UNIVERSITE
BORDEAUX 1

IREM DE BORDEAUX

Mathématiques du Signal

TOME 2

Notions sur les distributions
Fonction de transfert isomorphe des systèmes causaux

Ont participé à l'élaboration de ce fascicule:

Raymond BOUDIE	Professeur de Physique appliquée, Lycée J.-B. de Baudre 47 AGEN
Serge DUPUY	Professeur de Mathématiques, Lycée J.-B. de Baudre 47 AGEN
Michel PUJOS	Professeur de Mathématiques, Lycée J.-B. de Baudre 47 AGEN
Joël RIVOAL	Professeur de Maths-Sciences, Lycée Professionnel 47 FOULAYRONNES

AGEN 1994

AVANT-PROPOS

Cet ouvrage est notamment destiné aux enseignants de Mathématiques et de Sciences Physiques des classes de Techniciens Supérieurs (en particulier Electronique). Nous espérons qu'il pourra être utile également aux étudiants de ces sections, ainsi qu'aux étudiants de certains I.U.T et Ecoles d'Ingénieurs .

C'est à partir d'interrogations nées lors de discussions entre professeurs de Physique et de Mathématiques, notamment sur la transformation de Laplace en classe de Techniciens Supérieurs, que nous avions rédigé le Tome I. Il voulait répondre à un besoin urgent : clarifier certaines notions que nous devons enseigner et unifier le langage des professeurs de Mathématiques et de Physique.

Le tome I se refère au programme de Mathématiques des classes de Techniciens Supérieurs et propose, en outre, un aperçu de notions indispensables pour traiter le programme de Physique de ces classes (Chapitre C : Fonctions de Transfert).

Restaient cependant en suspens, entre autres, une définition satisfaisante de l'impulsion de Dirac et les moyens de maîtriser de manière plus générale la mathématisation des problèmes physiques étudiés. C'est à ces questions que tente de répondre le tome II. Nous avons essayé, en ayant le souci constant d'être guidés par les problèmes concrets posés sur " le terrain ", de :

- préciser la modélisation des systèmes physiques
- éliminer les confusions entre fonctions et distributions, dérivées des fonctions et dérivées au sens des distributions, équations différentielles et équations de convolution,...

Le chapitre 1 (Introduction à l'Analyse du Signal) pose les problèmes. Le chapitre 2 donne quelques notions sur les distributions (dont les signaux discrets). Sont abordées, ensuite, la dérivation des distributions (chapitre 3), la convolution et la réponse impulsionnelle d'un système (chapitre 4) Le chapitre 5 étudie les systèmes physiques causaux. On y aborde la transformation de Laplace des distributions et la notion de " signal propre " .

Certaines des propriétés de la transformation de Laplace sont introduites en s'appuyant sur des propriétés des systèmes physiques. Le dernier chapitre se termine par l'étude des systèmes dont la fonction de transfert isomorphe est une fonction rationnelle et précise comment on peut modéliser le système suivant la nature du signal d'entrée .

Dans tout cet ouvrage, ce qui a guidé le choix des notions mathématiques introduites est l'utilité de ces notions dans la mathématisation des problèmes physiques. C'est pourquoi, beaucoup de définitions et de théorèmes apparaissent à partir des propriétés des systèmes physiques. De même, nous avons omis certaines démonstrations lorsqu'elles nous ont paru trop abstraites ou non indispensables pour une bonne compréhension du texte. En général, une référence bibliographique signale dans ce cas un ouvrage où la démonstration absente peut être trouvée.

Nous nous sommes efforcés de proposer des exercices variés, les uns axés plus particulièrement vers l'utilisation en physique des notions mathématiques abordées, les autres plus " mathématiques ".

TABLE DES MATIERES

CHAPITRE I

Introduction à l'analyse du signal

CHAPITRE II

Notions sur les distributions

CHAPITRE III

Dérivation des distributions

Exemples de distributions non régulières

CHAPITRE IV

Systèmes physiques et convolution

CHAPITRE V

Fonction de transfert isomorphe

Chapitre 1

INTRODUCTION A L'ANALYSE DU SIGNAL

■ Un système physique $\mathcal{S}$ (machine, événement, ...) tel qu'un signal donné , dit signal d'entrée, que nous noterons en général $\mathcal{E}$, u ou v (ou $\mathcal{E}(t)$, u(t) ou v(t) s'il est commode de préciser la variable) est transformé en signal de sortie que nous noterons s ou s(t) .

I.- Utilisation en Physique d'une équation différentielle .

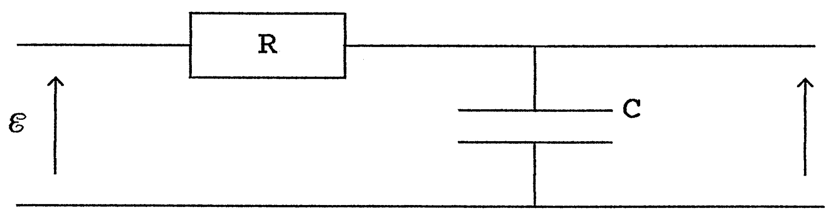
■ En Physique, au niveau Terminale et en début de classe de T.S., on suppose généralement que les signaux d'entrée et de sortie sont des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, et on associe au système physique une équation différentielle linéaire liant l'entrée et la sortie.

La sortie est la solution de cette équation différentielle vérifiant des conditions déduites de l'étude physique du système. Mais nous verrons que les signaux d'entrée et de sortie ne sont pas nécessairement des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.

1) Etude d'un exemple de système physique

(Pour tout cet exemple on se reportera au Tome 1 : Equations différentielles et Transformation de Laplace) .

Soit $\mathcal{S}_1$ le " système R C " ci-dessous :



τ = RC

On lui associe l'équation différentielle suivante :

$$\tau \frac{ds}{dt} + s = \mathcal{E} \quad (\mathcal{E} \xrightarrow{\mathcal{S}_1} s)$$

On suppose qu'initialement le condensateur n'est pas chargé, donc $s(0+) = 0$.

a) *Si $\mathcal{E}$ est une fonction continue sur $[0,+\infty[$*

On sait qu'il existe une solution de cette équation différentielle et une seule s sur $[0,+\infty[$ vérifiant $s(0+) = 0$. On peut résoudre directement cette équation différentielle, on sait que la solution s ainsi obtenue est continue sur $[0,+\infty[$, et d'ailleurs continûment dérivable sur $[0,+\infty[$.

Le fait que s est continue est conforme à l'analyse physique du système : dans ce cas, la tension aux bornes du condensateur ne peut pas varier brutalement et la sortie est continue .

Résolvons cette équation différentielle sur $[0,+\infty[$, en supposant que le signal d'entrée est nul pour tout $t < 0$ et que l'on connait $s(0^+)$.

Supposons que $\mathcal{E}(t) = \mathcal{U}(t)$.($\mathcal{U}$ fonction échelon unité). Une méthode habituelle de résolution de cette équation différentielle est l'utilisation de la transformation de Laplace.

$$\text{si} \quad s \xrightarrow{\mathcal{L}} S \quad \text{alors,}$$

$$\frac{ds}{dt} \xrightarrow{\mathcal{L}} p\,S(p) - s(0^+) \text{ ,car s est continue sur } \mathbb{R}_+;$$

$$\mathcal{E} = \mathcal{U} \xrightarrow{\mathcal{L}} E, \text{ où } E(p) = \frac{1}{p} \text{ pour tout } p > 0.$$

On obtient $\tau\,(\,p\,S(p) - s(0+)\,) + S(p) = \frac{1}{p}$, soit

$$S(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p + \frac{1}{\tau}} + \frac{s(0+)}{p + \frac{1}{\tau}}$$

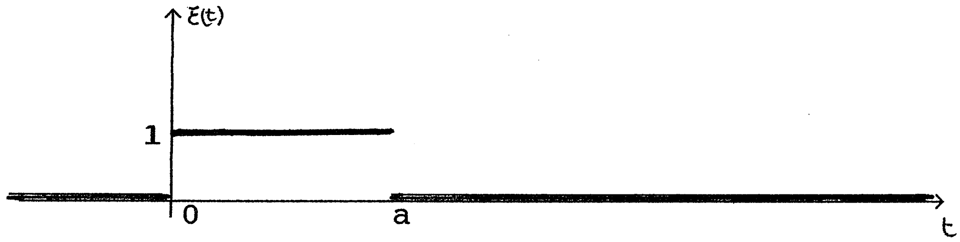
$$(1) \quad s(t) = \mathcal{U}(t)\,(\,1 - e^{-\frac{t}{\tau}} + s(0+)\,e^{-\frac{t}{\tau}}\,)$$

Ici, $s(0+) = 0$, donc $s(t) = \mathcal{U}(t)\ (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$

Remarquons que si t tend vers 0 à droite dans le second membre de (1) on trouve bien $\lim\limits_{t \to 0+} s(t) = s(0+)$.

b) *Si $\mathcal{E}$ présente , par exemple, un saut en $t = a$*

Prenons , par exemple, $\mathcal{E}(t) = \mathcal{U}(t) - \mathcal{U}(t-a)$.



On doit alors résoudre :

(A) $\tau \dfrac{ds}{dt} + s = 1$ sur $[0, a]$, $s(0+) = 0$

(B) $\tau \dfrac{ds}{dt} + s = 0$ sur $[a, +\infty[$.

L'hypothèse physique (*ici indispensable*) de la continuité de s se traduit par la condition sur la deuxième équation $s(a-) = s(a+)$.

Résolvons directement ces deux équations :

la solution générale de $\tau \dfrac{ds}{dt} + s = 0$ est sur $\mathbb{R}_+$

$$s(t) = \lambda\, e^{-\frac{t}{\tau}} .$$

donc la solution générale de (A) est : $s(t) = \lambda\, e^{-\frac{t}{\tau}} + 1$
et la condition $s(0+) = 0$ donne $\lambda = -1$,

soit , pour $t \in [0,a]$, $s(t) = (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$

Puis pour (B), la condition $s(a+) = 1 - e^{-\frac{a}{\tau}}$ conduit, en sachant que sur $[a,+\infty[$, $s(t) = \lambda' e^{-\frac{t}{\tau}}$, à :

$\lambda' = e^{\frac{a}{\tau}} - 1$. D'où le résultat :

$$\begin{cases} \text{pour } t \in [0,a], \ s(t) = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \\ \text{pour } t \in [a,+\infty[\ , \ s(t) = \left(e^{\frac{a}{\tau}} - 1 \right) e^{-\frac{t}{\tau}} \end{cases}$$

Il est clair que si le nombre de sauts est grand, cette méthode est relativement longue .

Habituellement, on utilise la Transformée de Laplace :

$$s \xrightarrow{\mathcal{L}} S \ ,$$

$$\frac{ds}{dt} \xrightarrow{\mathcal{L}} p\, S(p) - s(0^+) \text{ ,car s est continue sur } \mathbb{R}_+ ;$$

$$\mathcal{E} \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1 - e^{-pa}}{p} \quad , \ p > 0$$

$$S(p) = (1 - e^{-pa})\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p + \frac{1}{\tau}} \right)$$

soit

$$s(t) = \mathcal{U}(t)\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) - \mathcal{U}(t-a)\left(1 - e^{-\frac{t-a}{\tau}} \right)$$

2) A propos de la valeur initiale et de la continuité

Supposons que s soit une fonction.
La valeur s(0+) et la continuité de s ne peuvent évidemment pas être choisies par l'expérimentateur , elles sont déterminées par le système et l'entrée .

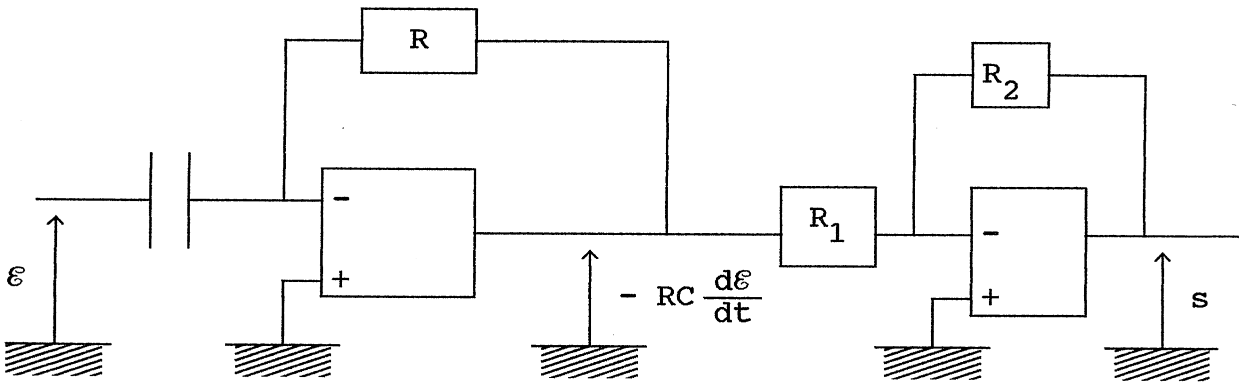
Un modèle mathématique cohérent doit donc permettre , *sans hypothèse supplémentaire* , de déterminer totalement s, alors que dans les exemples précédents on a été obligé de déterminer s(0+) et de prévoir la continuité de s par une analyse physique du système .

II.- Le signal d'entrée ou le signal de sortie ne sont pas des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$

1) La sortie n'est pas une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$

Exemple : Le dérivateur

En Physique, il peut être matérialisé par le système ci-dessous :



$$\text{avec} \quad s = \frac{R_2}{R_1} RC \frac{d\mathcal{E}}{dt} = \alpha \frac{d\mathcal{E}}{dt}$$

On peut choisir R_1, R_2, R et C de telle sorte que $\alpha = 1$.

On sait que si l'entrée $\mathcal{E}$ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$

alors : $$\mathcal{E} \xrightarrow{D} \frac{d\mathcal{E}}{dt}$$

On constate en physique que si $\mathcal{E}(t) = \mathcal{U}(t)$ alors $s = \delta_0$

$$\mathcal{U}(t) \longrightarrow \boxed{D} \longrightarrow \delta_0$$ (cf. Tome 1)

or δ_0, l'impulsion de Dirac, n'est pas une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.

3) L'entrée est l'impulsion de Dirac

Reprenons le cas du système R C .

$\mathcal{S}_1$ est le système de l'exemple 1 du I et appliquons à l'entrée $\mathcal{E} = \delta_0$.

$$\delta_0 \longrightarrow \boxed{\mathcal{S}_1} \longrightarrow s \quad ?$$

La relation $\tau \frac{ds}{dt} + s = \delta_0$ a-t-elle une signification ?

Ce n'est évidemment pas une équation différentielle , δ n'étant pas une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.

Si on tente d'utiliser de nouveau la transformation de Laplace pour déterminer s , on obtient

$$S(p) = \frac{1 + \tau\, s(0+)}{\tau} \quad \frac{1}{p + \frac{1}{\tau}} \quad \text{ce qui donne}$$

$$s(t) = \left(\frac{1}{\tau} + s(0+) \right) \mathcal{U}(t) \quad e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad (2)$$

Or si t tend vers 0 à droite dans le second membre de (2), on obtient $s(0+) = \frac{1}{\tau} + s(0+)$, ce qui est contradictoire !

Nous sommes donc amenés à constater dans ce cas que le modèle équation différentielle, condition initiale et continuité de la sortie ne convient pas .

III.- Approche d'un autre modèle

■ Reprenons le système (1): $\delta_0 \longrightarrow \boxed{\mathcal{S}_1} \longrightarrow h$

Nous noterons dorénavant h la sortie d'un système correspondant à l'entrée δ_0 .

h *sortie correspondant à l'entrée* δ_0 *s'appelle réponse impulsionnelle d'un système .*

On constate expérimentalement que la sortie h est donnée par

$$h(t)=\frac{1}{\tau}\,\mathcal{U}(t)\ e^{-\frac{t}{\tau}}\ .$$

■ Et si pour $\mathcal{S}_1$ on reprend pour entrée $\mathcal{E} = \mathcal{U}$, nous allons, sur cet exemple , constater que s, $\mathcal{E}$ et h sont liées par la relation suivante :

$$s(t) \quad = \quad \int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\ \mathcal{E}(t-x)\ dx\ .$$

On dit que s *est la convolée de* h *et* $\mathcal{E}$ *, et on note* <u>$s = h * \mathcal{E}$.</u>

Faisons le calcul dans notre exemple :

$$s(t) \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{U}(t-x)\ .\ \frac{1}{\tau}\,\mathcal{U}(x)\ e^{-\frac{x}{\tau}}\ dx \;=\; \frac{\mathcal{U}(t)}{\tau}\ \int_{0}^{t} e^{-\frac{x}{\tau}}\ dx\ .(3)$$

On obtient $s(t) \;=\; \mathcal{U}(t)\ (\ 1\ -\ e^{-\frac{t}{\tau}}\ )$ qui est la sortie de l'exemple 1 correspondant à $s(0+) \;=\; 0$ et peut être vérifiée expérimentalement .

(Pour la justification du calcul précédent, voir Chap.4.)

<u>En résumé</u>, le modèle mathématique d'un tel système $\mathcal{S}$ est le suivant :

1° On détermine la <u>réponse impulsionnelle</u> h

$$\delta_0 \longrightarrow \boxed{\ \mathcal{S}\ } \longrightarrow h$$

2° La sortie est obtenue par l'opération <u>convolution</u>

$$\mathcal{E} \longrightarrow \boxed{\ \mathcal{S}\ } \longrightarrow h * \mathcal{E}$$

En conclusion :

Les problèmes à résoudre pour avoir un modèle mathématique cohérent sont donc :

a) Quel est l'ensemble des signaux admissibles ? (signaux d'entrée) ;quelle est la nature de la réponse impulsionnelle ?

Ce ne sont pas des fonctions , comme le montre l'exemple de δ_0

Quelle est la définition de l'opération convolution dans cet ensemble ?

b) Quel est le lien entre cette opération convolution et par exemple ce qu'on appelle transformée de Laplace ?

Qu' appelle-t-on fonction de transfert? Pourquoi peut-on l'utiliser ?

IV.- A quel type de système physique correspond le modèle que nous allons construire ?

Tous les systèmes que nous considèrerons auront les propriétés suivantes :

1) Linéarité

Si $\mathcal{E}_1 \longrightarrow \boxed{\mathcal{S}} \longrightarrow s_1$ et $\mathcal{E}_2 \longrightarrow \boxed{\mathcal{S}} \longrightarrow s_2$

alors,

$$\forall\, a \in \mathbb{C},\ \forall\, b \in \mathbb{C}\ ,\ a\,\mathcal{E}_1 + b\,\mathcal{E}_2 \longrightarrow \boxed{\mathcal{S}} \longrightarrow a\, s_1 + b\, s_2$$

Une conséquence immédiate de cette propriété obtenue en prenant

$$a = b = 0 \quad \text{est que} \quad \mathcal{E} = 0 \longrightarrow \boxed{\mathcal{S}} \longrightarrow s = 0\ .$$

0 désignant ici provisoirement la fonction constamment nulle .

2) Invariance dans le temps (ou permanence)

Si $\qquad \mathcal{E}(t) \longrightarrow \boxed{\mathcal{S}} \longrightarrow s(t)$

alors $\qquad \mathcal{E}(t-t_0) \longrightarrow \boxed{\mathcal{S}} \longrightarrow s(t-t_0)$

et cela pour tout t_0.

Autrement dit :

un retard de t_0 sur l'entrée produit un retard de t_0 sur la sortie sans autre modification .

3) Continuité

Si on a une famille $\mathcal{E}_T$ de signaux d'entrée donnant des sorties s_T, et si, lorsque par exemple T tend vers 0, la famille $\mathcal{E}_T$ converge dans un sens que nous préciserons plus tard vers un certain signal $\mathcal{E}$, alors la famille des sorties s_T converge vers un signal s tel que :

$$\mathcal{E} \longrightarrow \boxed{\mathcal{S}} \longrightarrow s$$

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{E}_T \arrow[r] \arrow[d] & \boxed{\mathcal{S}} \arrow[r] & s_T \arrow[d] & \\
T \longrightarrow 0 & \mathcal{E} \arrow[r] & \boxed{\mathcal{S}} \arrow[r] & s & T \longrightarrow 0
\end{tikzcd}$$

Exemple

$$\left\{\begin{array}{lll} \mathcal{E}_T(t) = \frac{1}{T} & \text{si} & 0 \le t \le T \\ \mathcal{E}_T(t) = 0 & \text{si} & t \in \left]-\infty, 0\right[\cup \left]T, +\infty\right[\end{array}\right. , \quad T > 0.$$

Nous verrons (Chapitre 3) que $\mathcal{E}_T \longrightarrow \delta_0$ (mais pas au sens de la convergence simple des fonctions !).

Si $\mathcal{S}$ est un système continu , plus T est voisin de 0, plus la sortie s_T se rapproche de la réponse impulsionnelle de $\mathcal{S}$. On peut procéder ainsi expérimentalement pour "approcher" δ_0 et h .

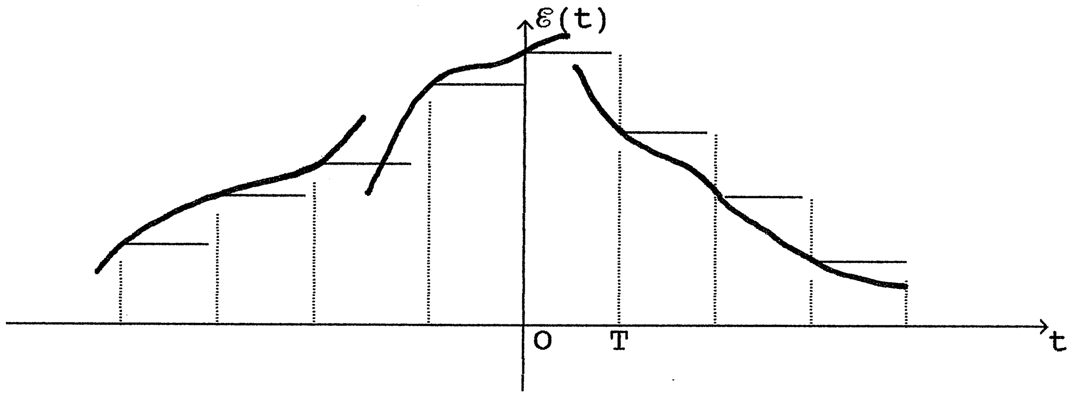
$$\begin{tikzcd} \mathcal{E}_T \arrow[r] \arrow[d, "T \longrightarrow 0"'] & \boxed{\mathcal{S}} \arrow[r] & s_T \arrow[d, "T \longrightarrow 0"] \\ \delta_0 \arrow[r] & \boxed{\mathcal{S}} \arrow[r] & h \end{tikzcd}$$

4) Conséquence de ces trois propriétés :la convolution

Considérons un système $\mathcal{S}$ linéaire, invariant dans le temps et continu .

$$\mathcal{E} \longrightarrow \boxed{\mathcal{S}} \longrightarrow s$$

Plaçons-nous dans le cas où l'entrée $\mathcal{E}$ est une fonction localement continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.



Approchons $\mathcal{E}$ par le signal échantillonné bloqué e_T défini par :

$$e_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \mathcal{E}(nT) \Big(\mathcal{U}(t - nT) - \mathcal{U}(t - (n+1)T) \Big) ,$$

où T > 0 est la période d'échantillonnage.

Appelons $\sigma_n(t)$ la sortie obtenue lorsque l'entrée est :

$$\mathcal{U}(t - nT) - \mathcal{U}(t - (n+1)T)$$

et S_T la sortie correspondant à l'entrée e_T .

En appliquant la propriété de linéarité de $\mathcal{S}$ et en admettant que cette propriété est encore vraie pour une somme infinie, on obtient :

$$S_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \mathcal{E}(nT)\, \sigma_n(t)$$

Appelons, comme dans l'exemple précédent, s_T la sortie correspondant à l'entrée $\mathcal{E}_T(t) = \frac{1}{T} \Big(\mathcal{U}(t) - \mathcal{U}(t - T) \Big)$

En utilisant de nouveau la linéarité de $\mathcal{S}$, $\sigma_0 = T\, s_T$.

Donc, grâce à l'invariance dans le temps de $\mathcal{S}$,
$\sigma_n(t) = T\, s_T(t - nT)$ et :

$$S_T(t) = T \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \mathcal{E}(nT)\, s_T(t- nT)$$

Utilisons maintenant la continuité de $\mathcal{S}$:
Nous avons déjà signalé, dans l'exemple ci-dessus que

$$\mathcal{E}_T(t) = \frac{1}{T} \Big(\mathcal{U}(t) - \mathcal{U}(t - T) \Big)$$

converge vers δ lorque T tend vers 0.

Donc s_T converge vers h, réponse impulsionnelle de $\mathcal{S}$ (sortie correspondant à l'entrée δ) ; et (invariance dans le temps) $s_T(t- nT)$ converge vers $h(t - nT)$.

Une approche raisonnable , lorsque T tend vers 0, de S_T parait donc être: $$S_T(t) = T \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \mathcal{E}(nT)\ h(t-nT).$$

On reconnait une somme de Riemann approchant lorsque T tend vers 0

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{E}(x)\ h(t-x)\ dx$$

Ceci laisse penser que pour un système linéaire, invariant dans le temps et continu, la sortie s correspondant à l'entrée $\mathcal{E}$ est définie

par $$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{E}(x)\ h(t-x)\ dx,$$

où h est la réponse impulsionnelle du système .

cf R. GAY Introduction Heuristique

5) Remarque : Causalité

De plus les systèmes physiquement réalisables vérifient la propriété suivante :

Si $\mathcal{E}$ est un signal d'entrée tel que pour tout $t < t_0$, $\mathcal{E}(t) = 0$ alors le signal de sortie s est tel que

$$\forall\ t < t_0,\ s(t) = 0.$$

Un système possédant cette propriété pour tout t_0 est causal .

Nous caractériserons les systèmes causaux par une propriété de la réponse impulsionnelle .

Nous démontrerons que : Si $\mathcal{S}$ est un système invariant dans le temps et si $\mathcal{S}$ est tel que, pour tout signal d'entrée $\mathcal{E}$ nul pour $t < 0$ le signal de sortie s est nul pour $t < 0$ alors $\mathcal{S}$ est causal

Chapitre 2

NOTIONS SUR LES DISTRIBUTIONS

I .L' ensemble $\mathcal{D}$ des fonctions test

1) Etude d'une fonction indéfiniment dérivable

$$\text{Soit } g(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{pour } x > 0 \\ 0 & \text{pour } x \leq 0 \end{cases}$$

a) Etude de g

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 0} e^{-\frac{1}{x}} = 0 = g(0), \text{ donc g est continue sur } \mathbb{R}.$$

Pour $x > 0$, g est dérivable et $g'(x) = \dfrac{1}{x^2}\, e^{-\frac{1}{x}}$.

Tableau des variations

x	0	$+\infty$
g'(x)		+
g	0	$\nearrow$ 1

Pour $x > 0$, $\dfrac{g(x)}{x} = \dfrac{1}{x} e^{-\frac{1}{x}}$ tend vers 0 quand x tend vers 0 à droite. (Rappelons que $\lim\limits_{u \to +\infty} u^{\alpha} e^{-u} = 0$).

Donc g est dérivable en 0 et $g'(0) = 0$.

Tracé de la courbe, voir figure 1 .

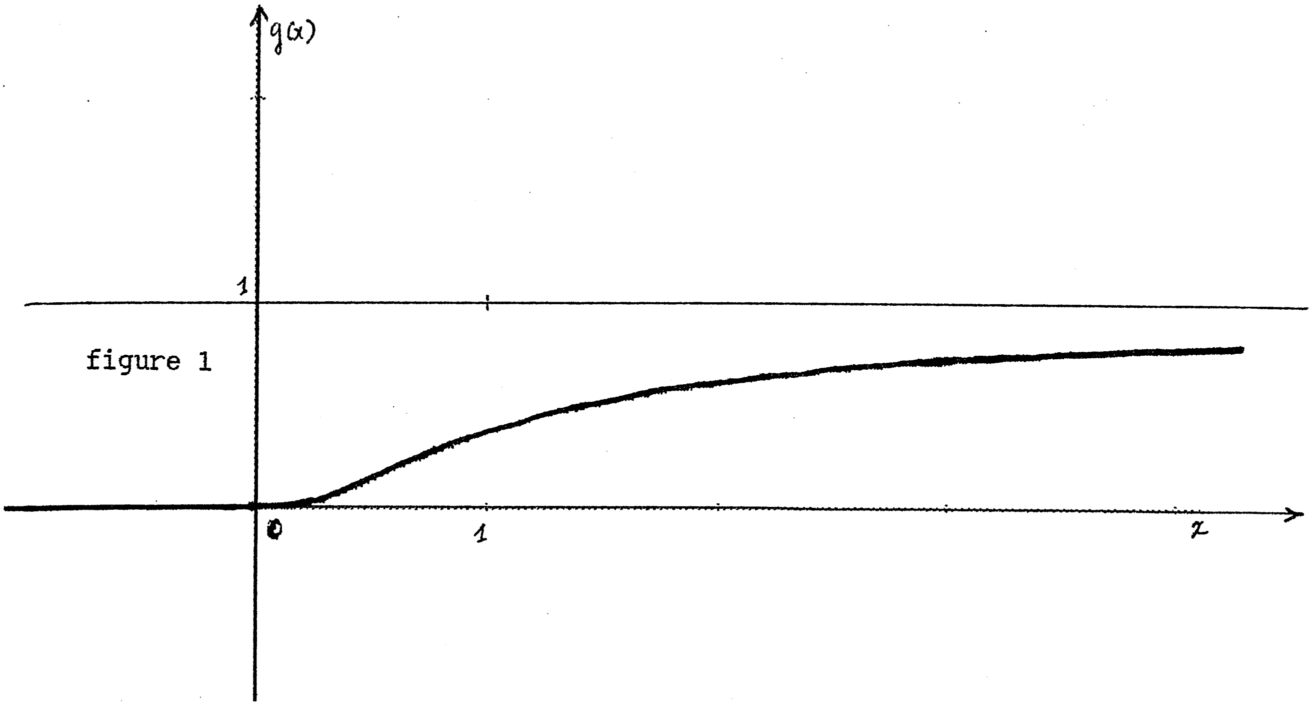


figure 1

b) g est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$

g est indéfiniment dérivable sur $]-\infty\ ,\ 0[\ \cup\ ]\ 0\ ,\ +\infty\ [$.

Montrons que g est indéfiniment dérivable en 0.
Pour cela considérons l'hypothèse de récurrence suivante :

pour $x > 0$

$\mathcal{P}(k) \Leftrightarrow g^{(k)}(x) = P_{2k}\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}}$, où $P_{2k}(t)$ est un polynôme de degré 2k

$\mathcal{P}(0)$ est vraie . (en posant $g^{(0)}(x) = g(x)$)

Montrons l'implication $\mathcal{P}(k) \Rightarrow \mathcal{P}(k+1)$
Dérivons l'expression de $g^{(n)}(x)$, on obtient :

$$g^{(n+1)}(x) = \left[-\frac{1}{x^2} P'_{2n}\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^2} P_{2n}\left(\frac{1}{x}\right) \right] e^{-\frac{1}{x}},$$

et l'expression entre les crochets est bien un polynôme en $\frac{1}{x}$ de degré $2n + 2$.

Il s'ensuit, $\mathcal{P}(n)$ étant établie pour tout $n \in \mathbb{N}$,que :

$$\forall\, n\ ,\ \lim_{x \longrightarrow 0+} g^{(n)}(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \longrightarrow 0+} \frac{1}{x}\, g^{(n)}(x) = 0 = g^{(n+1)}(0)\ .$$

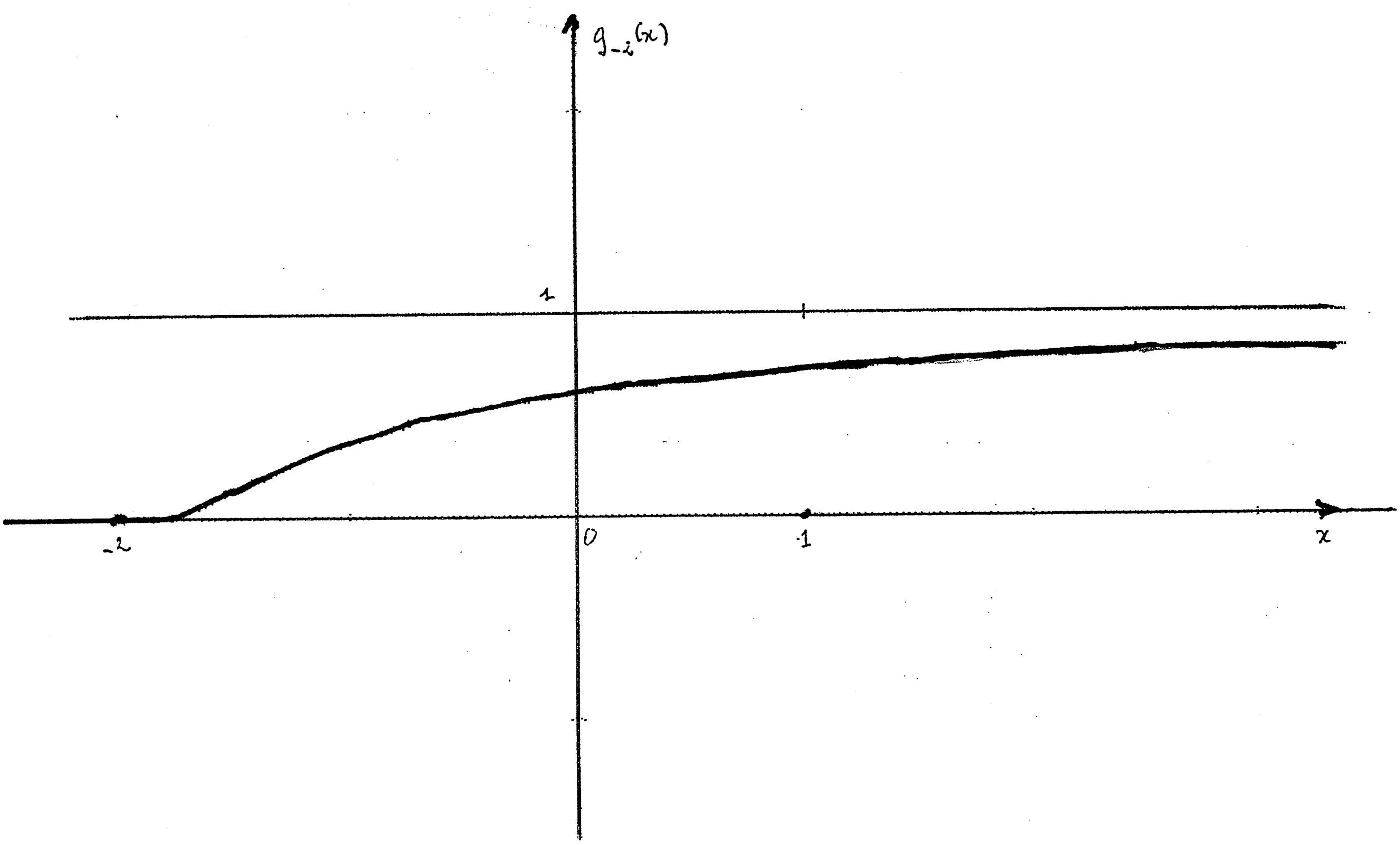
Remarque: $\mathcal{U}$ étant la fonction échelon-unité (fonction de Heaviside) la fonction g étudiée ci-dessus est définie par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^*\ ,\quad g(x) = \mathcal{U}(x)\, e^{-\frac{1}{x}} \quad \text{et } g(0) = 0\ .$$

2° Exemples et définition des fonctions tests

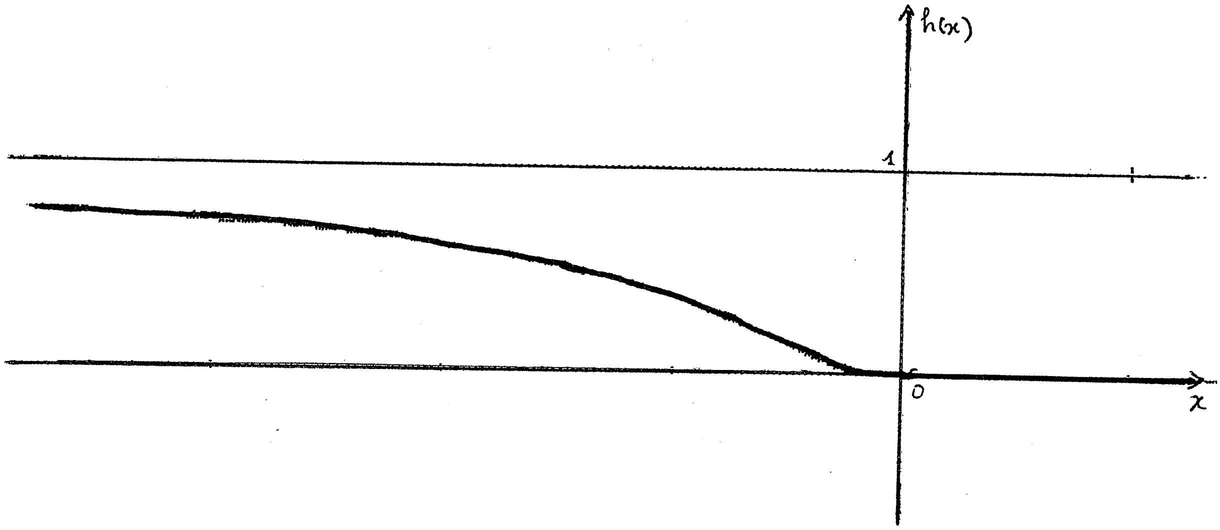
Soit la fonction g_a telle que : $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $g_a(x) = g(x - a)$.
g_a est indéfiniment dérivable .

(figure 2).



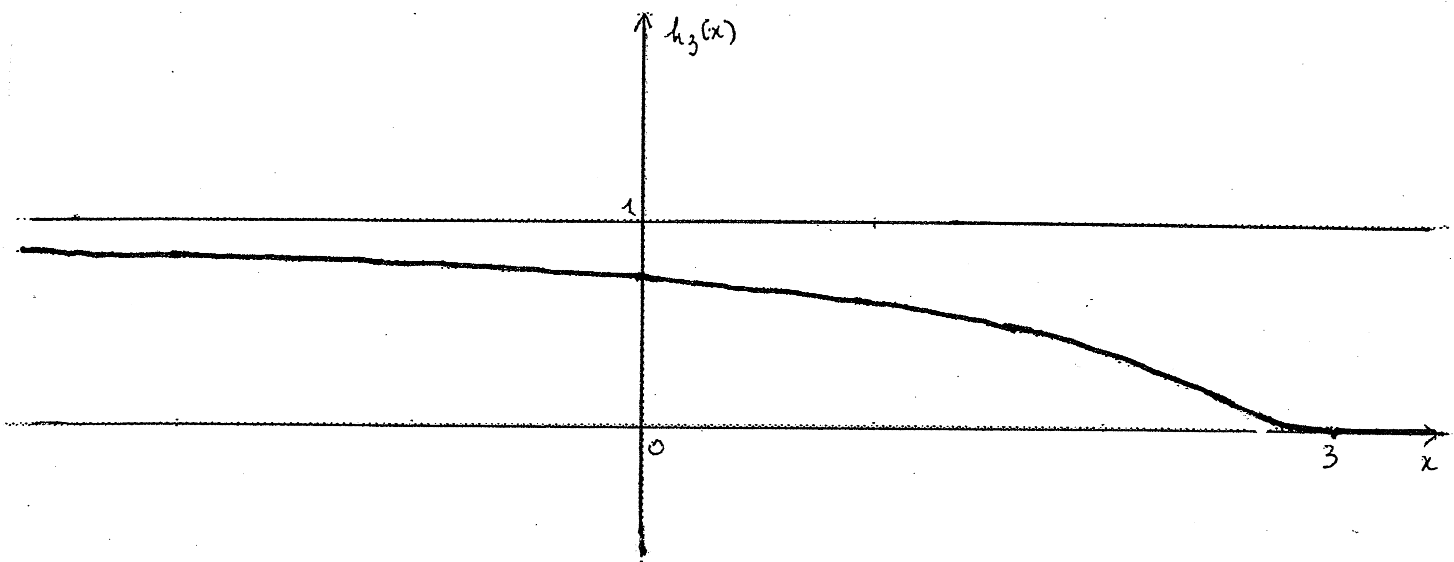
Appelons h la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = g(-x)$; h est indéfiniment dérivable .

(figure 3) .



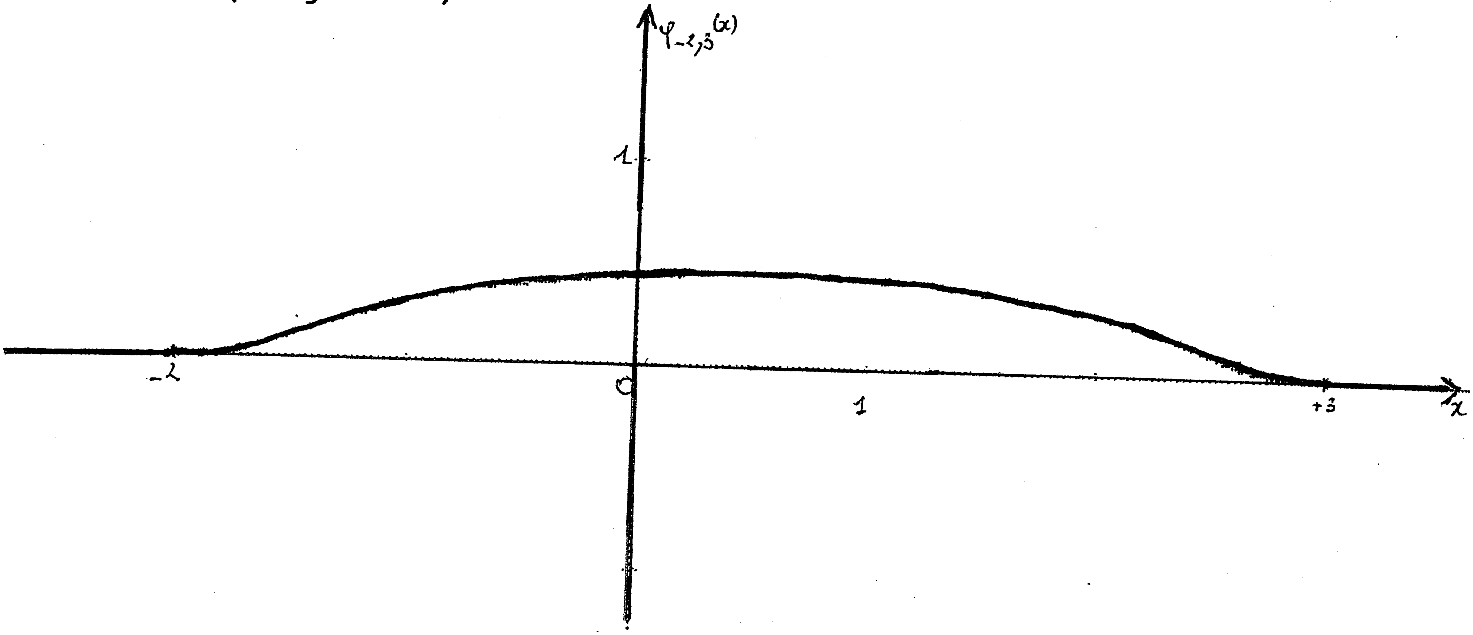
Appelons h_b la fonction définie par :
$\forall x \in \mathbb{R}$, $h_b(x) = h(x - b)$; h_b est indéfiniment dérivable .

(figure 4) .



$\phi_{a,b}(x) = g_a(x)\ h_b(x) = \mathcal{U}(x-a)\ \ e^{-\frac{1}{x-a}}\ \mathcal{U}(b-x)\ \ e^{-\frac{1}{b-x}}$ est nulle hors de l'intervalle $]a,b[$, indéfiniment dérivable, et $\phi_{a,b}(a) = \phi_{a,b}(b) = 0$.

(figure 5).



Définition. On appelle $\mathcal{D}$ l'ensemble des fonctions tests .

$$\boxed{\phi \in \mathcal{D} \iff \begin{cases} \phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \text{ est indéfiniment dérivable sur } \mathbb{R} \\ \text{et il existe } (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ a \leq b, \text{ tel que :} \\ \quad \forall\ x \notin [a,b],\ \phi(x) = 0. \end{cases}}$$

ϕ étant continue en a et b, on a évidemment $\phi(a) = \phi(b) = 0$.

