu et l'autre obtus -
Quitte à permuter les lettres B et D, on peut toujours considérer que c'est le secteur $(\widehat{ABC})$ qui est aigu -
Nous allons maintenant montrer que la demi-droite [AD) coupe le cercle $\mathcal{C}$ circonscrit au triangle ABC -

Désignons par O le centre du cercle $\mathcal{C}$ et par T un point tel que $(\widehat{CAT})$ soit un secteur périphérique associé au secteur centre $(\widehat{AOB})$

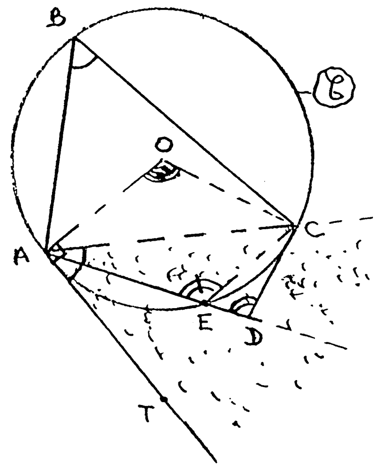


figure (4)

En considérant le triangle ADC, on a :

$mes(\widehat{ADC}) + mes(\widehat{DCA}) + mes(\widehat{CAD}) = 180$

$= mes(\widehat{ADC}) + mes(\widehat{ABC})$

↑ d'après la condition (c)

On en déduit :

$mes(\widehat{DCA}) + mes(\widehat{CAD}) = mes(\widehat{ABC})$

$= \frac{1}{2} mes(\widehat{AOC}) = mes(\widehat{CAT})$

d'où on tire : $mes(\widehat{CAD}) < mes(\widehat{CAT})$ ... inégalité qui montre que le point D est <u>intérieur</u> au secteur $(\widehat{CAT})$ - Il s'ensuit que la demi-droite [AD) coupe le "petit" arc $\widehat{AC}$ du cercle $\mathcal{C}$ en un point noté E

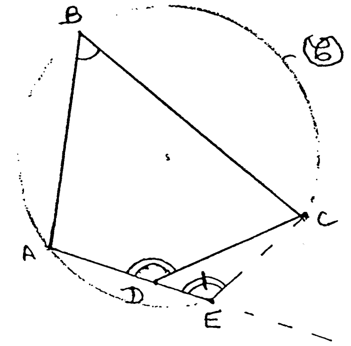


figure (5)

<u>Ceci fait</u>, on emploie la " <u>méthode par contraposée</u> " comme pour un quadrilatère croisé.

<u>On suppose donc</u> que le quadrilatère convexe ABCD <u>n'est pas inscriptible</u> dans le cercle $\mathcal{C}$ - fig (4) et (5).

<u>Alors</u> :

- Les secteurs <u>correspondants</u> $(\widehat{ADC})$ et $(\widehat{AEC})$ ont leurs côtés à supports distincts <u>non parallèles</u> - On peut donc affirmer que : $mes(\widehat{ADC}) \neq mes(\widehat{AEC})$ (i)

- Le quadrilatère ABCE étant un <u>quadrilatère convexe inscrit</u> dans le cercle $\mathcal{C}$ on a : $mes(\widehat{ABC}) + mes(\widehat{AEC}) = 180$ (e)

Des relations (i) et (e), il découle que : <u>$mes(\widehat{ABC}) + mes(\widehat{ADC})$</u> $\neq 180$

On vient donc d'établir la propriété suivante :

Etant donné un quadrilatère convexe ABCD, <u>si</u> ce quadrilatère n'est pas inscriptible dans un cercle alors $mes(\widehat{ABC}) + mes(\widehat{ADC}) \neq 180$

On peut alors remplacer cette propriété par sa contraposée :

Etant donné un quadrilatère convexe ABCD, <u>si</u> $mes(\widehat{ABC}) + mes(\widehat{ADC}) = 180$ <u>alors</u> ce quadrilatère est inscriptible dans un cercle.

<u>Autrement dit</u>, la condition " les secteurs opposés $(\widehat{ABC})$ et $(\widehat{ADC})$ sont supplémentaires " <u>suffit</u> pour affirmer que le quadrilatère convexe ABCD est inscriptible dans un cercle. On a donc répondu à la question initialement posée.

On établirait de même que la condition " les secteurs opposés $(\widehat{BAD})$ et $(\widehat{BCD})$ sont supplémentaires suffit pour parvenir à la même conclusion

On peut donc énoncer, d'une façon générale :

Pour qu'un quadrilatère convexe soit inscriptible dans un cercle, il suffit qu'il ait deux secteurs opposés supplémentaires

Commentaire

La démonstration concernant les quadrilatères convexes inscriptibles est délicate. On pourra donc admettre le résultat précédent en classe de troisième.

On peut aussi envisager de reporter en classe de seconde toute l'étude du paragraphe III.

IV. Exercices faisant intervenir la cocyclicité de quatre points. Exemples.

1. Points cocycliques

On dit que quatre points sont cocycliques pour signifier que ces points appartiennent à un même cercle.

2. Résumé des résultats acquis concernant les quadrilatères

Ces résultats peuvent être formulés de la façon suivante :

a. Propriétés des quadrilatères inscrits.

(P_3) : Etant donné un quadrilatère croisé, si ce quadrilatère est inscrit dans un cercle alors ses secteurs opposés ont deux à deux la même mesure

(P_4) : Etant donné un quadrilatère convexe, si ce quadrilatère est inscrit dans un cercle alors ses secteurs opposés sont deux à deux supplémentaires

b. Conditions suffisantes pour qu'un quadrilatère soit inscriptible dans un cercle

(P_5) : Etant donné un quadrilatère croisé, si ce quadrilatère a deux secteurs opposés de même mesure alors ce quadrilatère est inscriptible dans un cercle

(P_6) : Etant donné un quadrilatère convexe, si ce quadrilatère a deux secteurs opposés supplémentaires alors ce quadrilatère est inscriptible dans un cercle

Désormais, nous sommes en mesure d'aborder des exercices où intervient la cocyclité de quatre points.

3 - Un petit échantillon d'exercices

Nous proposons ici trois exercices dont l'objectif consiste à établir :
- le parallélisme de deux droites
- l'alignement de trois points
- la cocyclicité de quatre points -

a - Exercice (1)

Montrer que, dans les deux figures suivantes, les droites (PQ) et (P'Q') sont parallèles

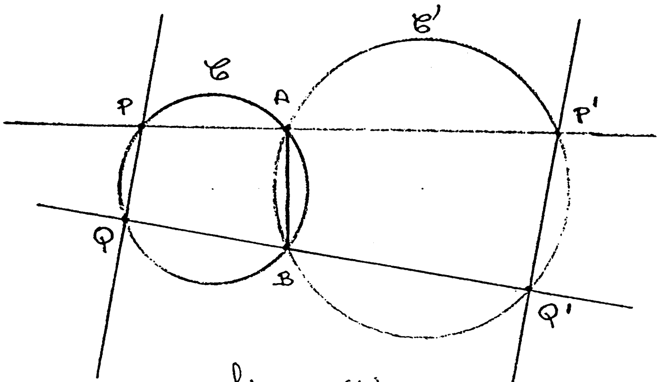


figure (1)

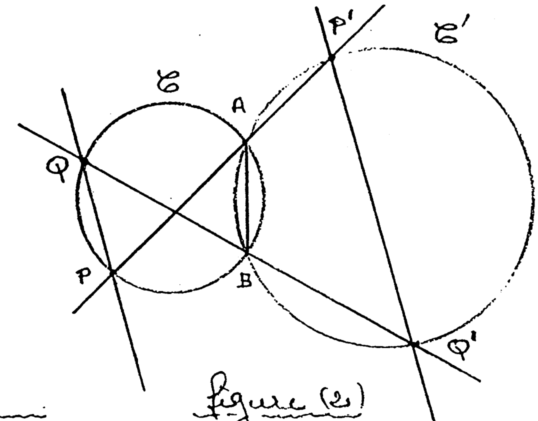


figure (2)

Indication : Dans la figure (1), on pourra faire intervenir un point R tel que les secteurs $(\widehat{RPQ})$ et $(\widehat{AP'Q'})$ soient correspondants.

