UNIVERSITE BORDEAUX 1

I.R.E.M. D'AQUITAINE

Mathématiques du Signal

Equations Différentielles

Transformation de Laplace

Ont participé à l'élaboration de ce fascicule :

Raymond BOUDIE: Professeur de Physique appliquée,Lycée J.B. de Baudre, 47 AGEN
Serge DUPUY: Professeur de Mathématiques, Lycée J.B. de Baudre, 47 AGEN
Michel PUJOS: Professeur de Mathématiques, Lycée J.B. de Baudre, 47 AGEN
Joël RIVOAL: Professeur de Maths-Sciences; Lycée Professionnel J. Monnet, 47 FOULAYRONNES

2ème Edition

(revue et corrigée)

AGEN:1995

TABLE DES MATIERES

PRELIMINAIRES

EQUATIONS DIFFERENTIELLES

TRANSFORMATION DE LAPLACE

AVANT PROPOS

CE FASCICULE (Tome 1):

▶ **A été rédigé** de manière à ce que son contenu soit accessible aux étudiants des classes de Techniciens Supérieurs et corresponde aux programmes de ces classes .

Pour les équations différentielles, nous proposons des démonstrations simples, ne faisant pas appel à la théorie des espaces vectoriels (non connue des étudiants bacheliers STI), mais qui permettent de justifier tous les résultats donnés . Conformément aux programmes des classes de Techniciens Supérieurs, nous nous sommes placés dans le cas où ces équations sont à coefficients complexes .

En ce qui concerne la transformation de LAPLACE, pour la transformée de la <<dérivée>> (cf . B-III) nous ne nous sommmes pas limités, comme cela est généralement le cas, à donner *la relation entre la transformée d'une fonction* f primitive large (cf.A-II) d'une fonction f_1 localement continue par morceaux sur [0, +∞ [(cf.A-II) *et la transformée de* f_1 (donc a fortiori au cas où f est *dérivable* sur [0 , +∞ [et de *dérivée* f_1 sur [0 , +∞ [ ). Car en Physique bon nombre de signaux et leurs dérivées sont modélisés par des fonctions qui présentent, les unes et les autres, des discontinuités de première espèce . De plus il nous a paru indispensable, même au niveau où nous nous sommes placés, d'expliquer par une méthode originale la signification des fonctions de transfert et leur lien avec les équations différentielles

▶ **A une suite :**

• Tome 2 (paru en Juin 1994)

I - Introduction à l'analyse du signal .
II - Notions sur les distributions .
III - Dérivations des distributions . Exemples de distributions non régulières .
IV - Systèmes physiques et convolution .
V - Fonction de transfert isomorphe . Transformée de Laplace d'une distribution . Applications à la physique .

• Tome 3 (à paraitre fin 1995)

I - Séries de Fourier .
II - Traitement numérique du signal . Transformée en Z .

▶ **Malgré une relecture** attentive de ce document, il est probable que subsistent encore quelques erreurs . Nous remercions par avance les lecteurs de nous faire part de leurs remarques et suggestions auxquelles nous porterons toute notre attention .

PRELIMINAIRES

Dans cette partie nous avons rassemblé dans un bref exposé quelques notions de base qui seront utiles dans l'ensemble du document.

On note i le nombre de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$, ce nombre pourra aussi être noté j, notation utilisée en physique.

I- NOTIONS SUR LES FONCTIONS COMPLEXES D'UNE VARIABLE REELLE.

1-Définition.

> On appelle fonction complexe d'une variable réelle (ou fonction à valeurs complexes d'une variable réelle) toute application de $\mathbb{R}$ ou partie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$

Remarque:

■ Soit g et h deux fonctions à valeurs réelles définies respectivement sur $\mathcal{D}_g \subseteq \mathbb{R}$ et $\mathcal{D}_h \subseteq \mathbb{R}$ la fonction φ définie sur $\mathcal{D}_\varphi = \mathcal{D}_g \cap \mathcal{D}_h$ par:

$\forall\ t \in \mathcal{D}_\varphi$, $\varphi(t) = g(t) + i\ h(t)$ est une fonction complexe de la variable t.

■ Réciproquement, pour toute fonction complexe φ d'une variable réelle t, il existe un couple unique (g,h) de fonctions à valeurs réelles définies par:

$\forall\ t \in \mathcal{D}_\varphi$, $g(t) = \mathcal{Re}\left[\varphi(t)\right]$ et $h(t) = \mathcal{Im}\left[\varphi(t)\right]$ telles que

$\forall\ t \in \mathcal{D}_\varphi$, $\varphi(t) = g(t) + ih(t)$

Exemple: $\forall\ t \in \mathbb{R}$, $\varphi(t) = e^{it} = \cos t + i \sin t$

2-Fonction conjuguée de la fonction: $t \longmapsto e^{\varphi(t)}$

Théorème

Si la fonction φ est une fonction complexe d'une variable réelle alors il en est de même de la fonction: $t \longmapsto e^{\varphi(t)}$

et $\forall\ t \in \mathcal{D}_\varphi$, $\overline{\left(e^{\varphi(t)}\right)} = e^{\overline{\varphi(t)}}$

Démonstration:

$$\overline{\left(e^{\varphi(t)}\right)} = \overline{\left(e^{g(t) + ih(t)}\right)}$$

$$\overline{\left(e^{\varphi(t)}\right)} = \overline{\left(e^{g(t)}\left[\cos\left(h(t)\right) + i\sin\left(h(t)\right)\right]\right)}$$

$$\overline{\left(e^{\varphi(t)}\right)} = e^{g(t)}\left[\cos\left(h(t)\right) - i\sin\left(h(t)\right)\right]$$

$$\overline{\left(e^{\varphi(t)}\right)} = e^{g(t)}\ e^{-ih(t)}$$

$$\overline{\left(e^{\varphi(t)}\right)} = e^{g(t)-ih(t)}$$

$$\overline{\left(e^{\varphi(t)}\right)} = e^{\overline{\varphi(t)}}$$

Exemple: $\overline{e^{(\alpha + i\beta)t}} = e^{(\alpha - i\beta)t}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$.

3-Fonction continue sur un intervalle.

a-*Définition.*

Soit un intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$ et une fonction complexe φ de la variable réelle t définie sur I par: $\forall t \in I$, $\varphi(t) = g(t) + ih(t)$, avec $g(t) = \mathcal{Re}\left(\varphi(t)\right)$ et $h(t) = \mathcal{Im}\left(\varphi(t)\right)$, on dit que φ est continue sur I si et seulement si g et h sont continues sur I.

b-*Propriétés*.

Soit:

- φ_1 et φ_2 des fonctions complexes de la variable réelle t.
- un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Si φ_1 et φ_2 sont continues sur I, alors

- $\forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall \mu \in \mathbb{C}, \lambda\varphi_1 + \mu\varphi_2$ est continue sur I
- $\varphi_1 \times \varphi_2$ est continue sur I
- Si de plus $\forall t \in I, \varphi_2(t) \neq 0$, $\dfrac{\varphi_1}{\varphi_2}$ est continue sur I

Démonstrations:

Ces démonstrations sont immédiates et découlent de la définition de la continuité d'une fonction complexe d'une variable réelle.

4- Fonctions dérivées.

a-*Définition*.

Soit l'intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$, la fonction complexe φ de la variable réelle t et les fonctions g et h telles que :

$$\forall t \in I, \quad g(t) = \mathcal{R}e\big(\varphi(t)\big) \quad \text{et} \quad h(t) = \mathcal{I}m\big(\varphi(t)\big)$$

On dit que φ est dérivable sur I si et seulement si les fonctions g et h sont dérivables sur I

On appelle alors fonction dérivée de φ la fonction notée φ' définie sur I par: $\forall t \in I, \varphi'(t) = g'(t) + ih'(t)$
(g' et h' désignent les dérivées de g et h)

b-*Exemple*.

Prenons $\varphi(t) = e^{it}$.

On a $\varphi'(t) = \left[e^{it}\right]'$

$$\varphi'(t) = \left[\cos t + i\sin t\right]'$$

$$\varphi'(t) = -\sin t + i\cos t$$

$$\varphi'(t) = i(\cos t + i\sin t)$$

$$\varphi'(t) = ie^{it}$$

c-*Remarque*.

- $\left[\overline{\varphi(t)}\right]' = \left[g(t) - ih(t)\right]' = g'(t) - ih'(t) = \overline{\varphi'(t)}$

d-*Propriétés*.

Si les fonctions complexes φ et ψ sont dérivables sur l'intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$ alors:

- $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $\forall \mu \in \mathbb{C}$, $(\lambda\varphi + \mu\psi)' = \lambda\varphi' + \mu\psi'$
- $(\varphi\times\psi)' = \varphi\times\psi' + \psi\times\varphi'$
- $\left[e^{\varphi(t)}\right]' = \varphi'(t)\ e^{\varphi(t)}$

Démonstrations:

Ces démonstrations sont immédiates et découlent de la définition de la dérivée d'une fonction complexe d'une variable réelle.

Exemple:

$\varphi(t) = e^{(\alpha + i\beta)t}$, alors $\varphi'(t) = (\alpha + i\beta)\ e^{(\alpha + i\beta)t}$

5-Primitives.

a-*Définition*.

On appelle primitive sur l'intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$ de la fonction complexe φ, définie sur I, toute fonction Φ telle que:

$$\forall\ t \in I,\ \Phi'(t) = \varphi(t)$$

b-*Propriétés*.

Soit la fonction complexe φ définie sur l'intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$ par:

$$\forall\ t \in I,\ \varphi(t) = g(t) + ih(t)$$

avec $g(t) = \mathcal{Re}\left[\varphi(t)\right]$ et $h(t) = \mathcal{Im}\left[\varphi(t)\right]$

Si G et H sont des primitives à valeurs réelles de g et h sur I

alors :

- $G + iH$ est une primitive de φ sur I.
- L'ensemble des primitives de φ sur I est l'ensemble des fonctions Φ définies par :

$$\forall\ t \in I,\ \Phi(t) = G(t) + \alpha + i\left[H(t) + \beta\right] \quad \text{avec } \alpha \in \mathbb{R} \text{ et } \beta \in \mathbb{R}$$

ou

$$\forall\ t \in I,\ \Phi(t) = G(t) + iH(t) + \lambda \quad \text{avec } \lambda = \alpha + i\beta \quad \text{et } \lambda \in \mathbb{C}$$

Démonstrations:

Ces démonstrations sont immédiates et découlent de la définition de la primitive d'une fonction complexe d'une variable réelle.

Nota: Pour rechercher les primitives de φ on écrira toujours φ sous la forme $g + ih$, avec $g(t) = \mathcal{Re}\left[\varphi(t)\right]$ et $h(t) = \mathcal{Im}\left[\varphi(t)\right]$.

Exemples:

- $F : t \longmapsto \frac{1}{2}t^2 + i\ln t$ est une primitive sur $]0 , +\infty[$ de $f : t \longmapsto t + i\frac{1}{t}$

- $F : t \longmapsto \text{Arctan}\,t - i\ln\sqrt{1 + t^2}$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de $f : t \longmapsto \frac{1}{1 + it}$

II-NOTIONS SUR LA FONCTION ECHELON UNITE.

1- Définition.

On appelle fonction échelon unité la fonction définie comme suit :

$$\mathcal{U} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$t \longmapsto \begin{cases} 0 \text{ si } t \in]-\infty , 0[\\ 1 \text{ si } t \in [0 , +\infty[\end{cases}$$

2-Remarques.

- On notera $\mathcal{U}_a$ la fonction définie par :

$\forall t \in \mathbb{R}, \mathcal{U}_a(t) = \mathcal{U}(t - a)$, c'est-à-dire :

$$\mathcal{U}_a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$t \longmapsto \begin{cases} 0 \text{ si } t \in]-\infty , a[\\ 1 \text{ si } t \in [a , +\infty[\end{cases}$$

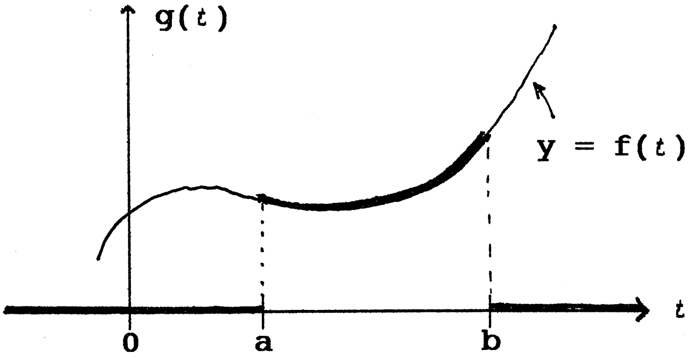
Nota: Dans toutes les applications concernant la physique le nombre a est positif.

• Soit $g : t \longmapsto f(t)(\mathcal{U}(t - a) - \mathcal{U}(t - b))$

$g(t) = 0$ si $t \in]-\infty, a]$

$g(t) = f(t)$ si $t \in [a, b[$

$g(t) = 0$ si $t \in [b, +\infty[$



EQUATIONS DIFFERENTIELLES

INTRODUCTION

1°) *L'exposé qui va suivre a été conçu pour :*

■ être éventuellement partiellement utilisé dans certaines classes de Terminale (Bac. Pro, S.T.I., S.........) en considérant alors pour les équations du premier ordre que les fonctions a et b sont constantes et à valeurs réelles ou, constantes et à valeurs complexes si on doit traiter les équations différentielles du second ordre à coefficients constants.

■ être conforme aux programmes des B.T.S. (B.O. n° 21 du 25 Mai 1989).

■ répondre aux problèmes qui peuvent se poser en Physique ou Physique appliquée jusqu'en classe de T.S.

■ utiliser des méthodes et des raisonnements qui nous ont semblé le mieux prendre en compte les connaissances des élèves ou étudiants qui sont concernés par les deux premiers objectifs ci-dessus.

2°) *Nous traiterons d'abord les équations différentielles linéaires du premier ordre.* Pour ce type d'équations les coefficients ne sont pas nécessairement constants. Le cas où les coefficients sont constants apparaît comme un cas particulier du cas général. Pour *les équations différentielles du deuxième ordre*, seul le cas où les coefficients sont constants est envisagé.

Dans le cas général où les coefficients sont des fonctions (constantes ou non) à valeurs complexes les solutions sont évidemment à valeurs complexes. Lorsque les coefficients sont des fonctions à valeurs réelles (constantes ou non) le sous-ensemble des solutions à valeurs réelles est précisé.

Pour les cas où les coefficients sont constants et où le second membre est de la forme $e^{\alpha t}P(t)$, $P(t)$ étant un polynôme à coefficients complexes et $\alpha \in \mathbb{C}$ (seul cas envisagé en Physique jusqu'au niveau B.T.S.), on propose la même méthode de résolution pour les équations du premier et du deuxième ordre.

Dans chacune des parties, équations du premier ordre et équations du deuxième ordre, on a inséré des exercices d'applications dont certains sont résolus et des indications sur l'utilisation des équations différentielles en physique.

A la fin de chaque partie on trouve une liste d'exercices.

EQUATIONS DIFFERENTIELLES

LINEAIRES

DU PREMIER ORDRE

I-EQUATION DIFFERENTIELLE LINEAIRE DU 1er ORDRE A SECOND MEMBRE NUL:

$$a(t)y'(t) + b(t)y(t) = 0 \quad (1)$$

Afin d'alléger les notations l'équation (1) sera notée:

$$a(t)y' + b(t)y = 0$$

Hypothèses:

Les fonctions a, b et y sont des fonctions complexes d'une variable réelle.
Les fonctions a et b sont continues sur l'intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$ et $\forall t \in I$, $a(t) \neq 0$.

1-Définition

f est solution sur $I \subseteq \mathbb{R}$ de (1) $\Leftrightarrow \forall t \in I$, $a(t)f'(t) + b(t)f(t) = 0$

Remarque:

Si f est solution sur $I \subseteq \mathbb{R}$ de (1) **alors** f et f' sont continues sur I

En effet, f est dérivable sur I donc continue sur I, de plus, $\frac{b}{a}$ est continue sur I et $f' = -\frac{b}{a} f$, donc f' est continue sur I.

2- Détermination de l'ensemble des solutions sur $I \subseteq \mathbb{R}$ de l'équation (1).

Soit Φ une primitive sur I de $\varphi = \frac{b}{a}$

$$\begin{aligned}
\forall\, t \in I,\quad a(t)\, y' + b(t)\, y = 0 &\Leftrightarrow y' + \frac{b(t)}{a(t)}\, y = 0 \\
&\Leftrightarrow y' + \Phi'(t)\, y = 0 \\
&\Leftrightarrow \left[y' + \Phi'(t)\, y\right] e^{\Phi(t)} = 0 \\
&\Leftrightarrow \left[y\, e^{\Phi(t)}\right]' = 0 \\
&\Leftrightarrow y\, e^{\Phi(t)} = \lambda \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{C} \\
&\Leftrightarrow y = \lambda\, e^{-\Phi(t)} \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{C}
\end{aligned}$$

Théorème 1
Si a et b sont continues sur l'intervalle I et si $\forall t \in I$, $a(t) \neq 0$, l'ensemble des solutions de (1) sur $I \subseteq \mathbb{R}$, appelé *solution générale de* (1) sur I, est l'ensemble des fonctions y définies sur I par : $$y(t) = \lambda e^{-\Phi(t)} \text{ avec } \lambda \in \mathbb{C} \text{ et } \Phi \text{ une primitive de } \frac{b}{a}$$

Exemples:

- L'équation différentielle $2y' + y = 0$ a pour solution sur $\mathbb{R}$

  $y = \lambda\ e^{-\frac{1}{2}t}$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$

- L'équation différentielle $ity' + y = 0$ a pour solution sur

  $I =]0,+\infty[$, $y = \lambda e^{i\ln t}$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$.

En effet $\varphi(t) = -\frac{i}{t}$, donc $\Phi(t) = -i\ \ln t$ et $y = \lambda\ e^{i\ln t}$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$

- L'équation différentielle $t\ y' \ln t - (2 + \ln t)\ y = 0$ a pour solution sur $I =]1,+\infty[$, $y = \lambda t(\ln t)^2$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$

En effet $\varphi(t)=-2\dfrac{\frac{1}{t}}{\ln t} - \dfrac{1}{t}$, donc $\Phi(t) = -2\ln|\ln t| - \ln t = -\ln(t(\ln t)^2)$

D'où $y = \lambda t(\ln t)^2$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$.

3-Ensemble des solutions réelles sur I de l'équation (1) dans le cas particulier où a et b sont des fonctions à valeurs réelles.

Il existe Φ fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ primitive sur I de $\frac{b}{a}$

y solution de (1) est à valeurs réelles $\Leftrightarrow \forall\ t \in I,\ y = \overline{y}$

y solution de (1) est à valeurs réelles $\Leftrightarrow \forall\ t \in I,\ \lambda e^{-\Phi(t)} = \overline{\lambda} e^{-\Phi(t)}$

y solution de (1) est à valeurs réelles $\Leftrightarrow \lambda = \overline{\lambda}$

y solution de (1) est à valeurs réelles $\Leftrightarrow \lambda \in \mathbb{R}$

Théorème 2

Si a et b sont continues sur l'intervalle **I** et si $\forall\, t \in \mathbf{I}$, $a(t) \neq 0$. Si de plus a et b sont des fonctions à valeurs réelles l'ensemble des solutions réelles de **(1)** sur $\mathbf{I} \subseteq \mathbb{R}$, appelé *solution générale réelle* de **(1)** sur **I**, est l'ensemble des fonctions y définies sur **I** par: $$y(t) = \lambda e^{-\Phi(t)}$$
avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et Φ une primitive sur **I**, à valeurs réelles, de $\frac{b}{a}$

4- Ensemble des solutions de l'équation $Ay' + By = 0$ avec $A \in \mathbb{C}^*$ et $B \in \mathbb{C}$.

Ici $A \neq 0$ et les fonctions a et b sont les fonctions constantes:
$a : t \longmapsto A$, $b : t \longmapsto B$, donc continues sur $\mathbb{R}$.

D'après le théorème 1, l'ensemble des solutions de $Ay' + By = 0$ sur tout $\mathbf{I} \subseteq \mathbb{R}$ est l'ensemble des fonctions y définies sur **I** par:
$$y = \lambda e^{-\frac{B}{A}t} \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{C}$$

Remarque.

Si $A \in \mathbb{R}^*$ et $B \in \mathbb{R}$, d'après le théorème 2 l'ensemble des solutions réelles de $Ay' + By = 0$, sur tout $\mathbf{I} \subseteq \mathbb{R}$ est l'ensemble des fonctions y définies sur **I** par :
$$y = \lambda\, e^{-\frac{B}{A}t} \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}$$

Nota.

Si on se limite aux programmes des classes de terminales, la démonstration du (2-) peut se réduire à:

$\forall\, A \in \mathbb{R}^*$ et $\forall\, B \in \mathbb{R}$,

$\forall\, t \in \mathbf{I}$,

$$y' + \frac{B}{A}y = 0 \iff y'e^{\frac{B}{A}t} + y\,\frac{B}{A}\,e^{\frac{B}{A}t} = 0 \iff ye^{\frac{B}{A}t} = \lambda,\ \lambda \in \mathbb{R} \iff y = \lambda e^{-\frac{B}{A}t}$$
$$\lambda \in \mathbb{R}$$

5- Remarque concernant l'équation $a(t)y' + b(t)y = 0$ (1).

La seule solution de l'équation (1) qui s'annule pour un $t_o \in I$ est la fonction constamment nulle sur I.

En effet $\lambda e^{-\Phi(t_o)} = 0 \iff \lambda = 0.$

II-EQUATION DIFFERENTIELLE LINEAIRE DU 1er ORDRE A SECOND MEMBRE NON NUL : $a(t)y'(t) + b(t)y(t) = h(t)$ (2)

Afin d'alléger les notations l'équation (2) sera notée:

$$a(t)y' + b(t)y = h(t)$$

Hypothèses:

Les fonctions a, b, y et h sont des fonctions complexes d'une variable réelle.
Les fonctions a, b et h sont continues sur l'intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$ et $\forall\ t \in I,\ a(t) \neq 0$.

1-Définition

f est solution sur $I \subseteq \mathbb{R}$ de (2) $\iff \forall t \in I,\ a(t)f'(t) + b(t)f(t) = h(t)$

Remarque:

Si f est solution sur $I \subseteq \mathbb{R}$ de (2) **alors** f et f' sont continues sur I

En effet, f est dérivable sur I donc continue sur I, de plus, $\frac{b}{a}$ et h sont continues sur I et $f' = -\frac{b}{a}f + \frac{1}{a}h$, donc f' est continue sur I.

2- Théorème

Théorème 1 $\forall \alpha \in \mathbb{C}, \forall \beta \in \mathbb{C},$

Si $\begin{cases} y_1 \text{ est une solution sur I de } a(t)y' + b(t)y = h_1(t) \\ y_2 \text{ est une solution sur I de } a(t)y' + b(t)y = h_2(t) \end{cases}$

alors $\alpha y_1 + \beta y_2$ est une solution sur I de

$$a(t)y' + b(t)y = \alpha\, h_1(t) + \beta\, h_2(t)$$

Démonstration: immédiate

3- Ensemble des solutions sur I de l'équation (2).

Si y est solution quelconque de $a(t)y' + b(t)y = h(t)$
et si y_1 est une solution particulière de $a(t)y' + b(t)y = h(t)$,
alors d'après le théorème 1: $y_0 = y - y_1$ est solution de :

$$a(t)\, y' + b(t)\, y = 0$$

Donc, $y - y_1 = \lambda e^{-\Phi(t)}$ et $y = y_1 + \lambda e^{-\Phi(t)}$

Réciproquement

Si y_1 est une solution particulière de $a(t)y' + b(t)y = h(t)$,
et si y_0 est solution quelconque de $a(t)y' + b(t)y = 0$,
alors d'après le théorème 1: $y = y_1 + y_0 = y_1 + \lambda e^{-\Phi(t)}$
est solution de: $a(t)y' + b(t)y = h(t)$.

D'où :

Théorème 2

Si a, b et h sont continues sur l'intervalle $\mathbf{I} \subseteq \mathbb{R}$ et **si** $\forall\, t \in \mathbf{I}$ $a(t) \neq 0$, l'ensemble des solutions de (2) sur **I**, appelé *solution générale de* (2), est l'ensemble des fonctions y définie sur **I** par:

$$y(t) = y_1(t) + \lambda e^{-\Phi(t)}$$

avec y_1 solution particulière de (2) sur **I**, $\lambda \in \mathbb{C}$

et Φ une primitive sur **I** de $\frac{b}{a}$.

Remarque importante.

Ce théorème 2 est souvent énoncé de la façon suivante:

La solution générale sur l'intervalle I de l'équation différentielle:

$$a(t)y' + b(t)y = h(t) \quad (2)$$

est la somme d'une solution particulière de l'équation différentielle (2) et de la solution générale de l'équation différentielle:

$$a(t)y' + b(t)y = 0 \quad (1).$$

4-**Cas particuliers: les fonctions a et b sont à valeurs réelles.**

a- Théorème

Théorème 3

Si les fonctions a,b et h sont continues sur $I \subseteq \mathbb{R}$, si $\forall\, t \in I$, $a(t) \neq 0$ et si les fonctions a et b sont à valeurs réelles

alors

y_1 est une solution sur **I** de $a(t)y' + b(t)y = h(t)$

Si et seulement si

$\overline{y_1}$ est une solution sur **I** de $a(t)y' + b(t)y = \overline{h(t)}$

Démonstration:

y_1 est une solution de $a(t)y'+ b(t)y = h(t) \Leftrightarrow a(t)y_1'+ b(t)y_1 = h(t)$

y_1 est une solution de $a(t)y'+ b(t)y = h(t) \Leftrightarrow \overline{a(t)y_1'+ b(t)y_1} = \overline{h(t)}$

y_1 est une solution de $a(t)y'+ b(t)y = h(t) \Leftrightarrow \overline{a(t)y_1'}+ \overline{b(t)y_1} = \overline{h(t)}$

y_1 est une solution de $a(t)y'+ b(t)y = h(t) \Leftrightarrow a(t)\overline{y_1'}+ b(t)\overline{y_1} = \overline{h(t)}$

b- Théorème

Théorème 4

Si les fonctions a,b et h sont continues sur $I \subseteq \mathbb{R}$,
si $\forall\ t \in I,\ a(t) \neq 0$ et si les fonctions
a et b sont à valeurs réelles

il en résulte que:

Si y_1 est une solution sur **I** de $a(t)y' + b(t)y = h(t)$

alors $\left[\begin{array}{l} y_1 + \overline{y_1} = 2\mathcal{R}e(y_1) \text{ est une solution sur I} \\ \text{de } a(t)y' + b(t)y = h(t) + \overline{h(t)} \end{array}\right.$

Démonstration: elle découle des théorèmes 2 et 3.

Nota: Ces théorèmes sont particulièrement utiles lorsque a et b sont des fonctions constantes à valeurs réelles..

c-*Solutions réelles de l'équation (2) si* a, b *et* h *sont à valeurs réelles.*

▸ Si a, b et h sont à valeurs réelles et si $a(t)y' +b(t)y = h(t)$ **(2)** admet une solution y_1 sur **I** $\subseteq \mathbb{R}$ alors d'après les Théorèmes 1 et 3:

$$\frac{1}{2}\, y_1 \text{ est une solution de } a(t)y' + b(t)y = \frac{1}{2}\, h(t)$$

et $\frac{1}{2}\,\overline{y_1}$ est une solution de $a(t)y' + b(t)y = \frac{1}{2}\,\overline{h(t)}$

d'où : $y_2 = \mathcal{Re}(y_1)$ est solution de (2)

▸ D'après la démonstration ci dessus, si a, b et h sont à valeurs réelles et si (2) admet une solution sur I alors (2) admet sur I au moins une solution à valeurs réelles y_2.

▸ <u>*Ensemble des solutions réelles:*</u>

$y = y_2 + \lambda e^{-\Phi(t)}$ est solution générale de (2) sur I, $\lambda \in \mathbb{C}$ et Φ est à valeurs réelles (I-3) ainsi que y_2.

D'où: $y = \overline{y} \iff y_2 + \overline{\lambda} e^{-\Phi(t)} = y_2 + \lambda e^{-\Phi(t)} \iff \lambda = \overline{\lambda} \iff \lambda$ réel

Théorème 5

Si a, b, h sont à valeurs réelles, l'ensemble des solutions réelles sur tout $I \subseteq \mathbb{R}$ où a, b et h sont continues et tel que $\forall t \in I,\ a(t) \neq 0$, est l'ensemble des fonctions y définies sur I

par : $y(t) = y_2(t) + \lambda e^{-\Phi(t)}$

avec $\lambda \in \mathbb{R}$,

y_2 solution particulière à valeurs réelles, sur I, de (2)

Φ primitive sur I, à valeurs réelles, de $\frac{b}{a}$

5-Existence et unicité d'une solution vérifiant une condition initiale donnée.

Théorème 6

Sur tout intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$ où a, b et h sont continues et tel que $\forall\ t \in I,\ a(t) \neq 0$, il existe une solution et une seule de l'équation différentielle $a(t)y' + b(t)y = h(t)$ prenant la valeur y_o donnée pour t_o donné appartenant à I

Démonstration :

Soit $y(t) = y_1(t) + \lambda e^{-\Phi(t)}$ solution générale de

$$a(t)y' + b(t)y = h(t).$$

On cherche la solution vérifiant pour $t_0 \in I$, $y(t_0) = Y_0$

$$y(t) = Y_0 \iff Y_0 = y_1(t_0) + \lambda e^{-\Phi(t_0)} \iff \lambda = (Y_0 - y_1(t_0))e^{-\Phi(t_0)}$$

Exemple:

Résoudre sur $I =]0;+\infty[$ l'équation différentielle $ity' + y = t$

On vérifie que $y_1 = \frac{1-i}{2} t$ est une solution sur I de $ity' + y = t$,

donc la solution générale sur I est la fonction y définie par :

$$y(t) = \frac{1-i}{2}t + \lambda e^{i\ln t}$$

Cherchons la solution prenant la valeur 0 pour $t = 1$.

$$y(1) = 0 \iff \frac{1-i}{2} + \lambda \iff \lambda = -\frac{1-i}{2}$$

Cette solution est donc la fonction y définie sur I par :

$$y(t) = \frac{1-i}{2}\left[t - e^{i\ln t}\right]$$

6- Une méthode de résolution dans le cas où $h(t) = e^{\alpha t}P(t)$

avec $\alpha \in \mathbb{C}$ et $P(t)$ polynôme à coefficients dans $\mathbb{C}$, de l'équation à coefficients constants $Ay' + By = e^{\alpha t}P(t)$ (3), $A \in \mathbb{C}^*$, $B \in \mathbb{C}$ (seuls cas rencontrés en Physique jusqu'au niveau B.T.S.).

▸Pour chercher une solution particulière de (3), on pose :

$y_1 = z(t)e^{\alpha t}$, on a donc $y_1' = z'(t)e^{\alpha t} + \alpha z(t)e^{\alpha t}$

y_1 solution de (3) $\iff Az'(t) + (A\alpha + B)z(t) = P(t)$ (3')

• Si $A\alpha + B = 0$ $\quad z'(t) = \frac{1}{A} P(t)$

z est donc un polynôme de degré d°P + 1.

• Si $A\alpha + B \neq 0$: On montrera (Voir Eq.diff.2ème ordre II.5) qu'on peut chercher par identification $z(t)$ polynôme de degré d°P.

▸Pour obtenir la solution générale de (3), dans tous les cas on rajoute y_1 à la solution générale de l'équation sans second membre.

7- Exercices:

Résoudre les équations différentielles suivantes (pour les exercices 1, 3 et 4 on ne donnera que les solutions à valeurs réelles):

1) $y' + y = te^{t}$	3) $y' + y = te^{-t}$
2) $y' + iy = e^{it}$	4) $y' + y = te^{t}\cos t$

Solution de l'exercice 4:

$y' + y = te^{t}\cos t \qquad (1)$

$$y' + y = t\, e^{t}\, \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} = \frac{1}{2}\, t\, e^{(1+i)t} + \frac{1}{2}\, t\, e^{(1-i)t} = h(t) + \overline{h(t)}$$

• $y' + y = 0 \Leftrightarrow y_0 = \lambda e^{-t} \qquad (2)$

• $y' + y = \dfrac{1}{2}\, t\, e^{(1+i)t} \qquad (3)$

Pour chercher une solution particulière de (3),

posons $y = z(t)e^{(1+i)t}$ alors $y' = z'(t)e^{(1+i)t} + (1+i)z(t)e^{(1+i)t}$

$$y \text{ solution de } (3) \iff e^{(1+i)t}\left[z'(t) + (2+i)\ z(t) \right] = \frac{1}{2}te^{(1+i)t}$$

$$\iff z'(t) + (2+i)z(t) = \frac{1}{2}t \qquad (4)$$

Pour obtenir une solution de (4) on pose $z(t) = \alpha t + \beta$ d'où $z'(t) = \alpha$

En portant dans (4): $\alpha + (2 + i)(\alpha t + \beta) = \frac{1}{2}t$

On obtient par identification : $\begin{cases} (2 + i)\alpha = \frac{1}{2} \\ \alpha + (2 + i)\beta = 0 \end{cases}$

Soit: $\alpha = \frac{1}{5} - \frac{1}{10}i$ et $\beta = -\frac{3}{50} + \frac{2}{25}i$

donc $z(t) = \frac{1}{5}t - \frac{3}{50} + i(\frac{-t}{10} + \frac{2}{25})$

et $y = \left[(\frac{1}{5}t - \frac{3}{50}) + i(\frac{-t}{10} + \frac{2}{25})\right]e^{(1+i)t}$

$$y = \left[(\frac{1}{5}t - \frac{3}{50}) + i(\frac{-t}{10} + \frac{2}{25})\right]e^{t}(\cos t + i \sin t)$$

$$2\ \mathcal{R}e(y) = (\frac{2}{5}t - \frac{3}{25})e^{t}\cos t - (\frac{-1}{5}t + \frac{4}{25})e^{t}\sin t$$

Donc une solution particulière de (1) est:

$$y_1 = \frac{2}{5}te^{t}\cos t + \frac{1}{5}te^{t}\sin t - \frac{3}{25}e^{t}\cos t - \frac{4}{25}e^{t}\sin t$$

La solution générale de (1) dans $\mathbb{R}$ est donc :

$$y = \frac{1}{5}te^{t}(2\cos t + \sin t) - \frac{1}{25}e^{t}(3\cos t + 4\sin t) + \lambda e^{-t}$$

III-METHODE DITE DE LAGRANGE OU DE "VARIATION DE LA CONSTANTE":

1- Rappels :

▸ Les fonctions a, b, y et h sont des fonctions complexes d'une variable réelle.

▸ Les fonctions a, b et h sont continues sur l'intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$ et $\forall\, t \in I,\ a(t) \neq 0$.

▸ f solution sur $I \subseteq \mathbb{R}$ de (2) $\Leftrightarrow \forall t \in I,\ a(t)f'(t) + b(t)f(t) = h(t)$

▸ Si f est solution sur $I \subseteq \mathbb{R}$ de (2) alors f et f' sont continues sur I

2- Recherche de l'ensemble des solutions sur $I \subseteq \mathbb{R}$, de $a(t)y' + b(t)y = h(t)$ (2), dans le cas général, par la méthode dite de Lagrange ou de "variation de la constante".

Pour chercher les solutions de (2) on va appliquer le **Théorème 2 du II**.

a- *Recherche d'une solution particulière de (2).*

Soit z une fonction inconnue. On cherche une solution de la forme $y(t) = z(t)\, u(t)$ avec $u(t) = e^{-\Phi(t)}$

$$y' = z'u + zu'$$

y solution de (2) $\Leftrightarrow a(z'u + zu') + b(zu) = h$

$$\Leftrightarrow auz' + (au' + bu)z = h$$

or u est solution de (1) $\Leftrightarrow au' + bu = 0$

d'où zu solution de (2) $\Leftrightarrow auz' = h \Leftrightarrow z' = \dfrac{h}{au}$

$$\Leftrightarrow z' : t \longmapsto \frac{h(t)}{a(t)u(t)} = \frac{h(t)e^{\Phi(t)}}{a(t)}$$

Il suffit de trouver une primitive particulière g de z'.

b- *Conclusion:*

Théorème

Si a, b et h sont continues sur I et si $\forall t \in I$, $a(t) \neq 0$, l'ensemble des solutions de (2) sur $I \subseteq \mathbb{R}$, appelé solution générale, est l'ensemble des fonctions y définies sur I

par : $y(t) = \lambda e^{-\Phi(t)} + g(t)e^{-\Phi(t)}$

avec $\lambda \in \mathbb{C}$

et ϕ une primitive sur I de $\frac{b}{a}$

et g une primitive sur I de: $t \longmapsto \dfrac{h(t)e^{\Phi(t)}}{a(t)}$

c- *Remarque:*

Si a, b, h sont à valeurs réelles, il existe Φ et g à valeurs réelles. On démontre comme **II-3** que : l'ensemble des solutions réelles de (2) sur I est l'ensemble des fonctions y définies sur I par:

$y(t) = \lambda\, e^{-\Phi(t)} + g(t)\, e^{-\Phi(t)}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, Φ et g à valeurs réelles

3-Exemples et exercices:

a- *Les fonctions a, b, h sont à valeurs réelles et on cherche les solutions réelles :*

Exemple:

$ty' + y = \cos t$ (1), $I_1 =]0,+\infty[$ ou $I_2 =]-\infty,0[$

Soit $ty' + y = 0$ (2), ici $\varphi(t) = \frac{1}{t}$, d'où

- si $t > 0$, $\Phi(t) = \ln t$.
- si $t < 0$, $\Phi(t) = \ln(-t)$.

Donc $y = \lambda e^{-\Phi(t)} = \frac{\lambda}{t}$ est solution générale de (2) sur I_1 et sur I_2

Cherchons une solution particulière de (1).

On pose: $y = \frac{z}{t}$, d'où $y' = \frac{z't - z}{t^2} = \frac{z'}{t} - \frac{z}{t^2}$

En remplaçant y et y' dans (1) on obtient:

y solution de (1) $\Longleftrightarrow z' = \cos t$

donc $y = \frac{1}{t} \sin t$ est une solution particulière de (1).

Conclusion:

L'ensemble des solutions réelles de (1) est défini par :

$$y = \frac{1}{t} (\lambda + \sin t) , \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

▸ *Exercices:*

Trouver l'ensemble des solutions réelles des équations suivantes:

1) $y' + 2y = 2\cos t$ (à traiter de deux manières)

2) $(t^2 - 1)y' - ty = 2t$

3) $y' - y\sin t = \sin 2t$

4) $ty' \ln t - (2 + \ln t)y = t$

5) $(1 - 2\sin t)y' - y\cos t = (1 - 2\sin t)\cos t$

b- *Les fonctions a, b et h ne sont pas nécessairement réelles.*

Exemple 1:

Soit l'équation (1) : $(1 + i)ty' + y = 1$ à résoudre sur $I =]0,+\infty[$

Ici $\varphi(t) = \frac{1}{1 + it} = \frac{1 - it}{1 + t^2}$ et $\Phi(t) = \operatorname{Arctan} t - \frac{1}{2} i \ln(1 + t^2)$

d'où : $y = \lambda e^{\operatorname{Arctan} t \,(- \frac{1}{2} i \ln(1 + t^2))}$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$

est la solution générale de : $(1 + i)\, t\, y' + y = 0$

Il est évident que: $y = 1$ est une solution particulière de (1).

Donc la solution générale de (1) est:

$$y = 1 + \lambda\, e^{\mathrm{Arctan}t\,\left(-\frac{1}{2}\, i\, \ln(1 + t^2)\right)} \qquad \text{avec } \lambda \in \mathbb{C}.$$

Exemple 2:

Soit l'équation (1): $iy' + 2ty = t^3$ à résoudre sur $\mathbb{R}$.

Ici $\varphi(t) = -2it$ et $\Phi(t) = -it^2$ d'où :

$y = \lambda e^{it^2}$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$ est la solution générale de: $iy' + 2ty = 0$.

Cherchons une solution particulière de (1).

$$y = z\, e^{it^2} \qquad y' = z'\, e^{it^2} + 2\, i\, t\, z e^{it^2}$$

d'où y solution de (1) $\iff i\, z'\, e^{it^2} = t^3 \iff z' = -\, i\, t^3\, e^{-it^2}$

On pose : $u = \frac{1}{2}\, t^2$; $u' = t$ et $v' = -2\, i\, t\, e^{-it^2}$; $v = e^{-it^2}$

$$z = \left[\frac{1}{2}\, t^2\, e^{-it^2}\right] - \int t\, e^{-it^2} dt = \left[\frac{1}{2}\, t^2\, e^{-it^2}\right] - \left[-\frac{1}{2\,i}\, e^{-it^2}\right]$$

$z = \left[\frac{t^2}{2} - \frac{i}{2}\right] e^{-it^2}$ donc la fonction définie par $y = \frac{1}{2}\ (t^2 - i)$

est une solution particulière de (1).

On en déduit que la solution générale de (1) est

$$y = \lambda\, e^{it^2} + \frac{1}{2}\, (t^2 - i) \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{C}$$

▸ *Exercices:*

Résoudre les équations différentielles suivantes:

1) $y' + (1 + i)y = 4\cos t$

2) $i\, y' + y = 2\sin t$

3) $(1 + i)y' + (1 - i)y = e^{(1 + i)t}$

4) $y' + (1 + it)y = e^{-i\frac{t^2}{2}}$

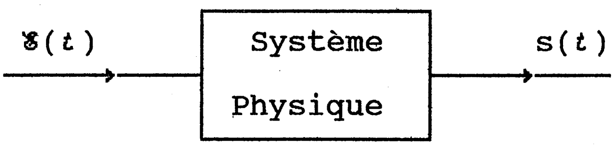
5) $(1 + it)y' - y = t$ On pourra chercher une solution particulière sous la forme $y = \alpha t + \beta$.

6) $y' + ity = \dfrac{e^{-i\frac{t^2}{2}}}{1 + it}$

IV-UTILISATION EN PHYSIQUE D'EQUATIONS DIFFERENTIELLES POUR ETUDIER LES SYSTEMES LINEAIRES.

Par abus de langage et par commodité on utilisera, comme il est d'usage courant en Physique, l'expression équation différentielle *pour les relations du type* $a\, y' + b\, y = h$ *même si* h *n'est pas une fonction continue. La recherche des fonctions* y *se ramène alors à résoudre une équation différentielle sur chacun des intervalles où* h *est continue.*

1- Principe général:



$\gamma(t)$ signal d'entrée (cause)

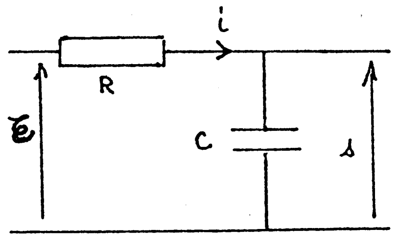
$s(t)$ signal de sortie (effet)

Pour une entrée donnée γ, on obtient un signal de sortie s. Pour déterminer s, il faut à partir des lois de la Physique :

- écrire l'équation différentielle liant γ et s,
- préciser la continuité de s et les conditions initiales vérifiées par s.

2- **Exemples:**

• *En relation avec l'électricité:*



$\mathcal{E}$ et s sont des tensions.

$$i = C\,\frac{ds}{dt}$$

$$\mathcal{E} = R\,i + s = R\,C\,\frac{ds}{dt} + s$$

On pose τ = RC et on écrit l'équation différentielle liant s et $\mathcal{E}$:

$$\tau\,\frac{ds}{dt} + s = \mathcal{E}$$

On cherche ensuite les conditions initiales vérifiées par s.

Par exemple : si initialement le condensateur n'est pas chargé $s(0^-) = 0$.

La tension ne peut pas varier brutalement aux bornes d'un condensateur donc s est continue : $s(0^-) = s(0^+) = 0$.

On doit donc chercher la fonction s nulle en 0, continue sur $\mathbb{R}$ et vérifiant sur chacun des intervalles où $\mathcal{E}$ est continue l'équation différentielle :

$$\tau\,\frac{ds}{dt} + s = \mathcal{E}$$

Etude de la réponse à un créneau:

Cherchons une fonction s continue sur $\mathbb{R}$, telle que $s(0^+) = 0$

et que : $$\tau\,\frac{ds}{dt} + s = h(t) \text{ avec } \begin{cases} h(t) = 0 \text{ pour } t < 0 \\ h(t) = 1 \text{ pour } 0 \le t < 1 \\ h(t) = 0 \text{ pour } t \ge 1 \end{cases}$$

Appliquons le Théorème 5 successivement sur les intervalles $]-\infty\ ,\ 0[$, $[0\ ,\ 1[$ et sur $[1\ ,\ +\infty[$.

$$\text{Sur }]-\infty;0[\qquad \tau \frac{ds}{dt} + s = 0$$

$$s_1(t) = \alpha\, e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$s_1(0^-) = \lim_{t \xrightarrow{>} 0} s_1(t) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \Leftrightarrow s_1(t) = 0$$

$$\text{Sur } [0;1[\qquad \tau \frac{ds}{dt} + s = 1$$

$$s_2(t) = 1 + \lambda e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$s_2(0) = 0 \Leftrightarrow 1 + \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1 \Leftrightarrow s_2(t) = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\text{Sur } [1;+\infty[\qquad \tau \frac{ds}{dt} + s = 0$$

$$s_3(t) = \mu e^{-\frac{t}{\tau}}$$

avec $s_3(1) = \lim\limits_{t \xrightarrow[>1]{} 1} s_1(t) = s_2(1^-) = 1 - e^{-\frac{1}{\tau}}$

d'où $\quad \mu e^{-\frac{1}{\tau}} = 1 - e^{-\frac{1}{\tau}} \Leftrightarrow \mu = e^{\frac{1}{\tau}} - 1$

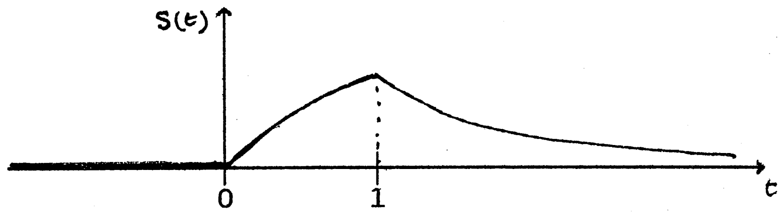
donc $\quad s_3(t) = (e^{\frac{1}{\tau}} - 1)e^{-\frac{t}{\tau}}$

Conclusion:

$$s(t) = 0 \qquad \text{pour } t < 0$$

$$s(t) = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad \text{pour } 0 \leq t < 1$$

$$s(t) = (e^{\frac{1}{\tau}} - 1)\, e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad \text{pour } t \geq 1$$

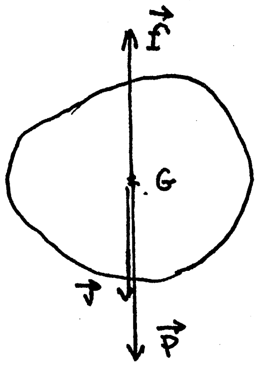


● *En relation avec la mécanique:*

Chute verticale d'un corps soumis à des frottements visqueux.