Remarquons que :

$$\boxed{\textit{si } \phi \in \mathcal{D} \textit{ alors il en est de même pour } \phi^{(k)}, \forall\ k \in \mathbb{N}}$$

Les primitives d'une fonction test ne sont pas en général des fonctions tests.

En effet, si $\varphi \in \mathcal{D}_{[a,b]}$ et si ψ est définie par :

$\forall\ t \in \mathbb{R}\ ,\ \psi(t) = \int_{-\infty}^{t} \varphi(x)\ dx$, alors pour tout $t \geq b$,

$\psi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\ dx$ est en général non nul .

Si $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\ dx = 0$, alors une des primitives de φ est une fonction test .

- On montre immédiatement que

$$\boxed{\forall\ \lambda \in \mathbb{C},\ \forall\ \mu \in \mathbb{C}, \forall\ \phi \in \mathcal{D},\ \forall\ \psi \in \mathcal{D},\quad \lambda\ \phi + \mu\ \psi \in \mathcal{D}}$$

En effet, soit $\phi \in \mathcal{D}$ nulle hors de $[a,b]$ et $\psi \in \mathcal{D}$ nulle hors de $[c,d]$, il existe $[e,f] \subset \mathbb{R}$ tel que $[a,b] \cup [c,d] \subseteq [e,f]$ et $\lambda\phi + \mu\psi$ est nulle hors de $[e,f]$. De plus $\lambda\phi + \mu\psi$ est indéfiniment dérivable .

3° Exercice

Exemple d'une fonction de $\mathcal{D}$ *nulle pour* $x \leq a$ *ou* $x \geq d$, *et égale à* 1 *pour* $b \leq x \leq c$, $a < b < c < d$.

On se propose de définir une fonction ϕ indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :

$\phi(x) = 0$ si $x \leq a$ ou si $x \geq d$

$\phi(x) = 1$ si $b \leq x \leq c$ $\qquad a < b < c < d$ donnés .

Soit ϕ_1 nulle pour $x \notin [a,b]$ et $\phi_1 \in \mathcal{D}$ (cf par ex. 2°)

Posons : $a_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_1(t)\, dt = \int_a^b \phi_1(t)\, dt$

et posons : $\psi_1(x) = \frac{1}{a_1}\phi_1(x)$. On a $\int_a^b \psi_1(t)\, dt = 1$.

On construit de même $\psi_2 \in \mathcal{D}$, nulle hors de $[c,d]$ et telle que :

$$\int_c^d \psi_2(t)\, dt = 1 .$$

Soit alors γ la fonction de $\mathcal{D}$ définie comme suit :

$$\gamma(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \le a \text{ ou si } x \ge d \text{ ou si } b \le x \le c \\ \psi_1(x) & \text{si } a \le x \le b \\ -\psi_2(x) & \text{si } c \le x \le d \end{cases}$$

$\gamma(x) = \psi_1(x) - \psi_2(x)$.

Posons $\phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \gamma(t)\, dt$.

γ indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R} \Rightarrow \phi$ indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\phi'(x) = \gamma(x)$.

Si $x \le a$, $\phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \gamma(t)\, dt = 0$ car γ est nulle sur $]-\infty,a]$

Si $a \le x \le b$, $\phi(x) = \int_a^x \gamma(t)\, dt = \int_a^x \psi_1(t)dt$ et $\phi(b) = 1$.

Si $b \le x \le c$, $\phi(x) = \int_a^b \gamma(t)\, dt + \int_b^x \gamma(t)\, dt = 1$ car γ est nulle sur $[b,c]$.

Si $c \le x \le d$, $\phi(x) = 1 - \int_c^x \psi_2(t)\, dt$ et $\phi(d) = 1 - 1 = 0$.

Enfin, si $d < x$, $\phi(x) = \phi(d) + \int_d^x \gamma(t)\, dt = 0$, car γ est nulle sur $[d, +\infty[$.

fig 6

$\gamma : x \longrightarrow \psi_1(x) - \psi_2(x)$
$a = -5 \ , \ b = -1 \ , \ d = 4$

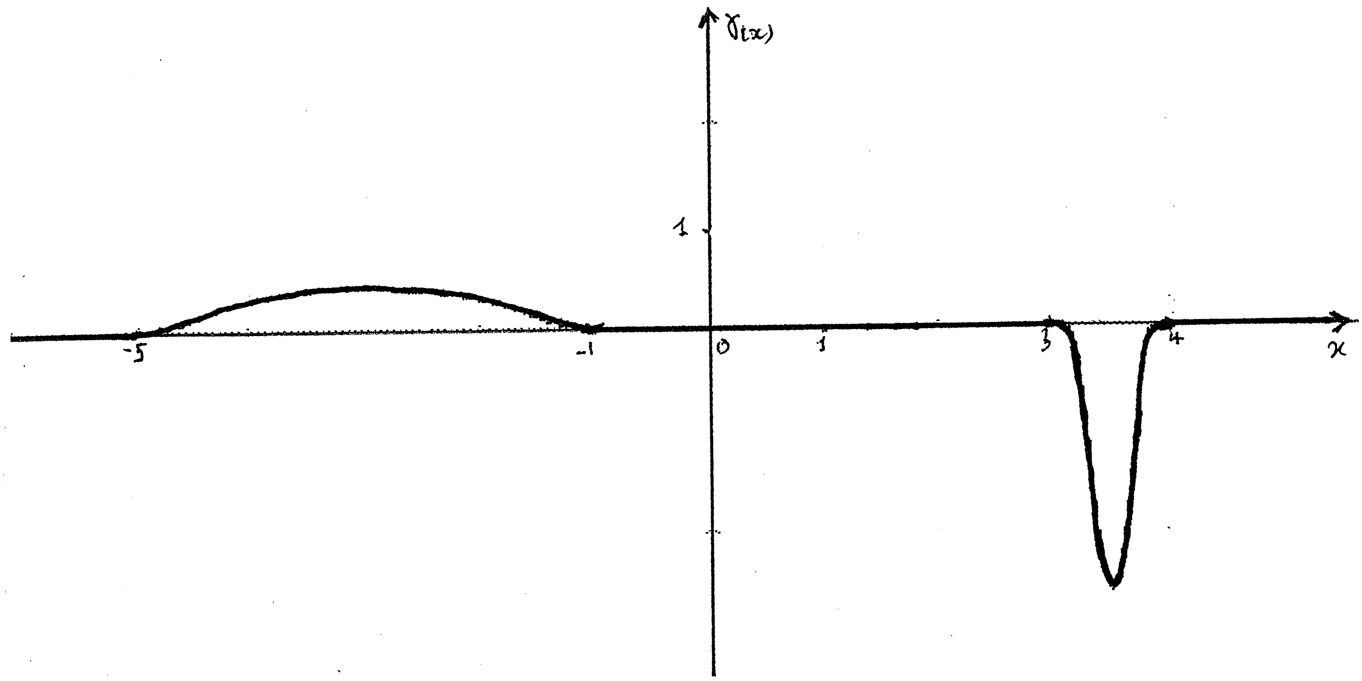
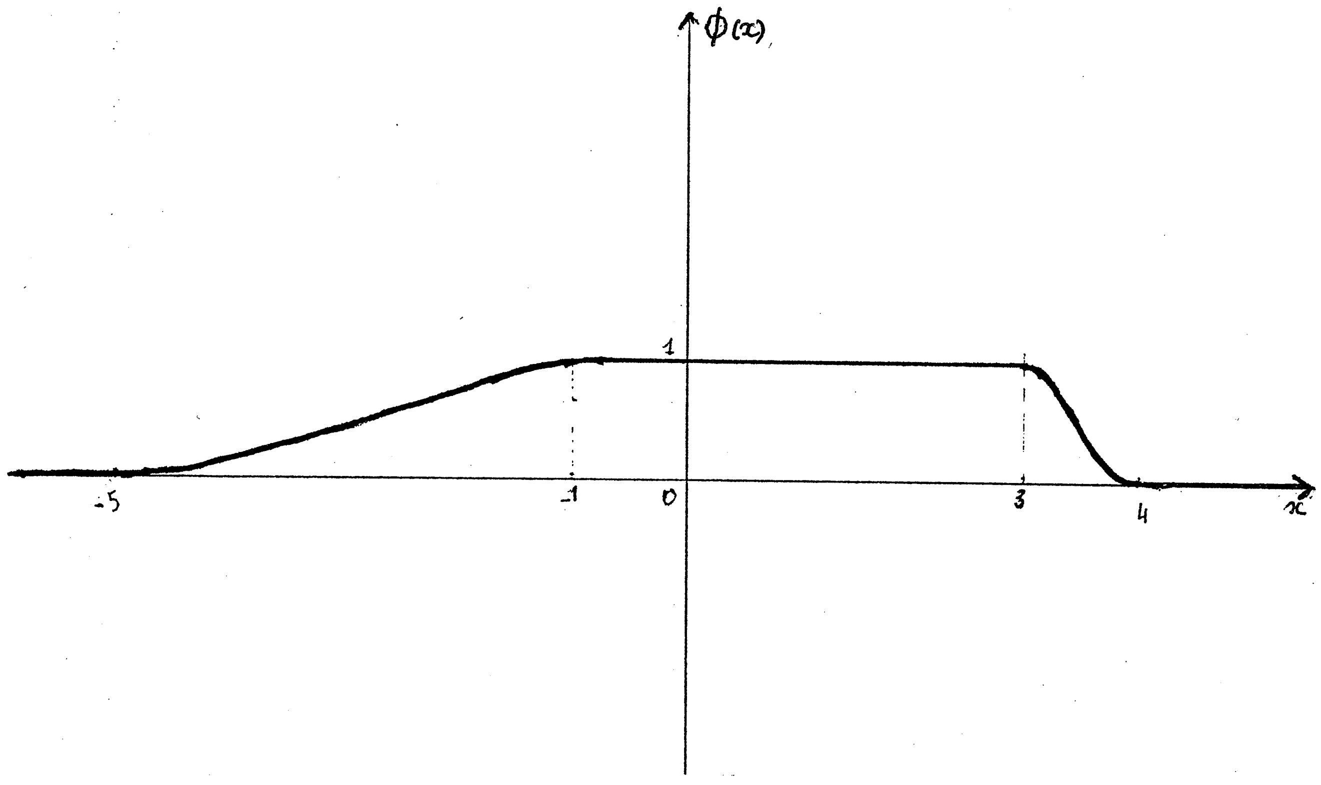


fig 7

$$\phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \gamma(t)\, dt$$



II.- Distributions

1) Fonction localement sommable

Définition 1

On dit qu'une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ est localement sommable sur un intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$ si et seulement si la fonction $|f|$ est intégrable sur tout intervalle $[a,b] \subseteq I$

On démontre , et nous admettrons, que si f est localement sommable sur $\mathbb{R}$, alors $\forall\ \phi \in \mathcal{D} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ \phi(t)\ dt$ existe .

cf RIESZ n° 21

Remarquons que ϕ étant nulle hors d'un intervalle [a,b], on a en fait $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ \phi(t)\ dt = \int_a^b f(t)\ \phi(t)\ dt \in \mathbb{C}$.

Dorénavant, toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ considérées sont localement sommables sur $\mathbb{R}$.

Exemples : $f(t) = e^t \sin t$; $f(t) = \frac{\sin t}{t}\ \mathcal{U}(t)$; $f(t) = e^{(1+i)t}$ sont localement sommables sur $\mathbb{R}$.

Remarque :

si f est localement continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ alors f est localement sommable sur $\mathbb{R}$.

cf ARNAUDIES
après la définition VII-3-1

2) Distribution régulière

a) *Définition*

f *étant donnée,* on fait correspondre à toute fonction ϕ appartenant à $\mathcal{D}$ le nombre complexe $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ \phi(t)\ dt$.

On définit ainsi une application de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{C}$.

Définition 2 : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ localement sommable sur $\mathbb{R}$ L'application de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $\phi \longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ \phi(t)\ dt$ est appelée distribution régulière associée à f et notée [f].

Il convient de ne pas confondre $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ et $[f] : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{C}$.

b) *Théorème*

Théorème 1 : Si f et g localement sommables diffèrent en au plus un nombre fini de points sur tout intervalle [a,b] de $\mathbb{R}$, alors $[f] = [g]$.

En effet on peut montrer que pour tout $\phi \in \mathcal{D}$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ \phi(t)\ dt = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\ \phi(t)\ dt$$

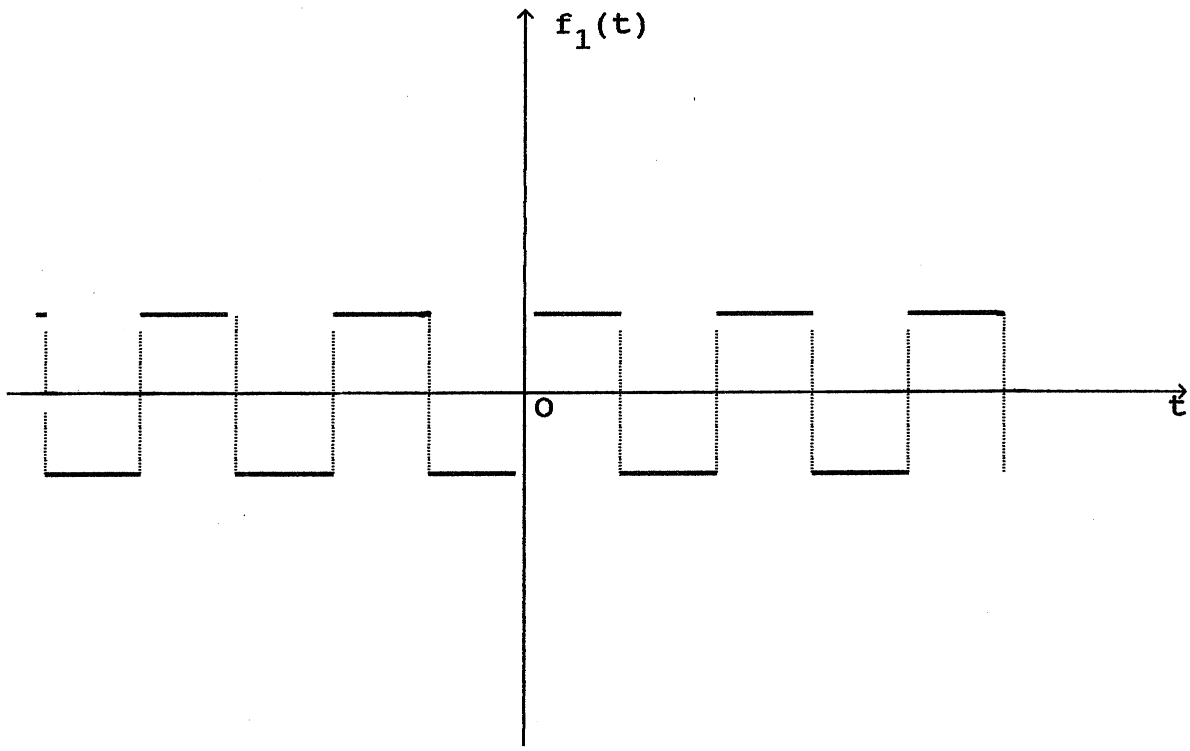
cf ARNAUDIES

Corollaire du Théorème VII-4-3

c) *Exemple* :

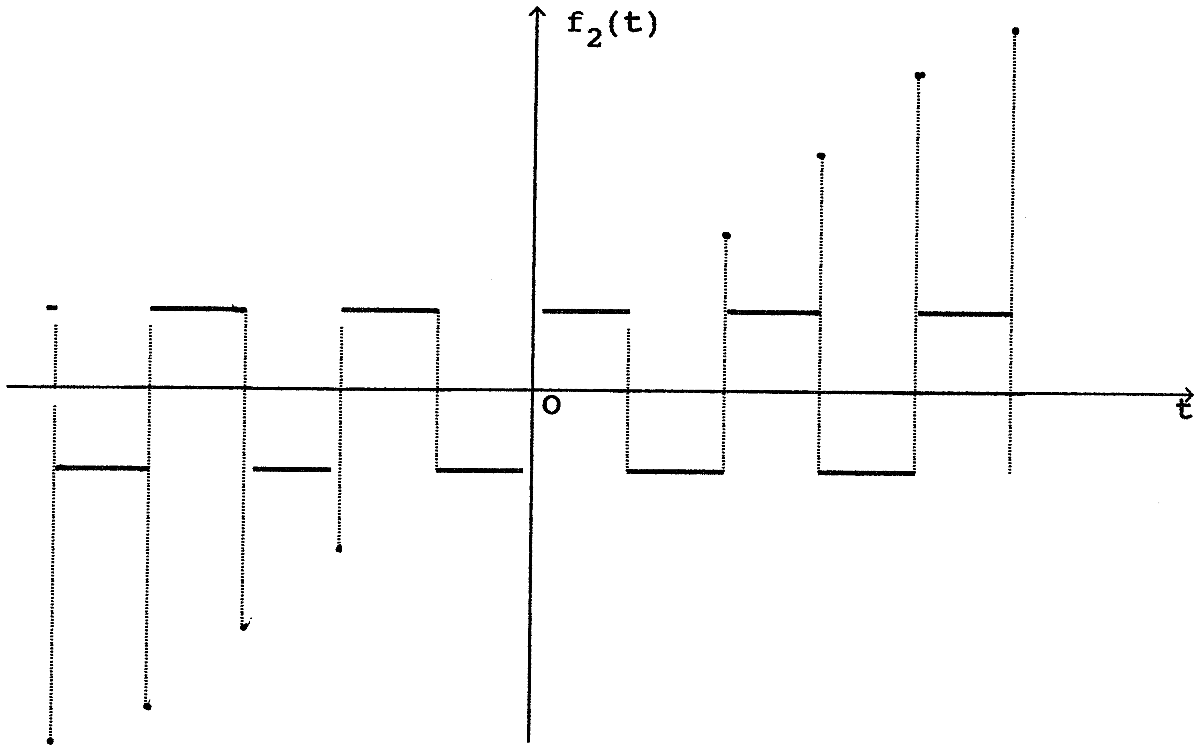
$$f_1(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } & t \in]0,1] \\ -1 \text{ si } & t \in]1,2] \end{cases} \quad \text{et } f_1 \text{ de période } 2$$

fig 8



$$f_2(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in \,]\,2p\,,\,2p+1[\\ -1 & \text{si } t \in \,]\,2p+1,\,2p+2[\qquad p \in \mathbb{Z} \\ p & \text{pour } t = p \end{cases}$$

fig 9



On a $[f_1] = [f_2]$, car $\forall\, \phi \in \mathcal{D}$, il existe $[a,b]$ tel que ϕ soit nulle hors de $[a,b]$ d'où :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t)\phi(t)dt = \int_a^b f_1(t)\phi(t)\,dt = \int_a^b f_2(t)\phi(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t)\phi(t)dt$$

d) *Notations*

On note:

■ $$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\;\phi(t)\;dt = \langle\, [f]\,,\,\phi\,\rangle}$$

■ Soit $I = [a,b]$. On note :

$$\boxed{\mathcal{D}_I \text{ l'ensemble des fonctions tests nulles hors de } I}$$

$$\mathcal{D}_I \subset \mathcal{D} .$$

Remarquons que :

- $\varphi \in \mathcal{D}_I \Rightarrow \varphi^{(n)} \in \mathcal{D}_I$, pour tout $n \in \mathbb{N}$
- $\forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall \mu \in \mathbb{C}, \forall \phi \in \mathcal{D}_I , \forall \psi \in \mathcal{D}_I , \lambda \phi + \mu \psi \in \mathcal{D}_I$

e) *Propriétés*

■ Linéarité :

On constate immédiatement que :

$\forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall \mu \in \mathbb{C}, \forall \phi \in \mathcal{D}, \forall \psi \in \mathcal{D}$

$$< [f] , \lambda\phi + \mu\psi > = \lambda < [f] , \phi > + \mu < [f] , \psi >$$

■ Soit $I = [a,b]$ fixé , $\phi \in \mathcal{D}_I$ quelconque

$$|<[f],\phi>| = \left|\int_a^b f(t)\ \phi(t)\ dt\right| \le \int_a^b |f(t)|\ |\phi(t)|\ dt \text{ et}$$

$$\int_a^b |f(t)|\ |\phi(t)|\ dt \le \operatorname*{Sup}_{x\in I}|\phi(x)| \int_a^b |f(t)|\ dt .$$

Posons $C_I = \int_a^b |f(t)|\ dt$. Il existe donc une constante C_I, ne dépendant pas de ϕ ,mais de seulement de f et de $[a,b]$ telle que

$$\forall \phi \in \mathcal{D}_I,\ | < [f] , \phi > | \le C_I \operatorname*{Sup}_{x \in \mathbb{R}} | \phi(x) | .$$

3) Définition des distributions

Définition 3 : T est une distribution si et seulement si T vérifie les trois propriétés suivantes :

(i) T est une application de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{C}$

(on note $T(\phi) = \langle T,\phi\rangle$)

(ii) T est une forme linéaire sur $\mathcal{D}$. (c'est à dire que, $\forall\lambda\in\mathbb{C},\ \forall\mu\in\mathbb{C},\ \forall\phi\in\mathcal{D}, \forall\psi\in\mathcal{D},\ \langle T,\lambda\phi+\mu\psi\rangle = \lambda\langle T,\phi\rangle+\mu\langle T,\psi\rangle$)

(iii) Pour tout $I = [a,b]$ fixé quelconque, il existe une constante réelle positive C_I (dépendant éventuellement de I) et un entier naturel m_I (dépendant éventuellement de I) tels que $\forall\ \phi \in \mathcal{D}_I$:

$$|\langle T,\phi\rangle| \leq C_I \sup_{\substack{x\in I\\ 0\leq k\leq m_I}} |\phi^{(k)}(x)|$$

On note $\mathcal{D}'$ l'ensemble des distributions .

4) Deux théorèmes (admis)

a)

Théorème 2 Soient S et T deux distributions , λ et μ deux nombres complexes, l'application de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $\phi \longrightarrow \lambda \langle S , \phi\rangle + \mu \langle T , \phi\rangle$ est une distribution notée $\lambda S + \mu T$.

La démonstration est immédiate.

$$\forall\ \phi \in \mathcal{D},\qquad \langle \lambda S + \mu T, \phi\rangle = \lambda \langle S,\phi\rangle + \mu \langle T,\phi\rangle$$

Remarque 1: Les propriétés des intégrales et la Définition 2 montrent que, pour les distributions régulières, pour tous λ, μ complexes, f et g localement sommables :

$$\boxed{[\lambda f + \mu g] = \lambda [f] + \mu [g]}$$

Remarque 2 : *La distribution qui à tout $\phi \in \mathcal{D}$ fait correspondre le nombre complexe 0 est appelée distribution nulle. On peut par exemple la définir comme la distribution régulière associée à la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ constamment nulle.*

La distribution nulle est l'élément neutre de l'addition dans $\mathcal{D}'$. Nous la noterons : [0]

Remarque 3 : $\forall u \in \mathcal{D}', \ 0 u = [0]$

b)

Théorème 3 Soit h une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$. L' application de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$\phi \longrightarrow < T , h \phi >$, où T est une distribution, définit une distribution notée hT, appelée produit de T par la fonction indéfiniment dérivable h .

La démonstration est sans difficulté.

Remarquons que $\varphi \in \mathcal{D}_I \Rightarrow h\varphi \in \mathcal{D}_I$.

On a donc :

$$\boxed{< hT , \phi > = < T , h\phi >}$$

■ indique une difficulté plus importante.

Exercice 1 :

■ D'autres fonctions test

1°) Montrer que l'application ξ définie par :

$$\xi(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } |t| \geq 1 \\ \exp \dfrac{1}{t^2 - 1} & \text{pour } |t| < 1 \end{cases}$$

appartient à $\mathcal{D}_{[-1,1]}$

(Indication : on pourra démontrer que $\xi(t) = h(2t-2)\, g(2t+2)$ où g et h sont les fonctions définies dans le I de ce chapitre) :

$$g(x) = \mathcal{U}(x)\, e^{-\frac{1}{x}} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^*$$
$$g(0) = 0$$
$$h(x) = g(-x)$$

2°) Soit $\alpha > 0$ et γ_α la fonction définie par :

$$\gamma_\alpha(t) = \frac{\xi(\frac{t}{\alpha})}{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \xi(\frac{t}{\alpha})\, dt}$$

Montrer que $\gamma_\alpha \in \mathcal{D}_{[-\alpha,+\alpha]}$, que $\forall$ t, $\gamma_\alpha(t) \geq 0$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \gamma_\alpha(t)\, dt = 1$

3°) Soit $\varphi \in \mathcal{D}$. On rappelle que φ continue en 0 est équivalent à $\forall\, \varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tq $|t| < \eta \Rightarrow |\varphi(t)-\varphi(0)| < \varepsilon$

Montrer que $\alpha < \eta \Rightarrow \left| \varphi(0) - \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, \gamma_\alpha(x)\, dx \right| < \varepsilon$

donc que $\forall\, \varphi \in \mathcal{D}$, $\displaystyle\lim_{\alpha \to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, \gamma_\alpha(x)\, dx = \varphi(0)$.

4°) En déduire que, $\forall \varphi \in \mathcal{D}$

$$\text{a) } \lim_{\alpha \to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\ \gamma'_\alpha(x)\ dx = -\varphi'(0).$$

$$\text{b) } \lim_{\alpha \to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\ \gamma''_\alpha(x)\ dx = \varphi''(0).$$

Exercice 2 :

Application de la définition d'une distribution

Parmi les expressions suivantes, lesquelles définissent une distribution ?

$$1°)\ \langle u , \varphi \rangle = \sum_{n=0}^{N} \varphi^{(n)}(0)$$

$$2°)\ \blacksquare\ \langle u , \varphi \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi^{(n)}(0)$$

Indication : Considérer la fonction $\varphi \in \mathcal{D}$ définie par $\varphi(t) = \psi(t)\ e^t$ où $\psi \in \mathcal{D}$, ψ nulle hors de $[-2,2]$ et constamment égale à 1 sur $[-1,+1]$.

$$3°)\ \langle u , \varphi \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi^{(n)}(n)$$

$$4°)\ \blacksquare\ \langle u , \varphi \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi(t_n) \text{ où } \lim_{n \to +\infty} t_n = 0$$

Indication : Utiliser ψ (cf 2°)

$$5°)\ \langle u , \varphi \rangle = |\ \varphi(0)\ |^2$$

$$6°)\ \langle u , \varphi \rangle = \mathrm{Sup}\ |\ \varphi(t)\ |$$

$$7°)\ \langle u , \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} | \varphi(t) | \, dt$$

$$8°)\ \langle u , \varphi \rangle = \int_{0}^{1} \varphi^{(k)}(t) \, dt, \qquad k \in \mathbb{N}$$

Exercice 3 :

■ Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}$, on pose

$$\langle Pv \frac{1}{t} , \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \xrightarrow{>} 0} \left[\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(t)}{t} \, dt + \int_{+\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t} \, dt \right]$$

1°) Montrer que $\forall \varphi$, $\langle Pv\frac{1}{t} , \varphi \rangle = - \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'(t) \ln|t| \, dt$

2°) Montrer que $Pv\frac{1}{t}$ est une distribution.

Indication : On pourra considérer l'intégrale obtenue en 1°) comme la somme d'une intégrale de -1 à +1 et d'une intégrale pour $|t| \geq 1$.

Exercice 4 :

Démontrer le théorème du Chapitre II

$u \in \mathcal{D}'$, ψ indéfiniment dérivable $\Rightarrow \psi\, u \in \mathcal{D}'$

Exercice 5 :

Soit $u \in \mathcal{D}'$

1°) On appelle $\check{u}$ l'application de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $\langle \check{u} , \varphi(t) \rangle = \langle u , \varphi(-t) \rangle$.

Montrer que $\check{u}$ est une distribution.

2°) a) Montrer que l'application de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $v : \varphi \longrightarrow \langle u , \frac{1}{|a|} \varphi(\frac{t}{a}) \rangle$ où $a \in \mathbb{R}^*$ est donné, est une distribution.

3°) Lorsque u est une distribution régulière associée à une fonction f, montrer que v est aussi une distribution régulière associée à une fonction g que l'on précisera.

Exercice 6 :

Soit $\varphi \in \mathcal{D}$. On pose $\varphi_R = \operatorname{Re} \varphi$ et $\varphi_X = \operatorname{Im} \varphi$

1°) Montrer que les deux relations suivantes définissent, pour toute $u \in \mathcal{D}'$, des distributions.

$$\langle u_R , \varphi \rangle = \operatorname{Re} \langle u , \varphi_R \rangle + i \operatorname{Re} \langle u , \varphi_X \rangle$$

$$\langle u_X , \varphi \rangle = \operatorname{Im} \langle u , \varphi_R \rangle + i \operatorname{Im} \langle u , \varphi_X \rangle$$

2°) Montrer que $\forall \varphi \in \mathcal{D}$,

$$\langle u , \varphi \rangle = \langle u_R , \varphi \rangle + i \langle u_X , \varphi \rangle$$

3°) Montrer que l'application $\bar{u}$ de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $\langle \bar{u} , \varphi \rangle = \overline{\langle u , \bar{\varphi} \rangle}$ est une distribution.

4°) Montrer que $\forall \varphi \in \mathcal{D}$,

$$\langle \bar{u} , \varphi \rangle = \langle u_R, \varphi \rangle - i \langle u_X, \varphi \rangle$$

Exercice 7 :

1°) Montrer que $\varphi \in \mathcal{D}$, l'application : $t \longmapsto \int_{-\infty}^{t} \varphi(x)\, dx$ n'appartient pas, en général, à $\mathcal{D}$.

2°) Soit $\varphi_0 \in \mathcal{D}$, telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_0(t)\, dt = 1$

Soit $\varphi \in \mathcal{D}$ et $k = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\, dt$

On définit la fonction χ par : $\chi(t) = \varphi(t) - k\, \varphi_0(t)$ pour tout t

- Montrer que $\chi \in \mathcal{D}$.

- Montrer que ψ définie par $\psi(t) = \int_{-\infty}^{t} \chi(x)\, dx$ appartient à $\mathcal{D}$.

3°) Soit alors $u \in \mathcal{D}'$,

- Montrer que $\forall\ \varphi \in \mathcal{D}$, $\langle u,\varphi\rangle = k \langle u,\varphi_0\rangle - \langle D(u),\psi\rangle$

- En déduire que si $D(u)$ est la distribution nulle, u est une distribution régulière associée à une fonction constante.

4°) Déduire du 3°) que si $D(u) = w$ et $D(v) = w$ alors $u - v = [\alpha]$

5°) Montrer que $D(\delta)$ n'est pas une distribution régulière.

Chapitre 3

DERIVATION DES DISTRIBUTIONS

EXEMPLES DE DISTRIBUTIONS NON REGULIERES

I.-Introduction :

Nous allons définir à partir d'une distribution donnée quelconque T une nouvelle distribution appelée dérivée de T et, contrairement à ce qui se passe pour les fonctions, nous verrons qu'une distribution est toujours dérivable.

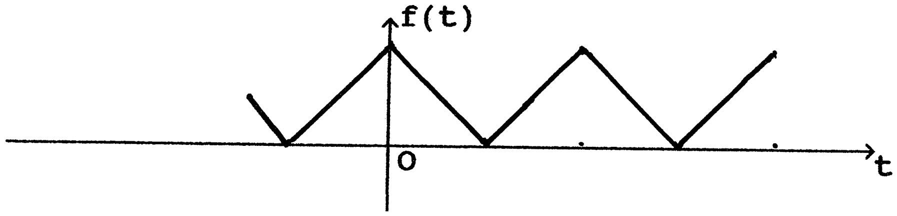
En particulier la distribution régulière associée à une fonction non dérivable mais localement sommable est toujours dérivable .Nous verrons que l'opération dérivation est particulièrement simple dans le cas d'une distribution associée à une fonction localement continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur tout $[\ a,b\ ] \subset \mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points de cet intervalle. Ces fonctions sont suffisantes pour traiter tous les problèmes de Physique jusqu'au niveau BTS inclus .

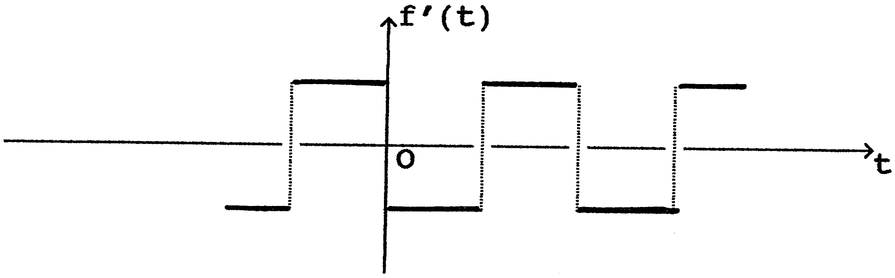
Nous verrons que si une fonction F de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ est une primitive large d'une fonction f localement continue par morceaux sur $\mathbb{R}$,(F est donc continue sur $\mathbb{R}$), alors la distribution dérivée est la distribution régulière associée à la fonction f .

II.- Distribution dérivée

1) Distribution dérivée de [f] lorsque f est une primitive large d'une fonction f' localement continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

■ Exemple :





■ Soit une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ primitive large sur $\mathbb{R}$ d'une fonction f' localement continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

Soient [f] et [f'] les distributions régulières associées respectivement aux fonctions f et f'.

Soit $\phi \in \mathcal{D}_{[a,b]}$; calculons $< [f'] , \phi >$:

$$<[f'],\phi> = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)\, \phi(t)\, dt = \int_a^b f'(t)\, \phi(t)\, dt =$$

$$\Big[f(t)\, \phi(t)\Big]_a^b - \int_a^b f(t)\, \phi'(t)\, dt = - \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, \phi'(t)\, dt$$

car $\phi(a) = \phi(b) = 0$. D'où :

$$\boxed{\forall\, \varphi \in \mathcal{D},\ < [f'], \phi > = - < [f] , \phi' >}$$

2) Théorème

> Théorème 1 : Soit $T \in \mathcal{D}'$, l'application de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{C}$ définie pour tout $\phi \in \mathcal{D}$ par $\phi \longrightarrow < T, \phi' >$ est une distribution .

Rappelons que $\varphi \in \mathcal{D}_{[a,b]} \Rightarrow \varphi' \in \mathcal{D}_{[a,b]}$.

Donc l'application de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{C}$ définie par , $T \in \mathcal{D}'$:

$\forall \varphi \in \mathcal{D}$, $\varphi \longrightarrow - < T, \varphi' >$ est une distribution .

Démonstration immédiate en appliquant la définition 3 du Chapitre II

3) Définition

> La distribution définie par $\forall \phi \in \mathcal{D}$, $\phi \longrightarrow - < T, \phi' >$ est appelée distribution dérivée de la distribution T et notée D(T) .

Remarquons que (cf. 1) cette définition a pour conséquence que *dans le cas particulier* où f est une primitive large sur $\mathbb{R}$ d'une fonction f' localement continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, alors $[f'] = D([f])$.

4) Propriété

> $\forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall \mu \in \mathbb{C}, \forall T \in \mathcal{D}', \forall S \in \mathcal{D}'$
> $D(\lambda T + \mu S) = \lambda D(T) + \mu D(S)$

Démonstration :

Soit $\phi \in \mathcal{D}$,

$$\begin{aligned} < D(\lambda T + \mu S) , \phi > &= - < \lambda T + \mu S , \phi' > \\ &= - \lambda < T , \phi' > - \mu < S , \phi' > \\ &= \lambda D(T) + \mu D(S) \end{aligned}$$

5) Dérivées successives d'une distribution

> **Théorème 2** :
> $\forall\, T \in \mathcal{D}'$, T est indéfiniment dérivable

▪ On définit par récurrence la dérivée n ème comme étant la dérivée de la dérivée d'ordre n-1 et on notera la dérivée n ème de la distribution T : $D^{(n)}(T)$:

$$\forall\, T \in \mathcal{D}',\ D^{(2)}(T) = D(\ D(T)\ ),\ \ldots\ ,\ D^{(n)}(T) = D(\ D^{(n-1)}(T)\ )$$

▪ $\forall\, \varphi \in \mathcal{D}$, $< D(T), \phi > = - < T, \phi' >$

donc $< D^{(2)}(T)\ ,\phi > = - < D(T), \phi' > = < T, \phi'' >$

et par récurrence ,

$$\boxed{< D^{(n)}(T)\ ,\ \phi > = (-1)^n < T\ ,\ \phi^{(n)} >}$$

On notera quelquefois $D^{(0)}(T) = T$

6) Dérivée du produit d'une distribution par une fonction indéfiniment dérivable

Nous allons également montrer le résultat suivant :

> Soit f indéfiniment dérivable et $S \in \mathcal{D}'$
> $D(fS) = f\, D(S) + f'\, S$

En effet, pour tout $\phi \in \mathcal{D}$,

$$< D(f\ S)\ ,\ \phi > = - < f\ S\ ,\ \phi' > = - < S\ ,\ f\ \phi' >$$

$$\begin{aligned} < f\ D(S) + f'S\ ,\ \phi > &= < f\ D(S)\ ,\ \phi > + < f'\ S\ ,\ \phi > \\ &= < D(S)\ ,\ f\ \phi > + < S\ ,\ f'\ \phi > \\ &= - < S\ ,\ (f\ \phi)' > + < S\ ,\ f'\ \phi > \\ &= - < S\ ,\ f'\ \phi + f\ \phi' > + < S\ ,\ f'\ \phi > \\ &= - <S\ ,\ f'\ \phi> - <S\ ,\ f\ \phi'> + <S\ ,\ f'\phi> \end{aligned}$$

III.- Dérivation des distributions régulières associées à une fonction localement continue par morceaux sur $\mathbb{R}$

1) Distribution de Dirac

Rappelons que l'on note $\mathcal{U}_a$ la fonction $t \longrightarrow \mathcal{U}(t-a)$, où $\mathcal{U}$ est la fonction échelon unité .

On se propose d'étudier $D(\mathcal{U}_a)$ .Soit $\phi \in \mathcal{D}$,

$$< D([\mathcal{U}_a]) \ , \ \phi > = - < [\mathcal{U}_a], \ \phi'> = - \int_a^{+\infty} \phi'(t) \ dt = - \Big[\phi(t)\Big]_a^{+\infty} = \phi(a)$$

$$\boxed{< D([\mathcal{U}_a]), \ \phi > = \ \phi(a)}$$

a) Définition

La distribution $D([\mathcal{U}_a])$: $\phi \longrightarrow \phi(a)$ *est notée* δ_a *et nommée distribution (ou impulsion) de Dirac en* a .

$$\boxed{D([\mathcal{U}_a]) = \delta_a} \qquad \boxed{< \delta_a \ , \ \phi > = \phi(a)}$$

Nous noterons dans la suite δ_0 simplement δ .

b) Remarques :

■ On démontre et nous admettrons qu'il n'existe aucune fonction f localement sommable vérifiant (a étant donné) :

$$\forall \ \phi \in \mathcal{D} \ , \ \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \ \phi(t) \ dt = \varphi(a)$$

$$\boxed{\delta_a \ \text{ n'est pas une distribution régulière}}$$

cf ZEMANIAN Section 1-3

et Th. de la convergence dominée de Lebesgue (par ex. RUDIN 1-3-4)

■ Soit h une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$, examinons $u = h\,\delta_a$.

$< u, \varphi > = < h\,\delta_a , \varphi > = < \delta_a , h\,\varphi > = h(a)\,\varphi(a)$

donc , $\forall\, \varphi \in \mathcal{D}$, $< h\,\delta_a , \varphi > = h(a) < \delta_a, \varphi > = < h(a)\,\delta_a, \varphi >$

$$\boxed{h\,\delta_a = h(a)\,\delta_a}$$

Par exemple : $(\cos t)\,\delta_\pi = -\,\delta_\pi$.

2) <u>Dérivée d'une distribution régulière associée à une fonction localement continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et n'admettant qu'un nombre fini de discontinuités</u> .

■

<u>Théorème</u> : Soit f continue sur $]-\infty,a[\ \cup\ ]a,+\infty[$, primitive large sur $]-\infty,a[$ et sur $]a,+\infty[$ de f' localement continue par morceaux sur $\mathbb{R}$,
si f admet en a le saut $\sigma(a)$ alors

$$D([f]) = [f'] + \sigma(a)\,\delta_a$$

<u>Démonstration</u> : $\forall\, \phi \in \mathcal{D}$,

$<D([f]) , \phi > = - < [f] , \phi' >$

$$= - \int_{-\infty}^{a} f(t)\,\phi'(t)\,dt - \int_{a}^{+\infty} f(t)\,\phi'(t)\,dt$$

$$= - \Big[f(t)\,\phi(t)\Big]_{-\infty}^{a} + \int_{-\infty}^{a} f'(t)\,\phi(t)\,dt - \Big[f(t)\,\phi(t)\Big]_{a}^{+\infty} + \int_{a}^{+\infty} f'(t)\,\phi(t)\,dt$$

$$= - f(a-)\,\phi(a) + f(a+)\,\phi(a) + \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)\,\phi(t)\,dt$$

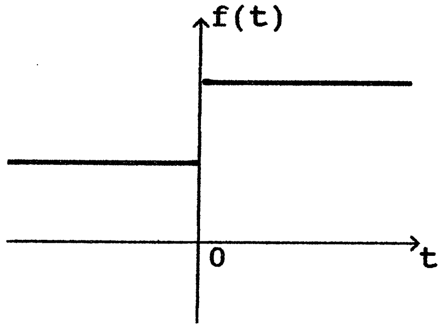
$$= \sigma(a)\,\phi(a) + < [f'] , \phi > = \sigma(a) < \delta_a,\phi > + < [f'] , \phi >$$

$$= < \sigma(a)\,\delta_a + [f'] , \phi >.$$

On constate que :

> si f est non-continue sur $\mathbb{R}$, $D([f]) \neq [f']$

■ *Exemple* 1: $f(t) = \mathcal{U}(-t) + 2\,\mathcal{U}(t)$

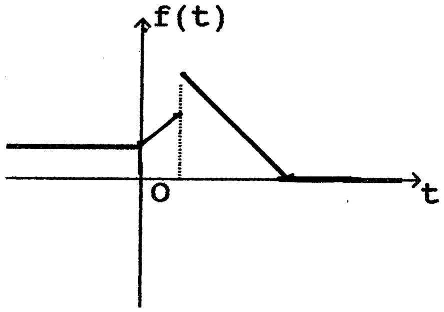


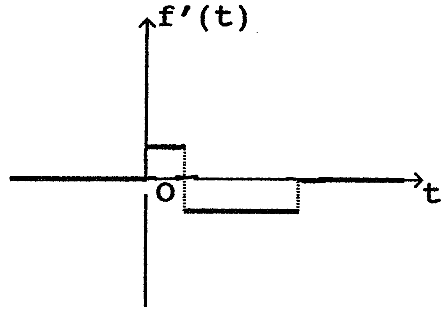
$$D([f] = [f'] + \delta = \delta \ .$$

■ *Exemple* 2 :

$$f(t) = \mathcal{U}(-t) + (t+1)\,[\mathcal{U}(t)-\mathcal{U}(t-1)] + (-t+4)\,[\mathcal{U}(t-1)-\mathcal{U}(t-4)]$$

$$f'(t) = \mathcal{U}(t) - \mathcal{U}(t-1) - [\mathcal{U}(t-1) - \mathcal{U}(t-4)]$$





$$D([f])= [f'] + \delta_1$$

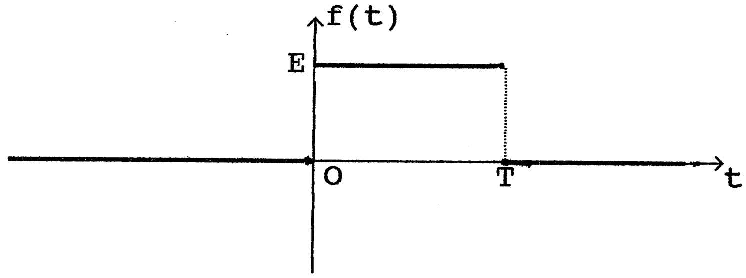
■

<u>Corollaire</u> :Soit f primitive large sur $\mathbb{R} - \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ de f' localement continue par morceaux et telle que f admet en a_i le saut σ_i, alors

$$D([f]) = [f'] + \sum_{i=1}^{i=n} \sigma_i \ \delta_{a_i}$$

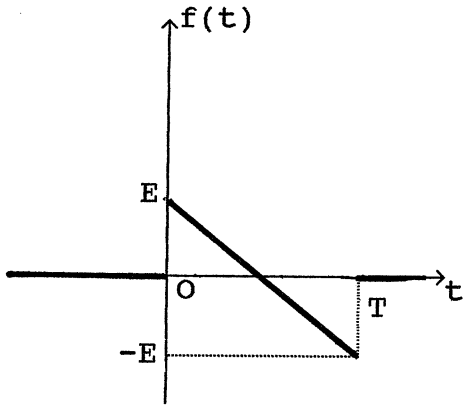
f est donc continue sur chaque intervalle $]-\infty, a_1[$, $]a_i, a_{i+1}[$, pour tout i, $1 \leq i \leq n-1$, et sur $]a_n, +\infty[$ et est sur chacun de ces intervalles une primitive large de la fonction f'.

