UNIVERSITE BORDEAUX 1

IREM de BORDEAUX

L'Enseignement des Vecteurs

Ont participé à l'élaboration de ce fascicule:

Antoine GOUTEYRON: Lycée René Cassin 64 BAYONNE
Jean-Marie BOUSCASSE: Collège Th. de Viau 47 LE PASSAGE
Marie-Claude CHAUMET: Lycée C. Jullian 33 BORDEAUX
François COLMEZ: Université de PARIS VII
Pierre DAMEY: Université de BORDEAUX I
Bernard PINET: Lycée Technique J.B. de Baudre 47 AGEN
Jacques PUYOU: Lycée Bernard Palissy 47 AGEN
Yves ROBERT: Lycée René Cassin 64 BAYONNE

BORDEAUX 1992

PLAN du FASCICULE

L'Enseignement des vecteurs

1-Translation et vecteurs

Partie A Etude expérimentale

1-Reproduction d'une figure par glissement. TP (01) et TP(02)
2-Mise en place d'un vocabulaire approprié.
3-Bipoints engendrés par une translation. TP(03) et TP(04)
4-Translation d'un bipoint. TP(05)

Partie B Première phase de modélisation

I-DEFINITION.
1-Bipoint
2-Vecteur.

II-ENONCES CODIFIANT LES ACTIONS ET LES EFFETS D'UNE TRANSLATION.
1-Action sur les points.
2-Effet sur les bipoints.
3-Effet sur les figures élémentaires.
4-Action sur les figures élémentaires.
5-Précisions sur les transformées des figures élémentaires.

III-EGALITE DES VECTEURS - EGALITE DES TRANSLATIONS.
1-Remarque préliminaire.
2-Egalité des transformations agissant dans un plan P.
3-Egalité des vecteurs, égalité des translations.
4-Vecteur d'une translation.

IV-PARALLELOGRAMME, MILIEU D'UN SEGMENT, TRANSLATION ET VECTEUR.
1-Echange de points entre deux bipoints de même vecteur.
2-Parallèlogramme, vecteur et translation.
3-Milieu d'un segment, vecteur et translation.

V-CONSERVATION DU PARALLELISME, DE L'ORTHOGONALITE ET DU MILIEU.
1-Conservation du parallélisme et de l'orthogonalité de deux droites.
2-Conservation du milieu d'un segment.

VI-RESULTATS A CONNAITRE.
1-Translatés de polygones.
2-Droite des milieux des côtés d'un triangle.
3-Triangle des milieux des côtés d'un triangle.

VII-TRAVAUX DIRIGES.
1-Médianes d'un triangle.
2-Médiatrices et hauteurs d'un triangle.
3-Parallélogramme des milieux des côtés d'un quadrilatère.
4-Trapèze complet.

EXERCICES 1 à 24

2 - Composée de deux translations Somme de deux vecteurs

Partie A — Etude expérimentale

Partie B — Etude Théorique

I-PREMIERE SEQUENCE DEDUCTIVE.

II-DEUXIEME SEQUENCE DEDUCTIVE.

Partie C — Deuxième phase de modélisation

I-COMPOSEE DE DEUX TRANSLATIONS.

II-SOMME DE DEUX VECTEURS.
1-Définition de la somme de deux vecteurs.
2-Conséquences immédiates.
3-Problème de construction.
4-Relation de Chasles.
5-Parallèlogramme et somme vectorielle.

III-TRAVAUX DIRIGES. TD (01), TD (02) et TD (03)

IV-UTILISATION DU CALCUL VECTORIEL DANS LA RESOLUTION D'UN PROBLEME.

3 - Repérage d'un point dans le plan
Effet d'une translation sur les coordonnées d'un point

I-EFFET D'UN CHANGEMENT D'UNITE DE LONGUEUR SUR LA MESURE D'UN SEGMENT.
1-Etude expérimentale.
2-Institutionnalisation du résultat.

II-REPERAGE D'UN POINT SUR UNE DROITE.
1-Description du procédé.
2-Définitions.
3-Repère normal.

III-ABSCISSE DU MILIEU D'UN SEGMENT.
1-Etude expérimentale.
2-Etude théorique.

IV-ABSCISSE DU TRANSLATE D'UN POINT.
1-Etude expérimentale.
2-Etude théorique.

V-REPERAGE D'UN POINT DANS LE PLAN.
1-Description du procédé.
2-Définitions.
3-Repère orthogonal, repère orthonormal.

VI-COORDONNEES DU TRANSLATE D'UN POINT.
1-Effet d'une translation sur les coordonnées d'un point.
2-Coordonnées du milieu d'un segment.

4 - Le Calcul vectoriel

Partie A Le plan Vectoriel

I-INTRODUCTION.

II-IDENTIFICATION DU PLAN VECTORIEL P AU PLAN P MUNI D'UN POINT ORIGINE.
1-Pourquoi munir le plan P d'un point "origine"?
2-Image d'un vecteur dans un plan pointé.
3-Notation $\vec{u}$. Convention d'emploi.
4-Identification du plan vectoriel $\vec{P}$ au plan pointé P_o.

III-NOUVELLE NOTATION D'UNE TRANSLATION.

Partie B Addition vectorielle

I-PROPRIETE DE L'ADDITION VECTORIELLE.
1-Somme de deux vecteurs.
2-Somme de trois vecteurs.
3-Opposé d'un vecteur.
4-Différence de deux vecteurs.

II-REGLES DE CALCUL CONCERNANT L'ADDITION VECTORIELLE.

Partie C Multiplication d'un vecteur par un nombre réel

I-REPRESENTATION DE R: LA DROITE NUMERIQUE REELLE.
1-Correspondance entre l'ensemble des points d'un axe et R.
2-Représentation de R.
3-Distance de deux réels.

II-PRODUIT D'UN VECTEUR PAR UN NOMBRE REEL: INTRODUCTION.
1-Triangles homothétiques, propriété de Thalès.
2-Etude du problème réciproque.
3-Les vecteurs $\vec{u} + \vec{u}$, $\vec{u} + \vec{u} + \vec{u}$, ..., $-\vec{u}$, $(-\vec{u}) + (-\vec{u})$, ...

III-PRODUIT D'UN VECTEUR PAR UN NOMBRE REEL: MODELISATION.

1-Vecteurs colinéaires.
2-Produit d'un vecteur par un nombre réel. Coefficient de colinéarité.
3-Propriété de Thalès
4-Ensemble des vecteurs colinéaires à un vecteur non nul. Droite vectorielle.
5-Les trois aspects d'une droite D munie d'un repère (O,I):
Le domaine géométrique. Le domaine numérique. Le domaine vectoriel.

IV-PROPRIETES DE LA MULTIPLICATION D'UN VECTEUR PAR UN NOMBRE REEL.

1-Etude expérimentale.
2-Etude théorique.
3-Règles usuelles du calcul vectoriel.

V-COMPLEMENTS.

1-Extension du langage vectoriel.
2-Deux savoir-faire essentiels.
3-Redécouverte d'une propriété des triangles homothétiques.
4-Caractérisations vectorielles du milieu d'un segment.
5-Caractérisation vectorielle du centre de gravité d'un triangle.
6-Effet d'une projection sur le coefficient de colinéarité de deux vecteurs.

VI-COORDONNEES D'UN POINT DANS UN REPERE; D'UN VECTEUR DANS UNE BASE.

1-Etude "en parallèle" dans P et dans $\vec{P}$.
2-Définitions.
3-Expression des coordonnées des vecteurs $\vec{u} + \vec{v}$, $\lambda.\vec{u}$ et $\overrightarrow{AB}$.
4-Expression de la norme d'un vecteur, de la distance de deux points.
5-Condition analytique de la colinéarité de deux vecteurs.
6-Condition analytique de l'orthogonalité de deux vecteurs.

EXERCICES 30 à 60

ANNEXE 1: Homothéties agissant dans un plan $\mathcal{P}$.

ANNEXE 2: Problèmes de Constructions.

Bibliographie

[1] **FRESNEL Jean**: "Géométrie", I.F.E.,Université de Bordeaux I, (1991)

[2] **GROUPE DE GEOMETRIE**: "Cinq problèmes de Géométrie", IREM de Bordeaux, (1989).

[3] **GROUPE DE GEOMETRIE**: "Activités géométriques en classe de Seconde", IREM de Bordeaux, (1981).

[4] **LEHMANN Daniel, BKOUCHE Rudolphe**: "Initiation à la géométrie", PUF,(1988).

[5] **PAPELIER G.**: "Exercices de géométrie moderne", Vuibert, (1926).

PREAMBULE

L'ENSEIGNEMENT DES VECTEURS

Présentation des motifs et choix didactiques

Le début de l'enseignement des vecteurs qui depuis quelques décennies se fait en fin de collège et en début de Lycée a toujours posé de sérieux problèmes, et les difficultés rencontrées par les élèves ont des répercussions très lointaines. Des enquêtes faites auprès d'étudiants de tous niveaux ont montré que ces concepts étaient mal maîtrisés par bon nombre d'entre eux et plus spécialement lors de leur utilisation en Physique.

Les raisons de cet état de fait sont certainement très nombreuses et nous ne citerons que celles qui nous paraissent les plus importantes, sans toutefois tenter d'établir une hiérarchie.

Notons d'abord que l'introduction des vecteurs est le premier pas de l'algébrisation de la géométrie, le passage de la géométrie "arithmétique" très tributaire des cas de figures à la géométrie algébrisée qui cherche à s'en dégager. Ce passage n'est sans doute pas mis en scène d'une manière suffisamment explicite et cette lacune est aggravée par la disparition de cette transition dans le domaine numérique (cf Y.CHEVALLARD).

Les vecteurs sont souvents "expliqués" par des dessins sans qu'on donne aux élèves l'occasion de manipuler un véritable nouveau concept mathématique (à rapprocher de l'introduction dans les années 70 des relations binaires par des descriptions du genre "relations bouclées" qui portaient en fait sur les représentations dessinées de ces relations). Comment s'étonner alors que les élèves confondent le concept et sa ou ses représentations ? D'autant plus que l'écoute du discours des enseignants dans ce domaine révèle un malheureux mélange du vocabulaire géométrique (qui se réfère aux ensembles de points) et du vocabulaire algébrique (qui se réfère aux ensembles de vecteurs). On peut se demander d'ailleurs si l'idée fondamentale selon laquelle les vecteurs constituent un langage et ne sont en aucun cas des figures ponctuelles est vraiment répandue parmi les enseignants (si oui, ils sont d'autant plus coupables des confusions de langage qu'ils perpétuent dans leurs classes).

Pendant les années 70, les vecteurs ont été introduits comme classes d'équivalence de couples de points. Or on sait à quel point cette démarche abstraite (car elle oblige à définir une partie de l'ensemble des parties du produit cartésien du plan ponctuel par lui-même, puis à munir cet ensemble d'une structure de groupe construite à partir de manipulations et de dessins matérialisant des figures du plan ponctuel) est très difficilement conçue, même par des élèves d'âge nettement plus élevé.

Dans le travail présenté ici nous avons cherché à surmonter ces difficultés en nous fixant les objectifs suivants :

* Présenter les vecteurs comme des grandeurs organisées en un langage de type algébrique qui est plus précis que celui des longueurs car il prend en compte non seulement une information de type longueur mais aussi des informations sur la direction et sur le sens.
Ce langage permet des calculs puissants qui sont valables indépendamment des cas de figures, mais pour y parvenir il est souvent nécessaire pendant toute la période de construction de passer en revue ces différents cas de figures.
* Ménager, à chaque étape de la construction de ce langage, des exercices d'utilisation pour en conforter la signification et l'utilité.
* Faire correspondre à chaque vecteur une représentation unique (mentale et graphique) ; et corrélativement éviter les expressions qui induisent l'idée de multiplicité.

Ces objectifs nous ont conduits à faire les choix que nous allons présenter et justifier maintenant.

Analyse mathématique préalable :

Pour faire cette anlyse nous allons utiliser des concepts et un vocabulaire qu'il est totalement hors de question d'enseigner à des débutants ; dans cette description qui n'est absolument pas une construction nous faisons appel à tous les outils mathématiques utiles sans nous préoccuper de la manière et de l'ordre de leur introduction dans une théorie mathématique.

1- Présentation des concepts de longueur et de vecteur

L'un et l'autre de ces concepts résultent d'une modélisation mathématique de certains protocoles expérimentaux qui visent à repérer les positions relatives de deux points du plan

* a) Dans le cas des ***longueurs***, les expériences commencent par la comparaison d'objets rectilignes (des bandes de papier ou des bâtons par exemple) en déplaçant l'un des objets ou son calque pour l'amener en coïncidence avec l'autre ou une partie de l'autre selon certaines règles.
Dans le modèle les objets sont représentés par des segments de droite ou même par des paires de points du plan, les déplacements par des isométies du plan. En termes plus savants nous faisons opérer le groupe des isométries positives sur l'ensemble des paires de points. Les conclusions de ces manipulations peuvent être de deux sortes : comme, étant données deux paires de points {A,B} et {C,D}, il existe une isométrie positive qui transforme la demi-droite [AB) en la demi-droite [CD),

si l'image de B est D on dit que les segments [AB] et [CD] ont même longueur, ce qu'on écrit AB = CD

tandis que si l'image de B est entre C et D on dit que la longueur de [AB] est inférieure à la longueur de [CD], ce qu'on écrit AB < CD (ou si D est entre C et l'image de B que la longueur de [CD] est inférieure à la longueur de [AB], écrit CD < AB).

Remarque : comme nous utilisons un groupe et que chaque isométrie conserve l'ordre des points sur une droite, le modèle prend bien en compte le fait que le résultat ne dépend pas de la manipulation choisie (on aurait pu transformer A en D ou C en A etc.) et la transitivité des relations ; mais ce n'est pas notre propos ici.

A ce moment nous avons déjà introduit un langage contenant des objets et deux verbes "est égal a" et "est inférieur à" ; mais nous n'avons pas à nous préoccuper de la nature de l'ensemble des longueurs. Ce langage est une première réponse au problème de description de la position relative de deux points.

Dans le but de quantifier cette information, une deuxième série de manipulations - la mise bout-à-bout - va d'abord permettre d'introduire la somme des longueurs (et de montrer que cette somme est bien définie car elle est indépendante des objets utilisés).

Cela conduit à enrichir le langage de l'adverbe plus, de définir sur l'ensemble des longueurs une addition compatible avec l'ordre, qui débouche automatiquement sur la multiplication par les naturels et l'introduction dans le langage de mots comme fois ou multiplié par ; c'est la quantification souhaitée.

Le prolongement de la multiplication à certains rationnels devient une nécessité si l'on veut comparer toutes les longueurs à l'une d'entre elles prise pour unité (celle d'un certain objet choisi comme étalon), c'est-à-dire introduire une mesure.

Remarquons que le prolongement aux réels positifs n'est pas directement lié aux manipulations et à la communication d'informations ; c'est un problème que pose l'étude du modèle. C'est là que se situerait la frontière, si tant est qu'elle existe, entre théorie physique et théorie mathématique.

Ce langage des longueurs permet de préciser la position d'un point B par rapport à un point A d'une manière unique sur une demi-droite d'origine A, avec deux possibilités sur une droite passant par A mais d'une infinité de façon dans le plan.

Le langage des vecteurs va permettre de lever cette ambigüité.

* b) Dans le cas des ***vecteurs***, comme il s'agit de préciser l'information donnée par la longueur sur la position relative de deux points du plan, les protocole expérimantaux devront être plus précis, c'est-à-dire faire appel à

des manipulations correspondant dans le modèle à un sous-groupe du groupe des isométries positives, à savoir le groupe des translations.

Nous ne nous étendrons pas maintenant sur le détail de ces manipulations, puisque c'est l'objet de la publication.

2 - Analyse comparative des concepts de longueur et de vecteur

Dans le cas des longueurs le groupe opérant dépend de trois paramètres (deux réels et un élément du tore de dimension 1). D'une manière précise, mais totalement inutile pour notre propos, on a :

(a,b,u) suivi de (c,d,v) = (a.cos(v)-b.sin(v)+c,a.sin(v)+b.cos(v)+d,u+v).

Tandis que la structure des longueurs est isomorphe à l'ensemble des réels positifs muni de l'ordre et de l'addition.

Dans le cas des vecteurs le groupe opérant, comme la structure des vecteurs, est isomorphe à (RxR,+).

Dans le cas des longueurs il n'y a aucun risque de confusion entre le groupe opérant et la grandeur géométrique visée ; par contre, dans le cas des vecteurs, la structure étant la même, la différenciation ne peut se faire que par la "nature", c'est-à-dire par les références les représentations graphiques ou mentales et l'utilisation.

Il est clair que dans le cas des longueurs il est hors de question, avec des débutants, de prendre pour objet d'enseignement le groupe opérant. Par contre, pour les vecteurs, un problème se pose : a priori les deux notions sont sur un même niveau de complication mathématique et le choix de l'antériorité ne peut résulter que de considérations didactiques prenant en compte l'acquis des élèves, la signification qu'ils pourront donner aux problèmes qui leur seront proposés les représentations mentales et graphiques plus ou moins évidentes qu'ils construiront et des ojectifs d'enseignement plus généraux. Il faut aussi se poser la question des rapports entre les deux notions.

Quelques considérations didactiques

1 - Les deux types de vecteurs

Nous venons de dire que aussi bien le groupe opérant que l'ensemble des objets que les manipulations permettent de construire (les vecteurs) ont la même structure. Cela se traduit dans le langage mathématique par l'utilisation des expression vecteur d'une translation et vecteur d'un couple de points. (On retrouve là un problème du même type que le double signe

moins de la construction de Z ; d'ailleurs les deux problèmes d'enseignement ont beaucoup de similitude car il s'agit dans un cas comme dans l'autre de construire une structure vectorielle à partir d'une structure affine associée).

Les deux questions qui se posent sont :

* lequel introduire en premier ?
* à quel moment introduire le second ? et comment ? (séparément ou non)

La réponse traditionnelle à ces deux questions est d'introduire d'abord les vecteurs des couples de points car on en a besoin ensuite pour nommer les translations.

Mais cette raison n'est pas raisonnable car s'il est vrai qu'une translation est définie par un couple de points, il est tout aussi simple d'utiliser la notation de ce couple de points dans la dénomination de la translation : écrire $t_{(A,B)}$ et dire translation qui transforme A en B n'est pas plus compliqué que d'écrire $t_{\overrightarrow{AB}}$ et de dire translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$. Ce n'est qu'après une étude déjà avancée (en classe de seconde) que l'on rencontre des vecteurs nommés par une seule lettre et alors la notation $t_{\vec{u}}$ se justifie.

Comme nous voulons bien faire apparaître qu'un vecteur est un porteur d'informations il s'agit de créer des situations ou ces informations seront essentielles, et naturellement regroupées, pour la poursuite de l'activité.