Le poids P du corps est la grandeur d'entrée. C'est lui qui provoque la chute du corps.

La grandeur de sortie est la vitesse prise par le corps.



$\vec{f}$ force de frottement visqueux

$\vec{f} = -k\vec{v}$ k = constante

Pour chercher l'équation différentielle liant P et v, on applique le principe fondamental de la dynamique : $\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}$

$\vec{a}$ vecteur accélération, m masse du corps et $\sum \vec{F}_{ext}$ la somme des forces extérieures appliquées au corps : $\vec{f}$ et $\vec{P}$

$$\vec{f} + \vec{P} = m\vec{a}$$

Tous les vecteurs sont colinéaires, on peut transformer cette relation en une relation algébrique en projetant sur l'axe vertical Ox.

Avec $a = \frac{dv}{dt}$ on a : $m\,a = m\,\frac{dv}{dt} = -kv + P$.

On obtient l'équation différentielle liant P et v :
$m\,\frac{dv}{dt} + kv = P$ qui peut s'écrire $\frac{m}{k}\frac{dv}{dt} + v = \frac{P}{k}$

On pose $\tau = \frac{m}{k}$, on obtient $\tau\,\frac{dv}{dt} + v = \frac{P}{k}$.

On cherche ensuite les conditions initiales sur v.

Exemple : Si le corps est lâché sans vitesse initiale $v(0^-) = 0$.

Il ne peut pas y avoir de variation brusque de la vitesse (principe de l'inertie) donc la vitesse est continue :

$$v(0^-) = v(0^+) = 0.$$

On doit donc chercher la fonction v nulle en 0, continue sur $\mathbb{R}$ et vérifiant l'équation différentielle :

$$\tau\,\frac{dv}{dt} + v = \frac{P}{k}$$

- *En relation avec la chaleur:*

Chauffage d'un local avec θ_{ext} = constante.
La puissance P fournie par le radiateur est la grandeur d'entrée.

Exemple: Si le local n'a pas été chauffé préalablement $\theta_a(0^-) = \theta_{ext}$ donc $\theta(0^-) = 0$.

Il ne peut pas y avoir de variation brusque de la température donc θ est continue : $\theta(0^-) = \theta(0^+) = 0$.

On doit donc chercher la fonction θ nulle en 0, continue sur $\mathbb{R}$ et vérifiant sur chacun des intervalles où RP est continue l'équation différentielle :

$$\tau \frac{d\theta}{dt} + \theta = RP$$

La puissance fournie par le chauffage peut être une constante

pour $t > 0$ $P(t) = P_o\, \mathcal{U}(t)$

Cette puissance peut être aussi variable si le chauffage est associé à un système de régulation.

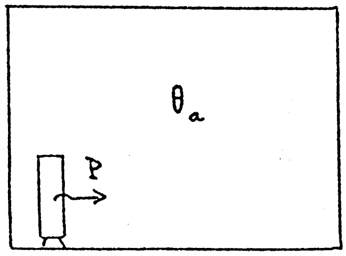
3- Remarques générales sur l'écriture de l'équation différentielle du premier ordre à coefficients constants en Physique.

Dans les trois exemples on a écrit l'équation différentielle sous la forme :

$$\tau \frac{ds}{dt} + s = \gamma$$

avec dans l'exemple 1 : γ tension d'entrée
s tension de sortie

La grandeur de sortie est la différence $\theta_a - \theta_{ext}$ notée θ température réduite du local.



La puissance P fournie par le radiateur sert à :

- chauffer le local (augmenter θ_a)
- compenser les pertes avec l'extérieur.

$P = P_{utile} + P_{pertes}$

Si on note C la capacité calorifique totale du local: $P_{utile} = C \dfrac{d\theta_a}{dt}$

Si on note R la résistance thermique totale du local (liée à l'isolation) : $P_{pertes} = \dfrac{\theta_a - \theta_{ext}}{R}$

$$P = C \frac{d\theta_a}{dt} + \frac{(\theta_a - \theta_{ext})}{R}$$

On peut écrire l'équation différentielle sous la forme :

$$RC \frac{d\theta_a}{dt} + \theta_a = PR + \theta_{ext}$$

R et C étant des constantes caractéristiques du local, on pose $\tau = R\,C$ constante de temps du local.

$\theta = \theta_a - \theta_{ext}$ $\qquad \dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{d\theta_a}{dt}$ $\qquad$ car θ_{ext} = constante

$$\tau \frac{d\theta}{dt} + \theta = RP$$

On cherche ensuite les conditions initiales sur θ .

avec dans l'exemple 2 : $\mathcal{E} = \frac{P}{k}$ grandeur d'entrée homogène à une vitesse.
s = v grandeur de sortie vitesse du corps.

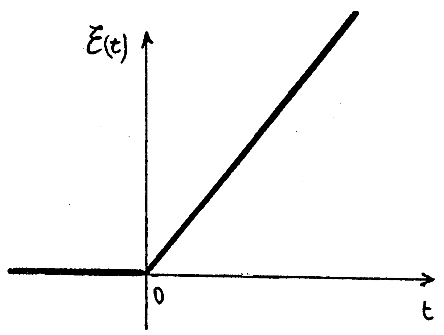
avec dans l'exemple 3 : $\mathcal{E}$ = R P grandeur d'entrée homogène à une température.
s = θ grandeur de sortie température réduite du local.

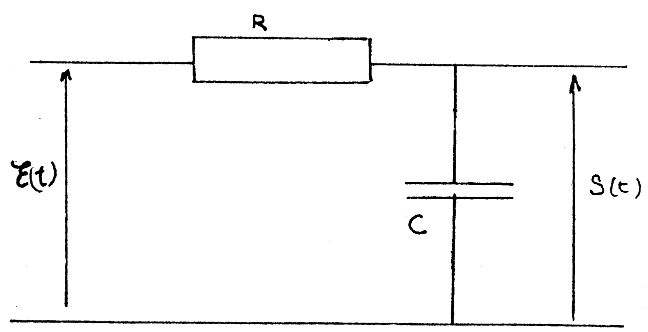
Cette forme d'écriture permet de faire apparaître des grandeurs d'entrée et de sortie de même nature physique, même si dans l'exemple 2 la grandeur d'entrée réelle est le poids P et dans l'exemple 3 la grandeur d'entrée réelle est la puissance fournie par le chauffage.

Le but de cette écriture est de pouvoir par la suite faire apparaître une fonction de transfert pour laquelle l'entrée et la sortie sont de même nature.

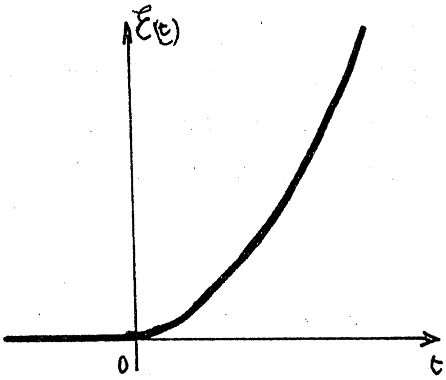
4-Exercices:

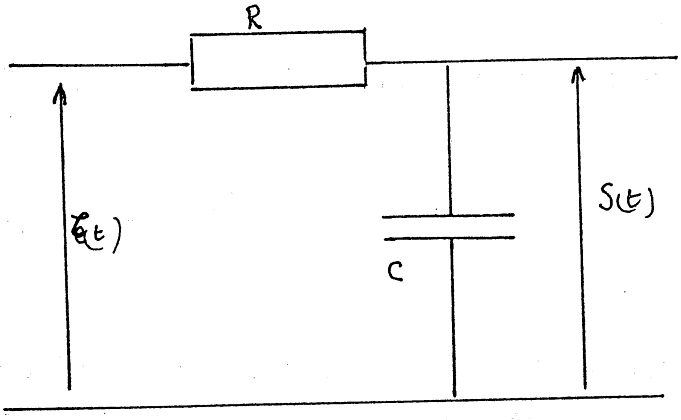
1) $\tau \frac{ds}{dt} + s = at$



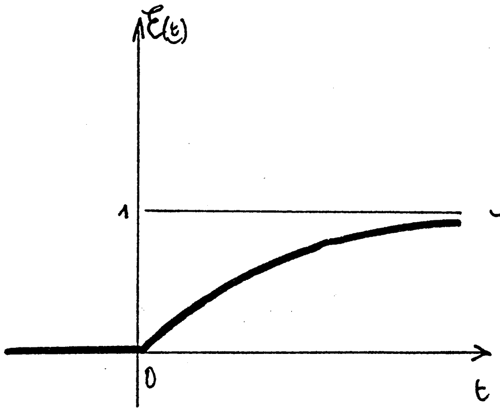


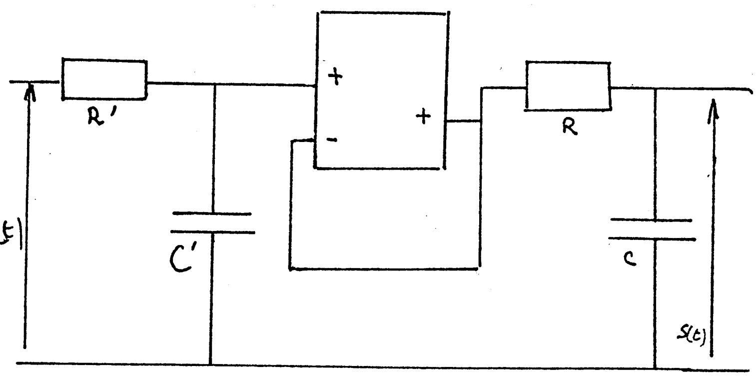
2) $\tau \dfrac{ds}{dt} + s = at^2$





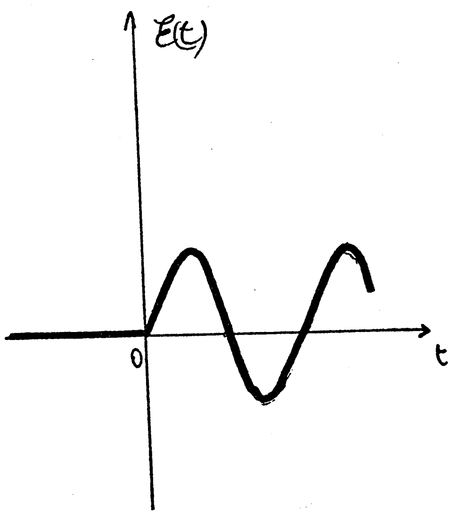
3) $\tau \dfrac{ds}{dt} + s = 1 - e^{-\frac{t}{\tau'}}$ avec $\tau \neq \tau'$ puis $\tau = \tau'$

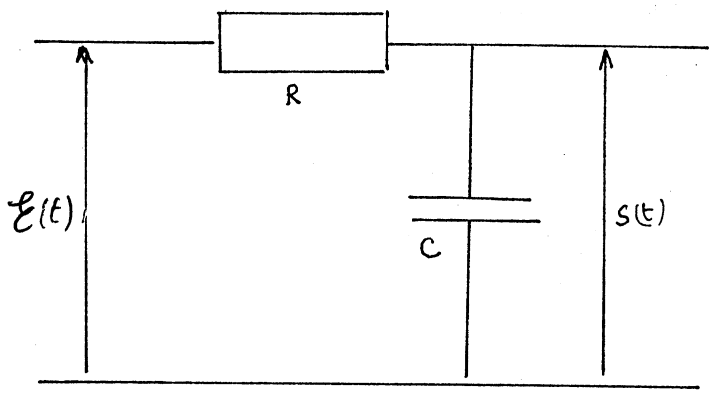




$R'C' \neq RC$
$R'C' = RC$

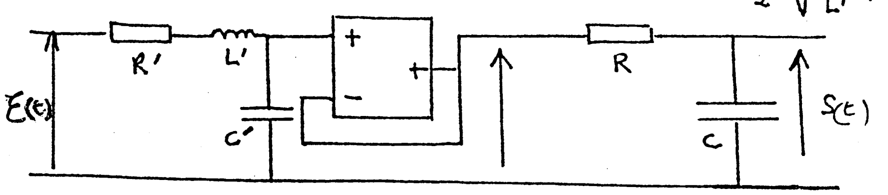
4) $\tau \dfrac{ds}{dt} + s = \sin\omega t$





5) $\tau \dfrac{ds}{dt} + s = 1 + \alpha t \; e^{-\frac{t}{\tau_1}} + \beta \; e^{-\frac{t}{\tau_1}}$

$\dfrac{R'}{2}\sqrt{\dfrac{C'}{L'}} > 1$



$\dfrac{R'}{2}\sqrt{\dfrac{C'}{L'}} < 1$

6) $\tau \dfrac{ds}{dt} + s = 1 - \dfrac{e^{-m\omega_0 t}}{\sin\varphi} \sin(\omega_p t + \varphi)$

même montage.

V-EXERCICES SUR LES EQUATIONS DIFFERENTIELLES DU PREMIER ORDRE.

Résoudre les équations différentielles suivantes. Pour les équations à coefficients réels on ne donnera que les solutions à valeurs réelles.

1) $y' - y = x^3$.

2) $y' + 2y = 2x^2 - 3x + 5$

3) $y' + 2y = x^2 - 3x + 5$

4) $y' + 3y = - x^2 + 2x + 3$

5) $y' + 2y = e^{3x}$

6) $y' + 2y = e^{-2x}$

7) $y' + 2y = \sin x$

8) $y' + 2y = \sin 2x$

9) $y' + 3y = 2x + e^x$

10) $2y' - y = \cos x$

11) $y' - y = x + \cos x$

12) $2y' + y = 2x^2 \cos 3x$

13) $y' + 2y = x\cos 2x$

14) $2y' + y = (5x^2 + 4x)\, e^{2x}$

15) $2y' + y = x\cos x$

16) $y' + 3y = e^x \cos x$

17) $2y' - y = x\, e^x \cos x$

18) $2y' + y = x^2 e^x$

19) $2y' + y = xe^{-\frac{x}{2}}$

20) $y' - 2y = e^{2x} \cos x$

21) $y' + y = xe^{-x} + \cos x$

22) $2y' + y = 2\cos 2x + 3\sin 2x$

23) $y' + y = x^2 e^{-x}$

24) $y' - 2y = e^{2x} \sin x$

25) $y' + y = x\sin x$

26) $y' - y = x\sin 3x$

27) $y' - 3y = xe^{3x} + 3x^3$

28) $2y' + y = e^{-\frac{x}{2}} \cos 2x$

29) $y' + y = x\sin x$

30) $y' - y = x\sin 3x$

31) $2y' + 4y = \cos 3x + 2e^{-x}$

32) $2iy' + (1 + i)y = x^2 + 3ix + 1$

33) $iy' + 2y = e^{-2ix}$

34) $y' + 2iy = 2\cos 2x$

35) $(1 + i)y' + (1 - i)y = e^{(1 + i)x}$

Représenter graphiquement la fonction h et trouver la fonction s nulle en 0, continue sur $\mathbb{R}$ et vérifiant sur chacun des intervalles où h est continue des équations différentielles de la forme :

$$\tau s' + s = h$$

avec $\mathcal{U}(t) = 1$ si $t \geq 0$, $\mathcal{U}(t) = 0$ si $t < 0$ (fonction échelon) et :

36) $h(t) = t\mathcal{U}(t) - (t - 1)\mathcal{U}(t - 1)$

37) $h(t) = (t - 1)\mathcal{U}(t - 1) - (t - 2)\mathcal{U}(t - 2) - \mathcal{U}(t - 2)$

38) $h(t) = \mathcal{U}(t)\sin t - \mathcal{U}(t - \frac{\pi}{2}) \cos(t - \frac{\pi}{2})$

39) $h(t) = (\mathcal{U}(t) - \mathcal{U}(t - \frac{\pi}{2}))\cos t$ et $\tau = 1$

40) $\begin{cases} h(t) = 0 \text{ si } t < 0 \\ h(t) = \sin t \quad \text{si } t \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ h(t) = 0 \text{ si } t > \frac{\pi}{2} \end{cases}$

41) $\begin{cases} h(t) = 0 \text{ si } t < 1 \\ h(t) = (t - 1)\, e^{-(t - 1)} \quad \text{si } t \in [1,2[\\ h(t) = 0 \text{ si } t \geq 2 \end{cases}$

42) $\begin{cases} h(t) = 0 \text{ si } t < 0 \\ h(t) = e^{-t}\sin t \quad \text{si } t \in [0, \frac{\pi}{2}[\\ h(t) = 0 \quad \text{si } t \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$

Résoudre les équations différentielles suivantes :

43) $xy' - (\ln x + 2)\, y = x^2 \ln x$ 44) $2xy' + y = \ln x$

45) $xy' - 2y - \ln x = 0$

46) $-r' \sin 2\theta + r\cos 2\theta = \dfrac{1}{\sqrt{\cos\theta}}$

On pourra montrer que $r = \sqrt{\cos 2\theta}$ est une solution particulière.

47) $xy' + y = x\cos x$

48) $(1 + x)y' + y = 1 + \ln(1 + x)$

49) $y + (1 + x)y' = 2\ln(1 + x) - (4x + 1)$

50) $xy' + y = \ln|x|$

51) $y' + xy = x^3$

52) $xy' - 2y = x^4 \cos x$

53) $x^2y' + y = x^2e^{\frac{1}{x}}$

54) $x(1 + x^2)y' - y = x^3$

55) $x^2y' + 2xy = 3$

56) $xy' + y = x\sin x$

57) $xy' - y = x^2e^x$

58) $y'\sin x - y\cos x = \sin x - x\cos x$

59) $y' + y\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$

60) $2xy' + y = \frac{1}{x}$

61) $y' + (x - 2)y = -x^2 - 2x + 9$

62) $xy' - xy = \ln x$

63) $y'\sin x - y\cos x = \tan x$

64) $(1 + x^2)y' + 2xy = 4x$

65) $(1 - x^2)y' + 2xy = 4x$

66) $(x + 1)y' - y = x^2 + 1$

67) $xy' + y = x\cos x$

68) $(1 - x^2)y' + xy = x$

69) $(1 + x^2)y' + xy = 1$

70) $y' + 2xy = 1 + 2x^2$

71) $(1 - x^2)y' + 2xy = 1$

72) $xy' + y = x\sin x$

73) $y + xy' = \frac{1}{2}$

74) $(1 + x)y' - 2xy = (1 - 2x)(1 + x)$

75) $xy' - y = x^2e^x$

76) $y' + 2y = (1 + \tan x)^2$

77) $y' + y\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$

78) $xy' + y = e^{ix}$

79) $2xy' + y = \frac{1}{x}$

80) $y'\sin^2 x - y\tan x = \tan x$

81) $(1 + x^2)y' + 2xy = \tan x$

82) $y' + y\cot x = 5e^{\cos x}$

83) $x^2y' + y = 1$

84) $xy' + y = x^2\sin x$

85) $(x^2 - 1)y' - 2xy = x^3 - x^2$

86) $xy' - y = \ln x$

87) $y'\cos x - y\sin x = e^{-x}\cos x$

88) $x^2y' - (2x + 2)y = x^2$

89) $xy' + y = -\ln x$

90) $y' - y\sin x = \sin 2x$

91) $xy'\ln x - y = x - x\ln x$

92) $y'\sin x - y = \tan\frac{x}{2}$

93) $(x^2 + 1)^3y' + 2x(x^2 + 1)^2y = 2x^3$

94) $y'\sin^2 x - y = -1 - \cotan x$

95) $xy' + y = e^{2x}\cos x$

96) $y'\cos x + 3y\sin x = e^{x}\cos^5 x$

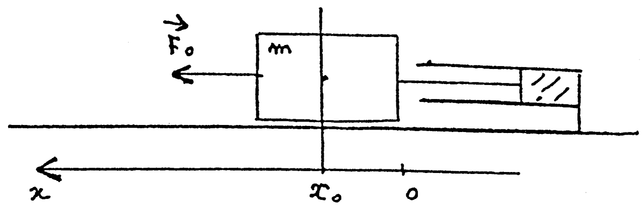
97) $(1 + x^2)y' + xy = 2x$

98) $y'\sin x - 4y\cos x = e^{x}\sin^6 x$

99) $y'\sin^2 x + \frac{1}{2}y\sin 2x = \cos^3 x$

100) $y'\cos x + y\sin x = e^{-x}\cos^2 x$

101) Un système comprend un solide de masse m et un amortisseur de coefficient d'amortissement C (m et C sont des constantes positives et ~~m ≠~~ C).



Le solide est écarté de sa position d'équilibre d'une distance x_o et est abandonné sans vitesse initiale. En outre ce solide de masse m est soumis :

1) à une force dépendant du temps de la forme : $F(t) = F_o\ e^{-t}$

L'équation différentielle du mouvement est alors :

$$m\,\frac{d^2x}{dt^2} + C\,\frac{dx}{dt} = F_o\ e^{-t} \qquad (1)$$

2) à une force périodique de la forme : $F(t) = F_o \cos\omega t$

L'équation différentielle du mouvement est alors :

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + C \frac{dx}{dt} = F_o \cos\omega t \qquad (2)$$

On pose $v = \dfrac{dx}{dt}$, l'équation (1) devient : $m \dfrac{dv}{dt} + C\, v = F_o e^{-t}$ (3)

et l'équation (2) devient : $m \dfrac{dv}{dt} + C\, v = F_o \cos\omega t$ (4)

a)- Résoudre sur $[0;+\infty[$ les équations (3) et (4) et donner pour chacune d'elles la solution vérifiant la condition initiale.

b)- En déduire les solutions des équations (1) et (2) vérifiant les conditions initiales.

EQUATIONS DIFFERENTIELLES

LINEAIRES

DU SECOND ORDRE

A COEFFICIENTS CONSTANTS

I- EQUATIONS DIFFERENTIELLES LINEAIRES A COEFFICIENTS CONSTANTS ET A SECOND MEMBRE NUL: $ay'' + by' + cy = 0$ (3) avec $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}, c \in \mathbb{C}$.

1- Définition.

f est solution de (3) sur l'intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$ si et seulement si $\forall\, t \in I, \quad a\, f''(t) + b\, f'(t) + c\, f(t) = 0$

Remarque:

Si f est solution sur $I \subseteq \mathbb{R}$ de (3) alors f, f' et f'' sont continues sur I

En effet, f et f' sont dérivables sur I, donc continues sur I, de plus $f'' = -\frac{b}{a} f' - \frac{c}{a} f$ d'où f'' est continue sur I.

2- Recherche de l'ensemble des solutions de (3) sur $I \subseteq \mathbb{R}$.

a- *Existe-t-il $r \in \mathbb{C}$ tel que: $y = e^{rt}$ soit solution de (3)?*

$$y = e^{rt} \text{ solution de (3)} \iff (ar^2 + br + c)e^{rt} = 0$$
$$\iff ar^2 + br + c = 0$$

L'équation $ar^2 + br + c = 0$ se nomme équation caractéristique de (3)

Il existe au moins un nombre complexe r_1 solution de l'équation caractéristique, donc au moins une solution de (3) sur I de la forme $y = e^{rt}$.

b- *Cherchons toutes les fonctions deux fois continûment dérivables sur I qui sont solutions de l'équation (3).*

Toute solution y de l'équation (3) peut se mettre sous la forme:

$$y = ze^{r_1 t} \quad \text{où } z \text{ est une fonction inconnue de } t.$$

$$y = z\,e^{r_1 t} \Rightarrow y' = z'\,e^{r_1 t} + r_1\,z\,e^{r_1 t}$$

$$\Rightarrow y'' = z''\,e^{r_1 t} + 2\,r_1\,z'\,e^{r_1 t} + r_1^2\,z\,e^{r_1 t}$$

$$ze^{r_1 t} \text{ solution de } (3) \Leftrightarrow az'' + (2ar_1 + b)z' + (ar_1^2 + br_1 + c)z = 0 \;.$$

$$\Leftrightarrow az'' + (2ar_1 + b)z' = 0$$

Donc pour trouver l'ensemble des solutions de (3) sur I, nous serons amenés à résoudre sur I l'équation: $az'' + (2ar_1 + b)z' = 0$. Cette équation peut se ramener à une équation différentielle du premier ordre à coefficients constants en posant, par exemple, $u = z'$.

Remarque:

si a, b, c sont réels, $2ar_1 + b$ n'est pas nécessairement réel.

c-*Détermination de l'ensemble des solutions de (3) dans le cas où r_1 est racine double de l'équation caractéristique.*

C'est le cas où $b^2 - 4ac = 0$, d'où $r_1 = -\dfrac{b}{2a}$

α- Cas où $a \neq 0$, b et c sont des nombres complexes quelconques:

$$y = ze^{r_1 t} \text{ solution de } (3) \Leftrightarrow az'' = 0 \Leftrightarrow z' = A \Leftrightarrow z = At + B$$

$$\Leftrightarrow y = (At + B)\,e^{r_1 t}\;.$$

Donc:

> **Si $b^2 - 4ac = 0$,**
>
> **l'ensemble des solutions de (3) sur tout $I \subseteq \mathbb{R}$, appelé solution générale, est l'ensemble des fonctions y définies sur I par :**
>
> $$y(t) = (At + B)e^{r_1 t} \quad \text{avec } A \in \mathbb{C} \text{ et } B \in \mathbb{C}$$

β- Cas particulier où $a \neq 0$, b et c sont des nombres réels:

On va alors déterminer l'ensemble des solutions à valeurs réelles (seul cas intéressant en Physique jusqu'au niveau BTS).

$$y \text{ réel} \Leftrightarrow \forall\, t \in I,\ y = \bar{y} \Leftrightarrow \forall\, t \in I,\quad At + B = \bar{A}t + \bar{B}$$

$$\Leftrightarrow \forall\, t \in I,\quad (A - \bar{A})t + (B - \bar{B}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A = \bar{A} \\ B = \bar{B} \end{cases} \Leftrightarrow A \text{ réel et } B \text{ réel.}$$

Donc:

> **Si a, b et c sont réels et si $b^2 - 4ac = 0$,**
>
> **l'ensemble des solutions réelles de (3) sur tout $I \subseteq \mathbb{R}$, appelé solution générale réelle, est l'ensemble des fonctions y définies sur I par :**
>
> $$y(t) = (At + B)e^{r_1 t} \quad \text{avec } A \in \mathbb{R} \text{ et } B \in \mathbb{R}$$

d- *Détermination de l'ensemble des solutions de (3) dans le cas où l'équation caractéristique a deux racines distinctes r_1 et r_2.*

C'est le cas où $\Delta = b^2 - 4ac \neq 0$

α- Cas où $a \neq 0$, b et c sont des nombres complexes quelconques:

Cherchons alors les solutions de $az'' + (2ar_1 + b)z' = 0$.

$$az'' + (2ar_1 + b)z' = 0 \iff z' = \lambda e^{(-2r_1 - \frac{b}{a})t} \quad \text{et } \lambda \in \mathbb{C}\ .$$

$$\text{or } r_1 + r_2 = -\frac{b}{a} \Rightarrow z' = \lambda\ e^{(r_2 - r_1)t} \iff z = \frac{\lambda}{r_2 - r_1}\ e^{(r_2 - r_1)t} + \mu$$

$$\text{d'où } y = \frac{\lambda}{r_2 - r_1}\ e^{r_2 t} + \mu\ e^{r_1 t}\ .$$

On pose $A = \dfrac{\lambda}{r_2 - r_1}$ et $B = \mu$.

Donc:

> Si $b^2 - 4ac \neq 0$,
>
> l'ensemble des solutions de (3) sur tout $I \subseteq \mathbb{R}$, appelé solution générale, est l'ensemble des fonctions y définies sur I par :
>
> $$y(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t} \quad \text{avec } A \in \mathbb{C} \text{ et } B \in \mathbb{C}$$

β- Cas particulier où $a \neq 0$, b et c sont des nombres réels:

On va alors déterminer l'ensemble des solutions à valeurs réelles (seul cas intéressant en Physique jusqu'au niveau BTS).

■ $\Delta = b^2 - 4ac > 0$

$r_1 \in \mathbb{R}$, $r_2 \in \mathbb{R}$ et $r_1 \neq r_2$

$$y \text{ réel} \iff \forall\ t \in I,\ y = \bar{y} \iff A\ e^{r_1 t} + B\ e^{r_2 t} = \bar{A}\ e^{r_1 t} + \bar{B}\ e^{r_2 t}$$

$$\iff \forall\ t \in I,\ (A - \bar{A})e^{r_1 t} + (B - \bar{B})e^{r_2 t} = 0$$

Soit écrivant cette égalité avec t = 0, puis avec t = 1 le système:

$$\begin{cases} (A - \bar{A}) + (B - \bar{B}) = 0 \\ (A - \bar{A})e^{r_1} + (B - \bar{B})e^{r_2} = 0 \end{cases}$$

système dont le déterminant est : $e^{r_2} - e^{r_1}$

Or $r_1 \neq r_2$ donc le déterminant du système est non nul.

La seule solution du système est $A - \bar{A} = 0$ et $B - \bar{B} = 0$

$A - \bar{A} = 0$ et $B - \bar{B} = 0 \Leftrightarrow A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}$

Donc :

Si a, b et c sont réels et si $b^2 - 4ac > 0$, l'ensemble des solutions réelles de (3) sur tout $I \subseteq \mathbb{R}$, appelé solution générale réelle, est l'ensemble des fonctions y définies sur I par : $$y(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t} \quad \text{avec } A \in \mathbb{R} \text{ et } B \in \mathbb{R}$$

■ $\underline{\Delta = b^2 - 4ac < 0}$

$r_1 \in \mathbb{C}$, $r_2 \in \mathbb{C}$ et $\bar{r}_1 = r_2$

$r_1 = \alpha + i\beta$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}^*$

$$y \text{ réel} \Leftrightarrow \forall\, t \in I,\ y = \bar{y} \Leftrightarrow A\,e^{r_1 t} + B\,e^{\bar{r}_1 t} = \bar{A}\,e^{r_1 t} + \bar{B}\,e^{r_1 t}$$

$$\Leftrightarrow \forall\, t \in I,\ (A - \bar{B})\,e^{r_1 t} + (B - \bar{A})\,e^{\bar{r}_1 t} = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall\, t \in I,\ (A - \bar{B})\,e^{(\alpha + i\beta)t} + (B - \bar{A})\,e^{(\alpha - i\beta)t} = 0$$

y réel $\Leftrightarrow \forall\, t \in I,\ (A - \bar{B})\, e^{i\beta t} + (B - \bar{A})\, e^{-i\beta t} = 0$

Soit écrivant cette égalité avec $t = 0$, puis avec $t = \frac{\pi}{2\beta}$ le système:

$$\begin{cases} (A - \bar{B}) + (B - \bar{A}) = 0 \\ \\ (A - \bar{B}) - (B - \bar{A}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow A - \bar{B} = B - \bar{A} = 0$$

D'où l'ensemble des solutions réelles est défini par :

$$y = A\, e^{r_1 t} + \bar{A}\, e^{\bar{r}_1 t} = 2\, \mathcal{R}e\left[A \quad e^{r_1 t}\right]$$

Posons $A = \lambda + i\mu$ et $r_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda, \mu, \alpha, \beta$ appartenant à $\mathbb{R}$

$$A\, e^{r_1 t} = (\lambda + i\mu)\, e^{\alpha t}\ (\cos\beta t + i \sin\beta t)$$

$$2\, \mathcal{R}e\left[A\, e^{r_1 t}\right] = e^{\alpha t}(2\lambda \cos\beta t - 2\mu \sin\beta t)$$

On posera $2\lambda = k_1$ et $-2\mu = k_2$ d'où :

Si a, b et c sont réels et si $b^2 - 4ac < 0$,

l'ensemble des solutions réelles de (3) sur tout $I \subseteq \mathbb{R}$,appelé solution générale réelle, est l'ensemble des fonctions y définies sur I par :

$$y(t) = e^{\alpha t}(k_1 \cos\beta t + k_2 \sin \beta t) \quad k_1 \in \mathbb{R},\ k_2 \in \mathbb{R},\ \alpha \in \mathbb{R} \text{ et } \beta \in \mathbb{R}$$

ou $y(t) = Ke^{\alpha t} \cos(\beta t + \varphi) \quad K \in \mathbb{R}$ et $\varphi \in \mathbb{R}$

avec $K = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$, $\cos\varphi = \dfrac{k_1}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}}$ et $\sin\varphi = -\dfrac{k_2}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}}$

II-EQUATIONS DIFFERENTIELLES LINEAIRES A COEFFICIENTS CONSTANTS ET A SECOND MEMBRE NON NUL: $ay'' + by' + cy = h(t)$ (4) avec $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$, $c \in \mathbb{C}$.

Hypothèse

La fonction h est une fonction complexe d'une variable réelle continue sur l'intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$.

1-Définition.

f est solution de (4) sur l'intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$

si et seulement si

$\forall\, t \in I,\ af''(t) + bf'(t) + cf(t) = h(t)$

Remarque:

Si f est solution sur $I \subseteq \mathbb{R}$ de (4) alors f, f' et f'' sont continues sur I

En effet, f et f' sont dérivables sur I, donc continues sur I, de plus $f'' = -\frac{b}{a} f' - \frac{c}{a} f + \frac{1}{a} h$ et h est continue sur I d'où f'' est continue sur I.

2-Recherche de l'ensemble des solutions de (4) sur $I \subseteq \mathbb{R}$.

a- Théorème

Théorème 1

$$\left.\begin{array}{l} y_1 \text{ solution sur I de } (\alpha) : ay'' + by' + cy = h_1(t) \\ y_2 \text{ solution sur I de } (\beta) : ay'' + by' + cy = h_2(t) \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$\forall\, \alpha \in \mathbb{C}$, $\forall\, \beta \in \mathbb{C}$, $\alpha\, y_1 + \beta\, y_2$ est une solution sur I de

$$ay'' + by' + cy = \alpha\, h_1(t) + \beta\, h_2(t)$$

Démonstration: immédiate.

b- Théorème

Théorème 2

Si h est continue sur $I \subseteq \mathbb{R}$, l'ensemble des solutions sur I, appelé solution générale, de l'équation:

$$ay'' + by' + cy = h(t) \quad (4)$$

est la somme d'une solution particulière sur I de l'équation (4) et de la solution générale sur I de l'équation:

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad (3)$$

Démonstration: identique à celle proposée pour les équations du premier ordre (II-3)

c- Théorème

Théorème 3 Si a, b, c sont réels

y_1 solution sur $I \subseteq \mathbb{R}$ de (4) $\Leftrightarrow$ $\overline{y}_1$ solution sur $I \subseteq \mathbb{R}$ de

$$ay'' + by' + cy = \overline{h(t)}$$

Démonstration: identique à celle proposée pour les équations du premier ordre (II-4-a)

d- Théorème

Théorème 4 Si a, b, c sont réels,

Si y_1 est solution sur $I \subseteq \mathbb{R}$ de l'équation $ay'' + by' + cy = h(t)$

alors $y_1 + \overline{y}_1 = 2\,\mathcal{R}e\,y_1$ est solution sur $I \subseteq \mathbb{R}$ de l'équation

$$ay'' + by' + cy = h(t) + \overline{h(t)}$$

Démonstration: immédiate.

e-Ensemble des solutions à valeurs réelles de l'équation (4) si a, b et c sont des nombres réels et si h est à valeurs réelles.

On démontre, comme pour les équations du premier ordre (II-4-c), que l'équation (4) a au moins une solution à valeurs réelles y_2 sur I . En se référant, de plus, à (I-2) de ce chapitre, on en déduit immédiatement que la solution générale, à valeurs réelles, sur I de l'équation (4) est :

Si $b^2 - 4ac > 0$, $y = y_2 + Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$ $\quad A \in \mathbb{R}, \quad B \in \mathbb{R}$

Si $b^2 - 4ac = 0$, $y = y_2 + (At + B)e^{r_0 t}$ $\quad A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R}$

Si $b^2 - 4ac < 0$,

$$y = y_2 + e^{\alpha t} (A\cos\beta t + B\sin\beta t) \quad A \in \mathbb{R},\ B \in \mathbb{R},\ \alpha \in \mathbb{R},\ \beta \in \mathbb{R}.$$

3- Résolution dans le cas où $h(t) = e^{\alpha t}P(t)$ avec $\alpha \in \mathbb{C}$ et $P(t)$ polynôme à coefficients dans $\mathbb{C}$.

a- Préliminaires

Montrons par récurrence sur n, degré du polynôme P, que l'équation différentielle (E) :

$$a\, y'' + b\, y' + c\, y = P, \text{ où } c \neq 0$$

admet sur $\mathbb{R}$ une solution $y = Q$ où Q est un polynôme de degré n.

Si $n = 0$, $P(t) = \alpha$ (constante) alors $y = \frac{1}{c}\alpha$ est solution de (E)

Soit P un polynôme de degré n, s'il existe $y = Q(t)$ solution de (E) alors $\forall\, t \in \mathbb{R}$, $a\, y''' + b\, y'' + c\, y' = P'(t)$ où P' dérivée de P est un polynôme de degré n - 1.

Réciproquement, il existe Q_1 polynôme de degré $n - 1$ vérifiant $\forall t \in \mathbb{R}$, $a\, Q_1''(t) + b\, Q_1'(t) + c\, Q_1(t) = P'(t)$ (hypothèse de récurrence)

Soit Q une primitive de Q_1 sur $\mathbb{R}$, alors $a\, Q'' + b\, Q' + c\, Q$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de $a\, Q_1'' + b\, Q_1' + c\, Q_1$ et donc $\forall t \in \mathbb{R}$,
$a\, Q''(t) + b\, Q'(t) + c\, Q(t) = P(t) + k$

On constate que $y = Q - \dfrac{k}{c}$ est un polynôme de degré n solution de (E)

b-*Pour chercher une solution particulière de*

$$ay'' + by' + cy = e^{\alpha t}P(t) \quad (4)$$

On pose $y_1 = ze^{\alpha t}$, on a donc $y_1' = z'e^{\alpha t} + \alpha ze^{\alpha t}$

et $y_1'' = z''e^{\alpha t} + 2\alpha z'e^{\alpha t} + \alpha^2 ze^{\alpha t}$

y_1 solution de (4) $\Longleftrightarrow az'' + (2a\alpha + b)z' + (a\alpha^2 + b\alpha + c)z = P(t) \quad (5)$.

- 1^er^ cas:

α n'est pas racine de l'équation caractéristique:
$a\alpha^2 + b\alpha + c \neq 0$

On cherche par identification un polynôme $z_0(t)$ de degré d°P solution de (5).

Exemple: $y'' - 2y' - 3y = (t + 1)e^t$.

- 2^ème^ cas:

α est racine simple de l'équation caractéristique:

$2a\alpha + b \neq 0$ et $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$

On cherche par identification un polynôme $z_o(t)$ de degré d°P + 1 solution de (5).

Exemple: $y'' + 2y' - 3y = (t + 1)e^t$.

● $3^{ème}$ cas:

α est racine double de l'équation caractéristique:

$2a\alpha + b = 0$ et $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$

alors $z_o''(t) = \frac{1}{a}P(t)$, on en déduit $z_o(t)$

Exemple: $y'' - 2y' + y = e^t$.

● Conclusion.

Pour trouver une solution particulière de (4), on cherche une solution particulière z_o de (5). Alors, y_1 défini par $y_1(t) = z_o(t)e^{\alpha t}$ est une solution particulière de (4).

On obtient la solution générale de (4) en ajoutant à y_1 la solution générale de $a\,y'' + b\,y' + cy = 0$.

c- *Exercices résolus:*

■ Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation : $y'' - 2y' + y = t\cos t$ (1)
(On ne demande que les solutions à valeurs réelles)

$$y'' - 2y' + y = t\,\frac{e^{it} + e^{-it}}{2} = \frac{1}{2}\,t\,e^{it} + \frac{1}{2}\,t\,e^{-it} = h(t) + \overline{h(t)} \quad (1)$$

Soit l'équation: $y'' - 2\,y' + y = 0$ (2)

Son équation caractéristique est: $r^2 - 2r + 1 = 0$, donc $y_0 = (At + B)\, e^t$ est la solution générale de (2).

Soit l'équation: $y'' - 2y' + y = \frac{1}{2}\, t\, e^{it}$ (3)

Pour chercher une solution particulière de (3), posons :

$$y_2 = z(t)e^{it}$$

$$y_2' = z'(t)e^{it} + iz(t)e^{it}$$

$$y_2'' = z''(t)e^{it} + 2iz'(t)e^{it} - z(t)e^{it}$$

$$y_2 \text{ solution de (3)} \iff y_2'' - 2y_2' + y_2 = \frac{1}{2}\, t\, e^{it}$$

$$\iff \left[z''(t) + (2i - 2)z'(t) - 2iz(t)\right]e^{it} = \frac{1}{2}te^{it}$$

$$\iff z''(t) + (2i - 2)z'(t) - 2iz(t) = \frac{1}{2}\, t \quad (4)$$

Pour chercher une solution particulière de (4), on pose :

$z(t) = \alpha t + \beta$; on a donc $z'(t) = \alpha$ et $z''(t) = 0$

En remplaçant dans (4) on obtient:

$$2i\alpha - 2\alpha - 2i\alpha t - 2i\beta = \frac{1}{2}\, t,$$

$$\text{et par identification : } \begin{cases} -2i\alpha = \frac{1}{2} \\ 2i\alpha - 2\alpha - 2i\beta = 0 \end{cases}$$

soit $\alpha = \frac{1}{4}\, i$ et $\beta = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\, i$, donc $z(t) = \frac{1}{4}\, it + \frac{1}{4}\, i - \frac{1}{4}$ et

$$y_2 = \left(\frac{1}{4}\, it + \frac{1}{4}\, i - \frac{1}{4}\right) e^{it} = \left(\frac{1}{4}\, it + \frac{1}{4}\, i - \frac{1}{4}\right) (\cos t + i \sin t)$$

On en déduit que: $2\, \mathcal{R}e\, y_2 = -\frac{1}{2}\, t \sin t - \frac{1}{2} \sin t - \frac{1}{2} \cos t$

Une solution particulière de (1) est donc :

$$y_1 = -\frac{1}{2}\, t \sin t - \frac{1}{2} \sin t - \frac{1}{2} \cos t$$

et l'ensemble des solutions réelles de (1) est l'ensemble des fonctions définies par :

$$y = (At + B)\, e^{t} - \frac{1}{2}\, t \sin t - \frac{1}{2} \sin t - \frac{1}{2} \cos t \quad \text{avec } A \in \mathbb{R} \text{ et } B \in \mathbb{R}$$

■■ Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation: $y'' + \omega^2 y = \cos\omega t$ (1)
(On ne demande que les solutions à valeurs réelles)

$$y'' + \omega^2 y = \frac{1}{2}e^{i\omega t} + \frac{1}{2}e^{-i\omega t} = h(t) + \overline{h(t)} \quad (1)$$

Soit l'équation: $y'' + \omega^2 y = 0$ (2)

Son équation caractéristique $r^2 + \omega^2 = 0$ a pour solutions :

$r_1 = i\omega$ et $r_2 = -i\omega$

donc $y_0 = p \cos\omega t + q \sin\omega t$ est solution générale de (2).

Soit l'équation: $y'' + \omega^2 y = \frac{1}{2}e^{i\omega t}$ (3)

Pour chercher une solution particulière de (3), posons :

$$y_2 = z(t)\, e^{i\omega t}$$

$$y_2' = z'(t)\, e^{i\omega t} + i\omega\, z(t)\, e^{i\omega t}$$

$$y_2'' = z''(t)\, e^{i\omega t} + 2\, i\omega\, z'(t)\, e^{i\omega t} - z(t)\, \omega^2\, e^{i\omega t}$$

y_2 solution de (3) $\Leftrightarrow y_2'' + \omega^2\, y_2 = \frac{1}{2}\, e^{i\omega t}$

$$\Leftrightarrow \left[z''(t) + 2\, i\omega\, z'(t)\right] e^{i\omega t} = \frac{1}{2}\, e^{i\omega t}$$

$$\Leftrightarrow z''(t) + 2\, i\omega\, z'(t) = \frac{1}{2} \quad (4)$$

Pour chercher une solution particulière de (4) on pose $z'(t)=\alpha$ on a donc $z''(t) = 0$ et $z(t) = \alpha t$

En remplaçant dans (4) on obtient: $2\, i\omega\, \alpha = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{4i\omega} = \frac{-1}{4\omega}\, i$

donc $z(t) = \frac{-1}{4\omega}\, i t$ et $y_2 = \frac{-1}{4\omega}\, i t\, e^{i\omega t} = \frac{-1}{4\omega}\, i t\, (\cos\omega t + i \sin \omega t)$

On en déduit: $2\,\mathcal{R}e\ y_2 = \frac{1}{2\omega}\ t \sin\omega t$

Une solution particulière de (1) est donc: $y_1 = \frac{1}{2\omega}\ t \sin\omega t$

et l'ensemble des solutions réelles de (1) est l'ensemble des fonctions définies par :

$$y = p \cos\omega t + q \sin\omega t + \frac{1}{2\ \omega}\ t \sin\omega t \qquad \text{avec } p \in \mathbb{R} \text{ et } q \in \mathbb{R}$$

■■■ Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation: $y'' + 2y' + y = te^{-t}$ (1)
(On ne demande que les solutions à valeurs réelles)

Soit l'équation : $y'' + 2y' + y = 0$ (2)

Son équation caractéristique $r^2 + 2r + 1 = 0$ a pour racine double $r = -1$ donc $y_0 = (At + B)\ e^{-t}$ est solution générale de (2).

Pour chercher une solution particulière de (1), posons:

$$y_1 = z(t)e^{-t}$$

$$y_1' = z'(t)e^{-t} - z(t)e^{-t}$$

$$y_1'' = z''(t)e^{-t} - 2z'(t)e^{-t} + z(t)e^{-t}$$

y_1 solution de (1) $\Longleftrightarrow y_1'' + 2y_1' + y_1 = te^{-t}$

$\Longleftrightarrow z''(t)e^{-t} = t\ e^{-t}$

$\Longleftrightarrow z''(t) = t$

d'où: $z'(t) = \frac{1}{2}\ t^2$ et $z(t) = \frac{1}{6}\ t^3$

On en déduit que $y_1 = \frac{1}{6}\ t^3\ e^{-t}$ est solution particulière de (1) et que l'ensemble des solutions réelles de l'équation (1) est l'ensemble des fonctions définies par

$$y = (At + B)\ e^{-t} + \frac{1}{6}\ t^3\ e^{-t} \qquad \text{avec } A \in \mathbb{R} \text{ et } B \in \mathbb{R}$$

4- Existence et unicité d'une solution particulière de $ay''+by'+cy = h(t)$ (4), sur l'intervalle I, vérifiant des conditions initiales données.

a- *Cas général:*

α- Les nombres a, b *et* c *sont complexes et* h *continue sur l'intervalle* I *est à valeurs complexes.*

On cherche la solution y vérifiant pour $t_0 \in I$,

$$(S) \quad \begin{cases} y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y'_0 \end{cases}$$

■ 1^er^ cas: $b^2 - 4ac \neq 0$

$$y = y_1 + \lambda\, e^{r_1 t} + \mu\, e^{r_2 t} \qquad \text{avec } r_1 \neq r_2 \text{ , } r_1 \in \mathbb{C} \text{ et } r_2 \in \mathbb{C}$$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda e^{r_1 t_0} + \mu e^{r_2 t_0} = y_0 - y_1(t_0) \\ r_1 \lambda e^{r_1 t_0} + r_2 \mu e^{r_2 t_0} = y'_0 - y'_1(t_0) \end{cases}$$

Soit Δ le déterminant de ce système :

$$\Delta = \begin{vmatrix} e^{r_1 t_0} & e^{r_2 t_0} \\ r_1 e^{r_1 t_0} & r_2 e^{r_2 t_0} \end{vmatrix} = e^{r_1 t_0}\, e^{r_2 t_0}\, (r_2 - r_1) \neq 0$$

Le système (S) a une et une seule solution donc il existe une et une seule solution de l'équation différentielle vérifiant les conditions initiales.