Commentaire

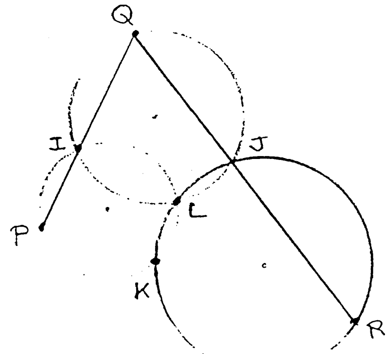
Cet exercice traite deux cas de figure d'un exercice plus "étoffé" (7 cas de figure) - Pour donner une solution valable pour tous les cas de figure, il faut disposer de l'outil "angle d'un couple de vecteurs non nuls" plus performant que l'outil "angle de secteur" - voir fascicule publié par l'irem de Bordeaux -

b - Exercice (2) :

Montrer que, dans la figure ci-contre les points P, K et R sont alignés -

Indication : Tracer les droites (LI), (LJ) et (LK)

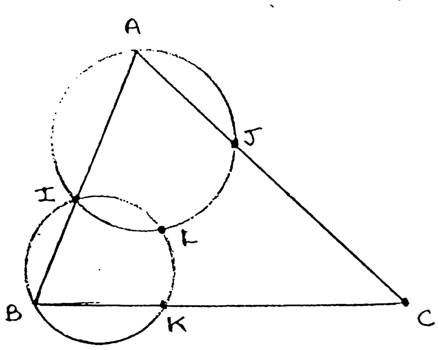
Il s'agit alors d'établir que les secteurs adjacents $(\widehat{PKL})$ et $(\widehat{LKR})$ sont ..



c - Exercice (3)

Montrer que dans la figure ci-contre les points C, K, L et J sont cocycliques

Indication : Tracer les droites (LI), (LJ) et (LK)



Commentaires

1- Sur la terminologie « angle inscrit dans un cercle »

Rappelons une fois encore qu'un angle n'est pas une figure géométrique mais un concept abstrait lié à la figure géométrique "secteur du plan" On a donc employé le mot "angle" à la place de "secteur" ce qui constitue une confusion regrettable qu'il vaut mieux éviter -

Ceci fait, la locution "secteur inscrit dans un cercle" peut être comparée à celle de "polygone inscrit <u>dans</u> un cercle" - Chacun sait qu'un tel polygone a ses sommets situés sur le cercle et qu'il est contenu dans le disque ayant pour bord le cercle considéré - Cette dernière propriété fait que la locution "polygone inscrit <u>dans</u> un cercle" est cohérente - On est maintenant mieux à même de comprendre que celle de "secteur inscrit <u>dans</u> un cercle" est <u>abusive</u> puisque, en aucun cas un secteur ne peut être contenu dans un disque -

2- Sur le codage des figures

Voici les deux types de figures codées - figures (1) et (2) - qui agrémentent le chapitre « angle inscrit, angle au centre associé » des divers manuels scolaires de la classe de 3ième qui sont passés par nos mains - Nous avons délibérément complété ce lot par la figure (3) qui assure la transition entre les deux premières -

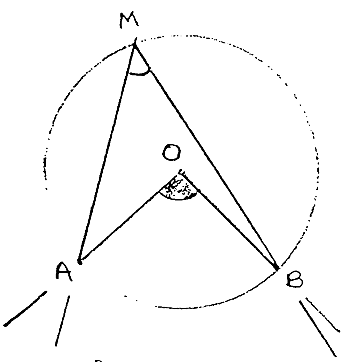


figure (1)

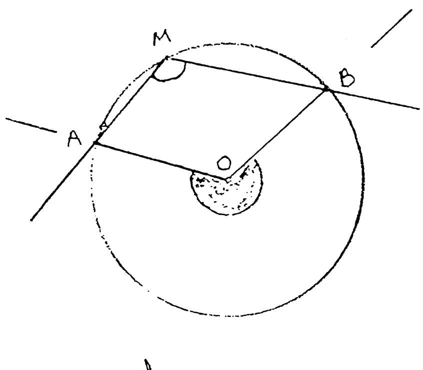


figure 2

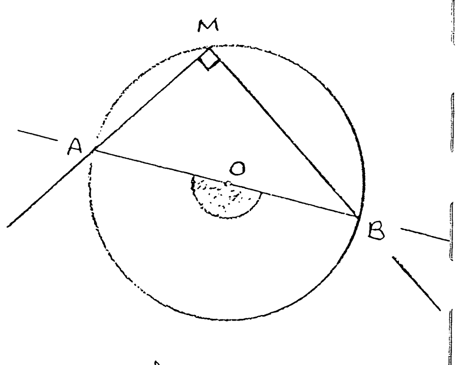


figure (3)

Si la "lecture" de la figure (1) ne nous pose pas de problème, il n'en n'est pas de même de celle des figures (2) et (3) - Comment expliciter de façon précise .... et <u>fondée</u> les codages de ces deux dernières figures ?

Lorsqu'on se reporte à la définition d'un secteur du plan $\mathcal{P}$ adoptée au début de cet exposé, il est clair que cette dernière question n'a pas de réponse. Sérieux dilemme ! .

Il devenait nécessaire de perturber l'ordonnancement de ce chapitre en introduisant d'abord le concept " secteur au centre " puis celui de " secteur périphérique associé ". C'est ce que nous avons fait.

A ceux de nos lecteurs qui seraient offusqués par cette dernière terminologie, nous devons faire remarquer que le qualificatif " périphérique " est de nos jours très utilisé, notamment en milieu urbain. La plupart de nos élèves ne seront donc pas surpris de le voir apparaître dans la situation présente. On peut même s'attendre à ce que certains d'entre eux instaurent des formulations abrégées telles que, par exemple : « $(\widehat{AMB})$ étant un " périf " associé à $(\widehat{AOB})$, on a : $mes(\widehat{AMB}) = \frac{1}{2} mes(\widehat{AOB})$ ».
Amender l'enseignement des mathématiques tout en tirant profit de l'enrichissement de la langue française ne peut raisonnablement pas desservir notre discipline.

3. Conclusion

Il ne reste plus qu'à dresser un rapide inventaire des terminologies non fondées que perpétuent les manuels scolaires : angle saillant, angle rentrant, angle inscrit et angle au centre associé, angles inscrits interceptant le même arc, ...

Le fait que nous n'ayons utilisé jusqu'ici aucune de ces expressions prouve que leur disparition n'est pas pénalisante pour les mathématiques puisque nous avons obtenus tous les résultats classiques visés, et ce, sans complications abusives. Bien au contraire, l'ensemble y gagne en cohésion, en clarté.

Il est donc temps, nous semble-t-il, de transférer ces locutions périmées dans les manuels d'Histoire des mathématiques. Si tel est le cas, elles ne seront pas les premières à avoir fait le voyage.

Chapitre ⑤

Rapport de projection orthogonale d'un secteur aigu
Cosinus d'un angle aigu

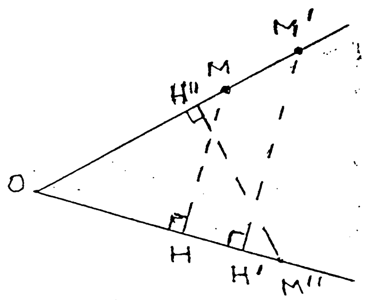
Ce chapitre est actuellement programmé en classe de quatrième. Comme son titre l'indique, il a pour objet d'introduire le concept "cosinus d'un angle aigu" via celui de "rapport de projection orthogonale d'un secteur aigu".