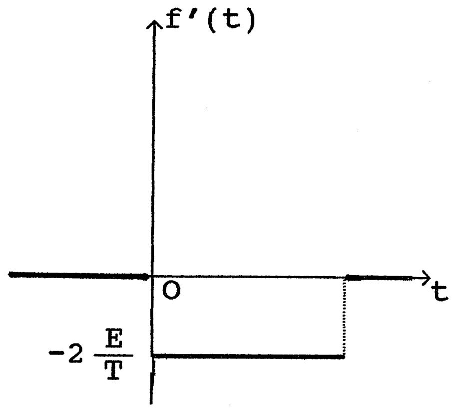
Exemple 1 :



$$D([f]) = [f'] + E\,\delta - E\,\delta_T = E\,\delta - E\,\delta_T$$

Exemple 2 :





$$D([f]) = [f'] + E\,\delta - E\,\delta_T$$

avec $$f'(t) = -2\frac{E}{T}[\,\mathcal{U}(t) - \mathcal{U}(t-T)\,]$$

IV.- Notion de signal discret

1) Combinaison linéaire finie de distributions de Dirac

Il est évident (cf: chapitre II) que toute combinaison linéaire finie de distributions de Dirac $\sum_{j \in J} \sigma_j \, \delta_{a_j}$, J fini, est encore une distribution .

Nous allons voir dans ce paragraphe qu'une "somme" $\sum_{j \in \mathbb{Z}} \sigma_j \, \delta_{a_j}$ définit également une distribution et qu'une telle "somme" s'obtient en dérivant la distribution associée à une fonction en escalier.

2) Dérivée de la distribution associée à une fonction en escalie

Soit f une fonction présentant n sauts, σ_j étant le saut en t_j $1 \leq j \leq n$ et f constante sur chaque intervalle ouvert où elle es continue .On dit que f est une fonction en escalier .

Alors pour tout $t \in \mathbb{R}$,t différent de tous les t_j, f es dérivable en t et $f'(t) = 0$.

Donc $D([f]) = \sum_{j=1}^{n} \sigma_j \, \delta_{t_j}$ car $[f'] = [0]$.

Il en résulte que $\forall \, \phi \in \mathcal{D}$,

$$<D([f]),\phi> = < \sum_{j=1}^{n} \sigma_j \, \delta_{t_j},\phi > = \sum_{j=1}^{n} \sigma_j < \delta_{t_j} , \phi > = \sum_{j=1}^{n} \sigma_j \, \phi(t_j)$$

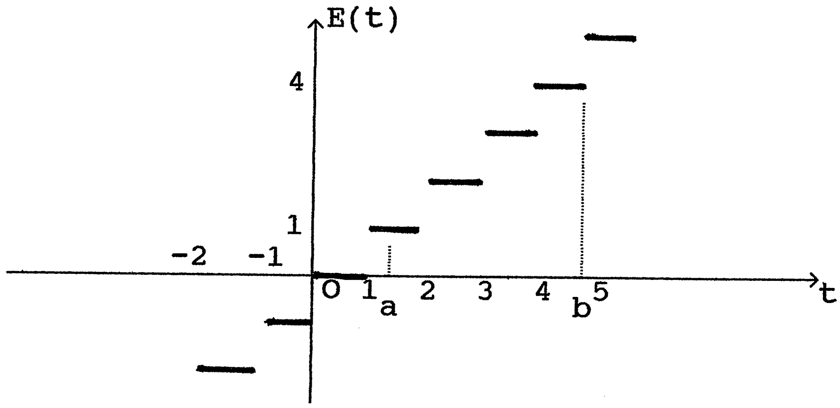
donc $$< D([f]) , \phi > = \sum_{j=1}^{n} \sigma_j \, \phi(t_j)$$

3) Dérivée de la distribution associée à $[(\mathcal{U}_a - \mathcal{U}_b)\ E]$

On note E la fonction partie entière définie ainsi :
$\forall\ t \in \mathbb{R}$, il existe $n \in \mathbb{Z}$ unique tel que $n \leq t < n + 1$,

par définition $E(t) = n$.

E est une fonction en escalier .



Soit alors la fonction $f_{a,b} = (\mathcal{U}_a - \mathcal{U}_b)\ E$, $a < b$.
Appelons le saut en a : $\sigma(a)$, celui en b : $\sigma(b)$.
Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, tel que $a < n < b$, $f_{a,b}$ présente en n un saut égal à 1, donc $D([f_{a,b}]) = \sigma(a)\ \delta_a + \sum\limits_{a<n<b} \delta_n + \sigma(b)\ \delta_b$.

4) Dérivée de la distribution [E]

Remarquons d'abord que si f est localement sommable et si $\phi \in \mathcal{D}$ est nulle hors de [a,b], c'est à dire $\phi \in \mathcal{D}_{[a,b]}$, alors

$$< [f]\ ,\ \phi > \ = \ < [(\mathcal{U}_a - \mathcal{U}_b)f],\ \phi >$$

Soit donc $\phi \in \mathcal{D}$ quelconque, $\phi \in \mathcal{D}_{[a,b]}$ pour un certain intervalle [a,b], il s'ensuit que $\phi' \in \mathcal{D}_{[a,b]}$ également .

Nous voulons définir $D([E])$.

$<D([E]),\phi> = - <[E] , \phi'> = - < [(\mathcal{U}_a-\mathcal{U}_b)E],\phi' > = - < [f_{a,b}],\phi'>$

$= < D([f_{a,b}]), \phi > = \sigma(a)\phi(a) + \sum\limits_{a<n<b} \phi(n) + \sigma(b)\ \phi(b) = \sum\limits_{a<n<b} \phi(n)$

car $\phi(a) = \phi(b) = 0$.

De plus , $\forall$ n entier, $n \notin]a,b[$, $\phi(n) = 0$.

On peut donc écrire $\sum\limits_{a<n<b} \phi(n)= \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \phi(n)$.

$$\forall\ \phi \in \mathcal{D} ,\quad < D([E]) , \phi > = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \phi(n)$$

Insistons sur le fait que cette dernière somme ne comporte qu'un nombre fini de termes non nuls.

5) Peigne de Dirac

$\forall\ \phi \in \mathcal{D},\quad \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \phi(n) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} < \delta_n , \phi >$ définit bien une distribution appelée peigne de Dirac et notée $Ш = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \delta_n$.

Soit $< \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \delta_n, \phi > = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} < \delta_n, \phi >$.

$$\boxed{D([E]) = Ш = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_n}$$

6) Signal discret

■ Un raisonnement analogue à ce qui précède montre que la définition suivante a un sens :

> Définition : Soit $(t_j), j \in \mathbb{Z}$, une suite de nombres réels telle qu'il n'y a sur tout intervalle $[a,b] \subset \mathbb{R}$ qu'un nombre fini de t_j et soit $(a_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ une suite de nombres complexes , la distribution $S = \sum_{j\in\mathbb{Z}} a_j \ \delta_{t_j}$
> est appelée signal discret .

■ Le peigne de Dirac est le signal discret tel que tous les a_j sont égaux à 1 et pour tout j, $t_j = j \in \mathbb{Z}$.

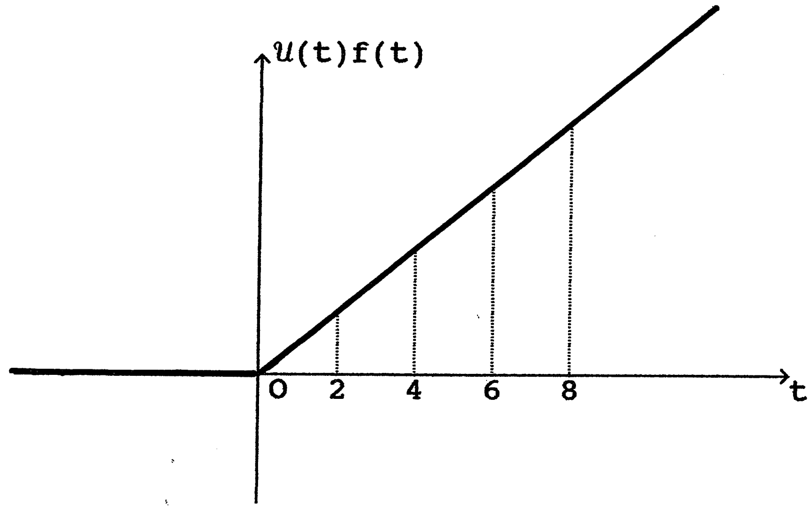
■ Insistons sur le fait que $\phi \in \mathcal{D}$, $< S, \phi > = \sum_{j\in\mathbb{Z}} a_j \ \phi(t_j)$ est une somme finie puisque ϕ est nulle hors d'un certain intervalle [a,b] qui ne contient par hypothèse qu'un nombre fini de t_j.

■ Remarque: En physique, on utilise les signaux discrets définis par $\sum_{j\in\mathbb{Z}} a_j \ \delta_{jT}$, où T est un nombre réel strictement positif.

Par exemple échantillonner le signal $[\mathcal{U}f]$ avec une période d'échantillonnage $T_e > 0$, c'est associer à la distribution $[\mathcal{U}f]$ le signal discret $\sum_{n\in\mathbb{Z}} (\mathcal{U}f)(nT_e) \ \delta_{nT_e} = \sum_{n=0}^{+\infty} f(nT_e) \ \delta_{nT_e}$.

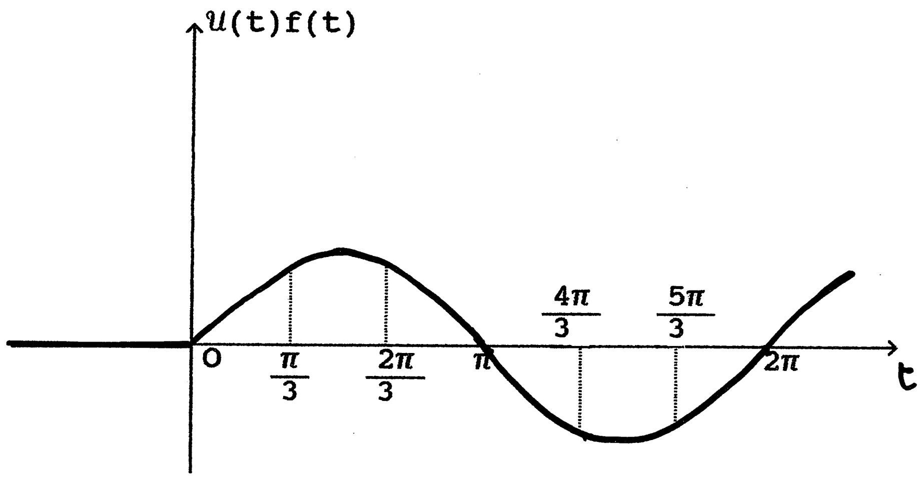
Exemples :

a) $f(t) = t$ et $T_e = 2$



Le signal associé à $[\mathcal{U}f]$ est $\sum_{n=0}^{+\infty} 2n\, \delta_{2n}$

b) $f(t) = \sin t$ et $T_e = \frac{\pi}{3}$



Si $n \geq 0$, $f(\frac{n\pi}{3}) = \sin \frac{n\pi}{3}$

donc le signal discret associé à $[f(t)\ (\mathcal{U}(t) - \mathcal{U}(t-2\pi))]$ est :

$$0\ \delta + \frac{\sqrt{3}}{2}\ \delta_{\frac{\pi}{3}} + \frac{\sqrt{3}}{2}\ \delta_{\frac{2\pi}{3}} + 0\ \delta_{\pi} - \frac{\sqrt{3}}{2}\ \delta_{\frac{4\pi}{3}} - \frac{\sqrt{3}}{2}\ \delta_{\frac{5\pi}{3}} + 0\ \delta_{2\pi}$$

On en déduit le signal discret associé à $[\mathcal{U}f]$:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\delta_{\frac{\pi}{3} + k2\pi} + \delta_{\frac{2\pi}{3} + k2\pi} - \delta_{\frac{4\pi}{3} + k2\pi} - \delta_{\frac{5\pi}{3} + k2\pi} \right), \quad k \in \mathbb{N}.$$

V Dérivées successives des distributions régulières et des signaux discrets

1) Dérivée $n^{\text{ème}}$ de l'impulsion de Dirac

Si nous appliquons la formule encadrée de la fin de II.5),

$$< D^{(n)}(T)\ ,\ \phi > \ = (-1)^n < T\ ,\ \phi^{(n)} >$$

on définit la dérivée n ème de l'impulsion de Dirac en a .

On obtient $\forall\ \phi \in \mathcal{D}$,

$$\boxed{< D^{(n)}(\delta_a)\ ,\ \phi > \ = \ (-1)^n\ \ \phi^{(n)}(a)}$$

2) Dérivée $n^{\text{ème}}$ de la distribution associée à une fonction continue par morceaux sur $\mathbb{R}$

Soit f
- continue sur $\mathbb{R}$, sauf en a .
- admettant des dérivées continues sur $\mathbb{R}-\{a\}$ jusqu'à l'ordre n-1 et telles que $\forall\ k, 0\leq k \leq n-1$, $f^{(k)}$ admet en a le saut σ_k
- admettant sur $\mathbb{R}-\{a\}$ une dérivée d'ordre n localement continue par morceaux sur $\mathbb{R}$,

alors $$D^{(n)}([f]) = [f^{(n)}] + \sum_{k=0}^{n-1} \sigma_{n-1-k} D^{(k)}(\delta_a)$$

En effet , $D([f]) = [f'] + \sigma_0\delta_a$

d'où $D^{(2)}([f]) = D([f']) + \sigma_0 D(\delta_a) = [f''] + \sigma_1\delta_a + \sigma_0 D(\delta_a)$

$D^{(3)}([f]) = D([f'']) + \sigma_1 D(\delta_a) + \sigma_0 D^{(2)}(\delta_a)$

$= [f'''] + \sigma_2 \delta_a + \sigma_1 D(\delta_a) + \sigma_0 D^{(2)}(\delta_a)$.

Par récurrence, on démontre la relation au rang n .

3) Dérivée $n^{\text{ème}}$ d'un signal discret

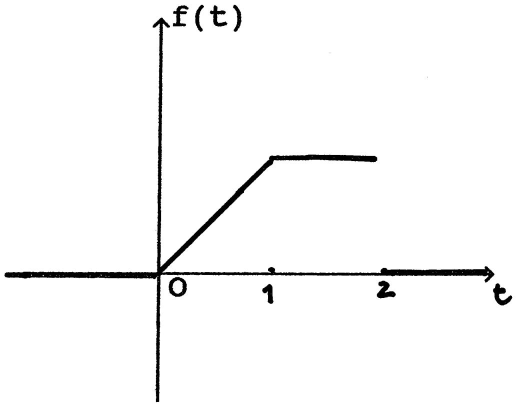
On démontre et nous admettrons la formule suivante, donnant la dérivée d'un signal discret :

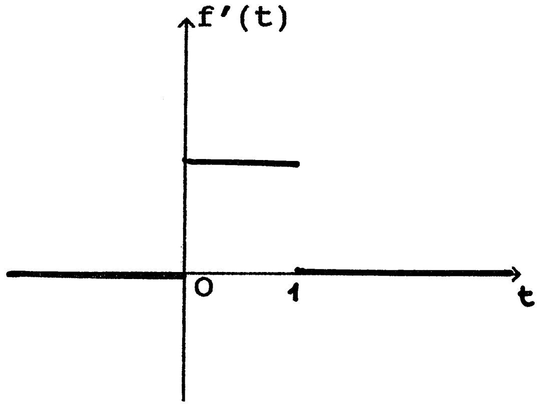
Si $S = \sum_{j\in\mathbb{Z}} a_j\ \delta_{t_j}$, alors $D^{(n)}(S) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} a_j\ D^{(n)}(\delta_{t_j})$

Démonstration (cf dans ce chapitre VI- 4°))

Exercices :Calculer la dérivée d'ordre n des distributions régulières associées aux fonctions f suivantes :

a) $f : t \longrightarrow t\ [\ \mathcal{U}(t) - \mathcal{U}(t-1)\ ] + \mathcal{U}(t-1) - \mathcal{U}(t-2)$





$D([f]) = [f'] - \delta_2$

$D^{(2)}([f]) = D([f']) - D(\delta_2)$

$D([f']) = \delta - \delta_1$

$D^{(2)}([f]) = \delta - \delta_1 - D(\delta_2)$

pour $n > 2$, $D^{(n)}(\ [f]\ ) = D^{(n-2)}\ (\delta - \delta_1) - D^{(n-1)}\ (\delta_2)$

b) $f(t) = \mathcal{U}(t)\ (\ t^3 + 1\ )$.

Définir $f', f'', f''', f^{(4)}$, et $D([f]), \ldots$

On trouve pour $n \geq 4$, $D^{(n)}([f]) = 6\ D^{(n-4)}(\delta) + D^{(n-1)}(\delta)$

c) $\begin{cases} f(t) = e^t - 1 & \text{pour } 0 \leq t \\ f(t) = 0 & \text{pour } t < 0 \end{cases}$

d) $f = \mathcal{U}g$, et g périodique, de période 2, définie par :

$$\begin{cases} g(t) = t & \text{si } t \in [0,1] \\ g(t) = 2 - t & \text{si } t \in [1,2] \end{cases}$$

e) $f(t) = \mathcal{U}(t) \sin \omega t$

VI Limite d'une famille de distributions

1°) Définition :

> Définition : Soit (u_x), $x \in \mathbb{R}$, une famille de distributions, on dit que la famille (u_x) converge vers $u \in \mathcal{D}'$ lorsque x tend vers α, si et seulement si $\forall\ \varphi \in \mathcal{D}$, $\lim\limits_{x \to \alpha} < u_x\ ,\ \varphi > = < u\ ,\ \varphi >$

On notera $u_x \xrightarrow[x \to \alpha]{\mathcal{D}'} u \in \mathcal{D}'$

En particulier, si $x = n \in \mathbb{N}$, on dit :

$$u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{D}'} u \in \mathcal{D}' \Leftrightarrow \forall\ \varphi \in \mathcal{D},\ \lim_{n \to +\infty} < u_n\ ,\ \varphi > = < u\ ,\ \varphi >$$

2°) Une approche de l'impulsion de Dirac

■ Soit $[f_\varepsilon]$, la famille de distributions régulières définies par :

$\forall\ \varepsilon > 0$, f_ε est localement continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et

$$\begin{cases} f_\varepsilon(t) \geq 0 & \text{si } t \in [\ 0\ ,\ \varepsilon\ ] \\ f_\varepsilon(t) = 0 & \text{si } t \notin [\ 0\ ,\ \varepsilon\ ] \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_\varepsilon(t)\ dt = \int_0^\varepsilon f_\varepsilon(t)\ dt = 1 \qquad (1)$$

■ Nous allons démontrer que la famille de distributions régulières ainsi définie converge vers δ dans $\mathcal{D}'$ lorsque ε tend vers 0.

Nous devons donc démontrer que :

$$\forall\ \varphi \in \mathcal{D},\ \lim_{\varepsilon \to 0} < [f_\varepsilon]\ ,\ \varphi > = < \delta\ ,\ \varphi > = \varphi(0)$$

Posons $I(\varepsilon) = \displaystyle\int_0^\varepsilon f_\varepsilon(t)\ \varphi(t)\ dt - \varphi(0).$

Or $\varphi(0) = \displaystyle\int_0^\varepsilon f_\varepsilon(t)\ \varphi(0)\ dt$ d'après (1).

Donc $I(\varepsilon) = \displaystyle\int_0^\varepsilon f_\varepsilon(t)\ \Big(\varphi(t) - \varphi(0)\Big)\ dt$

Soit F_ε la primitive large de f_ε nulle pour $t = 0$.

$F_\varepsilon(t) = \displaystyle\int_0^t f_\varepsilon(\tau)\ d\tau$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ donc $F_\varepsilon(t) = 0$ pour $t \le 0$,

$F_\varepsilon(t) = 1$ pour $t \ge \varepsilon$ et $\forall\ t \in [0,\varepsilon]\ \ 0 \le F_\varepsilon(t) \le 1$

Intégrons $I(\varepsilon)$ par parties, on obtient :

$$I(\varepsilon) = \Big[\ F_\varepsilon(t)\ \Big(\varphi(t) - \varphi(0)\Big)\ \Big]_0^\varepsilon - \int_0^\varepsilon F_\varepsilon(t)\ \varphi'(t)\ dt$$

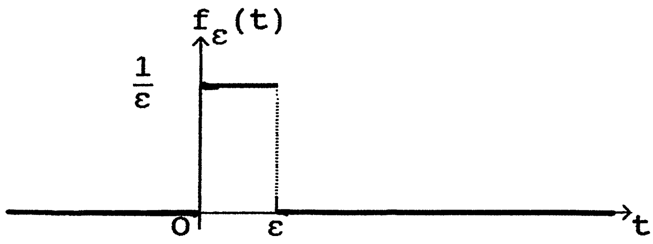
Donc $|I(\varepsilon)| \le |\varphi(\varepsilon) - \varphi(0)| + \displaystyle\int_0^\varepsilon F_\varepsilon(t)\ |\ \varphi'(t)\ |\ dt$

Soit $M_1 = \displaystyle\sup_{t \in \mathbb{R}} |\varphi'(t)|$, alors $|I(\varepsilon)| \le |\varphi(\varepsilon) - \varphi(0)| + \varepsilon\ M_1$

ce qui démontre que $\displaystyle\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} I(\varepsilon) = 0.$

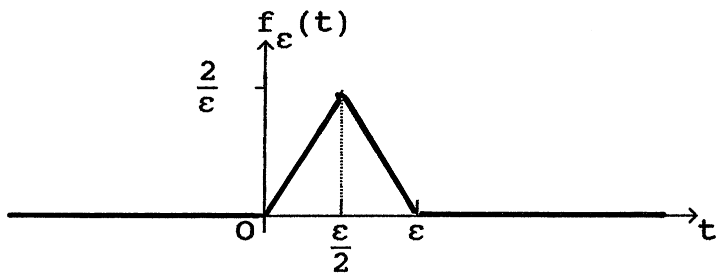
■ Exemples :

□ $f_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon}$ si $t \in [\ 0\ ,\ \varepsilon\ ]$ et $f_\varepsilon(t) = 0$ sinon



□ $f_\varepsilon(t) = \frac{4}{\varepsilon^2}\ t$ si $t \in [\ 0\ ,\ \frac{\varepsilon}{2}\ ]$

$f_\varepsilon(t) = -\frac{4}{\varepsilon^2}\ (t-\varepsilon)$ si $t \in [\ \frac{\varepsilon}{2}\ ,\ \varepsilon\ ]$ et $f_\varepsilon(t) = 0$ sinon



Remarquons que dans cet exemple $\forall\ t \in \mathbb{R},\ \lim_{\varepsilon \to 0} f_\varepsilon(t) = 0$

Cela est évident si $t \leq 0$. Si $t > 0$, $\forall\ \varepsilon < t$, $f_\varepsilon(t) = 0$.
Lorsque ε tend vers 0, la famille $[f_\varepsilon]$ ne converge pas dans $\mathcal{D}'$ vers la distribution nulle.

3°) Limite de $D(u_x)$

Théorème :

Si $u_x \xrightarrow[x \to \alpha]{\mathcal{D}'} u \in \mathcal{D}'$, alors $D(u_x) \xrightarrow[x \to \alpha]{\mathcal{D}'} D(u)$

Démonstration :

$$\forall\ \varphi \in \mathcal{D},\ <\ D(u_x)\ ,\ \varphi\ >\ =\ -\ <\ u_x\ ,\ \varphi'\ >\ \xrightarrow[x \to \alpha]{}\ -\ <\ u\ ,\ \varphi'\ >$$

4°) Application aux signaux discrets

Remarquons que $\sum_{n=0}^{N} a_n \, \delta_{nT} \xrightarrow[N \longrightarrow +\infty]{\mathcal{D}'} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \, \delta_{nT}$ $\quad T > 0$

En effet, soit $\varphi \in \mathcal{D}$, φ est nulle hors de $[a,b]$, et donc pour tout $N > E(b) + 1$ ($E(b)$ partie entière de b)

$$< \sum_{n=0}^{N} a_n \, \delta_{nT} \, , \, \varphi > \; = \; < \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \, \delta_{nT} \, , \, \varphi >$$

D'après le Théorème précédent :

$$D \left(\sum_{n=0}^{N} a_n \, \delta_{nT} \right) \xrightarrow[N \longrightarrow +\infty]{\mathcal{D}'} D \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \, \delta_{nT} \right)$$

Or $D \left(\sum_{n=0}^{N} a_n \, \delta_{nT} \right) = \sum_{n=0}^{N} a_n \, D(\delta_{nT})$ et on démontre comme ci-dessus

que $\sum_{n=0}^{N} a_n \, D(\delta_{nT}) \xrightarrow[N \longrightarrow +\infty]{\mathcal{D}'} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \, D(\delta_{nT})$

Ce qui démontre le V 3°).

5°) Série de distributions

▪ Soit (u_j), $n \in \mathbb{Z}$, une suite de distributions, on dit que la série $\sum_{-\infty}^{+\infty} u_j$ converge dans $\mathcal{D}'$ si et seulement si la suite $(\sum_{0}^{n} u_j)$ converge dans $\mathcal{D}'$ lorsque n tend vers $+ \infty$ et si la suite $(\sum_{-m}^{0} u_j)$ converge dans $\mathcal{D}'$ lorsque m tend vers $+ \infty$.

Avec le même raisonnement qu'au 4°), on constate donc que si $\sum_{-\infty}^{+\infty} u_j$ converge vers u alors $D(u) = \sum_{-\infty}^{+\infty} D(u_j)$. On peut donc dériver terme à terme une série convergente de distributions et on obtient ainsi la distribution dérivée.

Rappelons que ce n'est pas vrai pour une série de fonctions.

▪ Exemple : une formule sommatoire de POISSON.

Soit la fonction f, paire, de période 1, définie par :

$$f(t) = -t^2 + t \quad \text{pour } 0 < t < 1$$

Les coefficients de Fourier de f sont pour $n \in \mathbb{Z}^*$

$$c_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\, e^{2in\pi t}\, dt = \int_0^1 (-t^2 + t)\, e^{2in\pi t} dt = -\frac{1}{2\pi^2 n^2}$$

et $c_0 = \frac{1}{6}$.

On sait que $\forall\, t \in \mathbb{R},\ f(t) = \frac{1}{6} - \frac{1}{2\pi^2} \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \frac{e^{2in\pi t}}{n^2}$

Montrons que la série de distributions $\left[\frac{1}{6}\right] - \frac{1}{2\pi^2} \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \left[\frac{e^{2in\pi t}}{n^2}\right]$ converge dans $\mathcal{D}'$ vers [f].

On sait que, puisque $\left| \frac{e^{2in\pi t}}{n^2} \varphi(t) \right| \le \frac{M}{n^2}$, où $M = \sup_{t\in\mathbb{R}} |\varphi(t)|$

et que φ est nulle hors de [a,b] :

$$\int_a^b \left(\sum_{n=N}^{+\infty} \frac{e^{2in\pi t}}{n^2} \varphi(t)\, dt \right) = \sum_{n=N}^{+\infty} \int_a^b \frac{e^{2in\pi t}}{n^2} \varphi(t)\, dt$$

Il suffit donc de remarquer que

$$\forall\ \varphi \in \mathcal{D},\quad \sum_{n=N}^{+\infty} < \frac{e^{2in\pi t}}{n^2}\ ,\ \varphi > \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0 \qquad (1)$$

En effet, si ce résultat est établi, on a, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}$, tou $p < 0$ et tout $k > 0$ (p et k entiers)

$$< [f] - [\ \tfrac{1}{6} - \frac{1}{2\ \pi^2} \sum_{n=p}^{n=k} \frac{e^{2in\pi t}}{n^2}\ ]\ ,\ \varphi > \ =$$

$$\sum_{-\infty}^{n=p} < \frac{e^{2in\pi t}}{n^2}\ ,\ \varphi > \ + \ \sum_{n=k}^{+\infty} < \frac{e^{2in\pi t}}{n^2}\ ,\ \varphi >$$

et (1) montre que le deuxième membre de cette égalité tend vers 0 lorsque p tend vers $-\infty$ et k tend vers $+\infty$.

Montrons donc (1) :

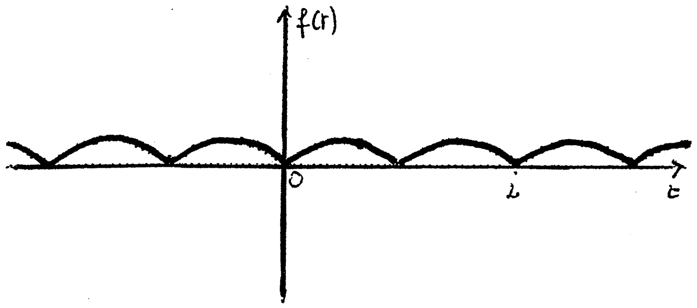
Rappelons que φ est nulle hors de [a,b] donc :

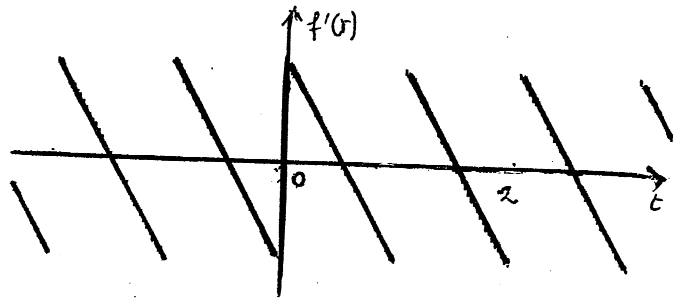
$$\left| < \frac{e^{2in\pi t}}{n^2}\ ,\ \varphi > \right| = \left| \int_a^b \frac{e^{2in\pi t}}{n^2}\ \varphi(t)\ dt \right| \leq \frac{M(b-a)}{n^2}$$

Donc $< \dfrac{e^{2in\pi t}}{n^2}\ ,\ \varphi >$ est le terme général d'une série numérique

absolument convergente ce qui montre $\displaystyle\sum_{n=N}^{+\infty} < \frac{e^{2in\pi t}}{n^2}\ ,\ \varphi > \xrightarrow[\to +\infty]{} 0$

$$\text{On a donc } [f(t)] = \left[\tfrac{1}{6}\right] - \frac{1}{2\ \pi^2} \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \left[\frac{e^{2in\pi t}}{n^2} \right] \qquad (2)$$





f est une primitive large de la fonction f' localement continue par morceaux

Donc en dérivant terme à terme dans l'égalité (2) ,

$$D([f]) = [f'] = -\frac{i}{\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \left[\frac{e^{2i\pi nt}}{n}\right]$$

$$\text{et } D([f']) = [-2] + 2\sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \delta_n = 2\sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \left[e^{2in\pi t}\right] .$$

d'où

$$Ш = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left[e^{2in\pi t}\right]$$

CHAPITRE 3 : EXERCICES

■ indique une difficulté plus importante.

Exercice Résolu :

$$\boxed{\left[\frac{\sin bt}{\pi t}\right] \xrightarrow[b \longrightarrow +\infty]{\mathcal{D}'} \delta \quad , \quad b > 0}$$

On suppose connu le résultat suivant : $\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt = 1$

cf par exemple " Mathématiques 3 - Analyse "
Azoulay et Avignant
Graw - Hill 1986
pages 25, 26, 27. Exercice 4

□ $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin bt}{\pi t}\, dt = 1$

En effet $\frac{1}{\pi}\int_{-X}^{+X} \frac{\sin bt}{t}\, dt \overset{X>0}{=} \frac{1}{\pi}\int_{-bX}^{+bX} \frac{\sin y}{y}\, dy \xrightarrow[X \longrightarrow +\infty]{} 1$

(Changement de variable $y = bt$)

□ Lemme 1 : $\forall\, \alpha > 0, \quad \lim_{b \longrightarrow +\infty} \int_{|t| \geq \alpha} \frac{\sin bt}{\pi t}\, dt = 0$

En effet $\int_{|t| \geq \alpha} \frac{\sin bt}{\pi t}\, dt = 1 - \int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{\sin bt}{\pi t}\, dt$

$$= 1 - \int_{-b\alpha}^{+b\alpha} \frac{\sin y}{\pi y}\, dy$$

□ <u>Lemme 2</u> : $\forall\ \varphi \in \mathcal{D},\quad \lim_{b \to +\infty} \int_{|t| \geq \alpha} \frac{\sin bt}{\pi t}\, \varphi(t)\, dt = 0$

φ étant nulle hors d'un intervalle fermé borné,

ou bien φ est nulle pour tout t tel que $|t| \geq \alpha$ et

$$\int_{|t| \geq \alpha} \frac{\sin bt}{\pi t}\, \varphi(t)\, dt = 0$$

ou bien $\displaystyle\int_{|t| \geq \alpha} \frac{\sin bt}{\pi t}\, \varphi(t)\, dt = \int_{I} \frac{\sin bt}{\pi t}\, \varphi(t)\, dt$

où I est soit un intervalle fermé borné, soit la réunion de deux intervalles fermés bornés I_1 et I_2 tels que $I_1 \cap I_2 = \emptyset$ et $0 \notin I_1 \cup I_2$.

Considérons donc une intégrale du type $\displaystyle\int_{c}^{d} \frac{\sin bt}{\pi t}\, \varphi(t)\, dt$, où $c < d$ et $0 \notin [\ c\ ,\ d\ ]$.

Alors soit f définie sur $[\ c\ ,\ d\ ]$ par $f(t) = \dfrac{\varphi(t)}{\pi t}$, intégrons par partie cette intégrale :

$$\int_{c}^{d} \frac{\sin bt}{\pi t}\, \varphi(t)\, dt = \left[- \frac{\varphi(t)}{\pi bt} \cos bt \right]_{c}^{d} + \int_{c}^{d} \frac{f'(t) \cos bt}{b}\, dt$$

$$\left| \frac{\varphi(c)}{\pi bc} \cos bc - \frac{\varphi(d)}{\pi bd} \cos bd \right| \leq \frac{2\ M_0}{b}$$

$$\text{où } M_0 = \operatorname{Sup} \left(\frac{|\varphi(c)|}{\pi |c|}\ ,\ \frac{|\varphi(d)|}{\pi |d|} \right)$$

quant à la fonction f, sa dérivée f' est continue sur [c,d]

Soit donc $M_1 = \sup_{t \in [c,d]} | f'(t) \cos bt |$

$$\left| \int_c^d \frac{f'(t) \cos bt}{b} dt \right| \leq \frac{(d-c)}{b} M_1$$

donc $$\left| \int_c^d \frac{\sin bt}{\pi t} \varphi(t)\, dt \right| \leq \frac{2 M_0 + (d-c) M_1}{b} \xrightarrow[b \to +\infty]{} 0$$

ce qui démontre le lemme 2.

□ <u>Démonstration du résultat</u> :

Soit alors $\varepsilon > 0$ donné, pour tout $\alpha > 0$

$$J_b = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin bt}{\pi t} \varphi(t)\, dt - \varphi(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin bt}{\pi t} \Big(\varphi(t) - \varphi(0) \Big) dt$$

$$= \int_{|t| > \alpha} \frac{\sin bt}{\pi t} \Big(\varphi(t) - \varphi(0)\Big) dt + \int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{\sin bt}{\pi t} \Big(\varphi(t) - \varphi(0)\Big) dt$$

Examinons d'abord la seconde intégrale de la somme précédente

La fonction $g : t \longrightarrow \dfrac{\varphi(t) - \varphi(0)}{\pi\, t}$ pour $t \neq 0$, $g(0) = \dfrac{1}{\pi} \varphi'(0)$
est continue sur $\mathbb{R}$.

g est donc bornée par exemple sur [-1 , +1]

Soit $M_2 = \sup_{t \in [-1,+1]} \left| \dfrac{\varphi(t) - \varphi(0)}{\pi\, t} \right|$

Pour tout $\alpha \leq 1$, on a donc $\left| \displaystyle\int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{\sin bt}{\pi t} \Big(\varphi(t) - \varphi(0)\Big) dt \right| \leq 2\, \alpha\, M_2$

Choisissons alors α tel que $\alpha < \text{Inf}\left(1 , \frac{\varepsilon}{6 M_2}\right)$

donc en particulier $2 \alpha M_2 < \frac{\varepsilon}{3}$.

Pour un tel α, appliquons le Lemme 1 à $\displaystyle\int_{|t| > \alpha} \frac{\sin bt}{\pi t}\, dt$

Il existe $B_1(\alpha)$ tel que $b > B_1(\alpha) \Rightarrow \left|\displaystyle\int_{|t| > \alpha} \frac{\sin bt}{\pi t}\, dt\right| \leq \frac{\varepsilon}{3|\varphi(0)|}$

(si $\varphi(0) = 0$, alors $\varphi(0) \displaystyle\int_{|t| > \alpha} \frac{\sin bt}{\pi t}\, dt = 0$ et la majoration de ce terme est sans objet).

Appliquons maintenant le Lemme 2 à $\displaystyle\int_{|t| > \alpha} \frac{\sin bt}{\pi t} \varphi(t)\, dt$

Il existe $B_2(\alpha)$ tel que $b > B_2(\alpha) \Rightarrow \left|\displaystyle\int_{|t| > \alpha} \frac{\sin bt}{\pi t} \varphi(t)\, dt\right| < \frac{\varepsilon}{3}$

Il s'ensuit que $\varepsilon > 0$ étant donné, on peut choisir α, puis $B = \text{Sup}\,(B_1 , B_2)$ (ou $B = B_2$ si $\varphi(0) = 0$) tel que :

$$b > B \Rightarrow \left| < \left[\frac{\sin bt}{\pi t}\right], \varphi(t) > - \varphi(0) \right|$$

$$\leq \left|\int_{|t| > \alpha} \frac{\sin bt}{\pi t} \varphi(t)\, dt\right| + \left|\int_{|t| > \alpha} \frac{\sin bt}{\pi t} \varphi(0)\, dt\right| + \left|\int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{\sin bt}{\pi t}\Big(\varphi(t)-\varphi(0)\Big) dt\right|$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

$$\text{donc } \left[\frac{\sin bt}{\pi t}\right] \xrightarrow[b \longrightarrow +\infty]{\mathcal{D}'} \delta \quad , b > 0$$

Exercice 1 :

Soit pour tout $t \in [k,k+1[$, $f(t) = t - k$, $k \in \mathbb{Z}$.

1°) Représenter graphiquement $y = f(t)$.

2°) Définir $D\Big([f]\Big)$. (utiliser le peigne de Dirac).

Exercice 2 :

Calculer les dérivées des distributions régulières associées aux fonctions suivantes :

1°) $\chi_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}$ où $\chi_A = 1$ si $t \in A$ et $\chi_A = 0$ si $t \notin A$

2°) $\chi_{\{a\}}$

3°) $\operatorname{sgn} t = \frac{|t|}{t}$ pour $t \in \mathbb{R}^*$

4°) $t \operatorname{sgn} t$

5°) $\mathcal{U}(t) \cos \pi t$

6°) $\mathcal{U}(t) \sin t$

7°) $\mathcal{U}(t) \operatorname{sgn} t$

Exercice 3 :

Calculer les distributions suivantes :

1°) $\frac{1}{\omega}\Big(D^{(2)} [\ \mathcal{U}(t) \sin \omega t\ ] + \omega^2 [\ \mathcal{U}(t) \sin\omega t\ ]\Big)$

2°) $D^{(m)}\Big([\ \mathcal{U}(t) \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}\ ]\Big)$

3°) $D^{(m)}\Big([\,|t|\,]\Big)$

4°) $D\left([\ \mathcal{U}(t)\ e^{-\lambda t}\ ] + \lambda\ [\ \mathcal{U}(t)\ e^{-\lambda t}\ ] \right)$ $\qquad \lambda \in \mathbb{C}$

Exercice 4 :

T est un réel strictement positif.
Soit la fonction f de période T définie par :

$$f(t) = \frac{\pi^2}{T^2}\left(\frac{T^2}{4} - t^2 \right) \qquad \text{pour } -\frac{T}{2} \leq t < \frac{T}{2}$$

1°) Représenter $y = f(t)$.

2°) Calculer $D\big([f]\big)$ et $D^{(2)}\big([f]\big)$

3°) Ecrire le développement en série de Fourier de [f].

4°) en dérivant terme à terme la série de distributions obtenues dans la question précédente, établir la formule suivante :

$$T \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_{\frac{T}{2} + nT} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^n \left[e^{in\omega t} \right]$$

Exercice 5 :

Soit f la fonction définie par :

f de période 2π et $\forall\ t \in \left]\ 0\ ,\ 2\pi\ \right[$, $\ f(t) = \pi - t$

1°) Ecrire le développement de f en série de Fourier.

2°) En déduire la formule :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_{2n\pi} = \frac{1}{2\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left[e^{int} \right]$$

Exercice 6 :

δ n'est pas une distribution régulière $[f]$, avec $|f|$ intégrable et bornée sur tout $[\alpha,\beta] \subset \mathbb{R}$.

Soit $\varphi(t) = \xi(\frac{t}{a})$ où ξ est la fonction définie dans l'exercice 1 du Chapitre 2.

1°) Montrer que s'il existe $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ localement sommable et bornée sur tout $[\alpha,\beta]$, telle que $\delta = [f]$ alors :

$$\forall\ a > 0 \quad \frac{1}{e} = \int_{-a}^{+a} f(t) \exp \frac{a^2}{t^2 - a^2}\, dt$$

2°) Montrer que lorsque a tend vers 0, il y a une contradiction.

Exercice 7 :

Montrer que $[\sin nt] \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{\mathcal{D}'} [0]$

Exercice 8 :

Soit f_n définie par $\begin{cases} f_n(t) = 0 & \text{si } |t| \geq \frac{1}{n} \\ f_n(t) = \frac{n}{2} & \text{si } |t| \leq \frac{1}{n} \end{cases}$

Montrer qur $[f_n] \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{\mathcal{D}'} \delta$

Exercice 9 :

Soit f_n définie par $\begin{cases} f_n(t) = 0 & \text{si } |t| \geq \frac{1}{n} \\ f_n(t) = n^2 & \text{si } |t| < \frac{1}{n} \end{cases}$

Montrer que la suite $[f_n]$ ne converge pas dans $\mathcal{D}'$ lorsque $n \longrightarrow +\infty$

Exercice 10 :

- Montrer que $\forall\, a \in \mathbb{R}$, $[n^a \sin nt] \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{D}'} [0]$

On distinguera les cas $a < 0$, $0 \le a < 1$, ... $k \le a < k + 1$, ... k entier naturel.

Exercice 11 :

- 1°) Montrer que $\left[\frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2 t^2} \right] \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{D}'} \delta$

Indication : On rappelle que $\forall\, t > 0$, $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt = 1$

On montrera que $\left| < \left[\frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2 t^2} \right], \varphi > - \varphi(0) \right|$ tend vers 0 lorsque $n \longrightarrow +\infty$ et $\varphi \in \mathcal{D}$, en utilisant le changement de variable $t = \frac{y}{n}$ et une majoration de $\left| \varphi(\frac{y}{n}) - \varphi(0) \right|$.

2°) Montrer que $\left[\frac{n}{2} e^{-n|t|} \right] \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{D}'} \delta$

3°) Montrer que $\left[\frac{n}{\pi(1+n^2 t^2)} \right] \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{D}'} \delta$

Exercice 12 :

Montrer les égalités suivantes :

1°) $(\sin at)\ D(\delta) = -\ a\ \delta \qquad \forall\ a \in \mathbb{R}$

2°) $D^{(2)}\left(\left[\mathcal{U}(t)\ \sin\ t\right]\right) = a\delta - a^2\left[\mathcal{U}(t)\ \sin\ at\right],\ \forall\ a \in \mathbb{R}$

3°) $\forall\ \alpha \in \mathbb{R},\ \forall\ a \in \mathbb{R},$

$$e^{\alpha t}\ D^{(n)}(\delta_a) = e^{\alpha a} \sum_{k=0}^{n} C_n^k\ (-\alpha)^{n-k}\ D^{(k)}(\delta_a)$$

Exercice 13 :

Calculer $f\ D^{(k)}\left(\delta_a\right)$, f indéfiniment dérivable.