■ $2^{ème}$ cas: $b^2 - 4ac = 0$.

$$y = y_1 + (At + B)\, e^{r_o t} \qquad \text{avec } r_o \in \mathbb{C}$$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} A\, t_o\, e^{r_o t_o} + B\, e^{r_o t_o} = y_o - y_1(t_o) \\ A\,(1 + r_o t_o) e^{r_o t_o} + B\, r_o e^{r_o t_o} = y'_o - y'_1(t_o) \end{cases}$$

Soit Δ le déterminant de ce système :

$$\Delta = \begin{vmatrix} t_o e^{r_o t_o} & e^{r_o t_o} \\ (1 + r_o t_o) e^{r_o t_o} & r_o e^{r_o t_o} \end{vmatrix} = - e^{2 r_o t_o} \neq 0$$

Le système (S) a une et une seule solution donc il existe une et une seule solution de l'équation différentielle vérifiant les conditions initiales.

β- Les nombres a, b, c, y_o *et* y'_o *sont réels et* h *continue sur l'intervalle* I *est à valeurs réelles, de plus on ne considère que les solutions à valeurs réelles.*

■ Si $b^2 - 4ac \geq 0$

On démontre comme dans α- qu'il existe une et une seule solution à valeurs réelles de l'équation différentielle vérifiant les conditions initiales.

■ Si $b^2 - 4\,ac < 0$

$$y = y_1 + e^{\alpha t}\,(A \cos\beta t + B \sin\beta t)$$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} Ae^{\alpha t_o} \cos\beta t_o + Be^{\alpha t_o} \sin\beta t_o = y_o - y_1(t_o) \\ A(\alpha\cos\beta t_o - \beta\sin\beta t_o)e^{\alpha t_o} + B(\alpha\sin\beta t_o + \beta\cos\beta t_o)e^{\alpha t_o} = y'_o - y'_1(t_o) \end{cases}$$

Soit Δ le déterminant de ce système :

$$\Delta = e^{2\alpha t_o} \begin{vmatrix} \cos\beta t_o & \sin\beta t_o \\ \alpha\cos\beta t_o - \beta\sin\beta t_o & \alpha\sin\beta t_o + \beta\cos\beta t_o \end{vmatrix} = \beta e^{2\alpha t_o} \neq 0$$

Le système (S) a une et une seule solution donc il existe une et une seule solution de l'équation différentielle vérifiant les conditions initiales.

Remarque:

Dans ce cas, pour trouver une solution vérifiant des conditions initiales données, il est en général plus commode d'utiliser :

$y = y_2 + e^{\alpha t}(A \cos\beta t + B \sin\beta t)$ que $y = y_2 + Ke^{\alpha t}\cos(\beta t + \varphi)$

Théorème 5	Sur tout intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$ où h est continue,

il existe une solution et une seule de l'équation différentielle

$$ay'' + by' + cy = h(t)$$

prenant la valeur Y_o donnée et dont la dérivée prend la valeur Y'_o donnée (conditions initiales) pour $t_o \in I$ donné.

b- *Cas particulier:*

Si la fonction h est constamment nulle la solution de $ay'' + by' + cy = 0$ vérifiant $y(t_o) = y'(t_o) = 0$ est la fonction constamment nulle.

La démonstration est immédiate car on constate que dans ce cas les équations des systèmes (S) ont des seconds membres nuls.

c-*Exemple:*

Trouver la fonction s continue sur $\mathbb{R}$, vérifiant sur chacun des intervalles où h est continue l'équation différentielle :

$$2\,\frac{d^2s}{dt^2} + 3\,\frac{ds}{dt} + s = h(t) \quad (1)$$

et vérifiant de plus les conditions (C):

$s(1) = 0;\ s'(1^-) = 0;\ s'(1^+) = 1$

dans le cas où $h(t) = t\,\mathcal{U}(t-1)$

Soit $$2\,\frac{d^2s}{dt^2} + 3\,\frac{ds}{dt} + s = 0 \quad (1)$$

Son équation caractéristique est:

$2r^2 + 3r + 1 = 0 \Leftrightarrow r_1 = -1$ et $r_2 = -\frac{1}{2}$

donc $\sigma(t) = A\,e^{-t} + B\,e^{-\frac{1}{2}t}$ est la solution générale de (1) sur $\mathbb{R}$.

■ Si $t < 1$

d' après b), la solution s_1 de (1) sur $]-\infty,1[$ est la fonction constamment nulle .

■ Si $t \geq 1$

$$2\,\frac{d^2s}{dt^2} + 3\,\frac{ds}{dt} + s = t \quad (1)$$

$s_0(t) = t - 3$ est une solution particulière

$s_2(t) = t-3 + Ae^{-t} + Be^{-\frac{1}{2}t}$ est la solution générale de (1) sur $[1;+\infty[$

$$s_2'(t) = 1 - Ae^{-t} - \frac{1}{2} Be^{-\frac{1}{2}t} .$$

D'après les conditions (C):

$$\begin{cases} -2 + A\, e^{-1} + B\, e^{-\frac{1}{2}} = 0 \\ 1 - A\, e^{-1} - \frac{1}{2} B\, e^{-\frac{1}{2}} = 1 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} e^{-1} & e^{-\frac{1}{2}} \\ e^{-1} & \frac{1}{2}\, e^{-\frac{1}{2}} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}\, e^{-\frac{3}{2}}$$

$$\Delta_A = \begin{vmatrix} 2 & e^{-\frac{1}{2}} \\ 0 & \frac{1}{2}\, e^{-\frac{1}{2}} \end{vmatrix} = e^{-\frac{1}{2}}$$

$$\Delta_B = \begin{vmatrix} e^{-1} & 2 \\ e^{-1} & 0 \end{vmatrix} = -2e^{-1}$$

D'où $A = -2e$ et $B = 4\, e^{\frac{1}{2}}$

La fonction cherchée est définie sur $[1;+\infty[$ par:

$$s_2(t) = -2\, e^{(1-t)} + 4\, e^{\frac{1}{2}(1-t)} + t - 3$$

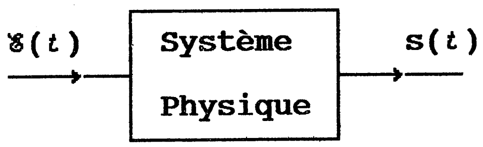
Conclusion.

Si $t \in \left]-\infty;1\right[$ $s(t) = 0$

Si $t \in \left[1;+\infty\right[$ $s(t) = -2e^{(1-t)} + 4\,e^{\frac{1}{2}(1-t)} + t - 3$

5- Utilisation en physique d'équations différentielles du deuxième ordre pour étudier des systèmes linéaires.

a- *Principe général* :

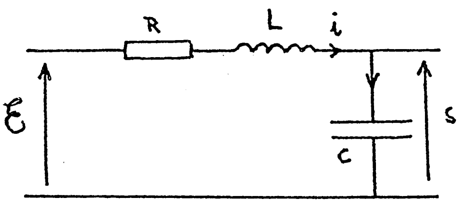


A partir des lois de la Physique :

- on donne l'équation différentielle liant s et $\mathcal{E}$ et les conditions initiales vérifiées par s et s'
- on précise la continuité de s et de s'

b- *Exemples* :

- **En relation avec l'électricité** :



$\mathcal{E}$ tension appliquée à l'entrée
s tension appliquée à la sortie

$i = C\frac{ds}{dt}$ $\mathcal{E} = R\,i + L\frac{di}{dt} + s = R\,C\frac{ds}{dt} + L\,C\frac{d^2s}{dt^2} + s$ donc :

$$L\,C\frac{d^2s}{dt^2} + R\,C\frac{ds}{dt} + s = \mathcal{E}$$

On pose $\omega_o^2 = \frac{1}{L\,C}$ et $R\,C = \frac{2\xi}{\omega_o} \Rightarrow \xi = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}$

ω_0 pulsation propre du circuit et ξ coefficient d'amortissement.

L'<<équation différentielle>> s'écrit :

$$\frac{1}{\omega_0^2}\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{2\xi}{\omega_0}\frac{ds}{dt} + s = \gamma$$

On cherche ensuite les conditions initiales vérifiées par s et $\frac{ds}{dt}$.

Exemple :

Si initialement le condensateur n'est pas chargé $s(0^-) = 0$. La tension ne peut pas varier brutalement aux bornes d'un condensateur donc s est continue : $s(0^-) = s(0^+) = 0$.

Si le courant est initialement nul $i(0^-) = 0$

Le courant ne peut pas varier brutalement dans une inductance (bobine L) donc i est continue : $i(0^-) = i(0^+) = 0$.

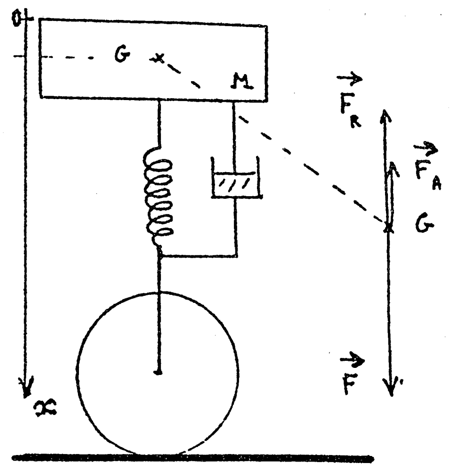
$$i = C\frac{ds}{dt} \qquad i(0^+) = 0 \Rightarrow \frac{ds}{dt}(0^+) = 0$$

On doit donc chercher la fonction s continue sur $\mathbb{R}$, et de dérivée $\frac{ds}{dt}$ continue sur $\mathbb{R}$, vérifiant les conditions $s(0) = 0$, $\frac{ds}{dt}(0) = 0$ et sur chacun des intervalles où γ est continue l'équation différentielle :

$$\frac{1}{\omega_0^2}\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{2\xi}{\omega_0}\frac{ds}{dt} + s = \gamma$$

- En relation avec la mécanique:

Exemple de l'amortisseur de voiture (simplifié).



Au repos le poids est compensé par la réaction du ressort.

On ne s'intéresse qu'aux déplacements de la caisse de la voiture par rapport au point de repos sous l'action d'une force extérieure (choc ...) supposée de direction Ox.

Bilan des forces extérieures
(le poids étant compensé au repos par le ressort) :

$\vec{F}$ force qui entraîne le déplacement de la caisse, ici vers le bas.

$\vec{F}_R$ force due à la réaction du ressort qui s'oppose au déplacement.

$\vec{F}_A$ force due aux frottements visqueux dans l'amortisseur qui s'oppose à la vitesse.

M masse en mouvement (à peu près $\frac{1}{4}$ de la masse de la voiture).

On applique le principe fondamental de la dynamique.

$$\sum \vec{F}_{ext} = M\,\vec{a} \qquad \text{soit} \qquad \vec{F} + \vec{F}_R + \vec{F}_A = M\,\vec{a}$$

Tous les vecteurs sont colinéaires, on peut transformer cette relation en une relation algébrique en projetant sur l'axe Ox.

Avec $v = \frac{dx}{dt}$, $a = \frac{d^2x}{dt^2}$ on obtient : $F - k\,x - \lambda\,\frac{dx}{dt} = M\,\frac{d^2x}{dt^2}$

soit $M\,\frac{d^2x}{dt^2} + \lambda\,\frac{dx}{dt} + kx = F$ et en divisant par k :

$$\frac{M}{k}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\lambda}{k}\frac{dx}{dt} + x = \frac{F}{k} .$$

$\frac{F}{k}$ est homogène à un déplacement.

On pose : $\frac{M}{k} = \frac{1}{\omega_o^{\,2}}$ $\quad \frac{\lambda}{k} = \frac{2\xi}{\omega_o}$ $\quad$ soit $\quad \xi = \frac{1}{2}\frac{\lambda}{\sqrt{k\,M}}$

L'<<équation différentielle>> peut s'écrire :

$$\frac{1}{\omega_o^{\,2}}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{2\xi}{\omega_o}\frac{dx}{dt} + x = \frac{F}{k}$$

De la même forme que dans l'exemple 1 avec comme grandeur d'entrée $\frac{F}{k}$ homogène à un déplacement et comme grandeur de sortie le déplacement x de la caisse par rapport au point de repos.

On cherche ensuite les conditions initiales vérifiées par x et $\frac{dx}{dt}$ avec $\frac{dx}{dt}$ = v vitesse de déplacement vertical de la caisse.

Exemple :

Si initialement la voiture n'a subi aucune perturbation extérieure $x(0^-) = 0$.
Pas de déformation discontinue du ressort donc x est continue $x(0^-) = x(0^+) = 0$
Si initialement la vitesse de déplacement vertical est nulle $v(0^-) = 0$
Pas de variation brutale de la vitesse (principe de l'inertie) donc v est continue : $v(0^-) = v(0^+) = 0$

On doit donc chercher la fonction x continue sur $\mathbb{R}$, et de dérivée $\frac{dx}{dt}$ continue sur $\mathbb{R}$, vérifiant les conditions $x(0) = 0$, $\frac{dx}{dt}(0) = 0$ et sur chacun des intervalles où $\frac{F}{k}$ est continue l'équation différentielle :

$$\frac{1}{\omega_o^{\,2}}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{2\xi}{\omega_o}\frac{dx}{dt} + x = \frac{F}{k}$$

c- *Remarque 1:*

Dans les deux exemples précédents on est arrivé à une équation différentielle du second ordre à coefficients constants du type :

$$\frac{1}{\omega_o^2}\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{2\xi}{\omega_o}\frac{ds}{dt} + s = \gamma$$

avec dans l'exemple 1: γ tension appliquée à l'entrée

s tension obtenue à la sortie

avec dans l'exemple 2: $\gamma = \frac{F}{k}$ homogène à un déplacement

$s = x$ déplacement dû à F

Cette forme d'écriture permet de faire apparaître des grandeurs d'entrée et de sortie de même nature physique, ceci dans le but d'écrire la fonction de transfert (cf Transformation de Laplace -C-) avec entrée et sortie de même nature.

d- *Remarque 2:*

En Physique, pour les systèmes du second ordre, on écrit l'équation différentielle sous la forme :

$$\frac{1}{\omega_o^2}\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{2\xi}{\omega_o}\frac{ds}{dt} + s = \gamma$$

ξ et ω_o étant déterminés à partir des éléments caractéristiques du montage.

La solution de l'équation différentielle sans second membre dépend, entre autres, de la valeur du discriminant de l'équation caractéristique :

$$\Delta' = \frac{\xi^2}{\omega_o^2} - \frac{1}{\omega_o^2} = \frac{1}{\omega_o^2}\left[\xi^2 - 1\right]$$

En physique, on a toujours $\omega_o > 0$.

Le signe de Δ' ne dépend que de ξ .

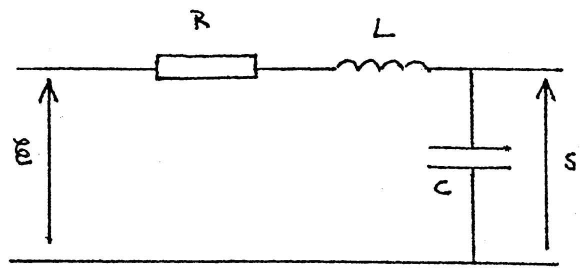
Si $\xi > 1$ $\Delta' > 0$ et on obtient 2 racines réelles.

Si $\xi = 1$ $\Delta' = 0$ et on obtient 1 racine double.

Si $0 < \xi < 1$ $\Delta' < 0$ et on obtient 2 racines complexes conjuguées.

e-*Exercices:*

1)Filtre passe bas du second ordre passif.



- Ecrire l'équation différentielle liant s et $\mathcal{E}$.

- Montrer qu'elle est de la forme :

$$\frac{1}{\omega_o^2}\frac{d^2s}{dt^2} + 2\frac{\xi}{\omega_o}\frac{ds}{dt} + s = T_o\ \mathcal{E}$$

avec $T_o = 1$ $\omega_o^2 = \frac{1}{LC}$ $\xi = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}$

- On donne $\mathcal{E} = E\ \mathcal{U}(t)$. Déterminer les conditions initiales sur s et $\frac{ds}{dt}$.

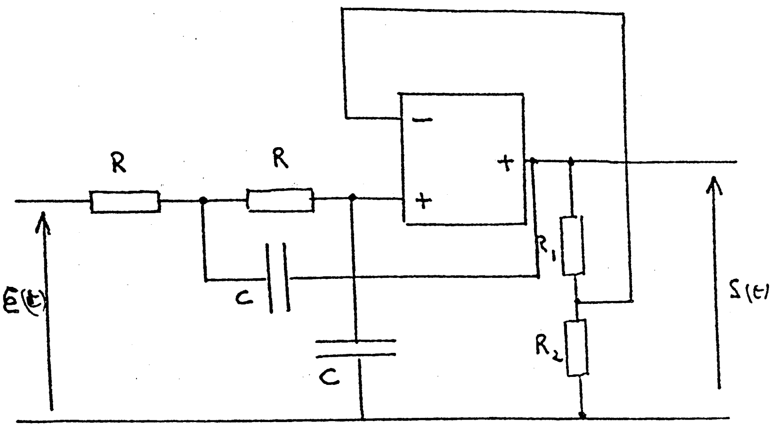
- Déterminer dans ces conditions s(t) pour :

$\xi = 2$, $\xi = 1$, $\xi = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\xi = 0,5$.

- On donne $L = 10^{-2}$ H et $C = 10$ nF . Calculer R pour obtenir les valeurs précédentes de ξ.

- On pourra vérifier expérimentalement l'exactitude des résultats.

2)Filtre passe bas du second ordre actif (Structure SALLEN-KEY).



- Ecrire l'équation différentielle liant s et γ.

- Montrer qu'elle est de la forme :

$$\frac{1}{\omega_o^{\,2}}\frac{d^2s}{dt^2} + 2\,\frac{\xi}{\omega_o}\frac{ds}{dt} + s = T_o\,\gamma$$

avec $\omega_o = \dfrac{1}{R\,C}$ $\qquad \xi = \dfrac{3-K}{2}$ $\qquad K = \dfrac{R_1 + R_2}{R_2}$ $\qquad T_o = K$

- $R = 10\ k\Omega$ $\quad C = 10\ nF$, calculer les valeurs de ω_o et de K pour que $\xi = 2$, $\xi = 1$, $\xi = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\xi = 0{,}5$.

- On pourra vérifier expérimentalement l'exactitude des résultats avec $\gamma(t) = E\,\mathcal{U}(t)$ puis $\gamma(t) = at\,\mathcal{U}(t)$.

III-EXERCICES SUR LES EQUATIONS DIFFERENTIELLES DU SECOND ORDRE.

Résoudre les équations différentielles suivantes:

Lorsque ces équations sont à coefficients réels et le second membre à valeurs réelles, on demande les solutions réelles .

1) $10\, y'' + 2\, y' + 5\, y = F(t)$ dans les trois cas suivants :

a) $F(t) = 0$

b) $F(t) = -\, 91\, e^{t}$. Solution particulière $y(0) = y'(0) = 0$

c) $F(t) = -\, 58 \cos^2 \frac{t}{2}$

2) $y'' - 4\, y = 4\, e^{-2x}$

3) $4\, y'' + 4\, y' + y = 50\, e^{-\frac{t}{2}} \cos \frac{t}{2}$

4) $2y'' + 5y' - 3y = 0$

5) $2y'' - 3y' + y = e^{2x}\, (x^2 + 1)$

6) $16y'' + 8y' + y = 0$

7) $2y'' - 3y' + y = e^{x}\, (x^2 + 3x)$

8) $i y'' - 3y' - 2i y = 0$

9) $y'' - 2i y' + y = x\, e^{ix}$

10) $3y'' + 4y' = 2\, x^2 + 3x + 1$

11) $2y'' + (2 + i)y' + (1 - i)y = e^{(1+i)x}$

12) $-y'' + 4i y' + 4y = 0$

13) $2y'' + 3y' - 5y = 2\, x^2 + x + 1$

14) $2y'' - y' - 3y = (x + 2)\, e^{x}$

15) $y'' - 4y = 2x + 3$

16) $2y'' - y' - 3y = e^{(2 - i)x}$

17) $4y'' + 4y' + y = 2\, x\, e^{2x}$

18) $y'' + (1 - i)y' - i y = x\, e^{2ix}$

19) $y'' + 2y' + 5y = x \cos x$

20) $y'' - 4y' + y = 2x\, e^{2x}$

21) $y'' + 2y' + 5y = e^{x} \cos x$

22) $2y'' + 3y' - 5y = (4\, x + 3)e^{x}$

23) $y'' - 2i y' - y = x\, e^{ix}$

24) $y'' + 2y' - 3y = \sin x$

25) $4y'' + 4y' + 2y = x$

26) $y'' - 4y' + 5y = 0$

27) $2y'' + 8y = 3 \sin 2x$

28) $3y'' - 2y' - y = 2 \cos 2x$

29) $y'' + 4y = \cos x$

30) $3y'' + 4y' - 7y = 0$

31) $y'' + iy' = \cos 3x$

32) $4y'' + 12y' + 9y = 0$

33) $4y'' + 12y' + 11y = 0$

34) $y'' + 4y = x \sin 2x$

35) $2iy'' + y' + iy = 0$

36) $4y'' - 3y' = x^2 - 3x + 2$

37) $2y'' + y' - 3y = 3 \sin x$

38) $4y'' - 3y' + y = x^2 + 1$

39) $5y'' - 2y' - 3y = e^x \cos x$

40) $3y'' - 4y' + y = 2x^2 + 11x + 1$

41) $3y'' - 4y' + y = x e^{2x}$

42) $3y'' - 4y' + y = x^2 e^x$

43) $9y'' - 12y' + 4y = 3 e^{\frac{2x}{3}}$

44) $2y'' + 3y' - 5y = x \cos 2x$

45) $4y'' + 4y' + 5y = x e^{2x}$

46) $3y'' + 12y = \cos 2x$

47) $4y'' - 4y' + y = x \sin 2x$

48) $y'' + iy' + 2y = e^{ix}$

49) $3y'' + 2y' - 8y = e^{\frac{4x}{3}}$

50) $2y'' - 3y' + y = e^x$

51) $y'' - y = e^{3x} \cos x$

52) $2iy'' + 3y' - iy = e^{ix}$

53) $2y'' - y' - y = 2 \cos x + 3 \sin x + e^x$

54) $iy'' - 3y' - 2iy = 0$

55) $-y'' + 4iy' + 4y = 0$

56) $2iy'' + y' + iy = 0$

57) $2y'' - y' - 3y = e^{(2 - i)x}$

Trouver la fonction **y** *continue sur* $\mathbb{R}$ *et de dérivée* **y'** *continue sur* $\mathbb{R}$ *vérifiant les conditions* $y(0) = y'(0) = 0$ *et sur chacun des intervalles où* **h** *est continue l'équation différentielle :*

$$y'' + 3y' + 2y = h(t)$$

dans les deux cas suivants :

58) $h(t) = t\, \mathcal{U}(t) - (t - 1)\, \mathcal{U}(t - 1)$

59) $h(t) = \sin t \,.\, \mathcal{U}(t) + \sin(t - \pi) \,.\, \mathcal{U}(t - \pi)$

60) **Même question avec** $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ **et** $h(t) = (t + 1)\, \mathcal{U}(t)$

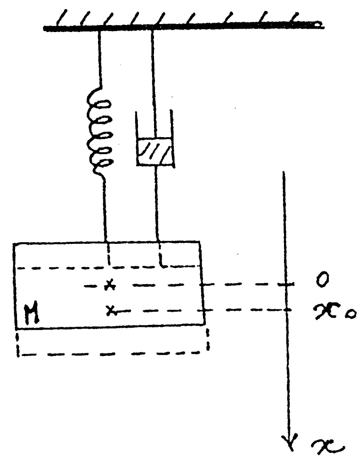
61) *Trouver la fonction* s *continue sur* $\mathbb{R}$ *et de dérivée* s' *continue sur* $\mathbb{R}$ *vérifiant les conditions* $s(0) = s'(0) = 0$ *et sur chacun des intervalles où* h *est continue l'équation différentielle :*

$$2\,s''(t) + 3\,s'(t) + s(t) = h(t) \qquad \text{avec } h(t) = \mathcal{U}(t-1) - \mathcal{U}(t-2)$$

IV- EXERCICES D'APPLICATION A LA PHYSIQUE.

A- OSCILLATIONS LIBRES AMORTIES.

1- Mécanique.



Un système oscillant comprend :

- **un solide de masse M (kg)**
- **un amortisseur de coefficient d'amortissement λ (N / m / s)**
- **un ressort de constante k (N / m)**

M, k et λ sont des constantes positives et l'amortisseur exerce sur le solide une force telle que :

$$\vec{F} = -\lambda\,\vec{v}$$

Par ailleurs le ressort et l'amortisseur sont reliés à un support fixe. Le solide est écarté de sa position d'équilibre d'une distance x_o et abandonné sans vitesse initiale.

1°) Etudier son mouvement et vérifier que l'équation du mouvement s'écrit :

$$M\,\frac{d^2x}{dt^2} + \lambda\,\frac{dx}{dt} + k\,x = 0 \qquad (1)$$

2°) Résoudre l'équation (1).

On distinguera 3 cas :

- $\lambda^2 - 4\,k\,M > 0$
- $\lambda^2 - 4\,k\,M = 0$
- $\lambda^2 - 4\,k\,M < 0$

Dans ce dernier cas on posera $\alpha = \dfrac{\lambda}{2\,M}$, $\omega = \dfrac{\sqrt{4\,k\,M - \lambda^2}}{2\,M}$,

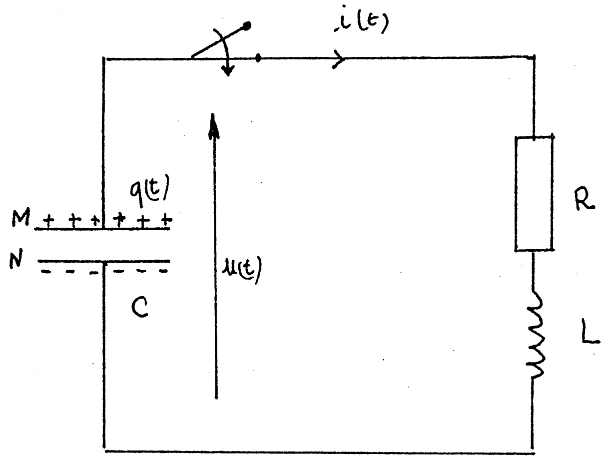
$\varphi \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ et $\tan\varphi = \frac{\alpha}{\omega}$ pour montrer que la solution particulière vérifiant les conditions initiales peut s'écrire :

$$x = \frac{x_o}{\omega}\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}\; e^{-\alpha t} \cos(\omega t - \varphi)$$

et sa dérivée $x' = -\,x_o\,\dfrac{\alpha^2 + \omega^2}{\omega}\, e^{-\alpha t} \sin \omega t$

2-Electricité.

Un condensateur de capacité C, initialement globalement neutre a été chargé sous une différence de potentiel U_o. A l'instant initial, la charge du condensateur est $q_o = C\,U_o$ et l'intensité i_o du courant dans le circuit est nulle.



A un instant t de la décharge, appelons $q(t)$ la charge de l'armature M du condensateur, $i(t)$ l'intensité du courant dans le circuit, $u(t)$ la tension entre les bornes M et N.
q, u, i sont des fonctions du temps.

L'équation de la décharge s'écrit : $L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0$ (A)

Posons $\lambda = \frac{R}{2L}$ (constante d'amortissement) et

$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ (pulsation propre du circuit).

Nous obtenons l'équation différentielle (1) :

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\lambda \frac{dq}{dt} + \omega_o^2 q = 0 \qquad (1)$$

Les conditions initiales sont $q(0) = q_o$ et $q'(0) = i_o = 0$.

Résoudre l'équation différentielle (1) et donner la solution qui vérifie les conditions initiales.

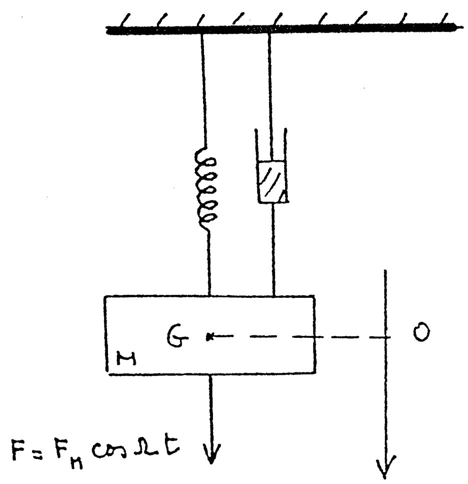
On distinguera les 3 cas :

$R > \sqrt{L/C}$ $\qquad$ $R = \sqrt{L/C}$ $\qquad$ $R < \sqrt{L/C}$

B- OSCILLATIONS FORCEES AMORTIES

1-Mécanique:

Le système oscillant étudié est analogue à celui du problème I.



Le solide de masse M est soumis en outre à une force périodique :

$$F = F_M \cos \Omega t$$

Ω pulsation constante

1°) Etudier le mouvement du solide et vérifier que l'équation du mouvement s'écrit :

$$M \frac{d^2x}{dt^2} + \lambda \frac{dx}{dt} + k\, x = F_M \cos \Omega t \qquad (2)$$

2°) Résoudre l'équation (2) dans le cas où $\lambda^2 - 4\, k\, M < 0$.

3°) On donne $k = 1$, $M = 1$, $\lambda = 1$, $\Omega = 1$, $F_M = 2$.

a) Préciser la solution particulière vérifiant $x_o = 4$ et $x'_o = 0$

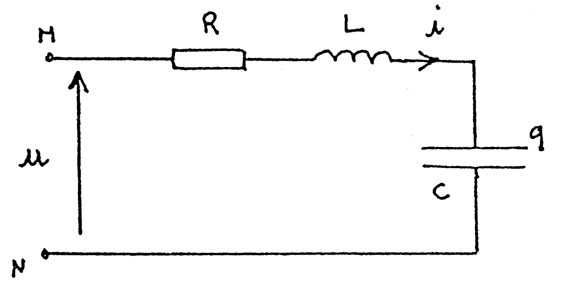
b) Mettre la solution générale de (2) sous la forme : $x = \mu e^{-\alpha t} \cos (\omega t - \varphi) + \beta \cos(\Omega t - \psi)$

$\mu\, e^{-\alpha t} \cos (\omega t - \varphi)$ correspond aux oscillations libres.

$\beta \cos (\Omega t - \psi)$ correspond aux oscillations forcées.

2- Electricité.

Considérons une portion de circuit MN comportant une bobine de résistance R et d'auto-inductance L et un condensateur de capacité C montés en série.



Appliquons une tension $u = U_M \cos \omega t$ aux bornes de **MN**.

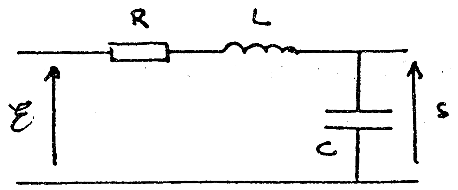
Soit à l'instant t, $i(t)$ l'intensité du courant dans la portion de circuit **MN**, $q(t)$ la charge du condensateur.

Cette dernière est fonction du temps et vérifie l'équation :

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = U_M \cos \Omega t \qquad \text{(B)}$$

Donner la solution particulière de (B) vérifiant les conditions initiales précisées au A-2-.

V- EXEMPLE D'UTILISATION D'UNE CALCULATRICE



$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = E$$

En posant $q(t) = C\, s(t)$ avec $s(t)$ tension aux bornes de C

et pour simplifier les calculs $\frac{1}{\omega_0^{\,2}} = L\,C$ et $\frac{2m}{\omega_0} = R\,C$

$$\frac{1}{\omega_0^{\,2}} \frac{d^2s}{dt^2} + \frac{2m}{\omega_0} \frac{ds}{dt} + s = E$$

Sur CASIO 8500 G : Programme permettant de visualiser les solutions s(t) en fonction des valeurs de R, L, C et E.

```
"CIRCUIT RLC" :
Rad : Range 0 , 4 EXP -2 , 1 EXP -2 , 0 , 5 , 1 :
Lbl 0 :
Cls :
"E=" ? → E : "R=" ? → R : "L=" ? → L : "C=" ? → C :
√ ( L C ) ⁻¹ → W : R C W ÷ 2 → M :
M² - 1 → D : √ Abs D → F :
D ≥ 0 ⇒ Goto 1 :
Graph y = E ( 1 - ( e (- M W X) ) (cos (W F X) + (M ÷ F) sin (W F X) ) ) ◢
"T = " : 2 π ÷ W F ◢
Goto 0 :
Lbl1 :
D = 0 ⇒ Goto 2 :
- M W - W F → P :
- M W + W F → S :
Graph y = E (1 - (P ÷ (P-S)) e (S X) + (S ÷ (P - S)) e (P X)) ◢
Goto O :
Lbl2 :
Graph y = E (1 - (1 + M W X) e (- M W X)) ◢
Goto 0 :
```

tester avec E = 2,5 V , L = 1 H , C = 1 µF et :
R = 500 Ω , R = 1000 Ω , R = 2000 Ω ,R = 5000 Ω .....

TRANSFORMATION DE LAPLACE

PREAMBULE

1-Un peu d'histoire : *De Heaviside à Laurent Schwartz*

On peut lire dans "*Compléments de Mathématiques Générales*", Tome 3, Chapitre 12, Introduction au Calcul symbolique : Premières Notions sur la Transformation de Laplace, par R. Deltheil (publié en 1955) :

"C'est en 1893 que le physicien anglais Oliver Heaviside (1850-1925) exposa pour la première fois les procédés de son *Calcul opérationnel*, dans un article des Proceedings of the Royal Society intitulé *Operators in Mathematical Physics*. Sous sa forme initiale, ce calcul ne présentait en rien le caractère d'une théorie mathématique rationnelle, Heaviside se laissant surtout guider par son intuition et son sens physique des phénomènes."

Ce calcul " a été justifié par les travaux de Carson à l'aide des transformations de Fourier et de Laplace . Sous cette forme il constitue la méthode générale des lignes et des réseaux électriques ." (*Histoire générale des Sciences .P.U.F*).

"La théorie des transformations de Fourier et de Laplace exigeait aussi des généralisations des fonctions. En 1926, Dirac introduisait en Physique Mathématique sa célèbre « fonction » δ_0 nulle en dehors de l'origine et d'intégrale égale à 1, qui représentait une impulsion unité à l'instant $t = 0$, donc d'effet nul pour $t \neq 0$. Puisque δ_0 n'est pas une fonction au sens usuel (car une fonction nulle pour $t \neq 0$ est d'intégrale nulle), sa justification mathématique correcte conduisait à une extension de la notion de fonction; remarquons que, dans ce cas précis, la théorie de la mesure permettait déjà de considérer δ_0 comme une mesure de masse 1 concentrée à l'origine, c'est à dire comme un être mathématique bien défini. Cette extension a été présentée en 1945 sous sa forme actuelle (cf Théorie des distributions) par le mathématicien français L. Schwartz." (*Encyclopædia Universalis*).

2-L'exposé qui suit est conçu :

- pour être accessible à un lecteur possédant en Mathématiques des connaissances qui ne dépassent guère celles exigibles pour des bacheliers S.T.I.

- avec le souci de répondre aux besoins de la Physique appliquée jusqu'au niveau des classes de T.S.

- pour satisfaire au référentiel des classes de T.S. paru au B.O. n°21 du 25 Mai 1989 (page 1297). Toutefois les notions de produit de convolution, de transformée de Laplace d'un produit de convolution et de transformée en Z (cette dernière notion ne figurant que dans les commentaires du programme) *ne seront traitées que dans d'autres parties de ce cours (Tome 2 ou Tome 3).*

3-Pour avoir une définition satisfaisante de l'impulsion de Dirac, des fonctions de transfert, de la notion de convolution ...etc..., il y aura lieu de se reporter au document sur les distributions et transformée de Laplace (Tome 2).

4-Dans les préliminaires (*partie* A), il nous a paru nécessaire de rappeler ou préciser des notions qui peuvent intervenir dans ce chapitre dans des définitions, des calculs ou des raisonnements.

Dans la partie B, nous avons eu le souci d'aborder des notions et de rédiger des démonstrations accessibles à des étudiants des classes de Techniciens Supérieurs.
Il nous a paru nécessaire de combler le vide constaté, d'une part

dans tous les ouvrages que nous connaissons et destinés à ces étudiants et d'autre part dans le formulaire et le référentiel des B.T.S., concernant les transformées de fonctions non continues sur $[0 , + \infty [$. En effet ces étudiants utilisent en Physique des fonctions (signaux) non continues et il leur est indispensable de connaître les règles qui les concernent (cf Avant-propos : En ce qui concerne la Transformation de Laplace ....).
D'une manière générale les références à la Physique sont nombreuses et sont souvent utilisées à côté d'exercices d'application immédiate pour illustrer les notions étudiées.

La partie C a pour but d'expliquer comment on pourrait justifier correctement, pour les étudiants des classes de T.S., la mathématisation des modèles physiques les plus courants pour eux. L'interprétation de tels modèles à l'aide d'une seule équation différentielle étant généralement très insuffisante et source d'erreurs de raisonnement.

A - PRELIMINAIRES

I- DISCONTINUITE DE PREMIERE ESPECE :

1°) Définition :

Soit h continue sur $]\, x_0 - \alpha \,,\, x_0 \,[$ et sur $]\, x_0 \,,\, x_0 + \alpha \,[$ avec $\alpha > 0$. On dit que h admet une discontinuité de première espèce en x_0 si et seulement si $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} x_0} h(x)$ et $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} x_0} h(x)$ existent et sont finies . Dans ce cas, on nomme saut de h en x_0 le nombre $\sigma_{x_0} = \lim\limits_{x \xrightarrow{>} x_0} h(x) - \lim\limits_{x \xrightarrow{<} x_0} h(x)$

2°) Remarque :

On notera $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} x_0} h(x) = h(x_0^+)$ et $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} x_0} h(x) = h(x_0^-)$

et $\sigma_{x_0} = h(x_0^+) - h(x_0^-)$

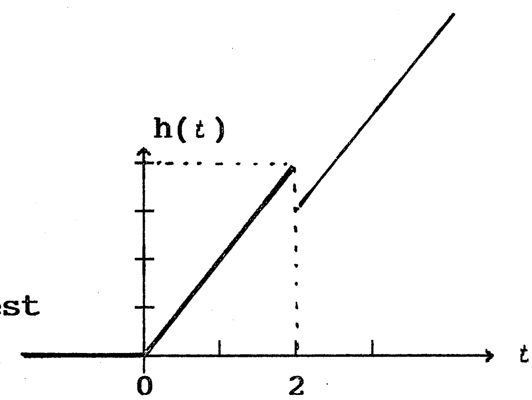
3°) Exemples :

a) La fonction $\mathcal{U}$ présente en zéro une discontinuité de première espèce et le saut de $\mathcal{U}$ en zéro est 1.

b) La fonction

$$h : t \longmapsto 2\, t\, \mathcal{U}(t) - \mathcal{U}(t-2)$$

présente en 2 une discontinuité de première espèce et le saut de h en 2 est $\sigma_2 = h(2^+) - h(2^-) = 3 - 4 = -1$



c) Les fonctions $t \longmapsto \frac{1}{t}$ et $t \longmapsto e^{-\frac{1}{t}}$ n'admettent pas en zéro des discontinuités de première espèce.

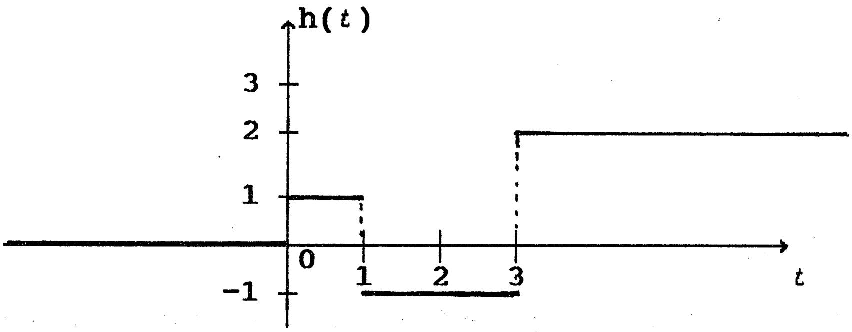
II- FONCTION LOCALEMENT CONTINUE PAR MORCEAUX - PRIMITIVE LARGE

1°) Définition 1 :

> h est continue par morceaux sur [a , b] $\Leftrightarrow$ la restriction de h à [a , b] n'admet qu'un nombre fini (éventuellement zéro) de discontinuités sur [a , b] toutes de première espèce.

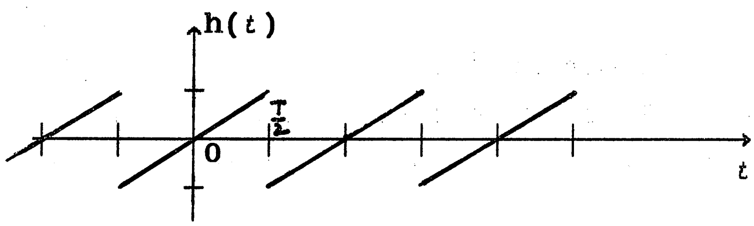
2°) Exemples :

a) $h : t \longmapsto \mathcal{U}(t) - 2\,\mathcal{U}(t-1) + 3\,\mathcal{U}(t-3)$ est continue par morceaux sur [a, b]

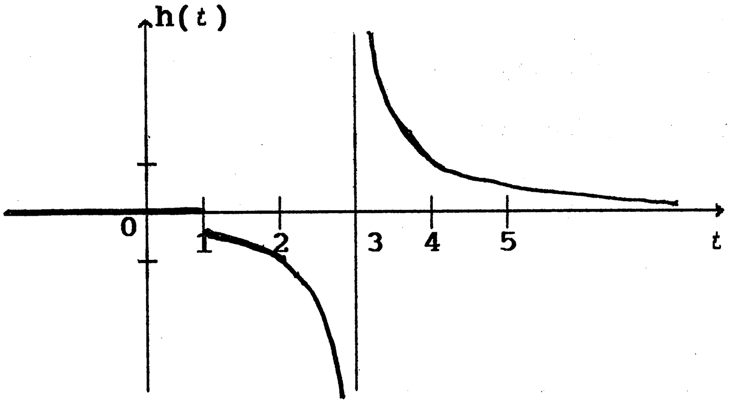


b) h de période T et telle que :

$\forall\, t \in \left] -\frac{T}{2}, \frac{T}{2} \right[$ $h(t) = t$, est continue par morceaux sur [a,b].



c) $h : t \longmapsto \frac{1}{t-3}\,\mathcal{U}(t-1)$ est continue par morceaux sur [0,2] mais n'est pas continue par morceaux sur [0,4].



3°) <u>Définition 2</u> :

Soit I un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$, h est localement continue par morceaux sur I , si et seulement si , quelquesoit $[a, b] \subseteq I$, h est continue par morceaux sur $[a, b]$.

Remarques :

Les fonctions des exemples a) et b) précédents sont donc localement continues par morceaux sur $\mathbb{R}$, la fonction de l'exemple c) est localement continue par morceaux sur $]-\infty, 2]$.

Si h est continue sur $\mathbb{R}$ elle est localement continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

4°) **Définition 3** :

Si $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ >}} \dfrac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0}$ existe et est finie, on dit que h est dérivable à droite en x_0 et on appelle nombre dérivé à droite de h en x_0 le nombre :

$$h'_d(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ >}} \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0}$$

Si $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ <}} \dfrac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0}$ existe et est finie, on dit que h est dérivable à gauche en x_0 et on appelle nombre dérivé à gauche de h en x_0 le nombre :

$$h'_g(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ <}} \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0}$$

Remarque 1 :

Ne pas confondre :

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ >}} \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ >}} \frac{h(x) - h(x_0^+)}{x - x_0}$$

Ne pas confondre :

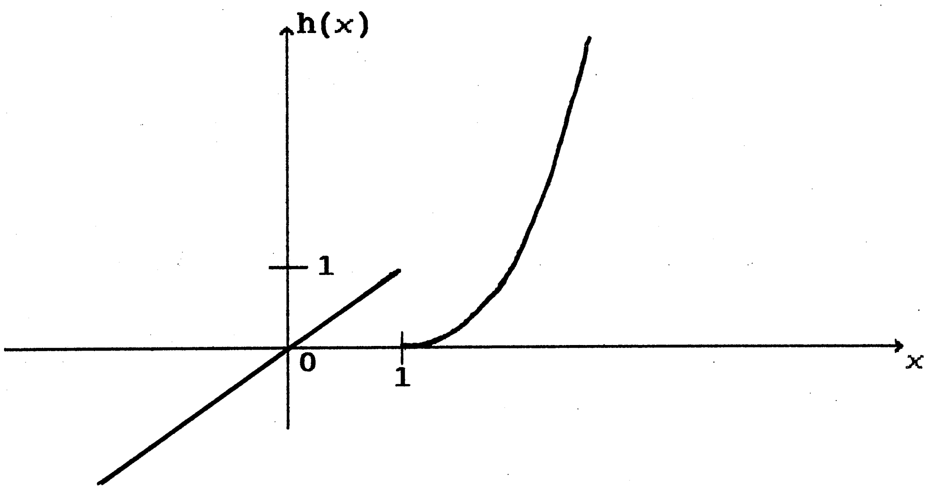
$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ <}} \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ <}} \frac{h(x) - h(x_0^-)}{x - x_0}$$

Exemples :

a) $h : x \longmapsto \sqrt{|x|}$ n'a pas de nombre dérivé, ni à droite, ni à gauche, en zéro.

b) $h : x \longmapsto |x - 1| \, e^x$ a pour nombre dérivé à droite en 1 le nombre e et pour nombre dérivé à gauche en 1 le nombre $- e$.

c) Soit h définie par $\begin{cases} h(x) = x \text{ si } x \leq 1 \\ h(x) = (x-1)^2 \text{ si } x > 1 \end{cases}$



$$\lim_{x \overset{<}{\to} 1} \frac{h(x) - h(1)}{x - 1} = \lim_{x \overset{<}{\to} 1} \frac{x-1}{x-1} = 1 = h'_g(1)$$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 1} \frac{h(x) - h(1)}{x - 1} = \lim_{x \overset{>}{\to} 1} \frac{(x-1)^2 - 1}{x-1} = \lim_{x \overset{>}{\to} 1} \frac{-1}{x-1} = - \infty$$

La fonction h n'est pas dérivable à droite en 1.

d) On montrerait de la même manière que la fonction h définie par $\begin{cases} h(x) = x & \text{si } x < 1 \\ h(1) = \frac{1}{2} & \\ h(x) = (x-1)^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

n'a pas de nombre dérivé ni à droite, ni à gauche en 1.

