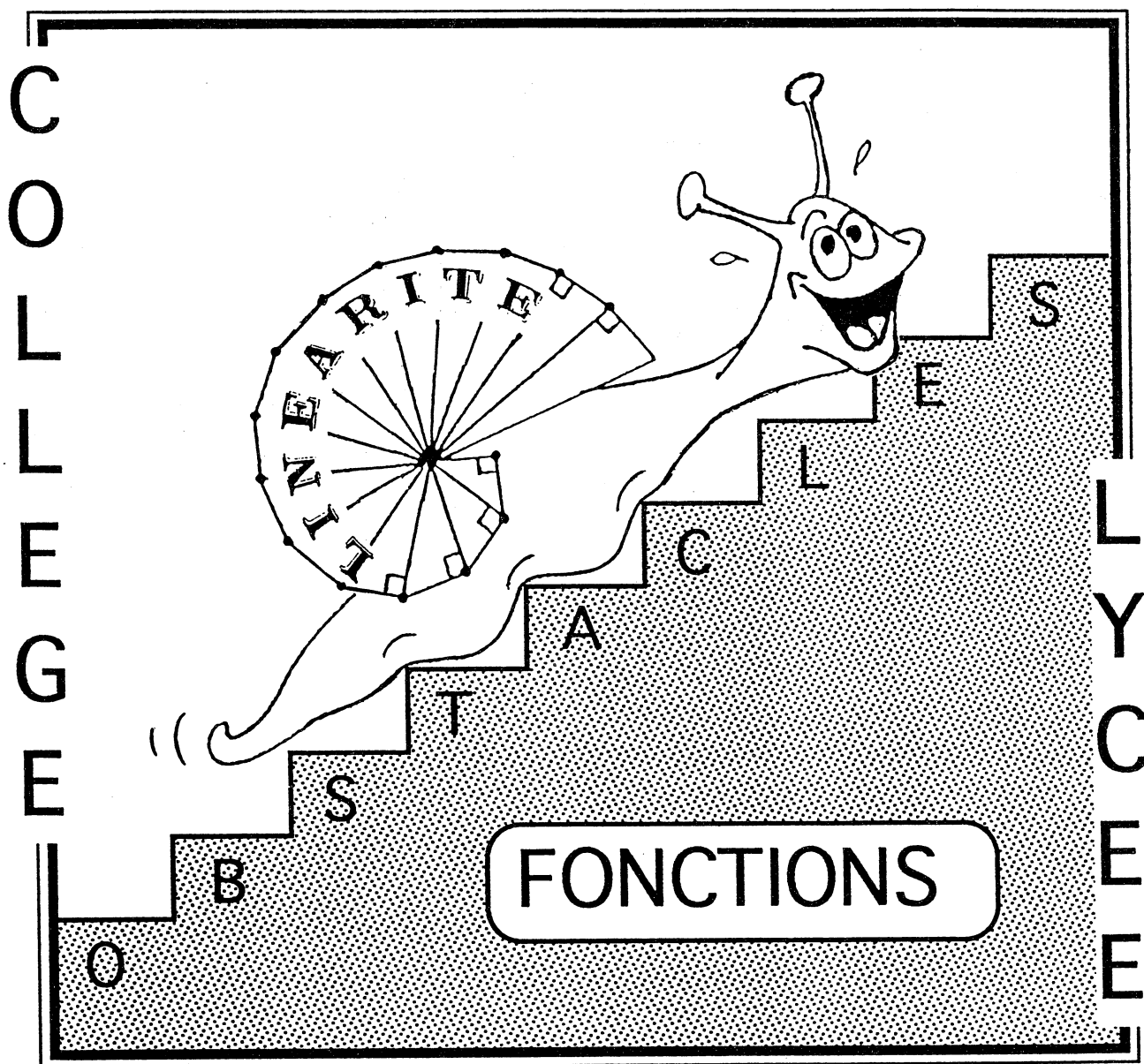


IREM de BORDEAUX

GRUPE HORIZONS MATHEMATIQUES

PAU



Février 1994

AVANT-PROPOS

Ce travail a été réalisé par un groupe IREM de professeurs de mathématiques; ce groupe s'est constitué lors de l'exposition Horizons Mathématiques à Pau en 1989; il a été accueilli par le GERMEA (Groupe d'Étude et de Recherche sur les Méthodes d'Éducation Active - 25 rue Montaigne, Pau) et a continué depuis à travailler sur la notion de fonction, du collège au lycée. Sa composition a peu varié en cinq ans: un des membres, stagiaire, a été nommé dans la Sarthe; un autre nous a rejoints.

COMPOSITION DU GROUPE:

- Christian ARTIGUES - lycée Saint-Cricq à Pau
- Denis BIGNALET-CAZALET - LP Baradat à Pau
- Isabelle BLOCH - lycée Saint-John-Perse à Pau
- Jean CASSOU - lycée Louis Barthou à Pau
- Jean ELHORGA - Retraité
- Ioné FERRANDO - collège de Morlaas
- Catherine LE TREUT - lycée Louis Barthou à Pau
- Maryse MEGE - collège Albert Camus à Mourenx
- Maria SANCHEZ - collège de Serres Castet

RESPONSABLE DU GROUPE: Isabelle BLOCH

REDACTION:

Isabelle BLOCH, Jean CASSOU, Catherine LE TREUT, Maria SANCHEZ.

MISE EN PAGE:

Jean DENAPE, Isabelle BLOCH.

SOMMAIRE

INTRODUCTION page 3

- 1. Champ conceptuel page 3
- 2. Analyse théorique page 6
- 3. Méthodologie page 8

VERS LES FONCTIONS LINEAIRES

Activités en classe de quatrième page 11

- 1. Descriptif du travail page 12
- 2. Présentation des activités page 15
- 3. Conclusion page 18

Activités page 21

Fiche synthèse page 25

INTRODUCTION DES FONCTIONS

Activités en classe de seconde page 27

- 1. Descriptif du travail page 27
- 2. Présentation des activités page 31

Fiches page 37

Annexes page 42

LINÉARITÉ, CONTINUITÉ : ÉLÉMENTS D'ANALYSE DES CONCEPTIONS DES ÉLÈVES DE SECONDE page 61

- 1. Les problèmes page 61
- 2. Hypothèses et analyse a priori page 63
- 3. Chronique des séances en classe page 63
- 4. Conclusion page 67

Annexes page 68

INTRODUCTION

Les travaux de Bachelard (qui le premier a introduit la notion d'obstacle), Piaget, et plus récemment G.Brousseau, R.Douady et les chercheurs en didactique des mathématiques ainsi que P.Meirieu ou J.P.Astolfi, mettent en évidence que le modèle traditionnel des apprentissages par cours magistral et exercices d'application ne peut être pertinent pour la grande majorité des élèves, qui ne réussissent pas à construire ainsi des connaissances solides et opérationnelles.

Effectivement nous constatons dans nos classes des erreurs persistantes en mathématiques dues à des obstacles infranchissables par ces méthodes. Si l'on ne peut nier l'importance du contenu, défini par le programme, le manuel, les connaissances de l'enseignant, ce contenu même parfaitement rigoureux n'est pas suffisant pour lever les obstacles rencontrés dans l'acquisition du savoir mathématique par nos élèves. Le groupe Horizons Mathématiques s'est donc fixé comme objectif de travailler sur des situations d'apprentissage de la Quatrième à la Première, et plus particulièrement sur le programme d'analyse de ces classes. Nous nous sommes placés résolument dans une perspective d'utilisateurs des concepts de la didactique des mathématiques, c'est-à-dire que ce travail est un essai d'ingénierie didactique sur les premiers concepts de l'analyse dans l'enseignement obligatoire.

1. CHAMP CONCEPTUEL

Notre groupe comporte des professeurs de collège, lycée, et lycée technique; nous avons choisi de travailler sur le concept de fonction, qui nous a paru intéressant à plusieurs titres:

1) c'est un concept situé à la charnière collège-lycée, le passage du calcul algébrique à l'analyse ; il nous permettait un travail d'enchaînement de la 4ème à la 1ère:

- les fonctions sont utilisées comme outil au collège, par exemple dans l'étude de la proportionnalité; les fonctions linéaires sont introduites en 3ème; il nous a semblé

que de nombreuses questions se posaient dans le rapport entre ces divers apprentissages;

- c'est au lycée le concept central de l'analyse; c'est d'autre part un point du système didactique dont le fonctionnement paraît peu satisfaisant (erreurs répétées des élèves sur la linéarité, la continuité, les limites, l'utilisation de tableaux et graphiques, l'interpolation);

2) les possibilités de changement de cadres sont nombreuses et riches : en particulier nous avons pu opter pour une introduction dans le cadre géométrique afin de rompre avec la routine du cours de mathématiques : " on donne la fonction définie par $f(x) = \dots$ " ; on peut citer les cadres graphique, algébrique, numérique (tableaux), et dans le cas des droites, les possibilités d'incursions dans le vectoriel, pour constater d'ailleurs que la relation algébrique/vectoriel est une importante source de difficultés pour les élèves;

3) le concept est très riche aussi au niveau épistémologique; nous avons choisi au début de notre travail de réfléchir sur l'historique de la notion de fonction, et si cette réflexion ne figure pas dans cette brochure le lecteur peut se reporter à la bibliographie proposée, en particulier "Fragments d'histoire des mathématiques " vol. 1 et 2 (APMEP), Dhombres (1980) , Bkouche (1982); la suite de notre recherche s'oriente vers un problème qui nous semble majeur: celui du continu et sa transposition didactique, problème qui nous semble prendre ses racines dans l'histoire du concept de fonction;

4) l'utilisation importante du concept par les autres sciences permet de vérifier la façon dont le concept opère à tous les niveaux de l'apprentissage, de la quatrième au premier cycle de l'université: si nous n'avons pas encore nous même mis en place un dispositif pour étudier l'impact de notre enseignement d'analyse sur les procédures des élèves en physique, biologie, économie, géographie... nous nous sommes référés aux travaux déjà parus en particulier à l'IREM de Paris VII sur ce sujet.

Cette utilisation peut se traduire en termes de contraintes didactiques, et il est clair que les contraintes ne sont pas les mêmes en mathématiques et en sciences expérimentales.

Parmi les contraintes spécifiques à l'enseignement des mathématiques on peut relever:

- d'abord la "fixation" sur le linéaire, via l'enseignement en collège de la proportionnalité puis des droites ;
- l'introduction du vectoriel relié de façon très forte aux équations de droites, en début de Seconde ;

- l'absence presque totale de fonctions non affines jusqu'à la Seconde, malgré quelques instructions du programme incitant à utiliser la calculatrice - (mais la fonction sinus, par exemple, sera le plus souvent utilisée pour obtenir des tableaux de nombres, pas pour ses propriétés "non linéaires");
- l'introduction à partir de la seconde de fonctions presque exclusivement sous la forme $y = f(x)$, c'est-à-dire dans le cadre algébrique, ce qui, nous le verrons, crée un obstacle quant à la compréhension des liens entre fonctionnel et vectoriel (vecteur directeur de droite, ou changement de repère);
- la fonction est connue, ou plutôt donnée de façon arbitraire par l'enseignant, et c'est la courbe qu'on cherche; de par cette introduction, il est très difficile pour l'élève de *voir* des fonctions ou des relations fonctionnelles dans d'autres cadres (géométrie par exemple), et non imposées par le professeur.

Les sciences expérimentales utilisent fonctions et graphiques avec des contraintes différentes. En biologie par exemple la variable est souvent le temps; même dans un autre cas, elle est en général positive; plus important encore, souvent on connaît la variation, et c'est la variable qu'on cherche: par exemple on étudie la croissance du maïs et on prouve qu'elle est fonction de la quantité de lumière reçue.

La lecture et l'interprétation de courbes ont autant, voire plus d'importance que leur tracé à partir de formules ou de tableaux de valeurs numériques; et les sciences expérimentales ne se soucient pas de savoir, parce qu'en général la question est sans objet, si une courbe représente bien une fonction ou pas; ou bien l'interprétation sera donnée du point de vue physique, sans aucune référence aux signifiants mathématiques (exemple des cycles en thermodynamique).

Le constat dans nos classes est donc que certains élèves rencontrent ce que les professeurs appellent des "difficultés" qui se révèlent par des erreurs, des procédures erronées; certaines de ces "difficultés des élèves" nous semblent être le signe d'**obstacles** au sens de la didactique des mathématiques.

Nous avons pu ainsi repérer un certain nombre de "problèmes" que nous nous attacherons à éclaircir: apparition d'une "culture" de la proportionnalité; création d'obstacles didactiques par apprentissage systématique de tableaux 2x2 de proportionnalité; rapport entre l'algébrique et le vectoriel dans les droites; obstacles au concept de "fonction quelconque"; confusion entre la courbe et la fonction.

Certains obstacles nous semblent être d'origine épistémologique, au moins en partie: il en est ainsi par exemple de l'identification tableau de valeurs = fonction, ou des

problèmes liés au temps comme variable (voir dans RDM n° 6.1 l'article d'A.Sierpinski sur "Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite").

En conclusion, sachant que le concept "fonction" ne prend son statut d'objet mathématique qu'au lycée, il est particulièrement clair qu'on ne peut se satisfaire d'une définition formelle du type: "une fonction est une relation qui ..." et croire qu'une telle formulation est porteuse de sens. Cf Repères n° 10, "Introduction à la notion de fonction en seconde de lycée" par le groupe "Lycées" de l'IREM de Clermont-Ferrand :

"... pour les créateurs ou plus prosaïquement pour les utilisateurs, ce qui fait qu'un objet a du sens, ce sont les utilisations effectives, explicites ou souvent implicites, qu'ils ont pu en faire. Le sens s'enracinerait donc dans une histoire de la relation sujet-objet, temporelle et se vivant dans des "sites" représentés par des situations problèmes."

2. ANALYSE THEORIQUE

Notre point de départ a donc été l'idée qu'on peut analyser les erreurs des élèves, repérer les obstacles qu'elles révèlent, et construire des situations d'apprentissage leur permettant de franchir ces obstacles; nous avons expérimenté dans nos classes, de la 4ème à la 1ère, des activités introductrices à la notion de fonction, en nous référant au modèle "dialectique outil-objet et jeux de cadres" de R.Douady; nous nous sommes efforcés de respecter la méthodologie de cette introduction, à savoir les conditions énoncées (voir RDM n° 7/2) pour qu'une activité soit satisfaisante pour l'introduction du concept de fonction:

- L'énoncé a du sens pour les élèves.
- Compte tenu de leurs connaissances, les élèves peuvent engager une procédure de résolution, mais ils ne peuvent pas résoudre complètement le problème.
- Les connaissances visées par l'apprentissage (contenu ou méthode) sont des outils adaptés au problème.
- Le problème peut se formuler dans au moins deux cadres différents.

Par ailleurs nous avons construit les situations d'apprentissage en tenant compte bien évidemment des contraintes du système (nécessité par exemple d'enseigner la proportionnalité au collège), mais aussi des obstacles repérés, soit les années

précédentes dans nos classes, soit par des considérations théoriques (obstacles épistémologiques, problème de la continuité et de l'infini sous-jacents par exemple).

Après deux années d'expérimentation dans nos classes, nous pouvons retenir une première liste d'obstacles apparus; pour certains, nous avons pu les analyser et élaborer des activités pour les surmonter, pour d'autres, notre réflexion se poursuit:

1) Obstacle au concept de fonction linéaire:

a) la multiplication des entiers (addition répétée) fait obstacle à la multiplication dans $\mathbb{R}$. Or dans la situation de proportionnalité l'opérateur n'est pas forcément un entier, ni même un décimal;

b) la "culture de la proportionnalité", avec son folklore pseudo-concret (prix du litre d'essence) et sa grand-messe (tableaux de proportionnalité), et particulièrement le produit en croix; cette recette est devenue un obstacle didactique qui s'est développé dans l'enseignement du fait qu'on ne s'était pas donné les moyens de traiter l'obstacle précédent a) faute d'analyse;

2) Le linéaire obstacle au non-linéaire:

La première approche des fonctions se fait par le linéaire, d'où impossibilité de concevoir des fonctions non linéaires et renforcement de l'obstacle de l'additivité, ainsi que de celui de la monotonie; le mot "courbe" pour parler de la représentation graphique d'une fonction, même affine, peut être source de confusion.

3) Obstacle au concept de fonction lui-même:

a) la difficulté de concevoir une fonction en "plusieurs morceaux" par exemple dans le problème de l'aire balayée (voir annexes)

b) la locution "en fonction de" et le sens dans lequel elle fonctionne: les élèves ne distinguent pas bien "x est fonction de y" et "y est fonction de x" du fait de la confusion cause/conséquence;

c) la continuité, qui est à relier à la continuité temporelle: la fonction est continue, pour les élèves, s'il y a continuité dans l'action, elle ne l'est pas si le sujet de l'action s'arrête (exemple du train). Il pourrait s'agir d'un obstacle en partie épistémologique, en partie ontogénique.

D'autres problèmes ont été repérés, même si ce ne sont pas des obstacles au sens de Brousseau:

- confusions et difficultés de passage entre différents champs conceptuels, par exemple entre le vectoriel et l'analytique pour les droites, ou recours non pertinent au vectoriel;
- difficulté d'interprétation des équations ou inéquations graphiques: il s'agit d'un problème plutôt abstrait d'image réciproque !
- utilisation trop systématique, souvent à l'instigation des enseignants, de calculs très formels de variations, $f(x) - f(y)$ en fonction de $x - y$, pour des fonctions élémentaires ; de même pour les tableaux de variations.
- maîtrise, à des niveaux différents, des différents langages, graphique, symbolique...: par exemple à une question sur la limite l'élève répond en termes de points.

3. METHODOLOGIE

Nous avons choisi le travail en petits groupes (4 élèves) avec documents, et l'utilisation du rétroprojecteur pour le travail en classe de Seconde, chaque groupe étant responsable du transparent réalisé, à présenter devant la classe entière à la séance suivante.

Les modalités du travail en petits groupes ont été décrites par Meirieu dans "Outils pour apprendre en groupes"; au départ, dans ce type de travail notre motivation était d'obtenir une confrontation entre pairs.

Plus on avance dans les niveaux d'enseignement (de l'école élémentaire jusqu'à l'université) plus la confrontation entre pairs est facile à organiser par l'enseignant car le goût et l'acceptation du débat augmentent avec l'âge, ce qui permet la construction du savoir. Mais il ne faut pas croire qu'une simple organisation de la classe en groupes permette à coup sûr d'éviter aux élèves de refermer le problème sans franchir les obstacles sous-jacents.

Dès le départ la situation-problème doit porter en elle la réussite possible de la phase de validation. Nous nous sommes aperçus que nous nous reposions trop sur la structure de groupe pour créer la situation a-didactique; d'ailleurs nous avons bien réussi la phase de validation en utilisant le rétroprojecteur en classe de Seconde, mais le problème s'est posé de la forme que pourrait prendre cette phase, en 4ème où le rétroprojecteur n'avait pas été utilisé : quelle validation, et quelle articulation avec l'institutionnalisation.

Il en résulte que les activités proposées en Seconde et encore plus en Quatrième n'avaient pas été suffisamment analysées du point de vue des situations, et qu'après coup nous avons dû les recentrer en fonction des phases réussies ou de celles qui ont été un peu escamotées et nous ont mis en difficulté : ainsi l'activité $x' = -1/x$ permet bien des phases de validation ; le raisonnement géométrique sur les points par exemple permet aux élèves de vérifier la croissance de la fonction en cours de travail sans l'aide du professeur .

Ce n'est pas le cas pour toutes les questions proposées dans l'activité d(x,3) , mais c'est dans cet exemple que nous avons fait intervenir le rétroprojecteur ; la discussion entre les élèves qui s'en est suivie, a réintroduit dans cette activité une phase de validation ; le professeur de la classe a fait des interventions, mais mesurées afin de ne pas bloquer l'argumentation des intervenants élèves. Dans cet exemple la phase de validation est clairement distincte de l'institutionnalisation, menée ensuite par l'enseignant (transparent type élaboré avec l'aide de la classe, puis mise en forme des notions du cours). L'enchaînement validation - bilan - institutionnalisation, peut-être un peu flou au départ, s'est clarifié dans la pratique.

Dans le travail mené en 4ème, des problèmes sont apparus dans l'activité 3, de type pourtant plus traditionnel: mais justement, si l'on trouve dans presque tous les manuels ce genre "d'activité" sur la proportionnalité, elle s'avère parfaitement artificielle dans un cours de mathématiques et les élèves ne s'y trompent pas, qui savent bien que le professeur de mathématiques se fiche éperdument du prix du litre d'essence ! ce qui est ici en cause c'est la *finalité* de l'activité , et là encore nous constatons que ce problème ne permet pas de la faire émerger sans ambiguïté.

Pour ce qui est des phases bilan, ou de l'institutionnalisation, le professeur s'avoue en difficulté, et déclare hésiter sur leur place et les formes qu'elles peuvent prendre: elle parle aussi des inquiétudes des élèves, malgré semble-t-il des résultats de classe tirés vers le haut; il y a donc un problème de conviction intime de l'enseignant à entreprendre et mener à bien ce genre de travail, et de difficulté à défendre ses choix didactiques devant l'institution, quand ces choix ne sont pas routiniers.