Or la mise en place de cette dernière notion nécessite que les conditions suivantes soient satisfaites.

Etant donné un secteur aigu de sommet O et un point M d'un de ses côtés, $M \neq O$, le rapport $\frac{OH}{OM}$ est indépendant :

1° de la position du point M sur l'un des côtés du secteur

2° du côté du secteur sur lequel est placé le point M



Dès lors, on peut adopter deux démarches :

- soit institutionnaliser l'invariance du rapport $\frac{OH}{OM}$ après une série d'expériences.
- Soit établir l'invariance de ce rapport. Ce qui revient à dire que, dans un premier temps, nous aurons à établir une "sous-propriété de Thalès" pour des triangles rectangles homothétiques.

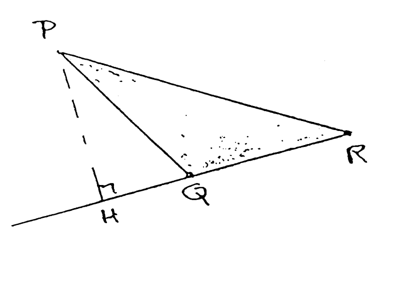
• La première de ces démarches nous semble inacceptable car elle mutile de façon abusive les mathématiques.

• Quant à la seconde, elle s'avère au départ aussi coûteuse que celle qui consiste à établir la propriété de Thalès pour des triangles homothétiques quelconques ; propriété abordée en classe de troisième.

Nous allons donc, en préliminaire, donner une démonstration de cette fameuse "propriété de Thalès ($3^{ème}$)". Elle met en oeuvre l'outil "mesure d'une surface triangulaire".

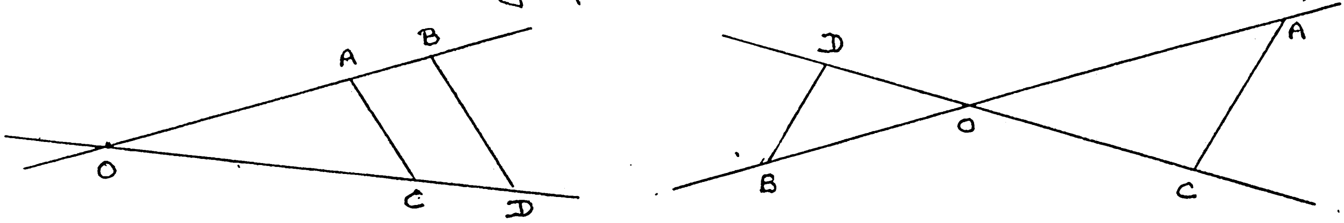
L'unité d'aire en usage dans le plan $\mathcal{P}$ étant celle d'un carré dont un des côtés a pour longueur l'unité de longueur choisie pour le plan $\mathcal{P}$, on rappelle que :

$$\boxed{mes(PQR) = \frac{1}{2}\ QR \times PH}$$



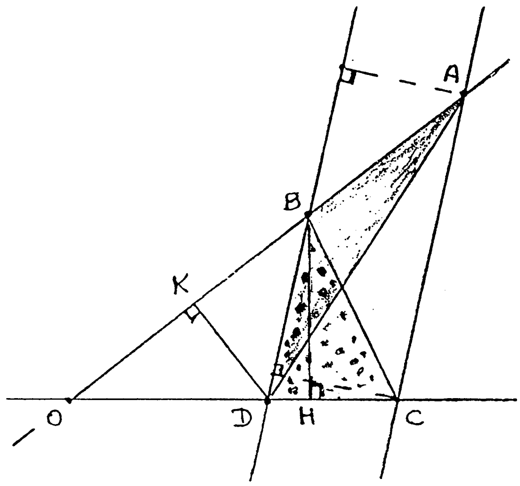
I- Préliminaire : propriété de Thalès (3ème)

Etant donné deux triangles $\begin{cases} OAC \\ OBD \end{cases}$ ayant deux côtés communs,



si leurs troisièmes côtés sont parallèles alors $\dfrac{OA}{OB} = \dfrac{OC}{OD}$

Démonstration



1er cas de figure : $O \notin [AB]$

Quitte à permuter au besoin les lettres A et B et donc les lettres C et D, on peut toujours supposer que $OB < OA$

• Nous avons alors, du fait que $(AC) \parallel (BD)$:

mes(ABD) = mes(CBD) car les triangles ABD et CBD ont leurs hauteurs relatives à leur côté commun qui ont la même mesure.

On en déduit :

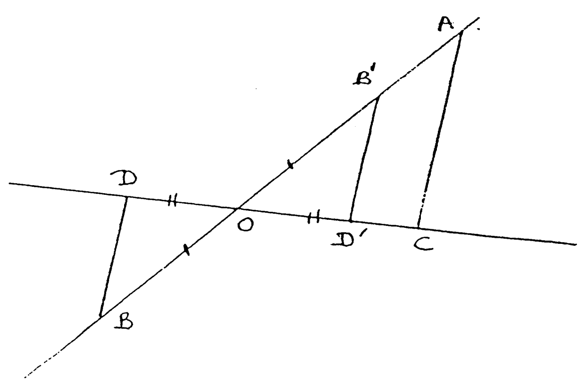
mes(OAD) = mes(OBC) (e)

• Nous avons ensuite, d'une part : $\dfrac{\text{mes}(OAD)}{\text{mes}(OBD)} = \dfrac{\frac{1}{2}OA \times DK}{\frac{1}{2}OB \times DK} = \dfrac{OA}{OB}$

d'autre part, $\underbrace{\text{d'après l'égalité (e)}}$: $\dfrac{\text{mes}(OAD)}{\text{mes}(OBD)} = \dfrac{\text{mes}(OBC)}{\text{mes}(OBD)} = \dfrac{\frac{1}{2}OC \times BH}{\frac{1}{2}OD \times BH} = \dfrac{OC}{OD}$

On en déduit immédiatement le résultat attendu : $\boxed{\dfrac{OA}{OB} = \dfrac{OC}{OD}}$

2ème cas de figure : $O \in [AB]$



On se ramène au cas précédent en mettant en oeuvre la symétrie de centre O

Nous avons : $\begin{cases} OB = OB' \text{ (i) et } OD = OD' \text{ (ii)} \\ (B'D') \parallel (BD) \end{cases}$

on en déduit : $(B'D') \parallel (AC)$

puis : $\dfrac{OA}{OB'} = \dfrac{OC}{OD'}$ cas de figure (1)

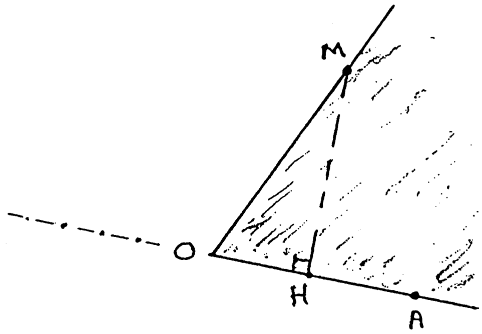
d'où on tire, compte tenu des égalités (i) et (ii) : $\boxed{\dfrac{OA}{OB} = \dfrac{OC}{OD}}$ ce qui achève la démonstration.

II - Rapport de projection orthogonale d'un secteur aigu

1- Un petit détail de vocabulaire

Etant donné un secteur aigu $(\widehat{AOM})$, le projeté orthogonal H du point M sur la droite (OA) est un point, autre que O, du côté [OA) du secteur donné.