C'est pourquoi nous avons choisi, en accord avec l'éthymologie (conducteur) de prendre comme situation initiale des dessins obtenus par translation (déplacement d'un papier calque), plutôt que la description d'une figure ou les trois informations concernant la direction, le sens et la longueur ne sont pas naturellement indissociables.

C'est donc aux élèves eux-mêmes de prendre conscience du groupement de ces informations et de s'en servir dans leur travail. Le rôle de l'enseignant est alors de mettre en évidence ce fait et d'introduire nom et notation

Comme il n'y a pas de risque de confusion entre une transformation et un dessin, on supprime au départ le risque de voir assimiler un vecteur à une figure.

Par contre cela impose une élaboration de la notion de transformation, en partant de la pratique antérieure qui est celle de la transformation des figures pour aller vers la transformation point par point du plan vers lui-même.

L'exploration expérimentale des propriétés de ces transformations, institutionnalisées en plusieurs étapes, conduit à l'idée que les translations sont entièrement définies par une information à trois composantes

inséparables : direction, sens et longueur ; cette information pouvant être obtenue, de façon économique, par la donnée d'un point et de son transformé. C'est à cette triple information qu'on donne le nom de vecteur. Comme cette information peut être apportée par un couple de points nous parlerons du vecteur du couple de points (comme on parle de la longueur d'un segment). Dire que deux couples de points (A,B) et (C,D) ont même vecteur c'est dire qu'ils apportent la même information, qu'ils définissent la même translation, laquelle peut être notée indifféremment $t_{(A,B)}$ ou $t_{(C,D)}$. Il sera alors légitime de noter ce vecteur en utilisant un assemblage ou figurent les lettres A et B ou bien les lettres C et D (comme on note une droite donnée aussi bien par (MP) ou par (KT), dans le cas où les quatre points M, P, K, T sont alignés). La flèche de la notation classique est destinée à rappeler que dans l'information que désigne ce symbolisme les composantes direction et sens sont ce qu'il y a de nouveau par rapport à la longueur. Bien évidemment une égalité telle que "$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$" (lue "vecteur AB est égal à vecteur CD") sert à dire que le vecteur écrit à gauche du signe "est égal à" est le même que celui écrit à droite, c'est-à-dire que direction, sens et longueur sont les mêmes pour les deux couples de points (A,B) et (C,D) (qui eux peuvent être distincts) ; que le premier point de chacun de ces deux couples de points a pour image le deuxième point par une même translation qui peut être définie indifféremment par l'un ou l'aute de ces couples de points. Ultérieurement on complétera l'utilisation de l'égalité en montrant qu'il est possible, dans toute écriture, de substituer l'un des symbolismes à l'autre : bref, c'est une égalité respectable !

Comme on le voit, il n'est pas nécessaire dans cette démarche, décisive, d'associer au vecteur un graphisme quelconque qui pourrait le faire passer pour une figure.

2 - Les transformations

Ayant choisi de travailler sur les translations, il nous faut partir des habitudes des élèves concernant les transformations ; leur savoir-faire porte sur la transformation de figures par réflexion, symétrie centrale ou rotation. Le problème didactique à résoudre est de fabriquer des situations dans lesquelles les élèves aient une activité les conduisant à utiliser ce qui se révélera être une translation. Nous commençons par des activités de dessin utilisant un calque ; c'est une activité familière aux élèves, mais la nouveauté porte sur la manière de manipuler le calque : par glissement dont on doit préciser la DSL * Mais dès la troisième étape le calque doit devenir inopérant de façon que les élèves soient obligés de faire appel aux connaissance déjà institutionnalisées

<u>La mise en oeuvre des options précédemment définies</u>

* *Direction Sens Longueur*

Le début de l'enseignement, destiné à donner aux mots translation et vecteur les sens que nous souhaitons, se fait en trois étapes comportant chacune

* une situation initiale débouchant sur une phase d'explicitation et d'institutionnalisation
* des exercices systématiques d'application et de renforcement des notions dégagées et l'étude de cas particuliers (pour ceux-ci nous renvoyons à la brochure).

Première étape

Il s'agit de bâtir une situation répondant aux deux objectifs suivants :
* En premier lieu mettre en évidence le fait que le déplacement du calque qui va permettre de résoudre le problème de dessin est déterminé par la donnée d'une direction, d'un sens et d'une longueur ; et que ces informations peuvent être agréablement concentrées par la donnée d'un couple de points
* En deuxième lieu utiliser et expliciter le fait que par une translation chaque élément géométrique constitutif de la figure de départ (segment, cercle, triangle,..) est transformé en élément de même nature de la figure d'arrivée, que tout point d'un élément est transformé en un point de l'élément transformé, et que, pour obtenir les transformés des éléments, il suffit de tracer avec précision les images de quelques points (les "points clés"). Mais il n'est pas question de chercher à minimiser le nombre de ces "points clés". Ce deuxième objectif n'est pas spécifique aux translations.

On demande à tous les élèves le même travail (reproduire un motif à l'aide d'un calque), mais on ne leur fournit pas les informations nécessaires de la même façon : toutes les feuilles distribuées portent le même motif placé de la même façon dans la feuille ; sur certaines feuilles un élément du motif est déja reproduit, sur d'autres seul un point est reproduit et sur les dernières aucun point n'est reproduit, mais une droite indiquant la direction de la translation est dessinée (les élèves devront demander l'information qui leur manque aux copains mieux informés).
On crée ainsi les conditions d'une discussion sur l'information globale nécessaire et sur la façon la plus économique de la donner : par un couple de points conducteur.

Le deuxième objectif sera plus facilement atteint si on précise aux élèves qu'ils doivent produire un dessin précis en utilisant les instruments, et si l'enseignant leur montre le calque de l'ensemble du dessin qu'il a lui même réalisé pour contrôler leur travail.

Deuxième étape

L'objectif est de faire expliciter que la même transformation peut être déterminée par différents couples de points conducteurs, à condition qu'ils aient même direction, sens et longueur et que tout couple de points constitué d'un point et de son transformé peut servir de couple de points conducteur pour la transformation.

Même type d'activité mais on fournit aux élèves un calque trop petit pour traiter toute la figure à la fois ; ils doivent donc changer de couple de points conducteur en cours de dessin ; la fourniture, après coup, d'un calque de grande dimension permet de contrôler la validité du procédé (il est à prévoir que les écarts inévitablement constatés sur certains dessins seront interprétés soit comme de légères erreurs de tracés soit comme des erreurs de mise en oeuvre de la méthode).

A la fin de cette étape on institutionnalise vecteur d'une translation et vecteur d'un couple de points.

Troisième étape

L'objectif est d'utiliser puis d'expliciter le fait que le transformé par une translation d'un bipoint est un bipoint de même vecteur.

Cette fois le motif à reproduire est longiligne (par exemple des cercles dont les centres sont tous sur une même droite) et la transformée de cette droite est donnée ainsi que le transformé du centre d'un cercle ; mais on ne fournit pas de calque. Les élèves n'ont pas d'autre possibilité pour obtenir les transformés des différents centres de cercles que de les repérer par rapport au point dont ils connaissent le transformé, c'est-à-dire par des vecteurs.

Il est alors possible de faire une modélisation complète et de montrer la cohérence du modèle par quelques démonstrations déductives. Dès lors les manipulations de calques seront remplacées par des constructions aux instruments, justifiées par les résultats déjà acquis. Il est également opportun de réécrire dans le nouveau langage certaines propriétés connues telles que milieu d'un segment, configuration du parallélogramme,...

1

TRANSLATIONS et VECTEURS

Partie A ETUDE EXPERIMENTALE

1-Reproduction d'une figure par glissement:

T.P. (01) (voir feuille annexe N°1)

Description de la manipulation

1° Placer une feuille de papier calque -notée feuille N°2- sur la feuille N°1 donnée. Tracer sur la feuille N°2 la droite Δ qui se superpose à la droite (OU) et marquer le point O de Δ.

2° Décalquer la figure $\mathcal{F}$ sur la feuille N°2 sans oublier de marquer les points A, B, C, ..., I.

3° Faire glisser la droite Δ suivant la direction (OU), dans le sens de O vers U, de façon que le point O marqué sur Δ vienne se superposer au point U. En perçant la feuille N°2 avec la pointe d'un compas, marquer sur la feuille N°1, les points A', B', ..., I' situés au dessous des points A, B, ..., I de la feuille N°2.

Questions:

1° L'usage d'une feuille de papier carbone est-il nécessaire pour obtenir sur la feuille N°1 la reproduction -notée $\mathcal{F}'$- de la figure $\mathcal{F}$ décalquée sur la feuille N°2 ? Tracer $\mathcal{F}'$

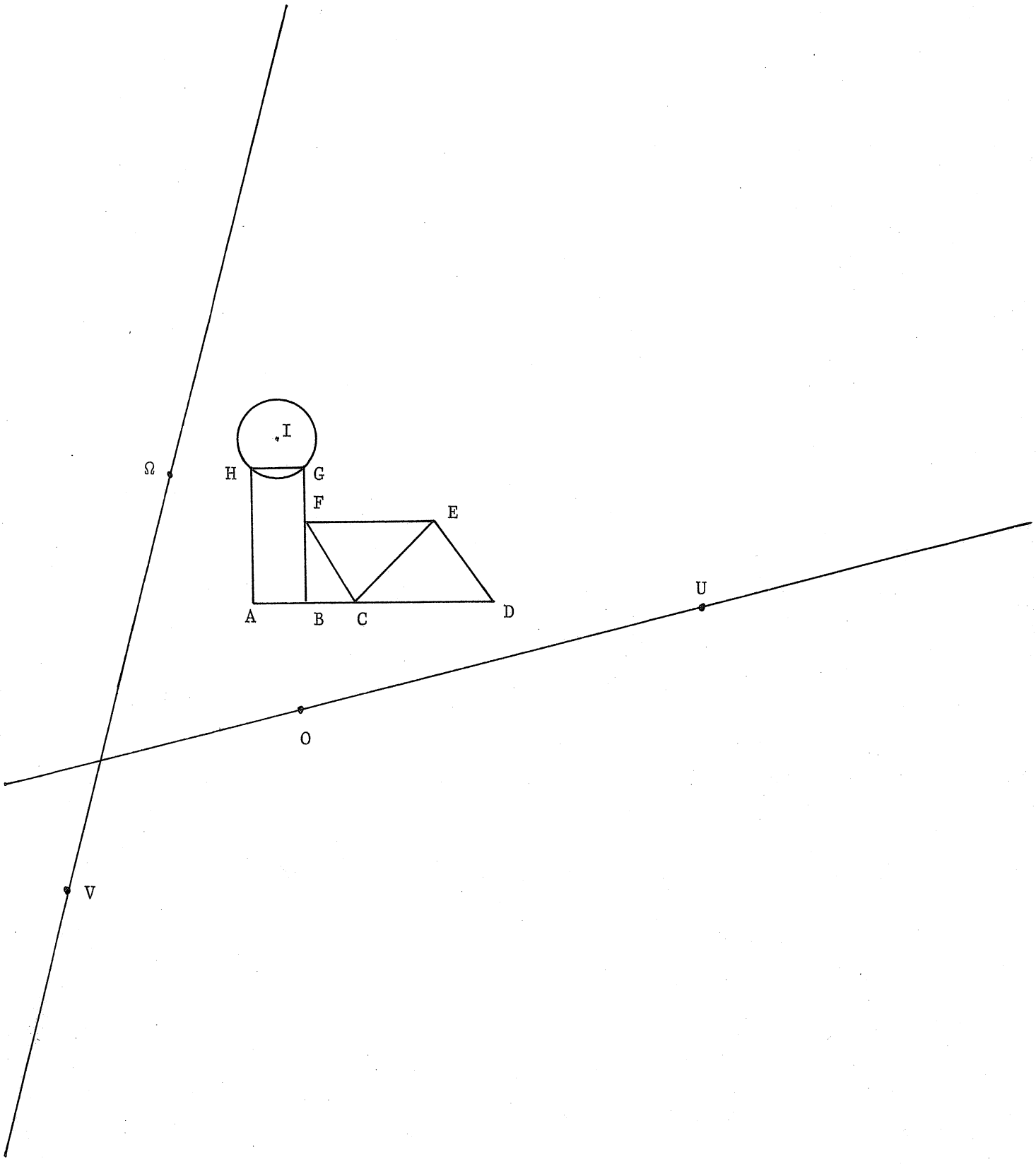
2° Est-il nécessaire de décalquer la figure $\mathcal{F}$ sur la feuille N°2 ? Suffit-il de reproduire quelques "point-clés" de la figure $\mathcal{F}$? Si oui, décrire le procédé qui permet d'obtenir la reproduction $\mathcal{F}'$ de la figure $\mathcal{F}$ sans avoir à décalquer cette figure sur la feuille N°2.

T.P. (02) (voir feuille annexe N°2)

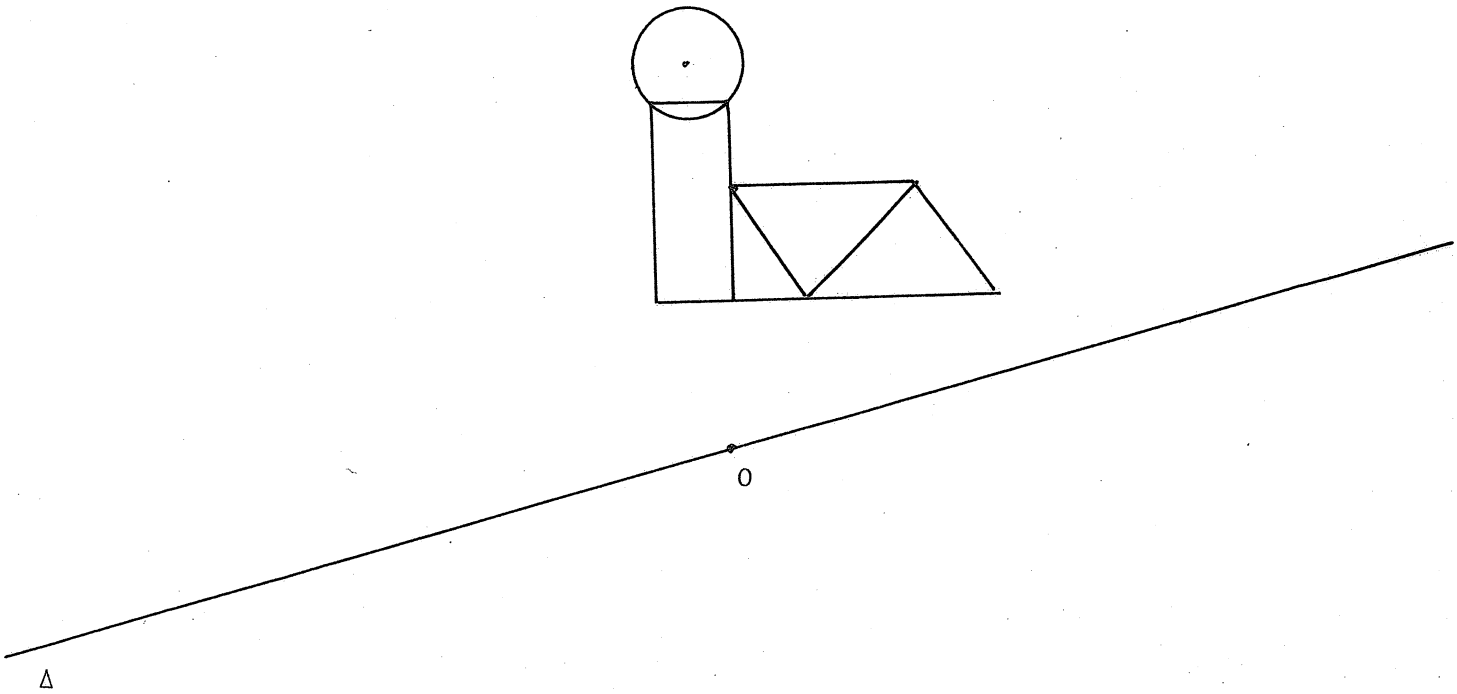
Utiliser le même processus pour tracer sur la feuille N°1 la reproduction $\mathcal{F}''$ de la figure $\mathcal{F}$ par le glissement suivant la direction de (ΩV), dans le sens de Ω vers V et de "longueur" égale à celle de $[\Omega,V]$.

Commentaires

Les travaux pratiques (01) et (02) ont pour objet d'introduire une nouvelle transformation géométrique: la translation.



Feuille Annexe 1



Feuille Annexe 2

Les élèves de la classe de $4^{ème}$ ont déjà construit des transformées de figures par symétries (axiales ou centrales).

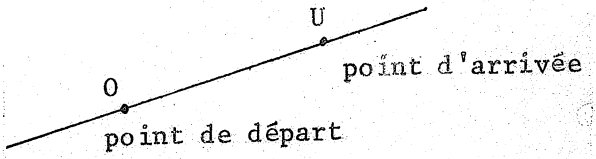
Par expérience, ils savent donc que pour dessiner la transformée d'une figure il suffit de connaître les transformés d'un certain nombre de points de la figure initiale, baptisés "points-clés".

Attention, le but des manipulations précédentes n'est pas d'optimiser le coût de la reproduction d'une figure, c'est-à-dire de reproduire le minimum de "points-clés" indispensables à la construction de la figure transformée. Il s'agit simplement de mettre en place le concept de translation.

2-Mise en place d'un vocabulaire approprié.

a) Bipoint

Pour déterminer un "glissement", il suffit de donner son point de départ et son point d'arrivée. On connaît alors la direction du glissement, son sens et sa longueur.



Dans la suite de notre étude nous serons amenés à considérer des couples de points rangés dans un ordre préalablement fixé. De tels couples de points sont appelés bipoints.

Le "bipoint O,U" avec { O premier point ou point de départ ; U deuxième point ou point d'arrivée } est noté (O,U).

On le représente graphiquement par un segment fléché, la flèche servant ici à distinguer le deuxième point.

Il importe de remarquer que la donnée d'un bipoint (A,B) avec $A \neq B$ détermine:

1° Une direction : celle de la droite (AB)
2° Un des deux sens de parcours sur cette droite: celui de A vers B
3° Une longueur: celle du segment [A,B]

On dit alors que la direction de la droite (AB), le sens de parcours de A vers B, la longueur du segment [A,B] sont respectivement la direction, le sens, et la longueur du bipoint (A,B).

b) Translation

La transformation géométrique qui lors du T.P. (01) envoie la figure $\mathcal{F}$ sur la figure $\mathcal{F}'$, est déterminée par la donnée du bipoint (O,U) qui fixe la direction du "glissement", son sens et sa longueur. On l'appelle translation de bipoint (O,U). On la note $t_{(O,U)}$.

La figure $\mathcal{F}''$ obtenue lors du T.P. (02) est appelée transformée de $\mathcal{F}$ par la translation $t_{(\Omega,V)}$.

Question:

Quelles remarques peut-on faire quant à la forme et aux dimensions d'une figure et de sa transformée par translation ?