Un début de travail sur linéarité et continuité est proposé en conclusion; la méthodologie adoptée est ici l'entretien en demi-classe avec réalisations des élèves sur rétroprojecteur, et questionnement pédagogique sur les conceptions des élèves; le professeur mène le questionnement, des élèves sont secrétaires. Ce qui nous a semblé remarquable, et digne d'être médité pour qui veut s'interroger sur le résultat de l'enseignement que nous dispensons en mathématiques, c'est à quel point les conceptions mises à jour sont éloignées de ce que nous croyons avoir appris aux élèves, mais c'est

aussi combien celles-ci - ces conceptions - sont riches y compris dans des concepts que nous n'avons pas conscience d'avoir abordé avec eux: ainsi la continuité en classe de Seconde.

En conclusion, nous voudrions souligner toute la richesse du travail fait avec les élèves sur ces activités, même si certaines d'entre elles sont imparfaites du point de vue de la théorie des situations; elles ont néanmoins permis aux élèves d'être beaucoup plus motivés pour cette étude et aussi plus à l'aise ensuite dans la manipulation de l'outil fonctionnel, avec des comportements plus autonomes et moins stéréotypés.

VERS LES FONCTIONS LINEAIRES

ACTIVITES EN CLASSE DE QUATRIEME

PREAMBULE : Le choix des activités est guidé par le souci d'introduire la notion de proportionnalité en quatrième en variant les cadres et celui d'élargir cette notion pour aboutir aux fonctions linéaires.

BUT : notre objectif était de ne pas créer d'automatismes avant la découverte de la notion, mais de faire fonctionner le concept comme outil dans certaines situations avant de l'institutionnaliser.

Pour cela il nous a semblé nécessaire de:

- 1) proposer aux élèves une situation à validation interne: c'est la situation du puzzle, due à G.Brousseau ("Problèmes de didactique des décimaux", RDM vol.2/1);
- 2) ne pas proposer uniquement des fonctions linéaires ou affines, c'est pourquoi dans une des deux classes de Quatrième le problème de la variation de l'aire du parallélogramme articulé a été posé aux élèves (voir "Mathématiques et réalité", IREM de Bordeaux , réédition 1992);
- 3) varier les cadres: géométrique, graphique, numérique.

L'investissement au niveau du temps peut paraître élevé, mais il se justifie par l'importance de la notion de proportionnalité en Troisième, qui débouche sur le concept de fonction linéaire; c'est dire que ce travail va structurer ensuite les connaissances des élèves à leur entrée en Seconde, où le concept de fonction est prépondérant dans l'enseignement de l'analyse.

1. DESCRIPTIF DU TRAVAIL

1) Connaissances des élèves au moment de commencer ce travail:

Ils savent :

- reconnaître une situation de proportionnalité par le calcul et la lecture d'un graphique.
- utiliser, manipuler la proportionnalité dans des problèmes simples de la vie courante.
- compléter des tableaux de valeurs proportionnelles
- interpréter l'alignement des points avec l'origine.

REMARQUE : les instructions recommandent l'utilisation des expressions "est fonction de", "en fonction de"

2) Objectifs

A) Objectifs généraux :

- préciser et approfondir la notion de *PROPORTIONNALITE* pour l'élargir, selon le programme, à la notion de *FONCTION LINEAIRE*.
- Passer de l'objet mathématique à l'outil.

B) Objectifs sous-jacents :

- Comprendre à partir de problèmes choisis dans des domaines variés la notion de rapport de proportionnalité et la conservation des rapports de toutes les longueurs se correspondant, en particulier dans l'agrandissement et la réduction de figures.
- Comprendre qu'il n'en est pas de même des grandeurs associées: aires, angles, volumes...
- Faire utiliser la notion de linéarité dans des situations pratiques et variées.
- Introduire la notion de fonction linéaire.
- Utiliser la linéarité pour réinvestir des notions déjà rencontrées en algèbre et géométrie et entrevoir des prolongements (créations d'images mentales: théorème de Thalès, rapports trigonométriques dans le triangle).

3) Modalités de déroulement:

PREMIERE PHASE :

En s'inspirant d'une idée de G.BROUSSEAU, activité autour d'un puzzle (le professeur a choisi pour cette classe le puzzle de SAM LOYD qui permet d'obtenir plusieurs figures géométriques).

Première séquence (1 heure) : Travaux en groupes de cinq élèves.

Les élèves ont formé eux-mêmes les groupes avec une seule contrainte: respecter l'hétérogénéité de la classe: pas de groupes de niveau. La situation d'apprentissage est nouvelle, il ne s'agit pas d'exercice répétitifs, et c'est une situation qui permet la validation autonome par les élèves: a priori dans ce type de situation il n'y a pas de "forts" ou de "faibles". Chaque participant est impliqué, il doit produire un élément du puzzle.

Le choix du groupe hétérogène se justifie par l'activité: c'est une situation a-didactique qui permet la validation autonome par le groupe d'élèves.

Deuxième séquence (1 heure) : Groupe classe

Discussion:

L'obstacle additif est apparu, de plus certains élèves " agrandissent " les angles. Il faut faire reconnaître les " erreurs " commises et convaincre .

Échanges intéressants dans la classe:

- "l'énoncé n'est pas clair, on sait ce qu'il faut faire pour 4 mais on ne sait rien pour les autres nombres".
- "CHAQUE FOIS que l'on a 4 nous le transformons en 6 donc si on a 8 nous le transformerons en $6 + 6$ ou 2×6 et il est logique que si nous avons 2 nous le transformerons en 3 et enfin si nous avons 1 nous le transformerons en 1,5".

La notion de proportionnalité que les élèves perçoivent depuis la classe de sixième est enfin "réactivée"

Suite de la discussion (entre élèves):

- "Pourquoi ne doit-on pas agrandir les angles ?"
- "Si nous changeons les angles la figure change d'"allure" alors ce n'est plus un agrandissement".
- "Si nous agrandissons les angles du triangle d ou e la somme des mesures des trois angles ne sera plus de 180° donc c'est impossible."

Paradoxalement aucun élève n'a agrandi l'angle droit .

La conservation de l'orthogonalité semble plus implicite.

Les élèves décident d'écrire sur leurs classeurs :

UN AGRANDISSEMENT OU UNE REDUCTION NE DEFORME PAS.
--

A ce stade, la majorité de la classe, semble s'être bien approprié la notion de proportionnalité. Le professeur passe à une phase d'institutionnalisation.

Les activités qui suivent (deuxième phase) ont pour but d'obliger les élèves à s'adapter à de nouvelles situations, à réinvestir, à prolonger la notion de proportionnalité afin qu'ils s'approprient la notion de fonction linéaire.

DEUXIEME PHASE (2 heures) :

Toujours en groupes .

Les tâches répétitives sont distribuées à l'intérieur du groupe pour les activités 1 et 2. Analyse des résultats par groupe et rédaction commune. Les autres activités sont faites, dans un premier temps individuellement puis correction collective dans le groupe, et enfin élaboration d'un rapport par groupe.

TROISIEME PHASE (2 heures) :

Mise en commun des résultats , discussion , élaboration d'une FICHE SYNTHESE. Mise en forme de la notion de fonction linéaire.

Distribution aux élèves d'un document élaboré à partir de la brochure inter IREM "SUIVI SCIENTIFIQUE 4^e "(voir annexes).

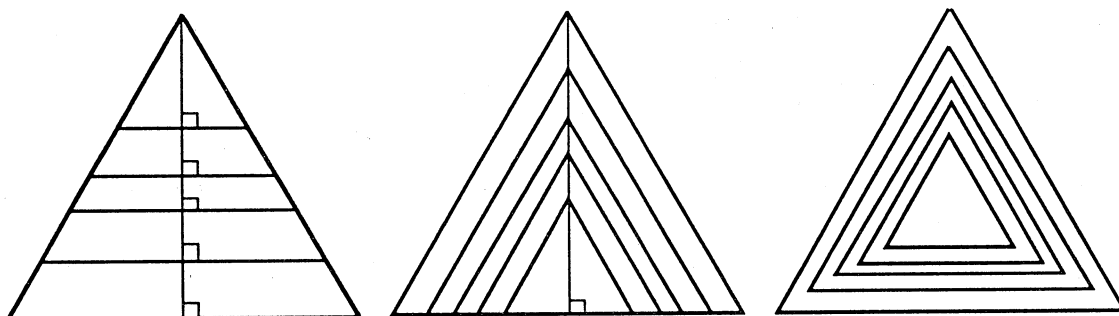
2. PRESENTATION DES ACTIVITES :

Les textes sont donnés en annexe.

ACTIVITE 1:

Les élèves devaient respecter la contrainte : présenter les travaux de découpage dans un espace réduit. Ils choisissent de ranger les triangles en les superposant suivant les exemples présentés ci dessous. (images mentales intéressantes , il ne faut pas négliger l'intérêt didactique des représentations. L'élève s'approprie très souvent son savoir à travers ses ou par les représentations).

Ils placent le centre d'homothétie des triangles dans différentes positions, donc même si le mot n'est pas prononcé un certain savoir implicite est ainsi construit et on pourra l'institutionnaliser en seconde.



Lors de la discussion en cours il est noté que les mesures sont forcément entachées d'erreurs et qu'il semble y avoir proportionnalité entre la mesure du côté d'un triangle équilatéral et la mesure de sa hauteur. Quelques élèves éprouvent le besoin de calculer la valeur exacte du coefficient de proportionnalité.

Ces remarques ont été le point de départ d'une activité de RAISONNEMENT

Les pistes émises sont le théorème de PYTHAGORE et le COSINUS. Le cosinus d'un angle aigu est alors réinvesti, il avait été introduit comme coefficient de proportionnalité en début d'année. Retrouvaille heureuse pour certains , découverte pour d'autres.

ACTIVITE 2

Cette activité a posé problème à l'ensemble de la classe. Difficultés pour comprendre les phrases: " exprimez le périmètre en fonction de r et exprimez l'aire en fonction de r^2 ". Le professeur est obligé d'intervenir dans tous les groupes .Les formules de l'aire et du périmètre ne sont pas acquises ou sont confondues.

Il faut dire que le nombre π est un grand mystère pour les élèves du premier cycle. De plus la difficulté est d'ordre conceptuel car "en fonction de r^2 " fait référence à une fonction composée: r^2 "prend la place de la variable " .

Nous décidons de proposer pour l'an prochain le texte: Exprimez le périmètre p en fonction de r (à l'aide de r). Le tableau sera également transformé :

r	r^2	p	A	$\frac{p}{r}$	$\frac{A}{r}$	$\frac{A}{r^2}$
10						
2						
$\frac{5}{3}$						
	$\frac{9}{4}$					
		3,14				
			27,25			
10^{-2}						

En observant le tableau répondre aux questions : Le périmètre du cercle est-il proportionnel à son rayon ? L'aire du disque est-elle proportionnelle au rayon ? au carré du rayon ? JUSTIFIER.

Un autre objectif de cet exercice était de réinvestir le calcul numérique, **la calculatrice était interdite**. Un groupe n'a pas respecté la consigne et a remplacé $\frac{5}{3}$ par 1,6666 d'où discussion sur l'affichage des calculatrices.

L'utilisation de la calculatrice a créé un nouvel obstacle au collège : l'élève considère que le résultat affiché est EXACT.

La classe cherche un moyen pour mettre en évidence "ce que cache la calculatrice"
Nous adoptons :

$$5 : 3 = 1,666666 - 1,666666 =$$

Heureusement *presque* toutes les calculatrices affichent un résultat non nul!

ACTIVITE 3

Aucune difficulté pour compléter le tableau, mais à la question: que représente le coefficient de proportionnalité ? Un nombre important d'élèves répond : 6. D'autres répondent : c'est le nombre par lequel il faut multiplier le nombre du bas pour obtenir le nombre du haut. Très peu répondent : le prix d'un litre.

Manifestement les élèves n'ont pas compris la question, le changement de contrat n'a pas été indiqué. La formulation est mauvaise :

Il y a rupture entre situation mathématique et réalité

C'est pourquoi la formulation sera remplacée par : A quoi correspond, dans la réalité, le coefficient de proportionnalité ?

Cette activité a été utilisée pour mettre en évidence que le coefficient correspond à l'"image" de l'unité.

Elle s'avère artificielle en cours de mathématiques, l'image de l'unité est à faire au moment de l'institutionnalisation de la notion abordée.

ACTIVITE 4

Retour à la géométrie. Les élèves ont bien vu que les mesures des côtés des deux triangles étaient proportionnelles. Un élève a remarqué que le triangle obtenu est une réduction du triangle ABC.

Cette activité permet de créer une image mentale du théorème de THALES. Le théorème de la droite passant par les milieux de deux côtés d'un triangle est évoqué, les erreurs de mesure n'ont pas été un obstacle.

ACTIVITE 5

Contre-exemple et réinvestissement de la projection orthogonale (vers le sinus...). Les élèves rencontrent des difficultés pour passer d'un graphique à l'autre (intervention fréquente du professeur)

La non proportionnalité est bien vue.

Le cosinus est évoqué ($\cos 60^\circ \neq 2 \cos 30^\circ$)

ACTIVITE 6

Beaucoup de difficultés pour écrire la fonction linéaire.

A nouveau nous rencontrons l'obstacle : y "en fonction de" x .

Cette activité permet de (ou d'essayer de) mettre en place la fonction linéaire. Les élèves sont plus gênés par le vocabulaire que par la notion elle-même.

Problème de communication lié à l'utilisation d'un vocabulaire abstrait.

ACTIVITE 7

Contre-exemple graphique . Pas de difficulté pour justifier la non linéarité.

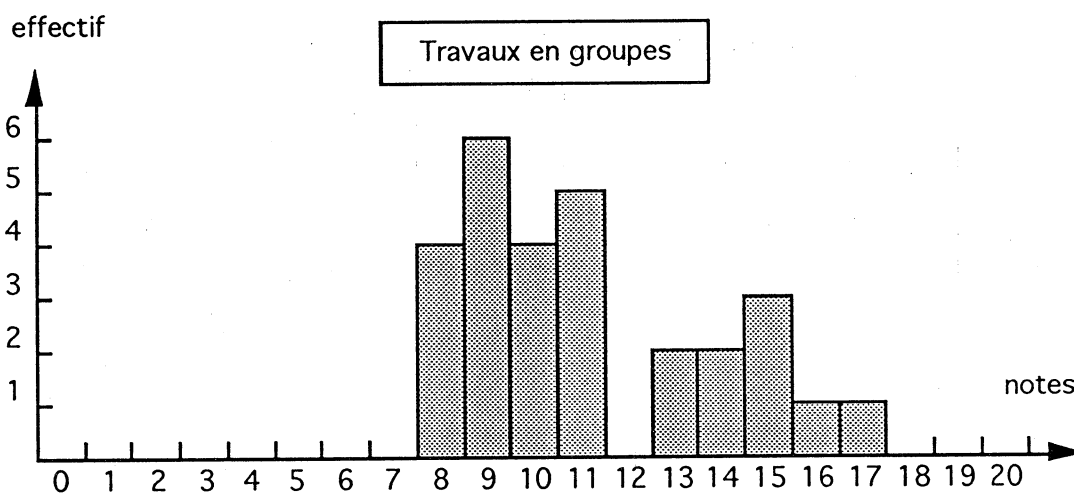
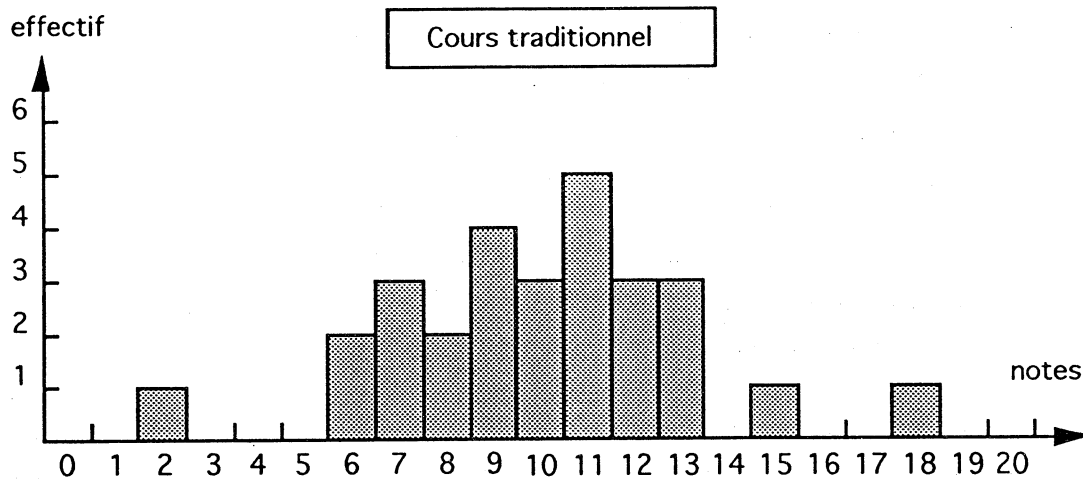
3. CONCLUSION

Dans le collège où cette expérience a été menée, les classes de quatrièmes sont constituées selon les mêmes critères : classes hétérogènes, aucune sélection par les langues; nous essayons de trouver un équilibre entre le nombre d'élèves "moteurs" et les autres. Les profils des résultats sont sensiblement les mêmes. Deux collègues de mathématiques travaillent ensemble .

Ce travail a été mené parallèlement dans une autre classe de quatrième mais l'autre professeur a privilégié la recherche dans la classe entière et le cours traditionnel. Le travail a été plus rapide mais moins riche en interventions d'élèves. Lors de l'évaluation commune, nous avons constaté :

- Avec le cours traditionnel : grand éventail de notes de 2 à 18, 16 élèves sur 28 ont la moyenne.
- Avec recherche par groupe : les notes vont de 8 à 17, 18 élèves sur 28 ont la moyenne.

En affinant la comparaison des résultats, on met en évidence qu'un nombre plus important d'élèves a réussi grâce à un travail d'équipe : la classe est tirée vers le haut. Les profils sont très différents (les deux classes ont des résultats antérieurs sensiblement égaux)



La classe qui a eu le cours "traditionnel" a mieux rédigé. Le travail écrit a été plus important pendant le cours. Lors de la correction de l'évaluation, dans l'autre classe, un effort a été fait pour apprendre à rédiger. Les supports qu'ils possédaient pour apprendre leur leçon ont paru insuffisants. L'élève cherche trop souvent à reproduire le modèle du professeur.

On remarque que les élèves s'inscrivent bien dans un travail plus actif mais qu'ils souhaitent également un cours entièrement fait par le professeur (poids des habitudes sociologiques mais aussi craintes dues à la nouveauté des méthodes d'apprentissage)

Actuellement l'évaluation donne une trop grande importance à la rédaction et à la présentation, l'élève se fixe sur ces objectifs il est donc gêné dans la phase de recherche, de nombreux manuels éditent des problèmes types avec des solutions types!

Pour finir, en analysant les remarques des élèves il apparaît que la phase de conclusion n'était pas satisfaisante puisque certains élèves ont été incapables de réinvestir leur savoir dans d'autres contextes.

Le rôle de l'enseignant dans la phase de conclusion est difficile car il doit s'appuyer sur des situations didactiques puis s'en écarter pour institutionnaliser. Il importe de bien distinguer:

- la phase de validation, par exemple la reconstitution du puzzle;
- la phase bilan: discussion des résultats et élaboration d'une méthode;
- l'institutionnalisation, ici la mise en place de la situation de proportionnalité et l'introduction du concept (fonction linéaire) correspondant.

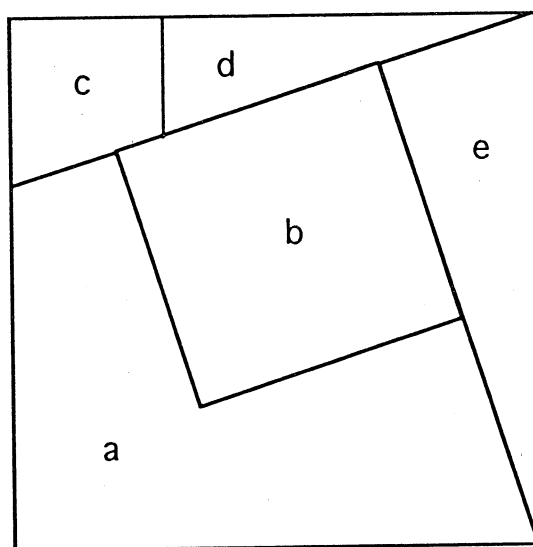
C'est après la phase de conclusion qu'il peut y avoir, par des activités adéquates, décontextualisation puis réinvestissement. Les problèmes rencontrés ici mettent bien en évidence le type de difficultés rencontrées lorsque cette phase est escamotée: savoir peu sûr, impression de flou du côté des élèves; sentiment d'échec relatif de l'enseignant et difficulté à se soutenir par rapport à ses collègues ou à l'institution.

Nous recommandons à ce sujet la lecture de C.Margolinas (1992) dans la revue: "Recherches en didactique des mathématiques", volume 12/1. Édition La Pensée Sauvage.

ACTIVITES

ACTIVITE PUZZLE

Vous avez chacun une pièce d'un puzzle (puzzle de SAM LLOYD), vous devez l'agrandir en respectant la loi : 4 cm deviennent 6 cm. Les cinq pièces font partie d'un carré que le groupe doit ensuite reconstituer. Chaque groupe doit écrire sur une feuille la méthode qu'il a utilisée et dire s'il a abouti ou non (pour les plus rapides : calculer les aires des différentes pièces avant et après l'agrandissement).