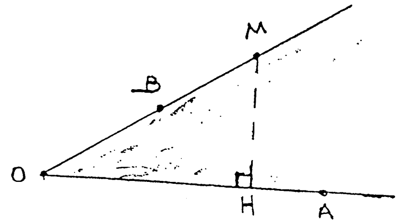
Par souci de commodité, nous dirons que le point H est le projeté orthogonal du point M sur "le côté [OA)"



2- Propriété mettant en jeu un secteur aigu et la projection orthogonale.

Les données :

Un secteur aigu $(\widehat{AOB})$ et un point M, autre que O, de l'un de ses côtés.



Les résultats :

En désignant par H le projeté orthogonal du point M sur l'autre côté de ce secteur, le rapport $\frac{OH}{OM}$ est indépendant :

1°- de la position du point M sur l'un des côtés du secteur

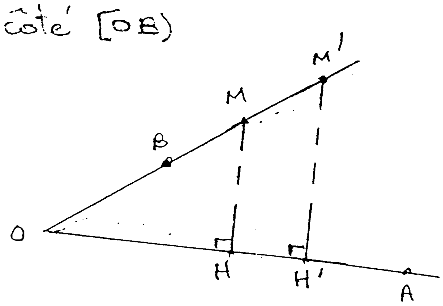
2°- du côté du secteur sur lequel est placé le point M.

Démonstration

Supposons, par exemple, que M soit un point du côté [OB)

1ère partie

Soit M' un point du côté [OB) distinct de O et de M, H' le projeté orthogonal de M' sur le côté [OA)



En se référant à la propriété de Thalès,

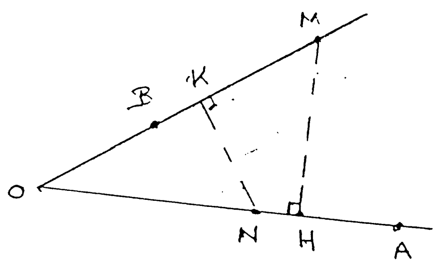
on a : $\frac{OH'}{OH} = \frac{OM'}{OM}$.

On en déduit : $\frac{OH'}{OM'} = \frac{OH}{OM}$ ce qui démontre le premier résultat annoncé.

2ème partie

Soit N un point autre que O du côté [OA),

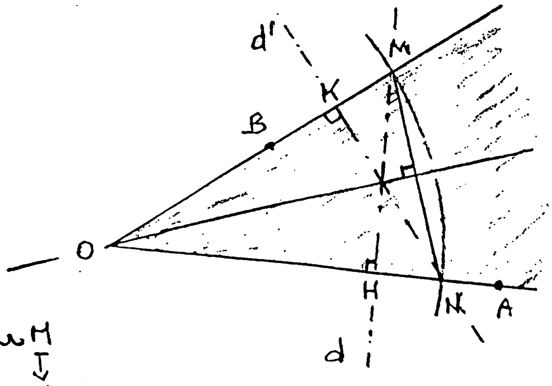
K son projeté orthogonal sur le côté [OB).



Pour comparer le rapport $\frac{OK}{ON}$ au rapport $\frac{OH}{OM}$

on peut, compte tenu du résultat précédent, choisir arbitrairement le point M sur le côté [OB) pourvu que M soit différent du point O.

Prenons alors le point M tel que OM = ON et désignons par Δ l'axe de symétrie du triangle OMN isocèle en O -



La réflexion S_Δ d'axe Δ transforme alors :

- le point M en le point N
- la droite (OA) en la droite (OB)
- la droite d orthogonale à (OA) et passant par M

en la droite d' ---------- (OB) ---------- N

situation que l'on résume par le schéma : $(OA) \xrightarrow{S_\Delta} (OB)$
$d \longmapsto d'$

Il s'ensuit que le transformé du point H - qui appartient à la fois aux droites (OA) et d - est donc un point qui appartient à la fois aux droites (OB) et d' - Ce transformé est donc le point K

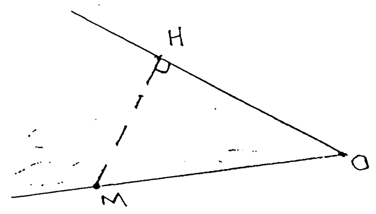
Dès lors, le schéma : $[OH] \xrightarrow{S_\Delta} [OK]$ prouve que OH = OK car une réflexion transforme un segment en un segment de même mesure -

On a donc finalement : $\dfrac{OK}{ON} = \dfrac{OH}{OM}$ ce qui démontre le deuxième des résultats annoncés -

3 - Rapport de projection orthogonale d'un secteur aigu : définition

Elle est légitimée par la propriété précédente -

Le rapport de projection orthogonale d'un secteur aigu de sommet O est le nombre $\dfrac{OH}{OM}$, M désignant un point, autre que O, de l'un des côtés de ce secteur et H le projeté orthogonal de M sur l'autre côté.



Remarque

Dans le triangle OHM rectangle en H, on a : OH < OM - D'où le résultat : $\boxed{0 < \dfrac{OH}{OM} < 1}$

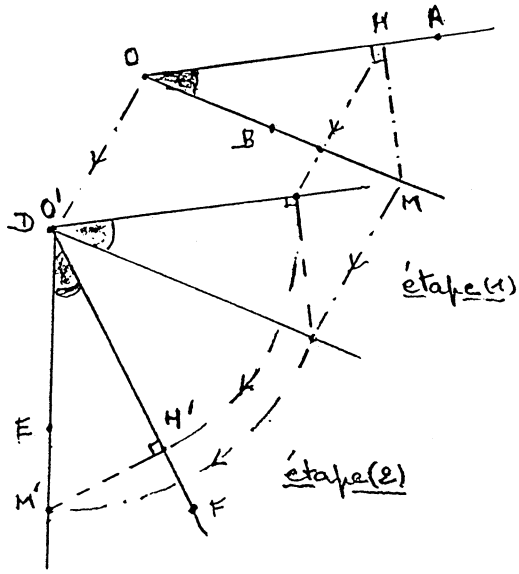
III - Propriétés du rapport de projection orthogonale d'un secteur aigu.

Elles sont au nombre de trois -

1 - Propriété (P_1)

Etant donné deux secteurs aigus $(\widehat{AOB})$ et $(\widehat{EDF})$ de même mesure (donc superposables), soit M un point autre que A du côté [OB) du secteur $(\widehat{AOB})$, H le projeté orthogonal de M sur le côté [OA) de ce secteur -

Sur une feuille de papier calque (*), reproduisons le secteur ($\widehat{AOB}$) ainsi que le triangle OHM puis amenons la reproduction du secteur ($\widehat{AOB}$) sur le secteur ($\widehat{EDF}$) - La reproduction du triangle OHM occupe alors la position O'H'M'



On a alors de façon banale : $\frac{O'H'}{O'M'} = \frac{OH}{OM}$

Autrement dit, le rapport de projection orthogonale du secteur ($\widehat{EDF}$) est égal à celui du secteur ($\widehat{AOB}$)

On tiendra désormais pour acquise la propriété suivante :

(P1) : Etant donné deux secteurs aigus, <u>si</u> ces secteurs ont le même angle (la même mesure) <u>alors</u> ces secteurs ont le même rapport de projection orthogonale.