Remarque 2 :

Si h est dérivable à droite en x_0, h est définie sur un intervalle $[\, x_0 \,,\, x_0 + \varepsilon \,[$ $(\varepsilon > 0)$.

Si $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} x_0} \dfrac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} = a$, on sait (programme de Première) que alors il existe une fonction φ définie sur $]\, x_0 \,,\, x_0 + \varepsilon \,[$ telle que : $h(x) = h(x_0) + a(x - x_0) + (x - x_0)\,\varphi(x)$ et

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} x_0} \varphi(x) = 0$ d'où $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} x_0} h(x) = h(x_0)$

De même si h est dérivable à gauche en x_0, on montre que

$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} x_0} h(x) = h(x_0)$.

Conclusion : Si h admet en x_0 un nombre dérivé à gauche et un nombre dérivé à droite alors h est continue en x_0.

5°) Exemple et définition 4 :

a) *Exemple* :

Soit $f = \mathcal{U}$ et la fonction $g : t \longmapsto \displaystyle\int_0^t \mathcal{U}(x)\,dx$

Si $t \leq 0$ $\quad g(t) = 0$

Si $t > 0$ $\quad g(t) = t$

$\forall\, t \neq 0$ $\quad$ g est dérivable et $g'(t) = f(t)$

En zéro : $g'_g(0) = \mathcal{U}(0^-)$ $\quad , \quad g'_d(0) = \mathcal{U}(0^+)$

donc $\forall\, t \in \mathbb{R}$, $g'_g(t) = \mathcal{U}(t^-)$ $\quad , \quad g'_d(t) = \mathcal{U}(t^+)$

b) *Définition 4* :

> F admettant en tout point d'un intervalle I, un nombre dérivé à gauche et un nombre dérivé à droite.
> Soit la fonction f telle que :
> $$\forall\, t \in I,\ F'_g(t) = f(t^-) \quad \text{et} \quad F'_d(t) = f(t^+)$$
> On dit que F est une primitive large de f sur I.

Remarques :

■ Il va de soi que si $I = [\ a\ ,\ b\ ]$, $F'_g(a)$ et $F'_d(b)$ ne sont pas définis.

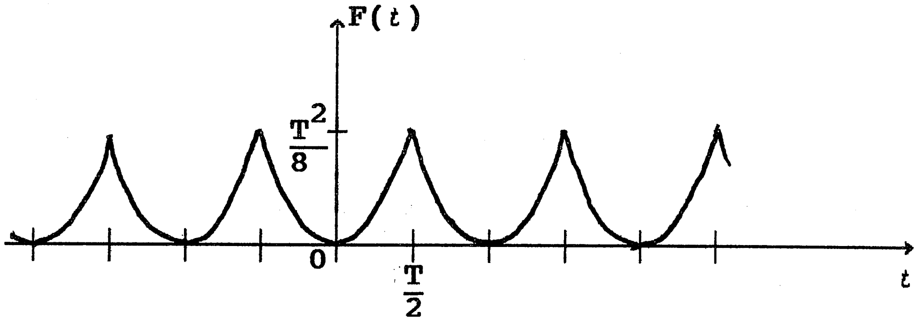
■ On vient de rappeler que si une fonction est dérivable à droite (respectivement à gauche) en t_0, alors cette fonction est continue à droite (respectivement à gauche) en t_0.
Une primitive large d'une fonction f sur un intervalle I étant dérivable à droite et à gauche en tout point $t_0 \in I$ est donc continue en tout point $t_0 \in I$.

$$\boxed{\text{F primitive large de f sur I} \Rightarrow \text{F est continue sur I}}$$

Exemple :

La fonction F de période T définie par :

$F (t) = \frac{t^2}{2}$ si $t \in [-\frac{T}{2} , \frac{T}{2}]$ est une primitive large de f définie dans l'exercice du II 2°) b).



Exercices :

1. $F : t \longmapsto t\, \mathcal{U}(t) - 2\,(t - 1)\, \mathcal{U}(t - 1) + 3\,(t - 3)\, \mathcal{U}(t - 3)$ est elle une primitive large de la fonction définie au II 2°) a) ?

2. $F : t \longmapsto t\, \mathcal{U}(t) - 2\,(t - 1)\, \mathcal{U}(t - 1) + 4\,(t - 3)\, \mathcal{U}(t - 3)$ est elle une primitive large de cette même fonction ?

3. $H : t \longmapsto t\, \mathcal{U}(t) - (2t - 1)\, \mathcal{U}(t - 1) + (3t - 5)\, \mathcal{U}(t - 3)$ est elle une primitive large de cette même fonction ?

4. H définie par
$$\begin{cases} H(t) = 0 \text{ si } t < 0 \\ H(t) = t \text{ si } t \in [\, 0 \,,\, 1\, [\\ H(1) = 2 \\ H(t) = -\,t + 2 \text{ si } t \in\,]\, 1 \,,\, 3\, [\\ H(3) = -5 \\ H(t) = 2\,t - 7 \text{ si } t > 3 \end{cases}$$

est elle une primitive large de cette même fonction ?

6°) <u>Théorème 1 (admis)</u> :

Soit F une primitive large de f sur I G primitive large de f sur I $\Leftrightarrow \begin{cases} \text{il existe } k \in \mathbb{C}, \text{ tel que :} \\ \forall\ t \in I \quad G(t) = F(t) + k \end{cases}$

7°) <u>Intégrale sur un intervalle [a,b] d'une fonction continue par morceaux sur [a,b]. Primitive large d'une fonction localement continue par morceaux.</u>

Nous allons définir l'intégrale sur [a , b] de f, f présentant un saut en t_0, uniquement à l'aide de la notion de primitive d'une fonction continue sur un intervalle. Nous constaterons que la notion d'intégrale ainsi étendue aux fonctions localement continues par morceaux est "identique" à celle de primitive large.

a) *Intégrale sur un intervalle [a , b] d'une fonction continue par morceaux sur [a , b].*

Examinons le cas où f admet un saut en $t_0 \in]\ a\ ,\ b\ [$

Soit f_1 la fonction définie par : $\begin{cases} f_1(t) = f(t) \text{ si } \quad t \in [a,t_0[\\ \\ f_1(t_0) = f(t_0^-) \end{cases}$

f_1 est continue sur [a , t_0].

Par définition $\displaystyle\int_a^{t_0} f(x)\ dx = \int_a^{t_0} f_1(x)\ dx$

De même :

soit f_2 la fonction définie par : $\begin{cases} f_2(t) = f(t) \text{ si } t \in]t_0,b] \\ \\ f_2(t_0) = f(t_0^+) \end{cases}$

$$\int_{t_0}^{b} f(x)\,dx = \int_{t_0}^{b} f_2(x)\,dx$$

$$\boxed{\textbf{Définition} : \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{t_0} f(x)\,dx + \int_{t_0}^{b} f(x)\,dx}$$

b) *Primitive large d'une fonction localement continue par morceaux.*

Soit la fonction F définie sur [a,b] par :

$$\begin{cases} F(t) = \displaystyle\int_a^t f(x)\,dx & \text{si } t \leq t_0 \\[2ex] F(t) = \displaystyle\int_a^{t_0} f(x)\,dx + \int_{t_0}^{t} f(x)\,dx & \text{si } t > t_0 \end{cases}$$

(f est ici la fonction considérée au a))

Il est immédiat de constater que $\forall\, t_1 \in [a,b],\ t_1 \neq t_0,$ $F'(t_1) = f(t_1)$

Montrons que F est dérivable à gauche et à droite en t_0 et que $F'_g(t_0) = f(t_0^-)$, $F'_d(t_0) = f(t_0^+)$:

■ F étant une primitive de f_1 sur $[a\ ,\ t_0]$, $F'_g(t_0) = f_1(t_0) = f(t_0^-)$

■ Pour $t > t_0$ $\quad F(t) = \displaystyle\int_a^{t_0} f(x)\,dx + \int_{t_0}^{t} f_2(x)\,dx$

Il s'ensuit que F est une primitive de f_2 sur $[t_0 , b]$, d'où

$F'_d(t_0) = f_2(t_0) = f(t_0^+)$

La fonction F est donc une primitive large de f sur $[a , b]$ (<u>et est donc continue</u>).

<u>F est la primitive large de f sur [a , b] qui s'annule pour $t = a$</u>.

Remarque : On généralise sans difficulté au cas où f admet sur $] a , b [$ un nombre fini de discontinuités de première espèce.

Exemple :

Soit $f : t \longmapsto \mathcal{U}(t - 1) - \mathcal{U}(t - 3)$ $\qquad I = \mathbb{R}$

La fonction f admet en 1 et en 3 une discontinuité de première espèce.

Soit F définie par :

$$F(t) = \int_0^t f(x)\,dx \qquad \text{si } t < 1$$

$$F(t) = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^t f(x)\,dx \qquad \text{si } 1 \leq t < 3$$

$$F(t) = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^3 f(x)\,dx + \int_3^t f(x)\,dx \qquad \text{si } t \geq 3$$

donc :

$$F(t) = 0 \qquad \text{si } t \in \,]-\infty , 1[$$

$$F(t) = t - 1 \qquad \text{si } t \in [1 , 3]$$

$$F(t) = 2 \qquad \text{si } t \in \,]3 , +\infty[$$

F est continue sur $\mathbb{R}$ et $\forall\, t \in \mathbb{R}$, $F'_g(t) = f(t^-)$ et $F'_d(t) = f(t^+)$

F est la primitive large de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule pour $t = 0$

8°) **Définition :**

> Soit f localement continue par morceaux sur l'intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$
> $[\, a\, ,\, b\,] \subset I$, et
> $t_1, t_2, \ldots\ t_n$ les points de discontinuité de f sur $]\, a\, ,\, b\, [$,
> On appelle intégrale de f sur $[\, a\, ,\, b\,]$ notée $\int_a^b f(t)\, dt$ le nombre $\sum_{i=0}^{n} \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t)\, dt$ avec $t_0 = a$ et $t_{n+1} = b$

9°) **Théorème 2 (admis) :**

> Soit f localement continue par morceaux sur l'intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$
> $a \in I$ et $F : I \to \mathbb{C}$ telle que $\forall\ t \in I,\ F(t) = \int_a^t f(x)\, dx$
> F est la primitive large de f sur I qui s'annule pour $t = a$

10°) **Théorème 3 :**

> Si f est localement continue par morceaux sur $[\, a\, ,\, b\,]$ et si F est une primitive large de f sur $[\, a\, ,\, b\,]$ alors :
> $$\int_a^b f(t)\, dt = F(b) - F(a)$$

Ce théorème est une conséquence immédiate du 7°). En effet, supposons f continue sur $[a\, ,\, b]$ sauf en $t_0 \in\ ]a\, ,\, b[$ où elle présente une discontinuité de première espèce

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^{t_0} f(t)dt + \int_{t_0}^b f(t)dt = F(t_0^{\,-}) - F(a) + F(b) - F(t_0^{\,+})$$

$$= F(b) - F(a) \qquad\qquad \text{car F est continue sur } [a\, ,\, b]$$

Cette démonstration se généralise au cas où f présente sur]a , b[un nombre fini de discontinuités de première espèce.

11°) <u>Remarques</u> :

a) Si deux fonctions f et g localement continues par morceaux ont même valeur en tout point, sauf aux points de discontinuité, elles ont les mêmes primitives larges. (En fait lorsqu'une fonction présente un saut en t_0 il n'est d'aucun intérêt de définir cette fonction en t_0, seules les limites à gauche et à droite, de la fonction, en t_0 sont utiles).

b) Si f est continue sur I, il est évident que la notion de primitive large de f sur I se réduit à celle de primitive.

12°) <u>Théorème 4</u> :

I est un intervalle de $\mathbb{R}$ Si u (respectivement v) est une primitive large sur I de u_1 (respectivement v_1) , u_1 et v_1 étant localement continues par morceaux sur I alors : $\forall$ a $\in$ I, $\forall$ b $\in$ I, $\displaystyle\int_a^b u(t)\, v_1(t)\, dt = \Big[u(t)\, v(t)\Big]_a^b - \int_a^b v(t)\, u_1(t)\, dt$

13°) <u>Définition</u> :

On dit qu'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ est localement intégrable sur un intervalle I $\subseteq \mathbb{R}$ si et seulement si elle est intégrable sur tout intervalle $[a,b] \subseteq$ I.

Nota : Si f est localement continue par morceaux sur I alors elle est localement intégrable sur I.

III- INTEGRALE GENERALISEE DE LA FORME $\int_a^{+\infty} h(t)\,dt$.

1°) Définition :

Soit h localement continue par morceaux sur $[\,a\,,+\infty\,[$, $\int_a^{+\infty} h(t)\,dt = \lim\limits_{x \to +\infty} \int_a^{x} h(t)\,dt$. On dit que l'intégrale est convergente si cette limite existe et est finie.

2°) Exemples :

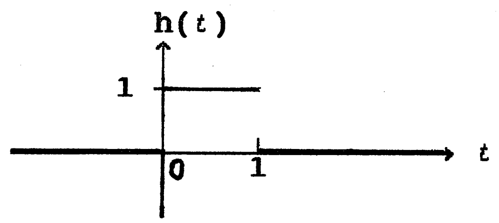
a) $$\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt = \lim_{x \to +\infty} \int_0^{x} e^{-t}\,dt = \lim_{x \to +\infty} \left[1 - e^{-x}\right] = 1$$

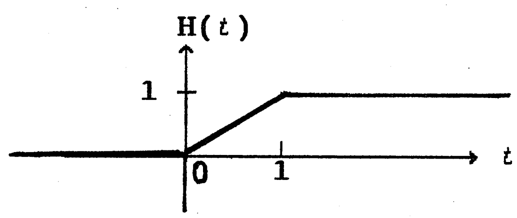
Cette intégrale est convergente.

b) $$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\,dt = \lim_{x \to +\infty} (\ln x) = +\infty$$

Cette intégrale est divergente.

c) $h(t) = \mathcal{U}(t) - \mathcal{U}(t-1)$





$H(t) = 0$ si $t < 0$; $H(t) = t$ si $0 \le t < 1$; $H(t) = 1$ si $t \ge 1$

où $H(t)$ est une primitive large de $h(t)$.

$$\int_0^{+\infty} h(t)\,dt = \lim_{x \to +\infty} H(x) = 1 = \int_0^{1} dt$$

Cette intégrale est convergente.

d) $\underline{\int_0^{+\infty} e^{-mt}\,dt \quad \text{avec } m \in \mathbb{C}^*}$

$$\int_0^x e^{-mt}\,dt = \left[-\frac{1}{m} e^{-mt} \right]_0^x = \frac{1}{m} - \frac{1}{m} e^{-mx}$$

$m = \alpha + j\beta$ et $e^{-mx} = e^{-(\alpha + j\beta)x} = e^{-\alpha x} (\cos \beta x - j \sin \beta x)$

$$\lim_{x \to +\infty} e^{-mx} = \lim_{x \to +\infty} e^{-\alpha x} (\cos \beta x - j \sin \beta x)$$

<u>Si $\alpha > 0$</u> $\lim_{x \to +\infty} e^{-\alpha x} \cos \beta x = \lim_{x \to +\infty} e^{-\alpha x} \sin \beta x = 0$ et

<u>l'intégrale converge vers</u> $\frac{1}{m}$.

<u>Si $\alpha \leq 0$</u> $e^{-\alpha x} \cos \beta x$ n'a pas de limite quand $x \to +\infty$ et l'intégrale n'est pas convergente.

3°) <u>Convergence de</u> $\int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\,dt$.

a) <u>Hypothèses ($\mathscr{H}$), nous ne traiterons que le cas où</u> :

. f est localement continue par morceaux sur $[\,0\,,\,+\infty\,[$. $p \in \mathbb{R}$. il existe un intervalle I, $I = \,]\,p_0\,,\,+\infty\,[$ ou $I = \mathbb{R}$ tel que pour tout $p \in I$, $\lim_{t \to +\infty} e^{-pt} f(t) = 0$

b) *Exemples* :

$f(t) = e^{2t} \quad (I =]2,+\infty[) \qquad\qquad g(t) = \mathcal{U}(t)\, e^{-t^2} \quad (I = \mathbb{R})$

c) *Remarque* : Dans les applications à la Physique la variable t est généralement supposée positive, la fonction f est supposée nulle pour $t < 0$.

d) *Convergence de* $\int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\, dt$

Théorème 1 (admis)

Si $\int_a^{+\infty} | f(t) |\, dt$ est convergente alors $\int_a^{+\infty} f(t)\, dt$ converge

$$\text{et } \left| \int_a^{+\infty} f(t)\, dt \right| \leq \int_a^{+\infty} | f(t) |\, dt$$

Théorème 2 (admis)

Si $\forall\ t \in [a , +\infty [$, $0 \leq f(t) \leq g(t)$ et si $\int_a^{+\infty} g(t)\, dt$ converge alors $\int_a^{+\infty} f(t)\, dt$ converge et $\int_a^{+\infty} f(t)\, dt \leq \int_a^{+\infty} g(t)\, dt$

Théorème 3

Si f vérifie les hypothèses $(\mathcal{H})$ alors :

$$\forall\ p \in I \quad \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\, dt \text{ converge.}$$

Démonstration :

Soit $p' \in I$, si $p > p'$ alors $\lim_{t \to +\infty} e^{-p't} f(t) = 0$

donc il existe $A > 0$ tel que : $t > A \Rightarrow \left| e^{-p't} \quad f(t) \right| < 1.$

Sur $[0,A]$, la fonction $f(t)\ e^{-p't}$ est localement continue par morceaux donc sur $[\ 0\ ,\ A\ ]$ il existe au plus un nombre fini de points de discontinuité : $0 \leq a_1 < a_2 < \ldots\ldots < a_n \leq A$.

Sur $\left]\ a_i\ ,\ a_{i+1}\ \right[$ $\quad f(t)\ e^{-p't}$ est continue.

Soit $M_i = \text{Sup} \left| e^{-p't}\ f(t) \right|$ pour $t \in \left]\ a_i\ ,\ a_{i+1}\ \right[$

Soit $M = \text{Sup}\ M_i$ avec $1 \leq i \leq n - 1$ alors

$\forall\ t \in [\ 0\ ,\ A\ ] \qquad \left| f(t) e^{-p't} \right| \leq M$

donc il existe c tel que $\forall\ t \in \mathbb{R}^+, \quad \left| e^{-p't}\ f(t) \right| \leq c = \text{Sup}(M,1)$

$$\left| e^{-pt}\ f(t) \right| = \left| e^{-(p-p')t}\ e^{-p't}\ f(t) \right|$$

$$\left| e^{-(p-p')t}\ e^{-p't}\ f(t) \right| \leq e^{-(p-p')t} \left| e^{-p't}\ f(t) \right| \leq c\ e^{-(p-p')t}$$

donc d'après les Théorèmes 1 et 2 $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\ dt$ converge.

B - TRANSFORMATION de LAPLACE

I- DEFINITIONS ET THEOREME :

1°) Transformée de Laplace d'une fonction f nulle sur $]-\infty,0[$

> Soit une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, nulle sur $]-\infty,0[$, localement intégrable sur $[0,+\infty[$. S'il existe un intervalle I, $I =]p_0,+\infty[$ ou $I = \mathbb{R}$ tel que pour tout $p \in I$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\, dt$ converge, alors l'application F de I dans $\mathbb{C}$ définie par $F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\, dt$
>
> est nommée transformée de Laplace de f.

Nota :

▪ Rappelons que si f est localement continue par morceaux sur un intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$, elle est localement intégrable sur I.

▪ Dans ce chapitre, les transformées de Laplace définies ou cherchées sont exclusivement les transformées de fonctions nulles sur $]-\infty,0[$ et vérifiant les Hypothèses $\mathscr{H}$. Souvent ces fonctions seront notées sous la forme:

$$f : t \longmapsto g(t)\, \mathcal{U}(t) \quad \text{ou encore } f = g.\mathcal{U}$$

■ Remarquons que toute fonction $g.\mathcal{U}$ telle que g vérifie les hypothèses $\mathcal{H}$ admet une transformée de Laplace.

2°) **Notations** :

On note $\mathcal{L} : f \longmapsto F$ ou $F = \mathcal{L}(f)$
On note aussi, par abus d'écriture $\mathcal{L}(f) = \mathcal{L}\left[f(t) \right]$

3°)

f est nommé original de F

4°) **Théorème** :

$$\boxed{\lim_{p \to +\infty} F(p) = 0}$$

En reprenant la démonstration du Théorème 3 du A - Préliminaires III 3°) d), on a donc $\forall\ p > p'$, $p' \in I$ étant fixé

$$|F(p)| = \left| \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\, dt \right| \leq c \int_0^{+\infty} e^{-(p-p')t}\, dt$$

$$|F(p)| \leq -\frac{c}{p-p'} \left[e^{-(p-p')t} \right]_0^{+\infty}$$

$$|F(p)| \leq \frac{c}{p-p'} \qquad \text{d'où} \quad \lim_{p \to +\infty} F(p) = 0$$

II- TRANSFORMEES DE QUELQUES FONCTIONS USUELLES - PROPRIETES :

1°) Fonction partout nulle sauf éventuellement en des points isolés de $\mathbb{R}^+$, en nombre fini sur tout $[a, b] \subset \mathbb{R}^+$.

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)\, dt = 0 , \quad \text{donc}$$

pour tout $p \in \mathbb{R}$, $\boxed{F(p) = 0}$

Remarque :

Nous serons amenés à rencontrer de telles fonctions, par exemple :

soit g périodique, de période 2, définie par $g(t) = 1$ si $t \in [0,1[$ et $g(t) = -1$ si $t \in [1, 2[$ et la fonction f telle que :

$$f(t) = g(t)\, \mathcal{U}(t).$$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R} - \mathbb{N}$ et sa dérivée f′ est partout nulle sur $\mathbb{R} - \mathbb{N}$, donc $\forall\, p \in \mathbb{R}$, $\mathcal{L}(f')(p) = 0$.

2°) Fonction échelon unité : $f = \mathcal{U}$

$\forall\, p > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-pt}\, \mathcal{U}(t) = 0$ et si $p = 0$, $e^{-pt}\, \mathcal{U}(t) = 1$

Si $p > 0$ $\quad F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt}\, dt = \left[-\frac{1}{p} e^{-pt} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{p}$

donc $\mathcal{L}(\mathcal{U})$ est définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$\boxed{\mathcal{L}(\mathcal{U})(p) = \frac{1}{p}}$$

3°) Fonction Rampe : $f : t \longmapsto t\,\mathcal{U}(t)$

$$F(p) = \int_0^{+\infty} t\, e^{-pt}\, dt = \left[-\frac{t}{p}\, e^{-pt} \right]_0^{+\infty} + \frac{1}{p} \int_0^{+\infty} e^{-pt}\, dt$$

Si $p > 0$ $$F(p) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{p^2} \left[-pt\, e^{-pt} - e^{-pt} \right]_0^{x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{p^2} \left[-px\, e^{-px} - e^{-px} + 1 \right] = \frac{1}{p^2}$$

donc F est définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$\boxed{F(p) = \frac{1}{p^2}}$$

4°) Fonction $f : t \longmapsto e^{at}\,\mathcal{U}(t)$, $a \in \mathbb{C}$

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt}\, e^{at}\, dt = \int_0^{+\infty} e^{(a-p)t}\, dt$$

Si $a \in \mathbb{R}$, l'intégrale est convergente pour $p > a$ et f est définie sur $]a,+\infty[$.

Si a n'est pas réel, l'intégrale est convergente pour $p > \mathcal{R}e(a)$ et f est définie sur $]\,\mathcal{R}e(a)\,,+\infty\,[$.

$$\boxed{F(p) = \frac{1}{p-a}}$$

Démonstration : voir l'exemple A-III-2°)-d)

5°) <u>Linéarité</u> :

a) Si f admet une transformée de Laplace pour $p \in I_1$

Si g admet une transformée de Laplace pour $p \in I_2$

alors $\lambda f + \mu g$ admet une transformée de Laplace pour $p \in I_1 \cap I_2$

$$\boxed{\forall\ (\lambda\ ,\ \mu\ ) \in \mathbb{C}^2,\ \mathscr{L}\ (\ \lambda f + \mu g\ ) = \lambda\ \mathscr{L}\ (\ f\ ) + \mu\ \mathscr{L}\ (\ g\ )}$$

En effet :

$$\int_0^{+\infty} (\lambda f + \mu g)(t)\ e^{-pt}\ dt = \lambda \int_0^{+\infty} e^{-pt}\ f(t)\ dt + \mu \int_0^{+\infty} e^{-pt}\ g(t)\ dt$$

b) *Applications* :

Transformées de fonctions trigonométriques

Soit $f_1 : t \longmapsto \mathcal{U}\ (t) \cos \omega t$ et $f_2 : t \longmapsto \mathcal{U}\ (t) \sin \omega t$

$$\cos \omega t = \frac{1}{2}\ e^{j\omega t} + \frac{1}{2}\ e^{-j\omega t} \quad \text{et} \quad \sin \omega t = \frac{1}{2j}\ e^{j\omega t} - \frac{1}{2j}\ e^{-j\omega t}$$

d'où $\forall\ p \in\ ]\ 0\ ,\ +\infty\ [$

$$F_1(p) = \mathscr{L}\left[\cos \omega t\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{p - j\omega}\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{p + j\omega}\right] = \frac{p}{p^2 + \omega^2}$$

$$F_2(p) = \mathscr{L}\left[\sin \omega t\right] = \frac{1}{2j}\left[\frac{1}{p - j\omega}\right] - \frac{1}{2j}\left[\frac{1}{p + j\omega}\right] = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$$

Les transformées des fonctions f_1 et f_2 sont les fonctions F_1 et F_2 définies sur $]\ 0\ ,\ +\infty\ [$ par :

$$\boxed{F_1(p) = \frac{p}{p^2 + \omega^2}} \qquad \boxed{F_2(p) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}}$$

c) *Exercices* :

Préciser I puis donner la Transformée de Laplace de :

1- $f : t \longmapsto (3t + 5 + 2e^t)\, \mathcal{U}(t)$

2- $f : t \longmapsto \mathcal{U}(t)\, \mathrm{ch}\, \omega t$

3- $f : t \longmapsto \mathcal{U}(t)\, \mathrm{sh}\, \omega t$

4- $f : t \longmapsto \mathcal{U}(t)\, \sin^2 2t$

5- $f : t \longmapsto \mathcal{U}(t)\, \cos^3 t$

6°) Autres propriétés :

> Si f et g, localement continues par morceaux sur $[0,+\infty[$, ont même valeur en tout point, sauf aux points de discontinuité, elles ont même transformée de Laplace.
> (cf A- II- 11°) a))

Réciproquement (Théorème admis) :

> Si f et g sont localement continues par morceaux sur $[0,+\infty[$ et si $\mathcal{L}(f) = \mathcal{L}(g)$ alors $f - g$ est une fonction partout nulle sauf éventuellement en des points isolés de $\mathbb{R}^+$ en nombre fini sur tout $[a,b] \subset \mathbb{R}^+$.

Exemple :

La fonction F définie sur $]0,+\infty[$ par $F(p) = \frac{1}{p}$ a pour original la fonction $\mathcal{U}$ mais aussi la fonction f définie par $f(t) = 0$ si $t \leq 0$ et $f(t) = 1$ si $t > 0$.

Remarque :

Si $\mathcal{L}(f) = \mathcal{L}(g)$ et si f et g sont continues sur l'intervalle ouvert $I \subseteq [0,+\infty[$ alors $\forall\, t \in I,\ g(t) = f(t)$

7°) **Effet d'un changement d'échelle sur la variable :**

a) Si $\mathcal{L}\left[\ f(t)\ \right](p) = F(p)$ est définie pour $p \in I$ et si $a > 0$, alors : $\boxed{\mathcal{L}\left[f(at)\right](p) = \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right) \text{ est définie pour } \frac{p}{a} \in I}$

b) *Démonstration* :

Soit $\mathcal{L}\left[f(t)\right](p) = F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\, dt, \qquad p \in I$

$$\mathcal{L}\left[f(at)\right](p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(at)\, dt$$

$$= \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{p}{a}x} f(x)\, dx \qquad \text{avec } x = at$$

$$= \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right) \qquad \frac{p}{a} \in I$$

8°) **Effet d'une translation sur la variable :**

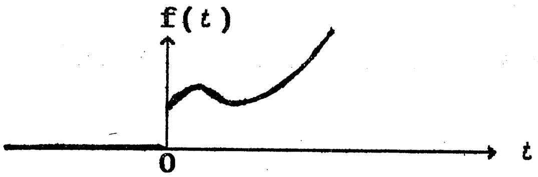
a) Si $\mathcal{L}\left[\ f(t)\ \mathcal{U}(t)\ \right](p) = F(p)$

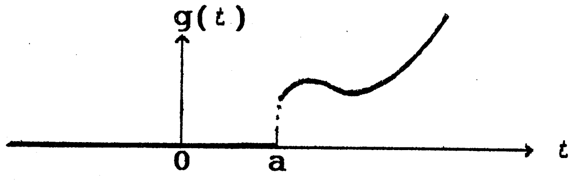
est définie pour $p \in I$ et si $a > 0$ alors

$$\boxed{\mathcal{L}\left[\ f(t-a)\ \mathcal{U}(t-a)\ \right](p) = e^{-pa}\, F(p)}$$

est définie pour $p \in I$.

b) *Démonstration* :





$g(t) = f(t-a)\,\mathcal{U}(t-a)$

$$\mathcal{L}\Big[g(t)\Big](p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t-a)\,\mathcal{U}(t-a)\,dt$$

$$= \int_0^{a} e^{-pt} f(t-a)\,\mathcal{U}(t-a)\,dt + \int_a^{+\infty} e^{-pt} f(t-a)\,\mathcal{U}(t-a)\,dt$$

$$= \int_a^{+\infty} e^{-pt} f(t-a)\,\mathcal{U}(t-a)\,dt \quad \text{car pour } 0 \le t \le a \quad \mathcal{U}(t-a) = 0$$

En posant $x = t - a$, on a $\mathcal{L}\Big[g(t)\Big](p) = \int_0^{+\infty} e^{-p(x+a)} f(x)\,dx$ d'où :

$$\mathcal{L}\Big[g(t)\Big](p) = e^{-pa} \int_0^{+\infty} e^{-px} f(x)\,dx = e^{-pa}\,\mathcal{L}\Big[f(x)\Big](p) = e^{-pa}\,F(p)$$

c) *Exemples* :

$$\mathcal{L}\Big[\mathcal{U}(t-a)\Big](p) = \frac{e^{-pa}}{p}$$

$$\mathcal{L}\Big[\mathcal{U}(t-a) - \mathcal{U}(t-b)\Big](p) = \frac{e^{-pa} - e^{-pb}}{p}$$

$$\mathcal{L}\Big[(t-a)\,\mathcal{U}(t-a)\Big](p) = \frac{e^{-pa}}{p^2}$$

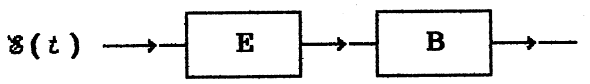
$$\mathcal{L}\Big[e^{\alpha(t-a)}\,\mathcal{U}(t-a)\Big](p) = \frac{e^{-pa}}{p-\alpha}$$

$$\mathcal{L}\Big[\mathcal{U}(t-a)\cos\omega(t-a)\Big](p) = \frac{p\,e^{-pa}}{p^2+\omega^2}$$

d) *Exemple d'application à la Physique* :

Signal causal échantillonné bloqué.

$\mathfrak{s}$ signal continu sur $[\ 0\ ,\ +\infty\ [$ et nul pour $t < 0$.



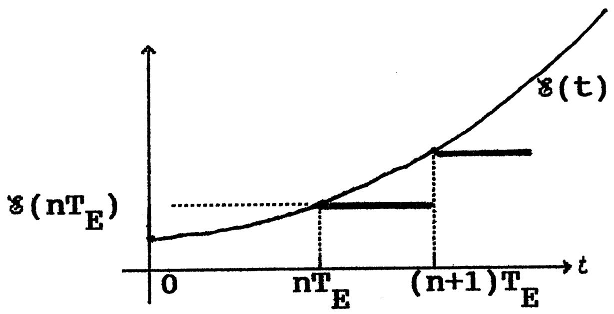
Signal échantillonné bloqué

E : échantillonneur

Son rôle est de faire l'acquisition de $\mathfrak{s}(t)$ aux instants nT_E avec $n \geq 0$.

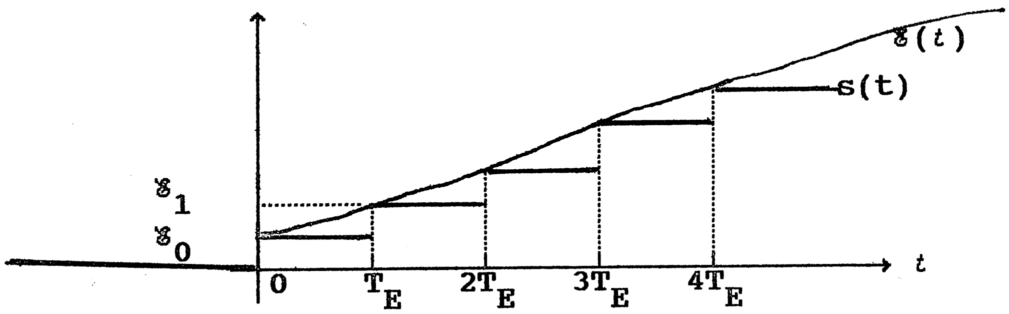
B : bloqueur d'ordre zéro

Son rôle est de maintenir l'information $\mathfrak{s}(nT_E)$, acquise à l'instant nT_E, jusqu'à l'instant $(n + 1)\ T_E$ de l'acquisition suivante.



.acquisition à nT_E
.acquisition à $(n+1)T_E$
.maintien entre nT_E et $(n+1)T_E$ du signal à la valeur $\mathfrak{s}(nT_E)$.

Allure du signal échantillonné bloqué :



Le signal échantillonné bloqué peut s'écrire :

$$s(t) = \gamma_0 \left[\mathcal{U}(t) - \mathcal{U}(t - T_E)\right] + \gamma_1 \left[\mathcal{U}(t - T_E) - \mathcal{U}(t - 2T_E)\right] + \ldots.$$

$$+ \gamma_n \left[\mathcal{U}(t - nT_E) - \mathcal{U}(t - (n+1)T_E)\right] + \ldots.$$

La transformée de Laplace S de s est définie par :

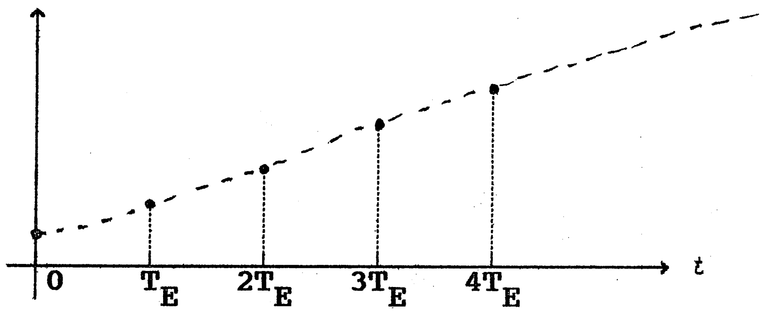
$$S(p) = \gamma_0 \left[\frac{1}{p} - \frac{1}{p} e^{-T_E p} \right] + \gamma_1 \left[\frac{1}{p} e^{-T_E p} - \frac{1}{p} e^{-2T_E p} \right] + \ldots.$$

$$+ \gamma_n \left[\frac{1}{p} e^{-nT_E p} - \frac{1}{p} e^{-(n+1)T_E p} \right] + \ldots.$$

$$S(p) = \sum_{n=0}^{+\infty} \gamma_n \left[\frac{1}{p} - \frac{1}{p} e^{-T_E p} \right] e^{-nT_E p}$$

$$S(p) = \frac{1 - e^{-T_E p}}{p} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \gamma_n \; e^{-nT_E p}$$

$\sum_{n=0}^{+\infty} \gamma_n \; e^{-nT_E p}$ est la transformée de Laplace du signal échantillonné aux instants nT_E (Echantillon γ_n à l'instant nT_E).



La fonction H définie par $H(p) = \dfrac{1 - e^{-T_E p}}{p}$ est la fonction de transfert opérationnelle associée au rôle du bloqueur d'ordre zéro, c'est à dire maintien de la valeur γ_n entre l'instant nT_E et l'instant $(n+1)T_E$.

e) *Exercices* :

Trouver les transformées des fonctions f définies par :

$$f(t) = \mathcal{U}(t) + \mathcal{U}(t - 1)$$

$$f(t) = \mathcal{U}(t) \sin t + \mathcal{U}(t - \pi) \sin (t - \pi)$$

$$f(t) = t\, \mathcal{U}(t) - 2(t - 1)\mathcal{U}(t - 1) + (t - 2)\mathcal{U}(t - 2)$$

9°) Transformée de $\mathcal{U}$ f dans le cas où f est une fonction périodique, de période T, localement continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

a) Si f est périodique et localement continue par morceaux alors : $\forall t \in \mathbb{R}$, il existe m et M tel que $m \leq f(t) \leq M$ donc :

$$m\, e^{-pt} \leq f(t)\, e^{-pt} \leq M\, e^{-pt} \quad \text{et si } p > 0 \quad \lim_{t \to +\infty} f(t)\, e^{-pt} = 0$$

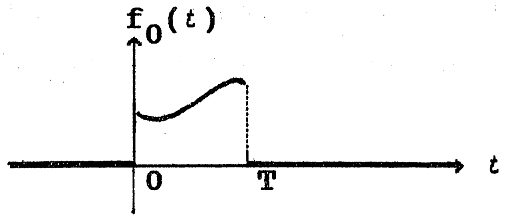
Donc $\mathcal{U}$ f vérifie les hypothèses $\mathcal{H}$ pour $p > 0$, il en résulte qu'elle admet une transformée de Laplace définie sur $]0,+\infty[$.

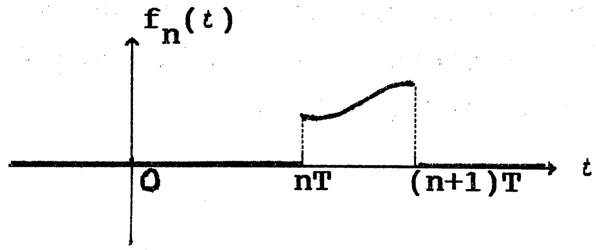
b) *Transformée de : $t \longmapsto \mathcal{U}(t)\, f(t)$*

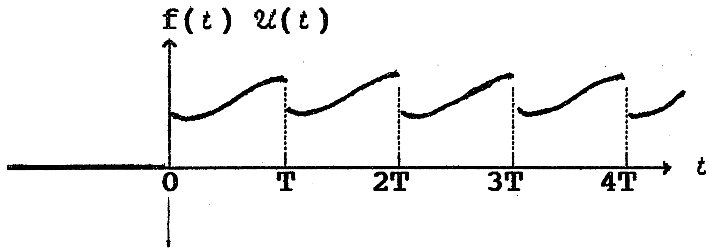
Soit f_0 définie par : $\forall t \in [\,0\,,\,T\,[\quad f_0(t) = f(t)$

et $\forall t \notin [\,0\,,\,T\,[\quad f_0(t) = 0$

Soit f_n définie par : $f_n(t) = f_0(t - nT)\,\mathcal{U}(t - nT)$







$$f(t)\,\mathcal{U}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$$

Soit : F_0 la transformée de f_0

F_n la transformée de f_n alors $F_n(p) = F_0(p)\,e^{-pnT}$

F la transformée de $\mathcal{U}\,f$

$$F\,(p) = \int_0^{+\infty} \mathcal{U}(t)\,f(t)\,e^{-pt}\,dt = \int_0^{+\infty} \left[\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\,e^{-pt}\right] dt$$

On démontre et nous admettrons que :

$$\int_0^{+\infty} \left[\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\,e^{-pt}\right] dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t)\,e^{-pt}\,dt$$

$$F\,(p) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t)\,e^{-pt}\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} F_0(p)\,e^{-pnT} = F_0(p) \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-pnT}$$

On rappelle que pour $|q| < 1$ $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1 - q}$

donc si $| e^{-pT} | < 1$ $\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-pnT} = \frac{1}{1 - e^{-pT}}$ d'où si $p > 0$

$$\boxed{F(p) = \frac{1}{1 - e^{-pT}} F_0(p)}$$

c) *Exemple* :

Déterminer la transformée de $\mathcal{U}$ f sachant que f est périodique, de période T et est définie sur $[0 , T [$ par :

$$f(t) = \mathcal{U}(t) - \mathcal{U}(t - \tau) \quad \text{avec } \tau < T .$$

$$F_0(p) = \frac{1 - e^{-\tau p}}{p} \qquad \text{d'où} \qquad F(p) = \frac{1 - e^{-\tau p}}{p} \cdot \frac{1}{1 - e^{-Tp}}$$

d) *Exercices* :

1- Déterminer la transformée de $\mathcal{U}$. f sachant que f est périodique, de période 1 et est définie sur $[0 , 1 [$ par :

$$f(t) = t .$$

2- Déterminer la transformée de f définie par :

$$f(t) = |\sin \omega t| \; \mathcal{U}(t).$$

On pourra utiliser la fonction g définie par :

$$g(t) = \mathcal{U}(t) \sin \omega t + \mathcal{U}(t - \tfrac{\pi}{\omega}) \sin \left[\omega(t - \tfrac{\pi}{\omega})\right]$$

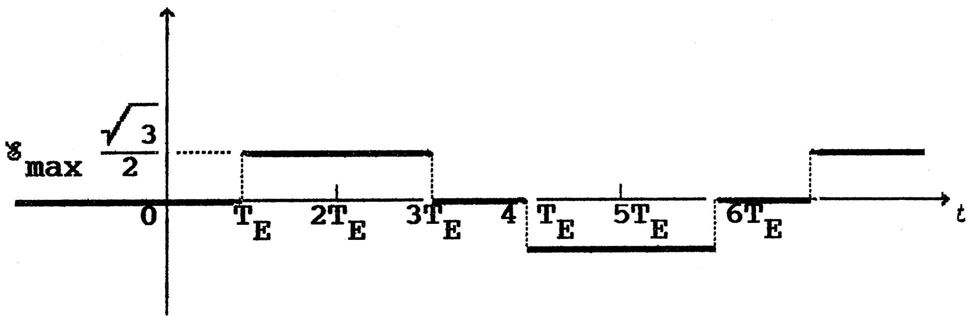
3- Déterminer la transformée de $\mathcal{U} \cdot f$, sachant que f est de période 2 et définie par :

$$f(t) = t \quad \text{si } t \in [\, 0 \,,\, 1 \,[$$

$$f(t) = 2 - t \quad \text{si } t \in [\, 1 \,,\, 2 \,]$$

10°) Exercice d'application à la Physique.

Signal sinusoïdal échantillonné bloqué (bloqueur d'ordre zéro) avec $T_E = \frac{T}{6}$ période d'échantillonnage où T est la période du signal γ sinusoïdal.



Déterminer S(p) pour le signal échantillonné bloqué.

Réponse :

$$S(p) = \gamma_{max} \frac{\sqrt{3}}{2} \left[\left[e^{-T_E p} - e^{-3T_E p} \right] - \left[e^{-4T_E p} - e^{-6T_E p} \right] \right] \frac{1}{1 - e^{-Tp}}$$

III- TRANSFORMEE DE LA DERIVEE :

Nous allons traiter le cas qui permet d'obtenir le résultat qui figure dans le formulaire officiel des B.T.S. et dans la plupart des ouvrages destinés aux étudiants des classes de T.S. Nous traiterons aussi les cas qui nous paraissent indispensables pour le programme de Physique. En tête de paragraphe, pour éviter toute confusion sont précisées les conditions d'application des résultats que nous obtiendrons.

1°) Remarques et rappels :

a) En Physique il est courant d'étudier des signaux que l'on modélise par des fonctions qui ne sont pas continues sur $\mathbb{R}$ ou pas dérivables sur $\mathbb{R}$.

b) Dans ce III :

- Toutes les fonctions considérées sont nulles sur $]-\infty,0[$.

- Toutes les fonctions notées f vérifient les hypothèses $\mathscr{H}$.

- On note F la fonction définie sur $I = \mathbb{R}$ ou $I =]p_0,+\infty[$ et transformée de Laplace de la fonction notée f.

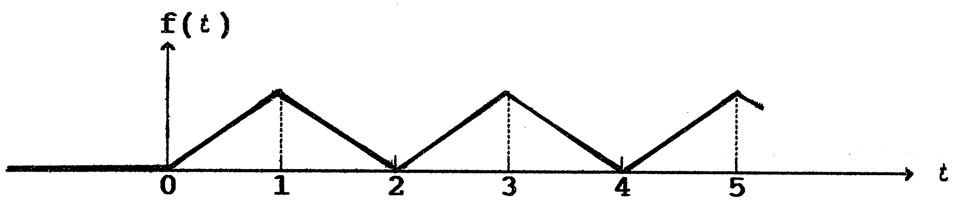
c) Si la fonction f est une *primitive large* sur $[0,+\infty[$ d'une fonction f_1 *localement continue par morceaux* sur $[0,+\infty[$ alors la fonction f est *continue* sur $[0,+\infty[$ et, en particulier sur tout intervalle *ouvert* I sur lequel f est dérivable la restriction à I de f_1 est la *dérivée* de f sur I.

Exemple :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

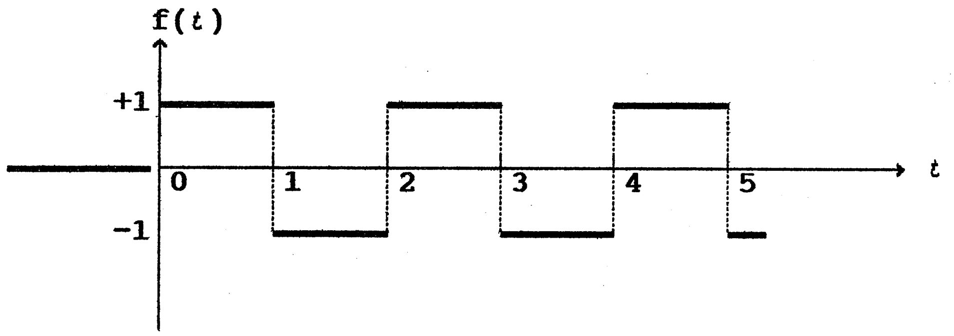
$$f(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \Big[\big[t-2k\big] \big[\mathcal{U}(t-2k)-\mathcal{U}(t-2k-1)\big] - \big[t-2k-1\big] \big[\mathcal{U}(t-2k-1)-\mathcal{U}(t-2k-2)\big] \Big]$$

$k \in \mathbb{N}$



f est continue sur $[\ 0\ ,\ +\infty\ [$ et primitive large sur $[\ 0\ ,\ +\infty\ [$, nulle en 0, de la fonction f_1 *localement continue par morceaux* sur $[\ 0\ ,\ +\infty\ [$, définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_1(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \Big[\ \mathcal{U}(t-2k) - 2\ \mathcal{U}(t-2k-1) + \mathcal{U}(t-2k-2)\ \Big]$$



$\forall\ k \in \mathbb{N}$, la restriction de f_1 à $]k,k+1[$ est la dérivée de f sur $]k,k+1[$.