3-Bipoints engendrés par une translation.

T.P. (03) (voir feuille annexe N°3)

Description de la manipulation.

1° Dessiner les bipoints de type (M,M') où M est un point-clé de la figure $\mathcal{F}$ et M' son homologue sur la figure $\mathcal{F}'$.

2° Dessiner les bipoints de type (M,M") où M est un point-clé de la figure $\mathcal{F}$ et M" son homologue sur la figure $\mathcal{F}''$.

Question:

Quelle remarque peut-on faire quant à la direction, au sens et à la longueur des bipoints de type (M,M') ? de type (M,M") ?

T.P. (04) (voir feuille annexe N°4)

Soit $\mathcal{F}$ la figure formée par le triangle ABC et le cercle $\mathcal{C}$ de centre Ω.

Description de la manipulation.

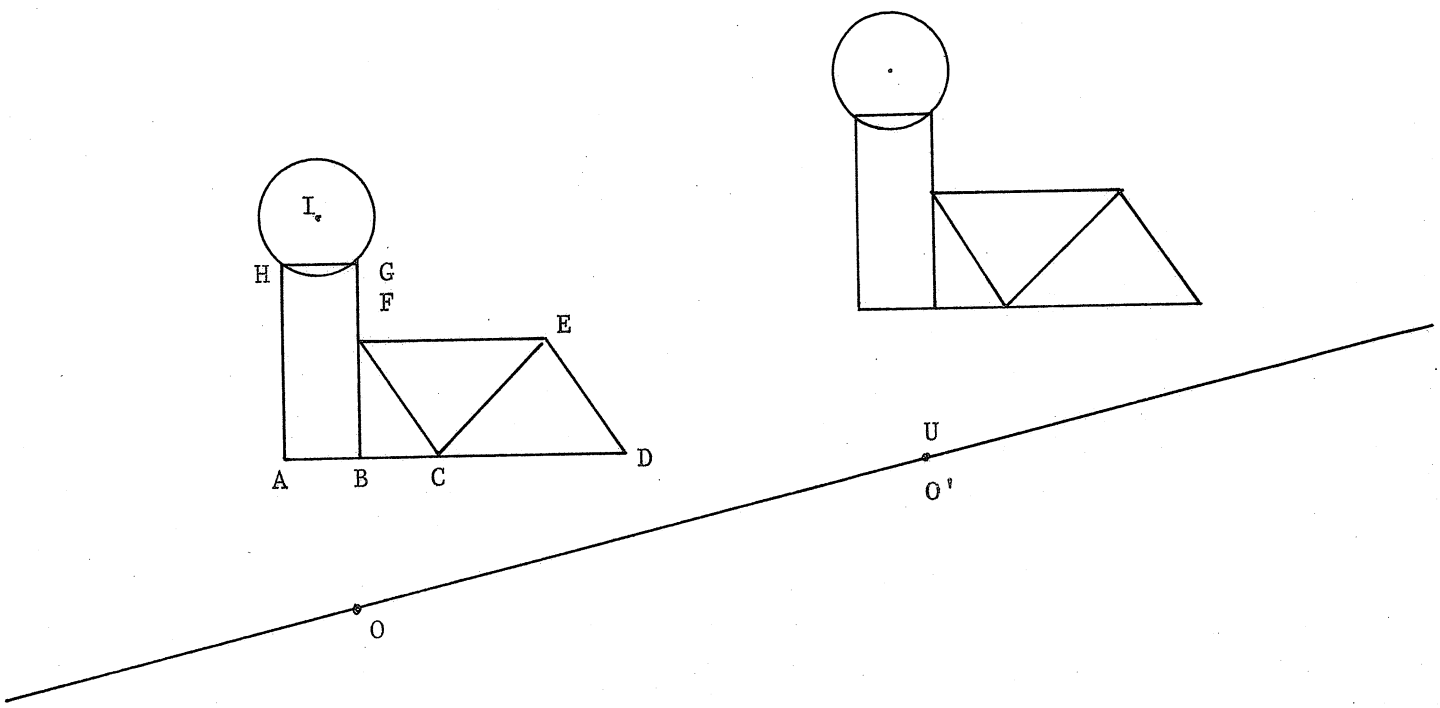
A l'aide d'une feuille de papier calque notée -feuille N°4- rééditer la manipulation décrite dans le T.P. (01) pour:

1° Construire la transformée $\mathcal{F}'$ de la figure $\mathcal{F}$ par la translation $t_{(O,U)}$.

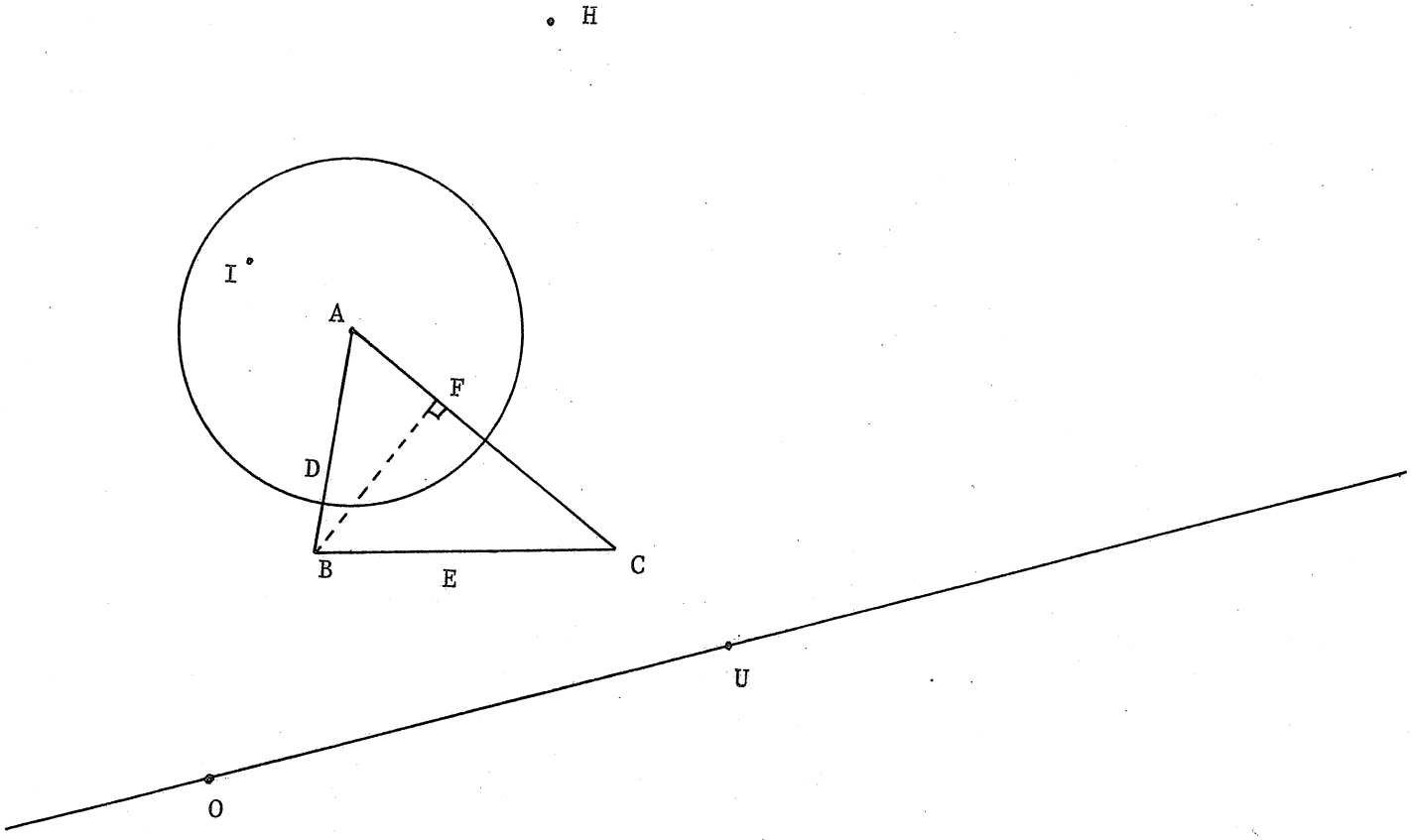
2° Construire les transformés D', E', F', G', H', I', O' et U' des points D, E, F, G. H, I, O et U par la translation $t_{(O,U)}$.

Questions:

1° Quelle particularité présentent les bipoints de type (M,M') où M désigne un des points marqués sur la feuille N°3 et M' son transformé par $t_{(O,U)}$? Ce résultat peut-il se généraliser à n'importe quel point M pris sur la feuille ?



Feuille Annexe 3



Feuille Annexe 4

2° D, E et F sont des points de la figure $\mathcal{F}$. Quelles positions occupent leurs transformés D', E' et F' sur la feuille N°3 ? Ce résultat peut-il se généraliser à n'importe quel point M pris sur la figure $\mathcal{F}$?

3° Quelle est la transformée de la figure $\mathcal{F}$ par la translation $t_{(A,A')}$? par la translation $t_{(B,B')}$? (Vérifier à l'aide de la feuille N°4).

4° Quels sont les transformés des points marqués sur la feuille N°3 par la translation $t_{(A,A')}$? par la translation $t_{(B,B')}$? Les translations $t_{(O,U)}$ et $t_{(A,A')}$ ont-elles la même action sur chacun des points de la feuille N°3 ?

Commentaires

L'objectif des travaux pratiques (03) et (04) est de conduire les élèves aux trois conclusions suivantes:

1° Les bipoints "engendrés" par une translation, c'est à dire les bipoints de type (M,M') où M est un point quelconque et M' son transformé ont même direction, même sens et même longueur que le bipoint qui fixe la translation.

2° Une translation agit sur tous les points du plan. En particulier, chaque point d'une figure se transforme en un point de la figure transformée.

3° Lorsque deux translations sont fixées par des bipoints ayant même direction, même sens et même longueur alors ces translations ont même action sur les figures et sur les points. Autrement dit, elles font le "même travail".

T.P. (05) Translaté d'un bipoint (voir feuille annexe N°5)

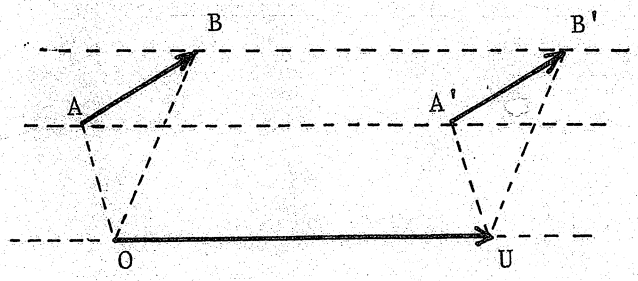
Notre objectif est d'étudier l'effet d'une translation sur un bipoint. Le résultat mis à jour: « une translation transforme un bipoint en un bipoint de même direction, même sens et même longueur » sera institutionnalisé. Il est d'une importance capitale. Il convient donc que les élèves s'imprègnent de sa "véracité universelle" au travers de manipulations répétées.

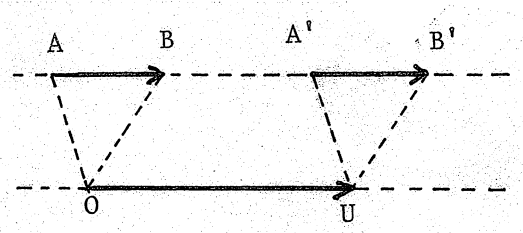
a) Première manipulation. (description sommaire)

En faisant glisser une feuille de papier calque:

1° Construire les transformés A' et B' de A et B par la translation $t_{(O,U)}$..... (O, U, A et B sont donnés).

2° Construire le transformé de A' par la translation $t_{(A,B)}$. Que remarque-t-on ?





- Mise en place d'un vocabulaire approprié. (Oralement)

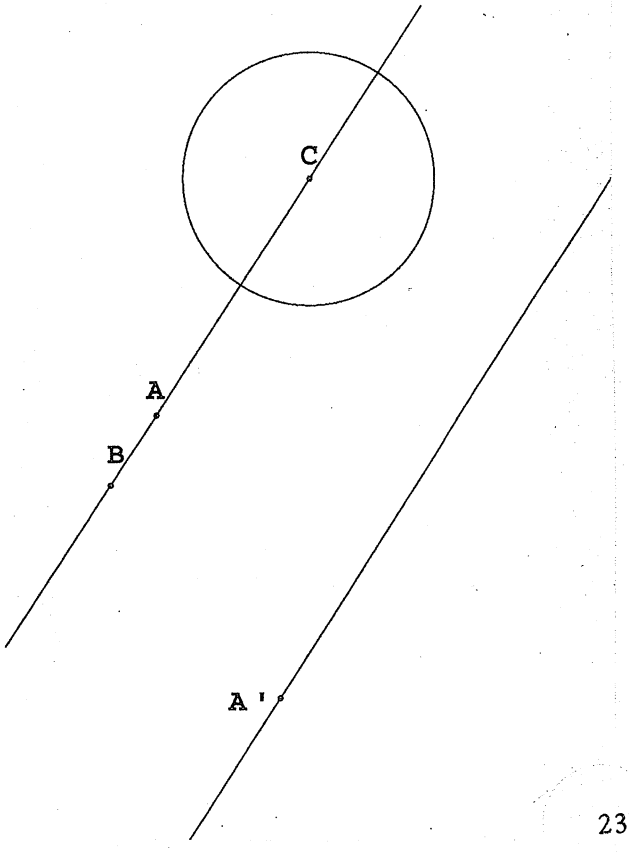
  Pour signifier que A' et B' sont respectivement les transformés des points A et B on dit que le bipoint (A',B') est le transformé du bipoint (A,B).

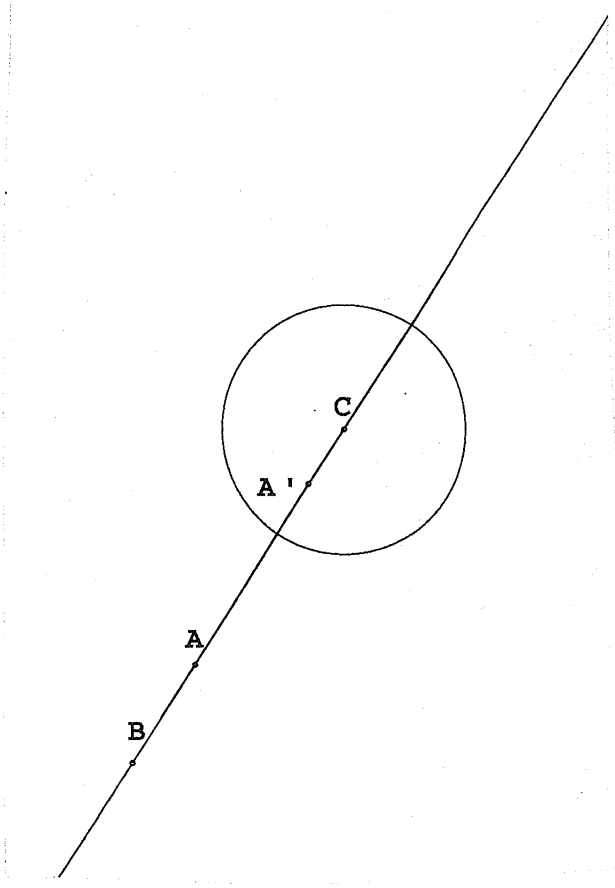
- Question:

  Quel effet produit une translation sur un bipoint ?

a) Deuxième manipulation.

Il s'agit de construire la transformée par translation de la figure $\mathcal{F}$ constituée par une droite Δ, trois points A, B et C de cette droite et un cercle $(\mathcal{C})$ de centre C. On connaît la transformée Δ' de la droite Δ et le transformé A' du point A. On ne dispose plus ici de papier calque. On peut uniquement utiliser les instruments suivants: règle, compas, traceur de parallèles.





Traceur ROLLERTEC

Cet instrument est à recommander aux élèves de Collège et Lycée. Il permet entre autres:

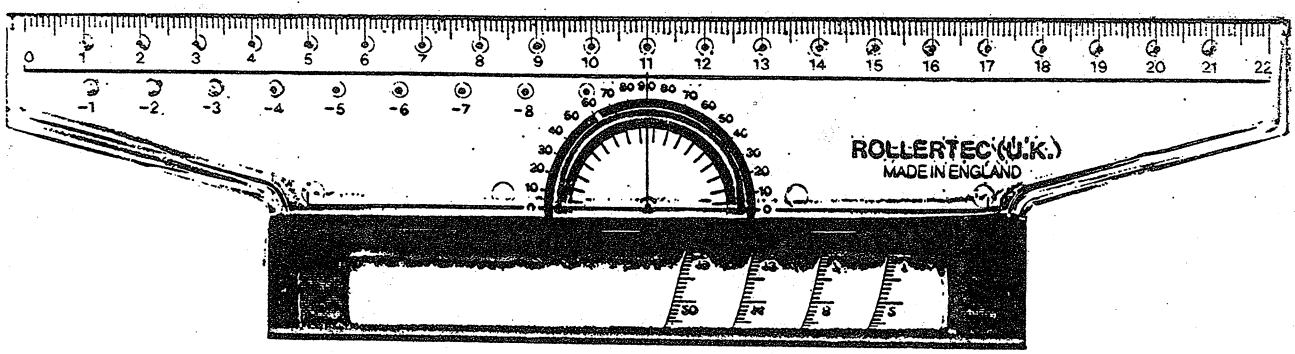
- ❒ de tracer la parallèle à une droite donnée passant par un point donné.
- ❒ de tracer la perpendiculaire à une droite donnée passant par un point donné.
- ❒ d'obtenir une bande à bords parallèles de largeur donnée.

En outre, on peut l'utiliser comme règle et comme rapporteur.

Voici les références du distributeur:

PASSAT FRANCE
95610 ERAGNY SUR OISE

L'appareil est gradué en centimètres, la photo ci-contre en est une réduction.



Partie B

PREMIERE PHASE DE MODELISATION

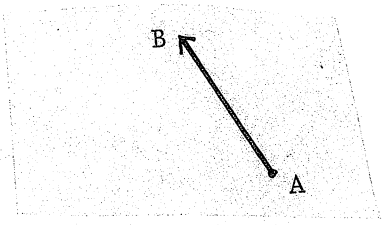
I - DEFINITIONS

Le cadre de notre étude est un plan de l'espace que l'on désigne d'une façon générale par la lettre $\mathcal{P}$. Ses éléments sont des points. Dans l'univers familier d'une salle de classe, il sera matérialisé par le tableau, la feuille de cahier, ...

1-Bipoint

a) Définition, notation, représentation graphique.

- Un bipoint est une liste ordonnée[1] de deux points.



- Le "bipoint A,B" est noté (A,B), on dit que:
  - A est le premier point ou point de départ.
  - B est le deuxième point ou point d'arrivée.
- On représente graphiquement le bipoint (A,B) par un segment fléché.