ACTIVITE 1

Découpez cinq triangles équilatéraux dont les côtés mesurent : 5 cm, 8 cm, 10 cm, 12 cm, 20 cm. (coloriez les). Mesurez leur hauteur et inscrivez la mesure au demi-centimètre près par excès dans le tableau :

	triangle 1	triangle 2	triangle 3	triangle 4	triangle 5
mesure du côté					
mesure de la hauteur					

ACTIVITE 2

r est le rayon d'un cercle, p son périmètre et A l'aire du disque correspondant.

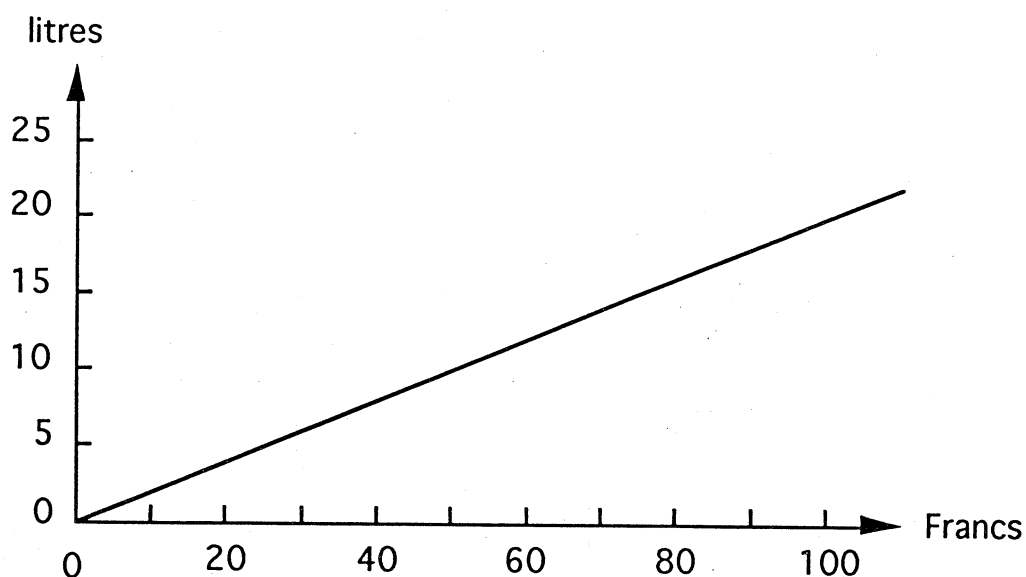
- exprimez p en fonction de r .
- exprimez A en fonction de r^2 .

Complétez le tableau suivant : (on prendra 3,14 pour valeur approchée de π)

r	10	2	$5/3$				10^{-2}
p				3,14			
r^2					$9/4$		
A						27,26	

p est-il proportionnel à r ? Pourquoi ? A est-elle proportionnelle r à r^2 ? Pourquoi ?

ACTIVITE 3



Ce graphique représente le prix de l'essence en fonction de la quantité fournie. Utilisez-le pour compléter le tableau :

quantité en litres	5		25		45
prix en francs		60		245	

Cette situation est-elle une situation de proportionnalité ? Pourquoi ? Si oui que représente le coefficient de proportionnalité ?

ACTIVITE 4

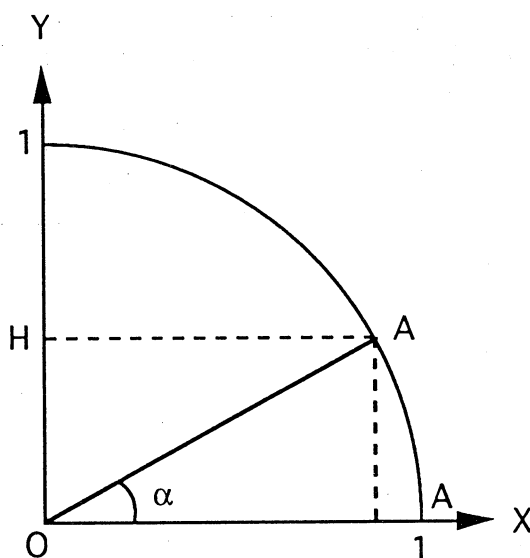
ABC est un triangle, (MN) est une parallèle à (BC) tel que : $M \in [AB]$ et $N \in [AC]$. Mesurez les côtés du triangle ABC et ceux du triangle MNA. (arrondir au millimètre le plus près).

Complétez le tableau :

AB =	AC =	BC =
AM =	AN =	MN =

Que pouvez-vous en conclure ?

ACTIVITE 5



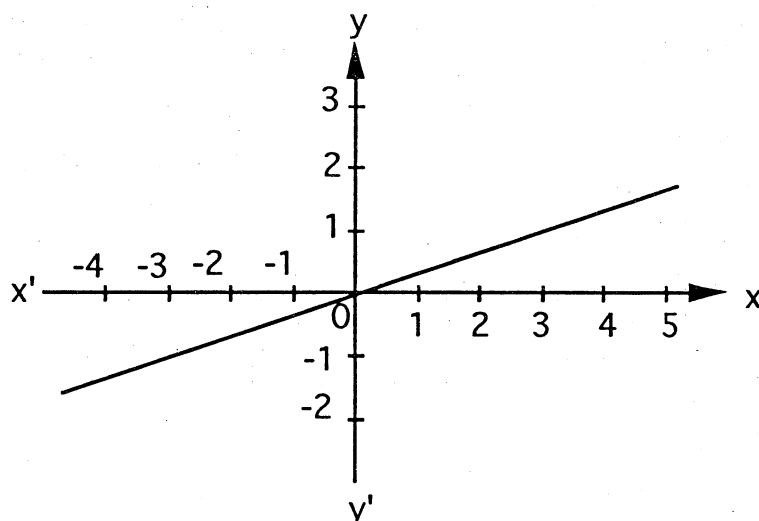
Utilisez le graphique ci-dessus. $OA = 10$ cm Le point A se déplace sur un quart de cercle de centre O et de rayon 10 cm. Mesurez [OH]; [OH] est la projection orthogonale de A sur (OY).

Complétez le tableau :

mesure de l'angle α	20	30	40	60	70	85
mesure de [OH]						

Faites un graphique, en prenant les mesures de l'angle α pour abscisses et les mesures de [OH] pour ordonnées. Est-ce une situation de proportionnalité ? Pourquoi ?

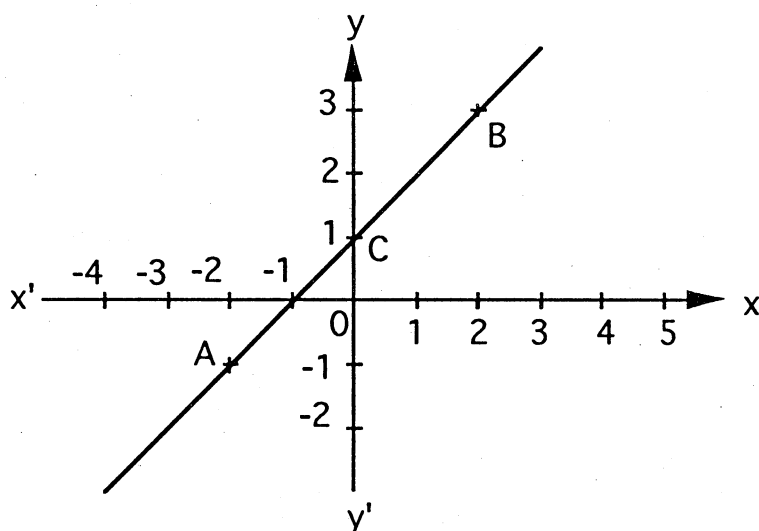
ACTIVITE 6



Le graphique ci dessus représente une situation de proportionnalité "étendue à l'ensemble des nombres réels". Écrivez la fonction linéaire correspondant à ce graphique(ou écrivez y en fonction de x). Compléter le tableau :

x	3	0	1	-5	-1,5	$3/2$			
y							14	-2	$2/5$

ACTIVITE 7



Le graphique représente-t-il une fonction linéaire? JUSTIFIER votre réponse. Pour les plus rapides, relevez les coordonnées des points A, B, C. Exprimez y en fonction de x .

FICHE SYNTHÈSE

Une situation de proportionnalité se caractérise par :

- un tableau dans lequel on obtient les termes de la deuxième ligne en multipliant les termes de la première ligne par un même nombre NON NUL appelé COEFFICIENT DE PROPORTIONNALITÉ

- un graphique constitué de points alignés avec l'origine.

- une relation de la forme : $y = ax$ où a est le coefficient de proportionnalité.

En généralisant la situation de proportionnalité à l'ensemble des nombres, nous pouvons définir la FONCTION LINEAIRE : si a est un nombre, la loi mathématique qui à tout nombre x associe le nombre $y = ax$ est une fonction linéaire de coefficient a .

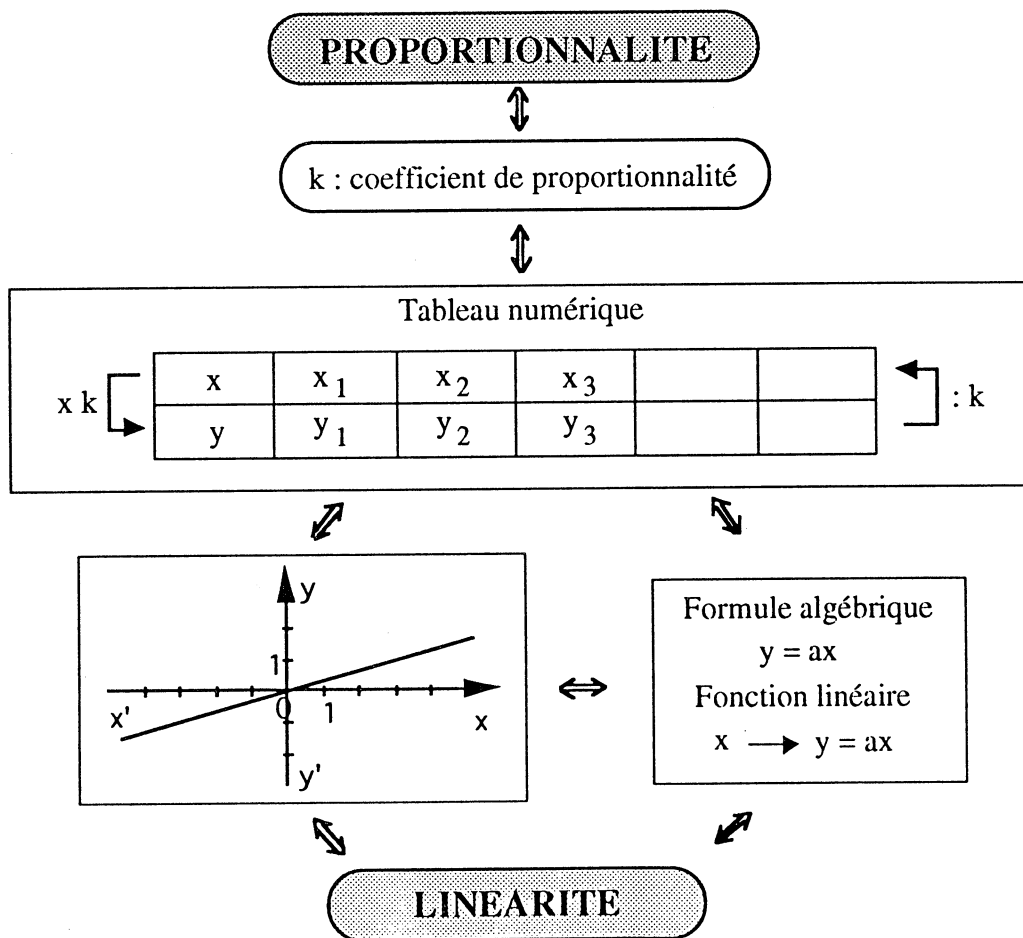
Nous notons : $f : x \rightarrow y = ax$

VOCABULAIRE :

y est l'image de x
 ax est l'image de x

REMARQUES :

L'image de x par f se note $f(x)$
 a est aussi l'image de 1



INTRODUCTION DES FONCTIONS

ACTIVITES EN CLASSE DE SECONDE

1. DESCRIPTIF DU TRAVAIL

1) Connaissance des élèves au moment de commencer ce travail

Les élèves n'ont a priori qu'une notion sur les fonctions linéaires ou affines, uniquement en rapport avec la "situation de proportionnalité" étudiée en premier cycle.

Ils n'ont donc comme image de représentation graphique que la droite. De plus, ils viennent d'étudier la droite en géométrie analytique (point de vue essentiellement vectoriel) et la résolution de systèmes d'équations et d'inéquations (en insistant sur l'aspect graphique).

La droite est donc pour eux :

- l'ensemble des points du plan dont les coordonnées vérifient une équation du type : $ux + vy + w = 0$ ou $y = ax + b$ (sauf cas particuliers...)
- la représentation graphique d'une situation de proportionnalité.

2) Objectifs : Articulation avec le programme

La série d'activités qui va suivre a pour objectifs de faire comprendre aux élèves, à partir de problèmes "concrets", la nécessité du concept de fonction pour décrire ces phénomènes, et leur faire découvrir au fur et à mesure des activités les points qui nous paraissent essentiels :

- la représentation graphique d'une fonction n'est pas forcément une droite, ni une ligne brisée ;
- l'écriture analytique de la fonction s'impose dès que l'on veut généraliser une situation ;
- il est nécessaire de préciser l'ensemble de définition ;
- l'utilité de la représentation graphique pour résoudre une équation du type $f(x)=k$;

- l'axe de symétrie de la représentation graphique, fonction paire ou impaire : comprendre l'intérêt et la signification géométrique avant la formulation analytique;
- donner une idée intuitive de la limite (activités 2 et 4) et de la continuité (act.3).

On peut ensuite (ou au cours de l'étude) mettre en forme les notions de sens de variation, tableau de variation, maximum et minimum.

3) Préliminaire

Le premier travail dirigé (recherché à la maison corrigé et discuté en classe) a été réalisé à partir d'un problème dit "concret" :

- représentation graphique de la distance en fonction du temps d'un train effectuant des allers-retours entre deux villes avec arrêts et vitesses uniformes par tronçons (bref une fonction "affine par intervalle").

A partir de la représentation graphique on a déterminé les équations des divers "morceaux" de droite et dans quel(s) intervalle(s) ces équations étaient "valables". Bref on a "cassé" la droite pour faire une première étude d'une variable (la distance à la gare de départ) en fonction d'une autre (ici le temps).

- cette première étude, qui passe relativement bien car les résultats (ou les erreurs) sont aisément "palpables" par les élèves sera utile par la suite, quand le problème deviendra plus "abstrait".

4) Modalités de déroulement de chaque activité

Condition de composition des groupes : Les élèves sont répartis par groupe de 4 (ou au plus 5). La constitution des groupes peut se faire de différentes façons :

- homogènes,
- hétérogènes,
- par affinités...

Dans les activités présentées, la répartition a été faite par affinités, mais contrôlée pour avoir une certaine hétérogénéité dans chaque groupe.

En effet, la répartition par groupes homogènes (de niveau) présente le risque d'avoir des vitesses de travail et des niveaux atteints très différents (surtout au bout de deux ou trois séances...) ; décider des différents groupes a priori présente le danger

d'avoir à l'intérieur de chacun des problèmes relationnels qui pourront bloquer le bon fonctionnement de l'étude.

Nous pensons qu'il faut donc les laisser se mettre par affinités, en retouchant ensuite un peu le groupe, afin que le travail soit profitable à la fois à l'élève "plus faible", et à celui "plus fort" qui sera tenu d'expliquer et de faire comprendre ses idées, ce qui impliquera pour lui de les mettre en ordre et de les rendre les plus cohérentes possibles.

Seule exception :laisser les redoublants entre eux. En effet, ceux-ci ont déjà une idée de la notion de fonction. Ils ne sont donc pas "vierges" sur ce sujet comme le sont en principe les autres. L'expérience, menée dans deux cas différents, (redoublants éparpillés ou redoublants regroupés) montre que dans le premier cas ceux-ci font passer leur idée sur la notion aux autres et court-circuitent ainsi leur réflexion.

De plus, leur idée est parfois floue ou même fausse, et ils ont tendance à essayer de retrouver (souvent mal) leurs souvenirs de l'année précédente. D'ailleurs, dans le cas où ils sont regroupés, c'est sur ce groupe qu'il faut le plus intervenir pour "casser" les représentations souvent fausses qu'ils ont gardées de l'année précédente.

Dans chaque groupe :

*** Première phase**

- chaque élève reçoit le sujet de l'activité ;
- ils disposent d'une heure (ou 1 h 30) pour réaliser l'étude et la rédiger sur un transparent (une rédaction par groupe) ;
- un seul transparent est donné, ce qui oblige le groupe à faire une rédaction concise, à rédiger uniquement quand ils ont "fait le tour de la question" et ont pensé à leur rédaction, d'où un effort de synthèse. Exceptionnellement, on peut distribuer un deuxième transparent en cas de "catastrophe" naturelle ou non !...

Ceci impose à l'intérieur du groupe une réflexion collective sur la façon de rédiger, motivée par le fait qu'ils savent que leur travail sera ensuite visionné en classe entière (et en général ce n'est pas le professeur qui a la critique la plus caustique...!)

- Les transparents sont ramassés par le professeur à la fin de la séance. Il est important que chaque élève garde une trace personnelle de son travail (photocopie éventuellement...).

*** Deuxième phase**

Si possible, le lendemain ou au moins le cours suivant (éviter un écart trop grand entre les deux phases) :

- les transparents ont été lus et visionnés par le professeur entre temps pour pouvoir relever les erreurs et éventuellement rechercher une méthode d'explication ;
- les transparents des élèves sont visionnés par l'ensemble de la classe, question par question (plutôt qu'entièrement l'un après l'autre).

Discussion autour de chaque question et mise en place de la solution ou de la formulation qui semble la meilleure (une heure minimum).

On peut éventuellement préparer un transparent type, amendable si nécessaire. En effet, il est important de donner une formulation correcte de l'étude qui sera notée et restera dans les cahiers des élèves, à côté de leur propre étude.

*** Troisième phase**

Mise en forme définitive des notions (cours)

Elle peut être faite :

- soit petit à petit après chaque activité.
- soit à la fin des différentes études.

Cela dépend essentiellement :

- des réactions des élèves ;
- de l'emploi du temps ;
- du niveau de la classe.

Attention ! Chaque activité peut faire apparaître beaucoup de notions à la fois et la mise en forme trop rapide peut court-circuiter la réflexion. On peut se contenter de mettre l'accent sur une notion après chaque étude.

2. PRESENTATION DES ACTIVITES

Voici maintenant les 4 études faites (voir texte à la fin).

L'ordre est à débattre. On peut :

- soit commencer par $x \rightarrow x^2$ ou $x \rightarrow -1/x$, ce qui amène tout de suite les élèves à sortir de l'image de la droite comme représentation graphique de fonction puis revenir à des fonctions affines par intervalles pour montrer qu'il s'agit de fonctions comme les autres ;
- soit "casser" d'abord l'image de la droite en commençant par $x \rightarrow d(x,3)$, puis $x \rightarrow$ "l'aire balayée" et passer ensuite aux autres études ;
- soit faire un panachage des 4.

C'est ce qui sera fait dans ce qui suit. Un cinquième texte est proposé qui peut être donné aux élèves en classe ou en travail personnel chez eux.

PREMIÈRE ÉTUDE :

$$y = d(x, 3)$$

Ici ne sont donnés, à titre d'exemple, que quelques résultats d'élèves ; chaque "transparent" appelle un certain nombre d'observations et il n'est pas possible de les cataloguer toutes (cela viendra quand "l'expérience" aura été conduite dans d'autres classes). Toutefois quelques remarques peuvent déjà être faites.

Pour la **première question** pas de problème particulier car l'étude de la valeur absolue "sous forme" de distance a été faite précédemment et les élèves connaissent l'équivalence :

$$d(x,3) = |x-3| \text{ et } d(x,3) = a \Leftrightarrow \{x = 3+a \text{ ou } x = 3-a \text{ (a positif)}\}$$

C'est pour la représentation graphique que les interrogations commencent. En général les élèves placent d'abord les points trouvés au 1, puis la discussion s'anime quand il s'agit de tracer la "globalité".

$$\begin{array}{ll} \text{Tous n'arrivent pas à la conclusion :} & \text{si } x > 3 \quad d(x,3) = x-3 \\ & x < 3 \quad d(x,3) = -x+3 \end{array}$$

amenant au tracé de deux demi-droites se "rejoignant" au point (3;0).

En général, après discussion et exemples numériques (venant à la rescousse) le tracé se fait mais, dans un premier temps, les demi-droites "débordent vers le bas".

C'est le premier sujet de discussion et de controverse à l'intérieur du groupe. Il est à noter d'ailleurs que cette controverse n'apparaît pas dans tous les groupes à ce moment mais parfois plus tard (sur la feuille n°1 la partie basse a été effacée ensuite) ou pas du tout (feuille n°2). Lors de la phase de discussion du lendemain il sera d'ailleurs pratique d'attirer l'attention des élèves sur les deux points ainsi mis en lumière :

- le tracé "en dessous" de l'axe des y qui laisse penser que $d(x,3)$ ou $|x-3|$ peut être négatif.
- le fait de "revenir en arrière" dans la représentation graphique (erreur souvent constatée sur des élèves de TA2 par exemple) : les élèves qui avaient fait l'erreur en ont pleinement pris conscience quand on a examiné ce qu'aurait signifié un tel "retour" dans l'étude du train : pour eux il était clair que la courbe représentant $d = f(t)$ du train ne pouvait revenir en arrière car cela aurait signifié que le train occupait deux positions différentes au même moment ! Par contre ici, ils n'ont pas cherché à comprendre ce que cela aurait représenté et pourquoi à priori ce n'était pas possible: d'où l'intérêt, dans l'introduction de la notion de fonction de ne jamais trop s'éloigner d'exemples "concrets".