Exercice 14 :

On rappelle que $\forall\ u \in \mathcal{D}'$, $\check{u}$ définie par $\forall\ \varphi \in \mathcal{D}$,
$< \check{u}\ ,\ \varphi(t) > = < u\ ,\ \varphi(-t) >$ est une distribution.

Montrer que $\check{D(u)} = -\ D\ (\check{u})$

Exercice 15 :

$a \in \mathbb{R}^*$, on rappelle que $\forall\ u \in \mathcal{D}'$,
$< v\ ,\ \varphi(t) > = < u\ ,\ \frac{1}{|a|}\ \varphi(\frac{t}{a}) >$ définit une distribution.

Montrer que $\forall\ \varphi \in \mathcal{D}$, $<D(v),\varphi> = -\ < u\ ,\ \frac{1}{|a|}\ \varphi'(\frac{t}{a}) >$

Exercice 16 :

Montrer que, m et n étant des entiers naturels

$$t^n\, D^{(m)}(\delta) = \begin{cases} 0 & \text{si } m < n \\ (-1)^n\, n!\, \delta & \text{si } m = n \\ (-1)^n \dfrac{m\,!}{(m-n)\,!}\, D^{(m-n)}(\delta) & \text{si } m > n \end{cases}$$

Exercice 17 :

▪ Soit ψ une fonction test nulle hors de $[-2,+2]$ et constamment égale à 1 sur $[-1,+1]$. $\varphi \in \mathcal{D}$.

1°) Montrer que φ_1 définie par $\varphi_1(t) = \psi(t) \displaystyle\int_0^t \varphi(x)\, dx$

est une fonction test nulle en 0 et primitive de φ sur $[-1,+1]$.

On définit ainsi $\varphi_2(t) = \psi(t) \displaystyle\int_0^t \varphi_1(x)\, dx$, ...

$$\varphi_k(t) = \psi(t) \int_0^t \varphi_{k-1}(x)\, dx$$

2°) Montrer en utilisant la première question, que

si $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \alpha_k\, D^{(k)}(\delta) = \sum_{k=0}^{n} \beta_k\, D^{(k)}(\delta)$ alors $\forall\, k,\ 0 \le k \le n,\ \alpha_k = \beta_k$

On utilisera des primitives successives de ψ construites grâce au 1°) et on montrera aussi, de proche en proche,

$$\alpha_0 - \beta_0 = 0\ ,\ \alpha_1 - \beta_1 = 0\ \ldots$$

Exercice 18 :

Montrer que si f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que f" soit localement continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, et solution de l'équation différentielle :

$$t\, y'' + y' + t\, y = 0$$

alors $$t\, D^{(2)}\Big([\mathcal{U}\, f]\Big) + D\,\Big([\mathcal{U}\, f\,]\Big) + t\,[\mathcal{U}\, f] = 0$$

Exercice 19 :

Calculer $D(u)$, $D^{(2)}(u)$, $D^{(3)}(u)$, $D^{(4)}(u)$ dans les cas suivants :

1°) $u = [\ |\sin t|\ ]$

2°) $u = [\ |t| \sin t\ ]$

Exercice 20 :

On se propose de calculer les dérivées $D(u)$, $D^{(2)}(u)$, $D^{(3)}(u)$, $D^{(4)}(u)$ de la distribution régulière $u = \Big[|t \sin t|\Big]$.

1°) Calculer $D^{(k)}\Big(\Big[\ t \sin t\ \Big]\Big)$, pour $1 \leq k \leq 4$

2°) Montrer que :

$$|t \sin t| = (\ t \sin t\ ) \sum_{n=-\infty}^{n=-1} (-1)^{n+1} \Big(\ \mathcal{U}(t-n\pi) - \mathcal{U}(t-(n+1)\pi)\ \Big)$$

$$+ (\ t \sin t\ ) \sum_{n=0}^{n=+\infty} (-1)^{n} \Big(\ \mathcal{U}(t-n\pi) - \mathcal{U}(t-(n+1)\pi)\ \Big)$$

3°) Calculer alors $D(u)$ et $D^{(2)}(u)$.

Exercice 21 :

Montrer que :

1°) $\frac{1}{x}\,(\,\delta_{-x} - \delta)\ \xrightarrow[x \longrightarrow 0]{\mathcal{D}'}\ D(\delta)$

2°) $\frac{1}{x}\,(\,\delta_{-2x} - 2\,\delta_{-x} + \delta)\ \xrightarrow[x \longrightarrow 0]{\mathcal{D}'}\ [0]$

3°) $\frac{1}{x^2}\,(\,\delta_{-2x} - 2\,\delta_{-x} + \delta)\ \xrightarrow[x \longrightarrow 0]{\mathcal{D}'}\ D^{(2)}(\delta)$

Exercice 22 :

■ Soit $x > 0$ et g_x la fonction définie par :

$$\begin{cases} g_x(t) = \dfrac{1}{x^2} & \text{si } t \in \,]-x,0[\\ g_x(t) = -\dfrac{1}{x^2} & \text{si } t \in \,]0,x[\\ g_x(t) = 0 & \text{si } t \in \,]-\infty,-x[\ \cup\ [x,+\infty[\end{cases}$$

Montrer que $[g_x]\ \xrightarrow[x \overset{>}{\longrightarrow} 0]{\mathcal{D}'}\ D(\delta)$

Indication sur l'exercice 22

On montrera que $|<[g_x]\ ,\ \varphi> + \varphi'(0)| \leq |\varphi'(x) - \varphi'(0)| + 2x\,M_2$ où $M_2 = \underset{t \in \mathbb{R}}{\operatorname{Sup}}\ |\varphi''(t)|$ et $\varphi \in \mathcal{D}$.

On pourra pour cela intégrer par parties en utilisant G_x primitive large de g_x nulle pour $t = -x$ et H_x primitive de G_x nulle pour $t = -x$.

Exercice 23 :

■ Trouver (sans utiliser la Transformation de Laplace) une distribution $u \in \mathcal{D}'_+$,

$u = [\, \mathcal{U} f \,]$, f fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, deux fois continûment dérivable solution de :

(E) $$\frac{1}{\omega_0^2} D^{(2)}(u) + \frac{2\,m}{\omega_0} D(u) + u = \alpha\,\delta + \beta\, D(\delta)$$

cas particulier : $m = 1$

$$\alpha = \frac{2\,m}{\omega_0}$$

$$\beta = \frac{1}{\omega_0^2}$$

Chapitre 4

SYSTEMES PHYSIQUES ET CONVOLUTION

I.- Introduction

■ Nous allons définir un système physique comme étant une application d'un certain sous-ensemble de l'ensemble des distributions $\mathcal{D}'$ dans $\mathcal{D}'$ et nous restreindre à l'étude des applications qui possèdent un certain nombre de propriétés particulières (linéarité, permanence) que nous préciserons.

Les systèmes utiles en physique élémentaire possèdent en outre des propriétés de continuité que nous n'aborderons pas .
cf ZEMANIAN 5-8

Ce qui est particulièrement remarquable est que tout système physique linéaire, permanent et dans un certain sens "continu" est un opérateur de convolution .

La convolution est une opération, que nous préciserons, définie pour certaines distributions.

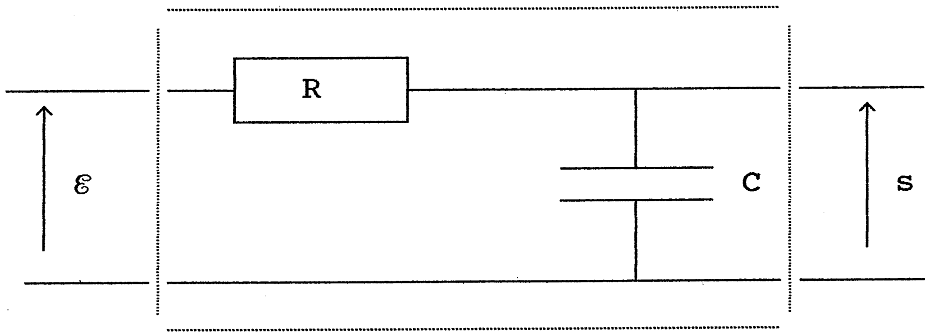
h étant une distribution donnée, on appelle opérateur de convolution l'application qui à toute distribution u appartenant à un certain sous-ensemble de $\mathcal{D}'$ qu'il conviendra de préciser, fait correspondre la distribution notée $u * h$.

Après avoir,dans le paragraphe II défini les propriétés utiles des systèmes, nous définirons donc dans certains cas l'opération appelée convolution.

■ On rappelle que nous symboliserons le système par le schéma suivant

$$\mathcal{E} \longrightarrow \boxed{\mathcal{S}} \longrightarrow s$$

Nous allons nous appuyer , dans ce chapitre, à titre d'exemple sur le système suivant, appelé circuit " RC" .



$\mathcal{S}$

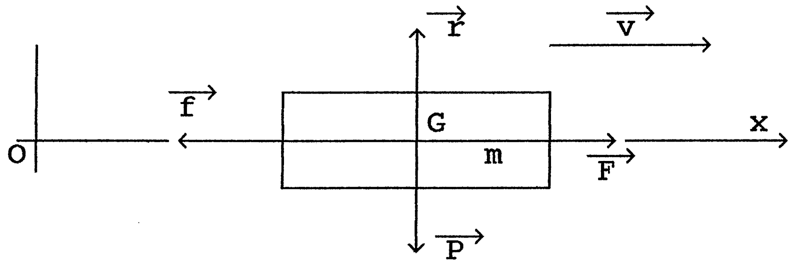
Nous nous placerons de plus, pour simplifier, dans le cas particulier où RC = 1 .

● On trouve un tel système :

a) *En électricité* (cf. Tome 1 page 21)
R résistance d'un condensateur (en ohms)
C capacité d'un condensateur (en farads).
$\mathcal{E}$ et s en volts, et $\tau = R\ C$.

b) *En "chauffage"*, modèle simplifié (cf. Tome 1 page 24)
$\mathcal{E} = R\ P$, $s = \theta_a - \theta_{ext}$
P puissance fournie par le radiateur (en W)
R résistance thermique du local (en K / W)
C capacité calorifique totale du local (en J / K)
$s = \theta_a - \theta_{ext}$ température réduite du local (en K)
$\tau = R\ C$

c) *En mécanique*



$\vec{P}$: poids du mobile de masse m

$\vec{r}$: réaction normale du sol opposée au poids .

$\vec{f}$: force de frottement tangentielle de sens contraire au déplacement du mobile et d'intensité supposée proportionnelle à la vitesse .

Donc $\vec{f} = - k \vec{v}$ avec $\vec{v}$ vitesse de déplacement du mobile et k coefficient de frottement .

$\vec{F}$: force qui provoque le déplacement du mobile .

Appliquons le principe fondamental de la dynamique :

$$\sum \vec{\mathcal{F}}_{ext} = m \, \vec{a_G}$$

où $\vec{a_G}$ est l'accélération du centre de gravité .

$\sum \vec{\mathcal{F}}_{ext} = \vec{r} + \vec{P} + \vec{F} + \vec{f}$, et $\vec{r} + \vec{P} = \vec{0}$,

d'où $m \, \vec{a_G} = \vec{F} + \vec{f}$.

En projetant sur l'axe Ox avec O position de G à t = 0, on obtient $F + f = m \, a_G = m \dfrac{dv}{dt}$.

Donc $F - k \, v = m \dfrac{dv}{dt}$, ou encore $\underline{\dfrac{m}{k} \dfrac{dv}{dt} + v = \dfrac{F}{k}}$.

Ici, $\mathcal{E} = \dfrac{F}{k}$, $s = v$, $R = \dfrac{1}{k}$, $C = m$, $\tau = R\,C$.

■ Tous ces problèmes, lorsque l'entrée $\mathcal{E}$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$, peuvent se résoudre à l'aide de l'équation différentielle

$$\tau \frac{ds}{dt} + s = \mathcal{E}$$

en précisant s(0+) par un raisonnement physique .

On rappelle que pour simplifier les calculs nous nous placerons dans le cas où $\tau = 1$.

On sait par exemple que si $\mathcal{E} = \mathcal{U}$ et $s(0+) = 0$, on obtient

$$s(t) = (1 - e^{-t}) \, \mathcal{U}(t) \, . \; (\text{ cf . chapitre 1 }) \, .$$

Si maintenant on applique à l'entrée d'un tel système $\mathcal{E} = \delta$:

- en électricité : tension de durée très brève et d'amplitude très grande

- en chauffage : un radiateur fournissant une très grande puissance pendant une durée très faible

- en mécanique : un choc bref et très violent

alors on obtient $s(t) = e^{-t} \, \mathcal{U}(t)$.

■ Comme cela est employé dans tous les ouvrages , s'il est commode de préciser la variable , nous noterons :

$$< u \, , \varphi > \; = \; < u \, , \varphi(t) >$$

II.-Signaux et systèmes

1) Définition d'un système

$\mathcal{S}$ est un système $\Leftrightarrow$ $\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{S} \text{ est une application d'une partie} \\ \mathcal{A} \text{ de } \mathcal{D}' \text{ dans } \mathcal{D}' \end{array} \right.$

On précisera éventuellement $\mathcal{A}$ pour chaque système.

Un élément de $\mathcal{A}$ est appelé signal admissible pour le système.

On notera $\mathcal{E} \in \mathcal{A} \xrightarrow{\mathcal{S}} s = \mathcal{S}(\mathcal{E})$, où $\mathcal{E}$ est appelé signal d'entrée et s signal de sortie correspondant.

$\mathcal{E}$ et s sont donc des distributions .

2) Système linéaire

a) Exemple

Reprenons l'exemple du système "RC" avec $\tau = 1$.

- On a vu que $\mathcal{E} = \delta \xrightarrow{\mathcal{S}} s = [\ e^{-t}\ \mathcal{U}(t)\ ]$.

On constate expérimentalement que :

$$\mathcal{E}_1 = 2\ \delta \xrightarrow{\mathcal{S}} [\ 2\ e^{-t}\ \mathcal{U}(t)\ ] = 2\ s$$

- On a vu que $\mathcal{E}_2 = [\ \mathcal{U}(t)\ ] \xrightarrow{\mathcal{S}} [\ (1 - e^{-t})\ \mathcal{U}(t)] = s_2$

On constate expérimentalement que :

$$\mathcal{E} + \mathcal{E}_2 = \delta + [\mathcal{U}(t)] \xrightarrow{\mathcal{S}} [\mathcal{U}(t)] = s + s_2\ .$$

b) Définition

Le système $\mathcal{S}$ est dit linéaire si $\forall\ \mathcal{E}_1 \in \mathcal{A}$, $\forall\ \mathcal{E}_2 \in \mathcal{A}$, $\forall\ \lambda,\mu \in \mathbb{C}$ $\mathcal{S}(\ \lambda\mathcal{E}_1 + \mu\mathcal{E}_2\ ) = \lambda\ \mathcal{S}(\ \mathcal{E}_1\ ) + \mu\ \mathcal{S}(\ \mathcal{E}_2\ )$

Remarquons que si l'entrée $\mathcal{E} = [0]$, alors la sortie $s = [0]$.

3) Système continu

Soit $\mathcal{S}$ un sytème, $\mathcal{A}$ l'ensemble de ses signaux admissibles.

On dit que le système est continu si :

1°) $\delta \in \mathcal{A}$. On pose alors $h = \mathcal{S}(\delta)$.

2°) Si de plus, chaque fois qu'une suite d'entrées admissibles $(\mathcal{E}_n)$ converge dans un sens qu'il faudrait préciser et qui dépend de h vers une distribution $\mathcal{E} \in \mathcal{A}$,alors la suite des sorties (s_n) correspondantes converge vers $s = \mathcal{S}(\mathcal{E})$.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E}_n \arrow[r, "\mathcal{S}"] \arrow[d, dotted] & s_n \arrow[d, dotted] \\
\mathcal{E} \arrow[r, "\mathcal{S}"] & s
\end{tikzcd}$$

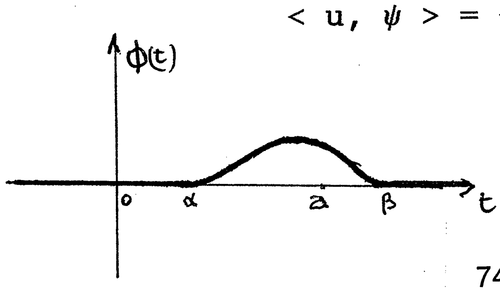
cf ZEMANIAN Th 5-6-1

4) Système invariant dans le temps (ou permanent) .

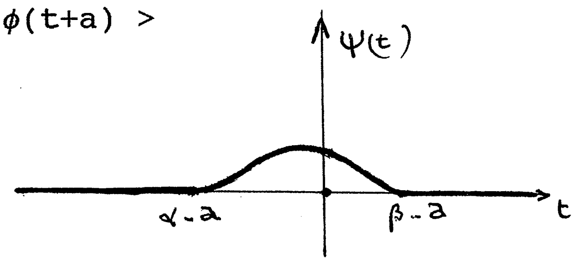
a) Distribution "retardée" ou translatée

▪ Définition

Soit l'application ψ: $t \longrightarrow \phi(t + a)$;
Si $\phi \in \mathcal{D}$, alors $\psi \in \mathcal{D}$, et nous noterons:



$$< u,\ \psi > = <u\ ,\ \phi(t+a)>$$



Définition 1 : Soit $u \in \mathcal{D}'$ et $a \in \mathbb{R}$. Par définition, la distribution $\tau_a u$ est la distribution définie par $\forall\ \phi \in \mathcal{D}$, $< \tau_a u , \phi(t)> = < u , \phi(t + a) >$.

On dit que $\tau_a u$ est le signal u retardé de a .

La démonstration de $u \in \mathcal{D}' \Rightarrow \tau_a u \in \mathcal{D}'$ est sans difficulté .

■ Cas d'une distribution régulière

Soit [f] une distribution régulière .

$$\forall\ \varphi \in \mathcal{D},\ <\tau_a[f],\phi(t)> = <[f],\phi(t+a)> = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ \phi(t+a)\ dt\ .$$

Posons $x = t + a$ et faisons le changement de variable dans l'intégrale, on obtient :

$$< \tau_a[f] , \phi > = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-a)\ \phi(x)\ dx = < [f(t-a)] , \phi > .$$

$$\boxed{\tau_a[f(t)] = [f(t-a)]}$$

■ Cas d'une impulsion de Dirac

On a également

$$\boxed{\tau_a\delta_b = \delta_{a+b}}$$

En effet :

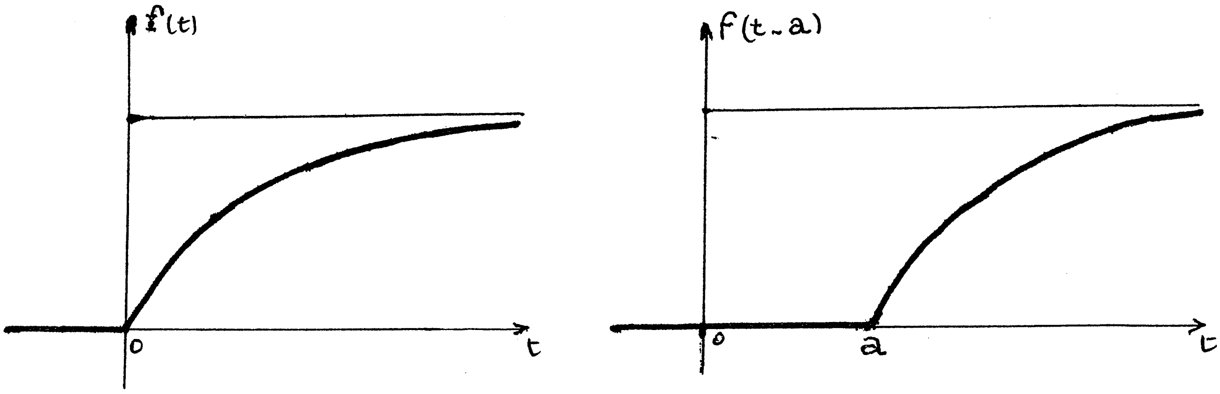
$$\forall\ \varphi \in \mathcal{D},\ < \tau_a\ \delta_b , \phi(t) > = < \delta_b , \phi(t+a) > = \phi(a+b) = < \delta_{a+b},\phi >$$

b) Exemple et Définition d'un système invariant dans le temps

■ Reprenons l'exemple du système "RC" . On peut constater expérimentalement :

$$[\ \mathcal{U}(t)\ ] \xrightarrow{\mathcal{S}} [\ (1 - e^{-t})\ \mathcal{U}(t)\ ] = [\ f(t)\ ]$$

$$[\ \mathcal{U}(t-a)\ ] \xrightarrow{\mathcal{S}} [\ (1 - e^{-(t-a)})\ \mathcal{U}(t-a)\ ] = [\ f(t-a)\ ]$$



$$\delta \xrightarrow{\mathcal{S}} [e^{-t}\ \mathcal{U}(t)]$$

$$\delta_a \xrightarrow{\mathcal{S}} [\ e^{-(t-a)}\ \mathcal{U}(t-a)]$$

■ Définition

Définition 2 Un système $\mathcal{S}$ (défini sur $\mathcal{A}$) est dit invariant dans le temps si et seulement si $\forall\ u \in \mathcal{A}$, $\forall\ a \in \mathbb{R}$,

$$\tau_a u \in \mathcal{A} \quad \text{et} \quad \mathcal{S}(\tau_a u) = \tau_a\ \mathcal{S}(u)$$

c) Autres exemples :

■ Soit $u \xrightarrow{\mathcal{S}_1} t^2\, u$. $\mathcal{A} = \mathcal{D}'$ (cf Chapitre I.)

$\mathcal{S}_1$ est linéaire (immédiat) .

$\mathcal{S}_1$ n'est pas invariant dans le temps . En effet, $\forall\ \varphi \in \mathcal{D}$

$$< \mathcal{S}_1(\tau_a u), \phi(t)> \ = \ < t^2 \tau_a u \ , \ \phi(t) > \ = \ < \tau_a u \ , \ t^2 \phi(t) >$$

$$= \ < u \ , \ (t + a)^2 \ \phi(t+a) > .$$

$$< \tau_a \mathcal{S}_1(u), \phi(t)> \ = \ < \mathcal{S}_1(u) \ , \ \phi(t+a) > \ = \ < t^2 u \ , \ \phi(t+a) >$$

$$= \ < u \ , \ t^2 \ \phi(t+a) >$$

Donc $\qquad \mathcal{S}_1(\tau_a u) \ \neq \ \tau_a \ \mathcal{S}_1(u)$

■ Le retard de b . $u \xrightarrow{\mathcal{S}_2} \tau_b u$. $\mathcal{A} = \mathcal{D}'$.

$\mathcal{S}_2$ est linéaire (immédiat).

$\mathcal{S}_2$ est invariant dans le temps . En effet, $\forall\ \varphi \in \mathcal{D}$

$$< \mathcal{S}_2(\tau_a u) \ , \ \phi(t) > \ = \ < \tau_b \ \tau_a u \ , \ \phi(t) >$$

$$= \ < \tau_a u \ , \ \phi(t+b) > \ = \ < u \ , \ \phi(t+b+a) >$$

$$< \tau_a \mathcal{S}_2(u) \ , \ \phi(t) > \ = \ < \mathcal{S}_2(u) \ , \ \phi(t+a) > \ = \ < u, \ \phi(t+a+b) >$$

Donc $\qquad \mathcal{S}_2(\tau_a u) \ = \ \tau_a \ \mathcal{S}_2(u)$

■ Le "Dérivateur" $u \xrightarrow{\mathcal{S}_3} D(u)$. $\mathcal{A} = \mathcal{D}'$

(cf. Chap. II.)

$\mathcal{S}_3$ est linéaire (Ch.II)

$\mathcal{S}_3$ est invariant dans le temps .En effet, $\forall\ \varphi \in \mathcal{D}$

$$<\mathcal{S}_3(\tau_a u)\ ,\ \phi(t)> = -<\tau_a u\ ,\ \phi'(t)> = -<u, \phi'(t+a)>$$

$$<\tau_a \mathcal{S}_3(u)\ ,\ \phi(t)> = <D(u), \phi(t+a)> = -<u, \phi'(t+a)>$$

Donc $$\mathcal{S}_3(\tau_a u) = \tau_a\ \mathcal{S}_3(u)$$

5) Systèmes causaux

a) Introduction aux systèmes causaux

Soit un système $\mathcal{S}$ linéaire, continu et invariant dans le temps. $\mathcal{A}$ l'ensemble des signaux admissibles par $\mathcal{S}$.

$\delta \in \mathcal{A}$. Soit $h = \mathcal{S}(\delta)$.

■ Si par exemple $h = [\ \frac{\sin \Omega t}{\pi t}\ ]$, (filtre passe-bas idéal), on constate que la sortie h correspondant à l'entrée δ n'est pas nulle pour $t < 0$. La sortie "précède l'entrée". Un tel système n'est pas réalisable en Physique.

■ De même, si le signal d'entrée appliqué à un système physique $\mathcal{S}$ est par exemple une distribution régulière [f] telle que, $\forall\ t < t_0$, $f(t) = 0$, alors on constate que si la sortie est également une distribution régulière [g], $\forall\ t < t_0$, $g(t) = 0$.

■ Examinons ce que signifie pour la distribution régulière [f] le fait que f est nulle sur $I =]-\infty , t_0[$

Soit $[\alpha , \beta] \subset I$ et $\varphi \in \mathcal{D}_{[\alpha , \beta]}$

$$< [f] , \varphi > = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ \varphi(t)\ dt = \int_{\alpha}^{\beta} f(t)\ \varphi(t)\ dt = 0 .$$

car f est nulle sur $[\alpha , \beta] \subset I$.

Donc si $\varphi \in \mathcal{D}_{[\alpha,\beta]}$ et si $[\alpha,\beta] \subset I$, alors $< [f] , \varphi > = 0$.

b) Distribution nulle sur un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.

Définition 3 Soient $u \in \mathcal{D}'$ et I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. On dit que u est nulle sur I si et seulement si pour tout $[\alpha,\beta] \subset I$ et pour tout $\varphi \in \mathcal{D}_{[\alpha,\beta]}$

$$< u , \varphi > = 0$$

On appelle $\mathcal{D}'_+$ l'ensemble des distributions nulles sur $]-\infty , 0[$

c) Exemples de distributions nulles sur un intervalle ouvert :

■ D'une manière générale, montrons que si f est nulle sur I alors [f] est nulle sur I .

$[\alpha , \beta] \subset I$ et $\varphi \in \mathcal{D}_{[\alpha , \beta]}$

$$< [f],\varphi > = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ \varphi(t)\ dt = \int_{\alpha}^{\beta} f(t)\ \varphi(t)\ dt = 0 .$$

■ δ_a est nulle sur $]-\infty, a[$ et nulle sur $]a, +\infty[$.

Soit $[\alpha, \beta] \subset]-\infty, a[$ et $\varphi \in \mathcal{D}_{[\alpha, \beta]}$

$< \delta_a, \varphi > = \varphi(a) = 0$ car $a \notin [\alpha, \beta]$.

On démontre de même que δ_a est nulle sur $]a, +\infty[$.

■ $D^{(n)}(\delta_a)$ est nulle sur $]-\infty, a[$ et nulle sur $]a, +\infty[$

Soit $[\alpha, \beta] \subset]-\infty, a[$ ou $[\alpha, \beta] \subset]a, +\infty[$, alors $a \notin [\alpha, \beta]$.

Soit $\varphi \in \mathcal{D}_{[\alpha, \beta]}$, on a vu que $\varphi^{(n)} \in \mathcal{D}_{[\alpha, \beta]}$

donc $< D^{(n)}(\delta_a), \varphi > = (-1)^n \varphi^{(n)}(a) = 0$.

d) Propriétés

■ $u \in \mathcal{D}'$ et $v \in \mathcal{D}'$,

> $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $\forall \mu \in \mathbb{C}$, si u et v sont nulles sur un intervalle ouvert I, alors $\lambda u + \mu v$ est nulle sur I.

$< \lambda u + \mu v, \varphi > = \lambda < u, \varphi > + \mu < v, \varphi > = 0$

dès que $< u, \varphi > = < v, \varphi > = 0$.

■

> Soit u une distribution nulle sur l'intervalle ouvert I, alors quelle que soit la fonction θ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, indéfiniment dérivable dur $\mathbb{R}$,
> θu est nulle sur I.

En effet, $\varphi \in \mathcal{D}_{[\alpha,\beta]} \Rightarrow \theta \varphi \in \mathcal{D}_{[\alpha,\beta]}$, donc si $[\alpha,\beta] \subset I$ et $\varphi \in \mathcal{D}_{[\alpha,\beta]}$

alors $< \theta\, u \;,\; \varphi > \; = \; < u \;,\; \theta\, \varphi > \; = 0$.

■

Si u est nulle sur I, alors $D^{(n)}(u)$ est nulle sur I pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

En effet, si φ est nulle hors de $[\alpha,\beta]$, alors, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi^{(n)}$ est nulle hors de $[\alpha,\beta]$ et si $[\alpha,\beta] \subset I$,alors

$$< D^{(n)}(u) \;,\; \varphi > \; = (-1)^n < u \;,\; \varphi^{(n)} > \; = 0 \;.$$

e) Définition d'un système causal

On a constaté, avec l'exemple du système "RC", que si l'entrée est nulle sur $]-\infty, a[$, la sortie est nulle sur $]-\infty, a[$.

Par exemple, en chauffage, dans le cas du modèle simplifié (cf I), si la puissance fournie par le radiateur avant l'instant $t = a$ est nulle, la température ambiante est égale à la température extérieure ; c'est à dire que $s(t) = \theta_a(t) - \theta_{ext}(t) = 0$ pour $t < a$.

Définition 4 $\mathcal{S}$ défini sur $\mathcal{A}$ est dit système causal si et seulement si pour tout $a \in \mathbb{R}$, et tout $u \in \mathcal{A}$: u nulle sur $]-\infty,a[\;\Rightarrow\; \mathcal{S}(u)$ nulle sur $]-\infty,a[$

Ceci correspond au phénomène physique suivant :si le signal d'entrée est nul avant l'instant a, alors le signal de sortie est nul avant l'instant a.

Notons que le système "RC" est un système causal .

f)

Théorème Soit $\mathcal{S}$ un système défini sur $\mathcal{A}$ tel que : pour tout $u \in \mathcal{A}$, si u est nulle sur $]-\infty,0[$ alors $\mathcal{S}(u)$ est nulle sur $]-\infty,0[$.   Si de plus $\mathcal{S}$ est invariant dans le temps , alors $\mathcal{S}$ est causal

Démonstration :

- Montrons d'abord que:

$$\boxed{u \text{ nulle sur }]-\infty,a[\Leftrightarrow \tau_{-a}\, u \text{ nulle sur }]-\infty,0[}$$

Remarquons en effet qu'à toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}_{[\alpha,\beta]}$, $[\alpha , \beta] \subset]-\infty , a[$ correspond une fonction $\psi \in \mathcal{D}_{[\alpha',\beta']}$, $[\alpha' , \beta'] \subset]-\infty , 0[$ et réciproquement, avec $\alpha' = \alpha - a$, $\beta' = \beta - a$ et $\forall\, t \in \mathbb{R}$, $\varphi(t) = \psi(t - a)$.

$$\forall\, t \in \mathbb{R},\ \varphi(t) = \psi(t - a) \Leftrightarrow \forall\, y \in \mathbb{R},\ \varphi(y + a) = \psi(y)$$

Nous pouvons donc écrire les équivalences suivantes :

u nulle sur $]-\infty , a[$ (i)

$$\Leftrightarrow \forall\, [\alpha , \beta] \subset]-\infty , a[\text{ et } \forall\, \varphi \in \mathcal{D}_{[\alpha,\beta]},\ < u , \varphi > = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall\, [\alpha',\beta'] \subset]-\infty , 0[\text{ et } \forall\, \psi \in \mathcal{D}_{[\alpha',\beta']},\ <u,\psi(t-a)> = 0$$

or $< u , \psi(t - a) > \; = \; < \tau_{-a} , \psi >$

Donc (i) est équivalent à

$\forall\, [\alpha',\beta'] \subset]-\infty , 0[$ et $\forall\, \psi \in \mathcal{D}_{[\alpha',\beta']}$, $< \tau_{-a}u , \psi > = 0$.

ce qui montre que :

$$u \text{ nulle sur }]-\infty , a[\Leftrightarrow \tau_{-a}u \text{ nulle sur }]-\infty , 0[$$

■ Soit donc u nulle sur $]-\infty,a[$, alors $\tau_{-a}u$ est nulle sur $]-\infty, 0[$, donc $\mathcal{S}(\tau_{-a}u)$ est nulle sur $]-\infty,0[$ par hypothèse .
Or $\mathcal{S}$ invariant dans le temps implique que $\mathcal{S}(\tau_{-a}u) = \tau_{-a}\mathcal{S}(u)$ et $\tau_{-a}\mathcal{S}(u)$ nulle sur $]-\infty, 0[\Rightarrow \mathcal{S}(u)$ nulle sur $]-\infty, a[$.

III - Convolution de deux fonctions, de deux distributions règulières .

Dorénavant, lorsque nous écrirons $[a,b]$, nous supposerons $a < b$.

1) Préliminaires

A) Reprenons l'exemple du système "R C" dans le cas où $\tau = 1$.

Nous rappelons que :

si $\mathcal{E} = \delta$, $\delta \xrightarrow{\mathcal{S}} h = [\, e^{-t}\, \mathcal{U}(t)\,]$

si $\mathcal{E} = \mathcal{U}$, $[\mathcal{U}] \xrightarrow{\mathcal{S}} s = [(1 - e^{-t})\, \mathcal{U}(t)\,]$.

Nous avons remarqué dans le chapitre 1 que :

$$\forall\ t \in \mathbb{R}\ ,\ s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\ \mathcal{U}(t - x)\ dx\ .$$

Ce calcul sera explicité ci-dessous en B exemple .

B) Etude de $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ g(t - x)\ dx$

Dans tout ce qui suit, f et g sont supposées localement sommables sur $\mathbb{R}$, ce qui est le cas si elles sont localement continues par morceaux sur $\mathbb{R}$.

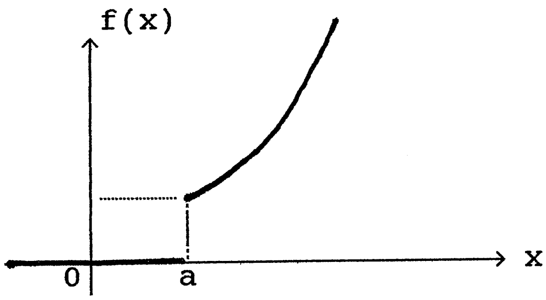
a) Remarque

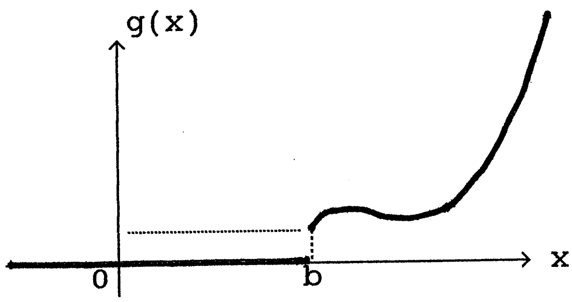
On démontre et nous admettrons que, pour tout $t \in \mathbb{R}$ tel que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, g(t - x)\, dx$ est absolument convergente alors $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t - x)\, g(x)\, dx$ est définie et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, g(t - x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t - x)\, g(x)\, dx.$$

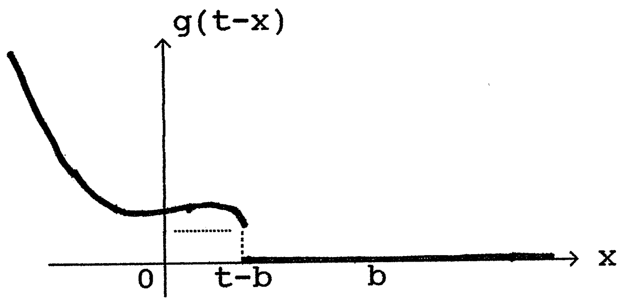
cf R. GAY 2-1-1 et 2-1-2
et RUDIN Th 8-26

b) Cas où f est nulle sur $]-\infty, a[$ et g est nulle sur $]-\infty, b[$





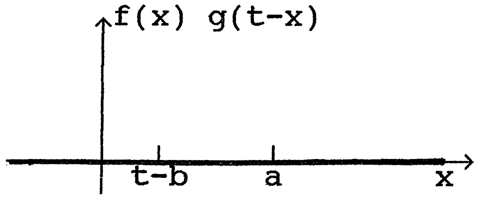
La fonction $g_1 : x \longrightarrow g(t - x)$ est nulle pour tout x tel que $t - x < b$, c'est à dire pour tout $x > t - b$.



Soit alors la fonction $x \longrightarrow f(x)\, g(t - x)$ et l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, g(t - x)\, dx$

Si $t < b + a$, alors $t - b < a$,

et donc si $x < a$, $f(x) = 0$; si $x \geq a > t - b$, $g(t - x) = 0$
donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x)\, g(t - x) = 0$.

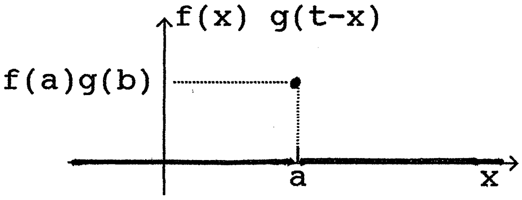


il en résulte que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, g(t - x)\, dx = 0 \, .$$

Si $t = b + a$, alors $t - b = a$,

donc $\forall x \in \mathbb{R} - \{a\}$, $f(x)\, g(t - x) = 0$
et $f(a)\, g(t - a) = f(a)\, g(b)$

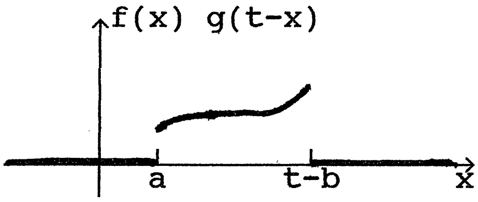


il en résulte que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, g(t - x)\, dx = 0 \, .$$

Si $t > b + a$, alors

$\forall x \in]-\infty , a[\cup]t - b , +\infty[\quad f(x)\, g(t - x) = 0$.



il en résulte que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(t-x)dx = \int_{a}^{t-b} f(x)g(t-x)\, dx$$

En conclusion :

f nulle pour tout $t < a$, g nulle pour tout $t < b$ alors : ■ $\forall\ t \in \mathbb{R}$, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ g(t - x)\ dx$ est définie ■ $\forall\ t \in \mathbb{R}$, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ g(t-x)\ dx = \mathcal{U}(t - (a + b)) \int_{a}^{t-b} f(x)g(t-x)dx$

Exemple :

Nous pouvons donc calculer maintenant l'intégrale définie en A) de ce paragraphe , avec ici $a = b = 0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x}\ \mathcal{U}(x)\ \ \mathcal{U}(t - x)\ dx \ = \mathcal{U}(t) \int_{0}^{t} e^{-x}\ dx \ ,$$

puisque sur $[0\ ,\ t]$, $t > 0$, $\mathcal{U}(x)\ \mathcal{U}(t - x) = 1$.

On obtient :

$$\forall\ t \in \mathbb{R},\quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x}\ \mathcal{U}(x)\ \ \mathcal{U}(t - x)\ dx \ = \ (\ 1 - e^{-t})\ \ \mathcal{U}(t).$$

Remarque : $\mathcal{U} * \mathcal{U}\ f$ avec f localement continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ est la primitive large sur $\mathbb{R}$, nulle en 0, de $\mathcal{U}\ f$.

En effet : $\forall\ t \in \mathbb{R}$, $(\mathcal{U} * \mathcal{U}\ f)(t) = \mathcal{U}(t) \int_{0}^{t} f(x)\ dx$.

c) Cas où l'une des fonctions est nulle hors de $[\alpha,\beta]$

Si l'une des fonctions, f par exemple, est nulle hors de $[\alpha,\beta] \subset \mathbb{R}$, alors quelle que soit g localement sommable sur $\mathbb{R}$,

$$\forall\ t \in \mathbb{R},\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ g(t - x)\ dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\ g(t - x)\ dx$$

ce qui montre que l'intégrale est définie pour tout t réel .

En conclusion :

Si f est nulle hors de $[\alpha,\beta]$
■ $\forall\ t \in \mathbb{R},\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ g(t - x)\ dx$ est définie
■ $\forall\ t \in \mathbb{R},\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ g(t - x)\ dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\ g(t - x)\ dx$

Exemple 1 : $f(x) = e^{x}\ (\ \mathcal{U}(x) - \mathcal{U}(x - 1)\ )$ et $g(x) = x$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ g(t - x)\ dx = \int_{0}^{1} e^{x}\ (t - x)\ dx = (e - 1)t - 1\ .$$

Exemple 2 : $f(x) = e^{-x}\ \mathcal{U}(x)$ et $g(x) = \mathcal{U}(x) - \mathcal{U}(x-1)$

$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ g(t - x)\ dx = \int_{0}^{1} e^{-(t-x)}\ \mathcal{U}(t-x)\ dx$$

si $t < 0$

$\forall\ x \in [0\ ,\ 1]$ $\qquad \mathcal{U}(t - x) = 0$ d'où $s(t) = 0$

si $0 \leq t < 1$

$\forall\ x \in\ ]t\ ,\ 1]$ $\qquad \mathcal{U}(t - x) = 0$

$\forall\ x \in [0\ ,\ t]$ $\qquad \mathcal{U}(t - x) = 1$

d'où $s(t) = \int_{0}^{t} e^{-(t-x)}\ dx = 1 - e^{-t}$.

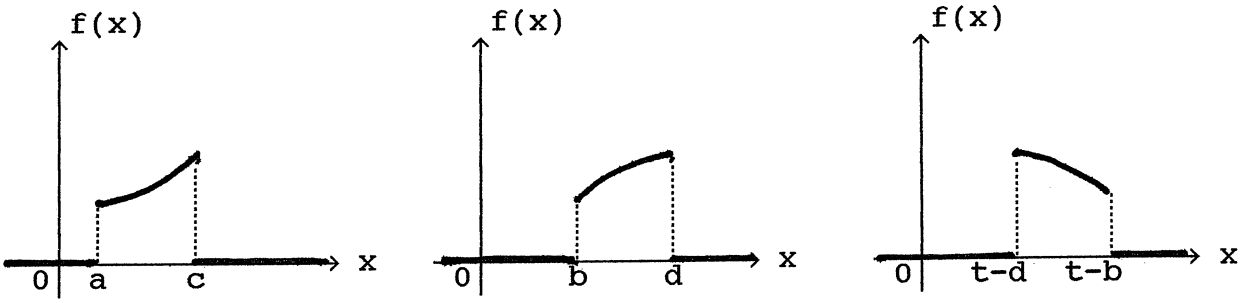
si $t \geq 1$

$\forall\ x \in [0\ ,\ 1] \qquad \mathcal{U}(t - x) = 1$.

d'où $s(t) = \int_0^1 e^{-(t-x)}\ dx = (e - 1)\ e^{-t}$.

soit $\forall\ t \in \mathbb{R}$, $s(t) = (1 - e^{-t})\ \mathcal{U}(t) + (1 - \frac{1}{e})\ e^{-(t-1)}\ \mathcal{U}(t-1)$

d) Cas où f est nulle hors de [a,c] et g nulle hors de [b,d]



$$\left.\begin{array}{c} t - b < a \Leftrightarrow t < a + b \\ \text{ou} \\ t - d > c \Leftrightarrow t > c + d \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \forall\ x \in \mathbb{R},\quad f(x)\ g(t - x) = 0$$

En conclusion :

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Si f est nulle hors de [a,c] et g nulle hors de [b,d],} \\ \text{alors } \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ g(t - x)\ dx \text{ est nulle pour } t \notin [a+b,c+d] \end{array}}$$

Exemple : $f(x) = e^{x}\ (\mathcal{U}(x) - \mathcal{U}(x-1))$ et $g(x) = \mathcal{U}(x) - \mathcal{U}(x-1)$

alors $s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ g(t-x)\ dx = 0$ si $t < 0$ ou $t > 2$

$$s(t) = e^t - 1 \qquad \text{si } t \in [0,1]$$

$$s(t) = e - e^{t-1} \qquad \text{si } t \in [1,2] \ .$$

e) L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, g(t - x)\, dx$ dans le cas général

Il nous arrivera pour f et g localement sommables quelconques de considérer l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, g(t - x)\, dx$, il conviendra alors d'étudier pour chaque t donné la convergence absolue éventuelle de cette intégrale .