---

b) Direction, sens, longueur.

Soit A et B deux points d'un plan $\mathcal{P}$. on dit que la direction de la droite (AB), le sens de parcours de cette droite de A vers B, la longueur du segment [A,B] sont respectivement la direction, le sens et la longueur du bipoint (A,B).

c) Egalité: l'écriture (A,B) = (C,D) signifie A = C et B = D.
Attention, le bipoint (A,B) est différent du bipoint (B,A).

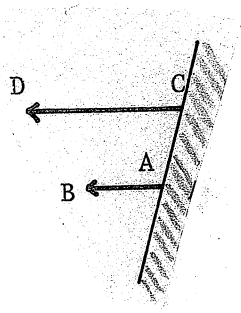
(1) Attention deux points signifie que $A \neq B$.

d) Bipoints de même direction et de même sens.

On dit que deux bipoints (A,B) et (C,D) de même direction sont de même sens pour signifier qu'ils vérifient l'un ou l'autre des critères suivants:

Critère 1

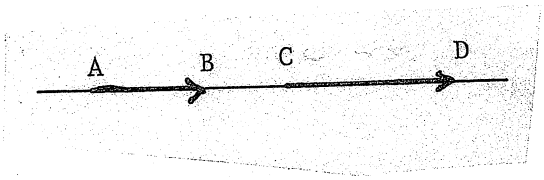
(A,B) et (C,D) ont des supports distincts et leurs deuxièmes points appartiennent au même demi-plan de frontière (AC).



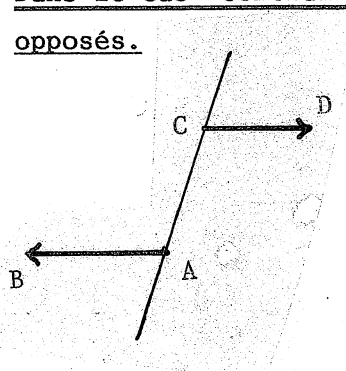
Critère 2

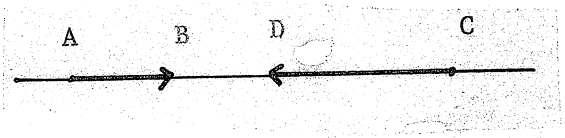
(A,B) et (C,D) sont de même support et fixent, sur ce support commun, le même sens de parcours.

En d'autres termes, l'une des demi-droites [AB) ou [CD) contient l'autre.



Dans le cas contraire (A,B) et (C,D) sont dits de sens opposés.





Attention, le problème qui consiste à savoir si deux bipoints sont de même sens ou non se pose uniquement dans le cas où ces bipoints ont, au préalable, la même direction.

Commentaires.

- En classe de $4^{ème}$ on ne considère que des bipoints (A,B) où A et B sont des points distincts. C'est en classe de Seconde qu'on s'intéressera aux bipoints de type (A,A).
- Les propriétés de réflexivité, symétrie et transitivité des relations:

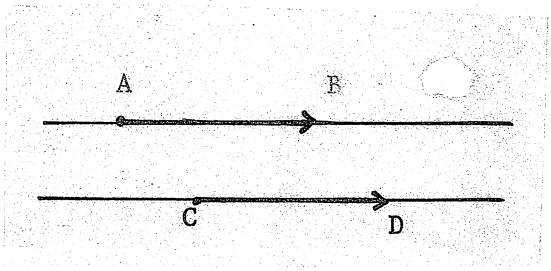
> «avoir même direction et même sens»
> «avoir même longueur»
> «avoir même direction, même sens et même longueur»

dans l'ensemble des bipoints d'un plan $\mathcal{P}$ n'ont pas à être évoquées et moins encore à être mises en cause devant les élèves. L'expérience prouve d'ailleurs, qu'à leur insu, ils les utilisent sans aucun problème. On considèrera donc que ces propriétés sont définitivement acquises, sans vergogne, ni arrière pensée.

2-Vecteur.

a) Notion de vecteur - Notation - Egalité vectorielle.

- Pour signifier que des bipoints ont même direction, même sens et même longueur on dit qu'ils ont même vecteur.
- Pour désigner le vecteur d'un bipoint (A,B), on adopte le sigle $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AB}$ se lit « vecteur A B »
- Pour signifier que deux bipoints (A,B) et (C,D) ont même vecteur (c'est à dire même direction, même sens et même longueur), on écrit $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ se lit « vecteur A B égale vecteur C D »



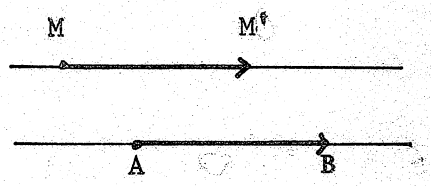
II - ENONCES CODIFIANT LES ACTIONS ET LES EFFETS D'UNE TRANSLATION

1-Action sur les points.

A et B sont deux points fixés d'un plan $\mathcal{P}$.

Enoncé 1

- La translation $t_{(A,B)}$ est une transformation géométrique qui agit sur tous les points de $\mathcal{P}$.
- Par la translation $t_{(A,B)}$ un point quelconque M de $\mathcal{P}$ a pour transformé le point M' de $\mathcal{P}$ tel que le bipoint (M,M') ait même vecteur que le bipoint (A,B) c'est à dire même direction, même sens, même longueur.



Pour signifier que la translation $t_{(A,B)}$ envoie le point M sur le point M' on utilise le schéma suivant: $M \xmapsto{t_{(A,B)}} M'$.

Ainsi les écritures:

$$C \xmapsto{t_{(A,B)}} D \ ; \ A \xmapsto{t_{(C,D)}} B \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$$

ont la même signification.

Chacune d'elles traduit différemment, sous forme succincte, que les bipoints (A,B) et (C,D) ont même direction, même sens et même longueur.

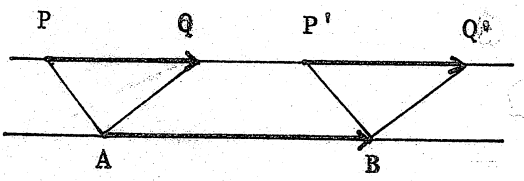
2-Effet sur les bipoints.

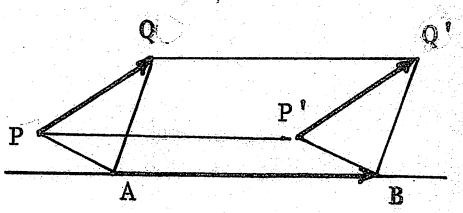
Par définition, le transformé du bipoint (M,N) par une translation est le bipoint (M',N') où M' et N' sont respectivement les transformés des points M et N.

Ceci dit, on admettra le résultat suivant:

Enoncé 2

Une translation transforme un bipoint en un bipoint de même vecteur





Remarque importante.

Les segments [P,Q] et [P',Q'] ayant même longueur, la distance des points P et Q reste invariante par translation. On traduit cette propriété en disant qu'une translation conserve la distance (de deux points).

3-Effet sur les figures élémentaires.

Les résultats qui suivent seront admis.

Enoncé 3

- La transformée d'une droite est une droite.
- La transformée d'une demi-droite est une demi-droite.
- Le transformé d'un segment est un segment.
- Le transformé d'un cercle est un cercle.
- Le transformé d'un demi-plan est un demi-plan.

4-Action sur les figures élémentaires.

Compte tenu des trois énoncés précédents, l'énoncé qui suit fixe l'action d'une translation sur les figures élémentaires.

Enoncé 4

Par une translation, chaque point d'une figure se transforme en un point de la figure transformée.

5-Précisions sur les transformées des figures élémentaires.

Ces précisions peuvent être obtenues par voie déductive à partir des énoncés précédents. Elles viendront enrichir la partie du modèle déjà mise en place.

a) Translatée d'une droite.

Il est facile de conjecturer qu'une droite et sa translatée sont parallèles. Le problème à résoudre se pose en ces termes:

Etant donné une droite Δ et un bipoint (O,U), montrer que la transformée de Δ par la translation $t_{(O,U)}$ est une droite Δ' parallèle à Δ.

1ère étape: construction de Δ'.

Deux cas de figure se présentent suivant que Δ et (O,U) ont même direction ou non.

Questions

- Faire une figure illustrant chacune de ces deux éventualités.
- Marquer deux points A et B sur Δ puis construire leurs transformés A' et B' par $t_{(O,U)}$. A quelle figure appartiennent les points A' et B' ? Sur quel énoncé s'appuie votre réponse ? Tracer Δ'.

2ème étape: comparaison de Δ et Δ'.

On considère maintenant les bipoints (A,B) et (A',B').

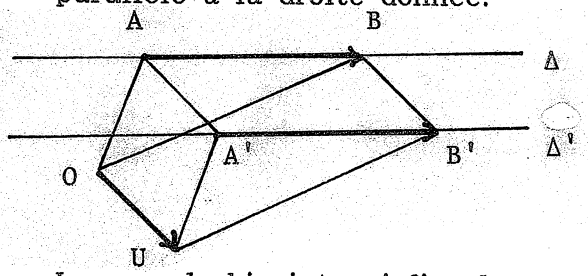
Questions.

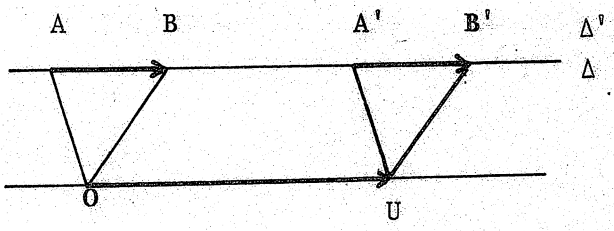
- Que sait-on des bipoints (A,B) et (A',B') ?
- Quelle conclusion en tirer quant aux droites Δ et Δ' ?
- Quelle remarque particulière peut-on faire lorsque la droite Δ et le bipoint (O,U) ont même direction ?

On retiendra le résultat suivant:

Propriété P01

La transformée d'une droite par une translation est une droite parallèle à la droite donnée.





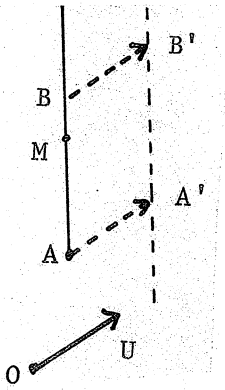
Lorsque le bipoint qui fixe la translation a même direction que la droite donnée alors cette droite est confondue avec sa translatée. On dit dans ce cas que la translation laisse la droite globalement invariante.

Conséquence.

Lorsqu'on dispose d'un traceur de parallèles, pour construire la transformée d'une droite par translation il suffit de construire le transformé d'un de ses points.

b) Translatée d'une demi-droite.

A, B, O et U étant quatre points donnés d'un plan $\mathcal{P}$, on est assuré que la transformée de la demi-droite [AB) par la translation $t_{(O,U)}$ est une demi-droite (énoncé 3) qui contient les transformés A' et B' des points A et B (énoncé 4). Reste à établir, comme cela est prévisible, que la translatée de [AB) est [A'B').



Question.

M désignant un point, autre que A, variable sur la demi-droite [AB), justifier à l'aide de l'énoncé 2 que son transformé M' appartient à la demi-droite [A'B').

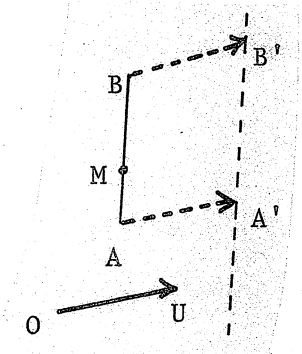
Conclusion.

La translatée d'une demi-droite [AB) est la demi-droite [A'B') où A' et B' sont les translatés des points A et B.

---

c) Translaté d'un segment.

Les notations précédentes étant conservées, les énoncés 3 et 4 font que le transformé d'un segment [A,B] est un segment qui contient les points A' et B'.



Question:

En remarquant qu'un quelconque point de [A,B] appartient à la fois aux demi-droites [AB) et [BA), justifier que le translaté du segment [A,B] est le segment [A',B'].

Conclusion.

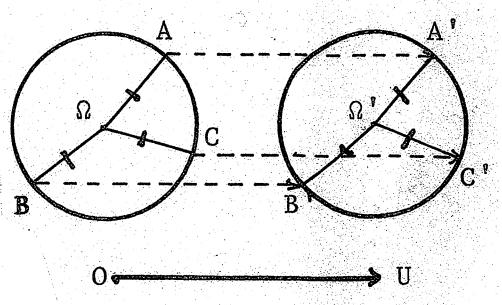
Le translaté d'un segment est le segment ayant pour extrémités les translatés des extrémités du segment donné.

Exercice: Translatés d'un triangle quelconque, d'un triangle isocèle, d'un triangle équilatéral.

Translatés d'un segment et de sa médiatrice.

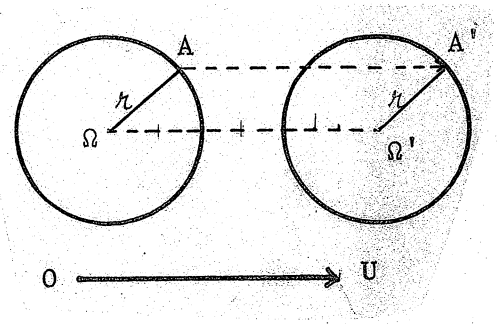
d) Translaté d'un cercle $\mathcal{C}$.

Convenons d'abord de noter A', B', C' et Ω' les transformés respectifs des points A, B, C et Ω par la translation $t_{(O,U)}$.
Ceci dit nous allons distinguer trois cas.



1° Le cercle $\mathcal{C}$ passe par A, B et C.
Dans ce cas son transformé est le cercle (A'B'C') (d'après les énoncés 3 et 4).

2° Le cercle $\mathcal{C}$ a pour centre Ω et passe par A.
Revenons au cas précédent. Le centre Ω du cercle $\mathcal{C}$ étant équidistant des points A, B et C, son transformé Ω' est équidistant des points A', B' et C' car la translation $t_{(O,U)}$ conserve la distance. Ω' est donc le centre du cercle (A'B'C'). En d'autres termes le centre d'un cercle se transforme en le centre du cercle transformé.



Ceci étant acquis, compte tenu de l'énoncé 4, le transformé d'un cercle de centre Ω passant par un point A est le cercle de centre Ω' passant par le point A'.

3° Le cercle $\mathcal{C}$ a pour centre Ω et pour rayon r.
En posant ΩA = r, on a Ω'A' = r car $t_{(O,U)}$ conserve la distance. Le translaté du cercle $\mathcal{C}$ est donc le cercle de centre Ω' et de rayon r.

Conclusion

Par la translation:

- Le transformé d'un cercle passant par trois points donnés est le cercle qui passe par les transformés de ces points.
- Le transformé d'un cercle de centre Ω et passant par un point A donné est le cercle ayant pour centre le transformé de Ω et qui passe par le transformé de A.
- Le transformé d'un cercle de centre Ω et de rayon r est le cercle de centre le transformé de Ω et de rayon r.

e) Translaté d'un demi plan.

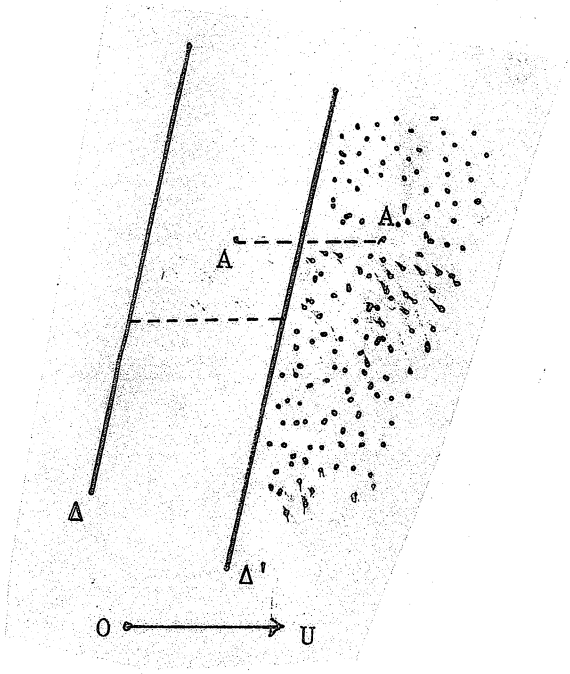
On mettra en place une courte séquence déductive qui conduira au résultat suivant:

Le translaté d'un demi-plan déterminé par sa frontière Δ et un de ses points A est le demi-plan ayant pour frontière la translatée de Δ et pour élément le translaté de A.

Commentaires.

Le premier résultat, facile à établir, est très important. Les deux suivants pourront être admis sans inconvénients dans les classes de premier cycle tant ils sont intuitivement évidents.

Toutefois, le fait de les établir montre que la partie du modèle mathématique précédemment mise en place est satisfaisante puisqu'elle permet d'accéder, par voie déductive, aux résultats que laisse préssentir l'étude exprérimentale.



III - EGALITE DES VECTEURS
EGALITE DES TRANSLATIONS

1–Remarque préliminaire.

Propriété P02

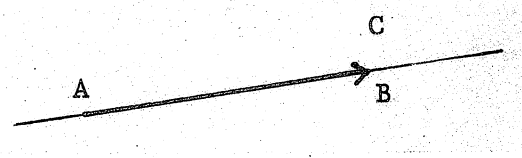
Si des bipoints (A,B) et (A,C) d'un plan $\mathcal{P}$ sont tels que: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$ alors on a: B = C

L'égalité $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$ traduit que:

1° Les points B et C appartiennent à la même demi-droite d'origine A car les bipoints (A,B) et (A,C) ont même direction et même sens.

2° (A,B) et (A,C) sont de même longueur.

Donc, on a effectivement: B = C



Question:

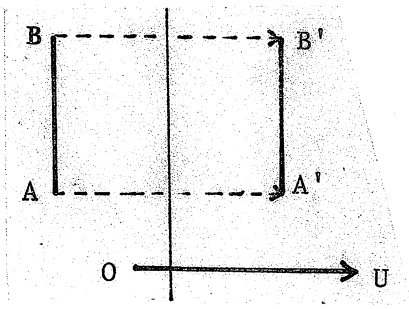
Lorsque des points A, B et C sont tels que AB = AC[(2)], parvient-on à la même conclusion ? Sinon, quelle conclusion donner ?

2–Egalité des transformations agissant dans le plan $\mathcal{P}$.

La définition qui suit est de caractère général. Elle s'applique en particulier aux translations.

On dit que la transformation T_1 est égale à une transformation T_2 pour signifier que la transformation T_1 a même action que T_2 sur n'importe quel point du plan $\mathcal{P}$ (autrement dit T_1 fait le même travail que T_2)

En considérant la figure ci-contre on peut constater que la réflexion de droite Δ et la translation $t_{(O,U)}$ transforment toutes les deux le segment [A,B] en le segment [A',B'].