2- <u>Propriété (P2)</u> (réciproque de (P1))

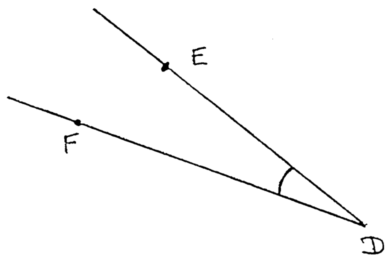
On se propose ici "d'établir" la propriété suivante :

(P2) : Etant donné deux secteurs aigus, <u>si</u> ces secteurs ont le même rapport de projection orthogonale <u>alors</u> ces secteurs ont le même angle (la même mesure)

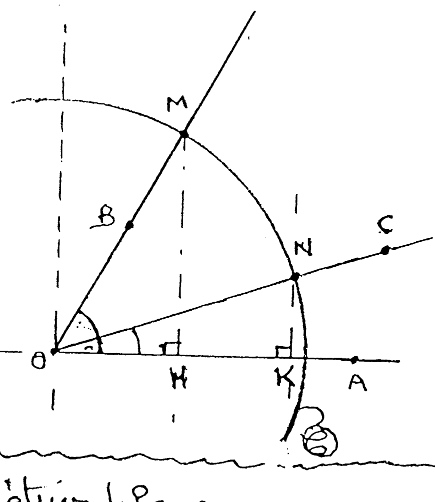
<u>Démonstration</u>

On utilise la méthode par contraposée

Etant donné deux secteurs aigus ($\widehat{AOB}$) et ($\widehat{EDF}$), <u>supposons que</u> $\widehat{AOB} \neq \widehat{EDF}$ (mes($\widehat{AOB}$) $\neq$ mes($\widehat{EDF}$))



Soit C un point du demi-plan de bord (OA) contenant le point B tel que $\widehat{AOC} = \widehat{EDF}$. (*)
Les secteurs ($\widehat{AOB}$) et ($\widehat{AOC}$) n'ayant pas la même mesure il s'ensuit que leurs côtés [OB) et [OC) sont distincts - Désignons alors par M et N les points d'intersection de [OB) et [OC) avec <u>un</u> cercle $\mathcal{C}$ centré en O et par H et K les projetés orthogonaux des points M et N sur le côté commun aux secteurs ($\widehat{AOB}$) et ($\widehat{AOC}$).



Il est clair que, d'une part : ON = OM

(*) Le papier calque remplace ici les inaccessibles isométries planes -

d'autre part : $OK \neq OH$ (*)

On en déduit immédiatement : $\frac{OK}{ON} \neq \frac{OH}{OM}$ ce qui prouve que le secteur $(\widehat{AOC})$ n'a pas le même rapport de projection orthogonale que le secteur $(\widehat{AOB})$ -

Il reste maintenant à rappeler que, d'après la propriété (P_1), le secteur $(\widehat{EDF})$ a le même rapport de projection que le secteur $(\widehat{AOC})$ pour conclure :

« les secteurs $(\widehat{AOB})$ et $(\widehat{EDF})$ n'ont pas le même rapport de projection orthogonale »

Nous venons donc d'établir la propriété suivante :

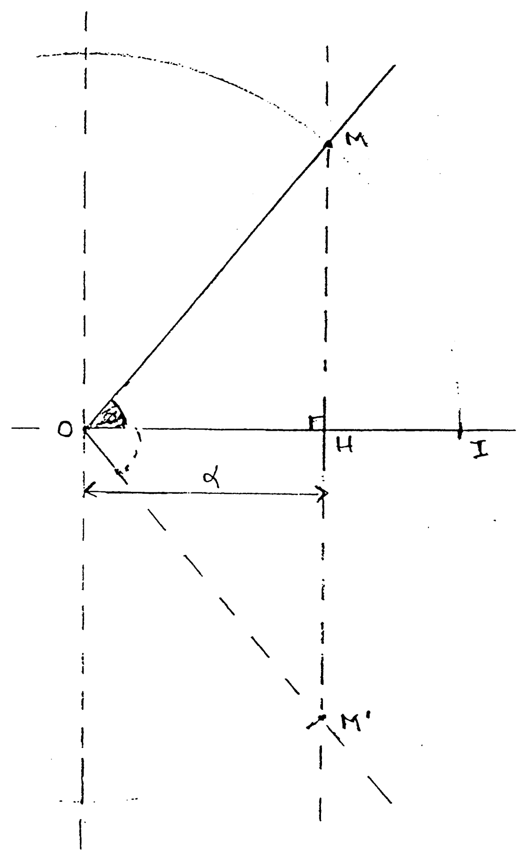
· Etant donné deux secteurs aigus, <u>si</u> ces secteurs n'ont pas le même angle <u>alors</u> ces secteurs n'ont pas le même rapport de projection orthogonale -

Pour finir, en remplaçant cette propriété par sa contraposée, on obtient la propriété (P_2) qui se trouve ainsi "démontrée" -

3 - <u>Propriété (P_3)</u> -

(P_3) : Pour tout nombre α vérifiant $0 < \alpha < 1$, on peut construire <u>au moins un</u> secteur <u>aigu</u> du plan $\mathcal{P}$ dont le rapport de projection orthogonale est égal à α

<u>Démonstration</u>



Soit α un nombre vérifiant $0 < \alpha < 1$, un segment $[OI]$ de mesure 1 (la figure ci-contre est construite en prenant pour unité de longueur cinq centimètres)

Désignons par H le point du segment $[OI]$ tel que $OH = \alpha$; par M l'un des points d'intersection de l'orthogonale en H à la droite (OI) et du cercle $\mathcal{C}$ centré en O et passant par I

On a alors : $OM = 1$ puis $\frac{OH}{OM} = \frac{\alpha}{1} = \alpha$

Le secteur $(\widehat{IOM})$ ainsi construit est aigu et son rapport de projection orthogonale est égal à α - D'où le résultat annoncé -

<u>Remarque</u> : Tous les secteurs de même angle que $(\widehat{IOM})$ sont aigus et leur rapport de projection orthogonale est égal à α - voir propriété (P_1) -

(*) Sinon la droite (MN) serait orthogonale à la droite (OA) et par suite les points M et N seraient symétriques par rapport à cette droite ce qui n'est pas le cas puisqu'ils appartiennent au même demi-plan de bord (OA)

IV - Cosinus d'un angle aigu

1 - Angle aigu, angle droit, angle obtus

Les angles d'un secteur aigu, d'un secteur droit, d'un secteur obtus sont respectivement dits aigu, droit, obtus -

2 - Cosinus d'un angle aigu

De la propriété (P_1), il découle que le rapport de projection orthogonale d'un secteur aigu ne caractérise pas ce secteur mais son angle (son ouverture)

Cette constatation nous amène à introduire la notion suivante :

Définition

On appelle cosinus d'un angle aigu x° le rapport de projection orthogonale d'un quelconque secteur (aigu) de mesure x

Ce nombre est noté : $\cos x^\circ$ ... lire : "cosinus de x degrés"

Remarque

Le cosinus d'un angle aigu est un nombre strictement compris entre 0 et 1 - voir paragraphe (II - 3) -

3 - Détermination du cosinus d'un angle aigu

a - Méthode manuelle

A l'aide d'un rapporteur, d'un double décimètre, d'un compas ou d'une équerre, on peut déterminer approximativement le cosinus d'un angle aigu x° lorsque x est un nombre entier.