Exemple 1: $f(x) = e^{-x}\, \mathcal{U}(x)$ et $g(x) = x$

$$\forall\, t \in \mathbb{R},\ s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, g(t - x)\, dx = \int_0^{+\infty} e^{-x}\, (t-x)\, dx = t - 1$$

Exemple 2 : $f(x) = e^{x}\, \mathcal{U}(x)$ et $g(x) = x$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, g(t - x)\, dx = \int_0^{+\infty} e^{x}\, (t-x)\, dx \text{ diverge pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

Exemple 3 : $f(x) = e^{-|x|}$ et $g(x) = x$

$$\forall\, t \in \mathbb{R},\ s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, g(t - x)\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{0} e^{x}\, (t-x)\, dx + \int_0^{+\infty} e^{-x}\, (t-x)\, dx = 2\, t \ .$$

2) Convolution de deux fonctions, de deux distributions régulières

A) Définition

<u>Définition 1</u> Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ localement sommables sur $\mathbb{R}$ telles que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, g(t-x)\, dx$ converge absolument pour tout $t \in \mathbb{R}$,

on appelle convolée de f et g l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ notée $f * g$ définie par :

$$\forall\, t \in \mathbb{R} \quad (f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, g(t-x)\, dx$$

■ *Remarquons que dans l'exemple du système* "R C", (cf 1)A)), *on a donc obtenu avec l'entrée* $\mathcal{E}$ *choisie* $s = h * \mathcal{E}$.

B) Propriétés de la convolution

■ *On démontre et nous admettrons que :*
si f et g sont nulles pour tout $t < a$ *ou si l'une est nulle hors d'un intervalle* $[a\ ,\ b]$ *et si l'une est bornée sur tout intervalle* $[\alpha,\beta] \subset \mathbb{R}$ *(localement bornée) alors* $f * g$ *est continue sur* $\mathbb{R}$.

cf R. GAY 2-1

On déduit de la définition 1 , des préliminaires et des propriétés classiques des intégrales définies :

■ $\boxed{f * g = g * f}$

■ Si f_1, f_2 et f_3 sont telles que les convolutions suivantes sont définies (cf Définition 1), alors
$\forall\lambda\in\mathbb{C}, \forall\mu\in\mathbb{C},\ (\lambda f_1 + \mu f_2) * f_3 = \lambda(f_1 * f_3) + \mu(f_2 * f_3)$

- Si f est nulle pour tout $t < a$, et si g est nulle pour tout $t < b$, alors
$$f * g \text{ est nulle pour tout } t < a + b$$
Si f est nulle hors de $[a,c]$ et si g est nulle hors de $[b,d]$, alors
$$f * g \text{ est nulle hors de } [a + b , c + d]$$

Si f (ou g) est nulle sur $\mathbb{R}$, $f * g$ est nulle sur $\mathbb{R}$.

- On note $\tau_\alpha f$ l'application $t \longrightarrow f(t - \alpha)$, alors on démontre et nous admettrons que

$$\boxed{(\tau_\alpha f) * g = \tau_\alpha(f * g)}$$

cf SCHWARTZ 4-4

- $$\boxed{\tau_\alpha f * \tau_\beta g = \tau_{\alpha+\beta}(f * g)}$$

Remarquons en effet que si $\tau_\alpha f : t \longrightarrow f(t - \alpha)$

alors $\tau_\beta (\tau_\alpha f) : t \longrightarrow f(t - \alpha - \beta)$,

donc $\tau_\beta (\tau_\alpha f) = \tau_{\alpha + \beta} f$

Nous pouvons donc écrire

$\tau_\alpha f * \tau_\beta g = \tau_\alpha (f * \tau_\beta g)$ (propriété précédente)

$\tau_\alpha f * \tau_\beta g = \tau_\alpha (\tau_\beta g * f)$ (Commutativité de la convolution)

$\tau_\alpha f * \tau_\beta g = \tau_\alpha (\tau_\beta (g * f)) = \tau_{\alpha + \beta}(g * f) = \tau_{\alpha + \beta}(f * g)$

C) <u>Exemples de calcul de f * g</u>

- $f = \mathcal{U}$ et $g : t \longrightarrow e^t \mathcal{U}(t)$

$f * g$ est nulle sur $]-\infty , 0[$ et pour tout $t \in [0 , +\infty[$,

$$(f * g)(t) = \int_0^t e^{t-x}\,dx = e^t \int_0^t e^{-x}\,dx = e^t - 1$$

donc $\forall\, t \in \mathbb{R} \quad (f * g)(t) = (e^t - 1)\,\mathcal{U}(t)$

■■ $f_1 : t \longrightarrow \mathcal{U}(t-1)$, $g_1 : t \longrightarrow e^{t-2}\,\mathcal{U}(t-2)$

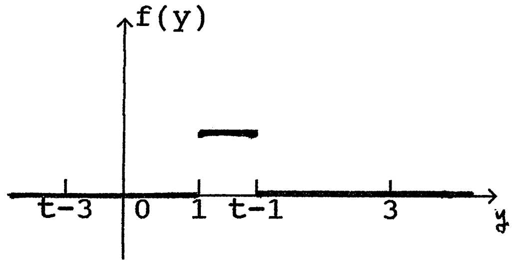
f et g étant les fonctions de l'exemple précédent, on constate que $f_1 = \tau_1 f$ et $g_1 = \tau_2 g$, donc $f_1 * g_1 = \tau_3 (f * g)$, soit :

$\forall\, t \in \mathbb{R}$, $(f_1 * g_1)(t) = (e^{t-3} - 1)\,\mathcal{U}(t-3)$.

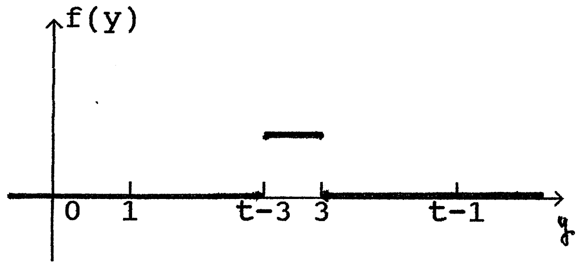
■■■ Soit $f : t \longrightarrow \mathcal{U}(t-1) - \mathcal{U}(t-3)$.
Alors $f * f$ est nulle hors de l'intervalle [2 , 6], et

$$(f * f)(t) = \Big(\mathcal{U}(t-2) - \mathcal{U}(t-6)\Big) \int_1^3 f(t-x)\,dx$$

car $f(x) = 1$ sur [1 , 3].



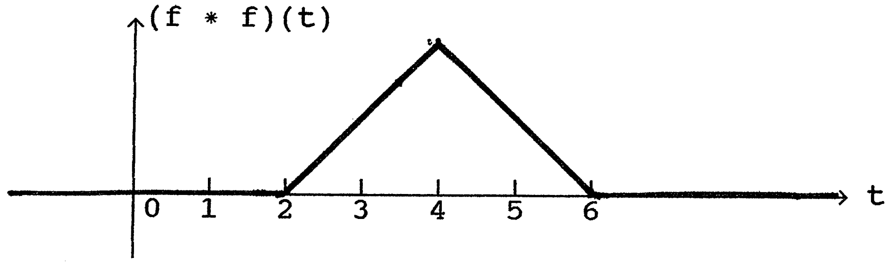
$$\begin{cases} \text{si } 1 \le t-1 \le 3 \iff 2 \le t \le 4 \\ \text{alors } \forall\, y \in [1, t-1],\ f(y) = 1 \\ (f * f)(t) = \displaystyle\int_1^{t-1} dy = t - 2 \end{cases}$$



$$\begin{cases} \text{si } 1 \le t-3 \le 3 \iff 4 \le t \le 6 \\ \text{alors } \forall\, y \in [t-3, 3],\ f(y) = 1 \\ (f * f)(t) = \displaystyle\int_{t-3}^{3} dy = 6 - t \end{cases}$$

En conclusion, $\forall\, t \in \mathbb{R}$,

$$(f * f)(t) = (t-2)\,(\mathcal{U}(t-2) - \mathcal{U}(t-4)) - (t-6)(\mathcal{U}(t-4) - \mathcal{U}(t-6))$$



3) Convolution de deux distributions régulières

A) Définition

Définition 2 Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ telles que $f * g$ est définie sur $\mathbb{R}$ (cf Définition 1) et localement sommables sur $\mathbb{R}$
la convolée $[f] * [g]$ des deux distributions régulières $[f]$ et $[g]$ est la distribution $[f * g]$.

B) Propriétés :

Ces propriétés se déduisent immédiatement des propriétés correspondantes de la convolution des fonctions :

- $[f] * [g] = [g] * [f]$

- Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, pour tout $\mu \in \mathbb{C}$

$$(\lambda\, [f_1] + \mu\, [f_2]) * [f_3] = \lambda\, ([f_1] * [f_3]) + \mu\, ([f_2] * [f_3])$$

- $[f] * [0] = [0] * [f] = [0]$

- On a évidemmment $[\tau_b\, f] = \tau_b\, [f]$

$$\tau_\alpha\, [f] * \tau_\beta\, [g] = \tau_{\alpha+\beta}\, ([f] * [g]) = \tau_{\alpha+\beta}\, [f * g]$$

IV- Quelques cas de convolution de deux distributions

1) Généralités

cf ZEMANIAN chap 5

D'une manière générale, on peut définir la convolution de deux distributions dans les cas suivants :

- Si u et v sont toutes deux nulles sur $]-\infty, a[$
- Si l'une des deux est nulle sur $]-\infty, a[\cup]b, +\infty[$, $a \leq b$

Dans ces deux cas, on démontre que les propriétés précédentes de la convolution de deux distributions régulières restent vraies pour deux distributions convolables :

- $\boxed{u * v = v * u}$

- Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, pour tout $\mu \in \mathbb{C}$

$$\boxed{(\lambda u_1 + \mu u_2) * u_3 = \lambda (u_1 * u_3) + \mu (u_2 * u_3)}$$

- $\boxed{u * [0] = [0] * u = [0]}$

- $\boxed{\tau_\alpha u * \tau_\beta v = \tau_{\alpha+\beta}(u * v)}$

- En outre

Si u est nulle sur $]-\infty, a[$ et si v est nulle sur $]-\infty, b[$ alors $u * v$ est nulle sur $]-\infty, a+b[$ Si u est nulle hors de $[a,c]$ et v nulle hors de $[b,d]$ alors $u * v$ est nulle hors de $[a+b, c+d]$

En particulier si u et v sont nulles sur $]-\infty, 0[$ (signaux causaux) alors $u * v$ est nulle sur $]-\infty, 0[$.

□ Nous noterons $u * u = u^{*2}$ et $u^{*n} = u^{*(n-1)} * u$ pour $n \geq 2$.

□ Dans ce qui suit, nous allons définir la convolution de deux distributions uniquement dans quelques cas particuliers , les seuls utiles en physique au niveau élémentaire .

2) L'opérateur retard

Nous avons constaté avec l'exemple du système "R C" dont, rappelons-le la réponse impulsionnelle (c'est à dire la sortie obtenue lorsque l'entrée est δ) est, dans le cas où $\tau = 1$, $h = [\ e^{-t}\mathcal{U}(t)\ ]$, que si on choisit δ_a pour entrée, la sortie est alors $\tau_a h$:

$$\delta_a \longrightarrow \boxed{\mathcal{S}} \longrightarrow \tau_a h$$

Nous donnerons donc la définition suivante :

$$\boxed{\underline{\text{Définition 1}} \quad u \in \mathcal{D}',\ a \in \mathbb{R}, \quad \delta_a * u = \tau_a u}$$

■ Donc si un système $\mathcal{S}$ admet δ_a comme réponse impulsionnelle, $a > 0$, à toute entrée $u \in \mathcal{D}'$, correspond la sortie $s = \delta_a * u = \tau_a\, u$. Un tel système est appelé opérateur retard.

En particulier :

- si u est une distribution régulière [f] :

$$\delta_a * [f(t)] = [f(t-a)]$$

- si $u = \delta_b$

$$\boxed{\delta_a * \delta_b = \delta_{a+b}}$$

Remarquons que puisque $\tau_0\, u = u$:

$$\boxed{\begin{array}{c} \delta_0 = \delta \quad \textit{est l'élément neutre de l'opération convolution} \\ \forall\, u \in \mathcal{D}', \quad \delta * u = u \end{array}}$$

3) L'opérateur Dérivation

On peut observer expérimentalement que si l'on choisit comme signal à l'entrée du système "R C" , de réponse impulsionnelle $h = [e^{-t}\ \mathcal{U}(t)\ ]$, $\mathcal{E} = D(\delta)$, la sortie s obtenue est $\delta - [\ e^{-t}\ \mathcal{U}(t)\ ]$

$$D(\delta) \longrightarrow \boxed{\mathcal{S}} \longrightarrow s = \delta - [\, e^{-t}\, \mathcal{U}(t) \,]$$

On constate que $s = D(h)$. D'où la définition suivante :

Définition 2	$\forall\, u \in \mathcal{D}'$, $D(\delta) * u = D(u)$

Donc $D(\delta) * [f] = D([f])$, dérivée au sens des distributions .

Rappelons qu'il ne faut pas confondre $D([f])$ *et* $[f']$ (chap. 2).

■ Donc si un système $\mathcal{S}$ admet $D(\delta)$ comme réponse impulsionnelle , à toute entrée $u \in \mathcal{D}'$, correspond la sortie $s = D(\delta) * u = D(u)$.

Un tel système est appelé opérateur dérivation ou dérivateur.

V- Quelques propriétés de l'opération convolution

1) Associativité

■ *Exercice*

Soient les fonctions $f_1 : t \longrightarrow \mathcal{U}(t)$, $f_2 : t \longrightarrow e^t\, \mathcal{U}(t)$ et $f_3 : t \longrightarrow t\, \mathcal{U}(t)$.

Démontrer en utilisant la définition de la convolution de deux fonctions et la définition de la convolution de deux distributions régulières que :

$$([f_1] * [f_2]) * [f_3] = [f_1] * ([f_2] * [f_3])$$

■ On démontre et nous admettrons que :

	Si u,v et w sont des distributions nulles sur $]-\infty,a[$
ou	si u est nulle hors de $[a,b]$, $a \le b$ et si v est nulle hors de $[c,d]$, $c \le d$
alors	$u * (v * w)$ et $(u * v) * w$ sont définis et
	$u * (v * w) = (u * v) * w$

cf ZEMANIAN Th 5-4-3

Remarques :

■ Donnons un exemple où la convolution n'est pas associative :

$u = [1]$, $v = D(\delta)$, $w = [\mathcal{U}]$

$u * (v * w) = [1] * \delta = [1]$

$(u * v) * w = [0] * [\mathcal{U}] = [0]$.

■■ La convolution est associative dans $\mathcal{D}'_+$

■■■ Si $u \in \mathcal{D}'_+$ admet un inverse de convolution v dans $\mathcal{D}'_+$, c'est à dire tel que $u * v = \delta$, alors v est unique .

En effet , si $u * v = u * w = \delta$, alors

$v * (u * v) = v * \delta = v$

$v * (u * w) = (v * u) * w = \delta * w = w$,

puisque la convolution est commutative et associative dans $\mathcal{D}'_+$.

Donc $v = w$.

2) La Dérivation d'ordre n

$$D(\delta) * (D(\delta) * u) = D(\delta) * D(u) = D^{(2)}(u)$$

$$= (D(\delta) * D(\delta)) * u = D^{(2)}(\delta) * u$$

et par récurrence, on démontre, pour tout $n \in \mathbb{N}$

Théorème 1	$D^{(n)}(\delta) * u = D^{(n)}(u)$

3) Dérivée de la convolution de deux distributions

■ *Exercices*

a) Expliquer pourquoi si $f = \mathcal{U}$, f' désignant la fonction dérivée de f définie sur $\mathbb{R}^*$ et g une fonction convolable avec f au sens de la définition de la convolution des fonctions (Définition 1 de II) , alors, si $[g] \neq [0]$,

$$D([f] * [g]) \neq [f'] * [g] .$$

b) Vérifier par un calcul direct en utilisant la définition de la convolution des fonctions et des distributions régulières que si f et g sont définies respectivement par :

$f(t) = t\,\mathcal{U}(t)$ et $g(t) = e^t\,\mathcal{U}(t)$, alors $D([f] * [g]) = [f'] * [g]$, mais que, g' désignant la fonction dérivée, définie sur $\mathbb{R}^*$, de g

$$D(\ [f] * [g]\ ) \neq [f] * [g']$$

■ Si u et v vérifient les conditions du III.1)

Théorème 2	$D(\ u * v\ ) = D(u) * v \ = \ u * D(v)$

cf ZEMANIAN 5-5

$D(\delta)$ étant nulle hors de $\{0\}$, on peut utiliser le 1) (associativité) :

$$D(u * v) = D(\delta) * (u * v) = (D(\delta) * u) * v = D(u) * v$$

la deuxième relation étant une conséquence de la commutativité de la convolution .

En particulier :
si f est une fonction continue primitive large d'une fonction localement continue par morceaux f', $D([f]) = [f']$
alors $D([f] * [g]) = D([f]) * [g] = [f'] * [g] = [f' * g]$

(ce qui explique les résultats obtenus dans l'exercice b précédent où $D([f]) = [f']$, mais $D([g]) \neq [g']$.)

Remarque : $D(\ [\ \mathcal{U}\ ] * v\ ) = D(\ [\ \mathcal{U}\ ]\ ) * v = \delta * v = v$, donc $[\mathcal{U}] * v$ est une distribution admettant v pour distribution dérivée.

VI- Convolution des signaux discrets

1) Distributivité :

Nous avons admis en III. 1 , le résultat suivant :
pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, pour tout $\mu \in \mathbb{C}$

$$\boxed{(\lambda\, u_1 + \mu\, u_2) * u_3 = \lambda\, (u_1 * u_3) + \mu\, (u_2 * u_3)}$$

les distributions u_1, u_2, et u_3 étant évidemment telles que les convolutions ci-dessus sont définies .

2) Convolution d'une distribution par une somme finie d'impulsions

Soit $u_K = \sum_{k=0}^{K} a_k\, \delta_{kT}$ où $T \in \mathbb{R}$, $T > 0$.

Remarquons que u est nulle hors de [0,kT]. Alors (cf.1)

$$u_K * v = \sum_{k=0}^{K} a_k\, (\delta_{kT} * v), \text{ pour tout } v \in \mathcal{D}'$$

3) Convolution d'une distribution et d'un signal discret .

- Rappelons, (cf. chap. 2) que

$u = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k\, \delta_{kT}$, avec $T > 0$ est une distribution, nulle sur $]-\infty\, ,\, 0\, [$, que nous avons appelée signal discret .

En effet $\forall\, \varphi \in \mathcal{D}$, $< u,\varphi > = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k\, \varphi(kT)$

et cette dernière somme est une somme d'un nombre fini de termes puisque φ est nulle hors d'un certain intervalle $[\alpha,\beta]$, il existe k_0 tel que $k \geq k_0 \Rightarrow kT > \beta$.

■ Soit u nulle sur $]-\infty,\alpha[$ et le signal discret $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \delta_{kT}$ nul sur $]-\infty, 0[$. Alors on démontre et nous admettrons que :

$$\left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \delta_{kT}\right) * u = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (\delta_{kT} * u) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \tau_{kT} u$$

Exemple : Si $u = [f(t)]$ et f est nulle sur $]-\infty,\alpha[$ alors

$$\left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \delta_{kT}\right) * u = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k [f(t-kT)].$$

En particulier si f est nulle hors de $[0,T]$, alors

$\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \delta_{kT}\right) * u = \sum_{k=0}^{+\infty} [f(t-kT)]$ est la distribution régulière associée à la fonction $\mathcal{U}\, g$, où g est la fonction de période T égale à f sur $[0,T]$.

cf ZEMANIAN 5-6

4) Convolution de deux sommes finies d'impulsions

■ *Exemple*

$$\left(\sum_{k=0}^{2} a_k \delta_{kT}\right) * \left(\sum_{m=0}^{3} b_m \delta_{mT}\right) =$$

$$(a_0 \delta + a_1 \delta_T + a_2 \delta_{2T}) * (b_0 \delta + b_1 \delta_T + b_2 \delta_{2T} + b_3 \delta_{3T}) =$$

$$a_0 b_0 \delta + (a_0 b_1 + a_1 b_0) \delta_T + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) \delta_{2T} +$$

$$(a_0 b_3 + a_1 b_2 + a_2 b_1) \delta_{3T} + (a_1 b_3 + a_2 b_2) \delta_{4T} + a_2 b_3 \delta_{5T}$$

$$= \sum_{n=0}^{n=5} c_n \delta_{nT}, \quad \text{où} \quad c_n = \sum_{k+m=n} a_k b_m, \text{ pour tout } n,\ 0 \le n \le 5$$

■ D'une manière générale, en remarquant que

$a_k\ \delta_{kT} * b_m\ \delta_{mT} = a_k\ b_m\ \delta_{(k+m)T}$,

on obtient le coefficient de $\delta_n T$ en ajoutant tous les produits $a_k b_m$ pour tous les indices k et m de somme k + m = n, donc le coefficient c_n de δ_{nT} est $c_n = \sum\limits_{k+m=n} a_k b_m$.

Si donc $u_K = \sum\limits_{k=0}^{K} a_k\ \delta_{kT}$ et $v_M = \sum\limits_{m=0}^{M} b_m\ \delta_{mT}$

$$u_K * v_M = \sum_{n=0}^{(K+M)T} c_n\ \delta_{nT} \quad \text{où} \quad c_n = \sum_{k+m=n} a_k\ b_m$$

5) Convolution de deux signaux discrets

■ En généralisant les calculs des sous-paragraphes précédents, nous énoncerons donc la définition suivante :

Définition

$$\left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k\ \delta_{kT}\right) * \left(\sum_{m=0}^{+\infty} b_m\ \delta_{mT}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n\ \delta_{nT} \quad \text{où} \quad c_n = \sum_{k+m=n} a_k\ b_m$$

Remarquons que $\sum\limits_{k+m=n} a_k\ b_m$ est une somme finie de n+1 termes car $k \geq 0$ et $m \geq 0$.

■■ Si pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la série $c_n = \sum\limits_{k+m=n} a_k\ b_m$ converge, alors, de même :

$$\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k\ \delta_{kT}\right) * \left(\sum_{m=-\infty}^{+\infty} b_m\ \delta_{mT}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\ \delta_{nT} \quad \text{où} \quad c_n = \sum_{k+m=n} a_k\ b_m$$

6) Exemples

■ $u = \delta_{mT}$ $\quad v = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \, \delta_{kT} \quad u * v = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \, \delta_{(k+m)T}$

retard de mT .

■ $u = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta_{kT}$ et $v = \sum_{m=0}^{+\infty} \alpha^m \, \delta_{mT}$ alors $a_k = 1$ et $b_m = \alpha^m$

$\alpha \neq 1$

$$c_n = \sum_{k+m=n} a_k \, b_m = 1 + \alpha + \ldots + \alpha^n = \frac{1 - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha}$$

VII.- Réponse impulsionnelle

■ On appelle $\mathcal{D}'_+$ l'ensemble des distributions nulles sur $]-\infty,0[$.

■ Dorénavant nous ne considèrerons que les systèmes $\mathcal{S}$ de convolution définis par : $u \in \mathcal{A} \subseteq \mathcal{D}' \xrightarrow{\mathcal{S}} s = u * h$

$h \in \mathcal{D}'_+$

h étant toujours :

- soit une distribution régulière [f] telle que f est nulle sur $]-\infty, 0[$ et vérifie la propriété P_1

(Soit f dérivable sur tout intervalle $[a,b] \subset \mathbb{R}$, sauf au plus en un nombre fini de points de [a,b] et de fonction dérivée f' localement continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. Si f est telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ la dérivée $n^{\text{ème}}$ $f^{(n)}$ admet la propriété ci-dessus , nous dirons que f vérifie la propriété P_1.)

- soit un signal discret de $\mathcal{D}'_+$.

- soit la dérivée (au sens des distributions) d'une distribution de l'un des deux types ci-dessus

- soit la convolution des signaux ci-dessus, soit une combinaison linéaire finie des signaux ainsi obtenus .

■ Rappelons que l'on nomme signal admissible pour le système $\mathcal{S}$ toute distribution $u \in \mathcal{A}$, c'est à dire telle que $u * h$ soit définie .

■ Si l'entrée d'un tel système de convolution est $u = \delta$, alors la sortie est $s = \delta * h = h$ car δ est l'élément neutre de la convolution.

h définit donc le système $\mathcal{S}$. On dit que h est la réponse impulsionnelle de $\mathcal{S}$

■ Remarques :

▸ Nous ne considèrerons que des systèmes dont la réponse impulsionnelle est causale, c'est à dire nulle sur $]-\infty\ ,\ 0[$, mais nous ne nous limiterons pas à des entrées causales . Les signaux d'entrée pourront être des distributions non nulles sur $]-\infty, 0[$.

▸ On représentera par le schéma ci-dessous un système $\mathcal{S}$ de réponse impulsionnelle h :

$$u \longrightarrow \underset{\mathcal{S}}{\boxed{\ h\ }} \longrightarrow s = u * h$$

▸ Nous noterons J_a le sous-ensemble de $\mathbb{C}$ tel que : $p \in J_a \iff \mathcal{R}e\ p > \mathcal{R}e\ a$

■ *Avec les hypothèses faites sur h , on peut constater que $\mathcal{S}$ est un système linéaire, invariant dans le temps et causal*

▸ $\mathcal{S}$ est linéaire

▸ $\mathcal{S}$ est invariant dans le temps :

$$(\tau_\alpha u) * h = \tau_\alpha(u * h)$$

▸ $\mathcal{S}$ est causal

CHAPITRE 4 : EXERCICES

Exercice 1 :

Déterminer si elle existe la distribution $h * \mathcal{E}$ dans les cas suivants :

□ A) $h = [\ \mathcal{U}(t) \sin t\ ]$

- 1) $\mathcal{E} = [\ t\ \mathcal{U}(t)\ ]$
- 2) $\mathcal{E} = [\ t\ \mathcal{U}(t - \frac{\pi}{4})\ ]$
- 3) $\mathcal{E} = [\ t\ ]$
- 4) $\mathcal{E} = [\ e^{-t}\ \mathcal{U}(t)\ ]$
- 5) $\mathcal{E} = [\ e^{-t}\ ]$
- 6) $\mathcal{E} = [\ e^{-t}\ \mathcal{U}(-t)\ ]$
- 7) $\mathcal{E} = [\ e^{t}\ \mathcal{U}(\frac{\pi}{4} - t)\ ]$

□ B) $h = [\ \mathcal{U}(t)\ e^{-t}\ ]$

- 1) $\mathcal{E} = [\ \mathcal{U}(-t)\ ]$
- 2) $\mathcal{E} = [\ \mathcal{U}(t) - \mathcal{U}(t - 1)\ ]$

□ C) $h = [\ \mathcal{U}(t) \cos t\ ]$

- 1) $\mathcal{E} = [\ e^{2t}\ \mathcal{U}(t+1)\ ]$
- 2) $\mathcal{E} = [\ \mathcal{U}(-t) \sin t\ ]$

□ D) $h = [\ e^{-t}\ \mathcal{U}(t) \sin t\ ]$

- 1) $\mathcal{E} = [\ \mathcal{U}(t + \frac{\pi}{6}) - \mathcal{U}(t - \frac{\pi}{6})\ ]$
- 2) $\mathcal{E} = [\ e^{-\frac{t}{2}}\ ]$

Exercice 2 :

Soit la fonction $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\mathcal{E}(t) = \tan \varphi\ \mathcal{U}(t)\ (t - 3)\ ,\ \text{où } \varphi \in\ ]\ 0\ ,\ \frac{\pi}{2}\ [$$

1°) Représenter graphiquement $\mathcal{E}$ ainsi que la fonction $\mathcal{E}'$, fonction dérivée de $\mathcal{E}$, définie sur $\mathbb{R}^*$.

2°) Calculer $D([\mathcal{E}])$, $D^{(2)}([\mathcal{E}])$.

Calculer pour tout entier $n \geq 1$, $D^{(n)}([\mathcal{E}])$.

3°) Soit h la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$h(t) = \mathcal{U}(t - 1) - \mathcal{U}(t - 4)$$

On pose $s = h * \mathcal{E}$.

- a) Montrer que $\forall\, t < 1$, $s(t) = 0$.
- b) Calculer $s(t)$ lorsque $1 \leq t \leq 4$.
- c) Calculer $s(t)$ lorsque $4 \leq t$.
- d) Représenter graphiquement $y = s(t)$.

4°) On rappelle que $D([h * \mathcal{E}]) = D([\mathcal{E}]) * [h]$ et que, pour tout $U \in \mathcal{D}'$, $\delta * U = U$.

- a) A l'aide du résultat de la question 3, calculer $D([s])$.
- b) Déduire alors de 1) l'expression de $\sigma = [\mathcal{E}' * h]$ en fonction de t.

Exercice 3 :

Soit $g = [t^2]$ et $f = [\mathcal{U}(\frac{t}{2\,a} + 1) - \mathcal{U}(\frac{t}{2\,a} + 1)]$ $\qquad a > 0$

Calculer $f * g$ et $f * D(g)$.

Exercice 4 :

Soient $f = [e^t]$ et $h = [(3\,e^{-2t} - 1)\,\mathcal{U}(t)]$

Calculer $f * h$.

Exercice 5 :

Calculer $[h * g]$ dans les cas suivants :

1) $h = g = [\mathcal{U}(t + a) - \mathcal{U}(t - a)]$
2) $h = g = [\mathcal{U}(t)\sin t]$
3) $h = [\mathcal{U}(t)\,e^{-at}]$ et $g = [\mathcal{U}(t)\,e^{-bt}]$

Exercice 6 :

Soit la fonction $f : t \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$

Calculer $[f * f]$ sachant que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}\, du = \sqrt{\pi}$

Exercice 7 :

On suppose que les intégrales rencontrées dans cet exercice sont absolument convergentes.

On pose $A_f = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt$; $m_f = \int_{-\infty}^{+\infty} t\, f(t)\, dt$; $B_f = \frac{m_f}{A_f}$

Montrer que $A_{f * h} = A_f \cdot A_h$ et $B_{f * h} = B_f + B_h$.

Exercice 8 :

Montrer que :

1) $(f_1 * f_2)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\frac{t}{2} + x) \cdot f_2(\frac{t}{2} - x)\, dx$

2) Si $f_1(t) = 0$ et $f_2(t) = 0$ pour $|t| > T$ alors

$$(f_1 * f_2)(t) = \int_{-T + \frac{|t|}{2}}^{T - \frac{|t|}{2}} f_1(\frac{t}{2} + x) \cdot f_2(\frac{t}{2} - x)\, dx$$

Exercice 9 :

1°) Etudier la parité de $f * g$ suivant la parité des fonctions f et g.

2°) Calculer $[f]^{*2}$ et $[f * g]$

pour $f(t) = e^{-|t|}$ et $g(t) = \sin t$

Exercice 10 :

Montrer que si $f = \left[\left(\mathcal{U}(t + T) - \mathcal{U}(t - T) \right) \cos \frac{\pi t}{2T} \right]$, $T > 0$

alors $[f*f] = T\left[\left(\mathcal{U}(t+2T) - \mathcal{U}(t-2T)\right)\left(\frac{1}{\pi}\left|\sin \frac{\pi t}{2T}\right| + \left(1 - \frac{|t|}{2\ T}\right) \cos \frac{\pi t}{2T}\right)\right]$

Exercice 11 :

Calculer :

1°) $\left(\delta + \delta_T + \delta_{2T} \right)^{*2}$ $\quad T > 0$

2°) $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \delta_{nT} \right) * \left(\delta + \delta_T + \delta_{2T} + \delta_{3T} \right)$

3°) $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^n} \delta_{nT} \right) * \left(\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} 2^k \delta_{kT} \right)$

Exercice 12 :

Soit h un signal discret $\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} a_m \delta_{mT}$ tel que

pour tout $f = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} b_k \delta_{kT}$ on a $f * h = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n \delta_{nT}$

avec $\forall$ n, $c_n = \sum_{k=n-7}^{k=n-2} b_k$ $\quad (a_m \in \mathbb{C},\ b_k \in \mathbb{C},\ c_n \in \mathbb{C})$

□ Trouver h.

Exercice 13 :

Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et $a_0, \ldots, a_{m-1}$ des constantes complexes

Soit $u = D^{(m)}(\delta) + a_{m-1} D^{(m-1)}(\delta) + \ldots + a_1 D(\delta) + a_0 \delta$

On considère l'équation différentielle linéaire, homogène, à coefficients constants, d'ordre m,

$$(E) \qquad y^{(m)} + a_{m-1} y^{(m-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

On sait qu'il existe une solution y et une seule, de (E) vérifiant $y(0) = y'(0) = \ldots = y^{(m-2)}(0)$ et $y^{(m-1)} = 1$.

1°) Montrer que la distribution $[\mathcal{U} y]$ est l'inverse de convolution, dans $\mathcal{D}_+'$, de u.

2°) Application : Trouver l'inverse de convolution dans $\mathcal{D}_+'$ de $D^{(2)}(\delta) + 5 D(\delta) + 4 \delta$.

(Indications : quelquesoit k tel que $0 \leq k \leq m - 1$

$D^{(k)}(\delta) * [\mathcal{U} y] = [\mathcal{U} y^{(k)}]$ et $D^{(m)}(\delta) * [\mathcal{U} y] = \delta + [\mathcal{U} y^{(m)}]$)

Exercice 14 :

Trouver l'inverse de convolution dans $\mathcal{D}_+'$ de $[\mathcal{U}] + D^{(2)}(\delta)$

(Indication : Soit v cet inverse, on cherchera d'abord à déterminer $V = [\mathcal{U}] * v$ à l'aide de l'exercice précédent)

Exercice 15 :

On rappelle que $\mathcal{U} * \mathcal{U} f$ où f est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, localement continue par morceaux est la primitive large sur $\mathbb{R}$, nulle en zéro, de $\mathcal{U} f$.

1°) Calculer $[\mathcal{U}]^{*n}$

2°) En remarquant que si

$\forall\ x \in \mathbb{R},\ f(x) = \mathcal{U}(x+1) - \mathcal{U}(x-1)$ alors $[f] = \tau_{-1}\,[\mathcal{U}] - \tau_1\,[\mathcal{U}]$ donner une expression de $[f]^{*n}$.

3°) Retrouver ce résultat en calculant d'abord $\Big(D([f])\Big)^{*n}$.

Exercice 16 :

1°) Calculer $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \delta_n\right) * [\,\mathcal{U}\,]$

2°) Soit E la fonction partie entière, calculer

$$\Big[\,\mathcal{U}(x)\,\Big(\,E(x)+1\,\Big)\,\Big]^{*\,2}$$

Exercice 17 :

Montrer que :

□ 1°) $\Big[t\ \mathcal{U}(t)\Big] * \Big[e^t\ \mathcal{U}(t)\Big] = \Big[\Big(e^t - t - 1\Big)\ \mathcal{U}(t)\Big]$

□ 2°) $\Big[\mathcal{U}(t)\ \sin t\Big] * \Big[\mathcal{U}(t)\ \cos t\Big] = \Big[\frac{1}{2}\ \mathcal{U}(t)\ t\ \sin t\Big]$

□ 3°) f étant localement sommable sur $\mathbb{R}$,

$$\Big[f(t)\ \mathcal{U}(t)\Big] * \Big[\mathcal{U}(t)\Big]^{*\,n} = \left[\frac{\mathcal{U}(t)}{(n-1)!}\int_0^t (t-x)^{n-1}\,f(x)\,dx\right]$$

où $\Big[\mathcal{U}(t)\Big]^{*\,n} = \Big[\mathcal{U}(t)\Big] * \Big[\mathcal{U}(t)\Big] * \dots * \Big[\mathcal{U}(t)\Big]$, n "facteurs"

□ 4°) $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} D^{(n)}(\delta_n)\right)^{*2} = \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1)\ D^{(k)}(\delta_k)$

Exercice 18 :

m étant un entier supérieur ou égal à 1 et $k \in \mathbb{N}$

1°) Montrer que :

□ a) si $k < m$, $t^m D^{(k)}(\delta) = 0$

□ b) si $k \geq m$, $t^m D^{(k)}(\delta) = (-1)^m \frac{k!}{(k-m)!} D^{(k-m)}(\delta)$

2°) $a \in \mathbb{R}^*$, montrer que, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}$

□ a) si $k < m$

$$< t^m D^{(k)}(\delta_a) \; , \; \varphi > = (-1)^k \sum_{n=0}^{n=k} C_k^n \frac{m!}{(m-n)!} a^{m-n} \varphi^{(k-n)}(a)$$

□ b) si $k \geq m$

$$< t^m D^{(k)}(\delta_a) \; , \; \varphi > = (-1)^k \sum_{n=0}^{n=m} C_k^n \frac{m!}{(m-n)!} a^{m-n} \varphi^{(k-n)}(a)$$

3°) Montrer que s'il existe $u \in \mathcal{D}'$ telle que
$\forall\, y \in \mathcal{D}' \quad u * y = t^m D^{(k)}(y)$ alors $u = t^m D^{(k)}(\delta)$

4°) Soit alors $y_1 = \left[\mathcal{U}(t) - \mathcal{U}(t-1)\right]$
Montrer que $t^m D^{(k)}(\delta) * y_1 \neq t^m D^{(k)}(y_1)$

□ a) dans le cas où $k < m$

□ b) dans le cas où $k \geq m$
(on pourra considérer $\varphi \in \mathcal{D}$ égale à 1 sur $[-1,2]$)

Il s'ensuit qu'il n'existe aucune distribution $u \in \mathcal{D}'$ vérifiant
$\forall\, y \in \mathcal{D}' \quad u * y = t^m D^{(k)}(y)$

Exercice 19 :

$m \in \mathbb{N}^*$, $a \in \mathbb{R}^*$. Par un raisonnement analogue montrer qu'il n'existe aucune distribution $u \in \mathcal{D}$ vérifiant

$\forall\, y \in \mathcal{D}' \qquad u * y = t^m\, \tau_a\, y$

Exercice 20 :

En Physique, on utilise les fonctions de Bessel de première espèce d'ordre 0 et d'ordre 1 respectivement notée J_0 et J_1.

Ces fonctions sont indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$, J_0 est paire, J_1 est impaire, $J_0(0) = 1$ et vérifient les identités :

$$[\mathcal{U}\, J_0] * [\mathcal{U}\, J_0] = [\mathcal{U}\, \sin]$$

$$J_0' = - J_1$$

$$\forall\, t \in \mathbb{R} \quad J_1'(t) = J_0(t) - \frac{J_1(t)}{t}$$

1°) Montrer que :

□ a) $[\mathcal{U}\, J_0] - [\mathcal{U}\, J_1] * [\mathcal{U}\, J_0] = [\mathcal{U}\, \cos]$

□ b) $[\mathcal{U}\, J_1] * [\mathcal{U}\, J_1] = 2\, [\mathcal{U}\, J_1] - [\mathcal{U}\, \sin]$

□ c) On pose $\forall\, t \in \mathbb{R}$, $h(t) = \dfrac{J_1(t)}{t}$, alors

$[\mathcal{U}\, h] * [\mathcal{U}\, J_0] = [\mathcal{U}\, J_1]$

2°) En déduire que, $\forall\, t \in \mathbb{R}$,

□ a) $J_0(t) - \displaystyle\int_0^t J_1(x)\, J_0(t - x)\, dx = \cos t$

□ b) $\displaystyle\int_0^t J_1(x)\, J_1(t - x)\, dx = 2\, J_1(t) - \sin t$

□ c) $\displaystyle\int_0^t \frac{J_1(x)\, J_0(t - x)}{x}\, dx = J_1(t)$

Exercice 21 :

Soit le système S : $\mathcal{E} \longrightarrow \boxed{S} \longrightarrow \mathcal{S}$

On appelle $\mathcal{A}$ l'ensemble des signaux admissibles du système S, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{D}'$

A) $\mathcal{E} \in \mathcal{A} \cap \mathcal{D}'_+$ étant donnée, alors $\mathcal{S} = S(\mathcal{E})$ est définie par :

$$2\, D^{(2)}(\mathcal{S}) + 16\, D(\mathcal{S}) + 50\, \mathcal{S} = \mathcal{E}$$

I- 1°) Quelle est la fonction de transfert isomorphe du système S.

2°) En déduire la réponse impulsionnelle h de S.

3°) Calculer de deux manières la sortie $\mathcal{S}_1$ correspondant à l'entrée $\mathcal{E}_1 = \left[\, e^{-t}\, \mathcal{U}(t) \,\right]$

4°) □ a) Calculer de deux manières la sortie $\mathcal{S}_2$ correspondant à l'entrée $\mathcal{E}_2 = D(\delta)$

□ b) Calculer de deux manières la sortie $\mathcal{S}_3$ correspondant à l'entrée $\mathcal{E}_3 = D^{(3)}(\delta)$

□ c) Calculer la sortie $\mathcal{S}_4$ correspondant à l'entrée $\mathcal{E}_4 = [\ \mathcal{U}(-t) \sin t\ ]$

II- 1°) Expliquer pourquoi la distribution régulière $\mathcal{E}_5 = \left[\, e^{-t} \,\right]$ appartient à $\mathcal{A}$.

2°) Quelle est la sortie $\mathcal{S}_5$ correspondant à l'entrée $\mathcal{E}_5$.

3°) Reprendre les deux questions ci-dessus avec $\mathcal{E}_6 = \left[\, e^{-t}\, \mathcal{U}(-t) \,\right]$.

4°) La distribution régulière $\mathcal{E}_7 = \left[\, e^{-5t} \,\right]$ appartient-elle à $\mathcal{A}$?

B) On suppose dans cette partie que $\mathcal{E} \in \mathcal{A} \cap \mathcal{D}'_+$ étant donnée $\mathcal{S} = S(\mathcal{E})$ est définie par :

$$D^{(2)}(\mathcal{S}) - D(\mathcal{S}) - 2\,\mathcal{S} = D(\mathcal{E}) + 3\,\mathcal{E}$$

1°) Quelle est la fonction de transfert isomorphe de S.

2°) En déduire la réponse impulsionnelle de S.

3°) Quelle est la sortie $\mathcal{S}_1$ correspondant à l'entrée $\mathcal{E}_1 = \left[\, e^{-t}\, \mathcal{U}(t) \,\right]$

4°) La distribution $\mathcal{E}_5 = \left[e^{-t}\right]$ appartient-elle à $\mathcal{A}$?

Chapitre 5

FONCTION DE TRANSFERT ISOMORPHE

I.- FONCTION DE TRANSFERT ISOMORPHE. TRANSFORMEE DE LAPLACE D'UNE DISTRIBUTION

1) " Fonctions propres " du système $\mathcal{S}$ de réponse impulsionnelle h

On appelle "fonctions propres" du système les signaux d'entrée qui sont des distributions u telles que :

$$u \xrightarrow{\mathcal{S}} s = h * u = \lambda u$$

λ étant une constante complexe.

2) Cas où la réponse impulsionnelle h est une distribution régulière

A) Fonctions propres du système de réponse impulsionnelle h

■ Soit $h = [\mathcal{U} f]$ une distribution régulière telle que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x)\, e^{-px}\, dx$ converge pour $p \in J$, avec $J = \mathbb{C}$ ou $J = J_a$.

Soit $u = [g_p]$, g_p étant la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g_p(t) = e^{pt}$, $p \in J$.

Nous allons montrer que $[g_p]$ est une "fonction propre" du système : $s = h * u = [\mathcal{U} f] * [g_p] = [(\mathcal{U} f) * g_p] = [g_p * (\mathcal{U} f)]$.

$$(g_p * (\mathcal{U} f))(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{U}(x)\, f(x)\, e^{p(t-x)}\, dx = e^{pt} \int_0^{+\infty} f(x)\, e^{-px}\, dx$$

Posons $H(p) = \int_0^{+\infty} f(x)\, e^{-px}\, dx$ donc $g_p * (\mathcal{U} f) = H(p)\, g_p$.