Ces deux transformations sont-elles égales ?

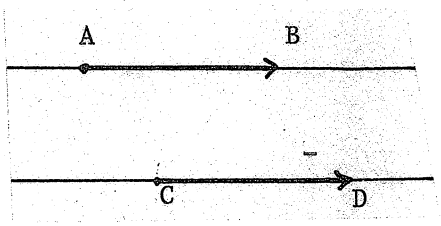
Justifier votre réponse.

(2) AB désigne la mesure du segment [A,B].
L'égalité AB = AC signifie que les segments [A,B] et [A,C] ont même mesure donc même longueur.

3–Egalité des vecteurs, égalité des translations.

L'étude expérimentale nous à permis de constater que si deux bipoints (A,B) et (C,D) ont même vecteur alors la translation $t_{(A,B)}$ fait le même travail que la translation $t_{(C,D)}$. Nous sommes maintenant en mesure d'en fournir une justification théorique.

Soit M un point quelconque de $\mathcal{P}$.



M' son transformé par la translation $t_{(A,B)}$.

M" son transformé par la translation $t_{(C,D)}$.

Compte tenu de la règle (1), on a:

$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{MM''} = \overrightarrow{CD}$.

Par suite, si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ il vient $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MM''}$

puis: M' = M" d'après la propriété P02.

Ainsi la translation $t_{(A,B)}$ a la même action que la translation $t_{(C,D)}$ sur n'importe quel point de $\mathcal{P}$.

Donc: $t_{(A,B)} = t_{(C,D)}$.

Réciproquement, supposons que $t_{(A,B)} = t_{(C,D)}$

Comme $\begin{cases} t_{(C,D)} \text{ envoie C sur D} \\ \text{et} \\ t_{(A,B)} \text{ fait le même travail que } t_{(C,D)} \end{cases}$

alors translation $t_{(A,B)}$ envoie C sur D.

Ainsi (C,D) a même vecteur que (A,B). Autrement dit: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

On peut donc énoncer:

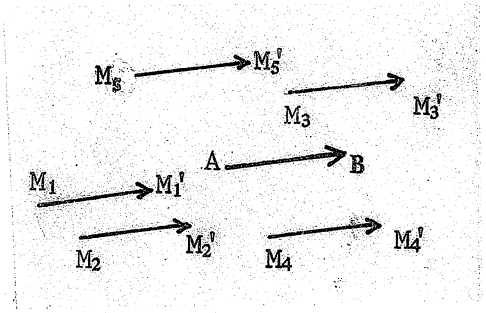
Etant donné quatre points A, B, C et D de $\mathcal{P}$:

- Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ alors $t_{(A,B)} = t_{(C,D)}$
- Si $t_{(A,B)} = t_{(C,D)}$ alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

4–Vecteur d'une translation.

Soit A et B deux points de $\mathcal{P}$.

L'énoncé (1) stipule que les bipoints de type (M,M') où M est un point quelconque de $\mathcal{P}$ et M' son transformé par la translation $t_{(A,B)}$ ont même vecteur que (A,B). Ce vecteur est appelé vecteur de la translation $t_{(A,B)}$.



Plus généralement, on adopte la définition suivante:

Le vecteur d'une translation agissant dans un plan $\mathcal{P}$ est le vecteur du bipoint qui la détermine.(C'est aussi le vecteur de tous les bipoints que cette translation "engendre")

IV - PARALLELOGRAMME, MILIEU D'UN SEGMENT TRANSLATION ET VECTEUR

1-Echange de points entre deux bipoints de même vecteur.

On se propose de montrer que si (A,B) et (C,D) sont des bipoints de même vecteur alors $\left\{\begin{matrix}(A,C) \text{ et } (B,D) \text{ d'une part} \\ \text{et} \\ (D,B) \text{ et } (C,A) \text{ d'autre part}\end{matrix}\right\}$ sont également des bipoints de même vecteur.

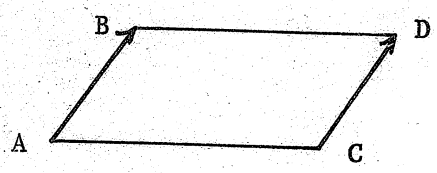


figure 1

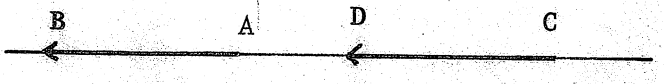


figure 2

1° Quelle est l'action de la translation $t_{(A,B)}$ sur le point A ? Sur le point C ? (justifier votre réponse). Sur le bipoint (A,C) ? Que peut-on en déduire ?

2° Montrer que les bipoints (D,B) et (C,A) ont même vecteur.

Propriété (03) (Facultative)

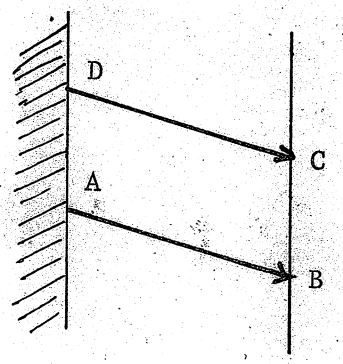
Lorsque deux bipoints ont même vecteur, on obtient encore deux bipoints de même vecteur en échangeant le premier point de l'un de ces bipoints avec le deuxième point de l'autre.

Remarque

Cette propriété se traduit en termes d'égalités de vecteurs.

2-Parallèlogramme, vecteur et translation.

a) Considérons un parallèlogramme ABCD. On sait que les bipoints (A,B) et (D,C) ont même direction et même longueur. Par ailleurs ces bipoints ont même sens car un parallèlogramme est un quadrilatère convexe).



En résumé (A,B) et (D,C) ont même vecteur.

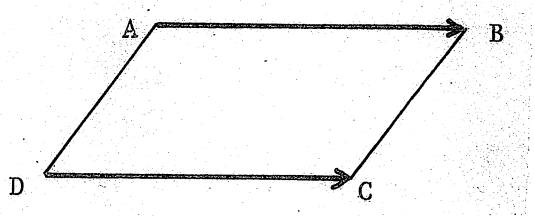
Conclusion: Si un quadrilatère ABCD est un parallèlogramme alors les bipoints (A,B) et (C,D) ont même vecteur ($\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.)

b) Etude du problème réciproque.

On considère quatre points A, B, C et D non (tous) alignés et tels que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ ($D \xmapsto{t_{(A,B)}} C$)

1° Faire une figure. Quelle conjecture peut-on faire quant à la nature du quadrilatère ABCD ?

2° On se propose de justifier (par voie déductive) cette conjecture.



Questions:

- Quelle relation existe-t-il entre les droites (AB) et (DC) ?
- Quel est le transformé du bipoint (A,D) par $t_{(A,B)}$?
- Quelle relation existe-t-il entre les bipoints (A,D) et (B,C) ? entre les droites (AD) et (BC) ?
- Conclure.

Propriété (04)

Etant donné quatre points A, B, C et D.

- Si ABCD est un parallélogramme alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$
- Si les points A, B, C et D sont non alignés et satisfont à $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ alors ABCD est un parallèlogramme

c) Exercice d'appoint.

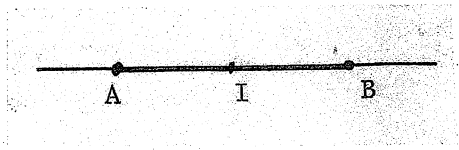
1° Construire, à partir d'un triangle ABC donné tous les quadrilatères ABCD tels que (AB)//(CD) et AB = CD. Quel est leur nombre? Sont-ils tous des parallèlogrammes?

2° On suppose maintenant que quatre points A,B, C et D vérifient la relation $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Est-on assuré que ABCD soit un parallèlogramme?

Pourquoi?

3-Milieu d'un segment, vecteur et translation.

a) Considérons un segment [A,B] et son milieu I. On sait que I est le point de la droite (AB) tel que AI = IB.



Questions:

- Qu'en résulte-t-il concernant la direction et la longueur des bipoints (A,I) et (I,B) ?
- Les deux bipoints sont-ils de même sens ? Justifiez votre réponse.
- Conclure!

b) Etude du problème réciproque.

Soit un segment [A,B] et I un point autre que le milieu du segment [A,B]. Deux éventualités sont alors à observer suivant que I appartient ou non à la droite (AB).

Questions:

- Faire une figure illustrant chacune des éventualités.
- L'égalité $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$ est-elle vérifiée? Dans chaque cas justifier votre réponse.
- Conclusion: Si $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$ alors .....

Propriété P05.

Si I est le milieu de [A,B] alors $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$ ($I \overset{t_{(A,I)}}{\longmapsto} B$)

Si $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$ ($I \overset{t_{(A,I)}}{\longmapsto} B$) alors I est le milieu de [A,B]

c) Exercice d'appoint.

1° Lorsque trois points A, B et I sont tels que AI = IB peut-on en déduire que I est le milieu du segment [A,B] ? Sinon quelle conclusion donner ? Illustrer cette dernière conclusion.

2° On suppose que trois points A, B et I sont tels que AI = IB. Quelle condition supplémentaire est-on obligé d'adjoindre à la condition précédente pour être assuré que I est le milieu du segment [A,B] ?

V- CONSERVATION DU PARALLELISME, DE L'ORTHOGONALITE ET DU MILIEU

1-Conservation du parallèlisme et de l'orthogonalité de deux droites.

Il s'agit ici de mettre en place une courte séquence déductive qui conduise à la propriété suivante:

Propriété P06

Par une translation, les transformées de deux droites parallèles (resp. orthogonales) sont deux droites parallèles (resp. orthogonales)

2-Conservation du milieu d'un segment.

Etant donné trois points A, B, I et un bipoint (O,U), on note A', B', I' les transformés de A, B, I par la translation $t_{(O,U)}$.

Questions:

- Faire une figure soignée.
- Que sait-on sur les bipoints (A,I) et (A',I') d'une part, et, (I,B) et (I'B') d'autre part ? Traduire votre réponse en langage vectoriel.
- La réponse précédente reste-t-elle valable lorsque I est le milieu de [A,B] ?

On suppose maintenant que I est le milieu du segment [A,B].

Questions:

- Traduire cette nouvelle donnée en langage vectoriel.
- Compte tenu des réponses formulées précédemment que peut-on en déduire pour les vecteurs $\overrightarrow{A'I'}$ et $\overrightarrow{I'B'}$?
- Traduire le résultat précédent en langage ponctuel.
- Faire une figure illustrant cette dernière situation.

Propriété P07

Une translation transforme le milieu d'un segment en le milieu du segment transformé.

Remarque.

On peut donner une autre démonstration en s'appuyant sur la propriété analogue des projections.

VI - RESULTATS A CONNAITRE

1-Translatés de polygones.

Les résultats énoncés ci-dessous pourront faire l'objet d'une étude théorique sous forme d'exercices programmés chronologiquement.

Propriété P08

Par une translation,

le transformé d'un ...	est un ....
• triangle isocèle	triangle isocèle
• triangle équilatéral	triangle équilatéral
• triangle rectangle	triangle rectangle
• parallélogramme	parallélogramme
• rectangle	rectangle
• losange	losange
• carré	carré

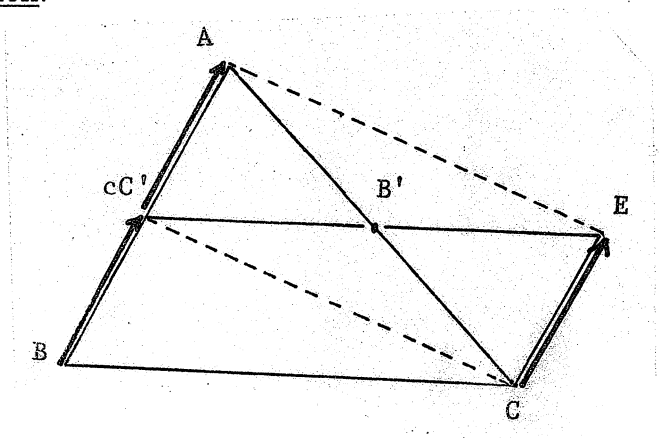
2-Droite des milieux des côtés d'un triangle.

On se propose d'établir que:

a) La droite qui passe par les milieux de deux côtés d'un triangle est parallèle au troisième côté.

b) La parallèle à un côté d'un triangle qui passe par le milieu d'un autre côté de ce triangle coupe le troisième côté en son milieu.

Démonstration.



Soit un triangle ABC. Notons B' et C' les milieux des côtés [C,A] et [A,B].

Plaçons ensuite un point E transformé du point C par la translation $t_{(B,C')}$. Alors:

- d'une part la droite (C'E), translatée de (BC) par $t_{(B,C')}$ est parallèle à (BC) [1]
- d'autre part les bipoints (B,C) et (C,E) ont même vecteur ($\overrightarrow{BC'} = \overrightarrow{C'E}$) [2]

Ceci dit, le fait que C' soit le milieu du segment [A,B] se traduit par:

«les bipoints (B,C') et (C,A') ont même vecteur» ($\overrightarrow{BC'} = \overrightarrow{CE}$) [3]

Dès lors de [2] et [3] il découle:

«les bipoints (C',A) et (C,E) ont même vecteur» ($\overrightarrow{C'A} = \overrightarrow{CE}$) [4]

Les points C', A et C n'étant pas alignés, la proposition [4] peut encore se traduire par:

«le quadrilatère C'AEC est un parallèlogramme» [5]

On en déduit:

«le milieu B' de [C,A] appartient à la droite diagonale (C'E)» [6]

Sachant que la droite (C'E) est parallèle à (BC) -voir [1]- le résultat [6] peut s'interpréter ainsi:

- Les droites (C'B') et (C'E) sont confondues d'où la propriété a)
- La droite (C'E) coupe [C,A] en B' d'où la propriété b)

Commentaires.

1° Du point de vue de la rigueur le libellé de chacune des propriétés a) et b) n'est pas exempt de tout reproche car, par "côtés d'un triangle" on désigne indifféremment, soit le segment qui joint deux sommets du triangle, soit la droite qui passe par deux sommets.

La raison qui nous a conduit à adopter cette terminologie est la suivante: telles qu'elles ont été annoncées ces propriétés sont facilement mémorisables et utilisables par les élèves d'une classe de quatrième. Les abus de langage ne sont généralement pas perçus. Dans le cas contraire, suivant le contexte dans lequel est employé le mot "côté", chaque élève comprend intuitivement la signification qu'il convient d'accorder à ce mot.

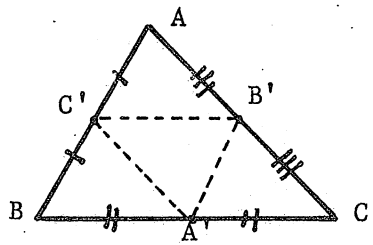
2° Les propriétés a) et b) sont déjà connues des élèves car elles découlent de la propriété de conservation du milieu d'un segment par projection. Si nous avons tenu à les établir

ici c'est parce que nous disposons maintenant d'un "outil" pour leur donner suite.

3–Triangle des milieux des côtés d'un triangle.

a) Définition.

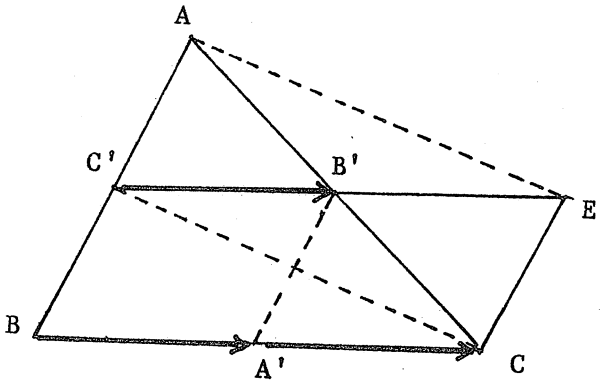
Etant donné un triangle ABC, le triangle A'B'C' où A', B' et C' désignent les milieux des côtés [B,C], [C,A] et [A,B] est appelé "triangle des milieux des côtés du triangle ABC"



Dans la figure ci-dessus, nous avons marqué à l'aide de tirets (un, deux, trois) les segments qui ont deux à deux même longueur. Ce codage sera utilisé par la suite sans explicitation.

b) Propriété attachée à cette configuration.

Considérons maintenant le point E tarnsformé de C par la translation $t_{(B,C')}$.



Dans le paragraphe précédent, nous avons montré que le quadrilatère C'AEC est un parallèlogramme. Le milieu B' de [C,A] est donc aussi celui de [C',E].

Ceci étant rappelé la translation $t_{(B,C')}$ qui envoie B sur C' et C sur E envoie le milieu A' de [B,C] sur le milieu de B' de [C',E].

Autrement dit, $t_{(B,C')}$ transforme le bipoint (B,A') en le bipoint (C',B').

On peut alors conclure par:

«le bipoint (C',B') a même vecteur que les bipoints (B,A') et (A',C)»

Il va alors de soit que:

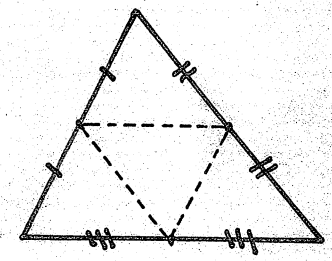
«le bipoint (B',C') a même vecteur que les bipoints (A',B) et (C,A')»

Question:

Vers quelles conclusions conduit la démarche précédente lorsqu'on remplace la translation $t_{(B,C')}$ par la translation $t_{(C,A')}$? par la translation $t_{(A,B')}$?

Enoncé du résultat: Propriété P09

figure (1)



Légende

Les figures (2) sont des reproductions de la figure (1)

figure (2-1)

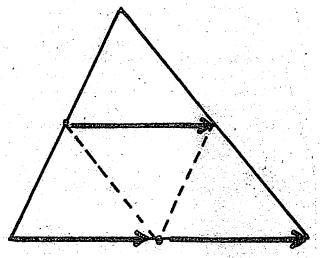


figure (2-2)

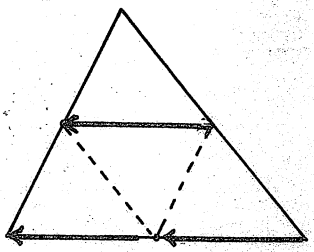


figure (2-3)

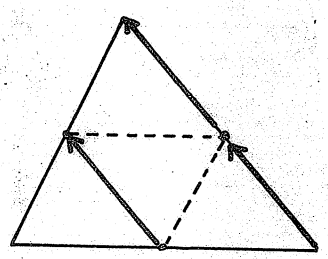


figure (2-4)

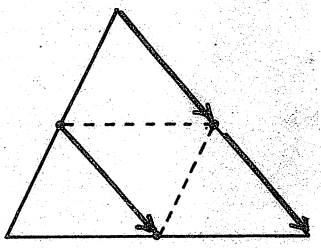


figure (2-5)

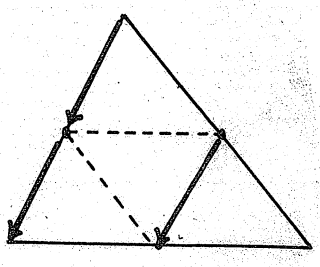
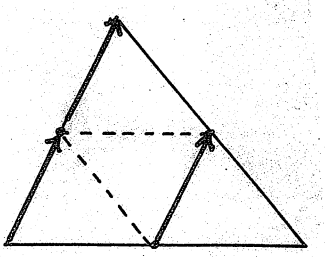


figure (2-6)



Si [les points marqués sur les côtés du triangle sont les milieux de ses côtés

alors les trois bipoints de chacune des figures (2) ont même vecteur

c) Propriété "complémentaire".