Le processus est le suivant :

1° - On trace un quart de cercle $\overset{\frown}{IJ}$ de centre O et de rayon 10 (*)

2° - On place sur ce quart de cercle le point M tel que $\widehat{IOM} = x^\circ$ (c'est à dire tel que mes $(\widehat{IOM}) = x$)

3° - On construit le projeté orthogonal H de M sur le côté [OI)

4° - On mesure le segment [OH] - On a alors : $\cos x^\circ \simeq \dfrac{OH}{10}$

Exercice d'application immédiate

Déterminer une approximation "raisonnable" du cosinus de 15° ; 30° ; 60° ; 36° ; 72°
(Il suffit de faire une seule figure)

(*) l'unité de longueur étant le centimètre -

b- Utilisation d'une calculatrice : exemple

Sur une T.I. 81 ou une T.I. 82, on met une fois pour toutes la calculatrice en "mode degré" - voir menu "Mode"

Pour obtenir cos 35° on appuie sur les touches $\boxed{\cos}$ $\boxed{3}$ $\boxed{5}$ $\boxed{\text{ENTER}}$

La calculatrice affiche alors:

Cos 35
.8191520403

Ainsi : $\cos 35° \simeq 0,8191520403$

Exercice d'application immédiate

Déterminer les approximations décimales d'ordre 3 des angles donnés dans l'exercice précédent -

4- Angle aigu de cosinus donné

a- Existence et unicité

Soit α un nombre vérifiant : $0 < \alpha < 1$

- D'après la propriété (P_3) on sait construire un secteur aigu dont le rapport de projection orthogonale est égal au nombre α donné. Designons par x la mesure de ce secteur -
- D'après la propriété (P_2) seuls les secteurs d'angle $x°$ ont pour rapport de projection orthogonale le nombre α -

On peut donc énoncer :

Etant donné un nombre α vérifiant $0 < \alpha < 1$, il existe un et un seul angle aigu $x°$ tel que $\cos x° = \alpha$

b- Détermination de l'angle aigu $x°$

A - Méthode manuelle

A l'aide des instruments traditionnels : double décimètre, compas, rapporteur ..., on peut déterminer approximativement l'angle $x°$ lorsque son cosinus est un nombre décimal α donné (à une ou deux décimales) ($0 < \alpha < 1$). Le processus est le suivant :

1°- On trace un quart de cercle $\overset{\frown}{IJ}$ de centre O et de rayon 1 (unité de longueur : 1 dm)
2°- On place le point H du segment [OI] tel que $OH = \alpha$
3°- On trace la droite $\mathcal{D}$ orthogonale en H à la droite (OI)
4°- On mesure le secteur $(\widehat{HOM})$, M étant le point d'intersection de la droite $\mathcal{D}$ et du quart de cercle $\overset{\frown}{IJ}$

Si la mesure du secteur ($\widehat{IOM}$) est approximativement égale à x, il est clair que l'angle cherché est approximativement égal à $x°$

Exercice d'application immédiate

Déterminer un encadrement de largeur 2 des mesures des angles dont le cosinus est : 0,05 ; 0,10 ; 0,20 ; .... ; 0,90 - (Il suffit de faire une seule figure)

▲ Utilisation d'une calculatrice : exemple

Avec les calculatrices précédemment citées, pour obtenir l'angle aigu $x°$ qui a pour cosinus 0,27 on appuie sur les touches : $\boxed{2nd}$ $\boxed{COS}$ $\boxed{\cdot}$ $\boxed{2}$ $\boxed{7}$ $\boxed{ENTER}$

La calculatrice affiche alors :

cos⁻¹ . 27
74 . 33573315

Ainsi l'angle aigu dont le cosinus est 0,27 est approximativement égal à 74,33573315 degrés -

Par ailleurs les performances de la calculatrice permettent d'affirmer que, la mesure x de cet angle vérifie, par exemple, les inégalités :

$74,33 < x < 74,34$ -

Le nombre 74,33 est donc l'approximation décimale d'ordre 2 de x

On traduira cette situation en disant : $74,33°$ est l'approximation décimale d'ordre 2 de l'angle $x°$ -

Exercice d'application immédiate -

Reprendre les données de l'exercice précédent et déterminer, pour chacun des cas, l'approximation décimale d'ordre 1 de l'angle $x°$ -

Commentaire

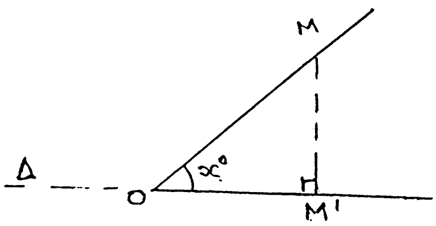
Point n'est besoin d'être grand clerc pour comprendre que les méthodes manuelles ci-dessus décrites pour déterminer :

- d'une part le cosinus d'un angle donné
- d'autre part l'angle dont le cosinus est donné

ne peuvent fournir qu'une approximation grossière du résultat cherché - Leur présence à ce niveau est cependant nécessaire - Au travers des exercices d'application immédiate précédemment proposés elles cautionnent, pour l'élève, les résultats affichés par la calculatrice - Il pourra donc, sans état d'âme, s'en remettre désormais à cette machine pour obtenir l'un ou l'autre des résultats visés -

V - Projeté orthogonal d'un segment sur une droite

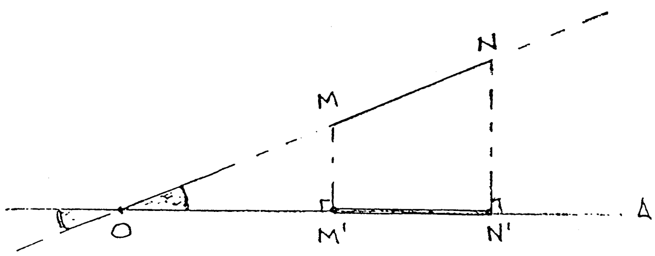
On sait déjà que le projeté d'un segment sur une droite est un segment - En outre, on connait une relation entre la mesure d'un segment et celle de son projeté orthogonal dans une situation particulière illustrée par la figure ci-contre, relation qui peut s'écrire : $OM' = OM \cos x°$

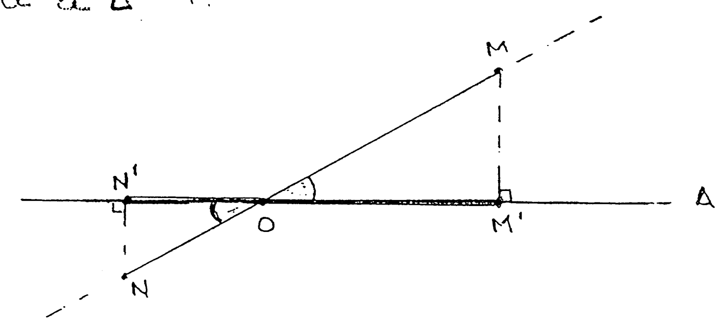


Il s'agit maintenant d'étudier si cette relation perdure lorsque le segment que l'on projette orthogonalement n'a pas une de ses extrémités sur la droite sur laquelle il est projeté -

1 - Le résultat

Etant donné une droite Δ et un segment [MN] tel que la droite (MN) ne soit ni parallèle, ni orthogonale à Δ





Alors, en désignant par $x°$ l'angle de l'un des deux secteurs aigus déterminés par les droites (MN) et Δ et par [M'N'] le projeté orthogonal de [MN] sur Δ,

on a : $\boxed{M'N' = MN \cos x°}$ soit encore $MN = \dfrac{M'N'}{\cos x°}$ ou $\cos x° = \dfrac{M'N'}{MN}$

Démonstration

Observons d'abord que les deux secteurs aigus déterminés par les droites (MN) et Δ sont opposés par le sommet - Ils ont donc le même angle - Ceci dit, désignons par O le point de concours des droites (MN) et Δ - Deux cas de figure sont alors à distinguer :

1er cas : $O \notin [MN]$ -

quitte à permuter les lettres M et N, on peut toujours supposer que : $M \in [ON]$

On a alors : $M' \in [ON']$ car le projeté d'un segment est un segment

puis : $M'N' = ON' - OM' = ON \cos x° - OM \cos x° = (ON - OM) \cos x° = MN \cos x°$

$3^{ème}$ cas : $O \in [MN]$.