Il en résulte que :

$$s = [g_p * (\mathcal{U}\ f)] = [\ H(p)\ g_p\ ] = H(p)\ [g_p] = H(p)\ u\ .$$

On a bien ici $s = \lambda\ u$ avec $\lambda = H(p)$ constante indépendante de t;

Tout signal d'entrée $u = [e^{pt}]$ est bien pour tout $p \in J$ une "fonction propre" du système .

B) Transformée de Laplace d'une distribution régulière associée à une fonction nulle sur $]-\infty\ ,0[$

Définition : Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, nulle sur $]-\infty,0[$ localement sommable sur $[0,+\infty[$, s'il existe $J = J_a$ ou $J = \mathbb{C}$ tel que $\forall\ p \in J$, la fonction $t \longrightarrow f(t)\ e^{-pt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ alors l'application F de J dans $\mathbb{C}$ définie par $F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)\ e^{-pt}\ dt$ est nommée transformée de Laplace de la distribution [f] .

On démontre comme dans le tome 1 :

$$\forall\ p \in \mathbb{C},\ \mathscr{L}([0])(p) = 0$$

$$\forall\ p \in J_0\ ,\ \mathscr{L}([\mathcal{U}])(p) = \frac{1}{p}$$

$$\forall\ p \in J_a\ ,\ \mathscr{L}([e^{at}\ \mathcal{U}(t)])(p) = \frac{1}{p - a}$$

$$\forall\ n \in \mathbb{N}\ ,\ \forall\ p \in J_0\ ,\ \mathscr{L}([t^n\ \mathcal{U}(t)])(p) = \frac{n!}{p^{n+1}}$$

Remarques

α) Si f vérifie l'hypothèse P_1 (Chap.4 VII), alors f est localement sommable sur $[0, +\infty[$. Si, de plus,

$$\forall p \in J , \quad \lim_{t \longrightarrow +\infty} | f(t) e^{-pt} | = 0$$

alors $f(t) e^{-pt}$ est absolument intégrable sur $\mathbb{R}$, donc $[f]$ a une transformée de Laplace définie sur J .

β) Soit $b \in \mathbb{C}$ tel que $\lim_{t \longrightarrow +\infty} | f(t) e^{-bt}| = 0$, alors il est immédiat de constater que pour tout $p \in \mathbb{C}$ tel que $\mathcal{R}e\ p \geq \mathcal{R}e\ b$, $\lim_{t \longrightarrow +\infty} | f(t) e^{-pt}| = 0$. Donc, si f est localement sommable sur $\mathbb{R}$, elle admet une transformée de Laplace, définie sur J_b.

γ) La définition de la transformée de Laplace d'une fonction f donnée dans le tome 1 est celle de la restriction à $J \cap \mathbb{R}$ de la transformée de Laplace de la distribution régulière $[f]$. Dans ce qui suit, par définition, la transformée de Laplace de la fonction f, lorsqu'elle existe, est égale à la transformée de Laplace de la distribution régulière $[f]$.

δ) Dans ce chapitre, certains résultats utilisent la dérivée ou les primitives de F, où F est une application de $J \subseteq \mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$. Le lecteur qui ne désire pas utiliser les propriétés des fonctions de la variable complexe pourra, dans ces cas, ne considérer comme transformée de Laplace que la restriction F_1 de F à $J \cap \mathbb{R}$. F_1 est alors une application de $I = J \cap \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.

ε) D'une manière générale on définit la transformée de Laplace d'une distribution régulière $[f]$ sans utiliser l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\ e^{-pt}\ dt$.

Une distribution régulière [f] peut avoir une transformée de Laplace sans que la fonction f en admette une. (cf. Exemple V.2.d dans la suite de ce chapitre) .

cf ZEMANIAN Chap. 8

C) Fonction de transfert isomorphe du système

■

Définition : H transformée de Laplace de $[\mathcal{U}f]$ s'appelle fonction de transfert isomorphe du système de réponse impulsionnelle $h = [\mathcal{U}f]$

■ Exemple : Reprenons le système "R C"

On sait (cf. chapitre 1) que sa réponse impulsionnelle est :

$$[\ \frac{1}{\tau}\ e^{-\frac{t}{\tau}}\ \mathcal{U}(t)\ ] \quad \text{avec } \tau = R\ C$$

Soit $\mathcal{E} = [e^{pt}]$, alors

$$s = \mathcal{E} * h = [\ \frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x}{\tau}}\ \mathcal{U}(x)\ \ e^{p(t-x)}\ \ dx\ ]$$

$$\frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x}{\tau}}\ \mathcal{U}(x)\ e^{p(t-x)}\ dx \ = \ \frac{1}{\tau}\ e^{pt} \int_0^{+\infty} e^{-(p+\frac{1}{\tau})x}\ dx$$

Cette intégrale converge pour tout $p \in J_{-\frac{1}{\tau}}$.

Si $p \in J_{-\frac{1}{\tau}}$, alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-(p+\frac{1}{\tau})x}\ dx = \frac{1}{p+\frac{1}{\tau}}$,

d'où $s = \mathcal{E} * h = [\ \dfrac{1}{1+\tau p}\ e^{pt}\ ] = \dfrac{1}{1+\tau p}\ [\ e^{pt}\ ]$.

$[e^{pt}]$ est donc, pour $p \in J_{-\frac{1}{\tau}}$, un signal admissible pour $\mathcal{S}$ et une " fonction propre " du système $\mathcal{S}$.

La fonction de transfert isomorphe de $\mathcal{S}$ est la fonction H définie sur $J_{-\frac{1}{\tau}}$ par $H(p) = \dfrac{1}{1 + \tau p}$.

Quelques cas particuliers :

$$\text{si } p = 0 \text{ , } \mathcal{E} = [1] \text{ et } s = [1] \text{ .}$$

$$\text{si } p = -\frac{1}{2\tau} \text{ , } \mathcal{E} = \left[e^{-\frac{t}{2\tau}} \right] \text{ et } s = 2\ \mathcal{E}$$

$$\text{si } p = i \text{ , } \mathcal{E} = [e^{it}] \text{ et } s = \frac{1}{1 + i\tau}\ \mathcal{E}$$

$$\text{si } p = -i \text{ , } \mathcal{E} = [e^{-it}] \text{ et } s = \frac{1}{1 - i\tau}\ \mathcal{E}$$

Application :

si $\mathcal{E} = [\cos t] = \frac{1}{2}[\ e^{it} + e^{-it}\ ]$, alors

$$s = \left[\mathcal{R}e\left(\frac{1}{1 + i\tau}\ e^{it}\right)\right] = \frac{1}{\sqrt{1 + \tau^2}}\ [\ \cos\ (t - \varphi)]$$

avec $\cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \tau^2}}$ et $\sin\varphi = \dfrac{\tau}{\sqrt{1 + \tau^2}}$

3) Cas où la réponse impulsionnelle $h = \delta_a$, $a \geq 0$.

▪ Montrons que quel que soit $p \in \mathbb{C}$, toute distribution $u = [e^{pt}]$ est une "fonction propre" du système .

$$s = u * h = [e^{pt}] * \delta_a = [e^{p(t-a)}] = e^{-pa}\ [e^{-pt}] = e^{-pa}\ u$$

On obtient bien $s = \lambda\ u$ avec $\lambda = e^{-pa}$ constante indépendante de t.

■

Par définition, la fonction H définie sur $\mathbb{C}$ par $H(p) = e^{-ap}$ est la transformée de Laplace de $\delta_a \in \mathcal{D}'_+$

En particulier la transformée de Laplace de δ est la fonction H définie sur $\mathbb{C}$ par $H(p) = 1$.

■

La fonction H définie sur $\mathbb{C}$ par $H(p) = e^{-ap}$ s'appelle fonction de transfert isomorphe du système de réponse impulsionnelle δ_a .

Exemple en Physique : " ligne à retard idéale "

$$\xrightarrow{\ \mathcal{E}\ } \boxed{\text{retard } a} \xrightarrow{\ s\ }$$

$$\mathcal{S}$$

On sait en Physique que par ce système le signal d'entrée est retardé de a , donc $s = \tau_a \mathcal{E}$.(cf; Chapitre 4.II.3)

Si l'entrée est l'impulsion δ, alors $s = \tau_a\ \delta = \delta_a$, donc la réponse impulsionnelle de ce système est $h = \delta_a$.

On en déduit que la fonction H définie sur $\mathbb{C}$ par $H(p) = e^{-ap}$ est la fonction de transfert isomorphe de ce système .

4) Cas où la réponse impulsionnelle $h = D^{(n)}(\delta)$, $n \geq 0$

■ Montrons que quel que soit p, toute distribution $[e^{pt}]$ est une "fonction propre" du système .

La dérivée $n^{\text{ème}}$ de e^{pt} est $p^n e^{pt}$, donc

$$s = h * u = D^{(n)}(\delta) * [e^{pt}] = D^{(n)}([e^{pt}]) = p^n\ [e^{pt}]$$

On a bien $s = \lambda\ u$, avec $\lambda = p^n$ constante indépendante de t.

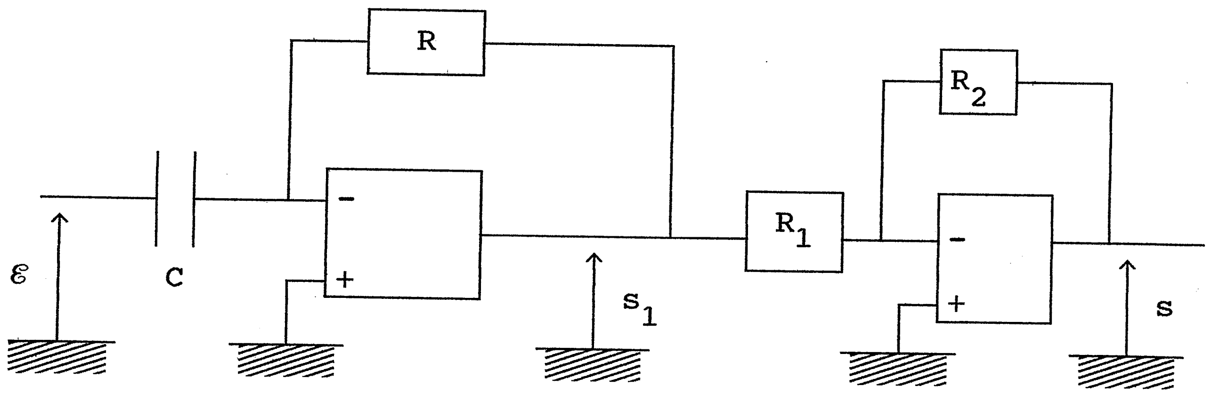
■

Par définition, la fonction H définie sur $\mathbb{C}$ par $H(p) = p^n$ est la transformée de Laplace de la distribution $D^{(n)}(\delta)$.

■

La fonction H définie sur $\mathbb{C}$ par $H(p) = p^n$ s'appelle fonction de transfert isomorphe du système de réponse impulsionnelle $D^{(n)}(\delta)$

Exemple en Physique : Le dérivateur



On sait en Physique que

$$s_1 = - RC\, D(\mathcal{E}) \quad \text{et} \quad s = - \frac{R_2}{R_1}\, s_1 = \frac{R_2}{R_1}\, R\, C\, D(\mathcal{E}) \; .$$

Si $\frac{R_2}{R_1}$ R C = 1 seconde, alors $s = D(\mathcal{E})$.

La réponse impulsionnelle du système est donc $h = D(\delta)$ et ce système a pour fonction de transfert isomorphe la fonction H définie sur $\mathbb{C}$ par $H(p) = p$.

Par exemple, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, si $\mathcal{E} = [e^{-\alpha t}]$, $s = [-\alpha\, e^{-\alpha t}]$.

5) Cas où la réponse impulsionnelle $h = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n \delta_{nT}$, $T > 0$

■ Calculons $\left(\sum_{n=0}^{N} \alpha_n \delta_{nT} \right) * u$ dans le cas où $u = [e^{pt}]$

$$\left(\sum_{n=0}^{N} \alpha_n \delta_{nT} \right) * [e^{pt}] = \sum_{n=0}^{N} (\alpha_n \delta_{nT} * [e^{pt}])$$

$$\sum_{n=0}^{N} \alpha_n (\delta_{nT} * [e^{pt}]) = \sum_{n=0}^{N} \alpha_n [e^{p(t-nT)}]$$

$$\sum_{n=0}^{N} \left(\alpha_n e^{-nTp} [e^{pt}] \right) = \left(\sum_{n=0}^{N} \alpha_n e^{-nTp} \right) [e^{pt}]$$

d'où $s = \lambda [e^{pt}]$, avec $\lambda = \sum_{n=0}^{N} \alpha_n e^{-nTp}$.

■ Nous admettrons que ces égalités restent valables, dans certaines conditions, lorsque $h = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n \delta_{nT}$.

cf ZEMANIAN Th 8-3-3
et SCHWARZ MMP VI-2-4

Plus précisément,rappelons que nous notons J l'ensemble $J_a \subset \mathbb{C}$ défini en 2°A ou $J = \mathbb{C}$.

Alors, pour $p \in J$,

$$s = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\alpha_n e^{-nTp} [e^{pt}] \right) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n e^{-nTp} \right) [e^{pt}]$$

S'il existe $J \subseteq \mathbb{C}$ tel que pour tout $p \in J$, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n e^{-nTp}$ converge, alors, par définition, on dit que la distribution $h = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n \delta_{nT}$ a pour transformée de Laplace la fonction H définie sur J par :

$$H(p) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n e^{-nTp}$$

Remarquons que $\frac{2\pi i}{T}$ est une période de H .

La fonction H définie ci-dessus est la fonction de transfert isomorphe du système de réponse impulsionnelle $h = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n \delta_{nT}$

- Exemple :

Si, pour tout n, $\alpha_n = 1$, alors la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n e^{-nTp}$ converge pour tout $p \in J_0$; la transformée de Laplace de la distribution $\sum_{n=0}^{+\infty} \delta_{nT}$ est la fonction H définie sur J_0 par :

$$H(p) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nTp} = \frac{1}{1 - e^{-Tp}}$$

■ Exemple en Physique : Filtre numérique

$$\xrightarrow{\ \mathcal{E}\ } \underset{\mathcal{S}}{\boxed{s_n = a\, e_n + (1 - a)\, s_{n-1}}} \xrightarrow{\ s\ }$$

où a est un réel tel que $0 < a < 1$.

e_n: échantillon dont le système fait l'acquisition à l'instant nT

s_n: échantillon de sortie calculé par l'unité de calcul (dont on négligera le temps de calcul) et qui sort à l'instant nT.

s_{n-1}: échantillon calculé à l'instant $(n - 1)T$ et mémorisé jusqu'à nT (donc retardé de T) pour être utilisé pour le calcul de s_n.

Soit $\mathcal{E} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} e_n\, \delta_{nT}$. Si $e_0 = 1$ et pour $n \geq 1$, $e_n = 0$, l'entrée est alors l'impulsion δ et $s = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} s_n\, \delta_{nT}$ est la réponse impulsionnelle du filtre numérique .

s_n est calculé par l'unité de calcul à l'aide de l'algorithme $s_0 = a$ et pour $n \geq 1$ par $s_n = a\, e_n + (1 - a)\, s_{n-1}$

$$s_0 = a$$

$$s_1 = a\, e_1 + (1 - a)\, s_0 = a\,(1 - a)$$

$$s_2 = a\, e_2 + (1 - a)\, s_1 = a\,(1 - a)^2$$

....

$$s_n = a\, e_n + (1 - a)\, s_{n-1} = a\,(1 - a)^n$$

donc la réponse impulsionnelle est $h = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a\,(1 - a)^n\, \delta_{nT}$

Considérons la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a\ (1-a)^n\ e^{-nTp} = a \sum_{n=0}^{+\infty} \left((1-a)\ e^{-Tp} \right)^n$$

si $\left| \dfrac{1-a}{e^{Tp}} \right| < 1$ cette série est absolument convergente .

Or $\left| \dfrac{1-a}{e^{Tp}} \right| < 1 \iff p \in J_{\frac{1}{T} \ln|1-a|}$

La fonction H définie sur $J_{\frac{1}{T} \ln|1-a|}$ par

$$H(p) = a \sum_{n=0}^{+\infty} (1-a)^n\ e^{-nTp} = \frac{a}{1-(1-a)\ e^{-Tp}}$$ est la

fonction de transfert isomorphe du système .

6) **Cas Général: Original de U.**

On démontre et nous admettrons que :

a) Si U fonction indéfiniment dérivable (holomorphe) sur K ($K = J_a$ ou $K = \mathbb{C}$) est telle qu'il existe $k > 0$ et $n \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p \in K$, $|U(p)| \leq k\ |p|^n$ alors U est la transformée de Laplace définie sur J, $K \subseteq J$, d'une distribution de $\mathcal{D}'_+$.

cf SCHWARZ MMP Proposition 5 du Ch. VI

Exemple : Soit $U : p \longrightarrow \frac{1}{p}$ U est holomorphe sur J_1 et pour tout $p \in J_1$, $|U(p)| \leq 1$.

U est la transformée de Laplace définie sur J_0, $J_1 \subset J_0$, de $[\mathcal{U}] \in \mathcal{D}'_+$.

b) cf SCHWARZ MMP. Ch VI-4-2 et ZEMANIAN Th. 8-3-1

U étant donnée, vérifiant les conditions du **a)**, il existe une et une seule distribution $u \in \mathcal{D}'_+$ admettant U pour transformée de Laplace.

II.- LINEARITE DE LA TRANSFORMATION DE LAPLACE

1) Cas où la réponse impulsionnelle est une combinaison linéaire des réponses impulsionnelles étudiées en II.2),3),4),5).

■ Soit u un signal admissible pour les systèmes $\mathscr{S}_1$ et $\mathscr{S}_2$, $s_1 = \mathscr{S}_1(u)$ et $s_2 = \mathscr{S}_2(u)$. Ceci peut se traduire par les schémas :

$$u \longrightarrow \underset{\mathscr{S}_1}{\boxed{h_1}} \longrightarrow s_1 = h_1 * u \quad \text{et} \quad u \longrightarrow \underset{\mathscr{S}_2}{\boxed{h_2}} \longrightarrow s_2 = h_2 * u$$

Si h_1 admet une transformée de Laplace H_1 définie sur $J \subseteq \mathbb{C}$, et pour tout $p \in J$, si $u = [\ e^{pt}\ ]$ alors $s_1 = H_1(p)\ u$

Si h_2 admet une transformée de Laplace H_2 définie sur $J' \subseteq \mathbb{C}$ et pour tout $p \in J'$, si $u = [\ e^{pt}\ ]$ alors $s_2 = H_2(p)\ u$.

■ Rappelons (cf. Chapitre 4) que, quels que soient les nombres complexes α et β , si $u \in \mathcal{D}'_+$ et si $v \in \mathcal{D}'_+$, alors

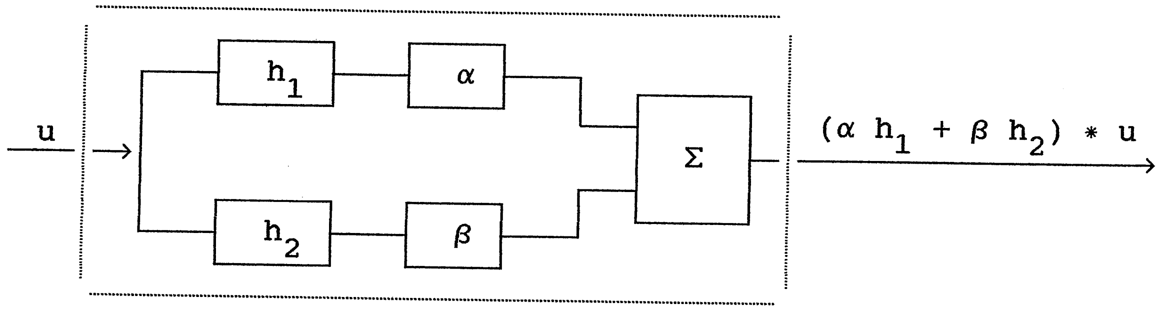
$$\alpha\ u + \beta\ v \in \mathcal{D}'_+ .$$

Ici, $h_1 \in \mathcal{D}'_+$ et $h_2 \in \mathcal{D}'_+$, donc $\alpha\ h_1 + \beta\ h_2 \in \mathcal{D}'_+$.

Considérons le système $\mathcal{S}$ de réponse impulsionnelle

$$s = \alpha\, h_1 + \beta\, h_2 \,.$$

Par exemple, en électronique, un tel système peut être décrit par le schéma ci-dessous :



$\mathcal{S}$

On peut symboliser ce système par le schéma habituel :

$$u \longrightarrow \underbrace{\boxed{\alpha\, h_1 + \beta\, h_2}}_{\mathcal{S}} \longrightarrow s = (\alpha\, h_1 + \beta\, h_2\,) * u$$

or $s = (\alpha\, h_1 + \beta\, h_2\,) * u = \alpha\,(h_1 * u) + \beta\,(h_2 * u)$.

(si le signal est admissible pour $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ il est admissible pour $\mathcal{S}$).

On en déduit que $s = \alpha\, s_1 + \beta\, s_2$, donc pour tout $p \in J \cap J'$,
si $u = [\, e^{pt}\,]$, $s = \alpha\, H_1(p)\, u + \beta\, H_2(p)\, u$,
d'où $s = (\, \alpha\, H_1(p) + \beta\, H_2(p)\,)\, u = \lambda\, u$,
avec $\lambda = \alpha\, H_1(p) + \beta\, H_2(p)$ constante indépendante de t .

Pour tout $p \in J \cap J'$, $[\, e^{pt}\,]$ est donc une fonction propre du système $\mathcal{S}$.

> Par définition, on dit que la fonction $H = \alpha\, H_1 + \beta\, H_2$ est la transformée de Laplace de la distribution $h = \alpha\, h_1 + \beta\, h_2$ et que la fonction H est la fonction de transfert isomorphe du système de réponse impulsionnelle $\alpha\, h_1 + \beta\, h_2$.

2) Théorème admis

D'une manière générale, on démontre et nous admettrons que :

Si $u \in \mathcal{D}'_+$ admet une transformée de Laplace U définie sur J et si $v \in \mathcal{D}'_+$ admet une transformée de Laplace V définie sur J', alors $w = \alpha\, u + \beta\, v$ admet une transformée de Laplace W définie sur $J \cap J'$ par $W = \alpha\, U + \beta\, V$.

cf ZEMANIAN 8-3

Conséquence :

Il s'ensuit que si U et V sont données et vérifient les conditions du I 6) a), U est la transformée de Laplace de $u \in \mathcal{D}'_+$, V est la transformée de Laplace de $v \in \mathcal{D}'_+$, et $U = V \Leftrightarrow u = v$.

Nota :La transformée de Laplace d'une distribution u est aussi notée $\mathcal{L}(u)$, d'où la relation $\mathcal{L}(\alpha\, u + \beta\, v) = \alpha\, \mathcal{L}(u) + \beta\, \mathcal{L}(v)$.

Remarque : Ce théorème peut être démontré facilement dans le cas suivant: $u = [f]$ et $v = [g]$ sont des distributions régulières, u admet une transformée de Laplace F définie sur J par $\int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-pt}\, dt$, v admet une transformée de Laplace G définie sur J' par $\int_0^{+\infty} g(t)\, e^{-pt}\, dt$. Alors il est immédiat d'après les propriétés des intégrales et des distributions que $\forall\, (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$, $\alpha\, [f] + \beta\, [g] = [\alpha\, f + \beta\, g]$ admet pour transformée de Laplace $\alpha\, F + \beta\, G$ définie sur $J \cap J'$.

III.- LE THEOREME DE CONVOLUTION

1) Introduction

L'intérêt des fonctions de transfert vient, comme nous allons le voir, du fait qu'elles constituent un moyen de remplacer l'opération de convolution, relativement compliquée, par la simple multiplication de deux fonctions; et donc permettent, connaissant la réponse impulsionnelle d'un système et l'entrée, de trouver plus facilement la sortie correspondante.

Plus précisément, si u *est l'entrée d'un système de réponse impulsionnelle* h, *et* s *la sortie correspondante, alors on a les deux relations suivantes :*

$$s = h * u$$

et

$$\mathcal{L}(s) = \mathcal{L}(h).\mathcal{L}(u)$$

où $H = \mathcal{L}(h)$ *est la fonction de transfert isomorphe du système*

2) Un exemple de transformée de Laplace de u * v dans le cas où u et v sont des distributions régulières admettant des transformées de Laplace.

Soit $u = [\sin t\ \mathcal{U}(t)]$ et $v = [e^{-t}\ \mathcal{U}(t)]$.

$U = \mathcal{L}(u)$ est définie sur J_0 par $U(p) = \dfrac{1}{p^2 + 1}$

$V = \mathcal{L}(v)$ est définie sur J_{-1} par $V(p) = \dfrac{1}{p + 1}$

$$\begin{aligned} w = u * v &= [\ \mathcal{U}(t) \int_0^t \sin x\ e^{-(t-x)}\ dx\ ] \\ &= [\ \mathcal{U}(t)\ e^{-t} \int_0^t \sin x\ e^{x}\ dx\ ] \\ &= [\ (-\frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{2}\sin t + \frac{1}{2}e^{-t})\ \mathcal{U}(t)\ ] \end{aligned}$$

On constate que :

w admet une transformée de Laplace W définie sur $J_0 \cap J_{-1}$ par

$$W(p) = -\frac{1}{2} \frac{p}{p^2+1} + \frac{1}{2} \frac{1}{p^2+1} + \frac{1}{2} \frac{1}{p+1}$$

$$= \frac{1}{(p^2+1)(p+1)}$$

et que $\forall\ p \in J_0 \cap J_{-1}$, $W(p) = U(p)\ V(p)$.

3) Théorème admis

On démontre et nous admettrons :

> Théorème :
>
> Si $u \in \mathcal{D}'_+$ admet une transformée de Laplace U définie sur J,
>
> si $v \in \mathcal{D}'_+$ admet une transformée de Laplace V définie sur J'
>
> alors :
>
> 1) $u * v$ admet une transformée de Laplace définie sur $J \cap J'$
>
> 2) $W = U\ V$ est la transformée de Laplace de $w = u * v$.

cf ZEMANIAN Th. 8-5-1

La relation $W = U\ V$ se note aussi $\mathcal{L}(u * v) = \mathcal{L}(u)\ \mathcal{L}(v)$.

4) Systèmes en cascade

A) Hypothèses

■ Soit $\mathcal{S}_1$ de réponse impulsionnelle h_1, si h_1 admet une transformée de Laplace H_1 définie sur $J \subseteq \mathbb{C}$, alors $\forall\ p \in J$,

$$u = [\ e^{pt}\ ] \xrightarrow{\mathcal{S}_1} s_1 = H_1(p)\ u$$

▪ Soit $\mathcal{S}_2$ de réponse impulsionnelle h_2, si h_2 admet une transformée de Laplace H_2 définie sur $J' \subseteq \mathbb{C}$, alors $\forall\ p \in J'$

$$u = [\ e^{pt}\ ] \xrightarrow{\mathcal{S}_2} s_2 = H_2(p)\ u$$

▪ Rappelons que pour tout u et v appartenant à $\mathcal{D}'_+$, $u * v \in \mathcal{D}'_+$ (cf Chapitre 4).

Ici h_1 et h_2 appartiennent à $\mathcal{D}'_+$, donc $h_1 * h_2 \in \mathcal{D}'_+$.

▪ *Mise en cascade du système $\mathcal{S}_1$ suivi du système $\mathcal{S}_2$.*
Si $s_1 = h_1 * \delta$ est un signal admissible pour $\mathcal{S}_2$, soit $s = \mathcal{S}_2(s_1)$ alors $s = h_2 * (\ h_1 * \delta\ ) = (\ h_2 * h_1\ ) * \delta$

$$\delta \longrightarrow \underset{\mathcal{S}_1}{\boxed{h_1}} \longrightarrow h_1 \longrightarrow \underset{\mathcal{S}_2}{\boxed{h_2}} \longrightarrow s = h_2 * s_1 = h_2 * h_1$$

Le système en cascade a pour réponse impulsionnelle $h_2 * h_1$

B) <u>Fonctions propres du système obtenu par la mise en cascade du systèmes $\mathcal{S}_1$suivi du système $\mathcal{S}_2$.</u>

▪ Pour tout $p \in J \cap J'$, si $u = [e^{pt}]$, alors $s_1 = h_1 * u = H_1(p)\ u$ et $s_2 = h_2 * u = H_2(p)\ u$.

De plus :
$s = h_2 * s_1 = h_2 * (H_1(p)\ u) = H_1(p)\ (h_2 * u) = H_1(p)\ H_2(p)\ u$

donc $s = \lambda\ u$, avec $\lambda = H_1(p)\ H_2(p)$, constante indépendante de t.

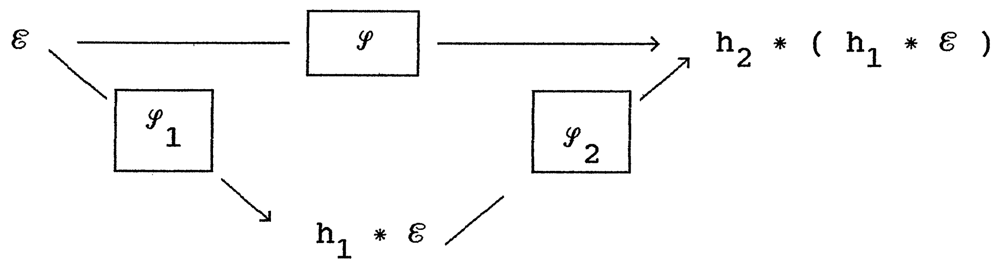
Pour tout $p \in J \cap J'$, $[e^{pt}]$ est donc une fonction propre du système constitué par la mise en cascade des systèmes $\mathcal{S}_1$et $\mathcal{S}_2$.

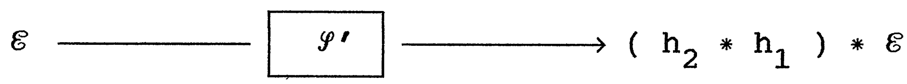
■ *Remarque* : Soit $\mathcal{S}$ le système obtenu par la mise en cascade des systèmes $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ de réponses impulsionnelles respectives h_1 et h_2. On peut dire que le système $\mathcal{S}$ est le même que le système $\mathcal{S}'$ de réponse impulsionnelle $h_1 * h_2$ si et seulement si :

1. l'ensemble $\mathcal{A}$ des signaux admissibles pour $\mathcal{S}$ est égal à l'ensemble des signaux admissibles pour $\mathcal{S}'$.

et

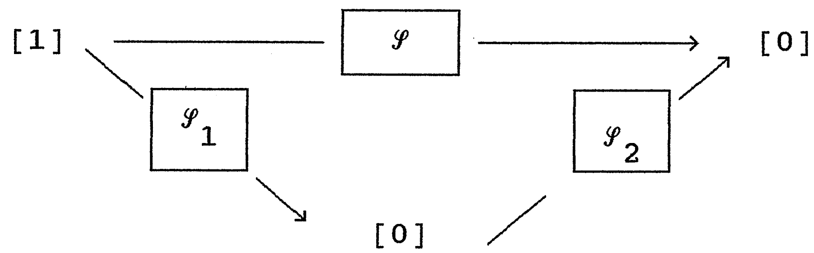
2. Pour tout $\mathcal{E} \in \mathcal{A}$, $h_2 * (h_1 * \mathcal{E}) = (h_2 * h_1) * \mathcal{E}$.





■ *Exemple* : $h_1 = D(\delta)$ et $h_2 = [\mathcal{U}]$ donc $h_1 * h_2 = \delta$

Soit $\mathcal{E} = [1]$. Remarquons que $\mathcal{E}$ est alors un signal admissible pour $\mathcal{S}'$, pour $\mathcal{S}_1$ et pour $\mathcal{S}$, mais n'est pas admissible pour $\mathcal{S}_2$.



$$[1] \longrightarrow \boxed{\mathcal{S}'} \longrightarrow [1]$$

on constate que $h_2 * (h_1 * [1]) \neq (h_2 * h_1) * [1]$.

Dans ce cas les systèmes $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ sont différents.

Ce phénomène provient du fait que d'une manière générale la convolution de trois distributions n'est pas toujours définie et, même lorsqu'elle est définie ,cette opération n'est pas toujours associative.

Cependant si u, v et w appartiennent à $\mathcal{D}'_+$, leur convolution est définie et on a : $u * (v * w) = (u * v) * w$.

Il en résulte que pour des sytèmes dont la réponse impulsionnelle appartient à $\mathcal{D}'_+$, et si l'on se limite à des entrées appartenant à $\mathcal{D}'_+$, alors les systèmes $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ sont équivalents.

IV.- APPLICATION A LA RECHERCHE DE LA TRANSFORMEE DE LAPLACE D'UNE DISTRIBUTION DE $\mathcal{D}'_+$.

1) Conséquences des résultats des I ,II , etIII

En particulier, on a le corollaire suivant :

> Théorème:Si $u \in \mathcal{D}'_+$ admet une transformée de Laplace $\mathcal{L}(u)$ définie sur $J = J_a$ ou $J = \mathbb{C}$, alors,
>
> $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $D^{(n)}(u)$ admet une transformée de Laplace définie sur J par $\mathcal{L}(D^{(n)}(u))(p) = p^n\, \mathcal{L}(u)(p)$
>
> et
>
> $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}_+$, $\tau_\alpha u$ admet une transformée de Laplace définie sur J par $\mathcal{L}(\tau_\alpha u)(p) = e^{-\alpha p}\, \mathcal{L}(u)(p)$

En effet :

■ $D^{(n)}(u) = D^{(n)}(\delta) * u$ et $\mathcal{L}(D^{(n)}(\delta)) = p^n$

$\mathcal{L}(D^{(n)}(u)) = \mathcal{L}(D^{(n)}(\delta) * u) = \mathcal{L}(D^{(n)}(\delta))\ \mathcal{L}(u)$,

d'où $\mathcal{L}(D^{(n)}(u))(p) = p^n\ \mathcal{L}(u)(p)$.

■ $\tau_\alpha u = \delta_\alpha * u$ et $\mathcal{L}(\delta_\alpha)(p) = e^{-\alpha p}$

$\mathcal{L}(\tau_\alpha u) = \mathcal{L}(\delta_\alpha * u) = \mathcal{L}(\delta_\alpha)\ \mathcal{L}(u)$

d'où $\mathcal{L}(\tau_\alpha u)(p) = e^{-\alpha p}\ \mathcal{L}(u)(p)$.

2) Remarques

a) La formule donnant la transformée de Laplace de la dérivée $n^{\text{ème}}$ d'une distribution est particulièrement simple et le résultat est général .

b) Cas d'une distribution régulière

Soit la distribution régulière $[\mathcal{U}f]$ admettant une transformée de Laplace F définie sur $J = J_a$ ou $J = \mathbb{C}$, alors $D([\mathcal{U}f])$, dérivée au sens des distributions de $[\mathcal{U}f]$ admet pour transformée de Laplace la fonction $\mathcal{L}(D([\mathcal{U}f]))$ définie sur J par :

$$\boxed{\mathcal{L}(D([\mathcal{U}f]))(p) = p\ F(p)}$$

Remarquons que les sauts éventuels de $\mathcal{U}f$, y compris en 0, n'apparaissent pas explicitement dans cette formule.

La fonction $p \longrightarrow pF(p)$ n'est pas en général égale à la transformée de Laplace de $[\mathcal{U}f']$ puisque, sauf cas particuliers,

$$D([\mathcal{U}f]) \neq [\mathcal{U}\ f']$$

Exemple : Soit $(\mathcal{U}\, f)(t) = (t + 1)\, (\mathcal{U}(t) - \mathcal{U}(t - 1))$

$$F(p) = \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} - \left(\frac{2}{p} + \frac{1}{p^2} \right) e^{-p} .$$

$$\mathcal{L}(D([\mathcal{U}\, f]))(p) = 1 + \frac{1}{p} - \left(2 + \frac{1}{p} \right) e^{-p} .$$

$(\mathcal{U}\, f')(t) = \mathcal{U}(t) - \mathcal{U}(t - 1)$ et $\mathcal{L}([\mathcal{U}\, f'])(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p}\, e^{-p}$

c) Transformée de Laplace de $[\mathcal{U}\, f']$ dans le cas où f' est localement continue par morceaux sur $[\, 0\, ,\, +\infty\, [$ et où f est une primitive large de f' sur $]\, 0\, ,\, \alpha\, [$ et sur $]\, \alpha\, ,\, +\infty\, [$ qui présente en α un saut égal à σ_α.

■ Nous savons, chapitre 3, III.- 2°, que :

$$[\mathcal{U}\, f'] = D([\mathcal{U}\, f]) - f(0+) - \sigma_\alpha\, \delta_\alpha$$

alors d'après III., si $[\mathcal{U}\, f]$ admet une transformée de Laplace F définie sur J,

$$\mathcal{L}([\mathcal{U}\, f']) = \mathcal{L}(D([\mathcal{U}\, f]) - f(0+)\, \mathcal{L}(\delta) - \sigma_\alpha\, \mathcal{L}(\delta_\alpha)$$

$$\boxed{\forall\, p \in J,\ \mathcal{L}([\mathcal{U}f'])(p) = p\, F(p) - f(0+) - \sigma_\alpha\, e^{-p\alpha}}$$

Ce résultat confirme la remarque faite en b).

■ Ce raisonnement se généralise aisément au cas où f' est localement continue par morceaux sur $]\, 0\, ,\, +\infty\, [$ et f présente sur $]\, 0\, ,\, +\infty\, [$ n discontinuités de première espèce en $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

$$\boxed{\forall\, p \in J,\ \mathcal{L}([\mathcal{U}f'])(p) = p\, \mathcal{L}([\mathcal{U}f])(p) - f(0+) - \sum_{i=1}^{n} \sigma_{a_i}\, e^{-pa_i}}$$

Ne pas confondre les transformées de Laplace de $D([\mathcal{U}f])$ et de $[\mathcal{U}f']$

d) *A propos de la transformée de Laplace de la fonction $\mathcal{U}f'$*

■ Nous avons vu dans le tome 1 que s'il existe $I =]\, p_0 \,, +\infty\, [\subset \mathbb{R}$ ou $I = \mathbb{R}$ tel que pour tout $p \in I$,

$\lim\limits_{t \to +\infty} |f(t)\, e^{-pt}| = 0$, alors la transformée de Laplace de $\mathcal{U}\, f$ est définie sur I et $\int_0^{+\infty} f'(t)\, e^{-pt}\, dt$ converge pour tout $p \in I$ donc que $\mathcal{U}\, f'$ admet une transformée de Laplace définie sur I.

■ *L'existence de $\mathcal{L}([\mathcal{U}f'])$ n'implique pas la convergence de l'intégrale* $\int_0^{+\infty} f'(t)\, e^{-pt}\, dt$.

Le théorème précédent affirme l'existence de la transformée de Laplace définie sur J de la distribution dérivée D(u) d'une distribution $u \in \mathcal{D}'_+$ dès que u admet une transformée de Laplace définie sur $J \subseteq \mathbb{C}$, $J \neq \emptyset$.

Dans le cas où u est une distribution régulière associée à une fonction $\mathcal{U}f$, cela n'entraîne pas nécessairement que la fonction $\mathcal{U}f'$ admet une transformée de Laplace, c'est à dire qu'il existe $p \in \mathbb{C}$ tel que $\int_0^{+\infty} f'(t)\, e^{-pt}\, dt$ converge.

Considérons en effet la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(t) = \sin\left(e^{t^2}\right) .$$

Pour tout $p \in \mathbb{C}$ tel que $\mathcal{R}e(p) > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-pt}\, g(t) = 0$, donc $\int_0^{+\infty} g(t)\, e^{-pt}\, dt$ est absolument convergente, donc convergente .

Soit G la transformée de Laplace de $[\mathcal{U}\, g]$ définie sur J_0 .

Posons $f(t) = g'(t) = 2\, t\, e^{t^2} \cos\left(e^{t^2}\right)$.

$$\int_0^X f(t)\ e^{-pt}\ dt = \Big[\ e^{-pt}\ g(t)\ \Big]_0^X + p \int_0^X g(t)\ e^{-pt}\ dt$$

donc $$\lim_{X \longrightarrow +\infty} \int_0^X f(t)\ e^{-pt}\ dt = -\ g(0) + p \int_0^{+\infty} g(t)\ e^{-pt}\ dt$$

$$= -\ g(0) + p\ G(p) \ = F(p)$$

F est la transformée de Laplace de $[\mathcal{U}\ f]$

En remarquant que $f(0) = 0$, que f est continue sur $[\ 0\ ,\ +\infty\ [$, que $\mathcal{L}([\mathcal{U}\ f]) = \mathcal{L}(\mathcal{U}\ f) = F$ et que $D([\mathcal{U}\ f]) = [\mathcal{U}\ f']$, on déduit que la distribution régulière $[\mathcal{U}\ f']$ admet une transformée de Laplace définie sur J_0 par

$$\mathcal{L}([\mathcal{U}\ f'])(p) = p\ F(p) = p^2\ G(p) - p\ g(0).$$

Or $$\int_0^X f'(t)\ e^{-pt}\ dt = \Big[\ e^{-pt}\ f(t)\ \Big]_0^X + p \int_0^X f(t)\ e^{-pt}\ dt$$

$$= e^{-pX}.\ 2\ X\ e^{X^2}\ \cos\left(\ e^{X^2}\ \right) + p \int_0^X f(t)\ e^{-pt}\ dt$$

Lorsque $X \longrightarrow +\infty$, $p \int_0^X f(t)\ e^{-pt}\ dt$ tend vers $p^2\ G(p) - p\ g(0)$

mais $e^{-pX}.\ 2\ X\ e^{X^2}\ \cos\left(\ e^{X^2}\ \right)$ n'a pas de limite .

Donc $\int_0^{+\infty} f'(t)\ e^{-pt}\ dt$ diverge pour tout $p \in J_0$, ce qui signifie que la fonction $\mathcal{U}\ f'$ n'admet pas de transformée de Laplace .

La transformée de Laplace de la distribution $[\mathcal{U}\ f']$ existe mais n'est pas définie à l'aide de l'intégrale $\int_0^{+\infty} f'(t)\ e^{-pt}\ dt$.

3) Transformée de Laplace de $v \in \mathcal{D}'_+$ connaissant $\mathcal{L}(D(v))$

▪ On montre (cf. par exemple Zemanian Chap 2. Th 2.6 1) que $w \in \mathcal{D}'_+$ étant donnée, il existe une distribution $v \in \mathcal{D}'_+$ et une seule telle que $D(v) = w$

$$v = \delta * v = D([\mathcal{U}]) * v = [\mathcal{U}] * D(v) = [\mathcal{U}] * w$$

▪ Supposons que w admette une transformée de Laplace W définie sur J alors la fonction :

$$V : p \longrightarrow \frac{1}{p} W(p)$$

définie sur $J \cap J_0$ est la transformée de Laplace de v.

Remarque : Soit $\mathcal{S}$ le système de réponse impulsionnelle $h = [\mathcal{U}]$

$$\mathcal{E} \longrightarrow \underset{\mathcal{S}}{\boxed{\;h\;}} \longrightarrow s$$

La sortie s est telle que $D(s) = \mathcal{E}$ (cf. Chap.4 .IV. 3.Rem.).

Dans le cas particulier où $\mathcal{E}$ est une distribution régulière associée à une fonction $\mathcal{U}\, f$, localement continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, alors

$$(\ [\mathcal{U}] * \mathcal{E}\ )(t) = (\ [\mathcal{U}] * [\mathcal{U}\ f]\ )(t) = \mathcal{U}(t) \int_0^t f(x)\ dx\ .$$

Donc la réponse s est la distribution associée à la primitive large de la fonction $\mathcal{U}\, f$ nulle en 0.

Un tel système se nomme intégrateur .

La fonction de transfert isomorphe H de l'intégrateur est définie sur J_0 par $H(p) = \frac{1}{p}$.

V. QUELQUES PROPRIETES DE LA TRANSFORMEE DE LAPLACE DES DISTRIBUTIONS

1) Transformée de Laplace de e^{-at} u, $a \in \mathbb{C}$

Rappelons que si θ est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ indéfiniment dérivable et si $u \in \mathcal{D}'_+$, alors $\theta\, u \in \mathcal{D}'_+$.