Certains redoublants, à la demande de justifications de ce non-retour en arrière ont récité que "c'était une application et que donc un antécédent ne pouvait avoir qu'une image unique", cette phrase dans leur bouche ayant une nette connotation d'interdit, de règle du jeu qu'une fonction ne devait pas transgresser sous peine de s'attirer les foudres de la grande Inquisition Mathématique... ce à quoi les autres n'ont rien compris alors que le train à deux endroits différents les a "titillés" un peu plus et qu'ils ont (je l'espère) ensuite étendu le raisonnement à $d(x;3)$... et aux autres.

Pour la **deuxième question**, on remarque que certains voient le problème essentiellement sous un angle géométrique, parlent de coefficient directeur, de vecteurs directeurs etc... et ne sont pas encore entrés dans le langage "fonction" (ce serait différent si on avait commencé par $x \rightarrow x^2$).

Ceci s'explique par le perpétuel va et vient qu'ils "subissent" en collège et en premier trimestre de seconde de la part des programmes (et de ceux qui les appliquent dont nous ...), va et vient entre le point de vue géométrique (équations de droites, géométrie vectorielle) et le point de vue fonctionnel (linéarité, proportionnalité, pourcentage etc...).

Pour l'écriture y en fonction de x : certains l'écrivent $y = |x-3|$ et précisent $y = x-3$ ou $y = -x+3$... mais sans indiquer quand l'un plutôt que l'autre.

D'autres se contentent de $y = |x-3|$. Un seul groupe à indiqué :

si $x > 3$, $y = x-3$

si $x < 3$, $y = -x+3$

Ceci prête aussi matière à discussion dans la phase bilan mais ne pose alors pas de problème (ici on rejoint un problème important qui est celui de la rédaction et en particulier du minimum indispensable à rédiger pour qu'il n'y ait aucune équivoque pour le lecteur... et donc pour le rédacteur... !).

La **troisième question** est celle qui présente le plus de diversité dans le raisonnement et la rédaction. C'est un exemple type de la question que les élèves "voient" mais sont incapables, pour la plupart, de montrer et donc de rédiger. En général ils en restent à l'exemple précis devant leurs yeux et essaient de s'en tirer souvent par des considérations géométriques (voir transparents n°2, 6, 7 avec les notions de droites perpendiculaires, de bissectrices...).

Pour deux groupes il y a une approche plus intéressante :

- sur le transparent n°3 on voit que le groupe a montré la propriété pour trois points particuliers : seul manque le passage (si difficile souvent) à la démonstration globale (le fameux "quel que soit");
- le groupe n°1 par contre (aucun redoublant) a bien compris la notion d'axe de symétrie pour la représentation graphique d'une fonction: seules quelques retouches de concision dans la rédaction peuvent être apportées mais l'essentiel est compris (après de longues discussions) et c'est remarquable pour des élèves "neufs" par rapport à cette notion.
- une exception au transparent n°4 car ce groupe comportait une redoublante qui a entraîné les autres vers un changement de repère, sans doute souvenir de l'année précédente... mais pas du tout maîtrisé, et dans la forme (voir certaines égalités) et dans le fond... bien que l'on perçoive l'idée générale.

Au niveau de la rédaction, il y a beaucoup à dire et la phase de discussion sur cette question est particulièrement longue et donne lieu en particulier à des retours sur des définitions floues ou peu maîtrisées. C'est sur cette question (et la suivante) qu'apparaît le mieux le parallèle entre :

- observation (ou démonstration) géométrique

- langage "fonction".

Pour la **quatrième question** : peu de problèmes de résolution : en général les solutions sont trouvées mais peu de groupes ont justifié leurs résultats, surtout par manque de temps.

Le transparent n°2 présente un schéma difficile à comprendre (que les auteurs n'ont pas su, d'ailleurs, le lendemain, expliquer...). Certains (voir transparent n°4) ont résolu les équations ou inéquations sans utiliser la représentation graphique (ils se sentaient plus à l'aise sur un "terrain" algébrique). Seul le transparent n°6 atteste vraiment d'une recherche graphique qui apparaît bien sur le schéma. Le groupe des redoublants était celui du transparent n°5.

On peut au vu des résultats émettre plusieurs critiques sur le texte que nous avons proposé dans cet exercice:

- le tracé "en dessous de l'axe des x" est peut-être du à l'ordre des questions: on a demandé d'abord les équations des deux demi-droites au lieu de laisser les élèves construire le graphique point par point en utilisant le "concret" de la distance; on peut se demander si dans le problème du train, on n'aurait pas eu la même erreur (retour en arrière) si on avait d'abord demandé les équations ?

- lorsqu'on pose un problème aux élèves on a souvent tendance à trop anticiper la solution "naturelle" ou du moins celle qui nous paraît la plus adaptée au concept visé; c'est peut-être ce qui explique que le professeur a du mal à admettre la solution des redoublants (essai de changement d'origine du repère) pour prouver la symétrie. Certes cette solution est proposée maladroitement et les calculs ne sont pas menés à terme, mais fondamentalement c'est le même calcul, qu'on écrive:

$$f(x) = x - 3 \quad \text{qui devient pair en changeant de variable,}$$

$$\text{ou: } f(3 + x) = f(3 - x)$$

DEUXIÈME ÉTUDE

Tracé de $x \rightarrow x$ et $x \rightarrow x^2$ sur $[0, +\infty[$

Première question : pas de problème sur les tracés mais certains ne comprennent pas au premier abord pourquoi le rectangle d'aire x a une "hauteur" égale à 1.

Deuxième question : propriété algébrique déduite mais énoncée seulement dans le sens induit par le texte.

Troisième question : représentation graphique : ici se pose pour la première fois aux élèves le problème d'une représentation graphique qui n'est plus constituée de "morceaux de droites" mais d'une "courbe" au sens littéral du mot.

La tentation première est de rejoindre les différents points obtenus par des segments de droite. Certains d'ailleurs s'en sont tenus à cette forme (groupe n°2, n°5). D'autres ont, après discussion entre eux (et parfois appel au professeur) choisi l'option "courbe" mais toujours en hésitant (car c'est la première mais en même temps ils savent que cela existe car ils en ont déjà vu de semblables : il faut simplement franchir le cap).

L'interprétation graphique de la propriété de la deuxième question n'est pas toujours évidente : le lien n'est pas fait au groupe n°2 qui s'est tenu (pour le tracé) à des calculs (faux) et n'a pas fait le rapport (sauf pour le point d'intersection). La propriété est souvent traduite en termes d'intersection seulement (groupe n°4). Parfois (groupes n°1 et n°5) elle est correctement traduite avec les termes "au-dessus" ou "au-dessous" ce qui est une bonne approche de l'interprétation d'une inéquation.

Quatrième question : Examen pour les grandes valeurs

Question souvent escamotée par manque de temps à la fin. On observe généralement que l'écart augmente. Par contre, pour les groupes de l'année précédente (qui avaient plus de temps et pour ce qui n'était pas la première étude) on va plus loin (avec la notion de "tend plus vite vers l'infini que...").

TROISIÈME ÉTUDE :

Faite uniquement par les élèves sous forme d'exercices chez eux.

QUATRIÈME ÉTUDE

$$x' = - 1/x$$

PARTIE I

Première question : Dans un premier temps, après avoir fait les figures demandées, tous les groupes ont mesuré pour obtenir la valeur de x' (difficulté d'accepter la nécessité de faire le calcul alors que c'est plus facile de mesurer). Une fois cette mise au point faite, il paraît plus rapide à beaucoup de passer directement au cas général et d'exprimer x' en fonction de x . ceux qui font le calcul pour $x = 0,2...$ s'arrêtent assez vite : c'est trop long

de refaire la même chose chaque fois et comprennent bien l'utilité de l'expression analytique.

Les méthodes employées pour arriver à $x' = -1/x$ sont très variées :

- théorème de Pythagore dans les deux triangle OAM et OAM'
- trigonométrie dans le triangle (à l'aide des tangentes)
- condition d'orthogonalité de deux vecteurs AM et AM'

Deuxième question : Il paraît important de leur faire bien comprendre que x et x' varient dans le même sens (pour aboutir ou retrouver le concept fonction croissante).

Troisième question : L'idée intuitive est assez bien comprise, sur le plan géométrique. Des difficultés pour la mettre en forme :

- une certaine confusion entre le point M et son abscisse x , induite d'ailleurs par la formulation du texte,
- une difficulté supplémentaire de rédaction due au fait que du côté négatif, "plus petit" ne correspond pas à "proche de 0".

Nous pensons qu'il faudrait reprendre la formulation pour les faire s'exprimer correctement sur le plan géométrique et pour traduire ensuite sur le plan analytique (en faisant apparaître l'utilité de "tend vers 0").

Quatrième question : Pas de problème.

Cinquième question : La situation est en général assez bien visualisée sur le plan géométrique mais des difficultés pour aller jusqu'au bout du raisonnement persistent :

- sauf pour un groupe (... donc M ne peut pas être 0).
- pour un groupe : donc M égal à l'infini : confusion entre le cadre géométrique et le cadre analytique.

PARTIE II : Le 1 a déjà été fait au I.

- pour la représentation graphique, l'erreur de relier les points par des segments de droite (déjà abordée) ne se retrouve pas sauf dans un groupe.

La troisième question s'est fait après la mise en commun des résultats, en classe entière (problème de temps et de lassitude des élèves lorsqu'on reste trop longtemps sur une même activité).

I. On se place sur la droite réelle. Déterminer les valeurs de x telles que:

a) $d(x,3) = 1$

b) $d(x,3) = 0$

c) $d(x,3) = 4$

II. On s'intéresse à la relation $d(x,3) = y$. On veut représenter y en fonction de x

a) dans un repère, placer les couples (x,y) déterminés à la question I

b) Écrire y en fonction de x (suivant les valeurs de x) puis déterminer la représentation graphique.

III. La représentation graphique admet-elle un axe de symétrie? POURQUOI?

IV. Utiliser la représentation graphique obtenue pour résoudre:

a) $|x - 3| = 5$

b) $|x - 3| < 5$

c) $|x - 3| > 5$

PREREQUIS	NOTIONS ABORDEES
* distances * valeurs absolues * tracé de $y = ax+b$	* utiliser la définition de la valeur absolue en termes de distance pour obtenir la représentation graphique de $x \rightarrow x - a$ * utilisation d'une représentation graphique pour résoudre une équation ou une inéquation. * axe de symétrie d'une représentation graphique.

EXTENSIONS POSSIBLES :

* sens de variation

* limites quand $x \rightarrow +\infty$, quand $x \rightarrow -\infty$ (la distance de x à 3 devient... quand x ...)

M est un point de $[Ox]$. On pose : $x = OM$

I. a) Pour le point M tracé sur la figure

- tracer en rouge un carré d'aire x^2 , dont O et M sont 2 sommets
- tracer en vert un rectangle d'aire x , dont O et M sont 2 sommets

b) Refaire les constructions du a) pour les valeurs de x suivantes :

$$x = 0,2 ; x = 0,4 ; x = 1 ; x = 1,2 ; x = 3 .$$

II. Dans quels cas l'aire du carré est-elle plus grande que celle du rectangle ?

Dans quels cas l'aire du rectangle est-elle plus grande que celle du carré ?

Écrire la propriété algébrique que l'on constate ainsi.

III. Représenter sur un même graphique

- l'aire du carré en fonction de son côté
- l'aire du rectangle en fonction du côté OM

Comment se traduit sur le graphique la propriété constatée au II.

IV. Que se passe-t-il pour les grandes valeurs de x ?

Calculer les aires des carrés et des rectangles pour $x = 10$; $x = 100$; $x = 1000$...

PREREQUIS	NOTIONS ABORDEES
	* comparaison de x et de x^2 * différentes façons de tendre vers $+\infty$. * notion de fonction croissante * la représentation d'une fonction n'est pas forcément une droite

ABCD est un rectangle ($AB = 4$; $AD = 2$). Un point M décrit le parcours ABCDA, x est la longueur du trajet et y l'aire balayée par AM (hachurée sur la figure).

I. Dans chacun des cas suivants : a) $x = 3$; b) $x = 5,5$; c) $x = 9$; d) $x = 11$

- faire une figure à l'échelle
- placer M et hachurer la surface correspondante
- calculer l'aire de la surface hachurée

II. On cherche à déterminer un moyen de trouver cette aire y sans faire le calcul à chaque fois.

- a) Pour quelles valeurs de x le problème a-t-il un sens ?
- b) Exprimer y en fonction de x
- c) Représenter graphiquement y en fonction de x
- d) Pour quelle valeur de x l'aire obtenue est-elle égale à 7 ? Faire une figure en plaçant le point M correspondant.

PREREQUIS	NOTIONS ABORDEES
* aire du triangle * aire du trapèze * tracé de : $y = ax + b$	* ensemble de définition * une idée de la continuité * résolution graphique d'une équation

Soit une droite D munie d'un repère (O,I) , un point A fixe situé à la distance 1 de cette droite, et O sa projection orthogonale sur D . Soit M d'abscisse x sur D et M' un point de D tel que MAM' soit un triangle rectangle.

I. a) Faire le schéma pour $x = 0,2$; $x = 0,5$; $x = 1$; $x = 2$; $x = 6$

Trouver la valeur correspondante de x' , abscisse de M' , dans chaque cas.

b) Soit M_1 d'abscisse 1, M_2 d'abscisse 2, M'_1 et M'_2 les points correspondants.

Si $1 < x < 2$ que pensez vous de la position de M' ?

c) Que fait M' : si x devient de plus en plus grand ? si x se rapproche de O en restant positif ?

d) Au point M d'abscisse 2 correspond M' d'abscisse $-1/2$. Quel est le "correspondant" du point M' d'abscisse -2 ? Pouvez vous généraliser ce résultat ?

e) Si M est en O , que pouvez-vous dire de M' ?

II. a) Montrer que x et x' sont liés par la relation : $x' = -1/x$

b) A l'aide de I.a), commencer la représentation graphique point par point de x' en fonction de x .

c) A l'aide de la calculatrice, compléter le tracé de la courbe. Retrouver les résultats mis en évidence au I.

PREREQUIS	NOTIONS ABORDEES
* théorème de Pythagore (ou relations métriques dans le triangle rectangle)	* ensemble de définition d'une fonction * sens de variation d'une fonction * croissance comparée de x et de $-1/x$ ou $1/x$ * centre de symétrie d'une représentation graphique, fonction impaire.

Modifiée en tenant compte des remarques faites lors du travail des élèves.

Soit une droite D munie d'un repère (O, I) , un point A fixe situé à la distance 1 de cette droite, et O sa projection orthogonale sur D . (O, I, A) est donc un repère orthonormé du plan.

Soit M le point d'abscisse x sur D et M' un point de D tel que MAM' soit un triangle rectangle.

On appelle x' l'abscisse de M' dans (O, I) .

I. a) Faire le schéma pour $x = 0,3$; $x = 1$; $x = 2$, sur une même figure; choisir une couleur différente pour chaque triangle.

Trouver la valeur de x' en fonction de x .

b) La construction de M' est-elle toujours possible? Retrouver algébriquement ce résultat.

c) Soit M_1 d'abscisse 1, M_2 d'abscisse 2, M'_1 et M'_2 les points correspondants.

Si M se déplace de M_1 à M_2 , comment se déplace M' ?

Traduire cette constatation par des encadrements: si $- < x <$ alors $- < x' <$

Retrouver algébriquement ce résultat.

d) Que fait M' : - lorsque M s'éloigne de O sur $] O I)$?

- lorsque M se rapproche de O sur $] O I)$?

Traduire ces phrases en termes d'abscisses.

e) Au point M d'abscisse 2 correspond M' d'abscisse $-1/2$. Quel est le "correspondant" du point M' d'abscisse -2 ? Pouvez vous généraliser ce résultat ?

II. a) En utilisant I a, tracer, dans un repère (O, i, j) , la représentation graphique de x' en fonction de x .

b) Comment se traduit sur la courbe la constatation de I e ?

c) Interpréter à l'aide de la courbe les résultats du I b, I c, et I d.

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O, i, j) , soit le demi-cercle de centre O et de rayon 1 situé dans le demi-plan supérieur.

I.a) A tout point M de l'axe (xx') on associe (lorsqu'il existe) le point N du demi-cercle tel que M et N ont même abscisse. Ou doit se trouver M pour que N existe ?

b) Soit x l'abscisse de M . Traduire la condition précédente pour x

c) Exprimer en "fonction" de x l'ordonnée du point N correspondant. Retrouver les conditions d'existence du point N .

d) Soit M d'abscisse x et M' d'abscisse $-x$. Quelle est la transformation géométrique qui fait passer N à N' ?

II. Trouver y pour $x \in \{-1 ; -0,8 ; -0,2 ; 0 ; 0,2 ; 0,5 ; 1\}$. Représenter graphiquement y en fonction de x . Que constatez-vous ?

PREREQUIS	NOTIONS ABORDEES
* racine carrée * symétrie orthogonale	* ensemble de définition * parité, symétrie par rapport à (yy') - extension possible à la fonction $x \rightarrow \sin x$

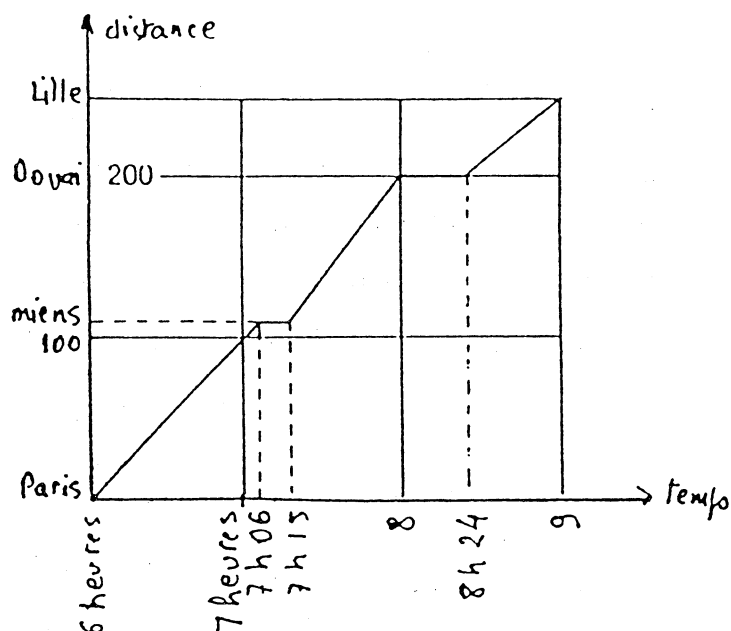
INTRODUCTION DES FONCTIONS

Activités en classe de seconde

ANNEXES

Trajet d'un train

La S.N.C.F. projette de mettre en place un service reliant Paris et Lille de 6 heures à 18 h 45. Le premier départ de Paris aurait lieu à 6 h et le voyage se déroulerait comme indiqué sur le graphique ci-dessous.



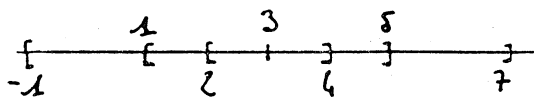
a. Tirez de ce graphique tout renseignement utile, et en particulier la vitesse du train sur chaque tronçon.

b. Définissez sur $[6; 9]$ la fonction représentée sur ce graphique.

c. Arrivé à Lille, le train s'arrête 15 minutes et repart pour Paris. La vitesse sur chaque tronçon est la même que lors de l'aller et les arrêts dans les gares de même durée. Après 15 minutes d'arrêt à Paris, le train refait un aller-retour dans les mêmes conditions que précédemment. Représentez sur un graphique la marche du train de 6 h à 18 h 45.

d. Un train de marchandises est parti de Paris à 5 h 30; il arrive à Lille à 9 h 25 en circulant à vitesse constante et sans arrêt. Usez sur le graphique les heures et lieux de rencontre du train de voyageurs et du train de marchandises.