De même, soit la fonction f_2 définie sur $\mathbb{R} - \mathbb{N}$, constamment nulle sur $]\ -\infty\ ,\ 0\ [$ et sur chacun des intervalles $]k,k+1[$, $\forall\ k \in \mathbb{N}$ la restriction de f_2 à $]k,k+1[$ est la dérivée de la restriction de f_1 à $]k,k+1[$.

2°) Une question de terminologie

Considérons des fonctions f, f_1 et f_2 du même type que celles de l'exemple ci-dessus.

Pour nous conformer à l'usage (cf par exemple : ZEMANIAN - Distribution Théory and Transform Analysis - Dover Publication - Chapitre 2, page 50, Ex 2,3 et 4) et *pour des raisons de commodité*, il nous arrivera de noter la fonction f_1 par f', la fonction f_2 par f" et d'employer, par *abus de langage*, le nom de *dérivée de* f pour la fonction f_1 et de *dérivée seconde de* f pour la fonction f_2. De même, f_2 sera appelée *dérivée de* f_1.

Alors *en général*, le mot *dérivée apparaîtra entre guillemets*.

Donc si, par exemple, la fonction f est primitive large sur $[\ 0\ ,+\infty\ [$ d'une fonction f' localement continue par morceaux sur $[\ 0\ ,+\infty\ [$ on écrira que la fonction f' est la fonction « dérivée » de f sur $[\ 0\ ,+\infty\ [$.

De même, si f est une fonction localement continue par morceaux sur $[\ 0\ ,+\infty\ [$ et si f_1 est telle que sa restriction à chacun des intervalles ouverts I sur lesquels f est dérivable est dérivée de f sur I on écrira que f' est la fonction « dérivée » de f sur $[\ 0\ ,+\infty\ [$.

Si (par hasard) ces guillemets étaient omis dans la suite de cet ouvrage le lecteur n'aura aucun mal à les rétablir.

3°) Transformée de la fonction f' « dérivée » de f si f est continue sur $[\ 0\ ,+\infty\ [$

Hypothèses :

- f' est localement continue par morceaux sur $[\ 0\ ,+\infty\ [$
- f est une primitive large de f' sur $[\ 0\ ,+\infty\ [$

$$\int_0^{+\infty} e^{-pt} f'(t)\, dt = \lim_{x \to +\infty} \int_0^{x} e^{-pt} f'(t)\, dt$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left[\left[f(t)\, e^{-pt} \right]_0^x + p \int_0^x e^{-pt} f(t)\, dt \right]$$

$$= - f(0^+) + p\, F(p)$$

$$\boxed{\forall\, p \in I \qquad \mathscr{L}\left[\, f' \,\right](p) = p\, F(p) - f(0^+)}$$

a) *Remarque*

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = - \mathcal{U}(t) \cos t$, sa transformée de Laplace est la fonction F définie sur $]\, 0 \, , + \infty \,[$ par $F(p) = \dfrac{- p}{p^2 + 1}$.

Soit f' vérifiant les hypothèses

$$\mathscr{L}\left[\, f' \,\right](p) = p\, F(p) - f(0^+) = \frac{- p^2}{p^2 + 1} + 1$$

Posons $F_1(p) = \dfrac{- p^2}{p^2 + 1}$ et $F_2(p) = 1$

$\lim\limits_{p \to +\infty} F_1(p) = - 1$ et $\lim\limits_{p \to +\infty} F_2(p) = 1$ donc ni F_1 ni F_2 ne sont transformées de Laplace de fonctions vérifiant les hypothèses $\mathscr{H}$.

Mais la fonction G définie sur $] 0 , +\infty [$ par

$$G(p) = \frac{-p^2}{p^2+1} + 1 = \frac{1}{p^2+1}$$ est la transformée de Laplace de la fonction g, « dérivée » de f, définie par $g(t) = \mathcal{U}(t) \sin t$.

(Remarquons que ici f est dérivable sur $[0 , +\infty [$ donc que les guillemets ne s'imposent pas)

b) *Exemples* :

α) $f : t \longmapsto \mathcal{U}(t) \sin \omega t$

$$f' : t \longmapsto \mathcal{U}(t)\, \omega \cos \omega t \Rightarrow \frac{1}{\omega} f'(t) = \mathcal{U}(t) \cos \omega t$$

$$F(p) = \frac{\omega}{p^2+\omega^2} \text{ d'où } \mathcal{L}\Big[\mathcal{U}(t) \cos \omega t\Big](p) = \frac{1}{\omega}\, p\, \frac{\omega}{p^2+\omega^2} = \frac{p}{p^2+\omega^2}$$

β) $f : t \longmapsto t^2\, \mathcal{U}(t)$

$$f' : t \longmapsto 2\, t\, \mathcal{U}(t)$$

$$\mathcal{L}\Big[\, f' \,\Big](p) = \frac{2}{p^2} = p\, F(p) - f(0^+) = p\, F(p) \quad \text{d'où} \quad F(p) = \frac{2}{p^3}$$

γ) $f : t \longmapsto t\, \mathcal{U}(t) - 2\,(t-1)\, \mathcal{U}(t-1) + (t-2)\, \mathcal{U}(t-2)$

$$F(p) = \frac{(1 - e^{-p})^2}{p^2}$$

Soit $f' : t \longmapsto \mathcal{U}(t) - 2\, \mathcal{U}(t-1) + \mathcal{U}(t-2)$ « dérivée » de f

$$\mathcal{L}\Big[\, f' \,\Big](p) = p\, F(p) - f(0^+) = p\, F(p) = \frac{(1 - e^{-p})^2}{p}$$

résultat que l'on peut vérifier très facilement par calcul direct.

4°) Transformée de la fonction f"

Hypothèses :

- f" est localement continue par morceaux sur [0 , + ∞ [
- f′ est une primitive large de f" sur [0 , + ∞ [
- f′ est la dérivée de f sur [0 , + ∞ [
- f′ vérifie pour p ∈ I ⊆ ℝ les hypothèses $\mathscr{H}$.

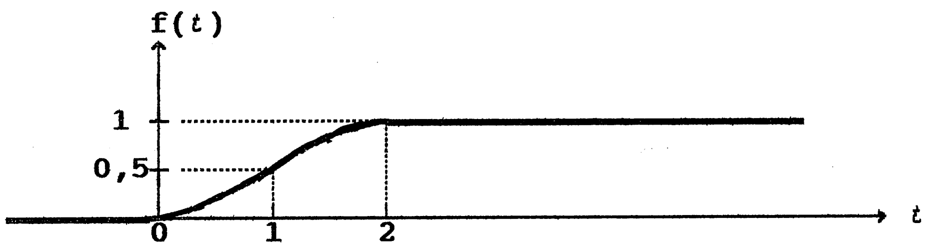
$$\int_0^{+\infty} e^{-pt}\, f''(t)\, dt = \Big[f'(t)\, e^{-pt}\Big]_0^{+\infty} + p\,\Big[p\, F(p) - f(0^+)\Big]$$

$$\boxed{\forall\, p \in I \qquad \mathscr{L}\Big[\, f''\, \Big](p) = p^2\, F(p) - p\, f(0^+) - f'(0^+)}$$

a) *Exemple* :

Soit f définie par :

$$f(t) = \frac{1}{2}\, t^2 \Big[\mathcal{U}(t) - \mathcal{U}(t-1)\Big] + (2t - \frac{1}{2}\, t^2 - 1) \Big[\mathcal{U}(t-1) - \mathcal{U}(t-2)\Big] + \mathcal{U}(t-2)$$



Il est facile de vérifier que f est dérivable sur ℝ et que sa dérivée f′ est définie par :

$$f'(t) = t\, \mathcal{U}(t) - 2\,(t-1)\, \mathcal{U}(t-1) + (t-2)\, \mathcal{U}(t-2)$$

Soit la fonction f" définie par :
$f''(t) = \mathcal{U}(t) - 2\,\mathcal{U}(t-1) + \mathcal{U}(t-2)$

f' est une primitive large de f" sur $[\,0\,,+\infty\,[$ et f" est localement continue par morceaux sur $[\,0\,,+\infty\,[$.

D'après 3°) b) γ)

$$\mathcal{L}\Big[f'\Big](p) = \frac{(1-e^{-p})^2}{p^2} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{L}\Big[f''\Big](p) = \frac{(1-e^{-p})^2}{p}$$

d'où $\dfrac{(1-e^{-p})^2}{p} = p^2\,F(p)$ car $f(0^+) = f'(0^+) = 0$ donc

$$F(p) = \frac{(1-e^{-p})^2}{p^3}$$

b) *Exercice* :

Soit g telle que : $g(t) = 2\,f''(t) + 3\,f'(t) + f(t)$

f, f', f" vérifiant les hypothèses précisées ci-dessus et de plus telles que $f(0^+) = f'(0^+) = 0$

Exprimer $\mathcal{L}\Big[\,g\,\Big](p)$ en fonction de F(p) et de p.

5°) Transformée de la fonction f'''

Hypothèses :

- f''' est localement continue par morceaux sur $[\,0\,,+\infty\,[$
- f" est une primitive large de f''' sur $[\,0\,,+\infty\,[$

■ f" est la dérivée de f' sur [0 , + ∞ [

■ f' est la dérivée de f sur [0 , + ∞ [

■ f' et f" vérifient pour $p \in I \subseteq \mathbb{R}$ les hypothèses $\mathcal{H}$.

$$\boxed{\forall\, p \in I \quad \mathcal{L}\Big[\, f''' \,\Big](p) = p^3F(p) - p^2f(0^+) - pf'(0^+) - f''(0^+)}$$

On peut généraliser ces théorèmes pour des dérivées d'ordre quelconque.

6°)Transformée de la fonction f' « dérivée » de f lorsque f présente un saut sur] 0 , + ∞ [

Hypothèses :

■ f' est localement continue par morceaux sur [0 , + ∞ [

■ f est une primitive large de f' sur] 0 , x_i [et sur] x_i , + ∞ [

■ le saut de f en x_i est σ_{x_i}

a) *Exemple de telles fonctions* :

$$f : t \longmapsto t\Big[\, \mathcal{U}(t) - \mathcal{U}(t-a) \,\Big] \qquad a > 0$$

$$f' : t \longmapsto \mathcal{U}(t) - \mathcal{U}(t-a) \qquad a > 0$$

Le saut de f en $x_i = a$ est $\sigma_a = 1$

b) *Transformée de* f':

$$\int_0^{+\infty} e^{-pt}\, f'(t)\, dt = \int_0^{x_i} e^{-pt}\, f'(t)\, dt + \int_{x_i}^{+\infty} e^{-pt}\, f'(t)\, dt$$

$$= \Big[e^{-pt}\, f(t)\Big]_0^{x_i} + p \int_0^{x_i} e^{-pt}\, f(t)\, dt + \Big[e^{-pt}\, f(t)\Big]_{x_i}^{+\infty} + p \int_{x_i}^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt$$

$$= e^{-px_i}\, f(x_i^{-}) - f(0^{+}) - e^{-px_i}\, f(x_i^{+}) + p \int_0^{+\infty} e^{-pt}\, f(t)\, dt$$

$$\boxed{\forall\, p \in I \qquad \mathscr{L}\Big[\, f' \,\Big](p) = p\, F(p) - f(0^{+}) - e^{-x_i p}\, \sigma_{x_i}}$$

c) *Un exemple d'utilisation du résultat ci-dessus pour le calcul de la transformée de* f :

Soit $g : t \longmapsto \mathcal{U}(t) - \mathcal{U}(t - a) \qquad a > 0$

g' est nulle partout où elle est définie d'où :

$$0 = p\, G(p) - 1 - (-1)\, e^{-ap} \Rightarrow G(p) = \frac{1 - e^{-ap}}{p}$$

Soit $f : t \longmapsto t \Big[\, \mathcal{U}(t) - \mathcal{U}(t-a) \,\Big] \qquad a > 0$

g est la « dérivée » de f

$$G(p) = p\, F(p) - f(0^{+}) - e^{-ap} \quad \text{et} \quad G(p) = \frac{1 - e^{-ap}}{p} \quad \text{d'où}$$

$$\frac{1 - e^{-ap}}{p} = p\, F(p) - f(0^{+}) - e^{-ap} \quad \text{donc } F(p) = \frac{1 - e^{-ap}}{p^2} + \frac{e^{-ap}}{p}$$

7°) **Transformée de la fonction f' « dérivée » de f lorsque f présente n sauts sur $]\,0\,,+\infty\,[$**

Hypothèses :

- f' est localement continue par morceaux sur $[\,0\,,+\infty\,[$
- f est une primitive large de f' sur $]\,0,x_1[\,,\ ]\,x_1,x_2[\,,$ ...... $]\,x_{n-1},x_n\,[\,,\ ]\,x_n\,,+\infty\,[$.
- le saut de f en x_i est σ_{x_i}

$$\boxed{\forall\, p \in I \qquad \mathscr{L}\Big[\,f'\,\Big](p) = p\,F(p) - f(0^+) - \sum_{i=1}^{n} e^{-x_i p}\,\sigma_{x_i}}$$

Le raisonnement du 6°) b) se généralise aisément à ce cas.

8°) **Exercices et exemples :**

$$\text{a) } f(t)\ \begin{cases} \text{si } t < 0 & f(t) = 0 \\ \text{si } 0 < t < \frac{\pi}{2} & f(t) = \sin t \\ \text{si } t \geq \frac{\pi}{2} & f(t) = 1 \end{cases}$$

f et f' sont continues sur $]\,0\,,+\infty\,[$.

Donner la transformée de Laplace de f puis en déduire les transformées des « dérivéees » f', f''et f'''.

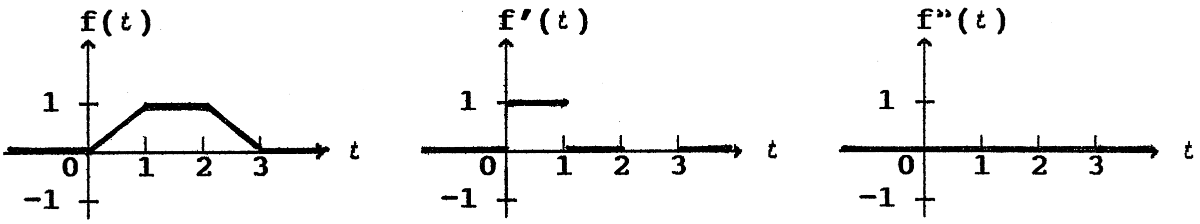
On vérifiera par un calcul direct le résultat obtenu pour f'''.

b) $f(t) = t\,\mathcal{U}(t) - 2(t-1)\,\mathcal{U}(t-1) + (t-2)\,\mathcal{U}(t-2)$

f est continue et f′ continue par morceaux sur $[\ 0\ ,\ +\infty\ [$.

Donner la transformée de Laplace de f puis en déduire celle des « dérivées » f′ et f".

c) *Un exemple de calcul de la transformée de* **f :**



f est continue et $f(0^+) = 0$ **donc** $\mathcal{L}\Big[\ f\ \Big](p) = \dfrac{\mathcal{L}\Big[\ f'\ \Big](p)}{p}$

$$\mathcal{L}\Big[\ f'\ \Big](p) = \frac{\mathcal{L}\Big[\ f''\ \Big](p) + f'(0^+) - e^{-p} - e^{-2p} + e^{-3p}}{p}$$

$\mathcal{L}\Big[f''\Big](p) = 0$ **et** $f'(0^+) = 1$ **donc** $\mathcal{L}\Big[f\Big](p) = \dfrac{1 - e^{-p} - e^{-2p} + e^{-3p}}{p^2}$

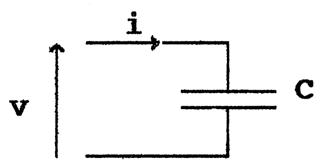
d) *De la même façon* **trouver la transformée de Laplace de la fonction g définie par :**

$$g(t) = t^2\Big[\mathcal{U}(t) - \mathcal{U}(t-1)\Big] + \mathcal{U}(t-1) - \mathcal{U}(t-2) + 3t\Big[\mathcal{U}(t-2) - \mathcal{U}(t-3)\Big]$$

e) *Calculer* de deux manières différentes la transformée de Laplace de la fonction f définie par : $f(t) = g(t)\,\mathcal{U}(t)$
avec g périodique, de période T, définie sur $[0,T[$ par $g(t) = \frac{E}{T}\,t$

f) *Application à la Physique*: Impédances Opérationnelles.

α) Condensateur



$$i = C\,\frac{dv}{dt} \qquad (1)$$

v tension aux bornes du condensateur
i intensité du courant dans le circuit

Dans un circuit, le condensateur s'oppose aux brusques variations de tension : donc v est continue.

Si initialement le condensateur n'est pas chargé (système causal) :

$$v(0^-) = 0 \;.$$

v étant continue : $v(0^+) = v(0^-) = 0$.

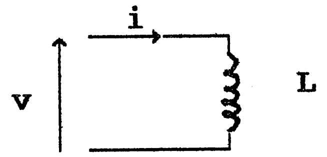
Si on applique la transformation de Laplace à la relation (1) :

$I(p) = C\,p\,V(p)$ car $v(0^+) = 0$ et v est continue sur $]\,0\;,+\infty\,[$.

On définit l'impédance opérationnelle du condensateur :

$$Z_C(p) = \frac{V(p)}{I(p)} = \frac{1}{p\,C}$$

β) Inductance :



$$v = L \frac{di}{dt} \qquad (2)$$

v tension aux bornes de l'inductance
i intensité du courant dans le circuit

Dans un circuit, l'inductance s'oppose aux brusques variations de l'intensité du courant : donc i est continue.

Si initialement l'intensité du courant est nulle (système causal) :

$$i(0^-) = 0$$

i étant continue : $i(0^+) = i(0^-) = 0$.

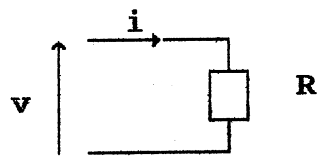
Si on applique la transformation de Laplace à la relation (2) :

$V(p) = L\ p\ I(p)$ car $i(0^+) = 0$ et i est continue sur $]0,+\infty[$.

On définit l'impédance opérationnelle de l'inductance :

$$Z_L(p) = \frac{V(p)}{I(p)} = p\ L$$

γ) Résistance :



$$v = R\ i \qquad (3)$$

v tension aux bornes de la résistance
i intensité du courant dans le circuit

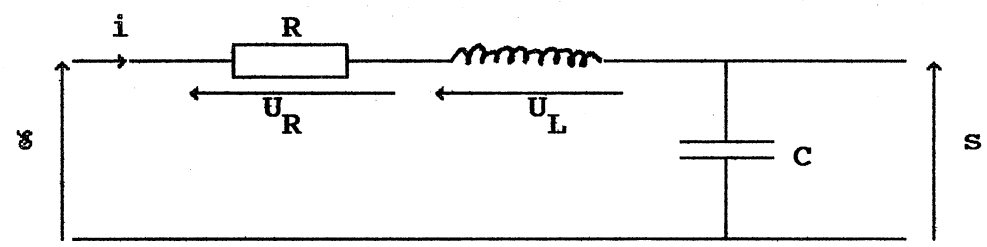
On peut appliquer directement la transformation de Laplace :

$$V(p) = R\ I(p)$$

On définit l'impédance opérationnelle de la résistance :

$$Z_R(p) = \frac{V(p)}{I(p)} = R$$

ε) Exemple d'application :



Conditions initiales : système causal : $s(0^+) = 0$

$i(0^+) = 0$

$\mathcal{E} = u_R + u_L + s$

$$E(p) = R\ I(p) + L\ p\ I(p) + \frac{1}{p\ C}\ I(p) \qquad \text{et} \qquad S(p) = \frac{1}{p\ C}\ I(p)$$

$$S(p) = E(p)\ \frac{1}{L\ C\ p^2 + R\ C\ p + 1}$$

9°) Transformée de $f_n : t \longmapsto t^n\ \mathcal{U}(t)$ avec $n \in \mathbb{N}$

a) $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$ $\qquad f'_n(t) = n\ t^{n-1}\ \mathcal{U}(t) = n\ f_{n-1}(t)$

d'où $\quad \mathcal{L}\left[\ f'_n\ \right](p) = n\ \mathcal{L}\left[\ f_{n-1}\ \right](p)$

De plus, f_n est continue sur $[\ 0\ ,\ +\infty\ [$ et $f_n(0^+) = 0$

donc $\forall\ n \in N^*$ $\qquad \mathcal{L}\left[\ f'_n\ \right](p) = p\ \mathcal{L}\left[\ f_n\ \right](p)$

d'où $\forall\ n \in N^*$ $\qquad \mathcal{L}\left[\ f_n\ \right](p) = \frac{n}{p}\ \mathcal{L}\left[\ f_{n-1}\ \right](p)$

$\mathcal{L}\left[\ f_0\ \right](p) = \frac{1}{p}$ (fonction échelon unité) et

$\forall\ n \geq 1$: $\mathcal{L}\left[t^{n-1}\ \mathcal{U}(t)\right](p) = \dfrac{(n-1)!}{p^n}$ donc $\mathcal{L}\left[t^n\ \mathcal{U}(t)\right](p) = \dfrac{n!}{p^{n+1}}$

Il en résulte que :

$$\boxed{\forall\ n \in \mathbb{N} \qquad \mathcal{L}\left[\ t^n\ \mathcal{U}(t)\ \right](p) = \frac{n\ !}{p^{n+1}} \qquad p > 0}$$

b) *Application* :

Soit f, une fonction qui admet pour tout t un développement en série entière :

$$f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\ t^n$$

Posons $s_n(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k\ t^k$ donc $S_n(p) = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{a_k\ .\ k!}{p^{k+1}}$

S'il existe p_0 tel que pour $p > p_0$ la série de terme général

$\frac{a_k \, . k!}{p^{k+1}}$ converge absolument, on démontre et nous admettrons que $\mathcal{U}$ f admet pour $p > p_0$ une transformée de Laplace F(p) et que :

$$F(p) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k \, . \, k!}{p^{k+1}}$$

exemple :

Soit f telle que $f(t) = \frac{\sin t}{t} \mathcal{U}(t)$ et $f(0) = 1$

$$f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \, t^{2n}}{(2\,n + 1)!}$$

S(p) est la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \times \frac{(2n)!}{p^{2\,n\,+\,1}}$

Etudions la convergence de cette série :

$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \frac{2\,n + 1}{2\,n + 3} \times \frac{1}{p^2}$ Si $p > 1$ $\lim\limits_{n \to +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| < 1$

donc la série est absolument convergente.

d'où si $p > 1$ $F(p) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2\,n + 1\,)} \times \frac{1}{p^{2\,n\,+\,1}} = \text{Arctan} \frac{1}{p}$

c) *Exercices* :

α) Calculer $\mathcal{L} \left[t^5 \, \mathcal{U}(t) \right](p)$

β) Calculer $\mathcal{L} \left[t^3 \, \mathcal{U}(t - 1) \right](p)$

IV- TRANSFORMEE DE LA FONCTION g DEFINIE SUR $\mathbb{R}$ PAR :

$$g(t) = \mathcal{U}(t)\int_0^t f(x)\,dx$$

1°) Soit f localement continue par morceaux sur $[\,0,+\infty\,[$ telle que : $\forall\, p \in I,\ \lim_{t \to +\infty} e^{-pt} f(t) = 0$ et $F = \mathcal{L}(f)$

($I =]p_0,+\infty[$ ou $I = \mathbb{R}$)

Montrons que pour tout $p \in I \cap \mathbb{R}_*^+$ $\quad \lim_{t \to +\infty}\left[e^{-pt}\int_0^t f(x)\,dx\right] = 0$

Soit $p_1 \in I$ tel que $p > p_1 > 0$

si $\lim_{t \to +\infty} e^{-pt} f(t) = 0$ il existe $M > 0$ tel que $|\,f(t)\,| < M\,e^{p_1 t}$

$$\text{d'où } \left|\int_0^t f(x)\,dx\right| < M\int_0^t e^{p_1 x}\,dx = M\,\frac{e^{p_1 t} - 1}{p_1}$$

$$\text{il en résulte que } \left|e^{-pt}\int_0^t f(x)\,dx\right| < M\,\frac{e^{-(p - p_1)t} - e^{-pt}}{p_1}$$

$\lim_{t \to +\infty} e^{-(p - p_1)t} = 0$ et $\lim_{t \to +\infty} e^{-pt} = 0$ car $p > p_1$ et $p > 0$

$$\text{donc} \quad \lim_{t \to +\infty}\left[e^{-pt}\int_0^t f(x)\,dx\right] = 0 \quad \text{si } p \in I \cap \mathbb{R}_*^+$$

De plus $g : t \longmapsto \mathcal{U}(t)\int_0^t f(x)\,dx$ est continue sur $[\,0\,,+\infty\,[$

f est localement continue par morceaux sur $[\,0\,,+\infty\,[$

$g(0^+) = 0$ et $g' = f$ d'où $\mathcal{L}\Big[\,f\,\Big](p) = p\,\mathcal{L}\Big[\,g\,\Big](p)$

alors $\boxed{\mathscr{L}\left[\, t \longmapsto \int_0^t f(x)\,dx \,\right](p) = \frac{F(p)}{p} \qquad \text{avec } p \in I \cap \mathbb{R}_*^+}$

2°) __Exemple__ :

$$\mathscr{L}\left[\int_0^t \frac{\sin x}{x}\,dx\right](p) = \frac{1}{p}\ \text{Arctan}\ \frac{1}{p} \qquad \text{si } p > 1 \text{ (voir III- 9° b))}$$

3°) __Exercice__ :

Vérifier que $\mathscr{L}\left[\int_0^t \cos x\,dx\right](p) = \frac{1}{p^2+1}$ si $p > 0$

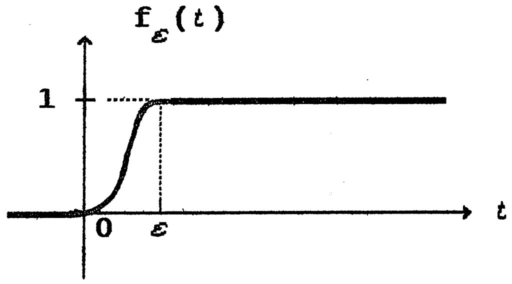
V- __IMPULSION DE DIRAC__ :

1°) __Approche de l'impulsion de Dirac__

a) *Impulsion de Dirac de "poids" 1*

Le modèle mathématique qui paraît être le plus proche de la réalité physique utilise des fonctions indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$.

Par exemple, la brusque variation, d'amplitude 1, d'un signal à l'instant 0, peut être représentée par la fonction f_ε suivante :



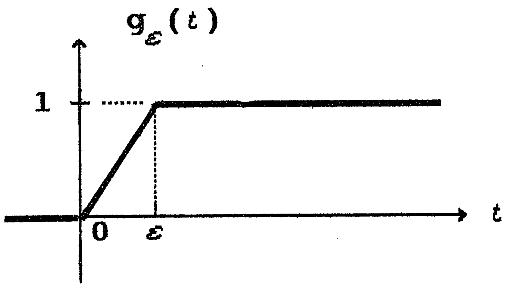
telle que $f_\varepsilon(t) = 0$ pour $t \leq 0$

$f_\varepsilon(t) = 1$ pour $t > \varepsilon$

($\varepsilon > 0$ et __très petit__)

et f_ε croissante sur $\mathbb{R}$.

On peut pour rendre compte de ce phénomène considérer la fonction g_ε plus simple mais non dérivable sur $\mathbb{R}$ définie par :

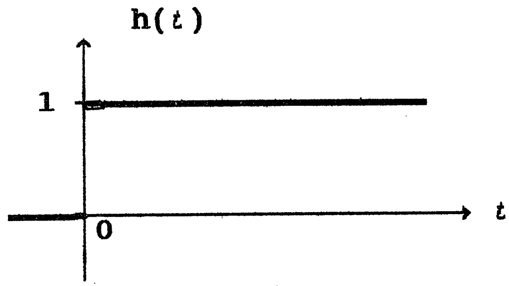


$g_\varepsilon(t) = 0$ pour $t \leq 0$

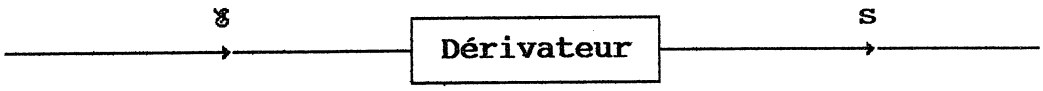
$g_\varepsilon(t) = 1$ pour $t > \varepsilon$

$g_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon} t$ si $t \in \,]0,\varepsilon]$

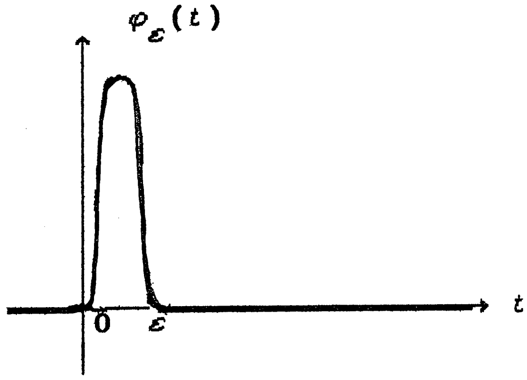
ou même, ε étant très petit, la fonction $h = \mathcal{U}$ qui n'est pas une fonction continue.



■ Si on applique à l'entrée d'un système physique nommé "dérivateur" le signal $\mathfrak{e} = f_\varepsilon$ (fonction indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$)



On constate que le signal de sortie $s = \varphi_\varepsilon$ est représenté par la fonction f'_ε dérivée de f_ε



On remarque que :

□ $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{\varepsilon}(t)\ dt = \int_{0}^{\varepsilon} \varphi_{\varepsilon}(t)\ dt = \int_{0}^{\varepsilon} f'_{\varepsilon}(t)\ dt = f_{\varepsilon}(\varepsilon) - f_{\varepsilon}(0) = 1$

□ le maximum de φ_{ε} est très grand.

(ε étant très petit, la croissance de f_{ε} sur $]0, \varepsilon[$ est très rapide)

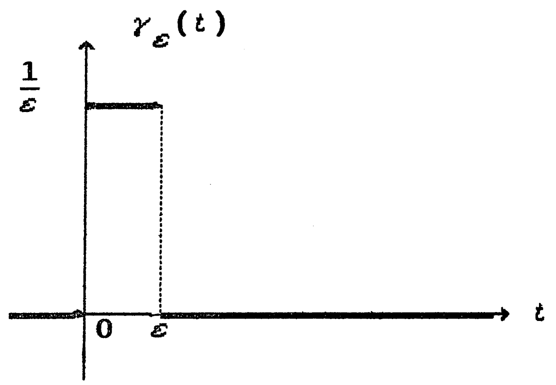
Donc on peut considérer que la fonction φ_{ε} représente un signal, déclenché à l'instant 0, *de durée très courte et d'amplitude très grande à laquelle on associe un "poids" égal à* 1 *car* $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{\varepsilon}(t)\ dt = 1$

■ Si on modélise le signal à l'entrée du dérivateur par la fonction g_{ε}, la sortie est modélisée par une fonction γ_{ε} telle que : $\forall\ t \in \mathbb{R} - \left\{ 0\ ,\ \varepsilon \right\},\ \gamma_{\varepsilon}(t) = g'_{\varepsilon}(t)$

(g'_{ε} dérivée de g_{ε} sur $\mathbb{R} - \left\{ 0\ ,\ \varepsilon \right\}$)

On peut donc choisir pour fonction γ_{ε} la fonction :

$$t \longmapsto \frac{1}{\varepsilon}\,[\mathcal{U}(t) - \mathcal{U}(t-\varepsilon)]$$

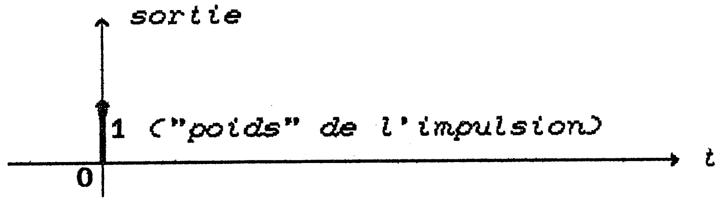


□ $\int_{-\infty}^{+\infty} \gamma_{\varepsilon}(t)\ dt = 1$

□ $\frac{1}{\varepsilon}$ est très grand

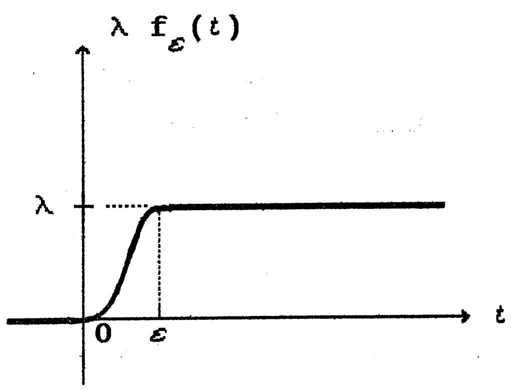
■ **Le problème est de modéliser la sortie φ_ε si on modélise l'entrée par h = $\mathcal{U}$.**

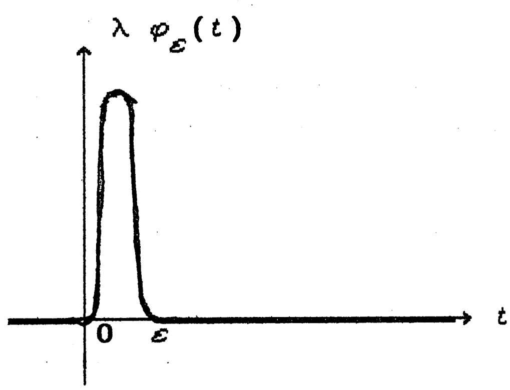
En Physique ce signal φ_ε est alors modélisé par ce que l'on nomme **Impulsion de Dirac en 0** *(de* **"poids"** *1) notée δ ou δ_0 et que l'on représente par :*



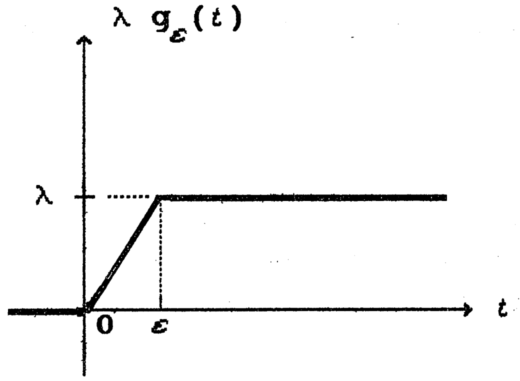
b) *Impulsion de Dirac de "poids" λ*

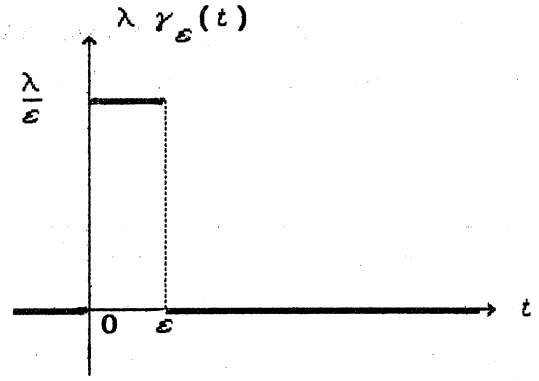
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, si on applique à l'entrée du "dérivateur" le signal $\lambda\ f_\varepsilon$ on constate que le signal de sortie est alors le signal $\lambda\ \varphi_\varepsilon$ et ce dernier signal est modélisé par ce que l'on nomme impulsion de Dirac en zéro, de "poids" λ, notée $\lambda\ \delta$.



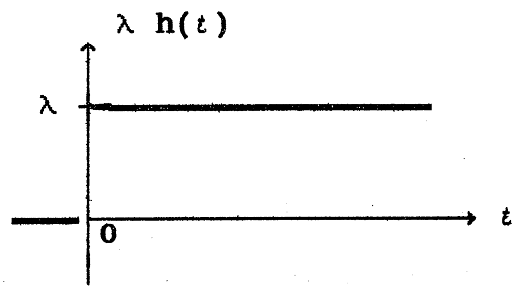


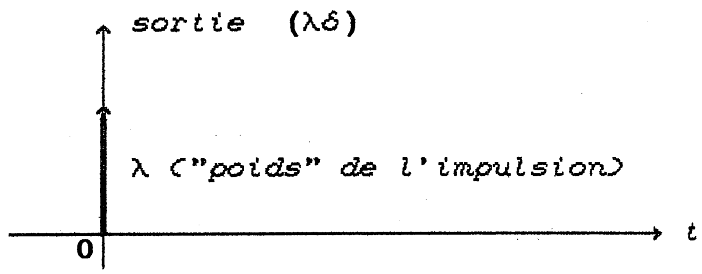
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda\ \varphi_\varepsilon(t)\ dt = \lambda$$





$$\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda\, \gamma_\varepsilon(t)\, dt = \lambda$$





2°) Etude des familles de fonctions f_ε , φ_ε, $\mathscr{L}(f_\varepsilon)$, $\mathscr{L}(\varphi_\varepsilon)$ quand ε tend vers 0.

Soit f_ε primitive large d'une fonction localement continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et vérifiant les conditions ci-dessous :

$\forall\ t \in\ ]\varepsilon,+\infty[,\ f_\varepsilon(t) = 1$

$\forall\ t \in\ ]-\infty,0],\ f_\varepsilon(t) = 0$ $\qquad\qquad \varepsilon > 0$

et la fonction φ_ε telle qu'en tout point où f_ε est dérivable

$\varphi_\varepsilon(t) = f'_\varepsilon(t)$ $\quad$ (f'_ε dérivée de f_ε)

(c'est le cas des fonctions f_ε et φ_ε , g_ε et γ_ε du 1°))

a) $\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_*^+$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_\varepsilon(t)\, dt = \int_0^\varepsilon \varphi_\varepsilon(t)\, dt = \int_0^\varepsilon f'_\varepsilon(t)\, dt = f_\varepsilon(\varepsilon) - f_\varepsilon(0) = 1$$

b) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$\forall\, t \in \mathbb{R}$, $f(t) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} f_\varepsilon(t)$

$\forall\, t \in\,]-\infty, 0]$, $f_\varepsilon(t) = 0$ donc $f(t) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} f_\varepsilon(t) = 0$

$\forall\, t \in\,]0,+\infty[$, pour tout t tel que $t \geq \varepsilon > 0$, $f_\varepsilon(t) = 1$ donc

$$f(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} f_\varepsilon(t) = 1$$

La fonction f est donc définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(t) = 0 \text{ si } t \leq 0 \quad \text{et} \quad f(t) = 1 \text{ si } t > 0$$

c) $\mathscr{L}(f_\varepsilon)(p) = \int_0^\varepsilon f_\varepsilon(t)\, e^{-pt}\, dt + \int_\varepsilon^{+\infty} e^{-pt}\, dt$

$\int_\varepsilon^{+\infty} e^{-pt}\, dt$ converge si $p > 0$, donc $\mathscr{L}(f_\varepsilon)$ est définie sur $]0,+\infty[$

et $\int_\varepsilon^{+\infty} e^{-pt}\, dt = \frac{1}{p}\, e^{-\varepsilon p}$

$\forall\, t \in [0,\varepsilon]$, $0 \leq f_\varepsilon(t) \leq 1$ donc $0 \leq \int_0^\varepsilon f_\varepsilon(t)\, e^{-pt}\, dt \leq \int_\varepsilon^{+\infty} e^{-pt}\, dt$

d'où $0 \leq \int_0^\varepsilon f_\varepsilon(t)\, e^{-pt}\, dt \leq \dfrac{1 - e^{-\varepsilon p}}{p}$

Soit F la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $F(p)= \lim\limits_{\varepsilon \xrightarrow{>} 0} F_\varepsilon(p)$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{e^{-\varepsilon p}}{p} = \frac{1}{p} \quad \text{et} \quad \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1 - e^{-\varepsilon p}}{p} = 0$$

donc $\forall\ p \in\ ]0,+\infty[,\ F(p) = 1$

La fonction F *est la fonction définie sur* $]0,+\infty[$ *par* $F(p) = \frac{1}{p}$

Notons que $F = \mathscr{L}(f)$

d) Soit φ la fonction définie par :

$$\forall\ t \in \mathbb{R},\ \varphi(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \varphi_\varepsilon(t)$$

$\forall\ t \in\ ]-\infty, 0],\ \varphi_\varepsilon(t) = 0$ donc $\varphi(t) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \varphi_\varepsilon(t) = 0$

$\forall\ t \in\ ]0,+\infty[$, pour tout t tel que $t \geq \varepsilon > 0,\ \varphi_\varepsilon(t) = 0$ donc

$$\varphi(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \varphi_\varepsilon(t) = 0$$

La fonction φ *est donc la fonction nulle sur* $\mathbb{R}$.

e) $\mathscr{L}(\varphi_\varepsilon)(p) = \int_0^\varepsilon \varphi_\varepsilon(t)\ e^{-pt}\ dt$

$$\mathscr{L}(\varphi_\varepsilon)(p) = \Big[\ e^{-pt}\ f_\varepsilon(t)\ \Big]_0^\varepsilon + p \int_0^\varepsilon e^{-pt}\ f_\varepsilon(t)\ dt$$

$\mathscr{L}(\varphi_\varepsilon)(p) = e^{-\varepsilon p} + J_\varepsilon(p)$ avec $J_\varepsilon(p) = p \int_0^\varepsilon e^{-pt}\ f_\varepsilon(t)\ dt$

or $\forall\ t \in [0,\varepsilon],\ 0 \leq f_\varepsilon(t) \leq 1$

d'où $\forall\ p \in \mathbb{R},\ 0 \leq J_\varepsilon(p) \leq p \int_0^\varepsilon e^{-pt}\ dt = 1 - e^{-\varepsilon p}$

Soit Δ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\Delta(p) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \mathcal{L}(\varphi_\varepsilon)(p)$

$\lim\limits_{\varepsilon \to 0} e^{-\varepsilon p} = 1$ et $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} (1 - e^{-\varepsilon p}) = 0$

donc $\forall\, p \in \mathbb{R}$, $\Delta(p) = 1$

La fonction Δ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\Delta(p) = 1$

Notons que $\Delta \neq \mathcal{L}(\varphi)$ car $\mathcal{L}(\varphi)$ est la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.

3°) Remarques et conclusion

a) On peut constater que :

■

$$\begin{tikzcd} f_\varepsilon \arrow[r, "\varepsilon \to 0"] \arrow[d, "\mathcal{L}"'] & f \arrow[d, "\mathcal{L}"] \\ \mathcal{L}(f_\varepsilon) \arrow[r, "\varepsilon \to 0"'] & \mathcal{L}(f) \end{tikzcd} \quad \text{et} \quad \begin{tikzcd} \varphi_\varepsilon \arrow[r, "\varepsilon \to 0"] \arrow[d, "\mathcal{L}"'] & \varphi \arrow[d, "\mathcal{L}"] \\ \mathcal{L}(\varphi_\varepsilon) \arrow[r, "/" marking, "\varepsilon \to 0"'] & \mathcal{L}(\varphi) \end{tikzcd}$$

■ $\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_\varepsilon(t)\, dt = 1$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\, dt = 0$

$$\begin{tikzcd} \varphi_\varepsilon \arrow[r, "\varepsilon \to 0"] \arrow[d, "\int"'] & \varphi \arrow[d, "\int"] \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_\varepsilon(t)\, dt \arrow[r, "/" marking, "\varepsilon \to 0"'] & \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\, dt \end{tikzcd}$$

b) On a montré que : $\mathcal{L}(\varphi_\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \Delta$

On a donc la situation suivante :

$$\begin{tikzcd}
\varphi_\varepsilon \arrow[r, bend left, "\text{modélisé par}", "(1^\circ\ a)"'] \arrow[d, "\mathcal{L}"'] & \delta \\
\mathcal{L}(\varphi_\varepsilon) \arrow[r, "\varepsilon \to 0"'] & \Delta
\end{tikzcd}$$

On est donc conduit à considérer que Δ est la transformée de Laplace de δ.

$$\begin{tikzcd}
\varphi_\varepsilon \arrow[r, bend left, "\text{modélisé par}"] \arrow[d, "\mathcal{L}"'] & \delta \arrow[d, "\mathcal{L}"] \\
\mathcal{L}(\varphi_\varepsilon) \arrow[r, "\varepsilon \to 0"'] & \Delta
\end{tikzcd}$$

c)

■

Nous admettrons l'existence d'un "objet" mathématique δ nommé impulsion de Dirac en zéro (de "poids" 1) dont la transformée de Laplace est Δ. $\forall\ p \in \mathbb{R},\ \mathcal{L}(\delta)(p) = 1$

■ δ n'est pas une fonction localement continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ vérifiant les hypothèses $\mathcal{H}$ car :

$$\lim_{p \to +\infty} \Delta(p) = 1 \qquad \text{(cf I- 4°)}$$

■ On démontre que δ n'est pas une fonction.

■ On pourra se reporter à MATHEMATIQUES DU SIGNAL Tome 2 pour :

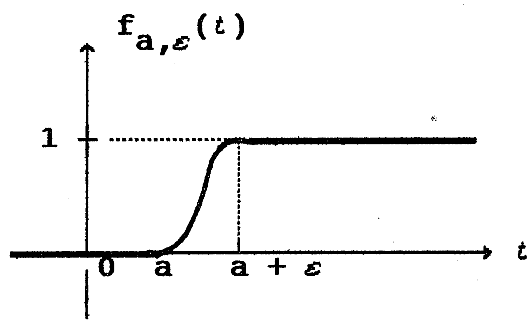
- une définition de δ (Ch 3, III)
- une approche satisfaisante de δ en utilisant les mêmes familles de fonctions φ_ε.(Ch 3, IV)

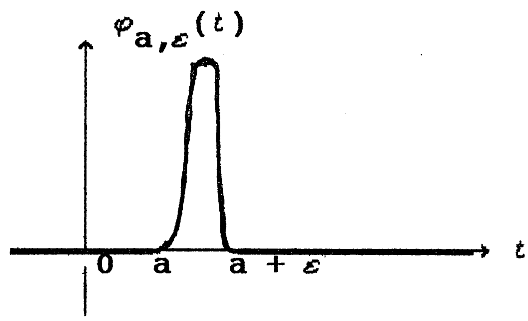
4°) Impulsion de Dirac en a, $a \in \mathbb{R}_+^*$

a) Approche de l'impulsion de Dirac en a

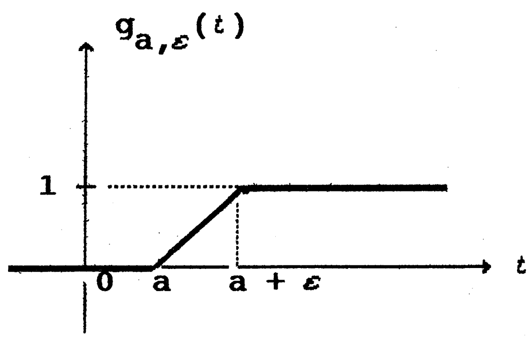
Si à l'entrée du "dérivateur", on retarde le signal de $a \in \mathbb{R}_+^*$, on constate alors que le signal de sortie est retardé de a.
Les raisonnements du 1°) nous conduisent à considérer les fonctions $f_{a,\varepsilon}$, $\varphi_{a,\varepsilon}$, $g_{a,\varepsilon}$, $\gamma_{a,\varepsilon}$ et h_a représentées ci-dessous pour les différentes étapes de la modélisation des signaux d'entrée et de sortie.