> Théorème 1 : Si $v \in \mathcal{D}'_+$ admet une transformée de Laplace V définie sur $J \subseteq \mathbb{C}$, alors la distribution e^{-at} v admet pour transformée de Laplace l'application $p \longrightarrow V(p + a)$ définie pour tout p tel que $p + a \in J$

cf ZEMANIAN 8-3 Formule 10

▸ exemple d'application :

$(p + 2)^2 = p^2 + 4\, p + 4$, donc

$$D^2(\delta) + 4\, D(\delta) + 4\, \delta = e^{-2t}\, D^2(\delta)$$

▸ Remarquons que : si $J = \mathbb{C}$, $\mathcal{L}(v)$ est définie sur $\mathbb{C}$;
si $\mathcal{L}(v)$ est définie sur J_σ, $\mathcal{L}(e^{-at}\, v)$ est définie sur $J_{\sigma + \mathcal{R}e\, a}$

▸ Démontrons ce théorème dans certains cas particuliers :

■ Si $v = [\mathcal{U}\, f]$,

$$V(p) = \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-pt}\, dt \text{ qui converge pour } p \in J.$$

Posons $w = [\ \mathcal{U}(t)\ f(t)\ e^{-at}\ ]$.

$$W(p) = \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-at}\, e^{-pt}\, dt = V(p + a)$$

et converge pour $p + a \in J$

■ Si $v = \delta_\alpha$, $\alpha \geq 0$.

alors $e^{-at}\, \delta_\alpha = e^{-a\alpha}\, \delta_\alpha$. En effet,

$$\forall\, \varphi \in \mathcal{D},\ < e^{-at}\, \delta_\alpha,\ \varphi(t) > \ = \ < \delta_\alpha,\ e^{-at}\, \varphi(t) > \ = e^{-a\alpha}\, \varphi(\alpha)$$

et $\quad e^{-a\alpha}\, \delta_\alpha \xrightarrow{\mathcal{L}} e^{-a\alpha}\, e^{-\alpha p} = e^{-\alpha\,(p + a)}$.

■ Si $v = D^{(n)}(\delta)$.

$$\forall\, \varphi \in \mathcal{D}\ ,\ < e^{-at}\, D^{(n)}(\delta)\ ,\ \varphi(t) > \ = \ < D^{(n)}(\delta)\ , e^{-at}\, \varphi(t) >$$

Posons $\psi(t) = e^{-at}\, \varphi(t)$.

$$< D^{(n)}(\delta)\ , e^{-at}\, \varphi(t) > \ = \ < D^{(n)}(\delta)\ , \psi(t) > \ = (-1)^n\, \psi^{(n)}(0)$$

$$\psi^{(n)}(t) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, (-a)^k\, e^{-at}\, \varphi^{(n-k)}(t)$$

$$\psi^{(n)}(0) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, (-a)^k\, \varphi^{(n-k)}(0)\ .$$

$$(-1)^n\, \psi^{(n)}(0) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, a^k (-1)^{n+k}\, \varphi^{(n-k)}(0)$$

et $\quad (-1)^{n+k} = (-1)^{n-k}\, (-1)^{2k} = (-1)^{n-k}$

donc $\quad (-1)^n\, \psi^{(n)}(0) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, a^k (-1)^{n-k}\, \varphi^{(n-k)}(0)$.

$$(-1)^{n-k}\, \varphi^{(n-k)}(0) = \ < D^{(n-k)}(\delta)\ ,\ \varphi > .$$

On obtient donc $e^{-at}\, D^{(n)}(\delta) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \; a^k \, D^{(n-k)}(\delta)$.

Rappelons que $D^{(n-k)}(\delta) \xrightarrow{\mathcal{L}} p^{n-k}$

$$e^{-at}\, D^{(n)}(\delta) \xrightarrow{\mathcal{L}} \sum_{k=0}^{n} C_n^k \; a^k \, p^{n-k} = (p + a)^n \quad .$$

■Si $v = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n \, \delta_{nT}$, $T > 0$.

On démontre alors que $e^{-at}\, v = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n \, e^{-anT} \, \delta_{nT}$

$v \xrightarrow{\mathcal{L}} \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n \, e^{-nTp}$ qui converge pour tout $p \in J$.

$$e^{-at}\, v \xrightarrow{\mathcal{L}} \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n \, e^{-anT} \, e^{-nTp} = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n \, e^{-nT(p+a)}, \; p+a \in J.$$

2) Transformée de Laplace de $t^n v$, $v \in \mathcal{D}'_+$

> Théorème 2 : Si $v \in \mathcal{D}'_+$ admet une transformée de Laplace F définie sur $J \subseteq \mathbb{C}$, alors $t^n v$ admet pour transformée de Laplace la fonction $(-1)^n \, F^{(n)}$ définie sur J .

cf ZEMANIAN 8-3. Formule 7

▸ Exemple d'application :

$D(\delta_\alpha) \xrightarrow{\mathcal{L}} p\, e^{-\alpha p}$, donc $t\, D(\delta_\alpha) \xrightarrow{\mathcal{L}} (\alpha\, p - 1)\, e^{-\alpha p}$

d'où $t\, D(\delta_\alpha) = \alpha\, D(\delta_\alpha) - \delta_\alpha$

▸ Nous admettrons ce théorème dans le cas où v est une distribution régulière .

▸ Démontrons ce théorème dans certains cas particuliers

■ Si $v = \delta_\alpha$, $\forall\ \varphi \in \mathcal{D}$ et $\forall\ n \in \mathbb{N}$,

$< t^n\ \delta_\alpha\ ,\ \varphi(t) > = < \delta_\alpha\ ,\ t^n\ \varphi(t) > = \alpha^n\ \varphi(\alpha)$,

donc $t^n\ \delta_\alpha = \alpha^n\ \delta_\alpha$, donc

$\mathscr{L}(t^n\ \delta_\alpha)(p) = \mathscr{L}(\alpha^n\ \delta_\alpha)(p) = \alpha^n\ \mathscr{L}(\delta_\alpha) = \alpha^n\ F(p)$

$F(p) = e^{-\alpha p}$, donc $F^{(n)}(p) = (-1)^n\ \alpha^n\ e^{-\alpha p} = (-1)^n\ \alpha^n\ F(p)$,

et $\alpha^n\ F(p) = (-1)^n\ F^{(n)}(p)$.

On a bien $\mathscr{L}(t^n\delta_\alpha)(p) = (-1)^n\ F^{(n)}(p)$.

■ Si $v = D^{(k)}(\delta)$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $\forall\ k \in \mathbb{N}$ et $\forall\ \varphi \in \mathcal{D}$

Posons $\psi(t) = t^n\ \varphi(t)$

$< t^n\ D^{(k)}(\delta)\ ,\ \varphi(t) > = < D^{(k)}(\delta)\ ,\ t^n\ \varphi(t) > = (-1)^k\ \psi^{(k)}(0)$

$$\psi^{(k)}(t) = \sum_{m=0}^{m=k} C_k^m\ (t^n)^{(m)}\ \varphi^{(k-m)}(t)\ .$$

Le seul terme non nul pour $t = 0$ dans cette somme est obtenu lorsque $m = n$.

Donc si $k < n$, alors pour tout m dans cette somme, $m < n$, et $t^n\ D^{(k)}(\delta) = [0]$. Or $F(p) = p^k$ et on a bien $F^{(n)}(p) = 0$.

Si $k \geq n$, alors $\psi^{(k)}(0) = C_k^n\ n!\ \varphi^{(k-n)}(0)$

$$= \frac{k!}{n!\ (k-n)!}\ n!\ \varphi^{(k-n)}(0)\ .$$

$\psi^{(k)}(0) = k\ (k-1)\ \ldots\ (k-n+1)\ \varphi^{(k-n)}(0)$.

$< t^n\ D^{(k)}(\delta)\ ,\ \varphi(t) > = (-1)^k\ k\ (k-1)\ \ldots\ (k-n+1)\ \varphi^{(k-n)}(0)$

donc $t^n\ D^{(k)}(\delta) = (-1)^k\ k\ (k-1)\ \ldots\ (k-n+1)\ (-1)^{k-n}\ D^{(k-n)}(\delta)$

Remarquons que $(-1)^{2k-n} = (-1)^n$.

D'où $t^n\ D^{(k)}(\delta) = (-1)^n\ k\ (k-1)\ \ldots\ (k-n+1)\ D^{(k-n)}(\delta)$

$$\mathcal{L}(t^n\ D^{(k)}(\delta))(p) = (-1)^n\ k\ (k-1)\ \ldots\ (k-n+1)\ p^{k-n}\ .$$
$$= (-1)^n\ F^{(n)}(p)\ .$$

■ On démontre ce résultat sans difficulté lorsque

$$v = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n\ \delta_{nT}\ , \qquad T > 0$$

▸ Remarquons que ce théorème utilise une propriété de la transformation de Laplace d'une distribution de $\mathcal{D}'_+$ que nous n'avons pas encore signalée :

si F est la transformée de Laplace de $u \in \mathcal{D}'_+$ définie sur J alors F est indéfiniment dérivable sur J (F est holomorphe sur J)

cf ZEMANIAN Th 8-3-2

3) Transformée de Laplace de $\sum_{n=0}^{+\infty} (\ \delta_{nT} * u\ )$

$u \in \mathcal{D}'_+$ et $T > 0$.

■ On démontre et nous admettrons que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\ \delta_{nT} * u\ ) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \delta_{nT} \right) * u$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \delta_{nT} \xrightarrow{\mathscr{L}} \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nTp} = \frac{1}{1 - e^{-Tp}} \quad \text{pour} \quad p \in J_0 .$$

Donc si u admet une transformée de Laplace U définie sur J, alors :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\delta_{nT} * u) \xrightarrow{\mathscr{L}} \frac{U(p)}{1 - e^{-Tp}} \quad \text{définie sur } J_0 \cap J.$$

cf ZEMANIAN Th 5-6-1

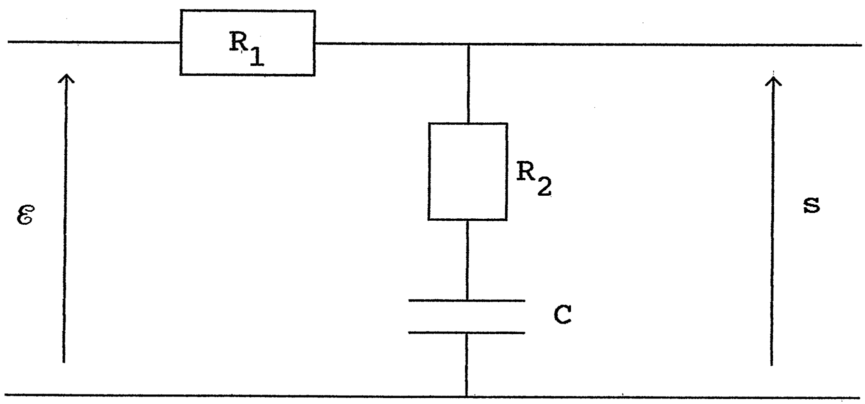
■ Remarquons que dans le cas où u est une distribution régulière associée à une fonction f_0 nulle hors de [0 , T], on retrouve ainsi la formule donnant la transformée de Laplace du produit de $\mathcal{U}$ par la fonction f de période T et définie sur [0 , T] par $f(t) = f_0(t)$.

En effet $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (\delta_{nT} * [\mathcal{U} f_0]) = \sum_{n=0}^{+\infty} [\mathcal{U}(t - nT) f_0(t - nT)]$

VI. APPLICATION A LA PHYSIQUE

1) Insuffisance du modèle " équation différentielle"

Examinons le problème dans le cas du système $\mathcal{S}$ suivant :



$\tau_1 > 0$

$\tau_2 > 0$

$$\tau_1 = R_1 C \qquad \text{et} \qquad \tau_2 = (R_1 + R_2) C$$

La fonction de transfert isomorphe de ce système est la fonction H définie sur $J_{-\frac{1}{\tau_1}}$ par $H(p) = \dfrac{1 + \tau_2\, p}{1 + \tau_1\, p}$

(cf dernier chapitre du Tome 1)

H est la transformée de Laplace de la distribution de $\mathcal{D}'_+$

$$h = \frac{\tau_2}{\tau_1}\left(\delta + \left(\frac{1}{\tau_2} - \frac{1}{\tau_1} \right) \left[e^{-\frac{t}{\tau_1}} \cdot \mathcal{U}(t) \right] \right)$$

h est la réponse impulsionnelle de $\mathcal{S}$

Représentons ce système par le schéma suivant :

$$\mathcal{E} \longrightarrow \boxed{\quad h \quad} \longrightarrow s = h * \mathcal{E} = \mathcal{S}(\mathcal{E})$$

Supposons que $\mathcal{E} \in \mathcal{D}'_+$ admette une transformée de Laplace E définie sur J'.

Alors $s \in \mathcal{D}'_+$ a pour transformée de Laplace la fonction S définie sur $J = J_{-\frac{1}{\tau_1}} \cap J'$ par :

$$S(p) = H(p)\; E(p) = \frac{1 + \tau_2\, p}{1 + \tau_1\, p} . E(p)$$

En fait,

$$\begin{aligned} s = h * \mathcal{E} \iff\ & S(p) = \frac{1 + \tau_2\, p}{1 + \tau_1\, p}\; E(p),\ \forall\, p \in J \\ \iff\ & (\ \tau_1 p + 1\ )\ S(p) = (\ \tau_2 p + 1\ )\ E(p), \quad \forall\, p \in J \\ \iff\ & (\ \tau_1\, D(\delta) + \delta\ ) * s = (\ \tau_2\, D(\delta) + \delta\ ) * \mathcal{E} \\ \iff\ & \tau_1\, D(s) + s = \tau_2\, D(\mathcal{E}) + \mathcal{E} \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned} s = h * \mathcal{E} \iff \forall\, p \in J,\quad & S(p) = \frac{1 + \tau_2\, p}{1 + \tau_1\, p}\, E(p) \\ \iff\ & \tau_1\, D(s) + s = \tau_2\, D(\mathcal{E}) + \mathcal{E} \end{aligned}}$$

L'"équation" rendant compte du système $\mathcal{S}$ est une équation de convolution dans $\mathcal{D}'_+$, faisant intervenir les distributions dérivées des signaux d'entrée et de sortie, ces signaux étant eux-mêmes des distributions .

Remarques :

■ Plaçons nous dans le cas très courant en Physique où $\mathcal{E}$ est la distribution régulière associée à la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(t) = \mathcal{U}(t)\, f_0(t) + \sum_{i=1}^{n} \mathcal{U}(t-a_i)\, f_i(t-a_i)$, où pour tout i , $0 \le i \le n$, f_i est une somme d'exponentielles polynômes ($a_i > 0$).

On notera λ_i le saut éventuel de f en a_i .

En reprenant le principe des démonstrations utilisées dans le tome 1 chapitre C (Fonctions de Transfert), on établit que s est une distribution régulière associée à une fonction g du même type que f et que :

$$\forall\, p \in J \quad S(p) = \frac{1 + \tau_2 p}{1 + \tau_1 p} E(p) \iff \left\{ \begin{array}{l} \forall\, t \in [0;a_1[\cup[a_1;a_2[\cup\ldots\cup[a_n;+\infty[\\ \tau_1 \dfrac{dg}{dt}(t) + g(t) = \tau_2 \dfrac{df}{dt}(t) + f(t) \\ \qquad\qquad \text{et} \\ g \text{ continue sur } [\ 0\ ;\ +\infty\ [\text{ sauf} \\ \text{éventuellement en chacun des} \\ a_i \text{ où elle présente un saut} \\ \sigma_i = \dfrac{\tau_2}{\tau_1} \lambda_i \\ \qquad\qquad \text{et} \\ g(0+) = \dfrac{\tau_2}{\tau_1} f(0+)\ . \end{array} \right.$$

Ceci montre que contrairement à l'équation de convolution

$$\tau_1 D([g]) + [g] = \tau_2 D([f]) + [f]$$

l'équation $\tau_1 \frac{dg}{dt} + g = \tau_2 \frac{df}{dt} + f$ ne rend pas totalement compte du système. *Ces deux équations ne sont pas équivalentes.*

Il ne faut pas les confondre .

■ Dans le chapitre 1 (Introduction), nous avons vu que si l'entrée ou la sortie ne sont plus des fonctions aucune équation différentielle ne peut évidemment servir de modèle au phénomène physique.

Avec le système précédent, si par exemple $\mathcal{E} = \delta$, alors on a vu que la sortie s =h est :

$$h = \frac{\tau_2}{\tau_1}\left(\delta + \left(\frac{1}{\tau_2} - \frac{1}{\tau_1}\right) \left[e^{-\frac{t}{\tau_1}} . \mathcal{U}(t) \right] \right) .$$

Il est bien clair que $\frac{d\mathcal{E}}{dt}$ et $\frac{ds}{dt}$ n'ont aucune signification puisque ni $\mathcal{E}$ ni s ne sont des fonctions de t !

En résumé, la réponse impulsionnelle h du système $\mathcal{S}$ étant une distibution de $\mathcal{D}'_+$ admettant pour transformée de Laplace la fonction $p \longrightarrow \frac{1 + \tau_2 p}{1 + \tau_1 p}$, alors le système est modélisé par l'équation dans $\mathcal{D}'_+$: $\tau_1 D(s) + s = \tau_2 D(\mathcal{E}) + \mathcal{E}$ sans autre condition .

Nous allons généraliser le résultat obtenu sur cet exemple .

2) Systèmes dont la fonction de transfert isomorphe est une fonction rationnelle

a) Réponse impulsionnelle d'un tel système

■ La fonction de transfert isomorphe H d'un tel système est définie par :

$$H(p) = \frac{b_m p^m + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + \dots + a_1 p + a_0}$$

pour p appartenant à un certain J_α, α étant celle des racines de $a_n p^n + \dots + a_1 p + a_0 = 0$ qui a la plus grande partie réelle.

■ H(p) se décompose en la somme d'un polynôme de degré $m - n$ lorsque $m \geq n$ et d'une somme d'éléments simples de la forme $\frac{A}{(p - \beta)^k}$, β étant un pôle complexe de H(p).

L'original d'un polynôme $c_r p^r + \dots + c_1 p + c_0$ est :

$c_r D^{(r)}(\delta) + \dots + c_1 D(\delta) + c_0 \delta \in \mathcal{D}'_+$,

et chaque terme $\frac{A}{(p - \beta)^k}$ admet pour original

$$\left[\frac{A}{(k-1)!} t^{k-1} e^{\beta t} \mathcal{U}(t) \right] \in \mathcal{D}'_+ .$$

Un tel système admet pour réponse impulsionnelle

$$h = \mathcal{L}^{-1}(H) \in \mathcal{D}'_+,$$

h est donc la somme de distributions de la forme $c_k D^{(k)}(\delta)$ et de distributions de la forme $\left[\frac{A}{k!} t^k e^{\beta t} \mathcal{U}(t) \right]$

où $k \in \mathbb{N}$ et $A \in \mathbb{C}$, $c_k \in \mathbb{C}$, $\beta \in \mathbb{C}$.

b) Equation de convolution

■ Soit $w \in \mathcal{D}'_+$ admettant une transformée de Laplace W, si $U = \frac{1}{W}$ est la transformée de Laplace d'une distribution u, $u \in \mathcal{D}'_+$, alors : $\forall\ p \in J_\alpha$, $U(p)\ W(p) = 1$ donc $u * w = \delta$ (III.3, Théorème). w admet un inverse de convolution u et cet inverse u est unique dans $\mathcal{D}'_+$.

■ Soit w admettant pour transformée de Laplace

$$W : p \longrightarrow \frac{1}{a_n\, p^n + \ldots\ldots + a_1\, p + a_0}$$

La distribution $u \in \mathcal{D}'_+$, $u = a_n\ D^{(n)}(\delta) + \ldots\ldots + a_1\ D(\delta) + a_0\ \delta$ est donc un inverse de convolution de w.

■ Posons alors $v = b_m\ D^{(m)}(\delta) + \ldots + b_1\ D(\delta) + b_0\ \delta$

Soit h la distribution de $\mathcal{D}'_+$ admettant

$$H : p \longrightarrow \frac{b_m\, p^m + \ldots + b_1\, p + b_0}{a_n\, p^n + \ldots + a_1\, p + a_0}$$ comme transformée de Laplace, on a donc $h = w * v$, il en résulte l'équivalence :

$$s = h * \mathcal{E} \Leftrightarrow s = (\ w * v\ ) * \mathcal{E}$$

Si $\mathcal{E} \in \mathcal{D}'_+$ alors $(\ w * v\ ) * \mathcal{E} = w * (\ v * \mathcal{E}\ )$, la convolution étant associative dans $\mathcal{D}'_+$.

donc $\forall\ \mathcal{E} \in \mathcal{D}'_+$, $s = h * \mathcal{E} \Leftrightarrow s = w * (\ v * \mathcal{E}\ )$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow u * s = u * \Big(\ w * (\ v * \mathcal{E}\ )\ \Big) \\ &\Leftrightarrow u * s = (\ u * w\ ) * (\ v * \mathcal{E}\ ) \\ &\Leftrightarrow u * s = \delta * (\ v * \mathcal{E}\ ) \end{aligned}$$

Il en résulte que : $\forall\, \mathcal{E} \in \mathcal{D}'_+$, $u * s = v * \mathcal{E} \Leftrightarrow s = h * \mathcal{E}$.

Donc $\forall\, \mathcal{E} \in \mathcal{D}'_+$,

$s = h * \mathcal{E}$

$$\Leftrightarrow \left(a_n D^{(n)}(\delta)+..+a_1 D(\delta)+a_0\delta\right) * s = \left(b_m D^{(m)}(\delta)+..+b_1 D(\delta)+b_0\delta\right) * \mathcal{E}$$

$$\Leftrightarrow a_n D^{(n)}(s) +..+ a_1\ D(s) + a_0\ s = b_m D^{(m)}(\mathcal{E}) +..+ b_1\ D(\mathcal{E}) + b_0\ \mathcal{E}$$

c) <u>Conclusion</u>

Soit $\mathcal{S}$ un système de convolution

$$\mathcal{E} \longrightarrow \underset{\mathcal{S}}{\boxed{\ h\ }} \longrightarrow h * \mathcal{E}$$

où $h \in \mathcal{D}'_+$ *admet pour Transformée de Laplace la fonction* H

définie sur $J \subseteq \mathbb{C}$ *par* $H(p) = \dfrac{b_m\ p^m + \ldots + b_1\ p + b_0}{a_n\ p^n + \ldots + a_1\ p + a_0}$

et $\mathcal{A}$ *l'ensemble des signaux admissibles pour* $\mathcal{S}$.

- $\forall\, \mathcal{E} \in \mathcal{A}$, $s = h * \mathcal{E}$

- $\forall\, \mathcal{E} \in \mathcal{A} \cap \mathcal{D}'_+$,

$$s = h * \mathcal{E} \Leftrightarrow a_n D^{(n)}(s)+..+a_1 D(s) +a_0 s = b_m D^{(m)}(\mathcal{E})+..+ b_1 D(\mathcal{E}) + b_0\mathcal{E}$$

- $\forall\, \mathcal{E} \in \mathcal{A} \cap \mathcal{D}'_+$, $\mathcal{E}$ *admettant en outre une transformée de Laplace* E *définie sur* $J' \subseteq \mathbb{C}$ *alors* s *admet une transformée de Laplace* S *définie sur* $J \cap J'$ *et :*

$$s = h * \mathcal{E} \Leftrightarrow \forall\, p \in J \cap J',\ S(p) = H(p)\ E(p)$$

d) Remarques :

▸ On peut démontrer directement que si $w \in \mathcal{D}'_+$ admet un inverse de convolution $u \in \mathcal{D}'_+$, alors cet inverse est unique.

En effet, soit $u_1 \in \mathcal{D}'_+$ tel que $w * u = w * u_1 = \delta$ alors $u * (w * u) = u * (w * u_1)$, la convolution étant associative dans $\mathcal{D}'_+$, on obtient $(u * w) * u = (u * w) * u_1$ soit $\delta * u = \delta * u_1$ donc $u = u_1$.

▸ Mais, une distribution peut avoir plusieurs inverses de convolution :

par exemple, $D(\delta)$ admet pour inverse toute distribution $[\mathcal{U}] + [k]$ où $[k]$ est la distribution régulière associée à la fonction constante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$: $t \longrightarrow k$.

En effet $D(\delta) * \left([\mathcal{U}] + [k]\right) = D([\mathcal{U}]) + D([k]) = \delta$ car $D([k]) = 0$

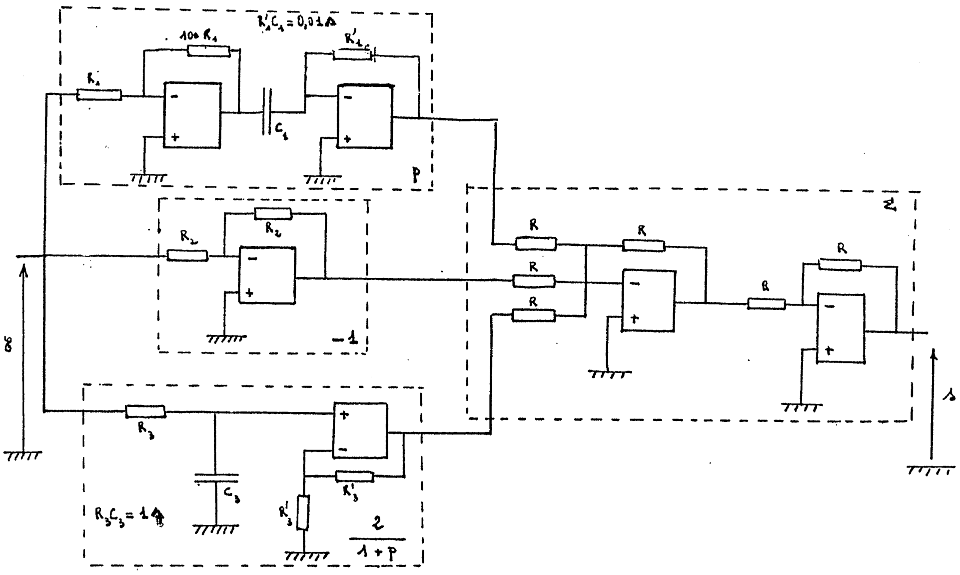
▸ De même il existe des distributions n'admettant aucun inverse de convolution.

On démontre en effet (Cf SCHWARZ, Théorie des Distributions Ch 4, Th 11) que si $\varphi \in \mathcal{D}$, $\forall\ u \in \mathcal{D}'$, $u * [\varphi]$ est une distribution régulière associée à une fonction ψ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ indéfiniment dérivable.

Il s'en suit qu'il n'existe aucune distribution $u \in \mathcal{D}'$ telle que $u * [\varphi] = \delta$.

Remarquons que si φ est nulle sur $]-\infty\ , 0\ [$, alors la distribution régulière $[\varphi]$ associée à la fonction φ appartient à $\mathcal{D}'_+$. Il existe donc des distributions de $\mathcal{D}'_+$ qui n'admettent pas d'inverse de convolution.

3) Exemples



$$H(p) = p - 1 + \frac{2}{1+p} = \frac{p^2+1}{p+1}$$

Soit le système $\mathscr{S}$ représenté par :

$$D(s) + s = D^{(2)}(\mathcal{E}) + \mathcal{E} \Leftrightarrow (D(\delta) + \delta) * s = (D^{(2)}(\delta) + \delta) * \mathcal{E}$$

Sa fonction de transfert isomorphe est $H(p) = \dfrac{p^2 + 1}{p + 1}$ définie sur J_{-1} .

$H(p) = p - 1 + \dfrac{2}{p + 1}$, donc la réponse impulsionnelle est :

$$h = D(\delta) - \delta + 2 \ [\, e^{-t}\, \mathcal{U}(t) \,]$$

Donnons quelques exemples de s connaissant $\mathcal{E}$:

A) *Cas où $\mathcal{E}$ est une "fonction propre"*

a) $\mathcal{E} = \left[e^{-\frac{t}{2}}\right]$. $s = H(-\frac{1}{2}) \left[e^{-\frac{t}{2}}\right] = \frac{5}{2} \left[e^{-\frac{t}{2}}\right]$

b) $\mathcal{E} = [\ \sin \omega t\ ] = \frac{1}{2i}\ [e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}]$,

$$s = -\frac{i}{2}\ H(i\omega)\ [e^{i\omega t}] + \frac{i}{2}\ H(-i\omega)\ [e^{-i\omega t}]$$

$$= -\frac{i}{2}\ \frac{1-\omega^2}{1+i\omega}\ [e^{i\omega t}] + \frac{i}{2}\ \frac{1-\omega^2}{1-i\omega}\ [e^{-i\omega t}]\ .$$

$$= \frac{1-\omega^2}{1+\omega^2}\ [\ -\ \omega \cos \omega t + \sin \omega t]$$

$$= \frac{1-\omega^2}{\sqrt{1+\omega^2}}\ [\ \sin (\omega t - \varphi\ )]$$

avec $\cos \varphi = \dfrac{1}{\sqrt{1+\omega^2}}$ et $\sin \varphi = \dfrac{\omega}{\sqrt{1+\omega^2}}$

B) *Cas où $\mathcal{E} \in \mathcal{D}'_+$*

a) Si $\mathcal{E} = [\sin t\ \mathcal{U}(t)]$, $E(p) = \dfrac{1}{p^2+1}$ définie sur J_0

$S(p) = \dfrac{1}{p+1}$ $\quad s = [\ e^{-t}\mathcal{U}(t)\ ]$.

b) Si $\mathcal{E} = [\cos t\ \mathcal{U}(t)]$, $E(p) = \dfrac{p}{p^2+1}$ définie sur J_0

$S(p) = \dfrac{p}{p+1} = 1 - \dfrac{1}{p+1}$ $\quad s = \delta - [\ e^{-t}\mathcal{U}(t)\ ]$.

c) Si $\mathcal{E} = [\mathcal{U}(t) - \mathcal{U}(t-1)]$, $E(p) = \dfrac{1}{p}(\ 1 - e^{-p})$

$$S(p) = \frac{p^2+1}{p\ (p+1)}(\ 1 - e^{-p})$$

$$= (\ 1 + \frac{1}{p} - \frac{2}{p+1})\ (\ 1 - e^{-p}\ )$$

$$s = \delta + [(1 - 2\ e^{-t})\ \mathcal{U}(t)] - \delta_1 - [(1 - 2\ e^{-(t-1)})\ \mathcal{U}(t-1)]$$

C) *Cas où $\mathcal{E}$ n'appartient pas à $\mathcal{D}'_+$*

Alors il est nécessaire de revenir à $s = h * \mathcal{E}$.
Examinons le cas particulier $\mathcal{E} = [\ V_0\ \mathcal{U}(-t)\ ]$, $V_0 > 0$.

■ Remarquons au préalable que si h_1 est la réponse impulsionnelle d'un système $\mathcal{S}_1$ telle que h_1 est une distribution régulière associée à une fonction f $\mathcal{U}$ et admet une transformée de Laplace H_1 définie sur J, J contenant 0, alors la sortie s correspondant à l'entrée $[V_0\ \mathcal{U}(-t)]$ s'obtient très simplement pour $t < 0$.

En effet, dans ce cas, $\mathcal{E} * h_1 = [g]$, où g est définie par

$$g(t) = V_0 \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ \mathcal{U}(x)\ \mathcal{U}(x-t)\ dx \ = V_0 \int_0^{+\infty} f(x)\ \mathcal{U}(x-t)\ dx\ .$$

□ Si $t \leq 0$, $x \geq 0 \Rightarrow x - t \geq 0$, donc

$$g(t) = V_0 \int_0^{+\infty} f(x)\ dx = V_0\ H_1(0)\ .$$

□ Si $t > 0$, $x - t \geq 0 \Leftrightarrow x \geq t$,

$g(t) = V_0 \displaystyle\int_t^{+\infty} f(x)\ dx$ qui converge puisque $0 \in J$.

$$g(t) = V_0 \int_t^{+\infty} f(x)\ dx = V_0 \int_0^{+\infty} f(x)\ dx \ - V_0 \int_0^t f(x)\ dx$$

$$= V_0\ H_1(0) - V_0 \int_0^t f(x)\ dx$$

Reprenons le système de l'exemple 1, et soit $\mathcal{E} = V_0\ [\mathcal{U}(-t)]$.

$\mathcal{E} * h = \mathcal{E} * (\ D(\delta) - \delta + 2\ h_1\ )$ où on a posé $h_1 = [\ e^{-t}\ \mathcal{U}(t)\ ]$

Appelons H_1 la transformée de Laplace de h_1.

Alors $s = D(\mathcal{E}) - \mathcal{E} + 2\ \mathcal{E} * h_1$.

$\mathcal{E} = V_0\ [\mathcal{U}(-t)]$ donc $D(\mathcal{E}) = -\ V_0\ \delta$ et $2\ \mathcal{E} * h_1 = [g_1]$

où g_1 est définie par

si $t < 0$, $g_1(t) = 2\ V_0\ H_1(0) = 2\ V_0$.

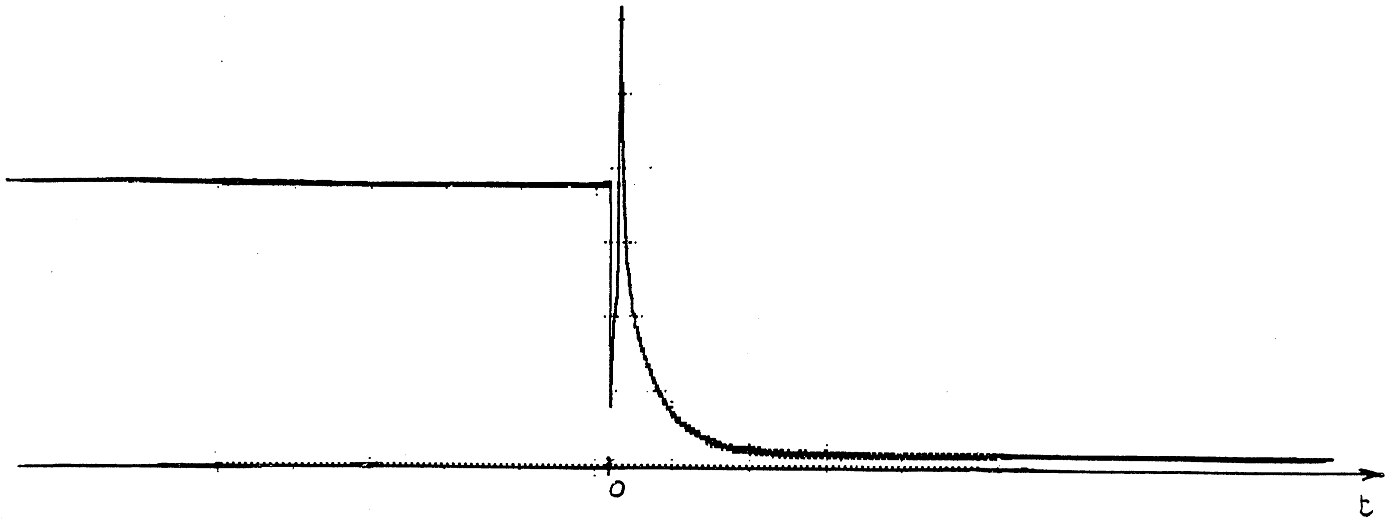
si $t > 0$, $g_1(t) = 2\ V_0 \displaystyle\int_t^{+\infty} e^{-x} dx = 2\ V_0\ e^{-t}$.

En conclusion $s = - V_0\,\delta - V_0\,[\mathcal{U}(-t)] + [g_1(t)]$

$$\text{si } t > 0,\ - V_0\,\mathcal{U}(-t) + g_1(t) = 2\,V_0\,e^{-t}$$

$$\text{si } t < 0,\ - V_0\,\mathcal{U}(-t) + g_1(t) = V_0\ .$$

d'où $s = - V_0\,\delta + V_0\,[\mathcal{U}(-t)] + 2\,V_0\,[e^{-t}\,\mathcal{U}(t)]$



Autre méthode dans ce cas particulier :

$$\mathscr{E} = [\,V_0\,\mathcal{U}(-t)\,] = [V_0] - [\,V_0\,\mathcal{U}(t)\,]$$

et $[V_0]$ est un signal propre $[\,V_0\,e^{pt}\,]$ pour $p = 0$

donc $[V_0] \xrightarrow{\mathscr{S}} H(0)\,[V_0] = [V_0]$

$[\,V_0\,\mathcal{U}\,] \xrightarrow{\mathscr{L}} \dfrac{V_0}{p}$ donc la sortie correspondante à $[\,V_0\,\mathcal{U}\,]$ est

$$\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{V_0}{p}\,\frac{p^2+1}{p+1}\right) \quad \text{et} \quad s = [V_0] - \mathscr{L}^{-1}\left(\frac{V_0}{p}\,\frac{p^2+1}{p+1}\right)$$

$$\frac{V_0}{p}\,\frac{p^2+1}{p+1} = V_0\left(1 + \frac{1}{p} - \frac{2}{p+1}\right)$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left(1 + \frac{1}{p} - \frac{2}{p+1}\right) = \delta + \mathcal{U}(t) - 2\,e^{-t}\,\mathcal{U}(t)$$

donc $s = [V_0] - V_0\,\delta - V_0\,[\mathcal{U}(t)] + 2\,V_0\,[e^{-t}\,\mathcal{U}(t)]$

Il vient $s = - V_0\,\delta + V_0\,[\mathcal{U}(-t)] + 2\,V_0\,[e^{-t}\,\mathcal{U}(t)]$

CHAPITRE 5 : EXERCICES

Exercice 1 :

Soit le système $\mathcal{S}$: $\mathcal{E} \longrightarrow \boxed{\;\mathcal{S}\;} \longrightarrow s$

On appelle $\mathcal{A}$ l'ensemble des signaux admissibles du système $\mathcal{S}$, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{D}'$

A) $\mathcal{E} \in \mathcal{A} \cap \mathcal{D}'_+$ étant donnée, alors $s = \mathcal{S}(\mathcal{E})$ est définie par :

$$2\, D^{(2)}(s) + 16\, D(s) + 50\, s = \mathcal{E}$$

I- 1°) Quelle est la fonction de transfert isomorphe du système $\mathcal{S}$.

2°) En déduire la réponse impulsionnelle h de $\mathcal{S}$.

3°) Calculer de deux manières la sortie s_1 correspondant à l'entrée $\mathcal{E}_1 = \left[\, e^{-t}\, \mathcal{U}(t) \,\right]$

4°) □ a) Calculer de deux manières la sortie s_2 correspondant à l'entrée $\mathcal{E}_2 = D(\delta)$

□ b) Calculer de deux manières la sortie s_3 correspondant à l'entrée $\mathcal{E}_3 = D^{(3)}(\delta)$

□ c) Calculer la sortie s_4 correspondant à l'entrée $\mathcal{E}_4 = [\ \mathcal{U}(-t) \sin t\ ]$

II- 1°) Expliquer pourquoi la distribution régulière $\mathcal{E}_5 = \left[\, e^{-t} \,\right]$ appartient à $\mathcal{A}$.

2°) Quelle est la sortie s_5 correspondant à l'entrée $\mathcal{E}_5$.

3°) Reprendre les deux questions ci-dessus avec $\mathcal{E}_6 = \left[\, e^{-t}\, \mathcal{U}(-t) \,\right]$.

4°) La distribution régulière $\mathcal{E}_7 = \left[e^{-5t} \right]$ appartient-elle à $\mathcal{A}$?

B) On suppose dans cette partie que $\mathcal{E} \in \mathcal{A} \cap \mathcal{D}'_+$ étant donnée $s = \mathcal{S}(\mathcal{E})$ est définie par :

$$D^{(2)}(s) - D(s) - 2\,s = D(\mathcal{E}) + 3\,\mathcal{E}$$

1°) Quelle est la fonction de transfert isomorphe de $\mathcal{S}$.

2°) En déduire la réponse impulsionnelle de $\mathcal{S}$.

3°) Quelle est la sortie s_1 correspondant à l'entrée $\mathcal{E}_1 = \left[e^{-t}\, \mathcal{U}(t) \right]$

4°) La distribution $\mathcal{E}_5 = \left[e^{-t} \right]$ appartient-elle à $\mathcal{A}$?

Exercice 2 :

$\mathcal{E}$ est l'entrée d'un système $\mathcal{S}$ et s la sortie correspondante. Toutes les distributions considérées appartiennent à $\mathcal{D}'_+$ et admettent des transformées de Laplace.

On demande :

a) La fonction de transfert isomorphe du système.

b) La réponse impulsionnelle.

c), d), e) La sortie s.

A) $D^{(2)}(s) - 3\,D(s) + 2\,s = \mathcal{E}$

c) $\mathcal{E} = 4 \left[e^{2t}\, \mathcal{U}(t) \right]$

d) $\mathcal{E} = \left[e^{-t} \sin t\, \mathcal{U}(t) \right]$

e) $\mathcal{E} = D(\delta)$

B) $2\, D^{(2)}(s) + 8\, s = \mathcal{E}$

c) $\mathcal{E} = \left[\, \mathcal{U}(t - a) \,\right], \qquad a > 0$

d) $\mathcal{E} = \delta_a$

e) $\mathcal{E} = D^{(2)}(\delta_a) + 4\, \delta_a + [\, \mathcal{U} \,]$

C) $D^{(3)}(s) - s = \mathcal{E}$

c) $\mathcal{E} = \left[\, e^t\, \mathcal{U}(t) \,\right]$

d) $\mathcal{E} = \left[\, \mathcal{U}(t - 1) - \mathcal{U}(t - 2) \,\right]$

e) $\mathcal{E} = D(\delta) - \delta$

Exercice 3 :

Dans tout l'exercice, les distributions considérées appartiennent à $\mathcal{D}'_+$ et admettent une transformée de Laplace pour $p \in J_0$

A) Résoudre les équations suivantes, où u est une distribution inconnue :

1°) $u * \left(D(\delta) - a\, \delta\right) = \delta$

2°) $u * \left(D^{(3)}(\delta) - 2\, D^{(2)}(\delta) + D(\delta) - 2\, \delta\right) = \delta$

B) Trouver les distributions u et v vérifiant :

$$\begin{cases} u * u - v * v = [\, \mathcal{U}(t) \,.\, t \,.\, \cos t \,] \\ 2\, u * v = [\, \mathcal{U}(t) \,.\, t \,.\, \sin t \,] \end{cases}$$

C) Soit $u_n = (\delta - \frac{1}{n} D(\delta)) * (\delta - \frac{1}{n} D(\delta)) * \ldots (\delta - \frac{1}{n} D(\delta))$

(n facteurs)

1°) Calculer u_n en fonction de δ, $D(\delta), \ldots, D^{(n)}(\delta)$

2°) Calculer $\mathscr{L}(u_n) = F_n$. Déterminer $F(p) = \lim_{n \to +\infty} F_n(p)$

3°) F est-elle la transformée de Laplace d'une distribution ? Laquelle ?

D) 1°) Vérifier que $e^{at} D^{(2)}(\delta) = D^{(2)}(\delta) - 2\, a\, D(\delta) + a^2\, \delta$

2°) Déterminer f, fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ telle que :

$e^{at} D^{(2)}(\delta) * [\mathcal{U}\, f] = \delta$ et $e^{at} D^{(2)}(\delta) * [\mathcal{U}\, f] = [\mathcal{U}(t) \sin t]$

E) Trouver u telle que :

$$D^{(3)}(u) - 2\, D^{(2)}(u) + D(u) - 2\, u = 2\, D(\delta)$$

F) Soit $u = [\mathcal{U}(t)\, |\sin t|]$. Calculer $D^{(2)}(u) + u$.
En déduire $\mathscr{L}(u)$.

G) Résoudre l'équation $u * v = \delta$ dans les cas suivants :

1°) $u = D(\delta) + [\mathcal{U}]$

2°) $u = \delta + [2\, \omega\, \mathcal{U}(t) \cos \omega t]$

3°) $u = \delta + a\, D(\delta) + a^2\, D^{(2)}(\delta) + a^3\, D^{(3)}(\delta)$

4°) $u = \sum_{n \geq 0} (-1)^n\, \delta_n$

5°) $u = [\mathcal{U}(t)\, E(t+1)]$ où E désigne la fonction partie entière.

6°) $u = [\mathcal{U}(t)\, E(t+1)]^{*2}$. Retrouver le résultat du Chapitre 4 exercice 16 2°).

Exercice 4 :

On se propose de résoudre l'équation (E) suivante où f est une fonction inconnue et g une fonction donnée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.

$$(E) \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}, \quad f(t) + \int_0^t f(x)\, e^{x-t}\, dx = g(t)$$

1°) On considère l'équation de convolution dans $\mathcal{D}'_+$:

$$(E_1) \qquad u + u * [e^{-t}\, \mathcal{U}(t)] = v$$

En supposant que les distributions u et v admettent les transformations de Laplace respectives U et V, trouver U(p) en fonction de V(p) .

2°) Résoudre (E_1) dans le cas où $v = \delta$.