Nathan
Transmaths Seconde



$$d(x; 3) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 3-1=x & \text{Triang. 1'2} \\ 3+1=x & \text{Triang. 1'2} \end{cases} \begin{matrix} x=2 \\ x=4 \end{matrix}$$

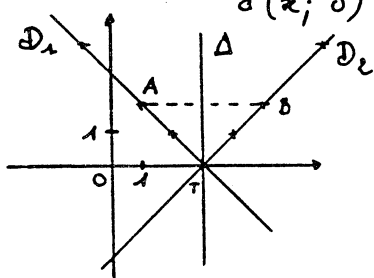
De même, $d(x; 3) = 2 \quad x=1 \text{ et } x=5$

$$d(x; 3) = 4 \quad x=-1 \text{ et } x=7$$

$$S_1 = \{2; 4\}$$

$$S_2 = \{1; 5\}$$

$$S_3 = \{-1; 7\}$$



graphiquement, on détermine que le coefficient directeur de D_1 est $a = -1$ et que $b = 3$. eq $D_1: y = -x + 3$

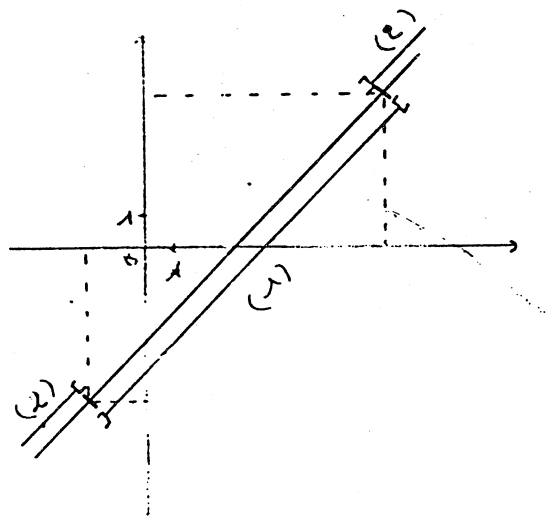
De même, le coefficient directeur de D_2 est $a = 1$ et $b = -3$. eq $D_2: y = x - 3$

On constate que la représentation admet un axe de symétrie: Δ (cela vient du fait que la représentation graphique, représentée par le triangle ABT , a un axe de symétrie: la médiatrice de $[AB]$, confondue avec Δ .)

$$|x-3| = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} x-3=5 \\ x-3=-5 \end{cases} \quad S = \{-2; 8\}$$

$$|x-3| < 5 \Leftrightarrow d(x; 3) < 5 \quad S =]-2; 8[\quad (1)$$

$$|x-3| > 5 \Leftrightarrow d(x; 3) > 5 \quad S =]-\infty; -2[\cup]8; +\infty[\quad (2)$$

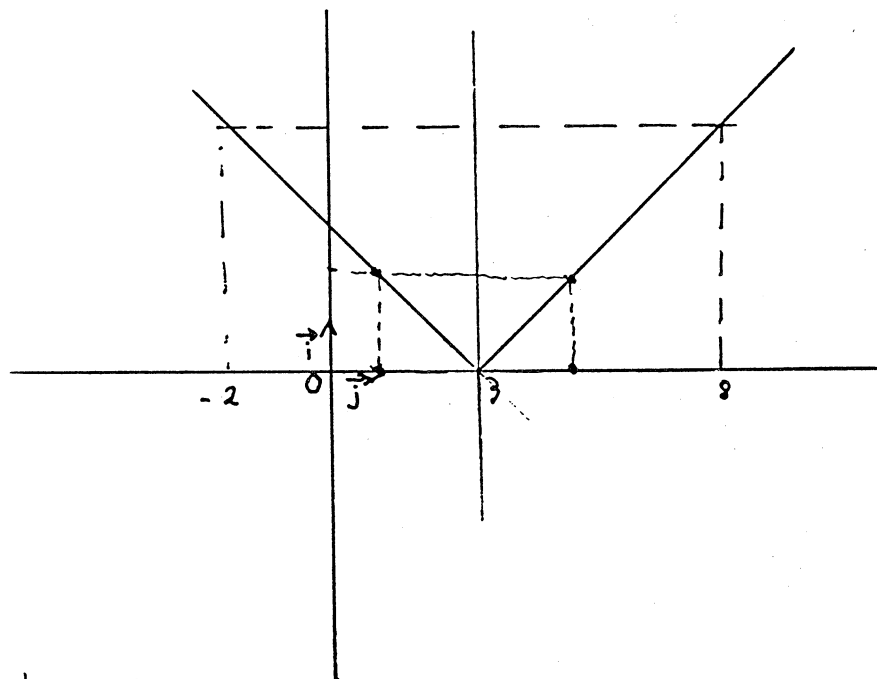


① $d(x; 3) = 1 \Leftrightarrow |x-3| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x-3 = 1 \Leftrightarrow x = 4 \\ \text{ou} \\ x-3 = -1 \Leftrightarrow x = 2 \end{cases}$ donc $S_1 = \{2; 4\}$ Transp. N°1

$d(x; 3) = 2 \Leftrightarrow |x-3| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x-3 = 2 \Leftrightarrow x = 5 \\ \text{ou} \\ x-3 = -2 \Leftrightarrow x = 1 \end{cases}$ donc $S_2 = \{1; 5\}$

$d(x; 3) = 4 \Leftrightarrow |x-3| = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x-3 = 4 \Leftrightarrow x = 7 \\ \text{ou} \\ x-3 = -4 \Leftrightarrow x = -1 \end{cases}$ donc $S_3 = \{-1; 7\}$

②



③ D'après la relation $y = |x-3|$, $y = -x+3$ ou $y = x-3$

donc pour un même y , il existe 2 points de coordonnées $(3-y; y)$ et $(y+3; y)$

On recherche les milieux G des segments qui ont ces 2 points pour extrémités
alors, $x_G = \frac{(3-y) + (y+3)}{2} = \frac{3-y+y+3}{2} = 3$

et $y_G = y = y$.

donc $G(3; y)$

or G appartient à l'axe de symétrie de tous ces segments.

donc l'axe de symétrie de la représentation graphique est la droite formée de tous les points G d'abscisse 3, c'est-à-dire la droite d'équation $x = 3$.

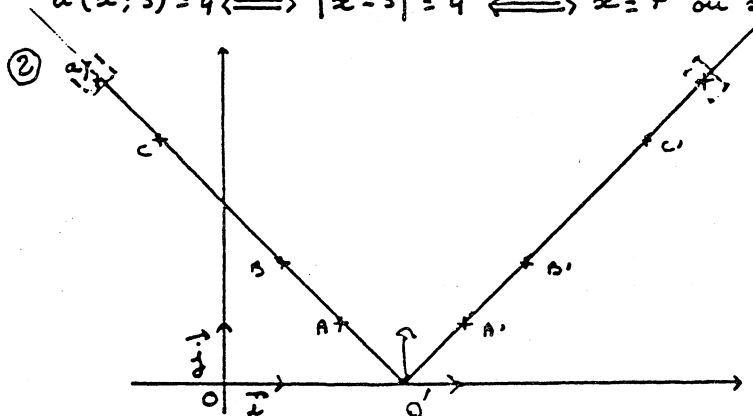
④ $|x-3| = 5 \Leftrightarrow S \{-2; 8\}$

$|x-3| < 5 \Leftrightarrow S]-2; 8[$

$|x-3| > 5 \Leftrightarrow x \in]-\infty; -2[\cup]8; +\infty[$

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad d(x; 3) = 1 &\iff |x - 3| = 1 \iff x = 4 \text{ ou } x = 2 \\ d(x; 3) = 2 &\iff |x - 3| = 2 \iff x = 5 \text{ ou } x = 1 \\ d(x; 3) = 4 &\iff |x - 3| = 4 \iff x = 7 \text{ ou } x = -1 \end{aligned}$$

Group. NO4



b) $f(x): y = |x - 3|$

③ Changement de repère : nouveau repère : $(O', 3\vec{i}, \vec{j})$

Soit le point B dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$

dans O' : $B = \vec{i} - 3\vec{i} + 2\vec{j}$

$B(-2\vec{i} + 2\vec{j})$

$B(2; -2)$ dans $(O', \vec{i}', \vec{j}')$

Soit le point B' dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$

dans O' : $B' = 5\vec{i} - 3\vec{i} + 2\vec{j}$

$B' = 2\vec{i} + 2\vec{j}$

$B(2; 2)$ dans $(O', \vec{i}', \vec{j}')$

Le point A $(\frac{1}{2})$ et le point B $(\frac{1}{2})$ dans le nouveau repère $(O'; 3\vec{i}, \vec{j})$ ont la même ordonnée mais leurs abscisses sont opposées.

Donc, ils sont à égale distance de l'axe (y'y) du nouveau repère donc ils sont symétriques par rapport à celui-ci.

Donc l'axe des ordonnées est l'axe de symétrie pour les deux droites ABC et A'B'C'.

④ a) $|x - 3| = 5 \iff \begin{cases} x - 3 = 5 \iff x = 8 \\ x - 3 = -5 \iff x = -2 \end{cases}$

b) $|x - 3| < 5 \iff \begin{cases} x - 3 > 5 \iff x < 8 \\ x - 3 < -5 \iff x < -2 \end{cases}$

c) $|x - 3| > 5 \iff \begin{cases} x - 3 > 5 \iff x > 8 \\ x - 3 < -5 \iff x > -2 \end{cases}$

Transp. nos

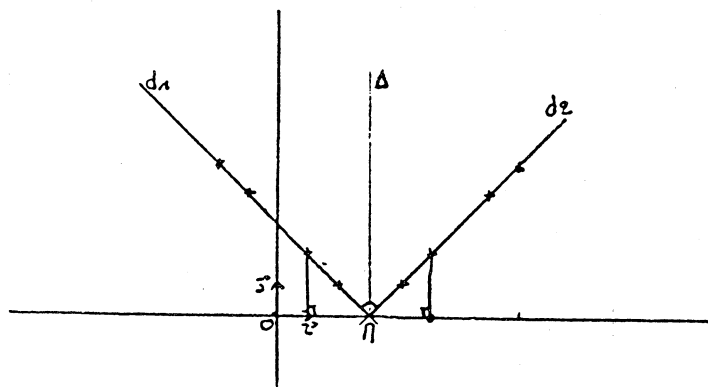
① $d(x; 3) = 1 : |x - 3| = 1 \Leftrightarrow \begin{matrix} x - 3 = 1 & \Leftrightarrow & x = 4 \\ x - 3 = -1 & \Leftrightarrow & x = 2 \end{matrix}$

$$d(x; 3) = 2 : |x - 3| = 2 \Leftrightarrow \begin{array}{l} x - 3 = 2 \Leftrightarrow x = 5 \\ x - 3 = -2 \Leftrightarrow x = 1 \end{array}$$

$$d(x; 3) = 4 : |x - 3| = 4 \Leftrightarrow \begin{array}{l} x - 3 = 4 \Leftrightarrow x = 7 \\ x - 3 = -4 \Leftrightarrow x = -1 \end{array}$$

(2)

a)



$$b) |x-3| = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x-3 = 4 \\ -x+3 = 4 \end{cases} \begin{cases} y = -x+3 \\ y = +x-3 \end{cases}$$

③ Comme cette courbe représente la fonction $f(x) = |x-3|$ et que les valeurs absolues sont toujours positives alors toutes les valeurs de $f(x)$ seront positives.

Cherchons le point d'intersection des droites d_1 et d_2 :

$$\begin{cases} y = x - 3 \\ y = -x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 = -x + 3 \\ 2x = 6 \\ x = 3 \end{cases} \Rightarrow y = 0$$

les coordonnées de ce point sont $n(3,0)$

soit Δ la droite parallèle à l'axe des ordonnées et passant par Π . D'où cette droite aura pour équation $\Delta: x = 3$

Lorsqu'on projette les points dont les couples de coordonnées sont définis dans la question 1 sur l'axe des abscisses, les distances des points obtenus de chaque pout de n est la même.

Donc nous pouvons dire que Δ est un axe de symétrie pour la représentation graphique

④ a. $|x-3|=5 \Leftrightarrow \begin{matrix} x-3=5 \Leftrightarrow x=8 \\ x-3=-5 \Leftrightarrow x=-2 \end{matrix}$

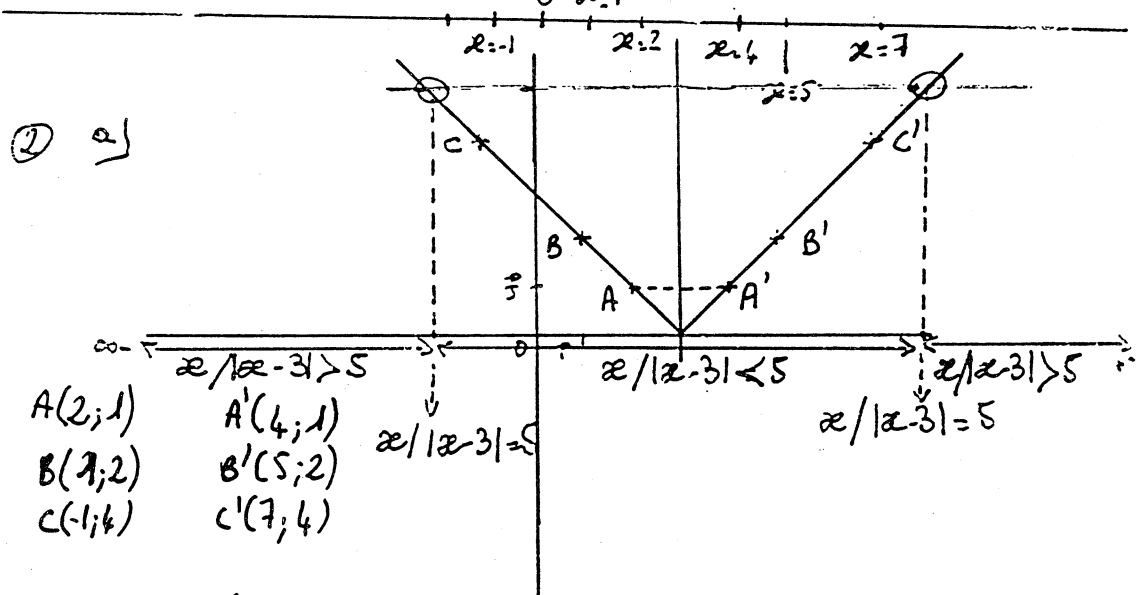
b. $|x-3| < 5 \iff d(x,3) < 5 \iff x \in [-2, 8]$

$$c. \quad |x-3| > 5 \Leftrightarrow d(x, 3) > 5 \Leftrightarrow x \in]-\infty; -2] \cup [8; +\infty[$$

① * $d(x;3) = 1 \Leftrightarrow |x-3| = 1 \Leftrightarrow (x-3=1 \text{ ou } x-3=-1)$
 $\Leftrightarrow x=4 \text{ ou } x=2$

* $d(x;3) = 2 \Leftrightarrow |x-3| = 2 \Leftrightarrow x-3=2 \text{ ou } x-3=-2$
 $\Leftrightarrow x=5 \text{ ou } x=1$

* $d(x;3) = 4 \Leftrightarrow |x-3| = 4 \Leftrightarrow x-3=4 \text{ ou } x-3=-4$
 $\Leftrightarrow x=7 \text{ ou } x=-1$



b) $d(x;3) = y \Leftrightarrow |x-3| = y \Leftrightarrow y = x-3$
 ou $y = -x+3$

③ Les points obtenus forment deux demi-droites sécantes (car coeff. dir. $\neq$) donc il existe un axe de symétrie pour cette figure. Celui-ci est alors la bissectrice d'un angle formé par les 2 demi-droites

④ a) $|x-3| = 5 \Leftrightarrow x = -2 \text{ ou } x = 8$
 b) $|x-3| < 5 \Leftrightarrow x \in]-2; 8[$
 c) $|x-3| > 5 \Leftrightarrow x \in]-\infty; -2[\cup]8; +\infty[$

$$d(x; 3) = 1 \Leftrightarrow |x-3| = 1 \Leftrightarrow x = 2 \text{ ou } x = 4$$

transp. N°7

$$d(x; 3) = 2 \Leftrightarrow |x-3| = 2 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = 5$$

$$d(x; 3) = 4 \Leftrightarrow |x-3| = 4 \Leftrightarrow x = 7 \text{ ou } x = -1$$

$$A(2; 1)$$

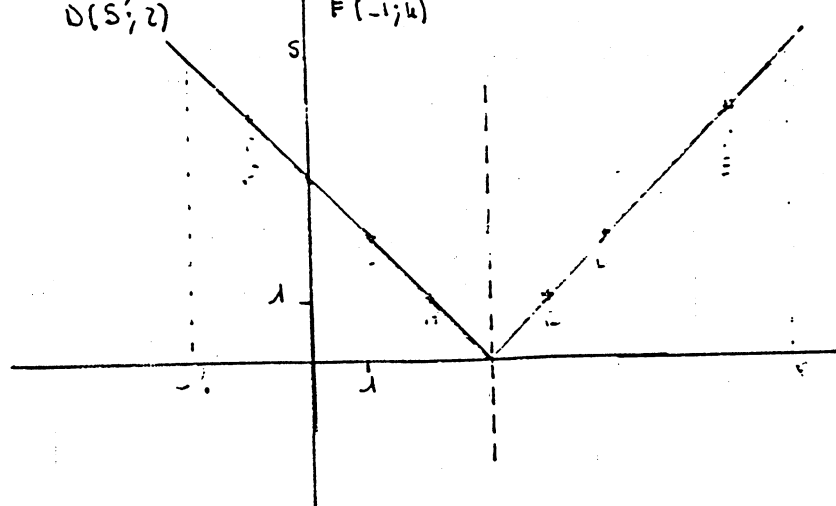
$$C(1; 2)$$

$$E(7; 4)$$

$$B(4; 1)$$

$$D(5; 2)$$

$$F(-1; 4)$$



$$A(2; 1) \Rightarrow f(x) = y \Rightarrow f(2) = 1 \quad ; \quad C(1; 2) \Rightarrow f(x) = y \Leftrightarrow f(1) = 2$$

$$B(4; 1) \Rightarrow f(x) = y \Leftrightarrow f(4) = 1 \quad ; \quad D(5; 2) \Rightarrow f(x) = y \Leftrightarrow f(5) = 2$$

$$E(7; 4) \Rightarrow f(x) = y \Leftrightarrow f(7) = 4 \quad ; \quad F(-1; 4) \Rightarrow f(x) = y \Leftrightarrow f(-1) = 4$$

Il y a un axe de symétrie, la bissectrice passant par le point (3; 0) et parallèle à l'axe des ordonnées, ces distances de x à 3 sont proportionnelles

$$a) |x-3| = 5 \Leftrightarrow y = 5$$

d'après le graphique $x = -2$ ou $x = 8$

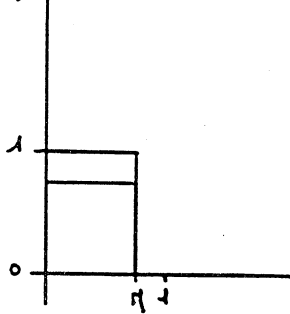
$$b) |x-3| < 5 \Leftrightarrow y < 5$$

d'après le graphique $x \in]-2; 8[$

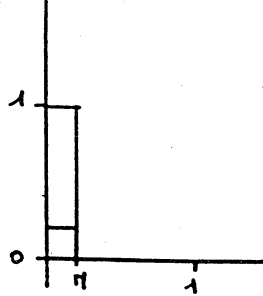
$$c) |x-3| > 5 \Leftrightarrow y > 5$$

d'après le graphique $x \in]-\infty; -2[\cup]8; +\infty[$

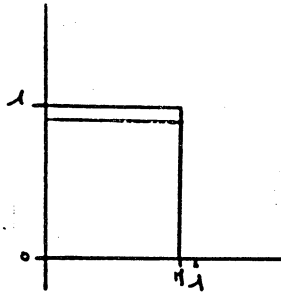
a) GROUPE 1



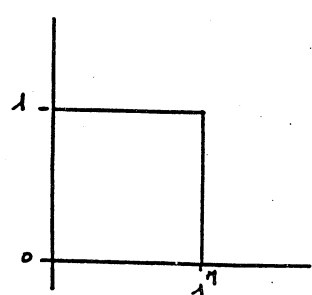
b) * $r = 0,2$



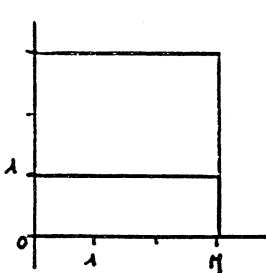
* $r = 0,9$



* $r = 1$



* $r = 9$



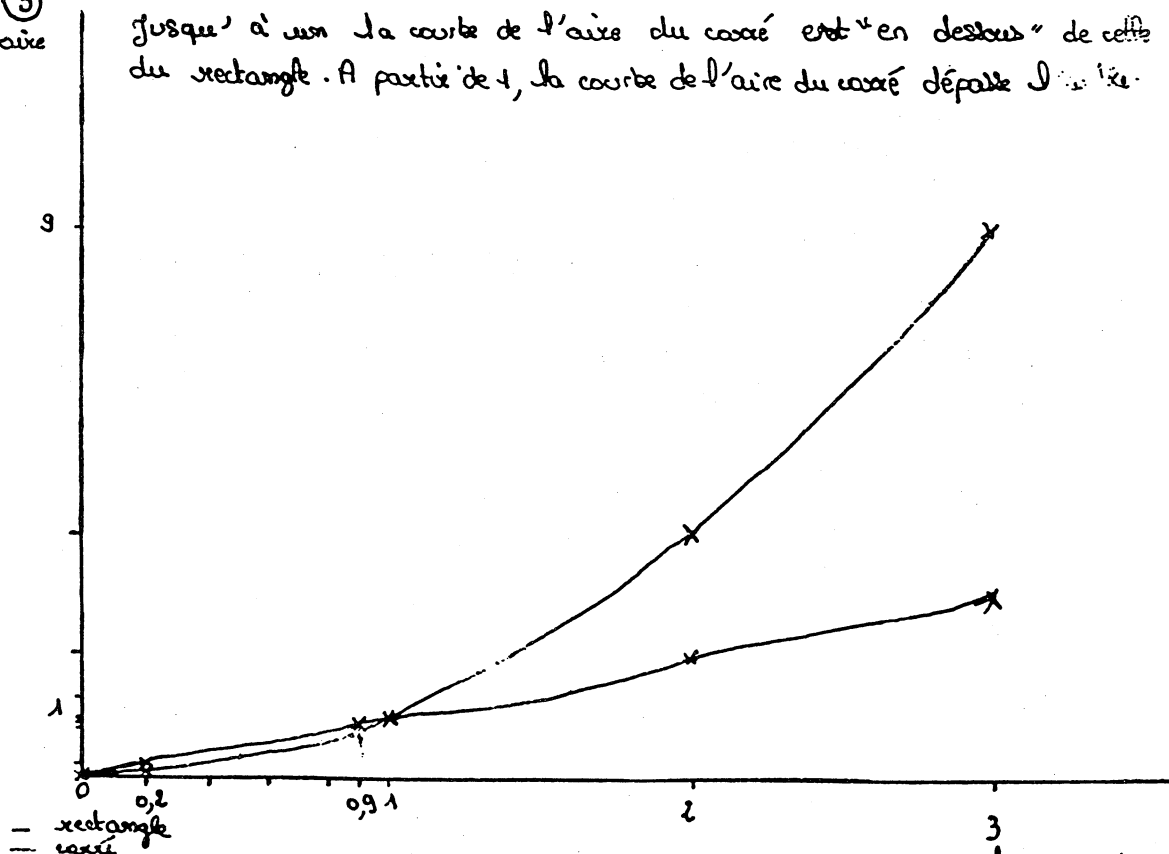
② * L'aire du carré est plus grande que celle du rectangle quand $r > 1$.