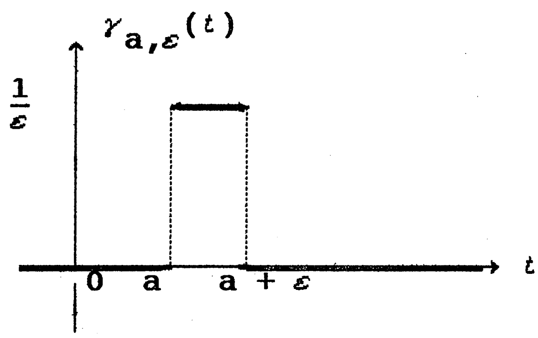
Entrées | *Sorties*





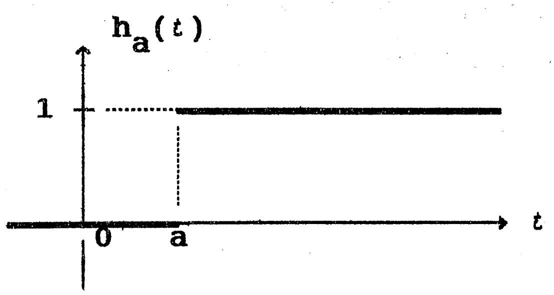
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{a,\varepsilon}(t)\, dt = 1$$

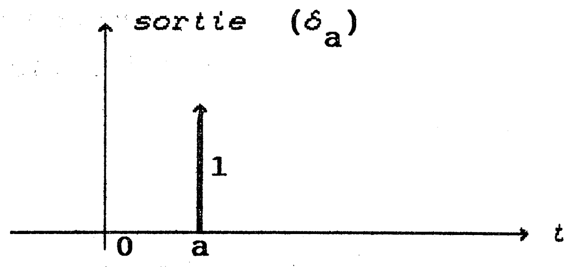




$$\int_{-\infty}^{+\infty} \gamma_{a,\varepsilon}(t)\, dt = 1$$

Entrée *Sortie*





Dans ce cas la sortie est modélisée par ce que l'on nomme impulsion de Dirac en a (de "poids" 1).

b) Remarques et conclusion

■ On peut faire ici, sans difficulté, le même type de remarques que celles du 3°).

■ Il est immédiat que $\mathscr{L}(\varphi_{a,\varepsilon})(p) = e^{-ap}\,\mathscr{L}(\varphi_{\varepsilon})(p)$ et que si on note Δ_a la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\Delta_a(p) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \mathscr{L}(\varphi_{a,\varepsilon})(p)$ alors $\forall\, p \in \mathbb{R},\ \Delta_a(p) = e^{-ap}$

■ Par analogie avec 3°) b) :

$$\begin{tikzcd}
\varphi_{a,\varepsilon} \arrow[r, bend left, "\text{modélisé par}"] \arrow[d, "\mathscr{L}"'] & \delta_a \arrow[d, "\mathscr{L}"] \\
\mathscr{L}(\varphi_{a,\varepsilon}) \arrow[r, "\varepsilon \to 0"'] & \Delta_a
\end{tikzcd}$$

Nous admettrons l'existence d'un "objet" mathématique δ_a qui n'est pas une fonction, nommé impulsion de Dirac en a (de "poids" 1) dont la transformée de Laplace est Δ_a $\forall\, p \in \mathbb{R},\ \mathscr{L}(\delta_a)(p) = e^{-ap}$

c) Combinaisons linéaires de deux impulsions de Dirac

$a \in \mathbb{R}_+^*$, $b \in \mathbb{R}_+^*$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{R}$

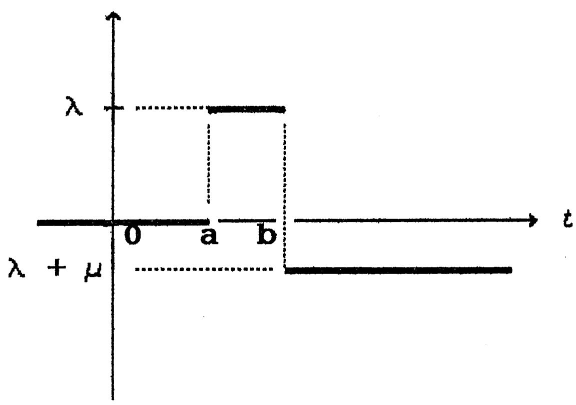
Soient les fonctions $h_\varepsilon = \lambda\ f_{a,\varepsilon} + \mu\ f_{b,\varepsilon}$ et $\psi_\varepsilon = \lambda\ g_{a,\varepsilon} + \mu\ g_{b,\varepsilon}$

Comme dans les cas précédents, on montre que :

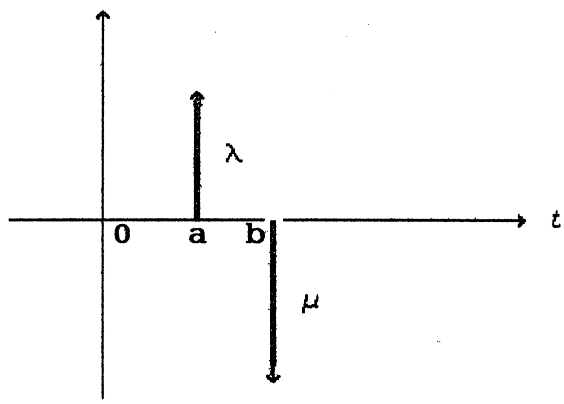
$\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \mathscr{L}(\psi_\varepsilon)(p) = \lambda\ e^{-ap} + \mu\ e^{-bp}$ et on est conduit à considérer que la fonction Ψ définie sur $\mathbb{R}$ par $\Psi(p) = \lambda\ e^{-ap} + \mu\ e^{-bp}$ est la transformée de Laplace de l'"objet" mathématique noté $\lambda\ \delta_a + \mu\ \delta_b$.

$$\boxed{\forall\ p \in \mathbb{R}, \quad \mathscr{L}(\lambda\ \delta_a + \mu\ \delta_b)(p) = \lambda\ e^{-ap} + \mu\ e^{-bp}}$$

Entrée

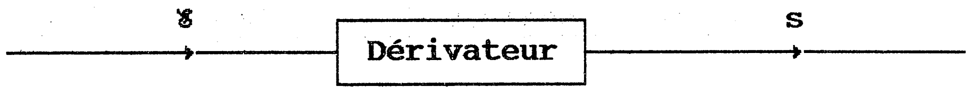


Sortie



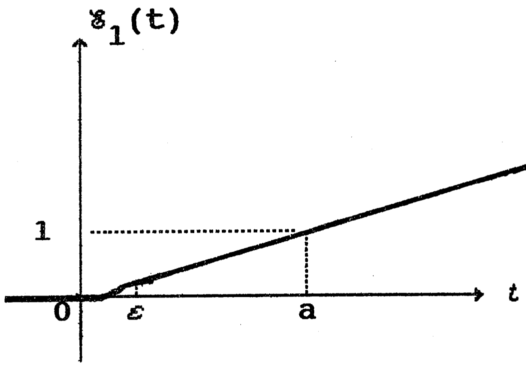
5°) "Somme" d'une fonction et d'une impulsion

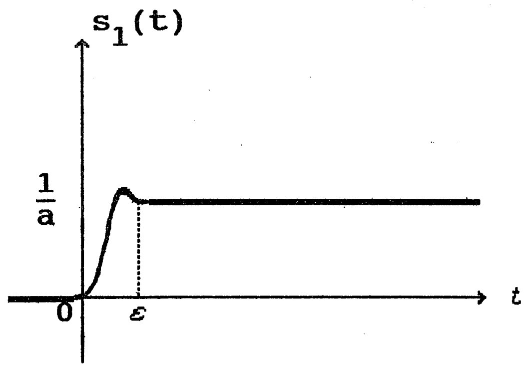
Considérons le système physique constitué par un "dérivateur" et reportons nous à 1°) et 4°) a) pour les différentes étapes de la modélisation des signaux d'entrée et de sortie.



a)

<u>*Entrées*</u> <u>*Sorties*</u>





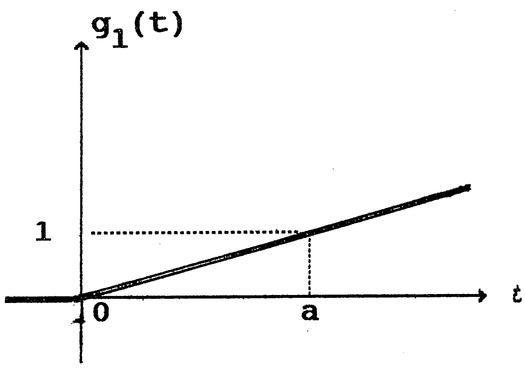
e_1 indéfiniment dérivable et croissante sur $\mathbb{R}$.

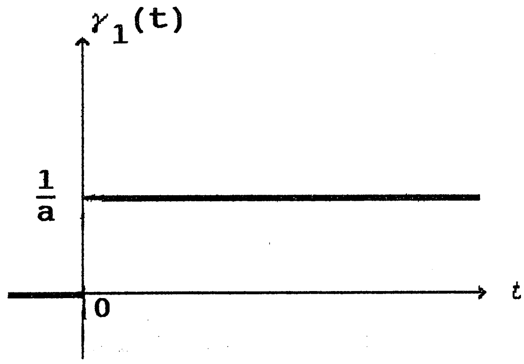
$\forall\ t \in\ ]-\infty,0]$ $\qquad e_1(t) = 0$

$\forall\ t \in [\varepsilon,+\infty[$ $\qquad e_1(t) = \frac{1}{a}\ t$

$\varepsilon > 0$ et très petit ; $a > 0$

s_1 dérivée de e_1





Si on rend compte de l'entrée e_1 en utilisant la fonction g_1 continue sur $\mathbb{R}$ et définie par : $g_1(t) = \frac{1}{a}\ t\ \mathcal{U}(t)$ alors on peut

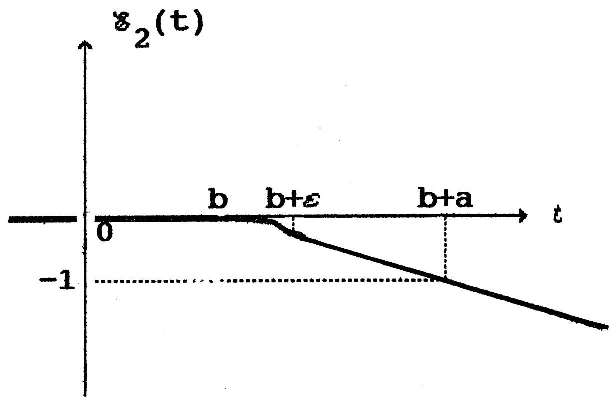
rendre compte de la sortie s_1 par la fonction γ_1 définie sur $\mathbb{R}$ par : $\gamma_1(t) = \frac{1}{a}\,\mathcal{U}(t)$

(En tout point où g_1 est dérivable $g_1'(t) = \gamma_1(t)$)

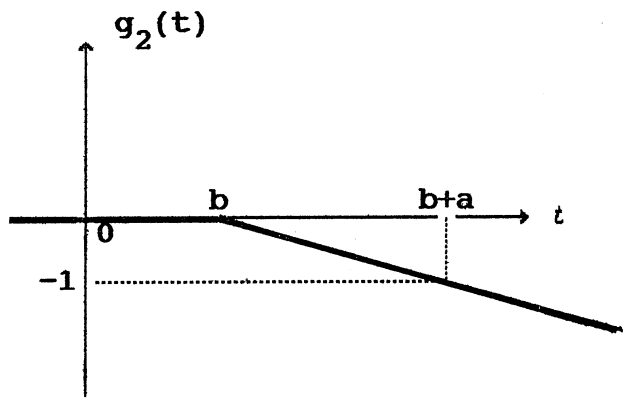
b) On constate en Physique et on démontre que si le signal d'entrée est retardé de b alors le signal de sortie est retardé de b.

Entrées

$\mathcal{E}_2(t) = -\,\mathcal{E}_1(t-b)$

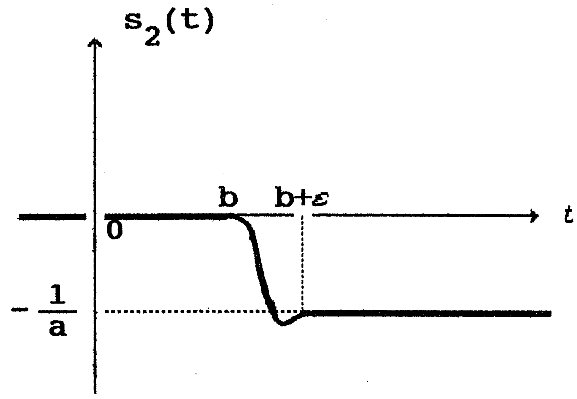


$g_2(t) = -\,g_1(t-b)$

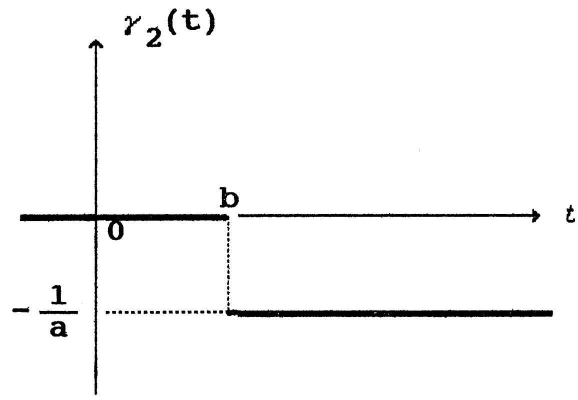


Sorties

$s_2(t) = -\,s_1(t-b)$ b > 0



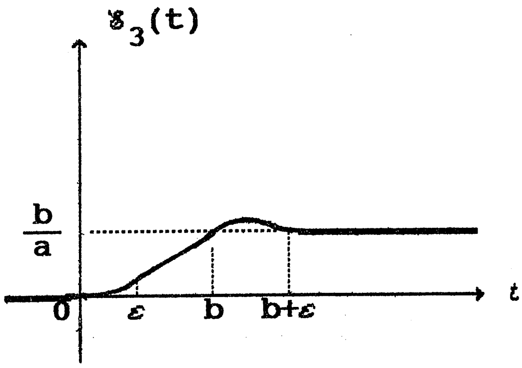
$\gamma_2(t) = -\,\gamma_1(t-b)$



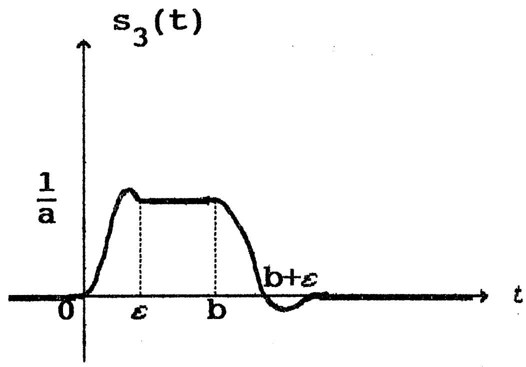
c) On constate en Physique et on démontre que si le signal d'entrée est modélisé par la somme des deux fonctions indéfiniment dérivables $\boldsymbol{\gamma}_1$ et $\boldsymbol{\gamma}_2$ alors le signal de sortie peut être modélisé par la somme des deux fonctions s_1 et s_2 qui leur sont associées.

Entrées | *Sorties*

$\boldsymbol{\gamma}_3(t) = \boldsymbol{\gamma}_1(t) + \boldsymbol{\gamma}_2(t)$

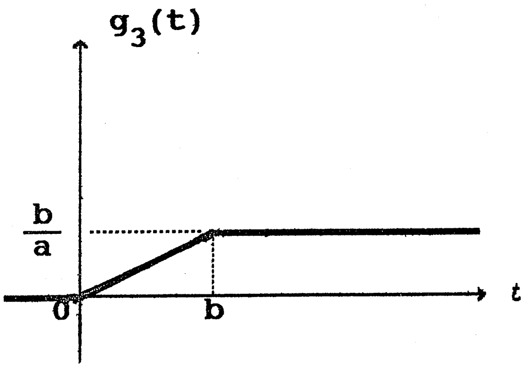


$s_3(t) = s_1(t) + s_2(t)$

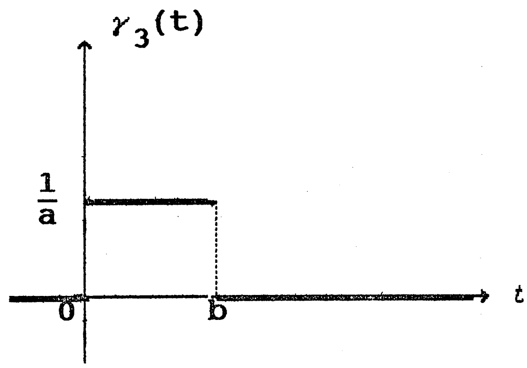


On est dans ce cas conduit à rendre compte des signaux d'entrée et de sortie en considérant les fonctions g_3 et γ_3 ci-dessous :

$g_3(t) = g_1(t) + g_2(t)$

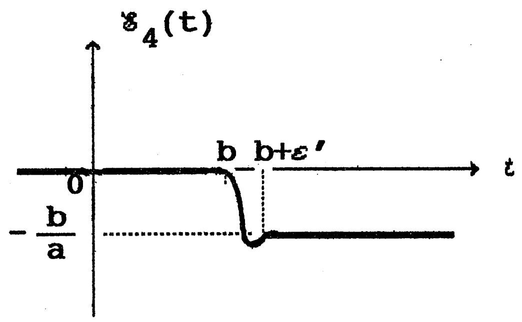


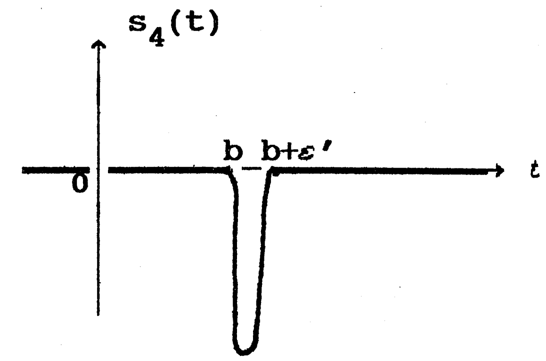
$\gamma_3(t) = \gamma_1(t) + \gamma_2(t)$



d)

<u>*Entrée*</u> <u>*Sortie*</u>





ɣ_4 est indéfiniment dérivable et décroissante sur $\mathbb{R}$

$\forall\ t \in\ ]-\infty,b]$ $\quad \text{ɣ}_4(t) = 0$

$\forall\ t \in [b+\varepsilon',+\infty[$ $\quad \text{ɣ}_4(t) = -\dfrac{b}{a}$

$\varepsilon' > 0$ et très petit

$s_4 = \text{ɣ}'_4$ dérivée de ɣ_4 (cf 1°))

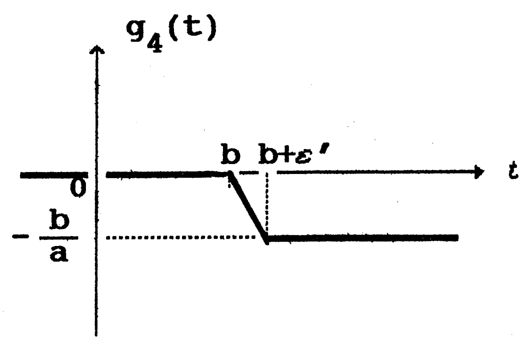
$$\int_{-\infty}^{+\infty} s_4(t)\,dt = \int_{b}^{b+\varepsilon'} \text{ɣ}'_4(t)\,dt$$

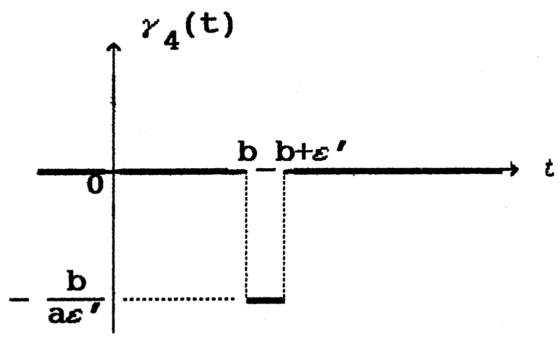
$$\int_{-\infty}^{+\infty} s_4(t)\,dt = \text{ɣ}_4(b+\varepsilon') - \text{ɣ}_4(b)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s_4(t)\,dt = -\frac{b}{a}$$

Reprenons ici la démarche du 1°) b) et du 4°) a). On est conduit pour rendre compte de l'entrée et de la sortie à considérer les fonctions g_4 et γ_4

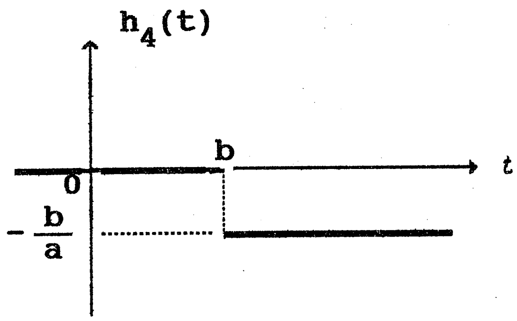
<u>*Entrée*</u> <u>*Sortie*</u>



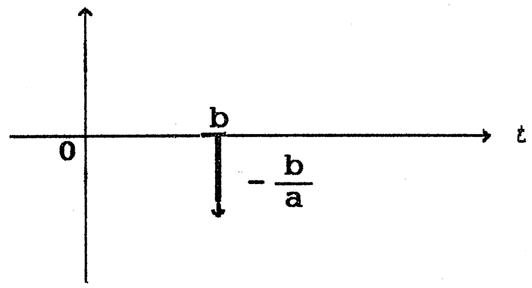


et finalement on modélise l'entrée par la fonction h_4 définie sur $\mathbb{R}$ par $h_4(t) = -\frac{b}{a}\,\mathcal{U}(t-b)$ et la sortie par l'impulsion de Dirac en b de "poids" $-\frac{b}{a}$ notée $-\frac{b}{a}\,\delta_b$.

Entrée

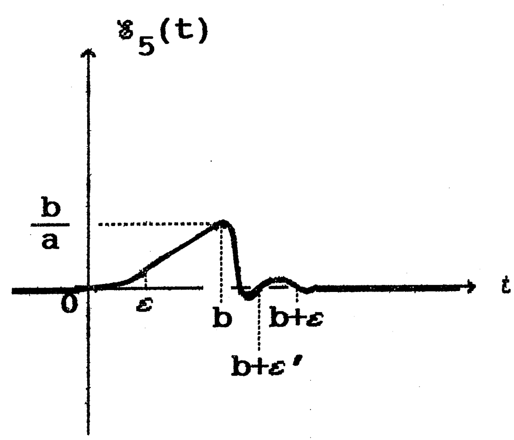


Sortie

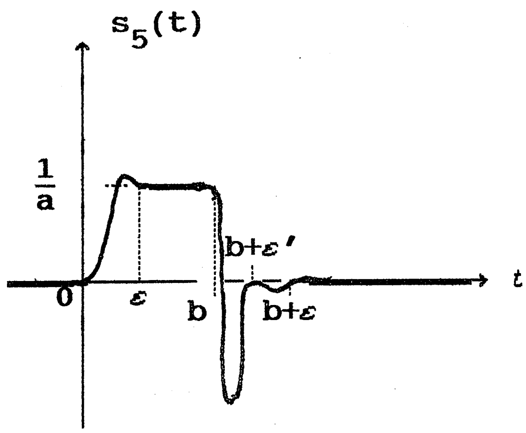


e) Si l'on considère maintenant que l'entrée est la fonction $\gamma_5 = \gamma_3 + \gamma_4$ la sortie est la fonction $s_5 = s_3 + s_4$. (cf c))

Entrée

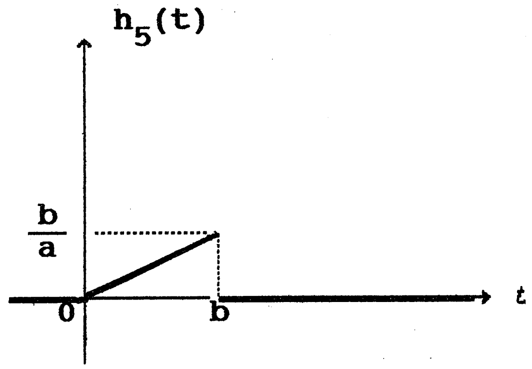


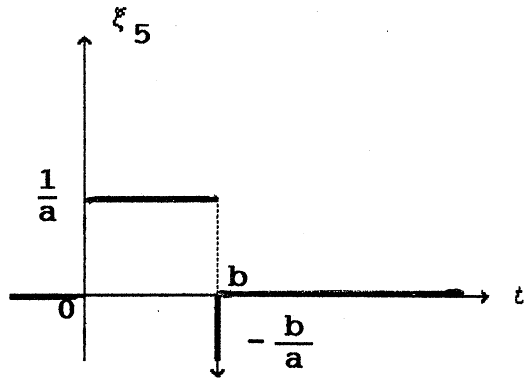
Sortie



Lorsqu'on modélise l'entrée par la fonction h_5 somme des fonctions g_3 et h_4, il apparaît naturel de dire comme en c) que le modèle ξ_5 de la sortie s_5 est la "somme" des signaux γ_3 qui est une fonction et de l'impulsion $-\frac{b}{a}\delta_b$.

Entrée *Sortie*





La Transformée de Laplace de ξ_5 est la somme de la Transformée de Laplace de γ_3 et de la Transformée de Laplace de $-\frac{b}{a}\delta_b$.

$$\mathscr{L}(\xi_5)(p) = \mathscr{L}(\gamma_3)(p) + \mathscr{L}(-\frac{b}{a}\delta_b)(p)$$

$$\text{or } \mathscr{L}(\gamma_3)(p) = \frac{1}{a\ p}(1 - e^{-bp}) - (-\frac{b}{a})\ e^{-bp}$$

$$\text{et } \mathscr{L}(-\frac{b}{a}\delta_b)(p) = -\frac{b}{a}\ e^{-bp}$$

$$\text{donc } \mathscr{L}(\xi_5)(p) = \frac{1}{a\ p}(1 - e^{-bp})$$

Remarquons que $\mathscr{L}(h_5)(p) = \dfrac{1}{a\ p^2}(1 - e^{-bp})$ donc que :

$$\mathscr{L}(\xi_5)(p) = p\ \ \mathscr{L}(h_5)(p).$$

Pour une généralisation de cette dernière propriété se reporter à Tome 2, Ch 5, I- 4°)

VI- QUELQUES PROPRIETES :

1°) Transformée de $t \longmapsto e^{-at} f(t)$, $a \in \mathbb{R}$

a) On notera $F(p) = \mathcal{L}\left[f \right](p)$ la transformée de $f(t)$

F définie sur I

$$\mathcal{L}\left[e^{-at} f(t) \right](p) = \int_0^{+\infty} e^{-at} f(t) e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-(p+a)t} dt$$

$$\mathcal{L}\left[e^{-at} f(t) \right](p) = F(p+a)$$

$$\boxed{\forall (p+a) \in I \qquad \mathcal{L}\left[e^{-at} f(t) \right](p) = F(p+a)}$$

b) *Application* :

$$\mathcal{L}\left[\mathcal{U}(t)\, t^n e^{at} \right](p) = \frac{n!}{(p-a)^{n+1}}$$

$$\mathcal{L}\left[\mathcal{U}(t)\, e^{at} \cos \omega t \right](p) = \frac{p-a}{(p-a)^2 + \omega^2}$$

$$\mathcal{L}\left[\mathcal{U}(t)\, e^{at} \sin \omega t \right](p) = \frac{\omega}{(p-a)^2 + \omega^2}$$

Une application de cette règle est fréquemment utilisée en Physique dans le cas des systèmes oscillatoires amortis.

c) *Exercices* :

Calculer la transformée de Laplace de :

$\alpha)\ t \longmapsto t\, e^{t}\, \mathcal{U}(t-2)$

$\beta)\ t \longmapsto e^{-t} \left[\mathcal{U}(t) - \mathcal{U}(t - \frac{\pi}{2}) \right] \left[1 + \cos t \right]$

$\gamma)\ t \longmapsto e^{3t} \sin t$ et $t \longmapsto \displaystyle\int_0^t e^{3x} \sin x \, dx$

$\delta)\ t \longmapsto t\, e^{4t}$ et $t \longmapsto \displaystyle\int_0^t x\, e^{4x} \, dx$

2°) Transformée de : $t \longmapsto t\, f(t)$

a) *Théorème admis* :

Soit $F(p) = \mathcal{L}\left[f \right](p)$

$$\boxed{\mathcal{L}\left[t.f(t) \right](p) = - F'(p)}$$

b) *Conséquence* :

$$\boxed{\mathcal{L}\left[t^{n} . f(t) \right](p) = (-1)^{n}\, F^{(n)}(p)}$$

c) *Exemple* :

$$\mathcal{L}\left[t \sin \omega t \right](p) = \frac{2p\omega}{(p^2 + \omega^2)^2}$$

d) *Exercices* : Calculer :

$$\mathcal{L}\left[t\ e^{-t} \cos t \right](p)$$

$$\mathcal{L}\left[t^{n}\ e^{j\omega t} \right](p)$$

$$\mathcal{L}\left[t^{n} \cos n\omega t \right](p)$$

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t x \cos x\ dx \right](p)$$

3°) Théorème de la valeur initiale (admis) :

a) *Si* f *vérifie les hypothèses* ($\mathcal{H}$) :

$$\boxed{\lim_{p \longrightarrow +\infty} p\ F(p) = f(0^{+})}$$

b) *Exercices* :

Vérifier ce théorème sur les exemples suivants :

$$f(t) = t\ \mathcal{U}(t)$$

$$f(t) = \mathcal{U}(t) \cos \omega t$$

$$f(t) = t\ \mathcal{U}(t) - (t - 1)\ \mathcal{U}(t - 1) - \mathcal{U}(t - 1)$$

4°) Théorème de la valeur finale (admis) :

Si f vérifie les hypothèses ($\mathcal{H}$) :

Si $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = l \in \mathbb{C}$ alors $\forall\, p > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-pt} f(t) = 0$

d'où f admet une transformée de Laplace F définie pour tout p > 0,

donc, on peut chercher $\lim\limits_{p \overset{>}{\to} 0} p\,F(p)$.

$$\boxed{\lim_{p \overset{>}{\longrightarrow} 0} p\,F(p) = \lim_{t \longrightarrow +\infty} f(t)}$$

5°) Exemple :

$$\text{Soit } f(t) = \frac{\sin t}{t}\,\mathcal{U}(t) \text{ et } f(0) = 1$$

f est continue sur $]\,0\,,+\infty\,[$

donc si $p > 0$ $\quad f(t)\,e^{-pt} \longrightarrow 0$ car $|f(t)| \le 1$

Soit $g(t) = t\,f(t) = \mathcal{U}(t)\sin t$ $\qquad G(p) = \dfrac{1}{p^2+1} = -\,F'(p)$

donc $F'(p) = -\dfrac{1}{p^2+1}$ et $\qquad F(p) = \text{Arctan}\,\dfrac{1}{p} + k$

$p\,F(p) = p\,\text{Arctan}\,\dfrac{1}{p} + kp$.

Posons $X = \text{Arctan}\,\dfrac{1}{p}$, p tend vers $+\infty$, donc X tend vers 0,

et $\lim\limits_{p \to +\infty} p\,\text{Arctan}\,\dfrac{1}{p} = \lim\limits_{X \longrightarrow 0} \dfrac{X}{\tan X} = 1$

donc $\lim\limits_{p \to +\infty} p\,F(p) = 1 + \lim\limits_{p \to +\infty} kp = f(0^+) = 1$ (d'aprés VI 3°)

Ceci n'est vrai que lorsque $k = 0$.

Donc $\quad F(p) = \text{Arctan}\,\frac{1}{p}$ (déjà trouvé au B III 9°) b)).

On a démontré ici que F était définie sur $]0,+\infty[$ alors qu'en B III 9°) b) on avait du se limiter à préciser que F était définie pour $p \in\ ]1,+\infty[$.

6°) Une utilisation des théorèmes de la valeur initiale et de la valeur finale en Physique :

E(p) → [Système Physique Linéaire] → S(p)

Le système physique est caractérisé par sa fonction de transfert opéra-tionnelle H(p) avec $S(p) = E(p).H(p)$

Exemple :

Pour E(p) donné, on a trouvé $S(p) = \dfrac{\dfrac{2m}{\omega_0}\,p + 1}{p\left[\dfrac{p^2}{\omega_0^{\,2}} + \dfrac{2m}{\omega_0}\,p + 1\right]}$

On peut remonter à l'original s de S pour connaître l'allure du signal de sortie.

On peut aussi se contenter d'évaluer l'allure de $s(t)$ à partir de quelques informations tirées de S(p).

Si on applique à S(p) le théorème de la valeur initiale :

$\lim\limits_{p \to +\infty} p\,S(p) = s(0^+)$ $\qquad$ On trouve $s(0^+) = 0$

Si on applique à $S(p)$ le théorème de la valeur finale :

$\lim_{p \to 0} p\,S(p) = 1$ On a $\lim_{t \to +\infty} s(t) = 1$

Comme $s(0^+) = 0$, $p\,S(p) = \mathscr{L}[s'](p)$

Si on applique à $\mathscr{L}[s']$ le théorème de la valeur initiale :

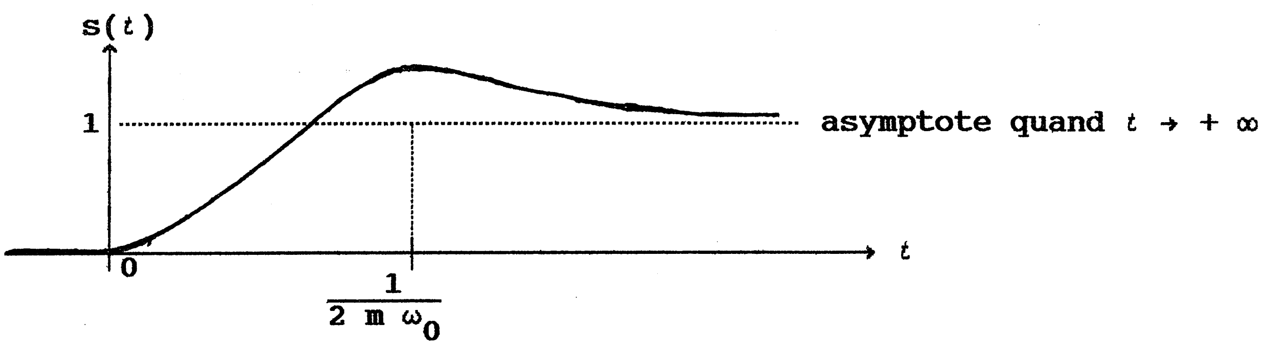
$$\lim_{p \to +\infty} p\,\mathscr{L}[s'](p) = \lim_{p \to +\infty} p^2\,S(p) = s'(0^+) = 2\,m\,\omega_0$$

Si on applique à $\mathscr{L}[s']$ le théorème de la valeur finale :

$$\lim_{p \to 0} p\,\mathscr{L}[s'](p) = \lim_{p \to 0} p^2\,S(p) = \lim_{t \to +\infty} s'(t) = 0$$

On a donc un certain nombre d'indications qui permettent de connaître $s(t)$ lorsque t tend vers 0^+ et lorsque $t \to +\infty$. C'est à dire à l'instant initial et en régime permanent.

L'allure de la courbe représentant $s(t)$ en régime transitoire pourrait être évaluée par la méthode des pôles (valeurs de p qui annulent le dénominateur).



Nota : Voir aussi C- V- .(Fonction de transfert isomorphe)

7°) Exercices :

a) *Trouver les transformées de Laplace des fonctions suivantes* :

$$f_1 : t \longmapsto \mathcal{U}(t) \cos 3t$$

$$f_2 : t \longmapsto t\, \mathcal{U}(t) \cos 3t$$

$$f_3 : t \longmapsto \mathcal{U}(t)\, e^{2t} \sin 4t$$

$$f_4 : t \longmapsto \mathcal{U}(t - \frac{\pi}{2}) \cos 3t$$

$$f_5 : t \longmapsto (3t + 1)\, \mathcal{U}(t - 1)$$

$$f_6 : t \longmapsto \mathcal{U}(t)\, (e^{-2t} + 2 \cos t + 5)$$

$$f_7 : t \longmapsto g(t)\, \mathcal{U}(t)$$

avec $\begin{cases} g(t) = t \text{ si } t \in [0,1[\\ g(t) = 1 \text{ si } t \in [1,2[\end{cases}$ et g de période 2.

$$f_8 : t \longmapsto t\, e^{t}\, \mathcal{U}(t - 1)$$

$$f_9 : t \longmapsto t\, e^{-t} \cos t\, \mathcal{U}(t)$$

b) *Soit la fonction* f_0 *définie par* :

$$\begin{cases} f_0(t) = 0 \text{ si } t < 0 \text{ ou si } t \geq 2 \\ f_0(t) = t + 1 \text{ si } t \in [\ 0\ ,\ 1\ [\\ f_0(t) = 2 \text{ si } t \in [\ 1\ ,\ 2\ [\end{cases}$$

- **Trouver la transformée de f_0.**

- **Trouver la transformée de $t \longmapsto \mathcal{U}(t)\ f(t)$ avec f de période 3 et telle que : $\forall\ t \in [\ 0\ ,\ 3\ [\qquad f(t) = f_0(t)$**

- **Trouver la transformée de $t \longmapsto \mathcal{U}(t)\ g(t)$ avec g définie par :**

$$\begin{cases} g(t) = 0 & \text{si } t < 0 \\ g(t) = \frac{1}{2}\ t^2 + t + 1 & \text{si } t \in [\ 0\ ,\ 1\ [\\ g(t) = 2\ t & \text{si } t \in [\ 1\ ,\ 2\ [\\ g(t) = 3 & \text{si } t \geq 2 \end{cases}$$

On vérifiera que $g'(t) = f_0(t)$ pour $t \in \mathbb{R} - \left\{ 0,\ 1,\ 2 \right\}$ et on utilisera $F_0(p)$ pour calculer $G(p)$.

- **g est-elle une primitive large de f_0 ?**

- **Sinon trouver la primitive large de f_0 sur $\mathbb{R}$ qui prend la valeur 0 en 0, puis trouver la transformée de cette primitive large de f_0 .**

c) *Trouver les originaux des fonctions suivantes (on notera* f_n *l'original de* F_n :

Pour trouver l'original d'une fonction rationnelle, on la décomposera d'abord en éléments simples .

■ $F_1 : p \longmapsto \dfrac{2p + 3}{p^2 + 4}$

■ $F_2 : p \longmapsto \dfrac{4}{p\,(p^2 + 4)}$

■ $F_3 : p \longmapsto \dfrac{1}{(2p + 3)^2}$

■ $F_4 : p \longmapsto \dfrac{2p + 1}{p^2 + 4p + 8}$

■ $F_5 : p \longmapsto \dfrac{e^{-p}}{2p + 1}$

■ $F_6 : p \longmapsto \dfrac{1}{p^2}\,(1 - e^{-p}) - \dfrac{1}{p}\,e^{-2p}$

On donnera aussi la représentation graphique de f_6 et la transformée de f'_6 sans calculer f'_6.

■ $F_7 : p \longmapsto \dfrac{1}{p^2 - 4}$

■ $F_8 : p \longmapsto \dfrac{p}{(p - 1)^2\,(p + 2)}$

■ $F_9 : p \longmapsto \dfrac{p}{(p^2 + 4)^2}$

■ Soit $F : p \longmapsto \dfrac{2p + 3}{3p^2 + 5p + 8}$ la transformée d'une fonction f continue sur $[\,0\,,+\infty\,[$, sans calculer f, préciser $f(0^+)$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t)$.

8°) Originaux des éléments simples de $2^{\text{ème}}$ espèce :

a) *On cherche les orignaux* f_n et g_n des fonctions

$$F_n(p) = \frac{p}{(p^2 + \omega^2)^n} \qquad \text{et} \qquad G_n(p) = \frac{1}{(p^2 + \omega^2)^n}$$

On a vu que $f_1(t) = \mathcal{U}(t) \cos \omega t$ et $g_1(t) = \mathcal{U}(t) \dfrac{\sin \omega t}{\omega}$

Nous allons montrer que la connaissance de f_n et g_n suffit pour calculer f_{n+1} et g_{n+1} et donc pour calculer de proche en proche les originaux cherchés .

b) *Calculons* $F'_n(p)$ et $G'_n(p)$

$$F'_n(p) = \frac{(p^2 + \omega^2)^n - n\ p\ (p^2 + \omega^2)^{n-1}\ 2p}{(p^2 + \omega^2)^{2n}} = \frac{p^2 + \omega^2 - 2\ n\ p^2}{(p^2 + \omega^2)^{n+1}}$$

$$F'_n(p) = \frac{-\ (2n - 1)\ (p^2 + \omega^2) + 2\ n\ \omega^2}{(p^2 + \omega^2)^{n+1}}$$

$$F'_n(p) = -\ (2n - 1)\ \frac{1}{(p^2 + \omega^2)^n} + 2\ n\ \omega^2\ \frac{1}{(p^2 + \omega^2)^{n+1}}$$

$$F'_n(p) = -\ (2n - 1)\ \ G_n(p)\ \ +\ \ 2\ n\ \omega^2\ \ G_{n+1}(p)$$

$$G'_n(p) = \frac{-\ 2\ n\ p}{(p^2 + \omega^2)^{n+1}} = -\ 2\ n\ F_{n+1}(p)$$

d'où les formules :
$$\begin{cases} G_{n+1}(p) = \dfrac{1}{2\ n\ \omega^2}\ \ F'_n(p) + \dfrac{2\ n - 1}{2\ n\ \omega^2}\ G_n(p) \\[2ex] F_{n+1}(p) = -\ \dfrac{1}{2\ n}\ \ G'_n(p) \end{cases}$$

c) *Or nous avons vu que* l'original de $F'_n(p)$ est $-t\ f_n(t)$ et celui de $G'_n(p)$ est $-t\ g_n(t)$, on a donc les résultats suivants :

$$\begin{cases} g_{n+1}(t) = \dfrac{-1}{2\,n\,\omega^2}\ t\ f_n(t) + \dfrac{2\,n-1}{2\,n\,\omega^2}\ g_n(t) \\[2ex] f_{n+1}(t) = +\dfrac{1}{2\,n}\ t\ g_n(t) \end{cases}$$

A titre d'exemples, calculons $g_2(t)$ et $f_2(t)$.

$$f_2(t) = \frac{t}{2}\ g_1(t) = \mathcal{U}(t)\ \frac{t\ \sin \omega t}{2\ \omega}$$

$$g_2(t) = -\frac{t}{2\ \omega^2}\ f_1(t) + \frac{1}{2\ \omega^2}\ g_1(t)$$

$$g_2(t) = -\frac{t}{2\ \omega^2}\ \mathcal{U}(t)\ \cos \omega t + \frac{1}{2\ \omega^2}\ \mathcal{U}(t)\ \frac{\sin \omega t}{\omega}$$

d) *Soit* $H(p) = \dfrac{A\ p + B}{\left[(p - \alpha)^2 + \omega^2\right]^n}$ un élément simple quelconque de $2^{\text{ème}}$ espèce. Pour trouver l'original h, on écrit d'abord H(p) sous la forme suivante :

$$H(p) = A\ \frac{p - \alpha}{\left[(p - \alpha)^2 + \omega^2\right]^n} + \frac{A\ \alpha + B}{\left[(p - \alpha)^2 + \omega^2\right]^n}$$

De plus on a vu que si F est la transformée de Laplace de f, alors $F(p + \alpha)$ est la transformée de $e^{-\alpha t}\ f(t)$ donc :

$$h(t) = e^{\alpha t}\ \left[\ A\ f_n(t) + (A\ \alpha + B)\ g_n(t)\ \right]$$

e) *Exercices* : Trouver les originaux des fonctions H

α) $H(p) = \dfrac{2}{(p^2 + 1)^2}$

β) $H(p) = \dfrac{p}{(p^2 + 4)^2}$

γ) $H(p) = \dfrac{2p - 1}{(p^2 + 2p + 10)^2}$

VII- TRANSFORMATION DE LAPLACE ET <<EQUATIONS DIFFERENTIELLES>>

Dans les classes de Techniciens Supérieurs, en Physique, il est courant de modéliser un système par une équation différentielle linéaire et des conditions qui portent sur la valeur en zéro et sur la continuité du signal de sortie (et de sa <<dérivée>> dans le cas d'équations du deuxième ordre). L'équation différentielle et ces conditions sont alors précisées par un raisonnement physique.

(cf Equations différentielles du premier ordre - IV- 1°) et Equations différentielles du deuxième ordre - III- 5°)- a))

1°) **Préliminaires**

Dans cette partie VII :

a) Les équations différentielles sont linéaires à coefficients constants du 1^{er} ordre : $a\,y' + b\,y = f$ (1) ou du $2^{ème}$ ordre : $a\,y'' + b\,y' + c\,y = f$ (2) avec $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$, $c \in \mathbb{C}$.

b) On cherche des fonctions y qui vérifient sur chacun des intervalles ouverts où f est continue les équations différentielles considérées.

c) Les fonctions f du second membre, les solutions y cherchées ainsi que leurs <<dérivées>> y' et y" sont :

- nulles sur $]-\infty,0[$
- supposées vérifier les hypothèses $\mathscr{H}$ et admettre des transformées de Laplace.

d) Les transformées de Laplace de y et de f sont notées respectivement Y et F.

2°) **Exemple**

Reprenons l'exercice de : EQUATIONS DIFFERENTIELLES DU PREMIER ORDRE - IV- 2°)- *Etude de la réponse à un créneau.*

(Nous noterons pour se conformer au choix fait dans cette partie y au lieu de s la fonction cherchée.)

Le problème est de trouver la fonction y nulle en zéro, continue sur $\mathbb{R}$, et vérifiant sur chacun des intervalles où $\mathscr{E}$ est continue l'équation différentielle :

$$\tau \frac{dy}{dt} + y = \mathscr{E}$$

avec $\mathscr{E}(t) = \mathcal{U}(t) - \mathcal{U}(t-1)$ et $\tau \in \mathbb{R}_+^*$

Le signal d'entrée n'étant pas continu, on a été amené à résoudre trois équations différentielles, respectivement sur les intervalles $]-\infty,0[$, $[0,1[$ et $[1,+\infty[$.