La propriété qui suit est à jumeler à la propriété P09. Elle en est le complément indispensable.

Propriété P10

Si les trois bipoints de l'une des figures (1) ont même vecteur

alors [en complétant cette figure, on obtient le triangle des milieux des côtés d'un triangle -voir figure (2)-

figure (1-1)

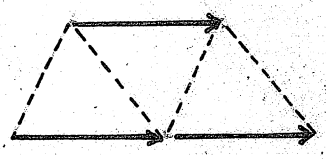


figure (1-2)

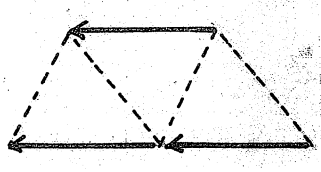


figure (1-3)

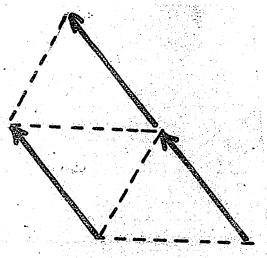


figure (1-4)

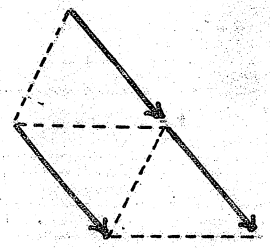


figure (1-5)

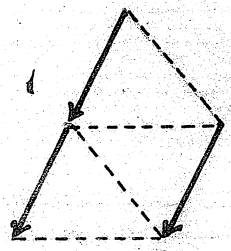


figure (1-6)

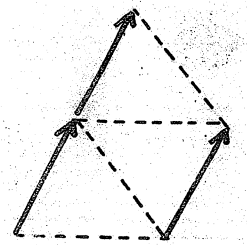
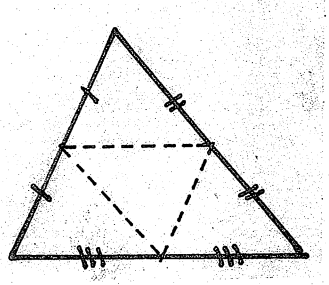


figure (2)

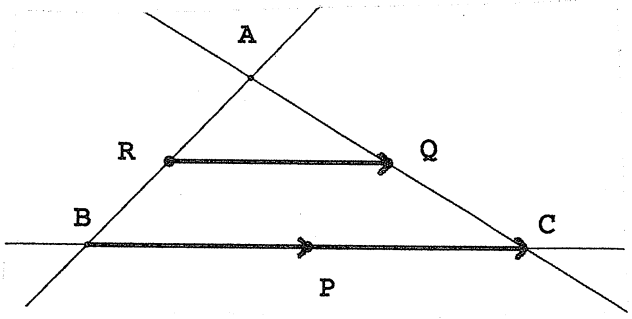


Légende

La figure (2) est la reproduction d'une des figures (1) que l'on a complétées.

Démonstration:

On suppose, par exemple, que les bipoints de la figure (1-1) ont même vecteur (voir figure ci-dessous).



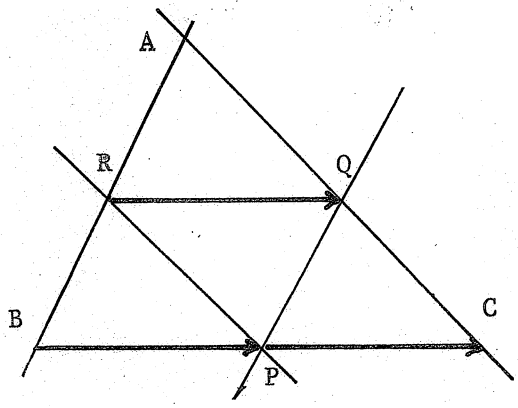
Dans ce cas il est clair que point P est le milieu de [B,C].
Reste à établir que:

1° Les droites (BR) et (CQ) sont sécantes (en A).
2° Les points Q et R sont respectivement les milieux des segments [C,A] et [A,B]

1ère étape.

Les droites (BR) et (CQ) ne sont pas parallèles sinon les quadrilatère BCQR sertait un parallèlogramme, les bipoints (R,Q) et (B,C) auraient même vecteur. Or ceci est faux puisque $\overrightarrow{RQ} = \overrightarrow{BP}$. Donc les droites (BR) et (CQ) sont bien sécantes.

2ème étape.



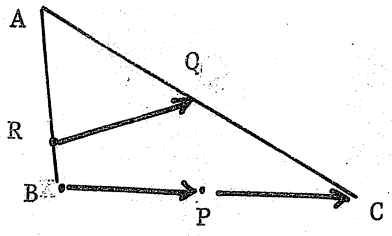
- De $\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{RQ}$ on déduit: $\overrightarrow{RB} = \overrightarrow{QP}$ [1]
  penser à l'effet de la translation $t_{(B,P)}$ sur le bipoint (R,B)
- De $\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{RQ}$ on déduit: $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{CQ}$ [2]
  penser à l'effet de la translation $t_{(B,P)}$ sur le bipoint (P,R)
- Des égalités [1] et [2] on déduit que les droites (RB) et (QP) d'une part, (PR) et (CQ) d'autre part sont parallèles, ce qui fait que le quadrilatère ARPQ est un parallèlogramme.
- Il s'ensuit que: $\overrightarrow{AR} = \overrightarrow{QP}$ et $\overrightarrow{QA} = \overrightarrow{PR}$. Dès lors, compte tenu des égalités [1] et [2], il vient:

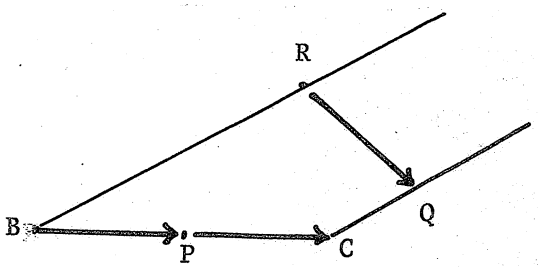
$\begin{cases} \overrightarrow{AR} = \overrightarrow{RB} \text{ égalité qui se traduit par: R est le milieu de [A,B]} \\ \overrightarrow{CQ} = \overrightarrow{QA} \text{ égalité qui se traduit par: Q est le milieu de [C,A]} \end{cases}$

La démonstration est donc terminée.

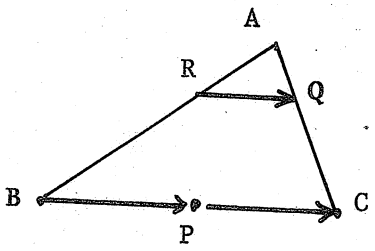
Remarque.

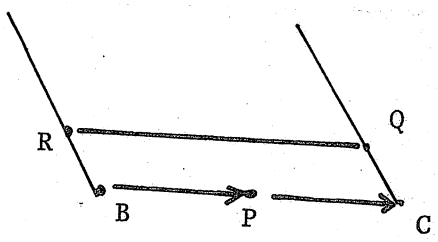
1° Pour parvenir à la conclusion précédente, nous avons fait l'hypothèse: « les bipoints (R,Q), (B,P) et (P,C) ont même vecteur et ne sont pas "portés par la même droite ».
   - Il est évident que cette conclusion ne serait pas acquise si les bipoints précités avaient même support.
   - Par ailleurs, les quelques exemples qui suivent montrent que l'autre partie de l'hypothèse est indispensable.



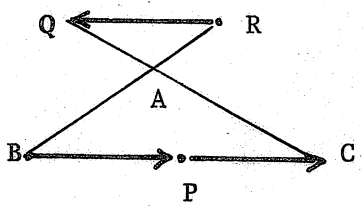


1ère éventualité: les bipoints (R,Q), (B,P) et (P,C) ont même longueur et n'ont pas même direction.





2ème éventualité: les bipoints (R,Q), (B,P) et (P,C) ont même direction, même sens et n'ont pas même longueur.



3ème éventualité: les bipoints (R,Q), (B,P) et (P,C) ont même direction, même longueur et n'ont pas même sens.

2° Lorsqu'on suppose que les trois bipoints d'une autre figure (1) du tableau précédent ont même vecteur, une démonstration analogue conduit à la conclusion donnée

Commentaire.

Il porte sur deux points.

1° La remarque précédente est importante. Elle permet de comprendre que le choix de l'hypothèse n'est pas dû au hasard et que dans son contenu rien n'est superflu. Toutefois dans une classe, il nous paraît préférable de demander aux élèves d'imaginer des "contre-exemples" plutôt que de les leur fournir.

2° Le libellé des propriétés P09 et P10 n'est pas d'une parfaite orthodoxie. La raison en est la suivante: nous avons jugé que l'emploi de ces propriétés dans des problèmes serait facilité si les élèves mémorisaient leur contenu sous forme d'image mentale à partir de figures illustrant les différents cas d'application.

VII - TRAVAUX DIRIGES

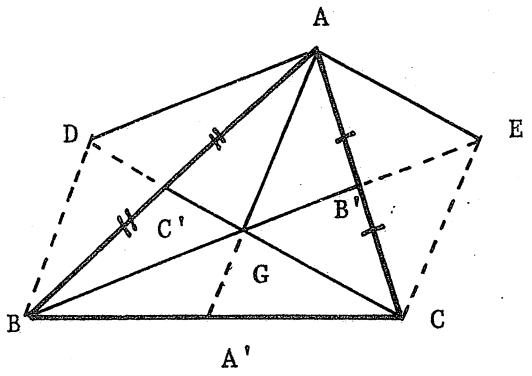
1-T. D. (1): Médianes d'un triangle.

L'objectif de ce travail dirigé est de:

1° Prouver que les médianes d'un triangle sont concourantes.

2° Positionner ce point de concours sur chacun des "segments-médians"

On considère donc un triangle ABC. On note A', B' et C' les milieux de [B,C], [C,A] et [A,B], puis G le point d'intersection des médianes (BB') et (CC').



1ère Séquence.

On se propose d'établir que la médiane (AA') passe par G. Pour cela on construit les points D et E transformés de A par les translations $t_{(G,B)}$ et $t_{(G,C)}$.

Questions:

1° Montrer que:

a) les points C' et B' sont respectivement les milieux des segments [G,D] et [G,E].

b) le point G est le milieu des segments [C,D] et [B,E].

2° Montrer que la droite (AG) passe par le milieu A' du côté [B,C] du triangle ABC.

Indication: on pourra, par exemple, considérer le triangle BCD. La droite (AG) passe par le milieu G du côté [C,D] de ce triangle et elle est .....

3° Conclure.

2ème Séquence.

On se propose maintenant de positionner le point G sur chacun des segments [A,A'], [B,B'] et [C,C'].

Questions:

4° Montrer que BG = 2GB' et CG = 2GC'

5° Comparer GA' et DB puis GA' et GA.

Indication: on pourra introduire le milieu M du côté [B,D] du triangle BCD.

6° Conclure.

Nota: Le point G est appelé "centre de gravité" du triangle ABC

2-T. D. (2): Médiatrices et hauteurs d'un triangle.

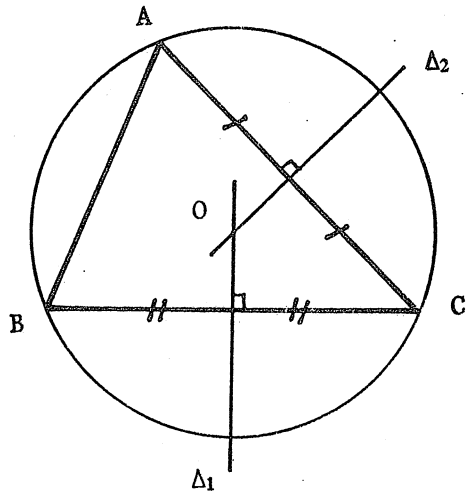
L'objectif de ce travail dirigé est double. Il s'agit de prouver:

1° que les médiatrices d'un triangle sont concourantes.

2° que les hauteurs d'un triangle sont concourantes.

1ère Séquence.

Etant donné un triangle PQR on note Δ_1 la médiatrice du côté [Q,R], Δ_2 celle du côté [R,P] et O leur point d'intersection.



Questions:

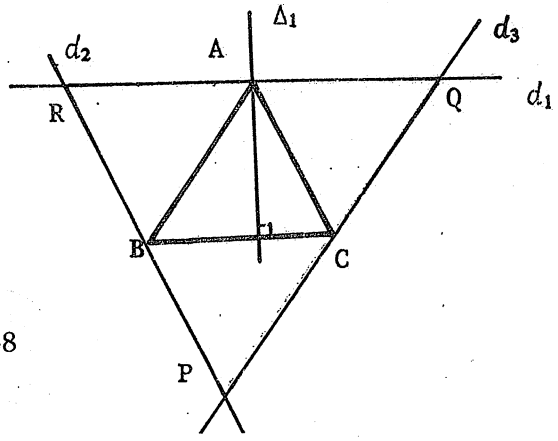
1° a) Montrer que la médiatrice Δ_3 du côté [P,Q] passe par le point O.

b) Le cercle de centre O qui passe par le point P passe-t-il aussi par les points Q et R? Justifier votre réponse.

2° Enoncer le résultat de cette étude.

2ème Séquence.

On se propose maintenant d'établir que les hauteurs d'un triangle ABC sont concourantes.



Pour cela on trace:

- la droite d_1 parallèle à (BC) passant par A.
- la droite d_2 parallèle à (CA) passant par B.
- la droite d_3 parallèle à (AB) passant par C.

On note P le point d'intersection des droites d_2 et d_3 , Q celui des droites d_3 et d_1 et R celui des droites d_1 et d_2.

Questions.

3° a) Montrer que les bipoints (B,C), (R,A) et (A,Q) ont même vecteur.

b) Que représente alors le triangle ABC pour le triangle PQR?

4° Les hauteurs du triangle ABC issues des sommets A, B et C sont respectivement notées Δ_1 , Δ_2 et Δ_3.

a) Montrer que la hauteur Δ_1 du triangle ABC est une médiatrice du triangle PQR.

b) Que représentent les droites Δ_2 et Δ_3 pour ce dernier triangle?

5° A quelle conclusion parvient-on lorsqu'on se réfère au résultat de la première séquence?

Nota: le point de concours des hauteurs d'un triangle est appelé "orthocentre" du triangle.

3-T. D. (3): Parallèlogramme des milieux des côtés d'un quadrilatère.

Etant donné un quadrilatère ABCD, on note I, J, K et L les milieux des côtés [A,B], [B,C], [C,D] et [D,A]. On se propose de:

1° démontrer que, excepté pour un certain type de quadrilatères, IJKL est un parallèlogramme.

2° déterminer comment dessiner le quadrilatère ABCD pour que le parallèlogramme IJKL soit un rectangle, un losange, un carré.

1ère Séquence.

Représenter les quadrilatères ABCD de types suivants:

- type 1: convexe
- type 2: non convexe et non croisé (fer de lance)
- type 3: croisé et ses diagonales (AC) et (BD) sont sécantes.
- type 4: croisé et ses diagonales (AC) et (BD) sont parallèles.

Questions:

1° Montrer que, pour n'importe quel type de quadrilatère décrit ci-dessus les bipoints (I,J) et (L,K) sont de même vecteur.

Indication: on pourra introduire le milieu M du segment [A,C] et considérer successivement les triangles BAC et DAC.

2° Montrer que hormis le cas où le quadrilatère est de type 4, IJKL est un parallèlogramme.

Indication: on pourra introduire le milieu N du segment [B,D] et considérer le triangle ABD

2ème Séquence.

Questions:

3° Montrer que $IJ = \frac{1}{2}AC$ et $IL = \frac{1}{2}BD$

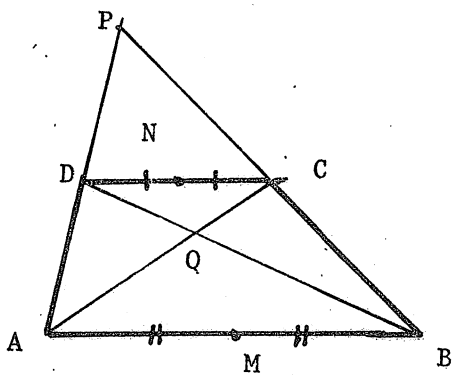
4° Quelle(s) condition(s) imposer aux segments diagonaux [A,C] et [B,D] pour que le parallèlogramme IJKL soit:

a) un rectangle. b) un losange. c)un carré

Illustrer chacune de ces questions avec un quadrilatère de type 1, puis de type 2, puis de type 3.

4-T. D. (4): Trapèze complet.

On considère un trapèze ABCD dont les bases [A,B] et [C,D] sont telles que: AB = 2CD.



On note:

- P le point d'intersection de (AD) et (BC)
- Q le point d'intersection de (AC) et (BD)
- M le milieu de [A,B] et N celui de [C,D]

On se propose de montrer que les point M, N, P et Q sont alignés.

Questions:

1° a) Montrer que les points D et C sont les milieux respectifs des segments [P,A] et [P,B].

b) En déduire que les points M, P et Q sont alignés.

2° a) Montrer que le quadrilatère MCPD est un parallèlogramme.

b) En déduire que:

- N est le milieu de [M,P]
- les points M, N, P et Q sont alignés.