* L'aire du rectangle est plus grande que celle du carré quand $r < 1$.

* propriété algébrique: $r^2 > r$ si $r > 1$

③

Jusqu'à un la courbe de l'aire du carré est "en dessous" de celle du rectangle. A partir de 1, la courbe de l'aire du carré dépasse la 1^{re}.



④ La différence entre les 2 aires devient de plus en plus grande pour des grandes valeurs de r .

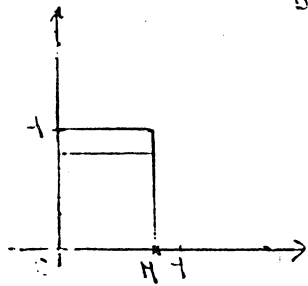
* $r = 10$ donc $A_{\text{carré}} = 100$
 $A_{\text{rectangle}} = 10$

* $r = 100$ donc $A_{\text{carré}} = 10000$
 $A_{\text{rectangle}} = 100$

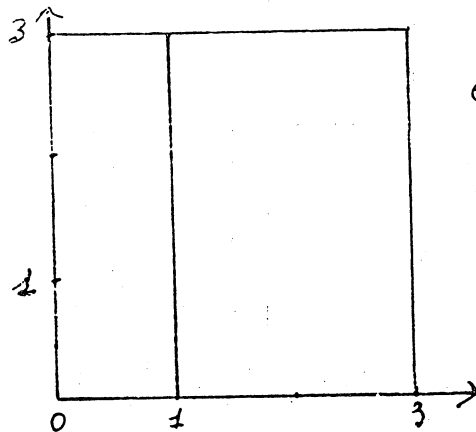
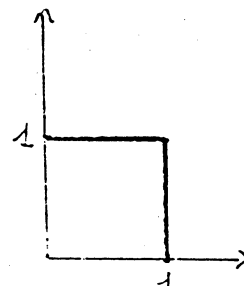
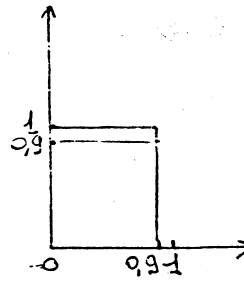
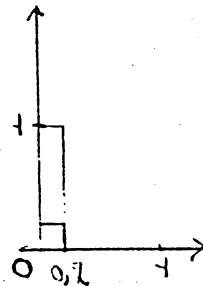
* $r = 1000$ donc $A_{\text{carré}} = 1000000$
 $A_{\text{rectangle}} = 1000$

① a)

GROUPE 2



b)



② L'aire du carré est plus grande que celle du rectangle pour $x = 3$

L'aire du rectangle est plus grande que celle du carré pour $x = 0.2$

et $x = 0.9$

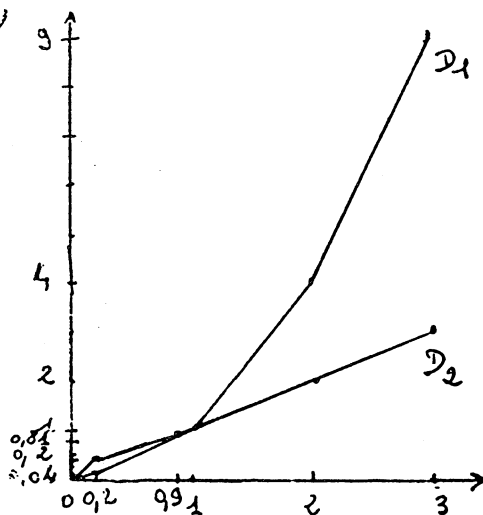
L'aire du rectangle est égale à celle du carré pour $x = 1$.

On constate que:

si $x > 1$ alors $x^2 > x$

si $x < 1$ alors $x^2 < x$

③



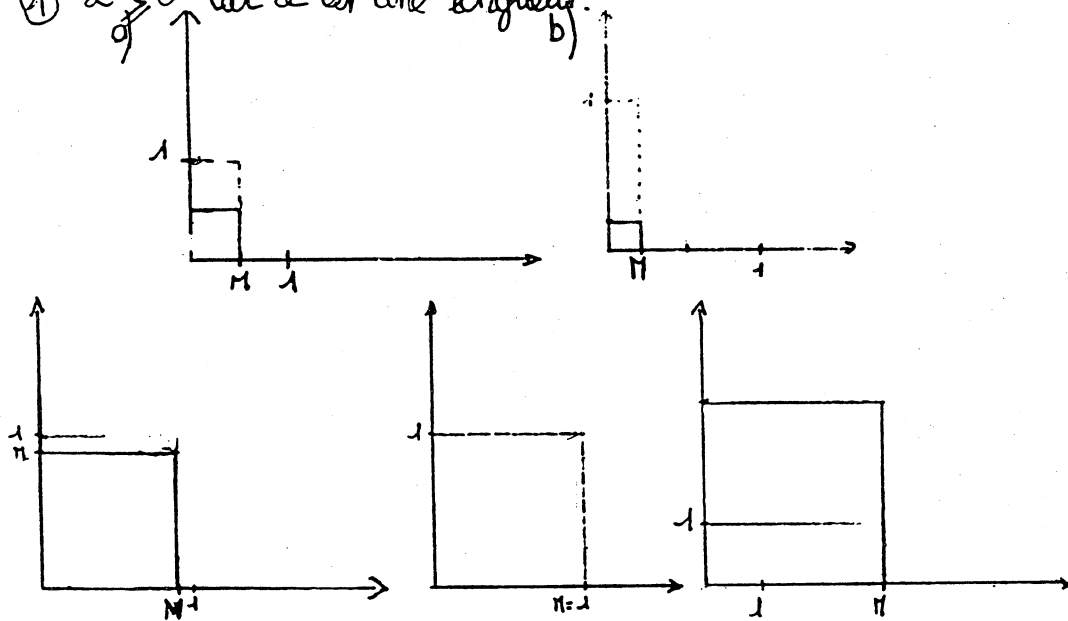
D_1 représente l'aire du carré

D_2 " " " du rectangle.

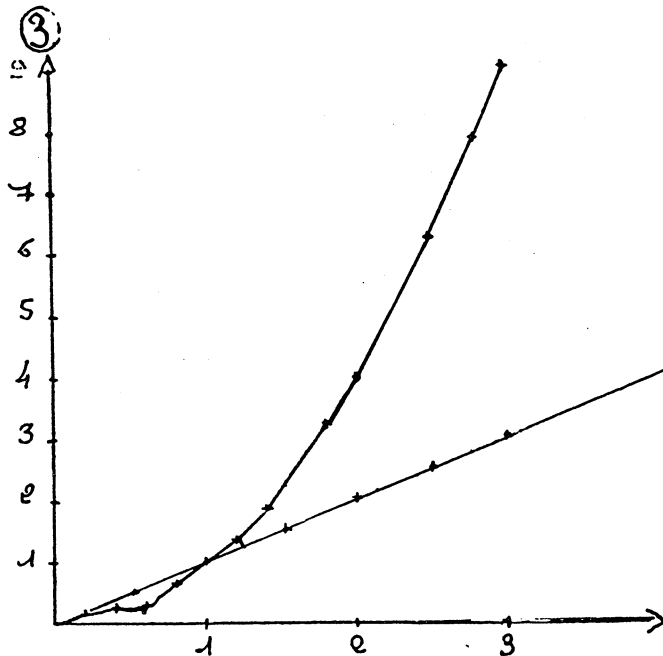
D_2 et D_1 sont sécantes au point de coordonnées $(1; 1)$.

GRUPE 3

① $x > 0$ car x est une longueur.



② Aire du carré est plus grande que l'aire du rectangle
 pour $x > 1$:
 $x^2 > x$ pour $x > 1$
 aire rectangle $>$ aire du carré pour $x < 1$:
 $x^2 < x$ pour $x < 1$



4) Pour de grandes valeurs de x ($x > 1$) on a $x^2 > x$

Aires des carrés:

$$x^2 = 10^2 = 100$$

$$x^2 = 100^2 = 10\,000$$

$$x^2 = 1000^2 = 1\,000\,000$$

Aires du rectangle

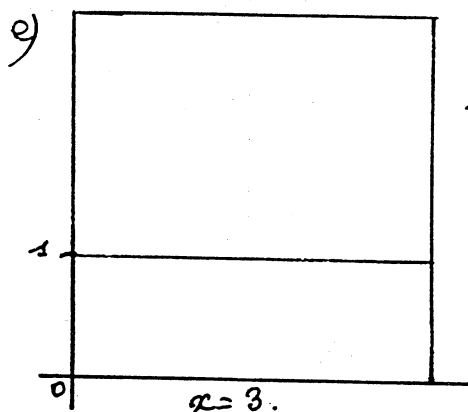
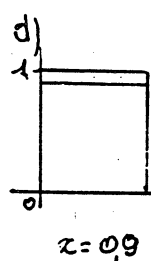
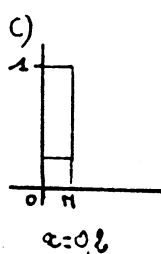
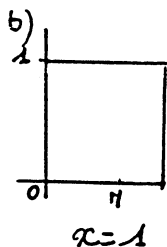
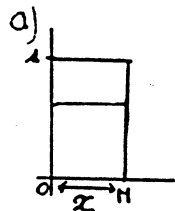
$$x = 10$$

$$x = 100$$

$$x = 1000$$

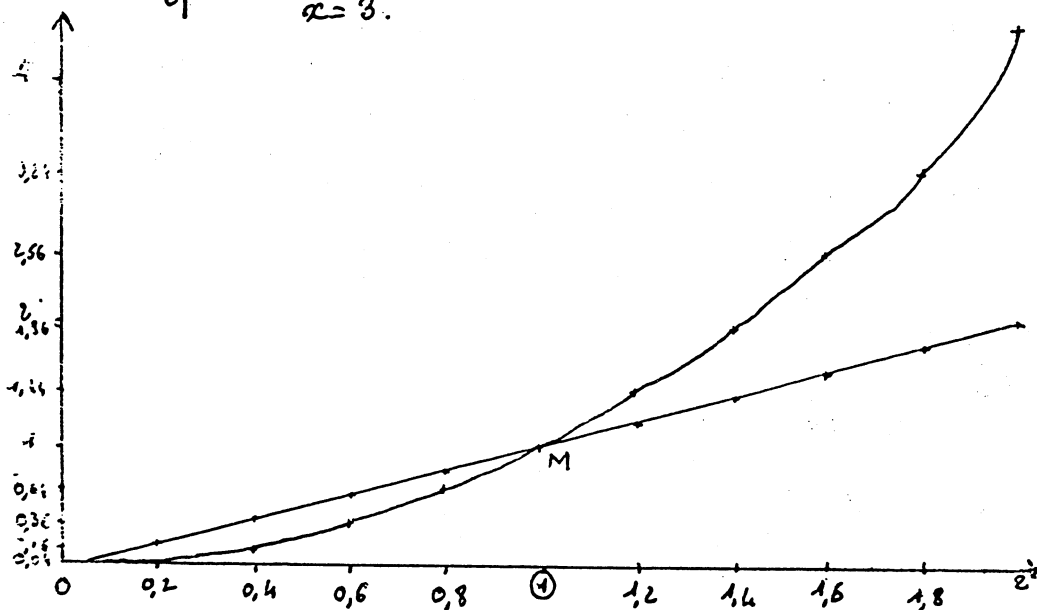
corré-

GRUPE 4



② L'aire du carré est supérieure à celle du rectangle dans le cas où $x > 1$
L'aire du rectangle est supérieure à celle du carré lorsque $x < 1$.

Propriété: si $x > 1$ alors $x^2 > x$
si $x < 1$ alors $x^2 < x$
si $x = 1$ alors $x^2 = x$



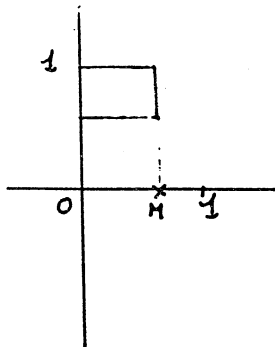
La propriété du ② se traduit par l'intersection des deux droites au point $M(1; 1)$.

③ Pour des grandes valeurs de x , l'écart entre x et x^2 devient de plus en plus grand.

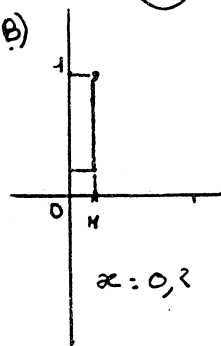
x	10	100	1000
aire du carré	100	10000	1000000
aire du rectangle	10	100	1000

GRUPE 5

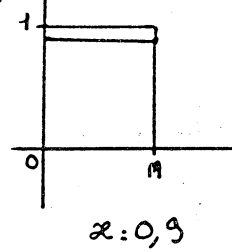
A)



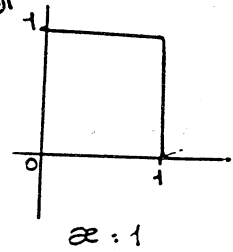
B)



C)



D)



I

II

pour $x^2 > x$ $x > 1$

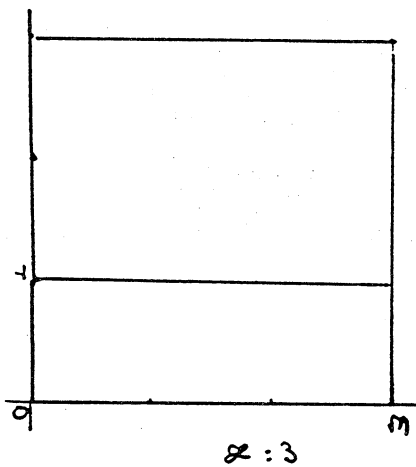
pour $x^2 < x$ $0 < x < 1$

(car un carré est toujours plus petit)

pour $x^2 = x$

$x = 1$

E)



IV

$x = 10$

aire carré = 100

aire rectangle = 10

$x = 100$

aire carré = 10 000

aire rectangle = 100

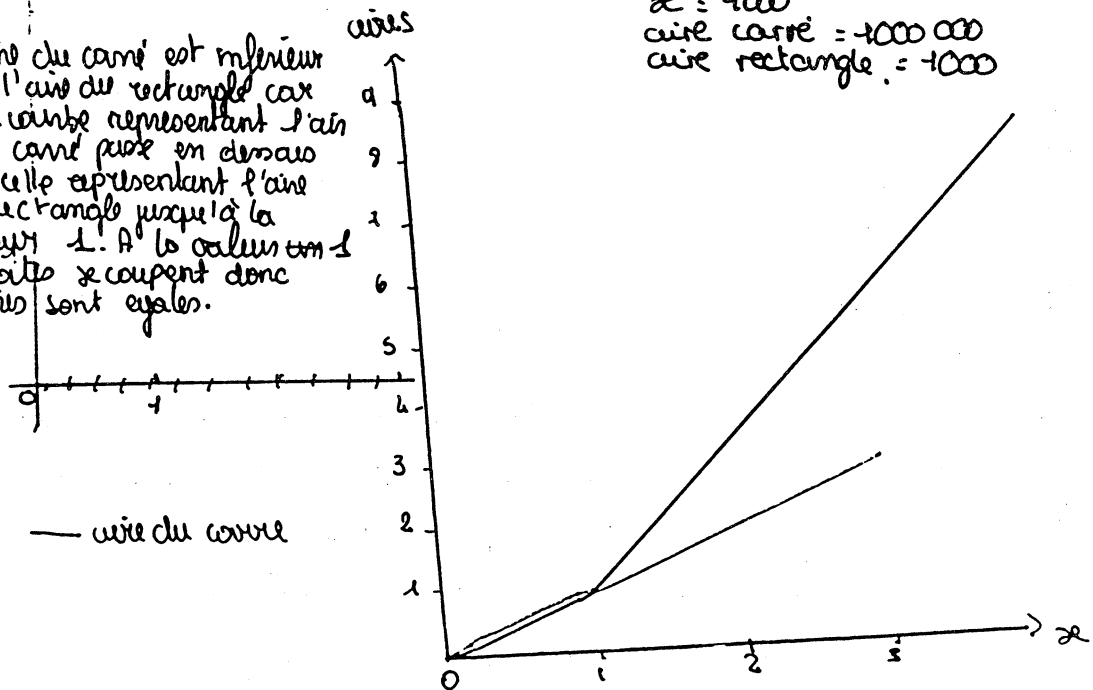
$x = 1000$

aire carré = 1 000 000

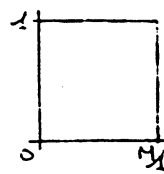
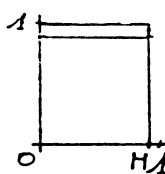
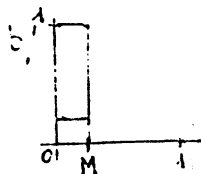
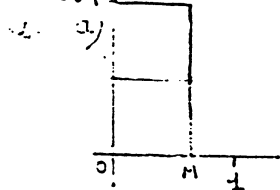
aire rectangle = 1000

III

L'aire du carré est inférieure à l'aire du rectangle car la courbe représentant l'aire du carré passe en dessous de celle représentant l'aire du rectangle jusqu'à la valeur 1. A la valeur 1 les droites se coupent donc les aires sont égales.



PROBLEME 6



② Lorsque $x > 1$, l'aire du carré est plus grande que celle du rectangle.

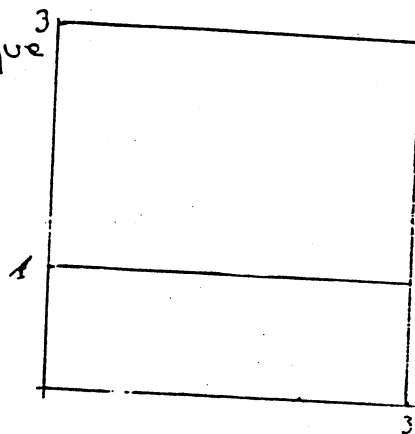
Lorsque $x < 1$, l'aire du rectangle est plus grande que celle du carré.

Soit $x > 0$

Si $x > 1$ alors $x^2 > x$

Si $x < 1$ alors $x > x^2$

Si $x = 1$ alors $x = x^2$



③

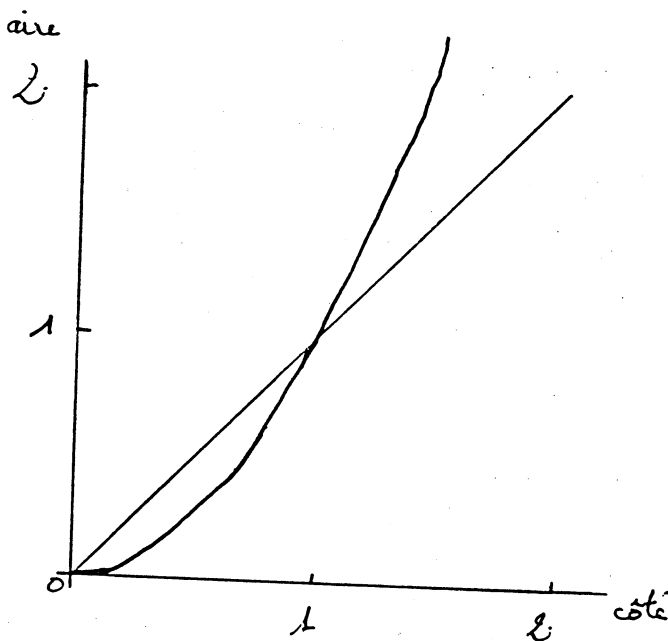
Soit $x > 0$

Si $x \in]0; 1[$ $x^2 < x$

pour $x = 0$ et $x = 1$

$$x^2 = x$$

Si $x \in]1; +\infty[$ $x^2 > x$



④

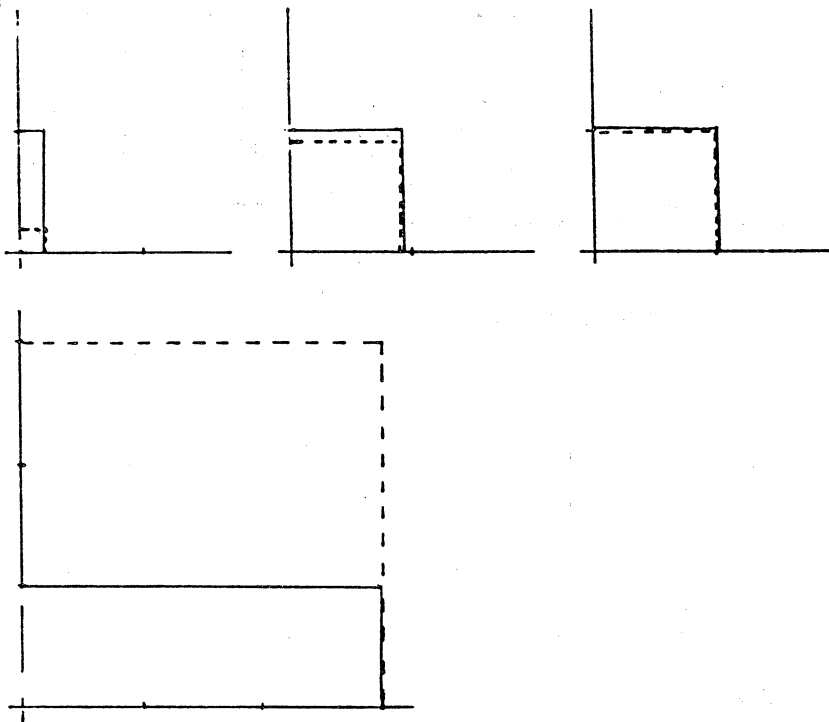
x	10	100	1000
aire du carré	100	10 000	1 000 000
aire du rectangle	10	100	1000

Pour des grandes valeurs de x , ($x > 1$), $x^2 > x$

The Best (E, G, G, L)

GRUPE 7

1)



2) l'aire du rectangle est plus grande que celle du carré pour les valeurs de x suivantes :

$$x = 0,2 \text{ et } x = 0,9$$

l'aire du carré est supérieure à celle du rectangle pour les valeurs de x suivantes :

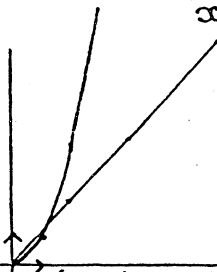
$$x = 3 \text{ et } x = 1,2$$

Pour $x = 1$, les deux aires sont les mêmes.