On a alors : $O \in [M'N']$ car le projeté d'un segment est un segment

puis : $M'N' = ON' + OM' = ON \cos x^\circ + OM \cos x^\circ = (ON + OM) \cos x^\circ = MN \cos x^\circ$

(c - q - f - d)

2- Exercices d'application

Nous nous contenterons ici d'en préciser les contenus en conservant les notations précédentes -

L'énoncé de chacun de ces exercices comportera, outre la figure adéquate, la donnée de deux des trois nombres x, MN et $M'N'$ (avec bien évidemment $0 < x < 90$) - Le but de l'exercice consistera alors à faire calculer l'approximation décimale d'ordre 1 - ou celle d'ordre 2 - du nombre manquant -

Remarque

On évitera de garder toujours les mêmes notations -

Commentaires

1 - Sur l'éclipse du concept "angle de secteur"

Dans ce chapitre réapparait la notion "angle de secteur" introduite dans le chapitre (1) puis délibérémment abandonnée dans les chapitres (2), (3) et (4) au profit de celle de "mesure de secteur"

La disgrâce passagère de cette première notion est due, pour l'essentiel, a deux raisons :

• Mesurer des segments est une activité porteuse de sens dès le plus jeune âge - Elle est déjà familière aux élèves qui entrent au collège - L'activité qui consiste à mesurer des secteurs relève du même principe Elle est donc à son tour perçue comme une démarche "naturelle" non vide de sens - En outre le statut de nombre qui est attaché à la notion de mesure d'un secteur permet d'utiliser, pour ce qui concerne cette notion, les relations d'égalité et d'ordre ainsi que les opérations "addition" et "multiplication par un nombre" (on peut comparer, ajouter des mesures de secteur, les multiplier par un nombre)

• A contrario, la notion "angle de secteur" est plus difficile à concevoir du fait de son abstraction et son éventail d'utilisation se limite aux relations d'égalité et d'ordre - Dès lors il n'y a rien d'étonnant à ce que cette notion soit un peu délaissée au bénéfice de la première - Certes, on aurait pu remplacer dans les trois chapitres précédents les relations concernant les secteurs telles que :

$\text{mes}(\widehat{BAC}) = \text{mes}(\widehat{EDF})$ resp $(\text{mes}(\widehat{BAC}) < \text{mes}(\widehat{EDF}))$

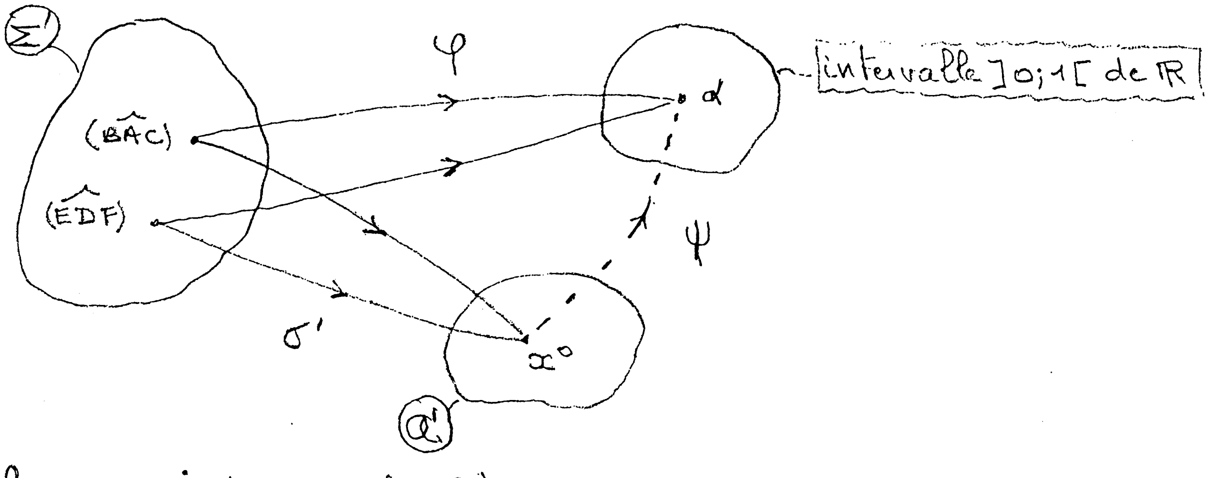
par celles concernant les angles : $\widehat{BAC} = \widehat{EDF}$ resp $(\widehat{BAC} < \widehat{EDF})$

Sur le plan "écriture" cela aurait constitué une simplification appréciable - Nous ne l'avons pas fait car l'usage prématuré des égalités ou inégalités portant sur les angles, en regard d'une figure donnée, a des effets pervers - Il favorise chez l'élève la confusion entre angle et secteur, notamment lors de la résolution d'exercices de géométrie, et fait donc réapparaître bon nombre des incohérences de l'enseignement actuel, incohérences que nous voulons justement éviter -

2 - Mise au point concernant l'introduction du cosinus d'un angle aigu

Désignons par :

Σ' l'ensemble des secteurs aigus du plan $\mathcal{P}$
$\mathcal{A}'$ l'ensemble des angles aigus
φ l'application "rapport de projection orthogonale"
σ' la surjection canonique de Σ' sur $\mathcal{A}'$



<u>Alors</u> : (voir paragraphe III)

- La propriété (P_1) entraîne que l'application φ est <u>factorisable</u>. Cela signifie que : il existe <u>au moins une</u> application ψ de $\mathcal{A}'$ dans l'intervalle $]0;1[$ de $\mathbb{R}$ telle que $\varphi = \psi \circ \sigma'$
- <u>L'unicité</u> de ψ résulte du fait que σ' est banalement surjection.
- L'apport supplémentaire des propriétés (P_2) et (P_3) permet respectivement de conclure que l'application ψ est injective et surjective, donc <u>bijective</u>.

Reste à faire valoir que la bijection $\psi : x_0 \longmapsto \cos x^0$ n'est pas la fonction "cosinus" étudiée en analyse. (On comprendra aisément pourquoi)

3- <u>A l'enseigne</u> : « <u>Ici on vend de belles mathématiques pas cher</u> »

Actuellement, à moins d'une précision contraire, par "angle" on entend "angle saillant". Le mot angle a alors un double emploi : il désigne - à l'usage des potaches tout au moins - tantôt un <u>secteur</u>, tantôt <u>l'ouverture</u> de ce secteur. D'après certains collègues cette duplicité du mot angle permet de "<u>simplifier</u>" l'enseignement de ce concept. Mais alors, si notre enseignement doit être prioritairement sobre, il y a mieux à faire. Et pour en apporter la preuve reportons nous au chapitre que nous venons de boucler.

▲ Commençons par la propriété (P_1) qui légitime la définition du cosinus d'un angle aigu. Cette propriété et la dite définition peuvent respectivement se traduire par :

- Etant donné "deux" angles aigus, si ces angles sont égaux alors ces angles ont le même rapport de projection orthogonale -

- On appelle cosinus d'un angle $x°$ le rapport de projection orthogonale de cet angle -

En l'état, compte tenu de ce que égalité est synonyme de indiscernabilité, il devient patent que la propriété (P_1) ne sert plus à rien - Donc on la supprime

Quant à la nouvelle définition du cosinus, elle traduit que le cosinus d'un angle aigu et le rapport de projection orthogonale de cet angle ne font qu'un. Le rapport de projection orthogonale devient alors un concept surabondant - Donc on le supprime

▲ Considérons maintenant les paragraphes I, II et III - Etant exclusivement consacrés au rapport de projection orthogonale, ils deviennent à leur tour caducs - Donc on les supprime -

▲ Ceci fait, observons enfin que le paragraphe V constitue un prolongement intempestif de ce chapitre, prolongement non prévu dans les programmes officiels - Donc on le supprime aussi

En définitive, le langage actuellement en vigueur permet, pour une bonne part, de donner une nouvelle mouture du chapitre que nous venons de bâtir - Comme il se doit nous la trousserons en conformité avec les grandes idées que véhicule la réforme en cours :