3° Vérifier que: $MQ = \frac{2}{3}MN$

Indication: revoir les résultats du T.P. (1)

EXERCICES

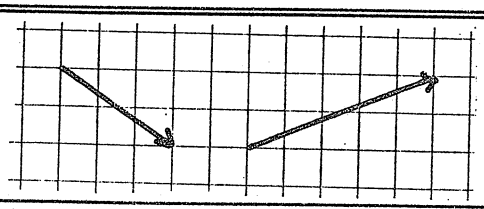
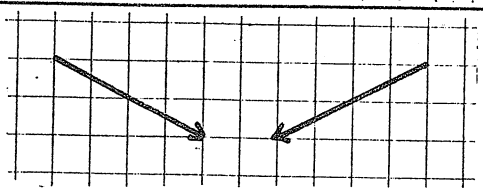
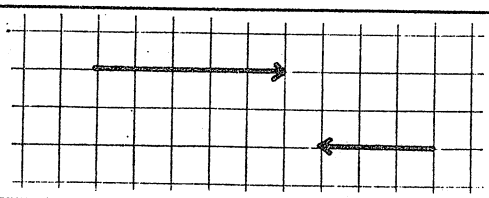
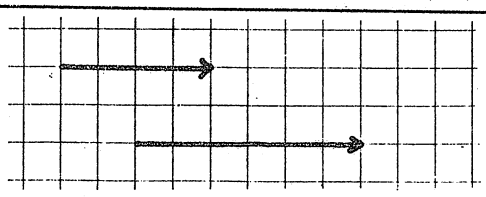
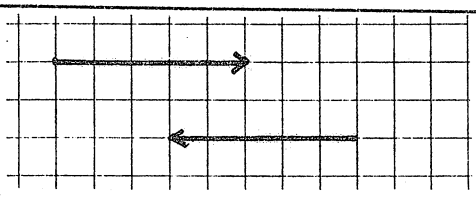
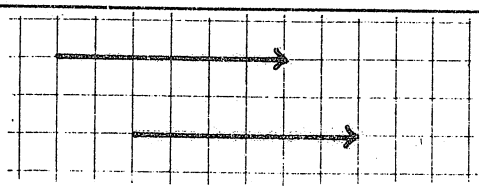
AVERTISSEMENT

1-Les exercices 1 à 24 peuvent être abordés dès la classe $4^{ème}$. Ils sont classés et rangés par ordre de difficultés croissant.

2-La formulation des exercices pourra être modifiée, en particulier par l'adjonction d'étapes intermédiaires.

3-La figure ne fait pas partie des données de l'exercice. Elle permet la visualisation de la situation abordée et le repérage de l'exercice.

Exercice 01

	Les bipoints ont même		
	longueur	direction	sens
			
			
			
			
			
			

Compléter les cases.

Exercice 02

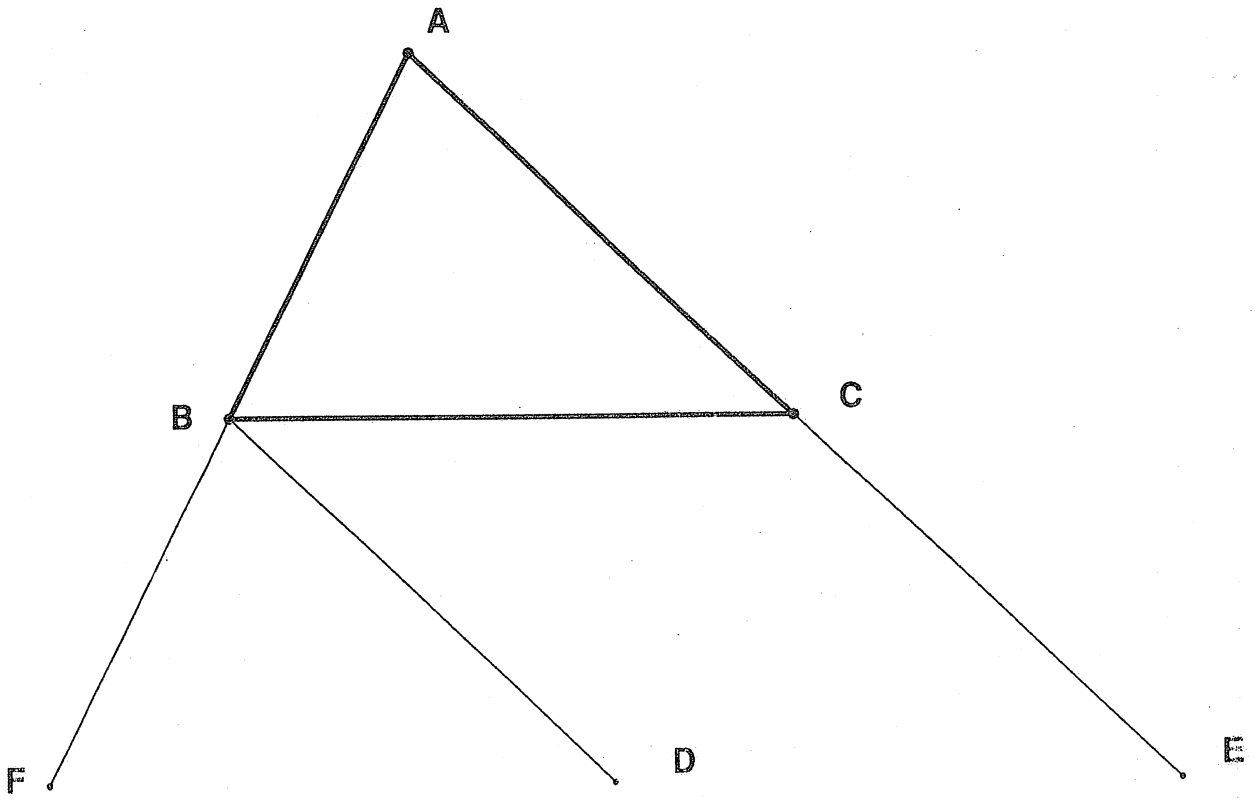
Données :

- Un triangle ABC.
- D l'image de B par la translation $t_{(A,C)}$.
- E l'image de C par la translation $t_{(A,C)}$.
- F l'image de B par la translation $t_{(A,B)}$.

1° Faire une figure.

2° Montrer que les bipoints (D,E) et (F,D) ont même vecteur que (B,C).

3° En déduire que D est le milieu de [E,F].



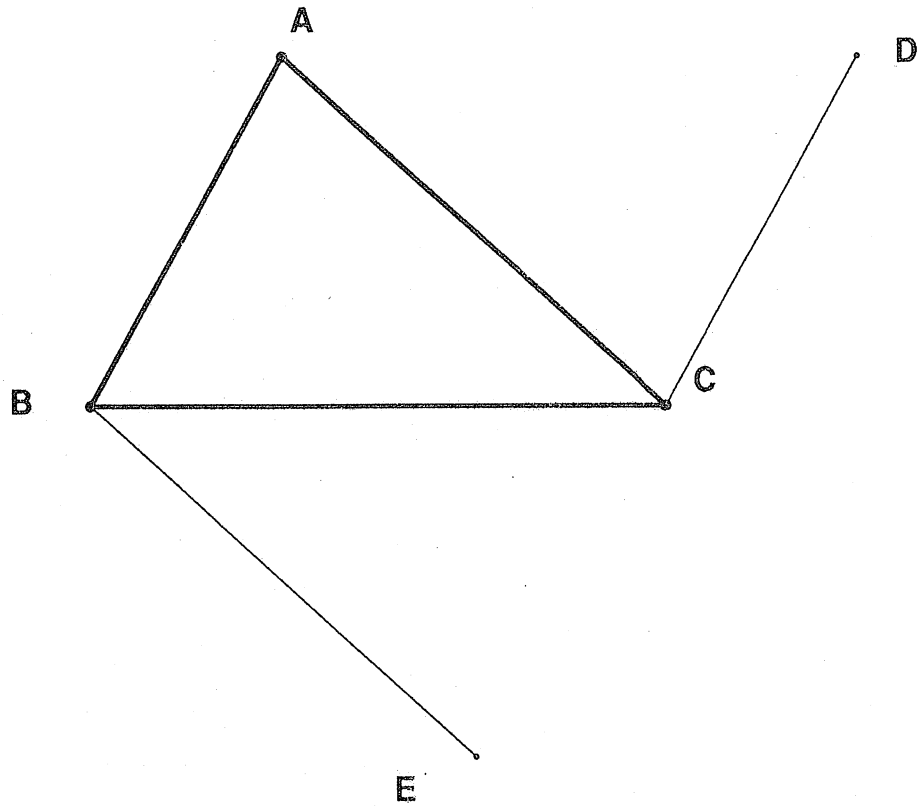
Exercice 03

On se donne trois points A, B et C. On considère les translations t_1 et t_2 telles que: $A \overset{t_1}{\longmapsto} B$ et $A \overset{t_2}{\longmapsto} C$

1° Construire les points D et E tels que:

$D \overset{t_1}{\longmapsto} C$ et $B \overset{t_2}{\longmapsto} E$

2° Démontrer que les points D, C et E sont alignés et que C est le milieu de [D,E]



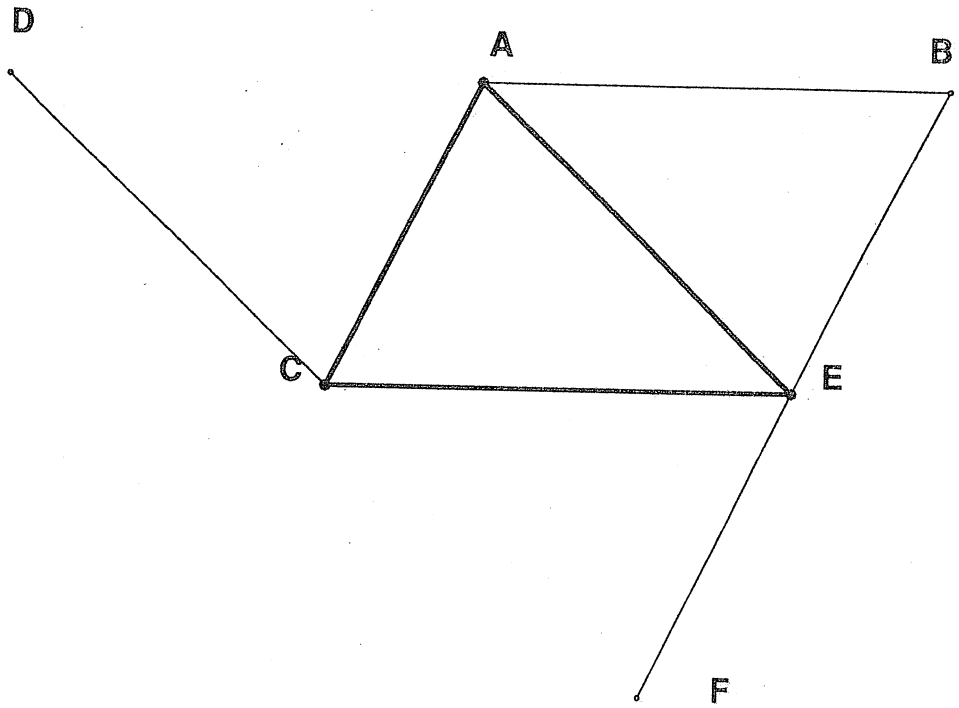
Exercice 04

On se donne un triangle ACE.

1° Construire les points B, D et F définis par:

- ABEC est un parallèlogramme.
- La translation de bipoint (A,C), envoie E sur F
- Les bipoints (D,C) et (A,E) ont même vecteur

2° Démontrer que A, E et C sont les milieux des côtés du triangle BDF



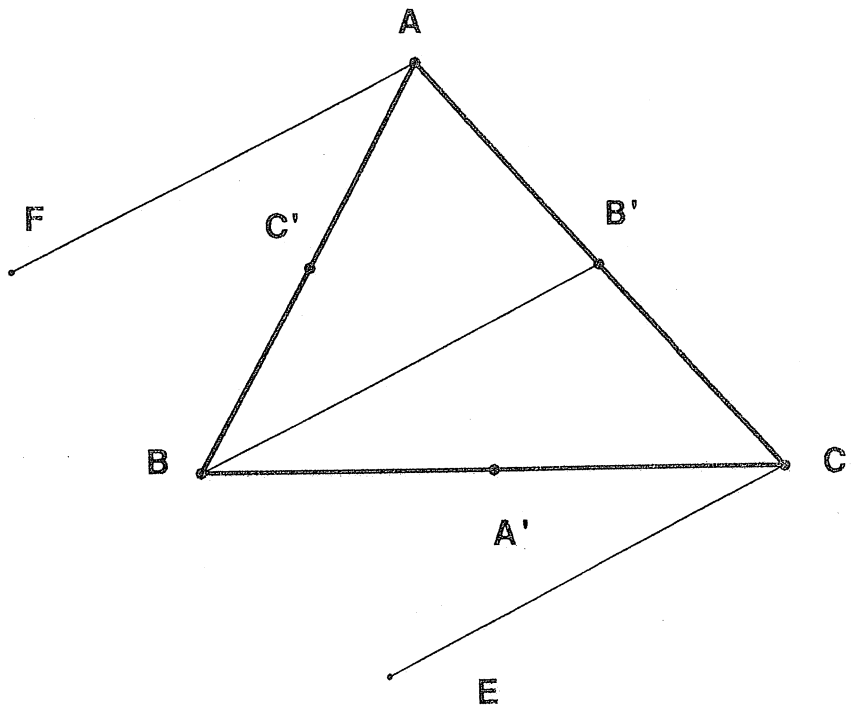
Exercice 05

On se donne un triangle ABC et on appelle A', B' et C' les milieux des côtés [B,C], [C,A] et [A,B].

1° Construire les points E et F tels que: $\overrightarrow{B'B} = \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{CE}$.

2° Démontrer que A' est le milieu de [B',E] et puis que C' est le milieu de [B',F].

2° Quel est le milieu de [F,E] ? (Justification exigée)



Exercice 06

Données :

- Un quadrilatère ABCD.
- B' et D' les translatés de B et D par la translation $t_{(A,C)}$.

1° Quelle est la nature du quadrilatère BB'D'D ?

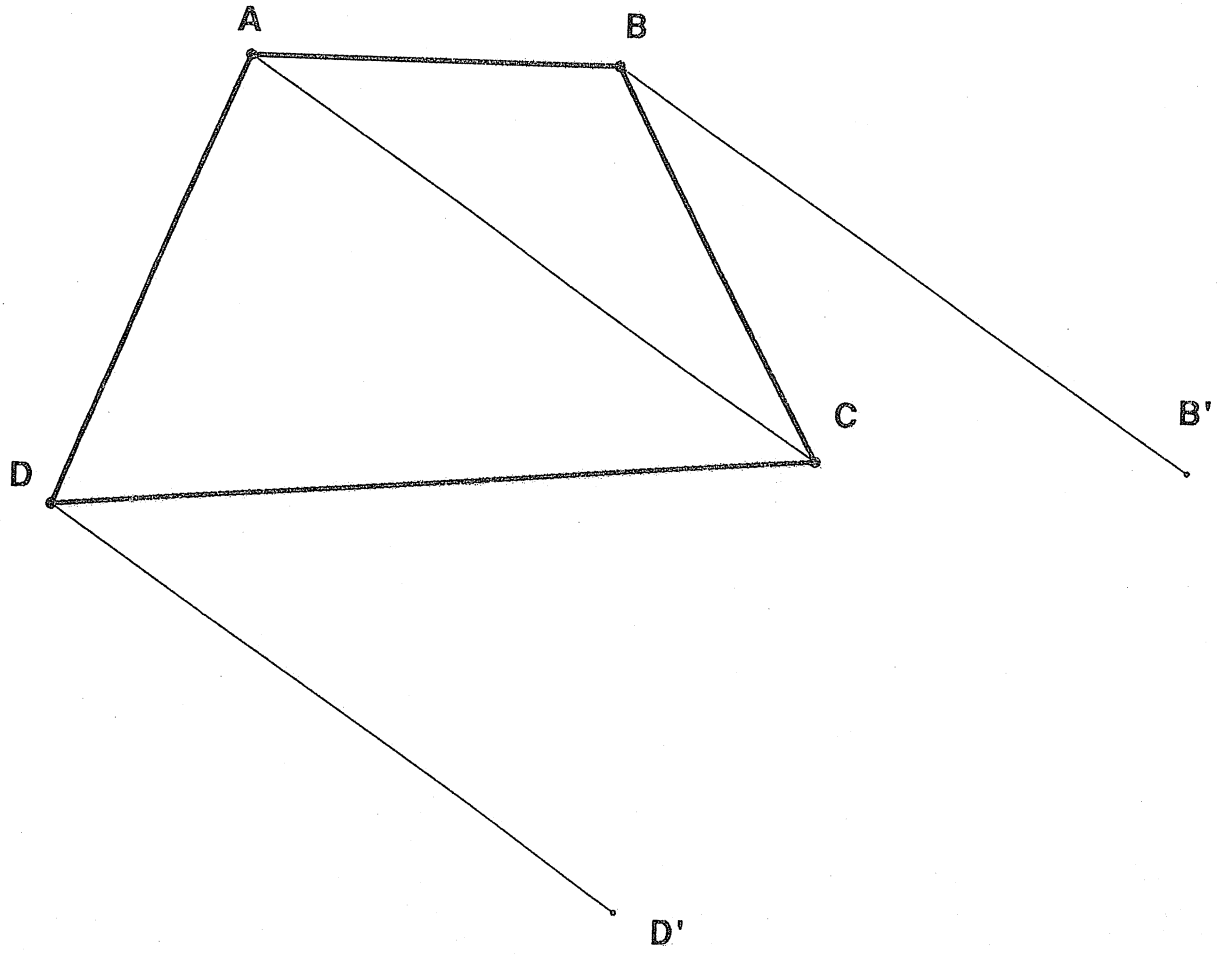
2° Quelle est la nature du quadrilatère BB'D'D lorsque ABCD est

a) un parallélogramme ?

b) un rectangle ?

d) un losange ?

c) un carré ?

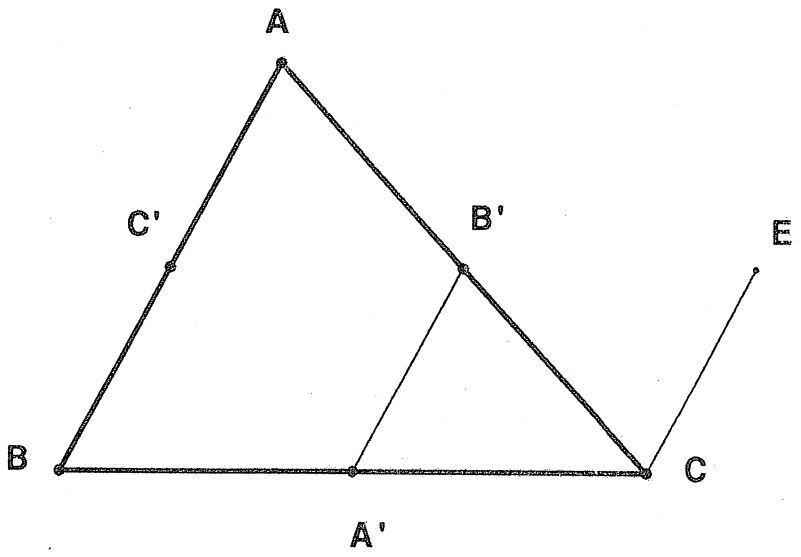


Exercice 07

Dans un triangle ABC on appelle A', B' et C' les milieux des côtés [B,C], [C,A] et [A,B]. On appelle E le point tel que (C,E) et (A',B') soient deux bipoints de même vecteur.