Nous avons obtenu la fonction y définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$y(t) = \left[1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right] \mathcal{U}(t) - \left[1 - e^{-\frac{t-1}{\tau}} \right] \mathcal{U}(t-1)$$

y dérivable sur $\mathbb{R} - \{0,1\}$ est une primitive large sur $\mathbb{R}$ de la fonction $\frac{dy}{dt}$ définie sur $\mathbb{R} - \left\{0,1\right\}$ par :

$$\frac{dy}{dt}(t) = \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \mathcal{U}(t) - \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t-1}{\tau}} \mathcal{U}(t-1)$$

Il est facile de constater que les fonctions y, $\frac{dy}{dt}$ et $\mathcal{E}$ sont nulles sur $]-\infty,0[$, vérifient les hypothèses $\mathcal{H}$ et admettent des transformées de Laplace.

Sachant que $\mathcal{L}(\tau \frac{dy}{dt} + y) = \tau\ \mathcal{L}(\frac{dy}{dt}) + \mathcal{L}(y)$, notons que dans le cas étudié ici, d'après II- 6°)- Remarque, on a :

$$\tau\ \mathcal{L}(\frac{dy}{dt}) + \mathcal{L}(y) = \mathcal{L}(\mathcal{E}) \Rightarrow \forall\ t \in \mathbb{R} - \left\{0,1\right\},\quad \tau \frac{dy}{dt}(t) + y(t) = \mathcal{E}(t)$$

En prenant en compte l'hypothèse y nulle sur $]-\infty,0]$ et l'hypothèse de continuité de y, appliquons aux deux membres de l'équation $\tau \frac{dy}{dt} + y = \mathcal{E}$ la transformation de Laplace, on obtient :

$$\tau\ p\ Y(p) + Y(p) = \frac{1}{p}(1 - e^{-p})$$

d'où $Y(p) = \dfrac{1 - e^{-p}}{p(\tau p + 1)} = \left[\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{p + \frac{1}{\tau}}\right](1 - e^{-p})$

L'original de Y est la fonction y définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$y(t) = \left[1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right] \mathcal{U}(t) - \left[1 - e^{-\frac{t-1}{\tau}}\right] \mathcal{U}(t-1)$$

Nous constatons que l'on a obtenu ainsi directement la fonction y cherchée sans distinguer trois cas.

3°) **Méthode admise**

Nous admettrons dans la suite de ce VII que, en appliquant comme dans l'exercice ci-dessus aux deux membres de l'équation différentielle considérée la Transformation de Laplace en prenant en compte les hypothèses concernant la continuité et la valeur en zéro de y *et de ses <<dérivées>>, on obtient une fonction* Y *qui est la transformée de Laplace de la fonction* y *cherchée.*

□ Une démonstration de ceci est donnée dans C- FONCTION DE TRANSFERT ISOMORPHE pour certains cas particuliers.

□ Cette méthode peut s'appliquer aux cas d'équations différentielles linéaires à coefficients constants et aux cas de certains systèmes différentiels.

4°) **L'<<équation>> est du 1er ordre et la fonction y est continue sur** $[0,+\infty[$

a) Cas général

Appliquons à (1) la transformation de Laplace, il vient :

$$a \left[p\,Y(p) - y(0^+) \right] + b\,Y(p) = F(p) \text{ d'où :}$$

$$Y(p) = \frac{F(p) + a\,y(0^+)}{a\,p + b} = \frac{\frac{1}{a}}{p + \frac{b}{a}}\,F(p) + \frac{1}{p + \frac{b}{a}}\,y(0^+)$$

b) *Exercices* :

□ Trouver la fonction y nulle sur $]-\infty\,,\,0\,[$ continue sur $\mathbb{R}$ et vérifiant sur chacun des intervalles ouverts où le second membre est continu :

α) $2\,y' + 3\,y = t\;\mathcal{U}(t)$

β) $y' + y = \mathcal{U}(t)\;e^{-t}\cos t$

γ) $y' + y = \mathcal{U}(t-1) - \mathcal{U}(t-2)$

□ Trouver la fonction y nulle sur $]-\infty\,,0\,[$ continue sur $[0,+\infty[$ et vérifiant sur chacun des intervalles ouverts où le second membre est continu :

α) $2\,y' + 3\,y = t\;\mathcal{U}(t)$ sachant que $y(0) = 1$

β) $y' + y = \mathcal{U}(t)\;e^{-t}\cos t$ sachant que $y(0) = -1$

γ) $y' + y = \mathcal{U}(t-1) - \mathcal{U}(t-2)$ sachant que $y(0) = 2$

5°) L'<<équation>> est du 1^{er} ordre et la fonction y présente des sauts sur $[0,+\infty[$

Si la fonction y présente un saut en a_i on choisira en général arbitrairement $y(a_i) = y(a_i^{+})$, la valeur $y(a_i)$ n'ayant aucune importance.

a) Exemple

Trouver la fonction y nulle sur $]-\infty,0]$ continue sur $[0,+\infty[$ sauf en 2 où elle présente un saut de 1 et qui vérifie sur chacun des intervalles ouverts où γ est continue l'équation $y' + y = \gamma$ avec $\gamma(t) = \mathcal{U}(t) - \mathcal{U}(t-1)$.

En utilisant la théorie des équations différentielles on doit résoudre $y' + y = 1$ sur $]0,1[$, $y' + y = 0$ sur $]1,2[$ et $y' + y = 0$ sur $]2,+\infty[$ et tenir compte de l'hypothèse de continuité de y et du saut de y en 2.

Sur $]0,1[$ $\quad y = \lambda_1 e^{-t} + 1$

Sur $]1,2[$ $\quad y = \lambda_2 e^{-t}$

Sur $]2,+\infty[$ $\quad y = \lambda_3 e^{-t}$

$y(0) = y(0^+) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1$

$y(1) = y(1^+) = y(1^-) \Rightarrow 1 - \frac{1}{e} = \frac{\lambda_2}{e} \Rightarrow \lambda_2 = e - 1$

$y(2^+) = y(2^-) + 1 \Rightarrow \lambda_3 e^2 = \frac{e - 1}{e^2} + 1 \Rightarrow \lambda_3 = e^2 + e - 1$

d'où y est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$y(t) = 0$ si $t \in]-\infty,0[$

$y(t) = 1 - e^{-t}$ si $t \in [0,1[$

$y(t) = (e - 1)\, e^{-t}$ si $t \in [1,2[$

$y(t) = (e^2 + e - 1)\, e^{-t}$ si $t \in [2,+\infty[$

Notons d'abord que ici que $\mathcal{L}(y')(p) = p\, Y(p) - e^{-2p}$

Appliquons la transformation de Laplace aux deux membres de $y' + y = \gamma$, il vient $p\, Y(p) - e^{-2p} + Y(p) = \frac{1 - e^{-p}}{p}$ d'où

$$Y(p) = \left[\frac{1}{p} - \frac{1}{p + 1} \right]\left[1 - e^{-p} \right] + \frac{e^{-2p}}{p + 1}$$

L'original de Y est la fonction y définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$y(t) = \left[1 - e^{-t} \right] \mathcal{U}(t) - \left[1 - e^{-(t-1)} \right] \mathcal{U}(t-1) + e^{-(t-2)} \mathcal{U}(t-2)$$

d'où :

$y(t) = 0$ si $t \in]-\infty,0[$

$y(t) = 1 - e^{-t}$ si $t \in [0,1[$

$y(t) = (e - 1)\, e^{-t}$ si $t \in [1,2[$

$y(t) = (e^2 + e - 1)\, e^{-t}$ si $t \in [2,+\infty[$

Comme dans 2°) Exemple, nous constatons que la méthode admise en 3°) permet d'obtenir directement la solution y cherchée.

b) Exercices

α) Trouver la fonction y nulle sur $] - \infty , 0]$ continue sur $\mathbb{R}$ sauf en 1 où elle présente un saut de -1 et vérifiant sur $]0,1[$ et $]1,+\infty[$ l'équation :

$$2\, y' + 3\, y = t\, \mathcal{U}(t)$$

β) Trouver la fonction y nulle sur $] - \infty , 0 [$ prenant en 0 la valeur 1, continue sur $[0,+\infty[$ sauf en 2 où elle présente un saut de 1 et vérifiant sur $]0,2[$ et $]2,+\infty[$ l'équation :

$$y' - y = \mathcal{U}(t)$$

6°) L'<<équation>> est du second ordre et la fonction y est continûment dérivable sur $[0,+\infty[$

a) Cas général

Appliquons à (2) la transformation de Laplace, il vient :

$$a\left[p^2\, Y(p) - p\, y(0^+) - y'(0^+)\right] + b\left[p\, Y(p) - y(0^+)\right] + c\, Y(p) = F(p)$$

$$\left[a\, p^2 + b\, p + c\right] Y(p) = F(p) + (ap + b)\, y(0^+) + ay'(0^+)$$

$$Y(p) = \frac{1}{a\, p^2 + b\, p + c} F(p) + \frac{(ap + b)\, y(0^+) + ay'(0^+)}{a\, p^2 + b\, p + c}$$

b) <u>Exemple</u>

Trouver y :

- nulle sur $]-\infty,0]$
- continûment dérivable sur $[0,+\infty[$
- vérifiant sur $[0,+\infty[$ l'équation $y'' + y = \mathcal{U}$
- telle que $y'(0) = 1$

Ici $\mathscr{L}(y')(p) = p\, Y(p)$ et $\mathscr{L}(y'')(p) = p^2\, Y(p) - 1$

Appliquons la transformation de Laplace aux deux membres de l'équation, il vient :

$$p^2\, Y(p) - 1 + Y(p) = \frac{1}{p}$$

d'où $Y(p) = \dfrac{1}{p\,(p^2 + 1)} + \dfrac{1}{p^2 + 1} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{p}{p^2 + 1} + \dfrac{1}{p^2 + 1}$

donc la fonction y est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$y(t) = \left[1 - \cos t + \sin t\right] \mathcal{U}(t)$$

c) <u>*Exercices*</u> :

α) Trouver les fonctions y nulles sur $]-\infty, 0[$, continûment dérivables sur $[0,+\infty[$ telles que $y'' - 4y = \mathcal{U}(t) \cos 2t$

β) Si en appliquant la transformation de Laplace à l'équation : $y'' + 2\,y' + 10\,y = f$, y étant continûment dérivable sur $[0,+\infty[$, on obtient : $Y(p) = \dfrac{1}{p^2 + 2p + 10}\,F(p)$, quelles hypothèses a-t-on faites sur y et y' ?

Résoudre alors sur $[0,+\infty[$ cette équation dans le cas où $f(t) = t\,\mathcal{U}(t)$.

γ) Soient les équations :

$$(1) \qquad \frac{d^2s}{dt^2} + 4\,\frac{ds}{dt} + 5\,s = f(t)$$

et
$$(2) \qquad \frac{d^2s}{dt^2} + 4\,\frac{ds}{dt} + 5\,s = 2\,f(t) + f'(t)$$

On veut trouver une fonction s vérifiant l'une de ces équations et les conditions C : s est nulle sur $]-\infty\,,\,0\,[$ et $s(0) = s'(0) = 0$

□ On suppose que s est continûment dérivable sur $[\,0\,,\,+\infty\,[$ et que f est continue sur $[\,0\,,\,+\infty\,[$

■ Appliquer la transformation de Laplace à (1)

■ Trouver la fonction s vérifiant (1) et les conditions C lorsque $f(t) = t\,\mathcal{U}(t)$

□ On suppose que :

- s est continûment dérivable sur $[\,0\,,\,+\infty\,[$
- f est continue sur $[\,0\,,\,+\infty\,[$.
- f' <<dérivée>> de f admet une transformée de Laplace

■ Appliquer la transformation de Laplace à (2)

■ Trouver la fonction s vérifiant (2) et les conditions C si $f(t) = t\,\mathcal{U}(t)$

δ) Résoudre sur $[0,+\infty[$ $y'' - 2y' + y = \mathcal{U}(t)\, t \cos t$ puis vérifier les résultats obtenus au Chapitre "Equations Différentielles" .

ε) Trouver la fonction y :

- nulle sur $]-\infty,0[$
- continûment dérivable sur $[0,+\infty[$
- vérifiant sur chacun des intervalles ouverts où le second membre est continu l'équation $y'' + y = 2f + f'$ (f' <<dérivée>> de f)
- telle que $y(0) = y'(0) = 0$ et que
  $f(t) = t\,[\mathcal{U}(t) - \mathcal{U}(t-\pi)] + \pi\, \mathcal{U}(t-\pi)$

7°) **<u>L'<<équation>> est du 2^{nd} ordre, la fonction y ainsi que sa <<dérivée>> y' présentent éventuellement des sauts sur $]0,+\infty[$.</u>**

Si la fonction y présente un saut en a_i (respectivement y') on choisira en général arbitrairement $y(a_i) = y(a_i^+)$,(respectivement $y'(a_i) = y'(a_i^+)$) la valeur $y(a_i)$ (respectivement $y'(a_i)$) n'ayant aucune importance.

a) <u>Exemple 1</u>

Trouver y :
- nulle sur $]-\infty,0[$
- continue sur $[0,+\infty[$ sauf en 2 où elle présente un saut de -2
- continûment dérivable sur $[0,2[$ et sur $]2,+\infty[$
- vérifiant sur $]0,2[$ et $]2,+\infty[$ l'équation $y'' + y' - 2y = 2\,\mathcal{U}$
- telle que $y(0^+) = y'(0^+) = 0$ et $y'(2^-) = y'(2^+)$

Ici, $\mathcal{L}(y')(p) = p\,Y(p) + 2\,e^{-2p}$

$\mathcal{L}(y'')(p) = p^2\,Y(p) + 2\,p\,e^{-2p}$

En appliquant aux deux membres de l'équation, la transformation de Laplace, on obtient :

$$(p^2 + p - 2)\,Y(p) + 2\,(p + 1)\,e^{-2p} = \frac{2}{p}$$

d'où $Y(p) = \dfrac{2}{p\,(p^2 + p - 2)} - \dfrac{2\,(p + 1)}{p^2 + p - 2}\,e^{-2p}$

$$Y(p) = -\frac{1}{p} + \frac{2}{3}\frac{1}{p-1} + \frac{1}{3}\frac{1}{p+2} - \left[\frac{4}{3}\frac{1}{p-1} + \frac{2}{3}\frac{1}{p+2}\right] e^{-2p}$$

donc la fonction y est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$y(t) = \left[-1 + \frac{2}{3}\,e^{t} + \frac{1}{3}\,e^{-2t}\right] \mathcal{U}(t) - \left[\frac{4}{3}\,e^{t-2} + \frac{2}{3}\,e^{-2(t-2)}\right] \mathcal{U}(t-2)$$

---

b) Exemple 2

Trouver y :

- nulle sur $]-\infty,0[$
- continue sur $[0,+\infty[$
- continûment dérivable sur $[0,+\infty[$ sauf en 1 où la <<dérivée>> présente un saut de 1
- vérifiant sur $]0,1[$ et $]1,+\infty[$ l'équation $y'' + y' - 2\,y = 2\,\mathcal{U}$
- telle que $y(0^+) = 1$ et $y'(0^+) = 0$

Ici $\mathcal{L}(y')(p) = p\,Y(p) - 1$ et $\mathcal{L}(y'')(p) = p^2\,Y(p) - p - e^{-p}$

Appliquons la Transformation de Laplace aux deux membres de l'équation, on obtient :

$$(p^2 + p - 2)\,Y(p) - p - e^{-p} - 1 = \frac{2}{p}$$

d'où $Y(p) = \dfrac{2}{p\,(p^2 + p - 2)} + \dfrac{p + 1 + e^{-p}}{p^2 + p - 2}$

$$Y(p) = -\frac{1}{p} + \frac{4}{3}\,\frac{1}{p-1} + \frac{2}{3}\,\frac{1}{p+2} + \frac{1}{3}\left[\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p+2}\right] e^{-p}$$

donc la fonction y est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$y(t) = \left[-1 + \frac{4}{3}\,e^{t} + \frac{2}{3}\,e^{-2t}\right] \mathcal{U}(t) + \frac{1}{3}\left[e^{t-1} - e^{-2(t-1)}\right] \mathcal{U}(t-1)$$

c) Exercice

D'après un sujet de B.T.S. CIRA :

Trouver la fonction s :

- nulle sur $]-\infty,0[$
- continue sur $[0,+\infty[$
- continûment dérivable sur $[0,+\infty[$ sauf en 1 et en 3 où la

<<dérivée>> présente respectivement un saut de 1 et un saut de -1

- vérifiant sur les intervalles $]0,1[$, $]1,3[$ et $]3,+\infty[$ l'équation :

$$\frac{d^2s}{dt^2} + 10\,\frac{ds}{dt} + 250\,s = \frac{d\gamma}{dt}$$

avec $\gamma(t) = \mathcal{U}(t-1) - \mathcal{U}(t-3)$

- telle que $s(0) = \dfrac{ds}{dt}(0) = 0$

8°) **<<Système différentiel>> linéaire du premier ordre :**

a) Exemple

Trouver les fonctions x et y, nulles sur $]-\infty,0[$, continues sur

$[0,+\infty[$ vérifiant sur $]0,1[$, $]1,2[$ et $]2,+\infty[$ le système différentiel :

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y + \mathcal{U}(t-1) \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y + \mathcal{U}(t-2) \end{cases}$$

sachant de plus que $x(0^+) = y(0^+) = 0$

Appliquons la transformation de Laplace à chacune des équations, il vient :

$$\begin{cases} p\,X(p) = X(p) - Y(p) + \dfrac{e^{-p}}{p} \\ p\,Y(p) = X(p) + Y(p) - \dfrac{e^{-2p}}{p} \end{cases}$$

d'où
$$\begin{cases} (p+1)\,X(p) + Y(p) = \dfrac{e^{-p}}{p} \\ -X(p) + (p-1)\,Y(p) = -\dfrac{e^{-2p}}{p} \end{cases}$$

On obtient $X(p) = \left(\dfrac{1}{p^2} - \dfrac{1}{p^3}\right) e^{-p} + \dfrac{1}{p^3}\, e^{-2p}$ et

$$Y(p) = -\left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3}\right) e^{-2p} + \frac{1}{p^3}\, e^{-p}$$

donc les fonctions x et y sont définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$x(t) = [t - 1 - \tfrac{1}{2}(t-1)^2]\,\mathcal{U}(t-1) + \tfrac{1}{2}(t-2)^2\,\mathcal{U}(t-2)$$

$$y(t) = -[t - 2 + \tfrac{1}{2}(t-2)^2]\,\mathcal{U}(t-2) + \tfrac{1}{2}(t-1)^2\,\mathcal{U}(t-1)$$

b) <u>Exercice 1</u> :

En appliquant aux deux équations, la transformation de

Laplace, résoudre sur $[0,+\infty[$ le système :

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2\,x + 3\,y \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} = -\,x + y \end{cases}$$

dans le cas où $x(0) = 1$ et $y(0) = -2$.

c) <u>Exercice 2</u> :

Dans l'étude de la propagation du courant le long d'une ligne, on est amené à étudier les fonctions : $x \longmapsto u(x)$ et $x \longmapsto i(x)$, continues sur $[\,0\,,\,+\infty\,[$, telles que $u(0) = u_0$ et $i(0) = i_0$ et vérifiant le système suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = -\,j\,L\,\omega\,i \\[2ex] \dfrac{\partial i}{\partial x} = -\,j\,C\,\omega\,u \end{cases} \qquad\qquad x \geq 0$$

En utilisant la transformation de Laplace, résoudre sur $[\,0\,,\,+\infty\,[$, le système ci-dessus dans le cas où $u(0) = u_0$ et $i(0) = i_0$.

d) <u>Exercice 3 : *B.T.S. Electronique 1986*</u>

Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x' = 2\,x - 3\,y \\ y' = -\,4\,x + y \\ z' = x + z \end{cases}$$

dans lequel x, y, z sont trois fonctions de la variable réelle strictement positive t et x', y', z' leurs dérivées respectives. On suppose $x(0) = 7$, $y(0) = 0$ et $z(0) = 1$.

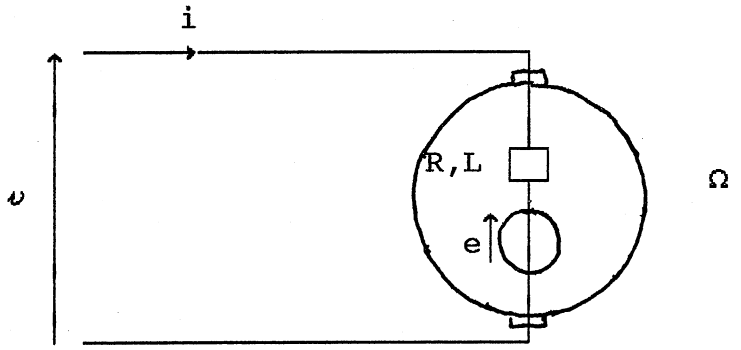
e) Exercice 4 : *B.T.S. Electronique 1992.*

En utilisant la transformation de Laplace déterminer la solution, définie sur $\mathbb{R}^+$, du système :

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}(t) = x(t) - 2\,y(t) \\[2ex] \dfrac{dy}{dt}(t) = x(t) - y(t) - 1 \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

f) *Un exemple de système différentiel en relation avec la Physique :*

Démarrage d'un moteur à courant continu à excitation constante ou à aimant permanent aux bornes duquel est appliqué un échelon de tension à $t = 0$.



La grandeur d'entrée est la tension υ appliquée aux bornes du moteur $\upsilon = V\,\mathcal{U}(t)$.

La grandeur de sortie est la vitesse angulaire de rotation $\Omega(t)$ du moteur.

On note $i(t)$ l'intensité du courant absorbé par le moteur.

On peut écrire une équation liant les grandeurs électriques :

$$\upsilon = R\,i + L\,\frac{di}{dt} + e$$

R résistance de l'enroulement induit du moteur.
L inductance de l'enroulement induit du moteur.
e force contre électromotrice du moteur.

e dépend de la vitesse angulaire de rotation du moteur, des caractéristiques de construction et de l'excitation :

$$e = k\,\Omega \qquad \text{avec } k = \text{constante}$$

On peut donc écrire :

$$v = R\,i + L\,\frac{di}{dt} + k\,\Omega$$

Pour $t \geq 0$, cette équation s'écrit :

$$V = R\,i + L\,\frac{di}{dt} + k\,\Omega$$

avec comme conditions initiales :

$\Omega(0^-) = \Omega(0^+) = 0$ Le moteur est initialement à l'arrêt et la vitesse ne peut pas varier brutalement (principe de l'inertie).

$i(0^-) = i(0^+) = 0$ L'intensité du courant est initialement nulle et l'inductance s'oppose aux brusques variations de i.

On peut aussi écrire <u>une équation liant les grandeurs mécaniques</u>. D'après le principe fondamental de la Dynamique des systèmes en rotation.

$$J\,\frac{d\Omega}{dt} = \Gamma_M + \Gamma_R$$

Γ_M couple moteur lié au passage du courant dans l'induit.
Γ_R couple résistant dû aux frottements.

On suppose que Γ_R est proportionnel à la vitesse angulaire de rotation.

$$\Gamma_R = -\lambda\,\Omega \qquad \text{avec } \lambda = \text{constante}$$

On suppose que Γ_M est proportionnel à l'intensité du courant i : $\Gamma_M = k\, i$ avec k = constante (même valeur que pour $e = k\,\Omega$) avec comme précédemment $i(0^-) = i(0^+) = 0$ et $\Omega(0^-) = \Omega(0^+) = 0$.

On obtient donc le système différentiel :

$$\begin{cases} Ri + L\dfrac{di}{dt} + k\Omega = v \\ \\ J\dfrac{d\Omega}{dt} + \lambda\,\Omega - ki = 0 \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{array}{l} i(0^-) = i(0^+) = 0 \\ \Omega(0^-) = \Omega(0^+) = 0 \\ v = V\,\mathcal{U}(t) \end{array}$$

que l'on pourra résoudre sur $[\ 0\ ,\ +\infty\ [$ en utlisant la transformation de Laplace.

VIII- EXERCICES :

A- *Trouver les transformées de Laplace des fonctions f définies par* :

1°) $f(t) = (2t^2 + t - e^t)\ \mathcal{U}(t)$

2°) $f(t) = (\cos 5t + 3 \sin 2t)\ \mathcal{U}(t)$

3°) $f(t) = (2\ \mathrm{ch}\ 3t - 4\ \mathrm{sh}\ 2t)\ \mathcal{U}(t)$

4°) $f(t) = (t^3 + 1)\ \mathcal{U}(t)$

5°) $f(t) = (\sin at \cos bt)\ \mathcal{U}(t)$

6°) $f(x) = (4\ e^{2x} - 5x + \cos x)\ \mathcal{U}(x)$

7°) $f(t) = \sin^3 t\ \mathcal{U}(t)$

8°) $f(t) = \sin^2 t \cos t\ \mathcal{U}(t)$

9°) $f(t) = (t + 1)\ \mathcal{U}(t - 1)$

10°) $f(t)\ e^{t-2}\ \mathcal{U}(t - 1)$

11°) $f(t) = \frac{1}{2}\ \mathcal{U}(t) + (t - 1)\ \mathcal{U}(t - 1) - (t - \frac{5}{2})\ \mathcal{U}(t - 2)$

12°) $f(t) = \mathcal{U}(t) \cos(2t - \frac{\pi}{3})$

13°) $f(t) = \mathcal{U}(t - \frac{\pi}{2}) \cos 3t$

14°) $f(t) = \mathcal{U}(t - \frac{\pi}{6}) \cos(2t - \frac{\pi}{3})$

15°) $f(x) = (x - 2)^3 \; \mathcal{U}(x - 2)$

16°) $f(x) = (2x + 3 + e^{2x}) \; \mathcal{U}(x - 2)$

17°) $f(x) = x^3 \; \mathcal{U}(x - 2)$

18°) $f(x) = (x - 1)^2 \; e^{1-x} \; \mathcal{U}(x - 1)$

19°) $f(t) = t\left[\mathcal{U}(t) - \mathcal{U}(t - 1)\right] + \left[\mathcal{U}(t - 1) - \mathcal{U}(t - 2)\right]$

20°) $f(x) = (\cos x - \sin x) \; e^x \; \mathcal{U}(x)$

21°) $f(t) = (e^{4t} \sin 3t) \; \mathcal{U}(t)$

22°) $f(t) = (e^{-2t} \cos t) \; \mathcal{U}(t - \frac{\pi}{2})$

23°) $f(t) = \mathcal{U}(t) \; t^n \; e^{\alpha t}$

24°) $f(t) = (t^3 + 1) \; e^{-2t} \; \mathcal{U}(t)$

25°) $f(t) = (e^{-5t} \cos 2t) \; \mathcal{U}(t)$

26°) $f(x) = (x \sin x) \; \mathcal{U}(x)$

27°) $f(x) = (3 \cos 2x + x^2 \; e^{-x}) \; \mathcal{U}(x)$

28°) $f(x) = (x^2 + 2x - 3) \; e^{-2x} \; \mathcal{U}(x)$

29°) $f(x) = (x \; e^x) \; \mathcal{U}(x - 1)$

30°) $f(x) = (x \; \mathrm{sh} \; 3x) \; \mathcal{U}(x)$

31°) $f(t) = t \cos 3t \; \mathcal{U}(t - \frac{\pi}{2})$

32°) $f(t) = (2t \sin 4t) \; \mathcal{U}(t)$

33°) $f(t) = (2t \; e^t \sin 4t) \; \mathcal{U}(t)$

$34°)\ f(x) = x\, e^{x} \cos x\, \mathcal{U}(x)$

$35°)\ f(t) = e^{-2(t - \frac{\pi}{3})} \sin 3(t - \frac{\pi}{3})\, \mathcal{U}(t - \frac{\pi}{3})$

$36°)\ f(t) = e^{-2t} \sin 3t\, \mathcal{U}(t - \frac{\pi}{3})$

$37°)\ f(x) = \left[(x + 1)\, e^{4x} \sin 3x\right] \mathcal{U}(x)$

$38°)\ f(x) = (2 \cos x + \sin 2x)\, \mathcal{U}(x - \frac{\pi}{6})$

$39°)\ f(x) = \left[(2x + 3)^2 + \cos 4x - \sin x\right] \mathcal{U}(x)$

$f(x) = \left[(2x + 3)^2 + \cos 4x - \sin x\right] e^{-x}\, \mathcal{U}(x)$

$f(x) = \left[4(2x + 3) - 4 \sin 4x - \cos x\right] \mathcal{U}(x)$

$f(t) = \int_0^t \left[(2x + 3)^2 + \cos 4x - \sin x\right] \mathcal{U}(x)\, dx$

$f(x) = \left[4(2x + 3) - 4 \sin 4x - \cos x\right] \mathcal{U}(x - \frac{\pi}{4})$

$40°)\ f(t) = \int_0^t (2x + 1) \sin 3x\, \mathcal{U}(x)\, dx$

$41°)\ f(t) = \int_0^t e^{3x} \sin x\, \mathcal{U}(x)\, dx$

$42°)\ f(t) = \int_0^t x\, e^{x}\, \mathcal{U}(x)\, dx$

$43°)\ f(t) = \int_0^t (x^2 + 2x - 3)\, e^{-2x}\, \mathcal{U}(x)\, dx$

44°) $f(t) = g(t)\,\mathcal{U}(t)$ avec g périodique de période 1 définie sur $[0,1[$ par $g(t) = t^2$

45°) $f(t) = g(t)\,\mathcal{U}(t)$ avec g périodique, de période $\frac{2\pi}{\omega}$ définie sur $[0,T[$ par $g(t) = \sin \omega t$ si $t \in [0,\frac{T}{2}[$

et $g(t) = 1$ si $t \in [\frac{T}{2},T[$

46°) $f(t) = g(t)\,\mathcal{U}(t)$ avec g périodique, de période T définie sur définie sur $[0,T[$ par $g(t) = t$ si $t \in [0,\frac{T}{2}[$

et $g(t) = -t + T$ si $t \in [\frac{T}{2},T[$

47°) $f(t) = |\cos \omega t|\,\mathcal{U}(t)$

48°) $f(t) = g(t)\,\mathcal{U}(t)$ avec g périodique, de période 2 définie sur $[0,2[$ par $g(t) = t$ si $t \in [0,1[$

et $g(t) = 1$ si $t \in [1,2[$

49°) $f(t) = g(t)\,\mathcal{U}(t)$ avec g périodique, de période $\frac{\pi}{\omega}$ définie sur $[0,\frac{\pi}{\omega}[$ par $g(t) = \sin \omega t$ si $t \in [0,\frac{\pi}{2\omega}[$

et $g(t) = 0$ si $t \in [\frac{\pi}{2\omega}, \frac{\pi}{\omega}[$

50°) $f(t) = g(t)\,\mathcal{U}(t)$ avec g périodique, de période $\frac{\pi}{\omega}$ définie sur $[0,\frac{\pi}{\omega}[$ par $g(t) = \cos \omega t$

51°) $f(t) = \mathcal{U}(t)\,g(t)$, g périodique de période 3, telle que :

$\forall\, t \in [0,3[\quad g(t) = f_0(t)$ avec

$$f_0(t) = (t+1)\Big[\mathcal{U}(t) - \mathcal{U}(t-1)\Big] + 2\,\Big[\mathcal{U}(t-1) - \mathcal{U}(t-2)\Big]$$

Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(t) = \left[\frac{t^2}{2} + t + \frac{1}{2}\right]\left[\mathcal{U}(t) - \mathcal{U}(t-1)\right] + 2t\left[\mathcal{U}(t-1) - \mathcal{U}(t-2)\right] + 4\,\mathcal{U}(t-2)$$

On vérifiera que h est continue sur $\mathbb{R}$ et on comparera la <<dérivée>> de h à f_0. Que peut-on dire de h ?

Dans les exercices qui suivent, on pourra utiliser les <<dérivées>> successives.

52°) $f(t) = t\left[\mathcal{U}(t) - \mathcal{U}(t-1)\right] + \frac{1}{2}\,t\left[\mathcal{U}(t-1) - \mathcal{U}(t-2)\right]$

53°) $f(x) = (1+x)\left[\mathcal{U}(x) - \mathcal{U}(x-2)\right] + (x^2-2)\,\mathcal{U}(x-2)$

54°) $f(t) = t\left[\mathcal{U}(t)-\mathcal{U}(t-1)\right]+t^2\left[\mathcal{U}(t-1)-\mathcal{U}(t-2)\right]+\frac{1}{2}t^3\mathcal{U}(t-2)$

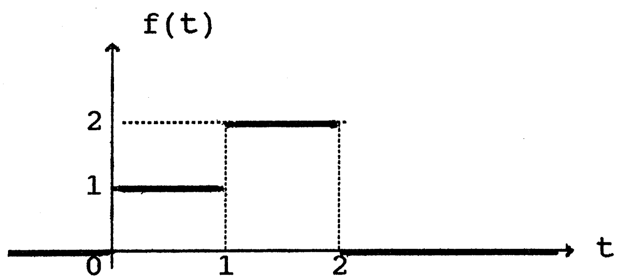
55°) $f(x) = (-x^2+2x)\left[\mathcal{U}(x) - \mathcal{U}(x-2)\right]$

56°) $f(x) = x^2\left[\mathcal{U}(x)-\mathcal{U}(x-1)\right] - (x^2-4x+2)\left[\mathcal{U}(x-1)-\mathcal{U}(x-3)\right] +$

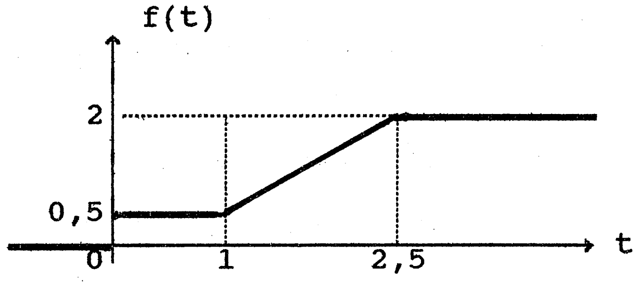
$$(x-4)^2\left[\mathcal{U}(x-3)-\mathcal{U}(x-4)\right]$$

57°) les fonctions sont caractérisées par leur représentation graphique :

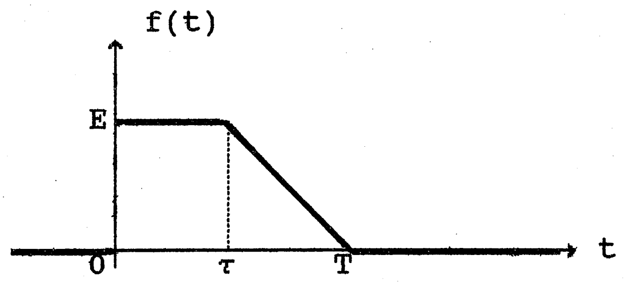
a)



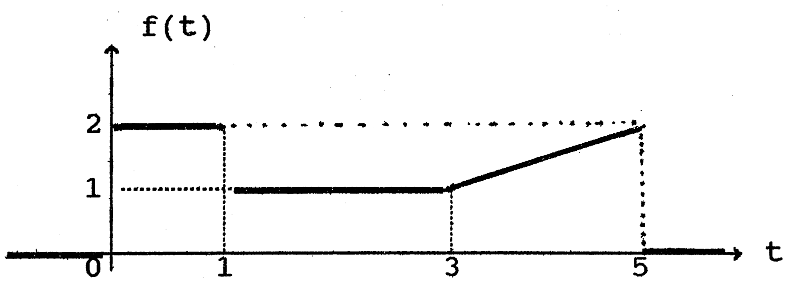
b)



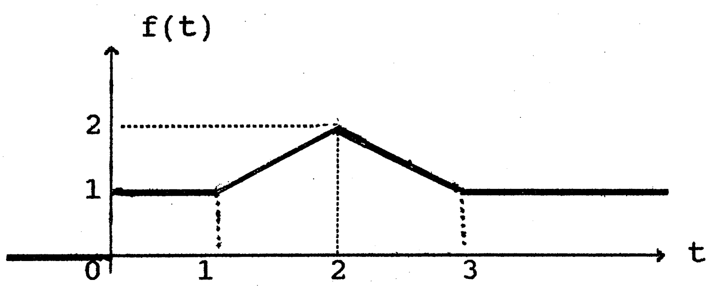
c)



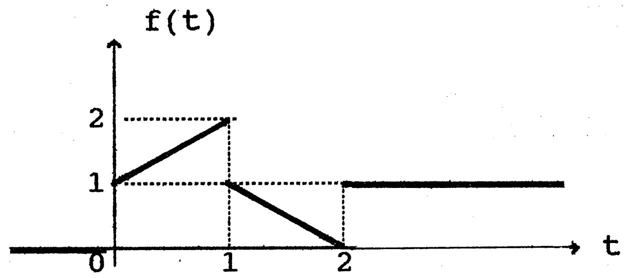
d)



e)



f)



B- *<u>Trouver l'original des fonctions F définies par</u>* :

1°) $F(p) = \dfrac{2}{p^3} + \dfrac{5}{p-2}$

2°) $F(p) = \dfrac{1}{3\,p^2 - 48}$

3°) $F(p) = \dfrac{1}{1 + 4\,p^2}$

4°) $F(p) = \dfrac{2\,p + 3}{1 + 4\,p^2}$

5°) $F(p) = \dfrac{e^{-3p}}{p^2}$

6°) $F(p) = \dfrac{2\,p}{4\,p^2 + 9}$

7°) $F(p) = \dfrac{5\,p}{9\,p^2 + 4}$

8°) $F(p) = \dfrac{e^{-p\pi/3}}{p^2 + 1}$

9°) $F(p) = \dfrac{1}{(2\,p - 3)^3}$

10°) $F(p) = \dfrac{1}{(p - 1)^5}$

11°) $F(p) = \dfrac{e^{-p}}{p + 1}$

12°) $F(p) = \dfrac{e^{-p\pi}}{4\,p^2 + 1}$

13°) $F(p) = \dfrac{p\,e^{-3p}}{p^2 + 9}$

14°) $F(p) = \dfrac{1}{p^2 + 2p + 5}$

15°) $F(p) = \dfrac{p}{p^2 + 2p + 5}$

16°) $F(p) = \dfrac{p}{p^2 - 9}$

17°) $F(p) = \dfrac{e^{-p}}{2p - 1}$

18°) $F(p) = \dfrac{e^{-3p}}{p + 2}$

19°) $F(p) = \dfrac{(1 - e^{-p\pi})^2}{p^2}$

20°) $F(p) = \dfrac{1}{4p^2 - 8p + 5}$

21°) $F(p) = \dfrac{1}{p^2 + 4p - 5}$

22°) $F(p) = \dfrac{2p + 3}{p^2 - 4}$

23°) $F(p) = \dfrac{1}{p^2 + 5p + 6}$

24°) $F(p) = \dfrac{p + 1}{p^2 + 5p + 6}$

25°) $F(p) = \dfrac{1}{p^2 + 2p + 10}$

26°) $F(p) = \dfrac{3p - 1}{p^2 + 2p + 10}$

27°) $F(p) = \dfrac{e^{-p} - e^{-2p}}{p^2 + 2p + 10}$

28°) $F(p) = \dfrac{2p + 1}{p^2 - 3p + 2}$

29°) $F(p) = \dfrac{2p + 3}{p^2 - 4p + 8}$

30°) $F(p) = \dfrac{2p + 1}{p^2 + 4p + 8}$

31°) $F(p) = \dfrac{3p + 2}{p^2 + 6p + 18}$

32°) $F(p) = \dfrac{2p + 1}{p^2 - 4p + 20}$

33°) $F(p) = \dfrac{p}{p^2 + p + 1}$

34°) $F(p) = \dfrac{p}{3p^2 - 4p + 1}$

35°) $F(p) = \dfrac{p + 1}{p^2 + 4p + 8}\, e^{-2p}$

36°) $F(p) = \dfrac{1}{p\,(1 + 4p^2)}$

37°) $F(p) = \dfrac{1}{p\,(p^2 - 4)}$

38°) $F(p) = \dfrac{4}{p\,(p^2 + 4)}$

39°) $F(p) = \dfrac{p + 1}{p\,(p^2 + 1)}$

40°) $F(p) = \dfrac{3\,e^{-p}}{p\,(2p + 3)}$

41°) $F(p) = \dfrac{2p + 1}{(p - 3)\,(p^2 + 4)}$

42°) $F(p) = \dfrac{5}{p\,(p^2 + 2p + 5)}$

43°) $F(p) = \dfrac{p}{(p+1)(4p^2+4p+2)}$

44°) $F(p) = \dfrac{p}{p^3 + 1}$

45°) $F(p) = \dfrac{1}{(p-1)\ (p^2+4p+5)}$

46°) $F(p) = \dfrac{p}{(p - 1)^2(p + 2)}$

47°) $F(p) = \dfrac{p + 1}{p^2\ (p^2 + 4)}$

48°) $F(p) = \dfrac{p + 1}{p^2\ (p^2 + 4p + 5)}$

49°) $F(p) = \dfrac{1}{p^2\ (p^2 + 2p + 10)}$

50°) $F(p) = \dfrac{1 - e^{-p}}{p^2} - \dfrac{1}{p}\, e^{-2p}$

51°) $F(p) = \dfrac{p + 1}{(p + 2)^2\ (p - 3)}$

52°) $F(p) = \dfrac{1}{p + 1}\ \dfrac{e^{-p} - e^{-2p}}{p}$

53°) $F(p) = \dfrac{1}{p+1}\left[\dfrac{e^{-p} - e^{-2p}}{p} + e\right]$

54°) $F(p) = \dfrac{1 - e^{-p}}{(p^2 + 5p + 6)\ p}$

55°) $F(p) = \dfrac{1 - e^{-p}}{p^2} - \dfrac{e^{-p}(1 + e^{-p})}{p}$

56°) $F(p) = \dfrac{p + 2}{p^2 + 1}\ \dfrac{1 - e^{-p\pi}}{p^2}$

57°) $F(p) = \dfrac{p}{(1 + 4p^2)^2}$

58°) $F(p) = \dfrac{2p}{(p^2 + 1)^2}$

59°) $F(p) = \dfrac{p}{(p^2 - 16)^2}$

60°) $F(p) = \dfrac{1}{(2p + 3)^2}$

61°) $F(p) = \dfrac{1}{(1 + 4p^2)^2}$

62°) $F(p) = \dfrac{p + 2}{(p^2 + 4)^2}$

63°) Soit $F : p \longrightarrow \dfrac{2p^2 + 3}{3p^3 + 5p^2 + 8p}$ la transformée de Laplace d'une fonction f, sans calculer f préciser $f(0^+)$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t)$

C- *Exercices divers* :

En utilisant la transformation de Laplace

1°) calculer les intégrales suivantes :

α) $$I_1 = \int_0^{+\infty} e^{-3t} \cos t \, dt$$

β) $$I_2 = \int_0^{+\infty} t^3 e^{-t} \sin t \, dt$$

γ) $$I_3 = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} \sin t}{t} \, dt$$

δ) $$I_4 = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} \, dx$$

ε) $$I_5 = \int_0^{\pi} e^{-t} \, t \sin t \, dt$$

ζ) $$I_6 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-3t} \cos t \, dt$$

η) $$I_7 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \, e^{-3t} \cos t \, dt$$

2°) Trouver les fonctions s, nulles sur $]-\infty,0[$, vérifiant l'équation $a\ s' + b\ s = \alpha\ e' + \beta\ e$ $(a \in \mathbb{R}^*,\ b \in \mathbb{R},\ \alpha \in \mathbb{R},\ \beta \in \mathbb{R})$ sur chacun des intervalles ouverts contenus dans $[0,+\infty[$ où s et la fonction du second membre sont continues, sachant que :

α) $a = 1,\ b = 2,\ \alpha = 0,\ \beta = 1$

$e(t) = \mathcal{U}(t) \cos t + \mathcal{U}(t-1)$

s est continue sur $[0,+\infty[$ et $s(0^+) = \frac{1}{2}$

β) $a = 2,\ b = -1,\ \alpha = 1,\ \beta = 1$

$e(t) = t\ \mathcal{U}(t)$

e' est la << dérivée >> de e

s est continue sur $[0,+\infty[$ et $s(0^+) = 0$

γ) $a = 1,\ b = 1,\ \alpha = 1,\ \beta = 1$

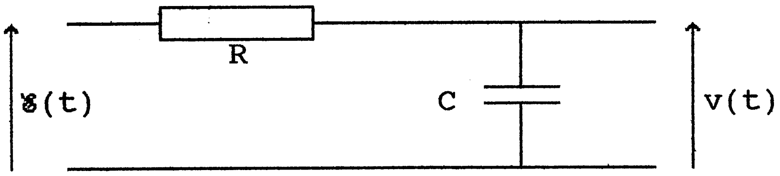
$e(t) = t \left[\mathcal{U}(t) - \mathcal{U}(t-1)\right]$

e' est la << dérivée >> de e

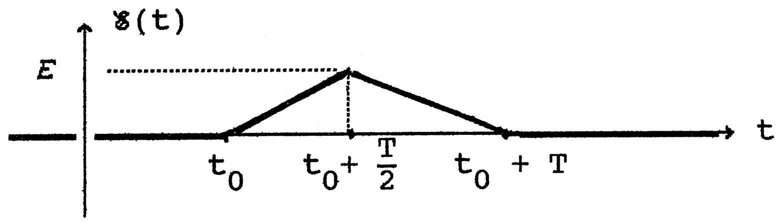
s est continue sur $[0,+\infty[$ sauf en 1 où elle présente un saut $\sigma_1 = -\frac{1}{2}$ et $s(0^+) = 0$

3°) Exercice d'application à la Physique

Soit le circuit RC :



Le signal d'entrée dans ce circuit est défini par sa représentation graphique ci-dessous :



α) Exprimer $\mathscr{E}(t)$ à l'aide de E, t_0, T, $\mathcal{U}(t - t_0)$, $\mathcal{U}(t - t_0 - \frac{T}{2})$ $\mathcal{U}(t - t_0 - T)$ et donnez la transformée de Laplace de $\mathscr{E}$.

β) Un raisonnement physique permet de dire que le signal de sortie s est continu sur $\mathbb{R}$, nul sur $]-\infty,0]$ et qu'il vérifie sur chacun des intervalles $]0\,,\,t_0[$, $]t_0\,,\,t_0+\frac{T}{2}[$, $]t_0+\frac{T}{2}\,,\,t_0+T[$, $]t_0+T, +\infty[$ l'équation différentielle $RC\,\frac{ds}{dt} + s = \mathscr{E}$

En appliquant aux deux membres de cette équation la Transformation de Laplace, en déduire le signal de sortie s.