- Réduction du nombre d'heures consacrées au mathématiques
- Alignement du niveau des exigences dans les classes scientifiques à celui des autres séries -
- Prévention du surmenage intellectuel -
- Lutte contre l'échec scolaire
- Respect des taux de réussite initialement programmés

Voici donc cette nouvelle mouture dans son intégralité

Chapitre 5 - Cosinus d'un angle aigu

I - Définition, calcul

1 - Activité préparatoire

1° - a - Dessiner à l'aide d'une règle et d'un rapporteur un angle $\widehat{AOB}$ de 60° - Placer deux points M et M' sur le côté [OA) puis deux points N et N' sur le côté [OB)

b - Construire à l'aide d'une équerre les projetés orthogonaux H et H' de M et M' sur le côté [OB) puis les projetés orthogonaux K et K' de N et N' sur le côté [OA)

c - Mesurer à l'aide d'un double décimètre les segments OH et OM, OH' et OM', OK et ON, OK' et ON' puis calculer les nombres $\frac{OH}{OM}$, $\frac{OH'}{OM'}$, $\frac{OK}{ON}$ et $\frac{OK'}{ON'}$ - Que constate-t-on ?

d - Mettre votre calculatrice en "mode degré" (lire la notice ou demander au professeur). Ceci fait, appuyer sur les touches [cos] [60] puis sur la touche qui commande l'exécution du calcul - Comparer le résultat obtenu à ceux obtenus précédemment - Que constate-t-on ?

2° - Recommencer cette manipulation en prenant $\widehat{AOB} = 30°$ puis $\widehat{AOB} = 45°$

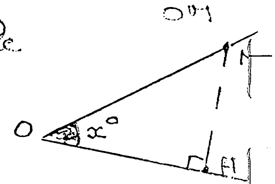
2 - Définition et calcul

Le cosinus d'un angle aigu x° de sommet O est le nombre $\frac{OH}{OM}$

M étant un point autre que O d'un côté de cet angle.

H le projeté orthogonal de M sur l'autre côté

Ce nombre est noté **cos x°** .. lire « cosinus de x degrés »



Remarque

Comme OH < OM, on a : $\boxed{0 < \cos x° < 1}$

Théorème

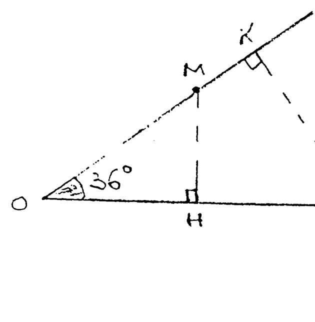
Le cosinus d'un angle x° s'obtient à l'aide d'une calculatrice mise en mode degré en affichant "cos x" puis en faisant exécuter le calcul

3 - Exercice d'application

a - Utiliser votre calculatrice pour calculer OH et ON sachant que OM = 2,5 cm et OK = 3,5 cm

Indication : $OH = OM \cos 36°$ et $ON = \frac{OK}{\cos 36°}$

b - Reprendre la question précédente avec un angle 54° puis un angle de 72°



II - Angle aigu de cosinus donné

1 - Activité préparatoire -

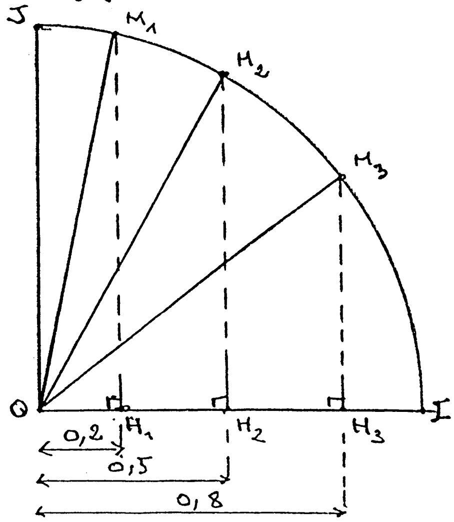
1°- a- Tracer un quart de cercle $\widehat{IJ}$ de centre O et de rayon 1 dm

b- Placer les points H_1, H_2, H_3 tels que $OH_1 = 0,2$ dm ; $OH_2 = 0,5$ dm, $OH_3 = 0,8$ dm ainsi que les points M_1, M_2, M_3. Quel est le cosinus des angles $\widehat{IOM_1}$, $\widehat{IOM_2}$ et $\widehat{IOM_3}$?

c- Mesurer ces angles et afficher les résultats obtenus

2°- Afficher sur votre calculatrice $\cos^{-1} 0,2$, $\cos^{-1} 0,5$, $\cos^{-1} 0,8$ puis faire exécuter les calculs. Comparer ces résultats avec ceux précédemment obtenus. Que constate-t-on ?

figure à l'échelle : 0,5



2- Calcul de l'angle $x°$ sachant que $\cos x° = \alpha$

Théorème :

L'angle $x°$ vérifiant $\cos x° = \alpha$, α donné, $0 < \alpha < 1$, s'obtient avec une calculatrice mise en mode degré en affichant "$\cos^{-1} x$" puis en faisant exécuter le calcul.

3- Exercice d'application

Calculer les angles $\hat{B}$ et $\hat{C}$ d'un triangle ABC rectangle en A sachant que BC = 7 cm et AB = 4 cm.

Nous avons troussé comme promis un chapitre clair, concis et fortement automatisé, un salutaire menu de régime propre à ménager les neurones de la population scolarisée.

3- Conclusion

Avec un peu d'imagination, beaucoup d'audace et d'abnégations, on pourrait réduire dans les mêmes proportions chaque chapitre des programmes et, quand on y est, les programmes eux-mêmes.
Pendant l'horaire normal nouvellement attribué, le professeur pourrait ainsi se livrer à de nombreuses évaluations, tracer des graphiques de toutes sortes et dresser à la sortie un profil hautement fiable de chacun de ses élèves. La moyenne des notes de chaque classe grimperait vers des sommets jusqu'alors inaccessibles et l'écart-type plongerait vers son niveau plancher. Pour ce qui concerne les mathématiques, tous les objectifs

fixés dans les hautes sphères ministérielles seraient du même coup atteints, voire dépassés. Qui plus est, on réduirait au silence tous les aigris, les jaloux, les revanchards, les pauvres d'esprit qui, depuis quelques temps, tirent à boulets rouges sur notre discipline. Le rêve quoi ! Enfin presque ! Car avec un enseignement squelettique et souvent vicié à la base, on pourrait certes encore assumer la formation "mathématique" d'un petit technicien, d'un expert-géomètre, ..., d'un ministre ; mais pour former un cadre commercial, un ingénieur, un physicien, un chimiste, un simple géomètre et a fortiori un mathématicien, cela serait quasiment foutu.

Alors, peut être que la réforme .... ?

Epilogue

Au paradis des matheux, mon Maître le professeur Jean Colmez (décédé en 1990) ne doit être qu'à moitié satisfait de ma prestation. Je l'entends très distinctement me dire : « Bin quoi Antoine, vous étiez malade ? Vous en avez mis un temps pour terminer le boulot que je vous avais confié ! ....

Pour ce qui est du contenu ça va à peu près, mais... certains de vos commentaires sont complètement fastes. Il y a trop de jérémiades, trop de litanies et pas assez de mordant. On dirait que c'est un jésuite qui les a pondus ! Vous auriez dû annoncer tout de suite : « les angles géométriques, c'est de la merde ! La réforme en cours aussi ! » Et la messe était dite.
Il ne vous restait plus qu'à écrire pour vos ouailles à la fin de votre article : maintenant allez ...... et ne déconnez plus »

Villefranque, février 1995.

Index