D'après les résultats ci-dessus nous pouvons noter la propriété algébrique suivante

$$\begin{aligned} \text{ lorsque } x < 1 &\Rightarrow x^2 < x \\ x > 1 &\Rightarrow x^2 > x \end{aligned}$$

3)



- Représentation de l'aire du carré en fonction de son côté
- Représentation de l'aire du rectangle en fonction de son côté

d'après le graphique nous pouvons constater que les courbes évoluent différemment et cela traduit le fait que quand

$$\begin{aligned} x < 1 &\Rightarrow x^2 < x \\ x > 1 &\Rightarrow x^2 > x \end{aligned}$$

4) Aire du carré

$$x = 10 \quad x^2 = 100$$

$$x = 100 \quad x^2 = 10000$$

$$x = 1000 \quad x^2 = 1000000$$

Aire du rectangle

$$x = 10 \quad a = 10$$

$$x = 100 \quad a = 100$$

$$x = 1000 \quad a = 1000$$

Nous pouvons donc remarquer que la valeur de l'aire du rectangle est égale à la racine carrée de l'aire du carré soit le côté du carré.

$$\begin{aligned} a &= \frac{x}{x} \\ x &= \sqrt{x^2} \end{aligned}$$

I

ACTIVITE 3

① valeur de x' , δ' abscisse de H' , dans chaque cas.

déf: $\sin \hat{H} = \frac{\cos \hat{H}'}{\cos \hat{H}}$ Soit $\tan \hat{H} = \frac{\sin \hat{H}}{\cos \hat{H}} = \frac{\cos \hat{H}'}{\sin \hat{H}} = \frac{1}{\tan \hat{H}'}$

soit $\hat{H} = \frac{1}{x}$

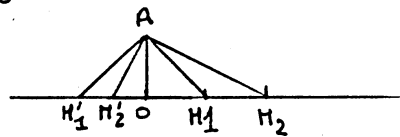
et x et x' de signes contraires

Soit $\frac{1}{x} = -x'$

$\tan \hat{H}' = \frac{1}{\mp x'}$

②

Quand x est compris entre 1 et 2, x' compris entre -0,5 et -1.



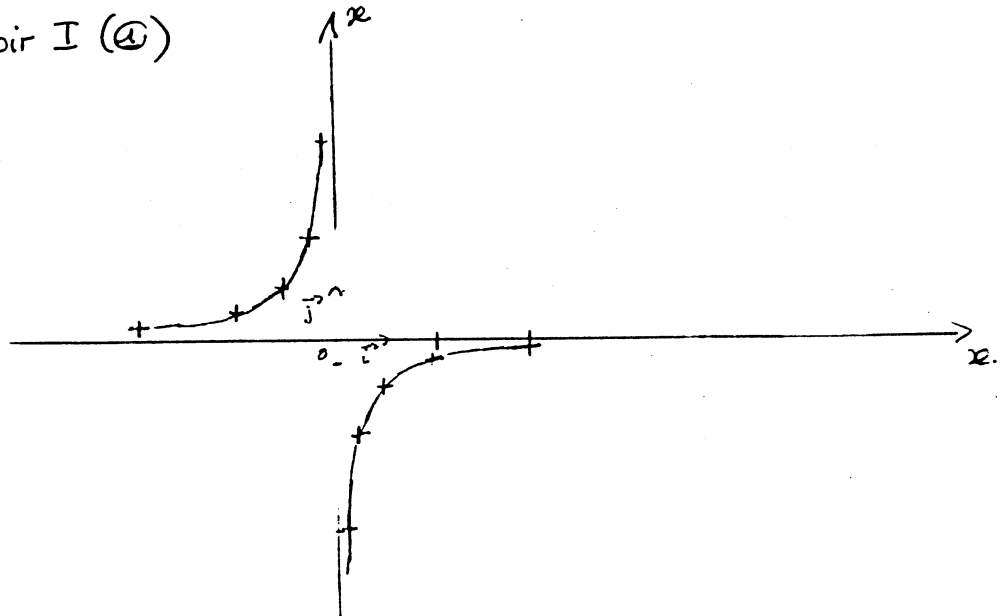
③ Lorsque x devient de plus en plus grand, H' se rapproche de plus en plus de 0 sans jamais l'égaliser, ni devenir positif. Lorsque x se rapproche de 0 en restant positif, H' s'éloigne de 0, tout en restant négatif.

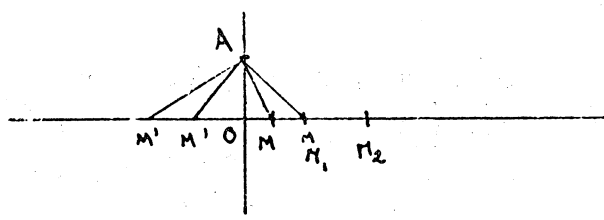
④ Si $x = -2$, $x' = \frac{1}{2}$

⑤ Si $H = 0$, alors H' ne sera pas sur D : il sera sur une droite parallèle à D. Donc H ne peut pas être en O.

II ① voir I (a)

②





1) Pour $x = 0,5$ $\tan \widehat{MAO} = \frac{OM}{OA} = \frac{0,5}{1} = 0,5$
 $\widehat{MAO} = 26,56^\circ$

$\widehat{MAO} + \widehat{OAN} = 90^\circ$

$\widehat{OAN} = 90^\circ - 26,56^\circ = 63,44^\circ$

$\cos \widehat{OAN} = \frac{ON}{AN} = \frac{1}{AN}$ $AN = \frac{1}{\cos \widehat{OAN}} = \frac{1}{\cos 63,44^\circ} = 2,23 \text{ cm}$

$AN^2 = AO^2 + ON^2$; $ON^2 = AN^2 - AO^2$; $ON = 2 \rightarrow x' = 2$
 $= 5 - 1 = 4$

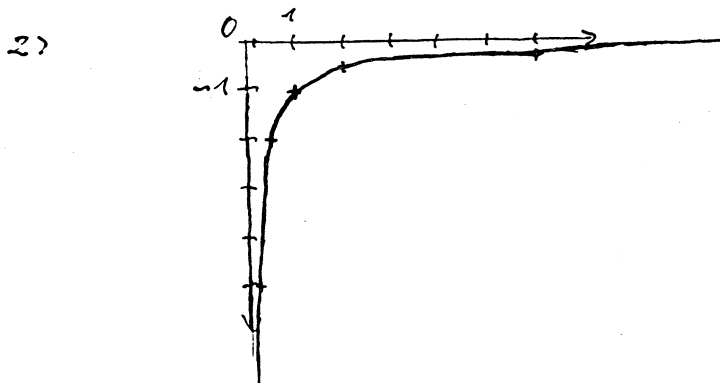
2) $x = 1$; $x' = -1$ $x = 2$; $x' = -0,5$
 si $1 < x < 2$ alors $-1 < x' < -0,5$

si x augmente alors x' augmente
 si $x > 0$ diminue alors x' diminue

4) au point M d'abscisse -2 correspond le point $N = \frac{1}{2}$. on peut généraliser ce résultat car dans les 2 cas, on a un triangle rectangle dont les mesures sont égales

5) Si M est en O, alors N est tel que $y = 1$

II 1) Pour $x = 0,5$, $x' = -2$ soit $-2 = -\frac{1}{0,5} \rightarrow x' = -\frac{1}{x}$
 Cette relation est valable pour toutes valeurs de x .



Activité 3:

○

$$x^2 + 1^2 = AM^2$$

$$x'^2 + 1^2 = AM'^2$$

$$AM^2 + AM'^2 = (x - x')^2$$

$$x^2 + 1 + x'^2 + 1 = x^2 + x'^2 - 2xx'$$

$$x^2 - x'^2 + x^2 - x'^2 + 2 = -2xx'$$

$$-1 = xx'$$

$$x' = -\frac{1}{x}$$

$$x = 0,2 \quad x' = -\frac{1}{0,2} = -5$$

$$x = 0,5 \quad x' = -\frac{1}{0,5} = -2$$

$$x = 1 \quad x' = -\frac{1}{1} = -1$$

$$x = 2 \quad x' = -\frac{1}{2}$$

$$x = 6 \quad x' = -\frac{1}{6}$$

$$x_1 = 1 \quad x'_1 = -\frac{1}{1} = -1$$

$$x_2 = 2 \quad x'_2 = -\frac{1}{2}$$

$$-1 < x' < -\frac{1}{2}$$

Si x augmente, $-\frac{1}{x}$ augmente, donc x' aussi.

Si x diminue en restant positif, $-\frac{1}{x}$ diminue, donc x' aussi.

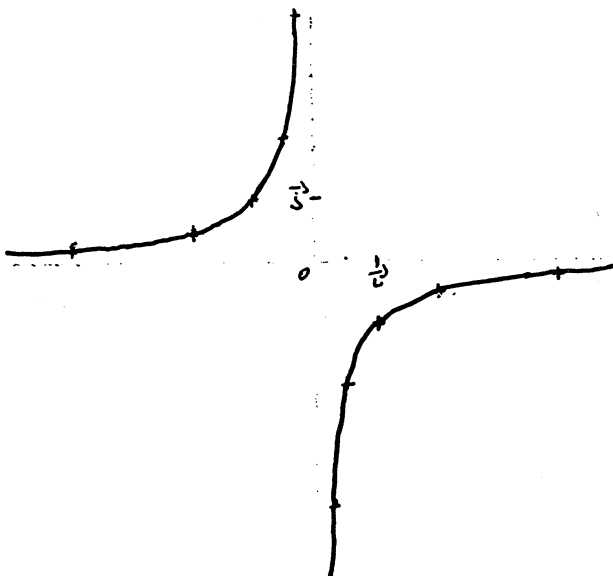
$$x_n = -2, \quad x'_n = -\frac{1}{-2} = \frac{1}{2}$$

A toute valeur de x correspond x' , tel que $x' = -\frac{1}{x}$ et $x = -\frac{1}{x'}$.

Si m est en O , m' est égal à l'infini.

○

Voir (I) 17.



SUPERPIG Ah que! Mais, Le jeu!!! et le Hors la loi

LINEARITE, CONTINUE :

ELEMENTS D'ANALYSE DES CONCEPTIONS DES

ELEVES DE SECONDE.

Ce travail a été réalisé dans une classe de Seconde de lycée, en fin d'année; il s'agissait de faire émerger les représentations des élèves à propos des concepts de linéarité et de continuité, ainsi que de discerner où la variable temporelle pouvait intervenir, même lorsqu'elle n'était pas explicite.

Le premier petit problème a été posé en exercice à la maison; il s'agit d'un énoncé qui figure dans "Enseignement des mathématiques utilisant la "réalité" ", IREM de Bordeaux, réédition février 92, page 74; ce problème est dû à Sylvie Bretin, professeur de mathématiques aujourd'hui décédée.

Le second vient d'un exercice du manuel Nathan de Seconde, mais dans le Nathan la courbe est donnée, alors que notre objectif est justement de la faire construire, c'est une différence essentielle.

1. LES PROBLEMES

Histoire de liquide:

On achète un liquide 4F le litre. On le met dans des récipients de 5 litres vendus 6F pièce. Quel est le prix total à payer en fonction du nombre de litres achetés ? On demande de représenter cette fonction.

Une promenade:

Deux amis, habitant la ville A, décident de faire une sortie d'agrément jusqu'à la ville C située à 55 km de là, en passant par B, éloignée de 45 km de A. L'un prend son vélo, l'autre sa voiture.

Le cycliste part de A à 8H30, il rejoint B à 10H45. Fatigué, il décide de s'y reposer et de se restaurer au bord de la route. Il repart à 11H20 pour rejoindre C, ce qu'il fait à la vitesse moyenne de 25 km/H.

L'automobiliste quitte A à 10H35 et arrive en C à 11H19 sans s'arrêter en B. A 13H, ils prennent place dans la voiture, après y avoir chargé le vélo, pour regagner A à la vitesse moyenne de 88 km/H.

En admettant, pour chaque véhicule, que la promenade se fait à vitesse moyenne constante, établir dans un même repère et en fonction du temps, la représentation graphique de la distance totale parcourue par chaque personne.

Déterminer graphiquement si les deux amis se rencontrent pendant le trajet aller. A quelle heure se retrouvent-ils en C ?

Modalités du travail en classe:

Ce travail a été effectué dans une classe de Seconde indifférenciée, plutôt bonne en mathématiques (20 élèves sur 32 ayant demandé et obtenu une orientation en Première scientifique), vers la fin de l'année, donc après l'étude en classe d'un certain nombre de fonctions non linéaires.

Les élèves ont préparé le premier exercice chez eux; les copies ont été relevées et les graphiques les plus caractéristiques photocopiés sur transparent. Pour ce qui est du deuxième exercice, il a été fait pendant la dernière demi-heure d'une séance de module, et de même les courbes obtenues par les élèves ont été reproduites sur transparent.

A la séance suivante (en module donc en demi-classe) l'enseignant projette les transparents; quelques élèves sont secrétaires, d'autres sont chargés de redire les phrases négligées éventuellement dans la discussion. Le professeur questionne les élèves sur leurs réalisations et guide l'échange par des reformulations ou des demandes de précisions. Il y a eu deux groupes (qui seront désignés plus loin par G1 et G2) donc deux débats.

Ce dispositif s'est avéré fonctionner de façon satisfaisante; il se réfère plus ou moins explicitement aux règles du débat scientifique en classe d'après Marc Legrand (cf par exemple "Recherches en didactiques des Mathématiques" vol.9/3).

2. HYPOTHESES ET ANALYSE A PRIORI

L'un des problèmes utilise donc explicitement le temps comme variable, l'autre non; il s'agit d'observer si cette variable va quand même intervenir dans le premier problème, de façon implicite et sous-jacente au raisonnement. En effet lors d'observations antérieures nous avons constaté que les élèves faisaient intervenir un facteur temporel dès qu'un problème semblait difficile à aborder en termes de variations: qui varie et par rapport à quoi?

Il pourrait s'agir d'un obstacle ontogénique, les élèves ayant jusqu'à un certain âge des difficultés à mettre à distance leur chronologie personnelle et ainsi à dépersonnaliser le savoir: "je me vois en train de faire ..." . On peut aussi penser à un obstacle épistémologique: à l'origine, les fonctions, dérivées... ont été introduites dans un contexte de mécanique, étude des trajectoires des mouvements des corps en fonction du temps.

Une autre question surgie à propos de ce travail, et que les résultats obtenus lors du débat n'ont pu que renforcer, est celle du rapport qu'ont les élèves à l'infini, et s'ils distinguent (ont appris à distinguer) entre infini dénombrable et infini non dénombrable. Il faut rappeler que l'étude des nombres réels (en tant que nombres "à virgule ayant une infinité de décimales") n'est plus au programme de collège, et on peut se demander de quelle façon, à l'aide de quelles activités, il conviendrait de l'introduire en classe de Seconde.

Si l'on doute de la nécessité de pratiquer des activités spécifiques sur l'infini et le continu, il faut se poser la question de la signification de l'introduction de la notion de limite en Première pour un élève qui ne connaît que l'infini dénombrable? (cf Warusfel, 1961)

3. CHRONIQUE DES SEANCES EN CLASSE

Histoire de liquide:

Le professeur projette d'abord les deux courbes continues (voir annexes), la droite et la courbe où les segments ont été raccordés.

Les élèves de G1 déclarent : "Ce n'est pas possible car on ne peut pas acheter des récipients par petits bouts, on peut acheter des fractions de litres mais pas des fractions de récipients".

Ceux de G2 : "Il ne faut pas que les morceaux se rejoignent car on est obligé d'acheter un récipient entier quand on n'a pas 5 L".

Ensuite vient une discussion sur la continuité et la proportionnalité: pour G1, la fonction serait continue si, "quand la quantité augmente par fractions de litres, le prix augmente aussi par petits bouts, et proportionnellement".

Dans ce groupe, continuité et proportionnalité sont indissolublement liées. Les élèves déclarent : "Une fonction continue, qui passe par O, c'est forcément proportionnel", "C'est obligé de passer par O, car si on achète 0 L on paye 0 F."

Le professeur demande alors de préciser les rapports entre continuité et proportionnalité, et les élèves répondent :

proportionnel, c'est linéaire
pas continu, c'est pas proportionnel
proportionnel = continu et qui passe par O

* Question de l'enseignant : "Dans ce cas précis, ou pour toutes les fonctions?"

* Réponse : "Pour TOUTES les fonctions"

Pour les élèves de G1, "on ne peut pas avoir une seule fonction". "Si on pense en nombres entiers de litres, alors il y a un vide vertical, mais aussi horizontal". "Non "dit un autre, "car on peut imaginer une chaîne avec les récipients qui se remplissent, il y a forcément un décalage car on s'arrête, donc ce n'est plus continu car on change de récipient". "Le temps "intervient un autre élève, "n'a rien à voir dans le prix" ce qui prouve bien que le modèle du temps intervenait!

Dans ce groupe, il semble qu'il y ait une "conception naïve" de la continuité par:

- on ne travaille pas que sur les entiers,
- si x augmente un petit peu, y augmente un petit peu,
- continu c'est linéaire et linéaire c'est continu.

Dans le deuxième groupe, la majorité pense que la courbe "affine par intervalles" est juste, mais il y a discussion pour savoir si elle devrait passer par O. "Quand on achète 0 L, on paye 0 F; mais si on achète 0,01 L, on doit acheter un récipient entier." Finalement ils s'accordent sur : "Il faut mettre un point sur O."

Dans ce groupe, l'opinion est que le prix n'est pas proportionnel au nombre de litres achetés.

* Question du professeur : " C'est quoi proportionnel?"

* Réponse : " Une droite, linéaire, et qui passe par O." On notera la redondance.

La discussion porte alors sur le linéaire; pour les élèves, il y a du "linéaire proportionnel" et du "linéaire affine".

Cette conception n'est pas dénuée d'une certaine pertinence; on peut se reporter à la thèse de T.Assude (1992), "Un phénomène d'arrêt de la transposition didactique", p. 287 à 291, et se féliciter que cette situation de "variations proportionnelles de deux grandeurs" soit dans une certaine mesure perçue par les élèves.

On enchaîne sur le continu: "La première courbe (la droite) est continue; celle-ci est discontinue".

* Question du professeur : " C'est quoi continu?"

* Réponse : "Pas de morceaux, et toutes les valeurs de y sont prises."

* Question : "Et les valeurs de x?"

* Réponse: "Dans les deux cas (continu ou pas) toutes les valeurs de x sont prises."

On peut admirer! et penser que ces élèves, si on ne les maltraite pas par trop de formalisme, sont bien partis pour comprendre le programme d'analyse des classes supérieures.

Le professeur pose alors à ce groupe la même question des rapports entre continu, linéaire, passe par O:

linéaire $\Rightarrow$ passe par O;

linéaire $\Rightarrow$ continu;

Les élèves s'accordent pour dire qu'il n'y a pas forcément d'autres implications. (Le mot et le symbole d'implication ne sont pas employés avec les élèves, on a fait un schéma de correspondance au tableau).

Un élève donne l'exemple du minitel: dès qu'on est connecté on paye 4F; c'est-à-dire: on ne passe pas par l'instant zéro. Et nous voici revenus au temps!

* Question : "Le temps est-il continu?"

* Réponse des élèves : "Oui; mais sa mesure ne l'est pas, même avec une horloge atomique."

Il y a donc perception par les élèves de la distinction entre le phénomène temps et sa mesure, avec peut-être une conception platonicienne sous-jacente de "temps idéal" continu dont la mesure ne serait qu'une image discontinue imparfaite: ceci mériterait plus ample investigation!