γ) Donner l'allure des courbes représentant s et $\frac{ds}{dt}$ dans le cas où $R = 1000\ \Omega$, $C = 10^{-7}$ F, $T = 4\ 10^{-4}$s, $t_0 = 0$ et $E = 5$ V

(On exprimera au préalable s(t) et $\frac{ds}{dt}(t)$ sur chacun des intervalles précisés en b))

4°) Trouver les fonctions s, nulles sur $]-\infty,0[$, vérifiant l'équation $a\,s'' + b\,s' + c\,s = \alpha\,\mathscr{E}' + \beta\,\mathscr{E}$ ($a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$) sur chacun des intervalles ouverts contenus dans $[0,+\infty[$ où s, s' et la fonction du second membre sont continues, sachant que :

α) $a = 1$, $b = -2$, $c = 2$, $\alpha = 0$, $\beta = 1$

$\mathscr{E}(t) = (1 - t)\,\mathcal{U}(t) + 2\,(t - 1)\,\mathcal{U}(t - 1)$

s et s' sont continues sur $[0,+\infty[$

$s(0^+) = 0$ et $s'(0^+) = \frac{1}{2}$

β) $a = 1$, $b = -2$, $c = 1$, $\alpha = 0$, $\beta = 1$

$\mathscr{E}(t) = t\,\left[\mathcal{U}(t) - \mathcal{U}(t - 1)\right]$

s est continue sur $[0,+\infty[$

s' est continue sur $[0,+\infty[$ sauf en 1 où elle présente un saut $\sigma_1 = -\frac{1}{2}$

$s(0^+) = 0$ et $s'(0^+) = \frac{1}{2}$

γ) $a = 1,\ b = 0,\ c = -1,\ \alpha = 1,\ \beta = 1$

$\mathscr{E}(t) = t\left[\mathcal{U}(t) - \mathcal{U}(t-1)\right]$

$\mathscr{E}'$ est la << dérivée >> de $\mathscr{E}$

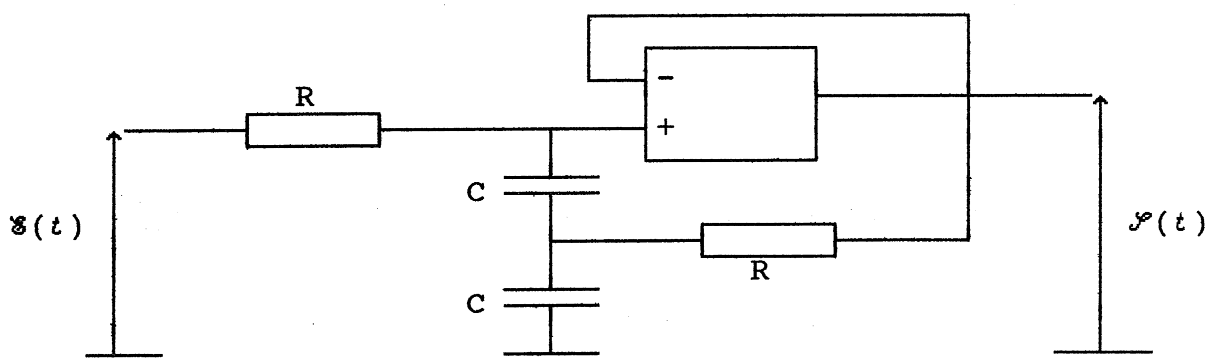
s est continue sur $[0,+\infty[$

s' est continue sur $[0,+\infty[$ sauf en 1 où elle présente un saut $\sigma_1 = -2$

$s(0^+) = 0$ et $s'(0^+) = 2$

5°) Exercice d'application à la Physique

Soit le système physique constitué par un filtre correcteur du deuxième ordre :



Le signal d'entrée $\mathscr{E}$ est défini sur $\mathbb{R}$ par $\mathscr{E}(t) = \mathcal{U}(t) - \mathcal{U}(t - t_0)$

Un raisonnement physique conduit à préciser que :

- le signal de sortie s est nul sur $]-\infty,0]$
- s est continûment dérivable sur $]0,+\infty[$ sauf en t_0 où la <<dérivée>> $\frac{ds}{dt}$ présente un saut égal à $- 2\, m\, \omega_0$
- $\frac{ds}{dt}(0^+) = \frac{2\, E}{R\, C} = 2\, m\, \omega_0$
- s vérifie sur les intervalles $]0,t_0[$ et $]t_0,+\infty[$ l'équation différentielle

$$\frac{1}{\omega_0^{\,2}} \frac{d^2s}{dt^2} + \frac{2\, m}{\omega_0} \frac{ds}{dt} + s = \frac{2\, m}{\omega_0} \frac{d\mathscr{E}}{dt} + \mathscr{E} \qquad \text{avec } \frac{d\mathscr{E}}{dt} \text{ <<dérivée>> de } \mathscr{E}$$

En appliquant aux deux membres de cette équation, la transformation de Laplace, en déduire le signal de sortie s.

6°) Résoudre les équations différentielles suivantes sur $\mathbb{R}^+$:

α) $t\, y'' + (t - 1)\, y' - y = 0$

avec y continûment dérivable sur $\mathbb{R}^+$, $y(0) = 5$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} y(t) = 0$

β) $(t - 1)\, y'' + (5 - 4t)\, y' - 4\, y = 0$

avec y continûment dérivable sur $\mathbb{R}^+$, $y(0) = 3$ et $y'(0) = 12$

7°) Résoudre les systèmes différentiels suivants sur $\mathbb{R}^+$:

α) $\begin{cases} x' - x - 3\, y = t\, \mathcal{U}(t) \\ y' - x + y = 0 \end{cases}$ avec $y(0) = x(0) = 0$

$$\beta)\ \begin{cases} y' - z' = t\ \mathcal{U}(t) \\ y'' - z = e^{-t}\ \mathcal{U}(t) \end{cases} \qquad \text{avec} \qquad \begin{cases} y(0) = 3 \\ z(0) = 0 \\ y'(0) = -2 \end{cases}$$

8°) Equations aux dérivées partielles :

α) **Exemple :**

Résoudre l'équation $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$

sachant que : $0<x<1$, $t>0$, $u(0,t) = u(1,t) = 0$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 \text{ et } u(x,0) = \frac{1}{8}\sin \pi x$$

Soit $u(x,t) \xrightarrow{\mathcal{L}} U(x,p)$

on admet que $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x,p)$

et $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) \xrightarrow{\mathcal{L}} p\ U(x,p) - u(x,0)$

et $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) \xrightarrow{\mathcal{L}} p^2\ U(x,p) - \dfrac{p}{8}\sin \pi x - \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0)$

$$= p^2\ U(x,p) - \frac{p}{8}\sin \pi x$$

donc l'équation différentielle devient :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x,p) = p^2\ U(x,p) - \frac{p}{8}\sin \pi x$$

Posons pour tout p donné $Y(x) = U(x,p)$

On résout l'équation différentielle où la variable est x :

$$Y'' - p^2 Y = -\frac{p}{8} \sin \pi x$$

L'équation caractéristique est $r^2 - p^2 = 0$ qui admet comme racines $r = \pm p$ donc la solution générale de l'équation homogène est $Y = \lambda e^{px} + \mu e^{-px}$.

Une solution particulière de l'équation complète peut être obtenue sous la forme $Y_1 = a \sin \pi x$ $\quad Y''_1 = -a \pi^2 \sin \pi x$

d'où : $a(-\pi^2 - p^2) = -\frac{p}{8}$ $\quad$ soit $\quad a = \dfrac{p}{8(p^2 + \pi^2)}$

donc $Y = \lambda e^{px} + \mu e^{-px} + \frac{1}{8}\dfrac{p}{\pi^2 + p^2} \sin \pi x = U(x,p)$

puisque $\forall t \quad u(0,t) = u(1,t) = 0$ alors $U(0,p) = U(1,p) = 0$

$$\text{soit} \begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \lambda e^{p} + \mu e^{-p} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda = \mu = 0$$

donc $U(x,p) = \frac{1}{8}\dfrac{p}{p^2 + \pi^2} \sin \pi x$ $\quad$ et $\quad u(x,t) = \frac{1}{8} \cos \pi t \sin \pi x$

β) **Exercice :**

Résoudre l'équation $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

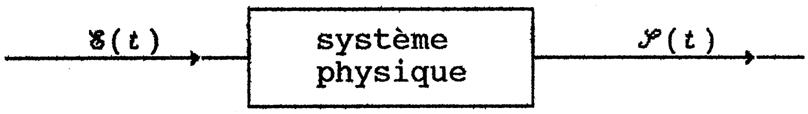
sachant que : $0 < x < 1$, $t > 0$, $u(0,t) = u(1,t) = 0$

et $u(x,0) = 5 \sin 2\pi x$

C - FONCTION DE TRANSFERT ISOMORPHE

I- UNE SITUATION RENCONTREE EN PHYSIQUE : SYSTEME LINEAIRE .

1°) Fonction de transfert d'un système linéaire



à ce système on associe une <<équation différentielle>> à coefficients constants du type :

$$a_0\mathcal{S}(t) + a_1\mathcal{S}'(t) +..+ a_n\mathcal{S}^{(n)}(t) = b_0\mathcal{E}(t) + b_1\mathcal{E}'(t) +..+ b_m\mathcal{E}^{(m)}(t)$$

(Nous avons donné des exemples dans le chapitre Equations Différentielles).

Ce système peut être caractérisé par sa fonction de transfert H

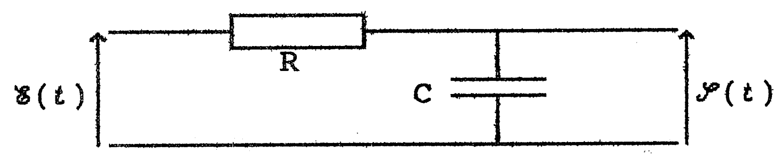
définie par : $H(p) = \dfrac{b_0 + b_1\, p + b_2\, p^2 + \ldots + b_m\, p^m}{a_0 + a_1\, p + a_2\, p^2 + \ldots + a_n\, p^n}$ $(m \leq n)$

Soit $S = \mathcal{L}(\mathcal{S})$ et $E = \mathcal{L}(\mathcal{E})$ on démontre et on admettra que :

$$\underline{S(p) = H(p) \times E(p)}$$

2°) **Exemples** :

a) *Filtre passe bas du 1^{er} ordre* :

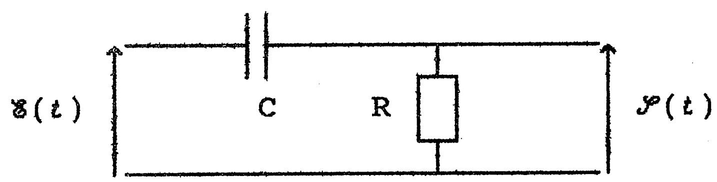


Posons $\tau = R\,C$

$\mathcal{S}(t) + \tau\, \mathcal{S}'(t) = \mathcal{E}(t)$

$$H(p) = \frac{1}{1 + \tau\, p}$$

b) *Filtre passe haut du 1^{er} ordre* :

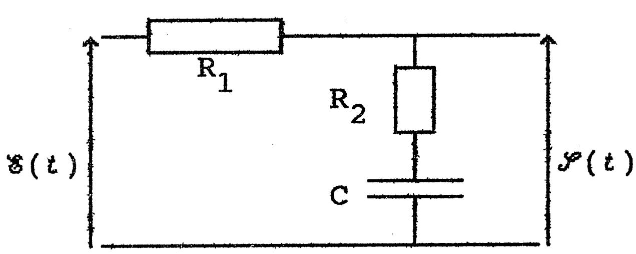


posons $\tau = RC$

$\mathcal{S}(t) + \tau\, \mathcal{S}'(t) = \tau\, \mathcal{E}'(t)$

$$H(p) = \frac{\tau\, p}{1 + \tau\, p}$$

c) *Filtre correcteur du 1^{er} ordre* :

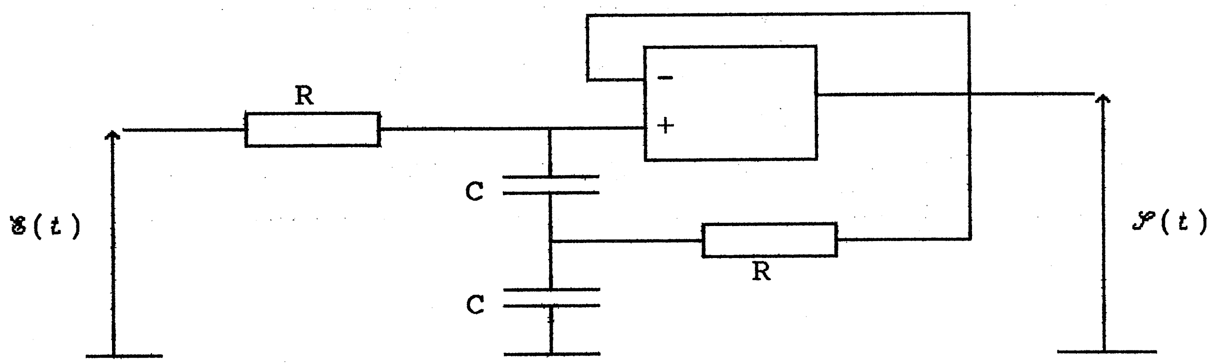


posons $\tau_1 = R_1C$ et $\tau_2 = (R_1+R_2)C$

$\mathcal{S}(t) + \tau_2\mathcal{S}'(t) = \mathcal{E}(t) + \tau_1\mathcal{E}'(t)$

$$H(p) = \frac{1 + \tau_1 p}{1 + \tau_2 p}$$

d) *Filtre correcteur du 2ème ordre* :



$$\mathscr{S}(t) + \frac{2\,m}{\omega_0}\,\mathscr{S}'(t) + \frac{1}{\omega_0^2}\,\mathscr{S}''(t) = \mathscr{E}(t) + \frac{2\,m}{\omega_0}\,\mathscr{E}'(t)$$

avec $\omega_0 = \dfrac{1}{R\,C}$; $\dfrac{2\,m}{\omega_0} = 2\,R\,C$ et $m = 1$

$$H(p) = \frac{1 + \dfrac{2\,m}{\omega_0}\,p}{1 + \dfrac{2\,m}{\omega_0}\,p + \dfrac{p^2}{\omega_0^2}}$$

Nota : Nous allons montrer que c'est la relation

$$S(p) = H(p) \times E(p)$$

et non l'équation différentielle qui traduit la totalité du système physique.

II- FONCTIONS ETUDIEES DANS CE CHAPITRE :

1°) **On se limitera à étudier deux cas usuels du programme de Physique des classes de T.S.**

$$H(p) = \frac{\alpha\,p + \beta}{a\,p + b} \quad \text{et} \quad H(p) = \frac{\alpha\,p + \beta}{a\,p^2 + b\,p + c} \quad , \ p \in \mathbb{R} \ , \ a \neq 0$$

2°) **$\mathcal{S}$ sera toujours de la forme :**

$$\boxed{\begin{array}{c} \mathcal{S}(t) = \mathcal{U}(t)\, \mathcal{S}_0(t) + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathcal{U}(t - a_i)\, \mathcal{S}_i(t - a_i) \quad , \quad a_i > 0 \\ \forall\, i \in [\, 0 \, , \, n \,] \, , \, \mathcal{S}_i \text{ est une somme d'exponentielles polynômes} \end{array}}$$

Exemple :

$$\mathcal{S}(t) = t\, e^{t} \Big[\mathcal{U}(t) - \mathcal{U}(t - 1)\Big] + e^{-t} \cos \frac{\pi\, t}{2} \Big[\mathcal{U}(t - 1) - \mathcal{U}(t - 2)\Big]$$

$$= t\, e^{t}\mathcal{U}(t) + \left[\frac{1}{e}\, e^{-(t-1)} \sin \frac{\pi(t-1)}{2} - e(t-1)e^{(t-1)} + e\, e^{(t-1)}\right]\mathcal{U}(t - 1)$$

$$+ \left[\frac{1}{e^2}\, e^{-(t-2)} \cos \frac{\pi(t-2)}{2}\right] \mathcal{U}(t - 2)$$

III- QUELQUES PROPRIETES UTILES :

1°) **Généralités** :

a) $$\frac{e^{-bp}}{(p - a)^n} \; \underset{\mathcal{L}}{\overset{\mathcal{L}^{-1}}{\rightleftarrows}} \; \frac{1}{(n - 1)!}\, (t - b)^{n-1}\, e^{a(t-b)}\mathcal{U}(t - b)$$

avec $a \in \mathbb{C}$ et $b \in \mathbb{R}^+$ (voir B II- 8°); B III 9°) et B VI 1°))

b) F rationnelle et $\lim\limits_{p \to +\infty} F(p) = 0 \iff F(p)$ se décompose en éléments simples de la forme $\dfrac{A}{(p - a)^n}$ avec $a \in \mathbb{C}$

c) il résulte de a) et b) que si $\mathscr{L}(\mathcal{U}\ f) = F$

$$\left.\begin{array}{l} F \text{ rationnelle} \\ \text{et } \lim\limits_{p \to +\infty} F(p) = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} f \text{ somme d'exponentielles polynômes et} \\ F(p)\ e^{-bp} \underset{\mathscr{L}}{\overset{\mathscr{L}^{-1}}{\rightleftarrows}} \mathcal{U}(t-b)\ f(t-b) \end{array}\right.$$

2°) **Etude de f définie sur $\mathbb{R}$ par :**

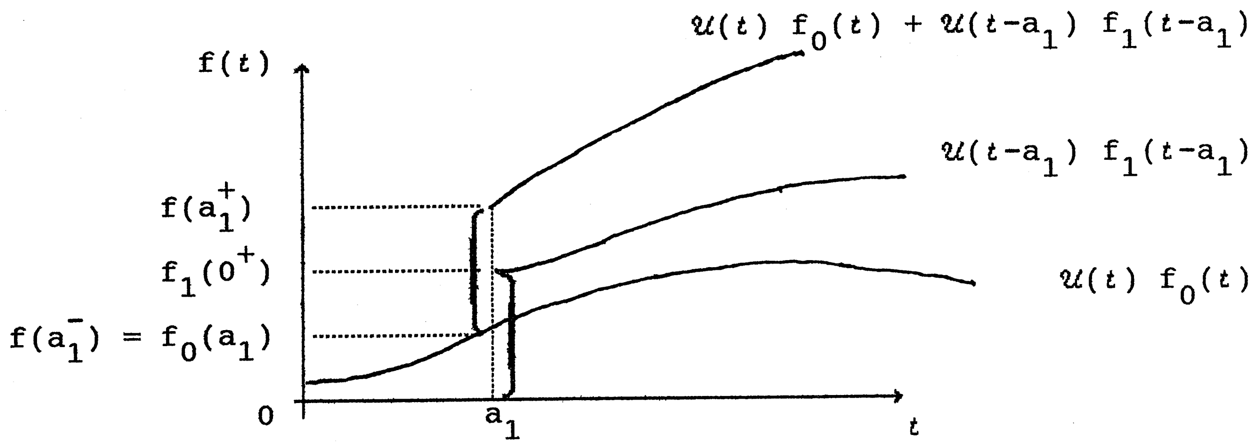
$$f(t) = \mathcal{U}(t)\ f_0(t) + \sum_{i=1}^{n} \mathcal{U}(t - a_i)\ f_i(t - a_i)$$

et $\forall\ i \in [\ 0\ ,\ n\ ]$, f_i est une somme d'exponentielles polynômes

a) *Continuité de f sur $[\ 0\ ,\ +\infty\ [$*

La fonction : $t \longmapsto \mathcal{U}(t - a_i)\ f_i(t - a_i)$ est nulle sur $]\ -\infty\ ,\ a_i[$ et continue sur $[\ a_i\ ,\ +\infty\ [$ donc f est continue sur chacun des intervalles $[\ 0\ ,\ a_1\ [$, $[\ a_1\ ,\ a_2\ [, \ldots, [\ a_{n-1}\ ,\ a_n\ [$, $[\ a_n, +\infty\ [$ et présente éventuellement une discontinuité de $1^{\text{ère}}$ espèce en les a_k avec un saut σ_{a_k}.

b) *Calcul du saut éventuel en a_k* :



$f(a_1^-) = f_0(a_1)$ et $f(a_1^+) = f_0(a_1) + f_1(0^+)$ d'où $\sigma_{a_1} = f_1(0^+)$

Plus généralement $f(a_k^-) = f_0(a_k) + f_1(a_k - a_1) + \ldots + f_{k-1}(a_k - a_{k-1})$

$$f(a_k^+) = f_0(a_k) + \ldots + f_{k-1}(a_k - a_{k-1}) + f_k(0^+)$$

d'où

$$\boxed{\sigma_{a_k} = f(a_k^+) - f(a_k^-) = f_k(0^+)}$$

c) *__Transformée de f__* :

Soit $\mathscr{L}(f) = F$ et $\forall\, i \in [0,n]$ $\mathscr{L}(\mathcal{U}\, f_i) = F_i$, d'après 1) c) :

$f(t) = \mathcal{U}(t) f_0(t) + \sum_{i=1}^{n} \mathcal{U}(t-a_i) f_i(t-a_i)$ et $\forall\, i \in [0,n]$, f_i somme d'exponentielles polynômes	$\Longleftrightarrow$	$F(p) = F_0(p) + \sum_{i=1}^{n} F_i(p)\, e^{-a_i p}$ et $\forall\, i \in [\,0\,,\,n\,]$, F_i est une fonction rationnelle telle que $\lim_{p \to +\infty} F_i(p) = 0$

Remarquons que :

■ $f = \mathscr{L}^{-1}(F)$ *ne peut présenter éventuellement des discontinuités de première espèce que si apparaissent dans* $F(p)$ *des termes* $F_i(p)\, e^{-a_i p}$ *et ces discontinuités ne peuvent exister qu'en les valeurs* a_i.

■ d'après le théorème de la valeur initiale :

$$\boxed{\sigma_{a_k} = f_k(0^+) = \lim_{p \to +\infty} p\, F_k(p)}$$

IV- ETUDE DU CAS OU $H(p) = \dfrac{\alpha p + \beta}{a p + b}$, $a > 0$, $p > -\dfrac{b}{a}$.

1°) **On rappelle que $\mathcal{E}$ vérifie les conditions énoncées au II 2°)**

On pose $\mathcal{E}(t) = \mathcal{U}(t)\, \mathcal{E}_0(t) + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathcal{U}(t - a_i)\, \mathcal{E}_i(t - a_i)$

On note λ_{a_i} le saut éventuel de $\mathcal{E}$ en a_i

2°) **$\mathcal{S}$ est l'original de S défini par : $S(p) = \dfrac{\alpha p + \beta}{a p + b} E(p)$**

E est définie sur I et S est définie sur $J = I \cap \left]-\dfrac{b}{a}, +\infty\right[$

a) *Etude de la continuité de $\mathcal{S}$* :

ici $E(p) = E_0(p) + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} E_i(p)\, e^{-a_i p}$ avec $\forall\, i \in [0,n]$, E_i fonction

rationnelle et $\displaystyle\lim_{p \to +\infty} E_i(p) = 0$ donc $S(p) = S_0(p) + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} S_i(p)\, e^{-a_i p}$

avec : $\forall\, i \in [\,0\,,\,n\,]$, $S_i(p) = \dfrac{\alpha p + \beta}{a p + b} E_i(p)$

$$\lim_{p \to +\infty} S_i(p) = \frac{\alpha}{a} \lim_{p \to +\infty} E_i(p) = 0$$ et S_i fonction rationnelle.

Il en résulte que $\mathcal{S}(t) = \mathcal{S}_0(t)\ \mathcal{U}(t) + \sum_{i=1}^{n} \mathcal{U}(t - a_i)\ \mathcal{S}_i(t - a_i)$

avec $\forall\ i \in [0,n]$ $\mathcal{S}_i$ somme de fonctions exponentielles polynômes

d'où

$\mathcal{S}$ est continue sur $[\ 0\ ,\ +\infty\ [$ sauf éventuellement en chacun des a_i où elle présente un saut σ_{a_i}

b) *Calcul du saut éventuel en* a_i :

$$\lim_{p \to +\infty} p\ E_i(p) = \gamma_i(0^+) = \lambda_{a_i}$$ d'où

$$\lim_{p \to +\infty} p\ S_i(p) = \lim_{p \to +\infty} \left[\frac{\alpha\ p + \beta}{a\ p + b}\ p\ E_i(p) \right] = \frac{\alpha}{a}\ \lambda_{a_i} = \mathcal{S}_i(0^+)$$

$$\boxed{\sigma_{a_i} = \frac{\alpha}{a}\ \lambda_{a_i}}$$

c) *Valeur initiale de* $\mathcal{S}$:

$$\mathcal{S}(0^+) = \lim_{p \to +\infty} p\ S(p) = \lim_{p \to +\infty} \frac{\alpha\ p + \beta}{a\ p + b}\ p\ E_0(p) = \frac{\alpha}{a}\ \gamma(0^+)$$

$$\boxed{\mathcal{S}(0^+) = \frac{\alpha}{a}\ \gamma(0^+)}$$

d) *Relation liant $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}'$, $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}'$* :

On a ici d'après a) b) c) :

$$\mathcal{L}(\mathcal{S}')(p) = p\ S(p) - \frac{\alpha}{a}\ \mathcal{E}(0^+) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha}{a}\ \lambda_{a_i}\ e^{-a_i p} \qquad \text{et}$$

$$\mathcal{L}(\mathcal{E}')(p) = p\ E(p) - \mathcal{E}(0^+) - \sum_{i=1}^{n} \lambda_{a_i}\ e^{-a_i p} \qquad \text{donc}$$

$$S(p) = \frac{\alpha\ p + \beta}{a\ p + b}\ E(p) \iff a\ p\ S(p) + b\ S(p) = \alpha\ p\ E(p) + \beta\ E(p) \qquad (1)$$

$$(1) \iff a \left[\mathcal{L}(\mathcal{S}')(p) + \frac{\alpha}{a}\ \mathcal{E}(0^+) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha}{a}\ \lambda_{a_i} e^{-a_i p} \right] + b\ \mathcal{L}(\mathcal{S})(p) =$$

$$\alpha \left[\mathcal{L}(\mathcal{E}')(p) + \mathcal{E}(0^+) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_{a_i}\ e^{-a_i p} \right] + \beta\ \mathcal{L}(\mathcal{E})(p)$$

$$\forall\ p \in J,\ S(p) = \frac{\alpha\ p + \beta}{a\ p + b}\ E(p) \iff a\ \mathcal{L}(\mathcal{S}') + b\ \mathcal{L}(\mathcal{S}) = \alpha\ \mathcal{L}(\mathcal{E}') + \beta\ \mathcal{L}(\mathcal{E})$$

$$\forall\ p \in J,\ S(p) = \frac{\alpha\ p + \beta}{a\ p + b}\ E(p) \iff \mathcal{L}(a\ \mathcal{S}' + b\ \mathcal{S}) = \mathcal{L}(\alpha\ \mathcal{E}' + \beta\ \mathcal{E})$$

or d'après III- 2°) c), $\mathcal{E}$, $\mathcal{S}'$ et $\mathcal{E}'$ sont continues sur $[0,+\infty[$ sauf éventuellement en 0 ou en chacun des a_i donc d'après B- I- 6°),

$$\mathcal{L}(a\mathcal{S}' + b\mathcal{S}) = \mathcal{L}(\alpha\mathcal{E}' + \beta\mathcal{E}) \iff \begin{cases} \forall\ t \in\ ]0,a_1[\ \cup\ ]a_1,a_2[\ \cup .. \cup\ ]a_n,+\infty[\\ a\ \mathcal{S}'(t) + b\ \mathcal{S}(t) = \alpha\ \mathcal{E}'(t) + \beta\ \mathcal{E}(t) \end{cases}$$

(les résultats établis en a), b), c) étant vérifiés)

Conclusion :

$\forall p \in J, S(p) = \dfrac{\alpha p + \beta}{ap + b} E(p) \Longleftrightarrow$	$\mathscr{S}$ continue sur $[\,0\,,+\infty\,[$ sauf éventuellement en chacun des a_i où elle présente un saut $\sigma_{a_i} = \frac{\alpha}{a}\lambda_{a_i}$ et $\mathscr{S}(0^+) = \frac{\alpha}{a}\mathscr{E}(0^+)$ et $\forall\ t \in\ ]0,a_1[\ \cup\ ]a_1,a_2[\ \cup \ldots \cup\ ]a_n,+\infty[$ $a\,\mathscr{S}'(t) + b\,\mathscr{S}(t) = \alpha\,\mathscr{E}'(t) + \beta\,\mathscr{E}(t)$

Remarquons que si $\alpha = 0$ $\mathscr{S}$ est toujours continue sur $[\,0\,,+\infty\,[$.

3°) **Exercices** :

a) $\mathscr{E}(t) = \mathscr{U}(t) - \mathscr{U}(t-1)$ et $S(p) = \dfrac{\alpha\,p + \beta}{a\,p + b}\,E(p)$

$\mathscr{S} = \mathscr{L}^{-1}(S)$ et $\mathscr{E} = \mathscr{L}^{-1}(E)$

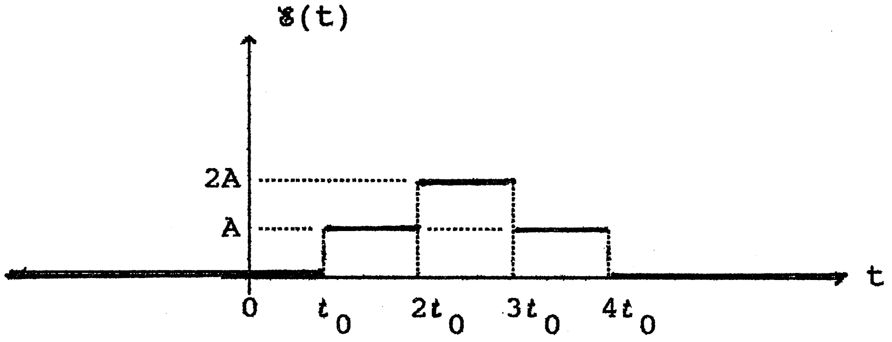
Pour chacun des 3 exemples du I- 2°) a) b) et c) :

α) Sans déterminer $\mathscr{S}$:

- Etudier la continuité de $\mathscr{S}$ sur $[\,0\,,+\infty\,[$
- Préciser éventuellement la valeur des sauts de $\mathscr{S}$
- Préciser $\mathscr{S}(0^+)$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} \mathscr{S}(t)$
- Déterminer la relation liant $\mathscr{S}$, $\mathscr{S}'$, $\mathscr{E}$, $\mathscr{E}'$

β) Trouver $\mathscr{S}$ et vérifier les résultats ci-dessus.

b) Mêmes questions que pour l'exercice a) si γ est la fonction représentée ci-dessous :



c) Mêmes questions pour :

$\gamma(t) = t\ \mathcal{U}(t) - (t - 1)\ \mathcal{U}(t - 1)$ et $S(p) = \dfrac{p + 2}{2\ p + 1}\ E(p)$

d) Mêmes questions pour :

$\gamma(t) = \mathcal{U}(t) + 2\ \mathcal{U}(t - 1)$ et $S(p) = \dfrac{p + 2}{2\ p + 1}\ E(p)$

e) Mêmes questions pour :

$\gamma(t) = \mathcal{U}(t) + 2\ \mathcal{U}(t - 1)$ et $S(p) = \dfrac{1}{2\ p + 1}\ E(p)$

f) Mêmes questions pour :

$\gamma(t) = \mathcal{U}(t - 1) - \mathcal{U}(t - 2)$ et $S(p) = \dfrac{p + 1}{2\ p + 1}\ E(p)$

V- ETUDE DU CAS OU $H(p) = \dfrac{\alpha\ p + \beta}{a\ p^2 + b\ p + c}$, $a > 0$ et $p > p_0$

Si $b^2 - 4\ a\ c \geq 0$

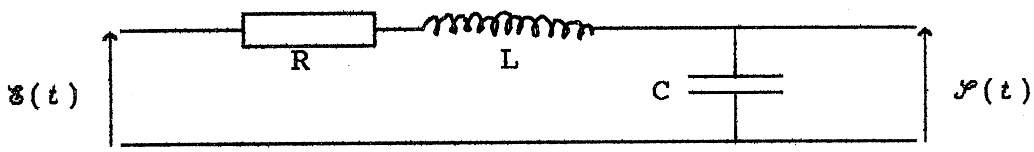
p_0 est la plus grande des deux racines réelles de $ap^2 + b\ p + c = 0$

Si $b^2 - 4ac < 0$.

p_0 est la partie réelle des racines complexes

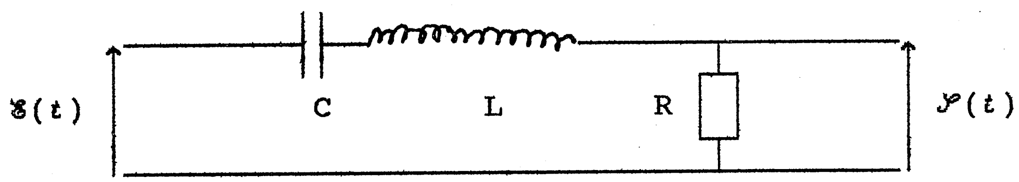
1°) **Exemples** :

a) *Filtre passe-bas* :



$$H(p) = \frac{1}{L\,C\,p^2 + R\,C\,p + 1} = \frac{1}{1 + 2\,\frac{m}{\omega_0}\,p + \frac{1}{\omega_0^2}\,p^2}$$

b) *Filtre passe-bande* :



$$H(p) = \frac{R\,C\,p}{L\,C\,p^2 + R\,C\,p + 1} = \frac{2\,\frac{m}{\omega_0}\,p}{1 + 2\,\frac{m}{\omega_0}\,p + \frac{1}{\omega_0^2}\,p^2}$$

c) *Voir* I- 2°) d)

2°) **Les conditions sont les mêmes qu'au IV- 1°)** ,

Ici $S(p) = \dfrac{\alpha\, p + \beta}{a\, p^2 + b\, p + c}\, E(p)$. On ne donnera pas le détail des démonstrations lorsqu'elles sont identiques à celles des paragraphes III et IV, E définie sur I et s définie sur $J = I \cap \,]p_0, +\infty[$.

a) *Etude de la continuité de $\mathscr{S}$.*

$$S_i(p) = \frac{\alpha\, p + \beta}{a\, p^2 + b\, p + c}\, E_i(p) \quad \text{d'où} \quad \lim_{p \to +\infty} S_i(p) = 0$$

Il en résulte que $\mathscr{S}$ est continue sur $[0,+\infty[$ sauf éventuellement en chacun des a_i où elle présente un saut σ_{a_i}.

Calcul du saut éventuel en a_i :

$$\sigma_{a_i} = \lim_{p \to +\infty} p\, S_i(p) = \lim_{p \to +\infty} \left[\frac{\alpha\, p + \beta}{a\, p^2 + b\, p + c}\, p\, E_i(p) \right] = 0$$

donc $\boxed{\mathscr{S} \text{ est continue sur } [\,0\,,\,+\infty\,[}$

b) *Valeur initiale de $\mathscr{S}$* :

$$s(0^+) = \lim_{p \to +\infty} p\, S(p) = \lim_{p \to +\infty} \left[\frac{\alpha\, p + \beta}{a\, p^2 + b\, p + c}\, p\, E_0(p) \right] = 0$$

$$\boxed{\mathscr{S}(0^+) = 0}$$

c) *Etude de la continuité de $\mathcal{S}'$* :

$\mathcal{S}$ est continue sur $[0,+\infty[$ et $\mathcal{S}(0^+) = 0$ donc

$$\mathcal{L}\left[\mathcal{S}'\right](p) = p\ S(p) = p\ S_0(p) + \sum_{i=1}^{n} p\ S_i(p)\ e^{-a_i p} = s_o(p) + \sum_{i=1}^{n} s_i(p)\ e^{-a_i p}$$

avec $s_i(p) = \dfrac{\alpha\ p + \beta}{a\ p^2 + b\ p + c}\ p\ E_i(p)$

$\lim\limits_{p \to +\infty} s_i(p) = 0$, il en résulte que :

$$\boxed{\mathcal{S}' \text{ est continue sur } [\ 0\ ,\ +\infty\ [\text{ sauf éventuellement en chacun des } a_i \text{ où elle présente un saut } \vartheta_{a_i}}$$

d) *Calcul du saut éventuel de $\mathcal{S}'$ en a_i* :

$$\lim_{p \to +\infty} p\ s_i(p) = \lim_{p \to +\infty} p^2\ S_i(p) = \frac{\alpha}{a} \lim_{p \to +\infty} p\ E_i(p) = \frac{\alpha}{a} \lambda_{a_i}$$

$$\boxed{\vartheta_{a_i} = \frac{\alpha}{a} \lambda_{a_i}}$$

e) *Valeur initiale de $\mathcal{S}'$* :

$$\lim_{p \to +\infty} p\ \mathcal{L}\left[\mathcal{S}'\right](p) = \lim_{p \to +\infty} p^2\ S(p) = \frac{\alpha}{a} \lim_{p \to +\infty} p\ E(p) = \frac{\alpha}{a} \gamma(0^+)$$

$$\boxed{\mathcal{S}'(0^+) = \frac{\alpha}{a} \gamma(0^+)}$$

f) *Relation liant $\mathscr{S}$, $\mathscr{S}'$, $\mathscr{S}''$, $\mathscr{E}$, $\mathscr{E}'$* :

On a ici d'après a) b) c) d) e) : $\mathscr{L}\left[\mathscr{S}'\right]_{(p)} = p\, S(p)$ et

$$\mathscr{L}\left[\mathscr{S}''\right]_{(p)} = p^2\, S(p) - \frac{\alpha}{a}\, \mathscr{E}(0^+) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha}{a}\, \lambda_{a_i}\, e^{-a_i p}$$

or $\mathscr{L}\left[\mathscr{E}'\right]_{(p)} = p\, E(p) - \mathscr{E}(0^+) - \sum_{i=1}^{n} \lambda_{a_i}\, e^{-a_i p}$

donc $\quad S(p) = \dfrac{\alpha\, p + \beta}{a\, p^2 + b\, p + c}\, E(p) \qquad (1)$

$(1) \Longleftrightarrow a\, p^2\, S(p) + b\, p\, S(p) + c\, S(p) = \alpha\, p\, E(p) + \beta\, E(p)$

d'où (1) est équivalente à :

$$a\left[\mathscr{L}\left[\mathscr{S}''\right]_{(p)} + \frac{\alpha}{a}\, \mathscr{E}(0^+) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha}{a}\, \lambda_{a_i}\, e^{-a_i p}\right] + b\, \mathscr{L}\left[\mathscr{S}'\right]_{(p)} + c\, \mathscr{L}\left[\mathscr{S}\right]_{(p)} =$$
$$\alpha\left[\mathscr{L}\left[\mathscr{E}'\right]_{(p)} + \mathscr{E}(0^+) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_{a_i}\, e^{-a_i p}\right] + \beta\, \mathscr{L}\left[\mathscr{E}\right]_{(p)}$$

$$S(p) = \frac{\alpha\, p + \beta}{a\, p + b}\, E(p) \Longleftrightarrow a\, \mathscr{L}\left[\mathscr{S}''\right] + b\, \mathscr{L}\left[\mathscr{S}'\right] + c\, \mathscr{L}\left[\mathscr{S}\right] = \alpha\, \mathscr{L}\left[\mathscr{E}'\right] + \beta\, \mathscr{L}\left[\mathscr{E}\right]$$
$$\Longleftrightarrow \mathscr{L}(a\, \mathscr{S}'' + b\, \mathscr{S}' + c\, \mathscr{S}) = \mathscr{L}(\alpha\, \mathscr{E}' + \beta\, \mathscr{E})$$

or d'après III- 2°) c), $\mathscr{E}$, $\mathscr{E}'$ et $\mathscr{S}''$ sont continues sur $[0,+\infty[$ sauf éventuellement en 0 ou en chacun des a_i donc d'après B- I- 6°),

$\mathscr{L}(a\, \mathscr{S}'' + b\, \mathscr{S}' + c\, \mathscr{S}) = \mathscr{L}(\alpha\, \mathscr{E}' + \beta\, \mathscr{E}) \Longleftrightarrow (2)$

$$(2) \Longleftrightarrow \begin{cases} \forall\, t \in\,]0,a_1[\ \cup\ ]a_1,a_2[\ \cup .. \cup\ ]a_n,+\infty[\\ a\, \mathscr{S}''(t) + b\, \mathscr{S}'(t) + c\, \mathscr{S}(t) = \alpha\, \mathscr{E}'(t) + \beta\, \mathscr{E}(t) \end{cases}$$

Conclusion :

$$\forall p \in J \qquad S(p) = \frac{\alpha p + \beta}{ap^2+bp+c} E(p) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mathscr{S} \text{ continue sur } [\ 0\ ,\ +\infty\ [\text{ et} \\ \mathscr{S}' \text{ continue sur } [\ 0\ ,\ +\infty\ [\text{ sauf, si} \\ \alpha \neq 0, \text{ en chaque } a_i \text{ où elle présente} \\ \text{un saut } \quad \sigma_{a_i} = \frac{\alpha}{a} \lambda_{a_i} \\ \text{et} \\ \mathscr{S}(0^+) = 0 \text{ et } \quad \mathscr{S}'(0^+) = \frac{\alpha}{a} \mathscr{E}(0^+) \\ \text{et} \\ \forall\ t \in\ ]0,a_1[\ \cup\ ]a_1,a_2[\ \cup \ldots \cup\ ]a_n,+\infty\ [\\ a\mathscr{S}''(t) + b\mathscr{S}'(t) + c\mathscr{S}(t) = \alpha\mathscr{E}'(t) + \beta\mathscr{E}(t) \end{array} \right.$$

Remarque : les raisonnements précédents s'appliquent sans changement au cas général :

$$H(p) = \frac{\alpha_n p^n + \ldots + \alpha_1 p + \alpha_0}{a_m p^m + \ldots + a_1 p + a_0} \qquad \text{avec } m \geq n$$

(voir Tome 2)

3°) **Exercices** :

a) *Application dans le cas où* $H(p) = \dfrac{\frac{2m}{\omega_0} p + 1}{\frac{1}{\omega_0^2} p^2 + \frac{2m}{\omega_0} p + 1}$

On donne $\frac{2m}{\omega_0} = 3$ et $\frac{1}{\omega_0^2} = 2$

$\mathscr{E}(t) = t \left[\mathcal{U}(t) - \mathcal{U}(t-1) \right]$ et $S(p) = H(p)\, E(p)$

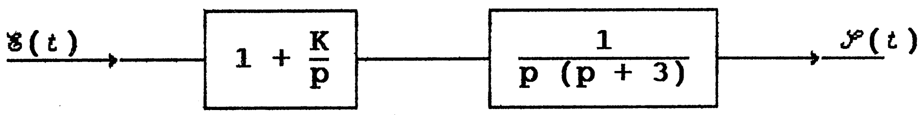
α) Sans calculer $\mathcal{S} = \mathcal{L}^{-1}\left[S\right]$,

- Etudier la continuité de $\mathcal{S}$ sur $[\ 0\ ,\ +\infty\ [$.
- Préciser la valeur initiale de $\mathcal{S}$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} \mathcal{S}(t)$.
- Etudier la continuité de $\mathcal{S}'$ et préciser la valeur des sauts éventuels.
- Préciser la valeur initiale de $\mathcal{S}'$.
- Donner une relation liant $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}'$, $\mathcal{S}''$, $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}'$.

β) Déterminer $\mathcal{S}$ et vérifier les résultats ci-dessus.

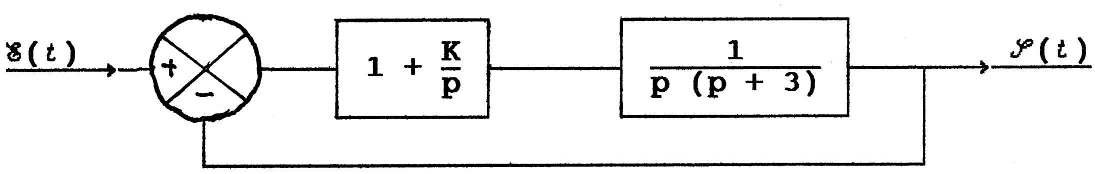
b) *(D'après Maths B.T.S. C.I.R.A. 1990 et Physique B.T.S. Electronique 1987).*

On associe à un système donné un régulateur à "action proportionnelle intégral" :



La fonction de transfert de l'ensemble "sytème régulateur" est la fonction H définie par $H(p) = \left[\ 1 + \frac{K}{p}\ \right]\ \left[\ \frac{1}{p\ (p + 3)}\ \right]$ $\quad K > 0$

On déduit du système ci-dessus le système en "boucle fermée" suivant :



Ce système admet la fonction de transfert G définie par :

$$G(p) = \frac{H(p)}{1 + H(p)} = \frac{p + K}{p^3 + 3p^2 + p + K}$$

On donne $\mathscr{E}(t) = \mathcal{U}(t) - \mathcal{U}(t-1)$

Sans calculer $\mathscr{S} = \mathscr{L}^{-1}\left[S\right]$,

- Etudier la continuité de $\mathscr{S}$ sur $[0,+\infty[$.
- Préciser la valeur initiale de $\mathscr{S}$
- Etudier la continuité de $\mathscr{S}'$ sur $[0,+\infty[$.
- Préciser la valeur initiale de $\mathscr{S}'$.
- Etudier la continuité de $\mathscr{S}''$ sur $[0,+\infty[$ et préciser les sauts éventuels .
- Préciser la valeur initiale de $\mathscr{S}''$.
- Donner la relation liant $\mathscr{S}$, $\mathscr{S}'$, $\mathscr{S}''$, $\mathscr{S}'''$, $\mathscr{E}$, $\mathscr{E}'$.

α) Si $S(p) = H(p)\,E(p)$
On pourra de plus déterminer $\mathscr{S}$ et vérifier les résultats obtenus.

β) Si $S(p) = G(p)\,E(p)$

On précisera aussi $\lim\limits_{t \to +\infty} \mathscr{S}(t)$.

c) <u>*Mêmes questions qu'au* a)</u>

avec $S(p) = \dfrac{p}{p^2 + 3p + 2}$ et $\mathscr{E}(t) = \mathcal{U}(t) + \mathcal{U}(t-1)$

d) <u>*Mêmes questions qu'au* a)</u>

avec $S(p) = \dfrac{2p + 1}{p^2 + 2p + 5}$ et $\mathscr{E}(t) = t\,\mathcal{U}(t)$

puis $\mathscr{E}(t) = \mathcal{U}(t) + 2\,\mathcal{U}(t-1)$

TITRE : Mathématiques du Signal (Tome 1 - deuxième édition)

AUTEURS : *Raymond BOUDIE, Serge DUPUY, Michel PUJOS, Joël RIVOAL .*

DATE : Février 1995

PUBLIC CONCERNE :

- **Etudiants des classes de Techniciens Supérieurs ou d'I.U.T.**
- **Professeurs de Mathématiques ou de Physique des Lycées et des Lycées professionnels .**

RESUME :

- *Equations différentielles linéaires du premier et du deuxième ordre . Exemples d'utilisation en Physique*
- *Transformation de Laplace . Notion de fonction de transfert . Exemples d'utilisation en Physique .*

MOTS CLES :

Mathématiques du Signal . Equations différentielles . Fonctions continues par morceaux . Primitives larges . Transformation de Laplace . Fonctions de transfert .

PUBLICATION:

I.R.E.M. D'AQUITAINE
40 Rue Lamartine
33400 Talence

I . S . B . N . : 2 85633