3°) Résoudre (E_1) dans le cas où $v = [\mathcal{U}]$.

4°) Résoudre (E_1) dans le cas où $v = [\mathcal{U}(t) \cos t]$.

5°) u est une distribution régulière $[\mathcal{U}\, f]$. Vérifier que f est solution de (E) dans le cas où $g(t) = \cos t$

Exercice 5 :

On se propose de résoudre l'équation (E) suivante où f est une fonction inconnue et g une fonction donnée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.

$$(E) \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}, \quad f(t) + \int_0^t f(x) \cos(t - x)\, dx = g(t)$$

1°) On considère l'équation de convolution dans $\mathcal{D}'_+$:

$$(E_1) \qquad u + u * [\mathcal{U}(t) \cos t] = v$$

En supposant que les distributions u et v admettent les transformations de Laplace respectives U et V, trouver U(p) en fonction de V(p) .

2°) Résoudre (E_1) dans le cas où $v = \delta$.

3°) Résoudre (E_1) dans le cas où $v = [\mathcal{U}]$.

4°) Résoudre (E_1) dans le cas où $v = [\mathcal{U}(t) \sin t]$.

5°) u est une distribution régulière $[\mathcal{U}\, f]$. Vérifier que f est solution de (E) dans le cas où $g(t) = \sin t$

Exercice 6 :

En utilisant la même méthode que pour les exercices 3 et 4, résoudre les équations :

$$(E_1) : \quad \forall\, t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \mathcal{U}(t) \left(5 \cos t + \int_0^t (t - x)\, f(x)\, dx \right)$$

$(E_2) : \quad \forall\, t \in \mathbb{R},$

$$f(t) = \mathcal{U}(t) \left(3t - 4 - 2 \sin t + \int_0^t \left((t - x)^2 - 3(t - x) + 2 \right) f(x)\, dx \right)$$

$$(E_3) : \quad \forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \int_0^t e^{(t - x)}\, f(x)\, dx = \sin t$$

$$(E_4) : \quad \forall\, t \in \mathbb{R}, \quad f(t) + \int_0^t e^{-x}\, f(t - x)\, dx = \cos t$$

Exercice 7 :

Les distributions suivantes admettent-elles une Transformée de Laplace U pour $p \in J \subseteq \mathbb{C}$. Si oui, préciser J et U.

1°) $u = \sum_{n=0}^{+\infty} \left[(t - n)^n\, \mathcal{U}(t - n) \right]$

2°) $u = \sum_{n=0}^{+\infty} \delta_n$

3°) $u = \sum_{n=0}^{+\infty} D^{(n)}(\delta_n)$

4°) $u = \left[\mathcal{U}(t) \sin (at + \varphi) \right]$

5°) $u = [f] \qquad f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \sin at & \text{si } 0 < t < T \\ 0 & \text{si } T < t \end{cases}$

6°) $u = \left[\, 2t\, \left(\mathcal{U}(t) - \mathcal{U}(t-1)\right) + (2-t)\, \left(\mathcal{U}(t-1) - \mathcal{U}(t-2)\right) \right]$

7°) $u = \left[\, b^t\, \mathcal{U}(t) \,\right]$

8°) $u = \left[\, t^t\, \mathcal{U}(t) \,\right]$

9°) $u = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n \left[\, \mathcal{U}(t - nT) \,\right]$

10°) $u = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n \left[\, (t - nT)\, \mathcal{U}(t - nT) \,\right]$

Exercice 8 :

Montrer que, $a > 0$ $\qquad \delta + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n\, \delta_{2an} \xrightarrow{\mathscr{L}} \text{th } ap$

$p \in J_0$

Exercice 9 :

Soit f fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = e^{\lambda t}, \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

1°) Soit $u = \left[\, e^{\lambda t}\, \mathcal{U}(t) \,\right]$. Calculer $D(u)$ puis $D(u) - \lambda\, u$

En déduire la transformée de Laplace de u.

2°) Déduire du 1°) la transformée de Laplace de $[\, \mathcal{U}(t) \sin t\,]$.

3°) Montrer que $\left[\mathcal{U}(t)\, e^{it}\right] * \left[\mathcal{U}(t)\, e^{-it}\right] = [\, \mathcal{U}(t) \sin t\,]$

Exercice 10 :

Soit f fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, périodique, de période 2π, définie par :

$\forall\, t \in [\, 0 \,,\, \pi \,],\ f(t) = \sin t$ et $\forall\, t \in [\, \pi \,,\, 2\pi \,],\ f(t) = 0$

1°) Calculer $D^{(2)}\Big([\, \mathcal{U} f \,] \Big)$

2°) En déduire qu'il existe $a \in \mathbb{C}$ tel que pour $p \in J_a$, $[\, \mathcal{U} f \,]$ admet une transformée de Laplace F et calculer F(p).

Exercice 11 :

Trouver les transformées de Laplace des distributions suivantes :

1°) $\mathcal{E} = \Big[\, (t + \tau)\, \mathcal{U}(t) \tan \varphi \,\Big],\quad \tau \in \mathbb{R}_+$

2°) $\mathcal{E} = \Big[\, \sin t \Big(\mathcal{U}(t) - \mathcal{U}(t - \tau) \Big) \Big],\quad \tau \in \mathbb{R}_+$

On pourra d'abord calculer $\mathcal{E} + D^{(2)}(\mathcal{E})$.

Exercice 12 :

Soit la fonction $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\mathcal{E}(t) = \tan \varphi\ \mathcal{U}(t)\ (t - 3)\ ,\ \text{où } \varphi \in \left]\, 0 \,,\, \frac{\pi}{2} \right[$$

1°) Représenter graphiquement $\mathcal{E}$ ainsi que la fonction $\mathcal{E}'$, fonction dérivée de $\mathcal{E}$, définie sur $\mathbb{R}^*$.

2°) Calculer $D([\mathcal{E}])$, $D^{(2)}([\mathcal{E}])$.

Calculer pour tout entier $n \geq 1$, $D^{(n)}([\mathcal{E}])$.

3°) Soit h la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$h(t) = \mathcal{U}(t - 1) - \mathcal{U}(t - 4)$$

Calculer $s = [h] * [\mathcal{E}]$ et $\sigma = [h] * [\mathcal{E}']$

Exercice 13 :

Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(t) = 0 & \text{si } t < 0 \\ f(0) = 1 & \\ t\, f'(t) + 2 \displaystyle\int_0^t f(x) \sin(t - x)\, dx = \sin t & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

1°) Montrer que F, transformée de Laplace de [f] vérifie l'équation différentielle suivante :

$$(1 - p^2)\, F(p) - p\, (p^2 + 1)\, F'(p) = 1$$

2°) Trouver alors F. (On pourra utiliser le Théorème de la valeur initiale).

Exercice 14 :

$a \in \mathbb{R}_+^*$, $b \in \mathbb{R}_+^*$

1°) f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ et $[\mathcal{U}\, f]$ admet une transformée de Laplace F définie sur J. Déterminer la transformée de Laplace de $[\, \mathcal{U}(at - b)\, f(at - b)\,]$.

2°) Soit $u \in \mathcal{D}'_+$ admettant pour transformée de Laplace F définie sur J. Déterminer la distribution $v \in \mathcal{D}'_+$ admettant pour tout p tel que $\frac{p}{a} \in J$ pour transformée de Laplace $\frac{1}{a}\, e^{-\frac{b}{a}p}\, F(\frac{p}{a})$ dans les cas suivants :

■ $u = \delta_\alpha$, $\alpha > 0$

■■ $u = D^{(n)}(\delta)$

■■■ $u = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n\, \delta_{nT}$, $T > 0$

Exercice 15 :

Soit $[\mathcal{U}f]$ la distribution régulière définie par la fonction f telle que :

$$\forall\ t \in \,]n\ ,\ n+1[,\ n \in \mathbb{Z}, \qquad f(t) = 2^n - 1$$

1°) Soit F la transformée de Laplace de $[\mathcal{U}f]$, trouver F(p) et montrer que F est définie sur $J_{\ln 2}$.

2°) Trouver $v \in \mathcal{D}'_+$ solution de $\quad v * [\mathcal{U}f] = \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{n-1}\ \delta_n$

Exercice 16 :

Trouver l'original dans $\mathcal{D}'_+$ des fonctions F :

1°) $F(p) = \dfrac{1}{p\ (p + 1)}$

2°) $F(p) = \dfrac{3\ p^2 + 4\ p + 2}{p^3 + 2\ p^2 + 1}$

3°) $F(p) = \dfrac{p^3 - 3\ p^2 + 2}{p + 1}$

4°) $F(p) = \dfrac{3\ p^2 + 2}{p^3 + 2\ p^2}\ e^{-p}$

5°) $F(p) = \dfrac{p^3 + 1}{p^2 + 9}\ e^{-3p}$

6°) $F(p) = p - e^{-p} - p^2\ e^{-2p}$

7°) $F(p) = \dfrac{1 + p^3}{p}\ (e^{-p} - e^{-2p})$

8°) $F(p) = \dfrac{4\ p^5 + p^3 + 8\ p^2 + 6}{(1 + 4\ p^2)^2}$

9°) $F(p) = \dfrac{p^5 - 4\ p^3 + 6\ p}{(p^2 - 2)^2}$

10°) $F(p) = \dfrac{p^5 + 3\ p^3 + p^2 + 2\ p + 1}{p\ (p^2 + 1)}$

11°) $F(p) = \sum_{n=0}^{+\infty} p^n\ e^{-nTp}$ $\qquad T > 0$

Exercice 17 :

Dans cet exercice, on pourra se placer dans le cas où l'on considère que F est une application de $I \subseteq \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (cf Tome 1 et Chapitre 5 I-2)-B) Remarques).

1°) Montrer que F telle que $\forall\ p \in \mathbb{R}_+^*$, $F(p) = \frac{1}{4} \ln(1 + \frac{4\alpha^2}{p^2})$ est l'original de $u = \left[\mathcal{U}(t)\ \dfrac{\sin \alpha t}{t} \right]$

2°) Montrer que F telle que $\forall\ p \in \left] |\alpha|\ ,\ + \infty \right[$ $F(p) = \frac{1}{2} \ln \dfrac{p + \alpha}{p - \alpha}$ est l'original de $u = \left[\mathcal{U}(t)\ \dfrac{\text{sh}\ \alpha t}{t} \right]$

3°) a) Calculer $(g * g)(t)$ sachant que $g(t) = \dfrac{\mathcal{U}(t)}{\sqrt{t}}$

b) Soit F définie par $\forall\ p \in \mathbb{R}_+^*$, $F(p) = \dfrac{1}{\sqrt{p}}$ déduire de a) l'original de F.

Exercice 18 :

Soit la fonction $F : p \longrightarrow e^{-\sqrt{p}}$. Pour simplifier le problème, on pourra considérer que F est une fonction de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$

a) Montrer que F vérifie l'équation différentielle

$$4\,p\,F''(p) + 2\,F'(p) - F(p) = 0$$

b) On suppose qu'il existe une fonction f continue sur $\mathbb{R}$ et nulle sur $]-\infty\,,\,0\,]$ telle que $\mathcal{L}([f]) = F$.

■ Montrer que f vérifie l'équation différentielle $4\,t^2\,y'(t) + (6\,t - 1)\,y(t) = 0$ et que la solution générale, sur $]\,0\,,\,+\infty\,[$, de cette équation est définie par

$$y(t) = \frac{\lambda}{t\sqrt{t}}\,e^{-\frac{1}{4\,t}}$$

c) En admettant que

$$\lim_{p \to 0+} \int_0^{+\infty} \frac{\lambda}{t\sqrt{t}}\,e^{-\frac{1}{4\,t}}\,e^{-pt}\,dt = \lambda \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{4\,t}}}{t\sqrt{t}}\,dt$$

montrer que $\lambda \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{4\,t}}}{t\sqrt{t}}\,dt = 1$

Exercice 19 :

Trouver l'original dans $\mathcal{D}'_+$ de la fonction F définie sur J_α par : $T \in \mathbb{R}_+^*$

1°) $F(p) = \dfrac{p}{e^{Tp} - 1}$ $\qquad \alpha = 0$

2°) $F(p) = \dfrac{1}{2 - e^{-Tp}}$ $\qquad \alpha = \frac{1}{T}\ln\frac{1}{2}$

3°) $F(p) = \dfrac{1}{2\,e^{Tp} - 1}$ $\qquad \alpha = \frac{1}{T}\ln\frac{1}{2}$

4°) $F(p) = \dfrac{p^2}{2 - e^{-Tp}}$ $\qquad \alpha = \frac{1}{T} \ln \frac{1}{2}$

5°) $F(p) = \dfrac{1}{(p^2 + 1)(1 - e^{-Tp})}$ $\qquad \alpha = 0$

6°) $F(p) = \dfrac{p^2 + 1}{(2 - e^{-Tp})\, p\, (p - 2)}$ $\qquad \alpha = 2$

Exercice 20 :

Trouver la Transformée de Laplace de $u = \left[\dfrac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} \; \mathcal{U}(t) \right]$

Exercice 21 :

Calculer $(f * f)(t)$ quand $f(t) = \dfrac{\mathcal{U}(t)}{\sqrt{t}}$.

En déduire l'original de $H(p) = \dfrac{1}{\sqrt{p}}$ $\qquad p \in \mathbb{R}_+^*$

Exercice 22 :

u admettant une transformée de Laplace, résoudre dans $\mathcal{D}'_+$

$$D^{(2)}(u) - u = D^{(2)}(\delta)$$

Exercice 23 :

Les distributions considérées admettant des transformées de Laplace, résoudre dans $\mathcal{D}'_+$ les systèmes suivants :

$$1°) \begin{cases} D(u) + u - v = [\, \mathcal{U}(t)\, e^t \,] \\ \\ D(u) + u - D(v) = [0] \end{cases}$$

$$2°) \begin{cases} [\ \mathcal{U}(t)\ e^{t}\ ] * u - D(v) - v = D(\delta) \\ D(u) - u + [\ \mathcal{U}(t)\ e^{2t}\ ] * v = [\ \mathcal{U}(t)\ e^{3t}\ ] \end{cases}$$

$$3°) \begin{cases} D^{(2)}(\delta) * u + D(\delta) * v = \delta \\ D(\delta) * u + D^{(2)}(\delta) * v = [0] \end{cases}$$

$$4°) \begin{cases} D(u) = 2\ u - 3\ v + 8\ \delta \\ D(v) = -\ 2\ u + v + 3\ \delta \end{cases}$$

$$5°) \begin{cases} D(w) - w - 12\ v - 3\ u = [\mathcal{U}(t)] \\ D(v) + 3\ v + u = [t\ \mathcal{U}(t)] \\ D(u) + w - 3\ v - 2\ u = \delta \end{cases}$$

$$6°) \begin{cases} w + D(v) + D(u) = [\mathcal{U}(t)\ e^{t}] \\ D(w) + D(v) + u = \delta \\ D^{(2)}(w) + v + D(u) = D(\delta) - [\mathcal{U}(t)\ e^{2t}] \end{cases}$$

Exercice 24 :

Les fonctions x et y sont nulles sur $]-\infty\ ,\ 0[$. $[x]$ et $[y]$ admettent des transformées de Laplace.

Résoudre dans $\mathcal{D}'_{+}$ les systèmes suivants :

$$1°) \begin{cases} [x'] + [y'] = [t\ \mathcal{U}(t)] \\ [x''] - [y] = [e^{-t}\ \mathcal{U}(t)] \end{cases}$$

avec : x continûment dérivable sur $\mathbb{R}_{+}$

y continue sur $\mathbb{R}_{+}$

$x(0^{+}) = 3,\ x'(0^{+}) = 1,\ y(0^{+}) = 0$

$$2°)\ \begin{cases} [x'] + 2\,[y''] = [e^{-t}\,\mathcal{U}(t)] \\ [x'] + 2\,[x] - [y] = [t\,\mathcal{U}(t)] \end{cases}$$

avec : y continûment dérivable sur $\mathbb{R}_+$

x continue sur $\mathbb{R}_+$

$x(0^+) = 0$, $y(0^+) = 0$, $y'(0^+) = 0$

$$3°)\ \begin{cases} [x'] - [y] = [\mathcal{U}(t)] \\ [x] + [y''] = [-\,\mathcal{U}(t)] \end{cases}$$

avec : x continue sur $\mathbb{R}_+$ sauf en 1 où x admet un saut égal à 1

y continue sur $\mathbb{R}_+$

y continûment dérivable sur $\mathbb{R}_+$ sauf en 1 où y' admet un saut égal à -1.

$x(0^+) = 1$, $y'(0^+) = -1$, $y(0^+) = 0$

$$4°)\ \begin{cases} [x'] - [x] - 3\,[y] = [t\,\mathcal{U}(t)] \\ [y'] - [x] + [y] = [0] \end{cases}$$

avec : x continue sur $\mathbb{R}_+$ sauf en 1 où x admet un saut de 1 et en 2 où x admet un saut de -2.

y continue sur $\mathbb{R}_+$ sauf en 1 où y admet un saut de 3

$x(0^+) = 0$, $y(0^+) = 0$

Exercice 25 :

1°) La fonction y de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ est supposée deux fois continûment dérivable sur $[0,+\infty[$ et nulle sur $]-\infty,0[$, $y(0) = 0$.

Trouver y telle que :

$$[t\,y'' - (t+2)\,y' + 3\,y] = [\,(t-1)\,\mathcal{U}(t)\,]$$

2°) La fonction y de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ est supposée deux fois continûment dérivable sur $[0,+\infty[$ et nulle sur $]-\infty,0[$, $y(0)= 0$, $y'(0) = 2$, $y''(0) = 4$.

Trouver y telle que :

$$[\ y''' + 2\ y'' + y' + 2\ y] = [\ -10\ \mathcal{U}(t) \cos t\ ]$$

Exercice 26 :

A) 1°) Résoudre dans $\mathcal{D}'_+$ l'équation :

$i\ D(u) + u = [2\ \mathcal{U}(t) \sin t]$ (avec $i^2 = -1$)

2°) Soit y fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, nulle sur $]-\infty,0[$
Trouver y vérifiant les conditions ci-dessous :

a) y est continue sur $\mathbb{R}_+$

$y(0^+) = 0$

$i\ [y'] + [y] = [2\ \mathcal{U}(t) \sin t]$

b) y est continue sur $\mathbb{R}_+$

$y(0^+) = 1$

$i\ [y'] + [y] = [2\ \mathcal{U}(t) \sin t]$

c) y est continue sur $\mathbb{R}_+$ sauf en 2 où y présente un saut $y(2^+) - y(2^-) = -3\ i$

$y(0^+) = i$

$i\ [y'] + [y] = [2\ \mathcal{U}(t) \sin t]$

B) 1°) Résoudre dans $\mathcal{D}'_+$ l'équation :

$$D^{(2)}(u) + 2\ D(u) + 10\ u = \delta_1$$

2°) Soit y fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, nulle sur $]-\infty,0[$
Trouver y vérifiant les conditions ci-dessous :

a) y est continûment dérivable sur $\mathbb{R}$

$[y''] + 2\ [y'] + 10\ [y] = \delta_1$

b) y est continue sur $\mathbb{R}_+$ sauf en 1 où y présente un saut de 1

y est continûment dérivable sur $[0\ ,\ 1[$ et $]1\ ,\ +\infty[$ sauf en 2 où y' présente un saut de -1.

$y(0^+) = 1$ et $y'(0^+) = 0$

$[y'' + 2\ y' + 10\ y] = \delta_1$

Exercice 27 :

1°) Trouver la distribution régulière $[y] \in \mathcal{D}'_+$ sachant que :

- y est une fonction nulle sur $]-\infty,0[$
- y est continue sur $\mathbb{R}_+$ sauf en 1 où elle admet un saut de 1.
- y est continûment dérivable sur $[0,1[$ et $]1,+\infty[$ et le saut de y' en 1 est égal à 0.
- $[y''] + 3\ [y'] - 4\ [y] = \delta$

2°) Trouver la fonction y de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ sachant que :

- y est nulle sur $]-\infty,0[$
- y est continue sur $\mathbb{R}_+$ sauf en $\frac{\pi}{2}$ où elle présente un saut égal à 1.
- y est continûment dérivable sur $[0,\frac{\pi}{2}[$ et $]\frac{\pi}{2},+\infty[$ sauf en $\frac{\pi}{4}$ où y' admet un saut de -1.
- Le saut de y' en $\frac{\pi}{2}$ est égal à 0
- $y(0) = y'(0) = 0$
- $[y''] - 4\ [y] = [\ \mathcal{U}(t)\ \cos 2t\ ]$

Exercice 28 :

1°) Trouver $u = [\mathcal{U}f]$ sachant que :

- f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+$
- $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$
- $[f''] + [f'] - 2\ [f] = [e^{-2t}\ \mathcal{U}(t)]$

2°) Trouver $u = [\mathcal{U}f]$ sachant que :

- f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ dérivable sur $\mathbb{R}_+$
- f' est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ sauf en 2 où elle présente un saut égal à 1
- $f(0) = f'(0) = 0$
- $[f''] + [f'] - 2\,[f] = [e^{-2t}\,\mathcal{U}(t)]$

Exercice 29 :

1°) Déterminer f fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ telle que :

$$[\mathcal{U}(t)\ f(t)] = [\ \mathcal{U}(t)\ \sin t\ ] * [\ \mathcal{U}(t)\ \mathrm{sh}\ 2t\ ]$$

2°) Montrer que f est solution d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants et second membre nul.

3°) Trouver la solution de l'équation différentielle :

$$y^{(4)} - 3\,y^{(2)} - 4\,y = 0$$

vérifiant les conditions $y(0) = 1$,

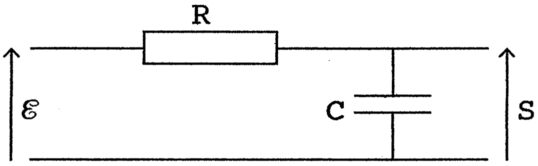
$$y^{(1)}(0) = y^{(2)}(0) = y^{(3)}(0) = 0$$

EXERCICES DE PHYSIQUE :(ne se limitent pas à l'utilisation de la Transformation de Laplace)

Exercice 1

Soit le circuit R C de réponse impulsionnelle

$$h = \left[\frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \mathcal{U}(t) \right]$$



Calculer S pour :

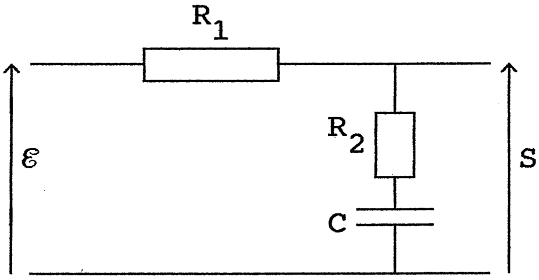
- $\mathcal{E} = [\ E\ \mathcal{U}(t)\ ]$
- $\mathcal{E} = [\ E\ \mathcal{U}(-t)\ ]$
- $\mathcal{E} = [\ E_1\ \mathcal{U}(t) + E_2\ \mathcal{U}(-t)\ ]$

Exercice 2

Soit le circuit de réponse impulsionnelle

$$h = \frac{\tau_1}{\tau_2} \delta + \left[\frac{\tau_2 - \tau_1}{{\tau_2}^2} e^{-\frac{t}{\tau_2}} \mathcal{U}(t) \right]$$

avec $\tau_1 = R_2\ C$ et $\tau_2 = (R_1 + R_2)\ C$



Calculer S pour :

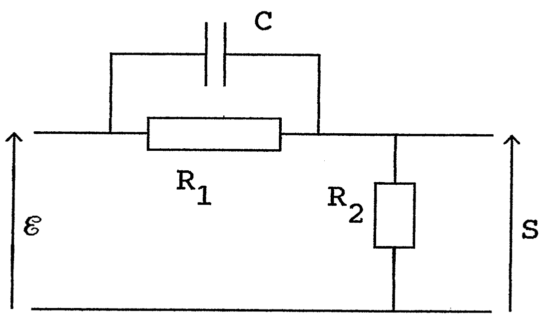
- $\mathcal{E} = [\ E\ \mathcal{U}(t)\ ]$
- $\mathcal{E} = [\ E\ \mathcal{U}(-t)\ ]$
- $\mathcal{E} = [\ E_1\ \mathcal{U}(t) + E_2\ \mathcal{U}(-t)\ ]$

Exercice 3

Soit le circuit de réponse impulsionnelle

$$h = \delta + \left[\frac{\tau_2 - \tau_1}{\tau_1 \tau_2} e^{-\frac{t}{\tau_2}} \mathcal{U}(t) \right]$$

avec $\tau_1 = R_1 C$ et $\tau_2 = \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C$



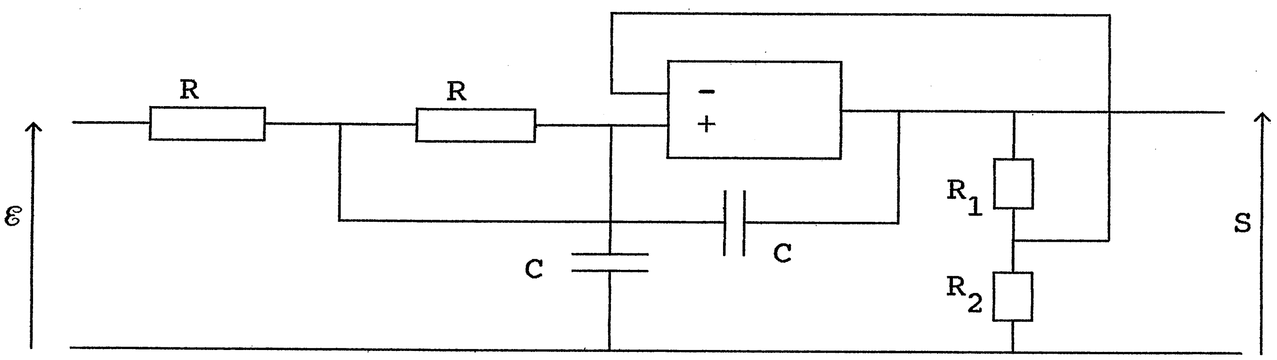
Calculer S pour :

- $\mathcal{E} = [\ E\ \mathcal{U}(t)\ ]$
- $\mathcal{E} = [\ E\ \mathcal{U}(-t)\ ]$
- $\mathcal{E} = [\ E_1\ \mathcal{U}(t) + E_2\ \mathcal{U}(-t)\ ]$

Exercice 4

Soit le circuit de réponse impulsionnelle

$$h = \left[e^{-2t} \sin t \ \ \mathcal{U}(t) \right]$$

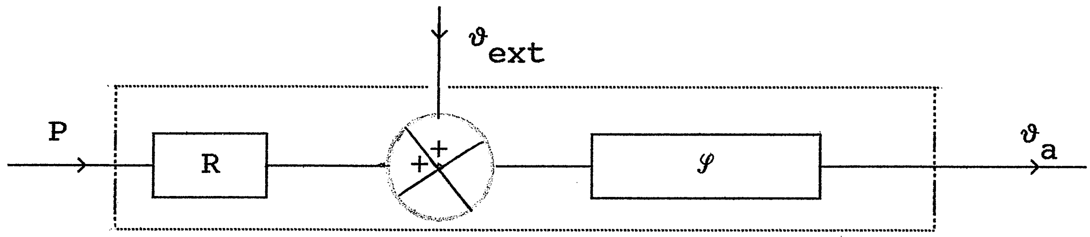


Calculer S pour $\mathcal{E} = [\ E\ \mathcal{U}(-t + 3)\ ]$

Exercice 5

On se propose d'étudier une chaîne de régulation de température.
On note ϑ_c la température de consigne, ϑ_a la température ambiante supposée constante en tous points du local, ϑ_{ext} la température extérieure, R la résistance thermique totale du local, C la capacité calorifique totale du local et P la puissance fournie par le chauffage.

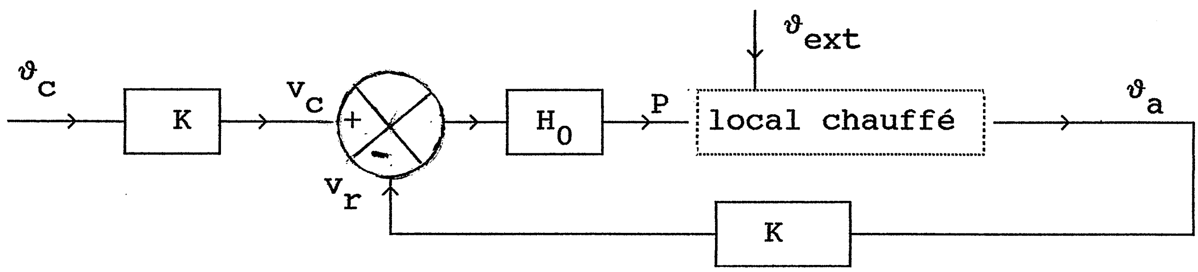
On donne le schéma équivalent au local chauffé :



La réponse impulsionnelle du système $\mathcal{S}$ est :

$$[h(t)] = \left[\frac{1}{\tau}\, e^{-\frac{t}{\tau}}\, \mathcal{U}(t)\right] \qquad \text{avec } \tau = RC.$$

On donne le schéma équivalent à la chaine de régulation :



v_c est la tension de consigne image de ϑ_c : $\quad v_c = K\,\vartheta_c$
v_r est la tension de retour image de ϑ_a : $\quad v_r = K\,\vartheta_a$

On limite l'étude au cas d'une commande proportionnelle de la puissance du chauffage : $\quad P = H_0\,(v_c - v_r)$

I- Montrer que $[\vartheta_a] = [\vartheta_c] * [h_1] + [\vartheta_{ext}] * [h_2]$ avec :

$$h_1(t) = \frac{RKH_0}{1 + RKH_0} \frac{1}{\tau'} e^{-\frac{t}{\tau'}} \mathcal{U}(t) \text{ et } h_2(t) = \frac{1}{1 + RKH_0} \frac{1}{\tau'} e^{-\frac{t}{\tau'}} \mathcal{U}(t)$$

avec $\tau' = \dfrac{\tau}{1 + RKH_0}$

II- A $t = 0$, on passe du régime Nuit (θ_{cn}) au régime Jour (θ_{cj}) :

$$\vartheta_c(t) = \theta_{cn}\ \mathcal{U}(-t) + \theta_{cj}\ \mathcal{U}(t)$$

On suppose que la température extérieure est constante :

$$\vartheta_{ext}(t) = \theta_{ext}$$

$\theta_{cn} = 15^\circ C$, $\theta_{cj} = 19^\circ C$, $\theta_{ext} = 9^\circ C$, $RKH_0 = 19$, $\tau = 3600$ s

On supposera que le système est linéaire et que la puissance de chauffe n'est pas limitée.

Donner l'expression de $\vartheta_a(t)$.
Représenter graphiquement ϑ_a et ϑ_c.

III- A $t = 0$, la température extérieure varie brutalement de θ_{ext1} à θ_{ext2}.

$$\vartheta_{ext}(t) = \theta_{ext1}\ \mathcal{U}(-t) + \theta_{ext2}\ \mathcal{U}(t)$$

On suppose que la température de consigne est constante :

$$\vartheta_c(t) = \theta_{cj}$$

$\theta_{cj} = 19^\circ C$, $\theta_{ext1} = 9^\circ C$, $\theta_{ext2} = 4^\circ C$, $RKH_0 = 19$, $\tau = 3600$ s

On supposera que le système est linéaire et que la puissance de chauffe n'est pas limitée.

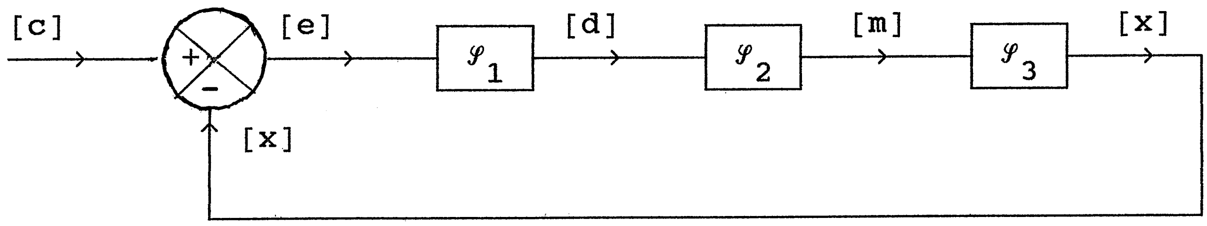
Donner l'expression de $\vartheta_a(t)$.
Représenter graphiquement ϑ_a et ϑ_c.

Exercice 6

Asservissement de la position de la caisse d'une voiture à une consigne.

Un capteur fournit à chaque instant une information sur la position de la caisse x(t) qui est comparée à la consigne de position c(t).

L'electrovanne ajuste alors la masse d'air m dans le cylindre associé à la suspension, de façon à ce que, même en présence de perturbation, x(t) diffère le moins possible de c(t).



$\mathcal{S}_1$ système de fonction de transfert : $p \longrightarrow k$

$\mathcal{S}_2$ système de fonction de transfert : $p \longrightarrow \frac{1}{p}$

$\mathcal{S}_3$ système de fonction de transfert : T_1

On note d(t) le débit massique de l'electrovanne et e(t) le signal d'erreur c(t) - x(t)

I- Système asservi à commande proportionnelle

Soit D la Transformée de Laplace de [d] et E la Transformée de Laplace de [e] alors :

$$\text{si } d(t) = k\, e(t) \quad \text{on a} \quad D(p) = k\, E(p)$$

La masse d'air introduite ou sortie du cylindre est liée au débit par $[\ d(t)\ ] = \left[\frac{dm}{dt}(t) \right]$

Soit T_1 la fonction de transfert associée au système dont la grandeur d'entrée est la masse d'air m(t) et la grandeur de sortie la position de la caisse x(t) définie par :

$$T_1(p) = \frac{T_0}{p+3} \qquad T_0 \in \mathbb{R}$$

1°) Calculer la transmittance en boucle ouverte

$$T_{2BO}(p) = \frac{X(p)}{E(p)} \qquad \text{avec } k\,T_0 = 9$$

2°) Calculer la transmittance en boucle fermée

$$T_{2BF}(p) = \frac{X(p)}{C(p)}$$

3°) Mettre $T_{2BF}(p)$ = sous la forme $T_{2BF}(p) = \dfrac{1}{1 + \dfrac{2\,\xi}{\omega_0}\,p + \dfrac{p^2}{\omega_0^{\,2}}}$

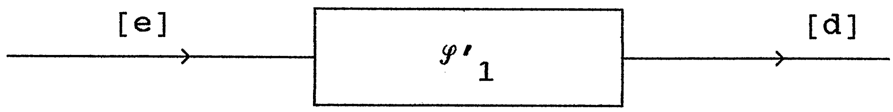
Calculer ξ et ω_0.

4°) La consigne est un échelon $[c] = \left[C_0\ \mathcal{U}\right]$, $C_0 \in \mathbb{R}$.

Soit C la transformée de Laplace de [c], donner C(p), en déduire X(p) et x(t). Représenter c et x.

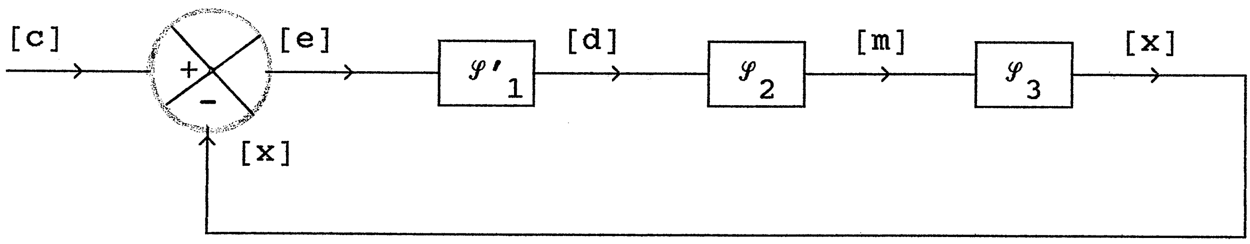
II- Système asservi à commande proportionnelle intégrale

La commande du débit d'air est maintenant proportionnelle intégrale



Soit le système $\mathcal{S}'_1$ de fonction de transfert H_1 définie par :

$$H_1(p) = H_0 + \frac{H_i}{p} \qquad H_0 \in \mathbb{R},\quad H_i \in \mathbb{R}$$



On rappelle que $T_1(p) = \dfrac{T_0}{p + 3}$ $\quad T_0 \in \mathbb{R}$

1°) Calculer la transmittance en boucle ouverte

$$T_{3BO}(p) = \frac{X(p)}{E(p)} \qquad \text{avec } H_0\, T_0 = 1$$

$$H_i\, T_i = K$$

2°) Calculer la transmittance en boucle fermée

$$T_{3BF}(p) = \frac{X(p)}{C(p)}$$

Mettre $T_{3BF}(p)$ = sous la forme $T_{3BF}(p) = \dfrac{K + p}{K + p + 3\,p^2 + p^3}$

3°) Pour $K = 3$, montrer que la fonction de transfert du système en boucle fermée est définie par :

$$T_{3BF}(p) = \frac{1}{p^2 + 1}$$

Si $[c] = \left[c_0\, \mathcal{U}\right]$, trouver l'original $[x]$ de X.

Si $[c] = \delta$, trouver l'original $[x]$ de X.

4°) Pour $K = \dfrac{1}{27}$, montrer que la fonction de transfert du système en boucle fermée peut s'écrire :

$$T_{3BF}(p) = \frac{p + \frac{1}{27}}{\left(p + \frac{1}{3}\right)\left(p^2 + \frac{8}{3}\,p + \frac{1}{9}\right)}$$

Montrer que les pôles de T(p) sont des réels négatifs. Décomposer $T_{3BF}(p)$ en éléments simples.

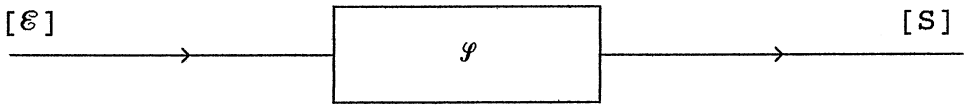
Si $[c] = \left[c_0\, \mathcal{U}\right]$ trouver l'original x de X.

D'après Sujet B.T.S. Electronique 1987 (Physique) et B.T.S. CIRA 1990 (Maths).

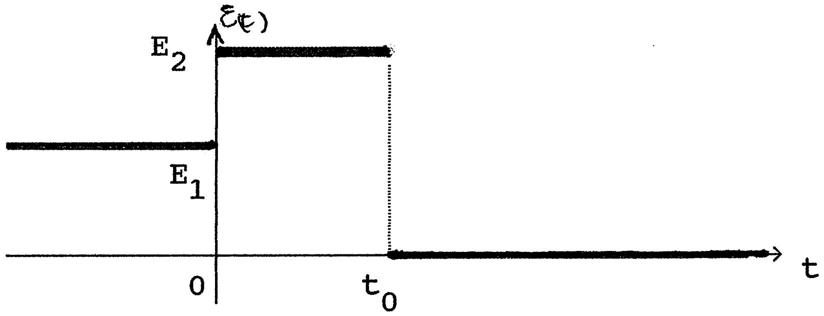
Exercice 7

Soit le système $\mathcal{S}$ de fonction de transfert isomorphe

$$H(p) = H_0 \frac{1 + \tau_1 p}{1 + \tau_2 p} \qquad \text{avec } 0 < H_0 < 1 \quad \text{et } \tau_1 > \tau_2$$



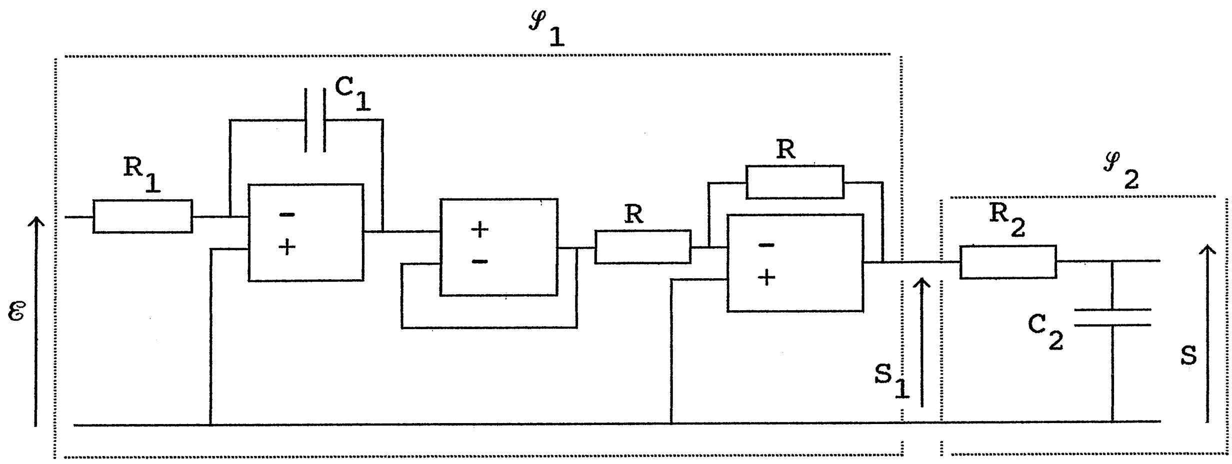
Le signal d'entrée $\mathcal{E}$ n'est pas nul pour $t < 0$



En décomposant ce signal en une fonction propre du système et un signal nul pour $t < 0$, calculer la sortie $S(t)$ sur $]-\infty, 0[$, $[0, t_0[$, $[t_0, +\infty[$.

Exercice 8

Soit le système



$$\xrightarrow{[\mathcal{E}]} \boxed{\mathcal{S}_1} \xrightarrow{[S_1]} \boxed{\mathcal{S}_2} \xrightarrow{[S]}$$

Fonction de transfert de $\mathcal{S}_1$: $\dfrac{1}{\tau_1 \, p}$ avec $\tau_1 = R_1 \, C_1$

Fonction de transfert de $\mathcal{S}_2$: $\dfrac{1}{1 + \tau_2 \, p}$ avec $\tau_2 = R_2 \, C_2$

Soit le signal d'entrée $\mathcal{E}(t) = E \, \mathcal{U}(t) - E \, \mathcal{U}(t - t_0)$

Calculer $S_1(t)$ et $S(t)$.

Bibliographie sommaire :

[1] J.M.Arnaudiès et H.Fraysse
Cours de Mathématique 2 - Analyse - Dunod Université 1988
(Ouvrage d'analyse élémentaire pour les classes prépas)

[2] Bayen F. et Margaria C.
Distributions, Analyse de Fourier , Transformation de Laplace
Problèmes de Mathématiques appliquées Tome 3 - Ellipses 1988
(Exercices corrigés niveau 2ème cycle universitaire)

[3] Carbon M., Mary P., Point N. et Vial D.
Exercices résolus de Mathématiques du signal -Dunod Un.1986
(Exercices simples , certains corrigés, correspondant à Reinhard).

[4] Da Silva Passos A.
Méthodes mathématiques du traitement numérique du signal
Eyrolles 1989
(survol des Maths du signal par un ingénieur)

[5] Gay R.
Signal déterministe . Polycop. Bordeaux I .
(cours de Maîtrise)

[6] Horváth J
Topological Vector Spaces and Distributions Vol.1
Addison-Wesley Publishing company
(Analyse fonctionnelle et distributions Cours de Maîtrise
La théorie, mais une mine d'exemples pour chaque notion)

[7] Reinhard H.
Cours de mathématique du Signal Dunod Université 1986
(Cf. [3] pour les exercices - une approche claire et volontairement élémentaire des distributions . Le plus simple des ouvrages cités sur le sujet) .

[8] Riesz F. et Nagy B.
Leçons d'analyse fonctionnelle Gauthier-Villars 1975
(un grand classique sur l'intégration)

[9] Rudin W.
Analyse réelle et complexe Masson 1980
(un autre classique d'analyse générale)

[10] Rudin W.
Functional Analysis MC Graw-Hill Book company
(un cours très complet des espaces vectoriels topologiques aux opérateurs . Nombreux exercices)

[11] Schwarz L.
Méthodes mathématiques pour les Sciences physiques
Hermann 1987
(Cours de MMP)

[12] Schwarz L.
Théorie des distributions Hermann 1978
(La théorie par son créateur . Aucun exercice)

[13] Zemanian A.H.
Distribution Theory and Transform Analysis
Dover Publications Inc New-York
(Théorie et pratique .tout est démontré sans faire appel à des connaissances savantes en topologie .
Beaucoup d'exercices .Indispensable sur le sujet)