D'ailleurs les élèves précisent que si l'on "mesure" le temps grâce au soleil, c'est une mesure continue.

* Question : "La matière est-elle continue?"

* Réponse : "Non; de plus elle est lacunaire."

* Question : "Alors dans ce cas le continu c'est quoi?"

* Réponse : "C'est l'infini."

Mais ils ne savent pas expliquer.

Dans les dernières répliques il y en a un manifestement qui exploitait un récent cours de physique; par ailleurs il ne faudrait surtout pas croire que cet échange ait été laborieux, que les élèves hésitaient, que le professeur ait dû leur extorquer les réponses: au contraire, elles venaient très naturellement et avec beaucoup d'aisance. Cet échange semble prouver en tous cas que les conceptions des élèves sont suffisamment riches pour offrir matière à ample réflexion et exploitation ultérieure en classe, et qu'il serait dommage de les négliger.

Une promenade:

L'erreur la plus courante est la droite de coefficient directeur négatif pour le retour, soit une confusion entre distance parcourue et abscisse. Tous s'accordent pour dire qu'il faut tracer des segments de droites horizontaux à l'arrêt. Un seul ne l'a pas fait, peut-être par manque de temps: il s'agit d'une courbe non achevée.

L'un a mis le temps en fonction des kilomètres parcourus; cela choque les autres, mais beaucoup ne sont pas capables d'expliquer pourquoi.

Raisons invoquées: "Dans la vie courante, c'est la distance qui varie en fonction du temps". "Il doit y avoir la référence sur l'axe des x, et la référence c'est le temps". "Le coefficient directeur serait l'inverse de la vitesse." (un élève seul). "Ce n'est pas une fonction." (un élève seul)

4. CONCLUSION

Il semble donc que coexistent plusieurs conceptions:

- de la linéarité: "linéaire passe par O" ou "linéaire affine";
- de la continuité: pour certains c'est discontinu quand la variable est entière, et c'est continu quand elle peut prendre des valeurs ... décimales (c'est le problème de l'ignorance des élèves au sujet de $\mathbb{R}$).

Donc il y a confusion entre la continuité de la variable (de l'ensemble de départ $\mathbb{R}$) et la continuité de la fonction. On peut se référer au travail à ce sujet du groupe de Bordeaux sur les réels (J.M.Digneaux), ainsi qu'au Cahier de didactique n° 21 de l'IREM de Paris VII : "Les réels: quel modèle en ont les élèves ?" de J.Robinet.

Le problème qui est revenu dans les deux groupes est celui de : "passe par O". C'est à quoi on ne s'attendait pas a priori car il ne semblait pas y avoir de lien avec la continuité, mais on le retrouve côté linéaire, or les rapports linéarité - continuité semblent assez confus, du moins dans un groupe.

Donc on peut conclure sur une relative "déception" de l'observateur qui n'a pas observé au sujet du temps tout à fait ce à quoi il s'attendait (il n'y a pas "rupture" dans les courbes quand la voiture s'arrête);

- une confirmation de la prégnance du linéaire, c'est la référence obligée par où passe la réflexion des élèves, et c'est bien normal vu le "dressage" subi dès le collège;
- des surprises agréables par contre quant à la profondeur des intuitions des élèves au sujet de la continuité;
- et à ce sujet la nécessité semble s'imposer de retrouver une étape d'apprentissage au sujet de la nature des nombres réels: le moment le mieux choisi semble le début de la classe de Seconde, ce qui donnerait une autre dimension aux révisions généralement fastidieuses sur les techniques de calcul; la forme retenue est à discuter, ce ne serait pas forcément un "cours" classique mais plutôt des activités autour d'une problématique.

THE UNIVERSITY OF CHICAGO

THE UNIVERSITY OF CHICAGO

THE UNIVERSITY OF CHICAGO

THE UNIVERSITY OF CHICAGO

THE UNIVERSITY OF CHICAGO

THE UNIVERSITY OF CHICAGO

THE UNIVERSITY OF CHICAGO

THE UNIVERSITY OF CHICAGO

THE UNIVERSITY OF CHICAGO

THE UNIVERSITY OF CHICAGO

THE UNIVERSITY OF CHICAGO

THE UNIVERSITY OF CHICAGO

THE UNIVERSITY OF CHICAGO

THE UNIVERSITY OF CHICAGO

THE UNIVERSITY OF CHICAGO

THE UNIVERSITY OF CHICAGO

THE UNIVERSITY OF CHICAGO

THE UNIVERSITY OF CHICAGO

THE UNIVERSITY OF CHICAGO

THE UNIVERSITY OF CHICAGO

THE UNIVERSITY OF CHICAGO

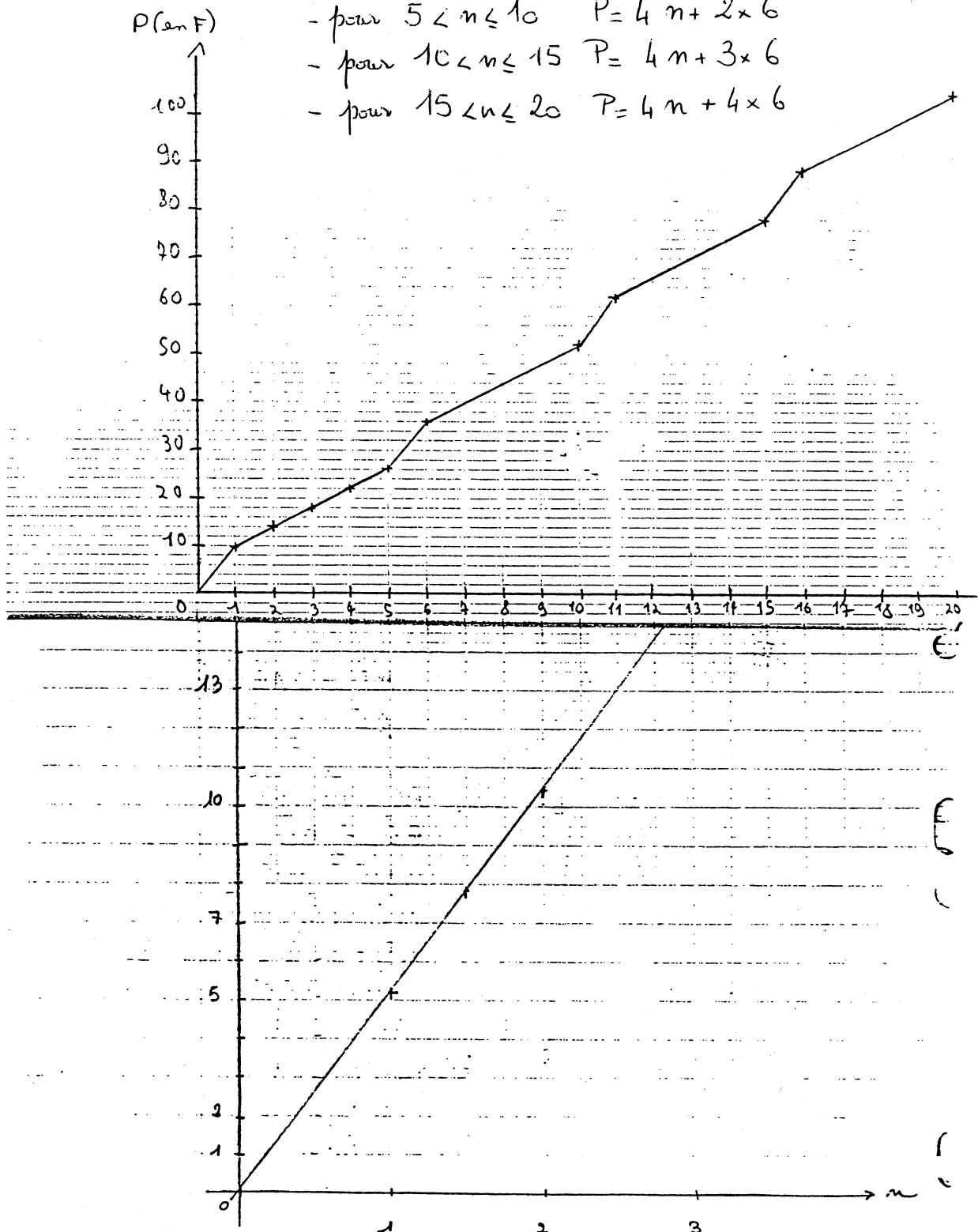
THE UNIVERSITY OF CHICAGO

THE UNIVERSITY OF CHICAGO

**LINÉARITÉ, CONTINUITÉ :
ÉLÉMENTS D'ANALYSE DES CONCEPTIONS
DES ÉLÈVES DE SECONDE**

ANNEXES

- pour $n \leq 5$ $P = 4n + 6$
- pour $5 < n \leq 10$ $P = 4n + 2 \times 6$
- pour $10 < n \leq 15$ $P = 4n + 3 \times 6$
- pour $15 < n \leq 20$ $P = 4n + 4 \times 6$



Soit n le nombre de litres achetés; y le prix à payer.

$$y = n \times 4 + \frac{n}{5} \times 6 \quad y = 4n + 6 \frac{n}{5}$$

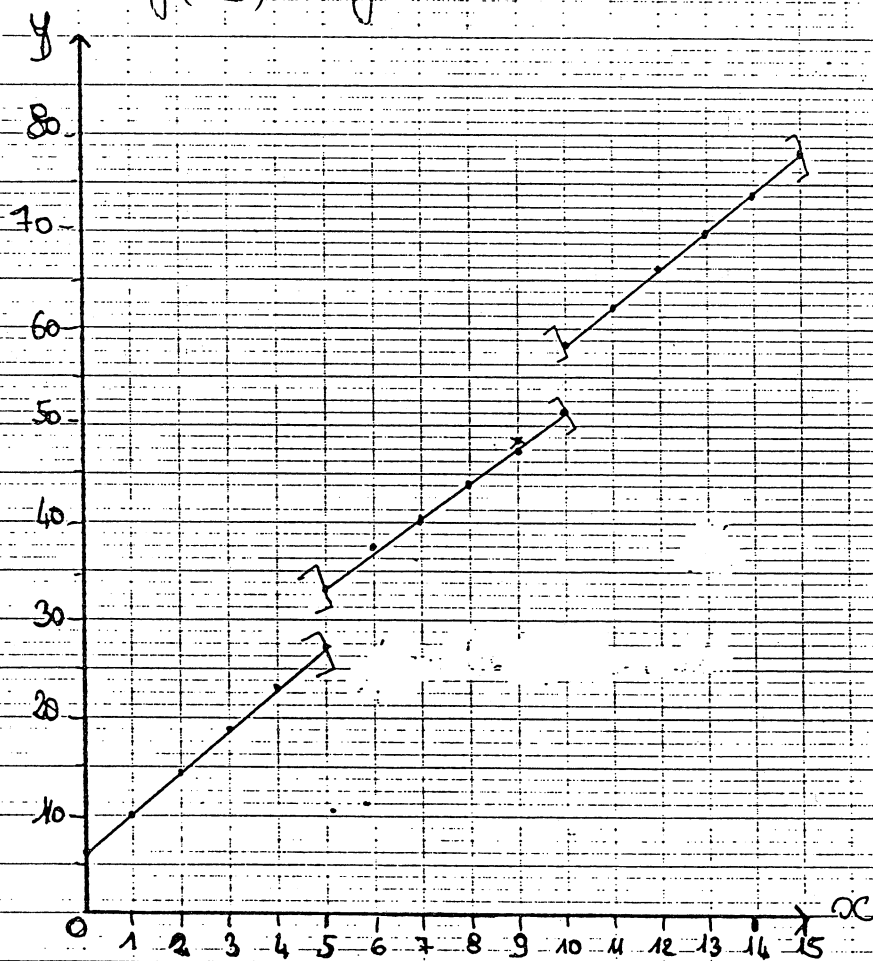
$$y = 20n + 6 \frac{n}{5} \quad y = 26 \frac{n}{5}$$

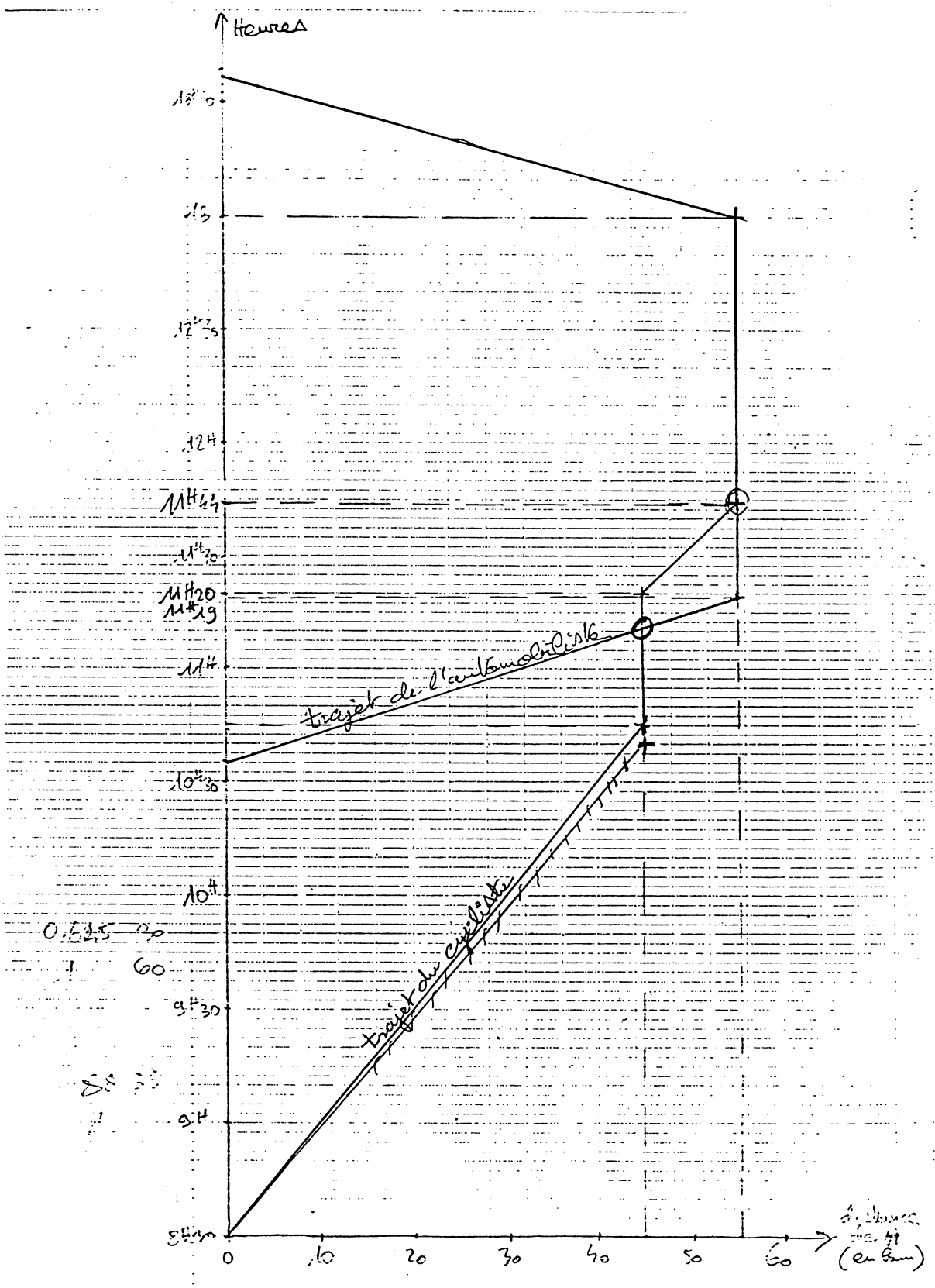
On trace les fonctions:

$$f(m_1): y = 4x + 6$$

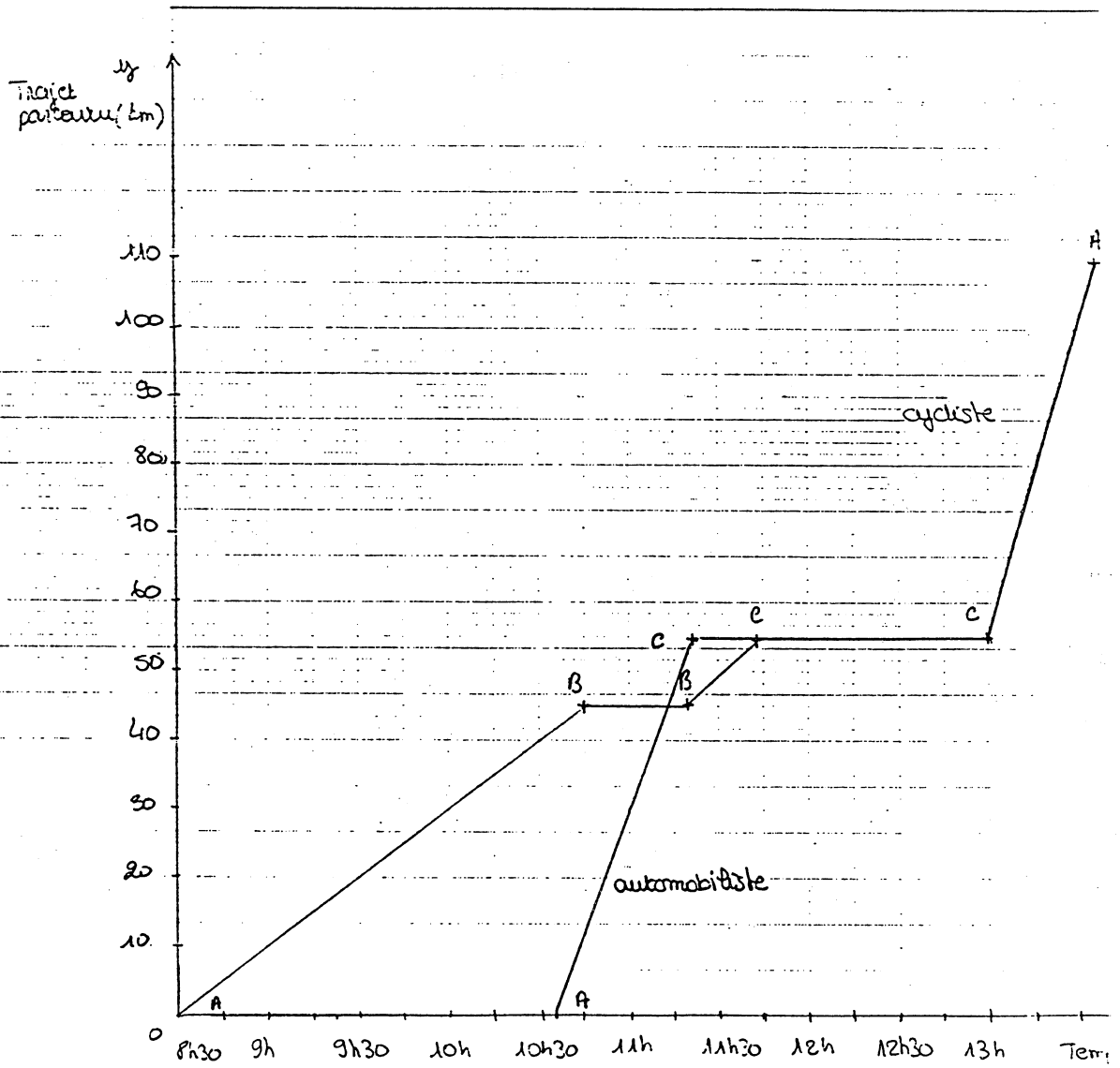
$$f(m_2): y = 4x + 12$$

$$f(m_3): y = 4x + 18$$





MATHS



BIBLIOGRAPHIE

- Apéry et al. (1982) *Penser les mathématiques* Points Sciences
- Berté A. (1993) *Mathématique dynamique*. Nathan
- Dhombres J. (1978) *Nombre, mesure et continu*. Nathan
- Houzel, Ovaert, Raymond (1976) *Philosophie et calcul de l'infini*
Maspéro
- IREM de Poitiers *Limites et infini au lycée*
- Johsua S. et Dupin J.J. (1993) *Introduction à la didactique des sciences et des mathématiques* PUF
- Lobry C. (1989) *Et pourtant ... ils ne remplissent pas $\mathbb{N}$!* Aléas (Lyon)
- Meirieu P. (1987) *Itinéraire des pédagogies de groupe* Ed. Chronique Sociale
- Recherches en didactique des mathématiques, éd. La Pensée Sauvage, Grenoble, en particulier les volumes 6/1, 7/2, 9/3.
- Repères n° 10 (1993) *Introduction à la notion de fonction en seconde*
Groupe "Lycée", IREM de Clermont-Ferrand
- Warusfel A. (1961) *Les nombres et leurs mystères* Points Sciences

TITRE : FONCTIONS DU COLLEGE AU LYCEE

AUTEUR: GROUPE HORIZONS MATHEMATIQUES DE PAU (IREM DE BORDEAUX)

DATE: FEVRIER 1994

RESUME: Cette brochure rend compte d'un essai d'ingénierie didactique sur le concept de fonction, de la Quatrième à la Seconde. La première partie est la chronique de séquences en classe de Quatrième; la deuxième partie, d'activités en Seconde, et la troisième partie est une ébauche d'analyse des conceptions des élèves de Seconde sur le continu et l'infini. En annexes figurent des travaux d'élèves exécutés dans le cadre de ces activités.

MOTS-CLES: DIDACTIQUE
LINEARITE
PROPORTIONNALITE
OBSTACLES
FONCTIONS
TRAVAIL EN PETITS GROUPES D'ELEVES