Trouver d'autres bipoints de même vecteur et en déduire que:

a) B' est le milieu de [C',E] b) $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{C'C}$



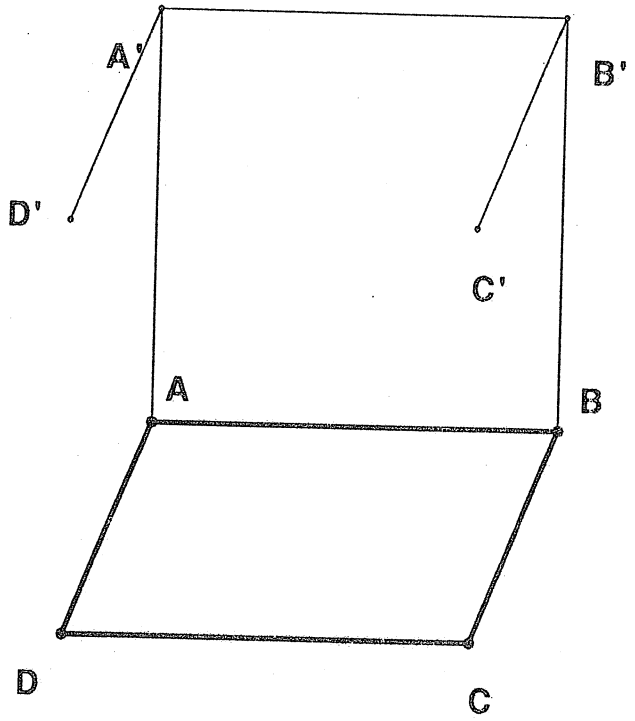
Exercice 08

Etant donné un parallélogramme ABCD,

1° Construire les points A' et B' tels que ABB'A' soit un carré.

2° Construire les transformés D' et C' des points A' et B' par la translation $t_{(A,D)}$.

3° Quelle est la nature des quadrilatères ADD'A', BCC'B', A'B'C'D' et DCC'D' ?



Exercice 09

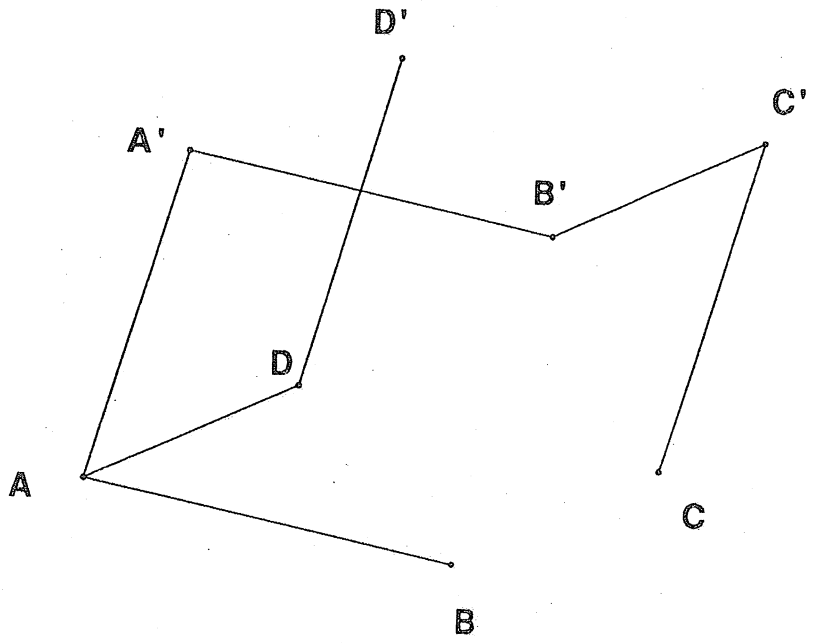
Etant donné des points A, B et C, on considère les points D, A', B', C' et D' définis comme suit:

- (A,B) et (A',B') ont même vecteur
- (C,C'), (D,D') et (A,A') ont même vecteur
- (A,D) et (B',C') ont même vecteur

1° Réaliser cette figure

2° Déterminer successivement tous les bipoints de même vecteur que chacun des bipoints (A,B), (A,D) et (A,A')

3° En déduire que le milieu du segment [A,C'] est aussi celui de trois autres segments.

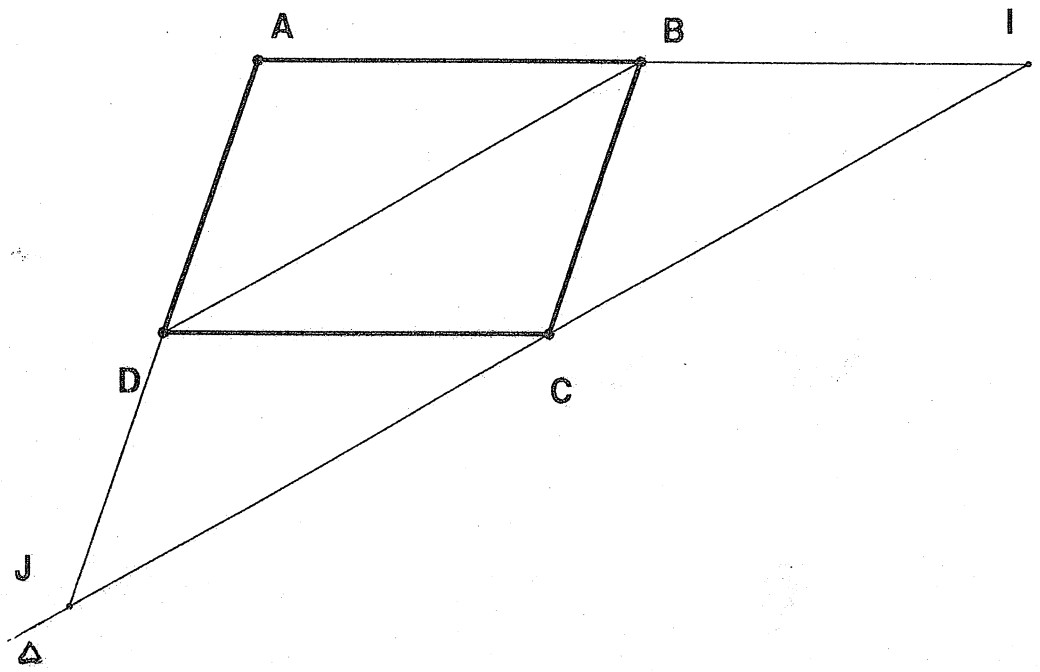


Exercice 10

Données :

- Un parallélogramme ABCD
- La parallèle Δ à (BD) passant par C
- I l'intersection de Δ et (AB)
- J l'intersection de Δ et (AD)

Montrer que C est le milieu de [I,J]

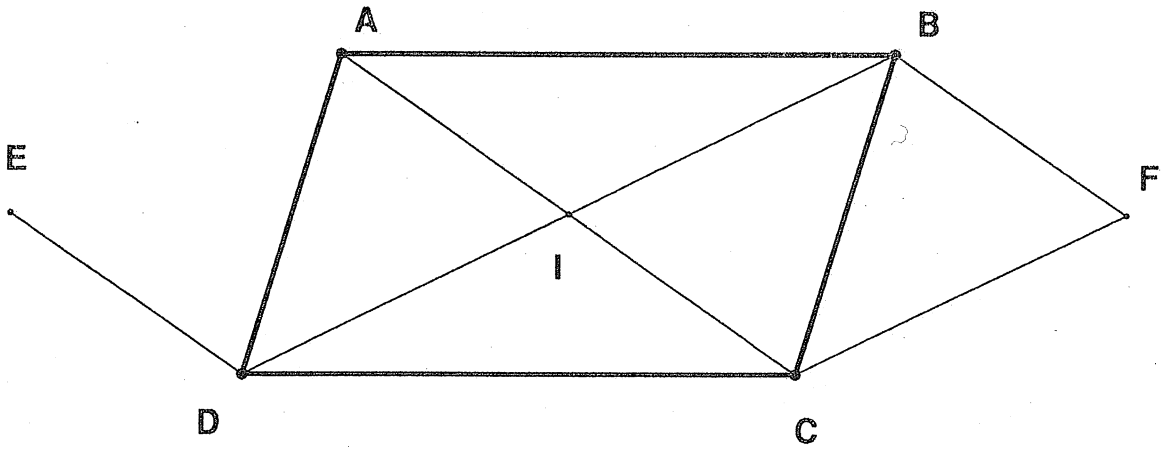


Exercice 11

Etant donné un parallélogramme ABCD de centre I.

1° Construire le point E transformé du point D par la translation $t_{(I,A)}$, puis le point F tel que le quadrilatère CIBF soit un parallélogramme.

2° Comparer les bipoints (D,E) et (F,B) et en déduire que I est le milieu du segment [E,F].

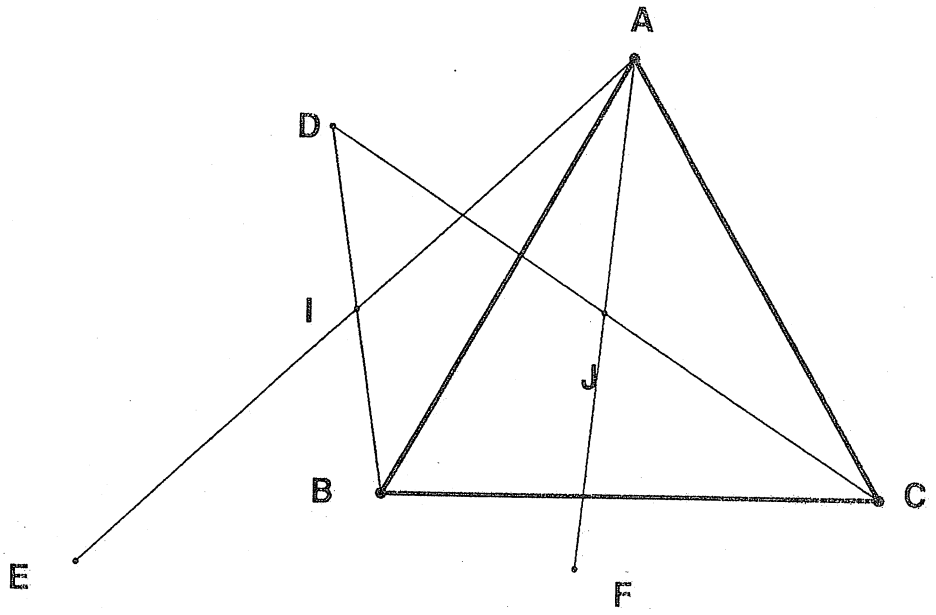


Exercice 12

On se donne un triangle équilatéral ABC et un point D. On note I le milieu du segment [D,B] et J celui du segment [D,C].

1° Construire les transformés E et F du point A par les symétries de centre I et J.

2° Quelle est la nature du triangle DEF ?

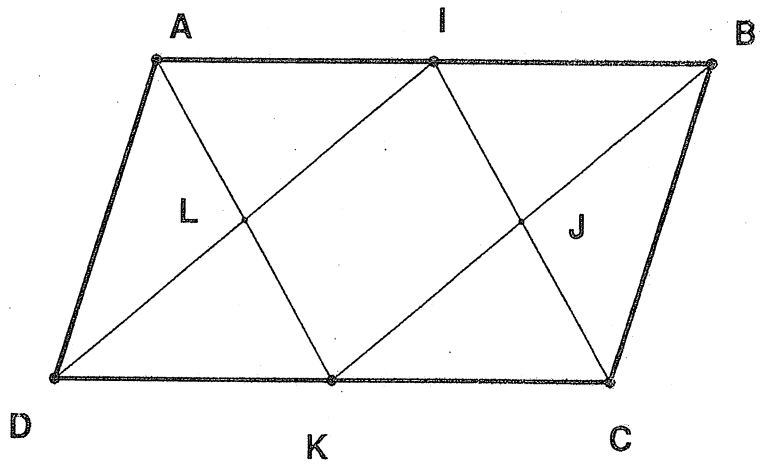


Exercice 13

Données:

- Un parallèlogramme ABCD
- I le milieu de [A,B]
- K le milieu de [C,D]
- L l'intersection des droites (AK) et (DI)
- J l'intersection des droites (BK) et (CI)

Démontrer que IJKL est un parallèlogramme, puis que $\overrightarrow{LJ} = \overrightarrow{DK}$.



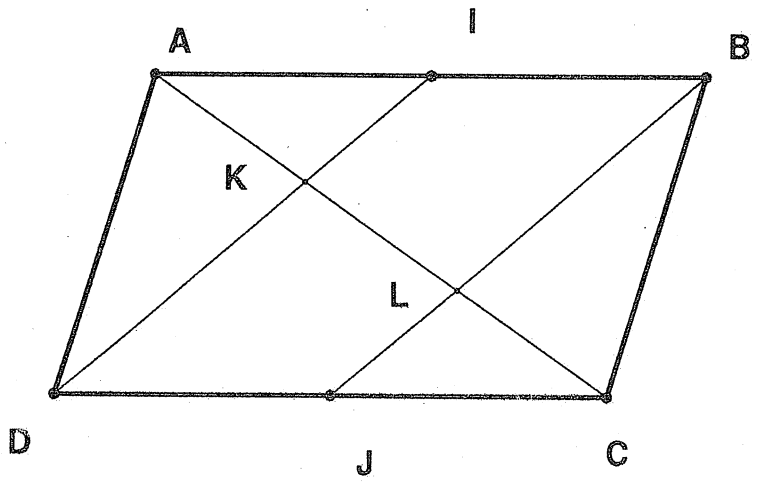
Exercice 14

Données:

- Un parallélogramme ABCD.
- I le milieu de [A,B]
- J le milieu de [C,D]
- (DI) coupe (AC) en K
- (BJ) coupe (AC) en L

1° Démontrer que $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{KL} = \overrightarrow{LC}$.

2° Déduire de la question précédente le partage en trois d'un segment dont les extrémités sont aux nœuds d'un quadrillage.



Commentaire: cet exercice peut-être traité de deux façons différentes:

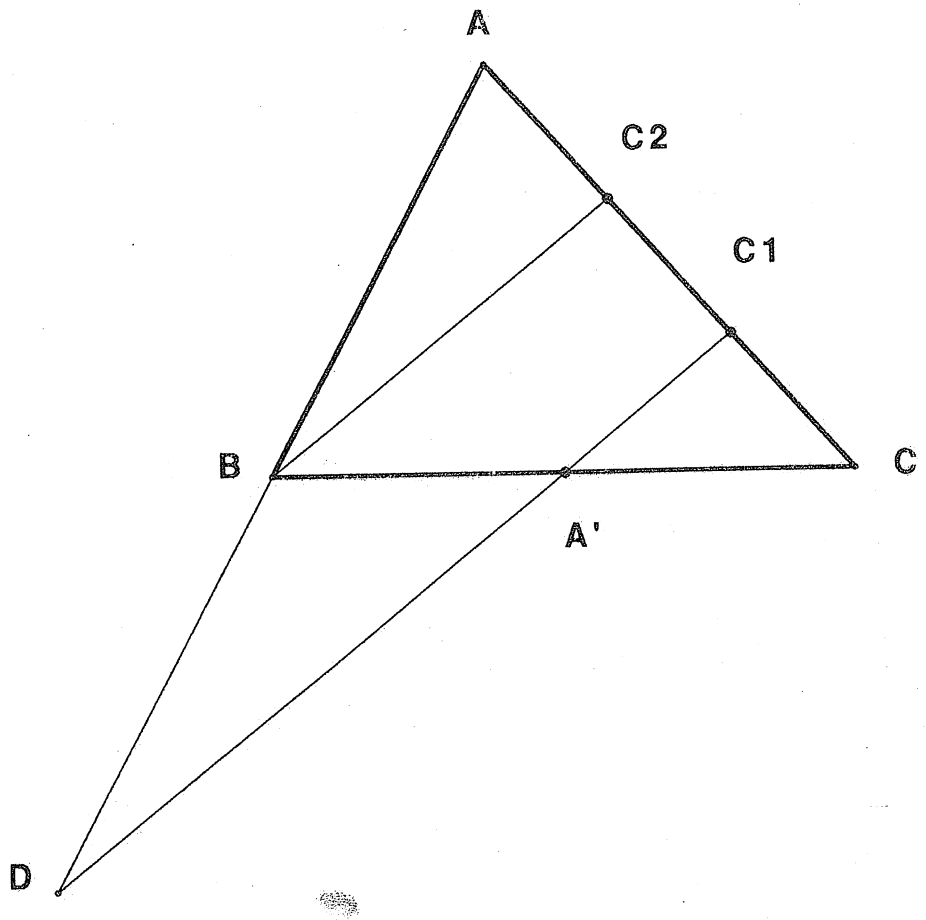
- naïvement: les bipoints (A,I) et (D,J) ont même direction, même sens et même longueur, etc ...
- on fait agir la translation de bipoint (A,D) et on utilise la "conservation du milieu".

Exercice 15

Données :

- Un triangle ABC
- A' le milieu de [B,C]
- D tel que $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB}$
- La droite (A'D) coupe (AC) en C_1
- La parallèle à (A'D) passant par B coupe (AC) en C_2

Démontrer que C_2 est le milieu de $[A,C_1]$ et que C_1 est le milieu de $[C_2,C]$.



Exercice 16

Dans un triangle ABC, on désigne par A', B' et C' les milieux respectifs des côtés [B,C], [C,A] et [A,B].

On considère la translation t_1 définie par le bipoint (B,B'). Par cette translation le point A' a pour transformé le point E.

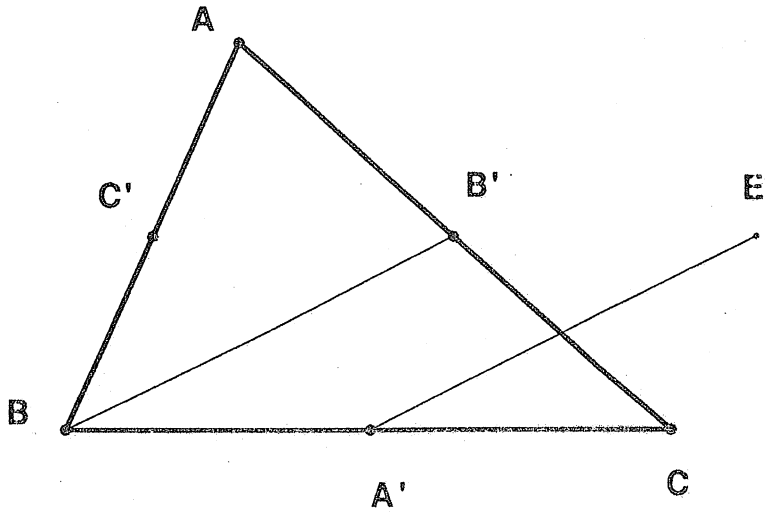
1° Faire un figure et construire le point E.

2° Démontrer que B' est le milieu de [C',E].

3° Montrer que CEAC' est un parallélogramme.

4° Montrer que CEC'B est un parallélogramme.

5° Démontrer que E est le transformé de C par la translation t_2 de bipoint (A',B').



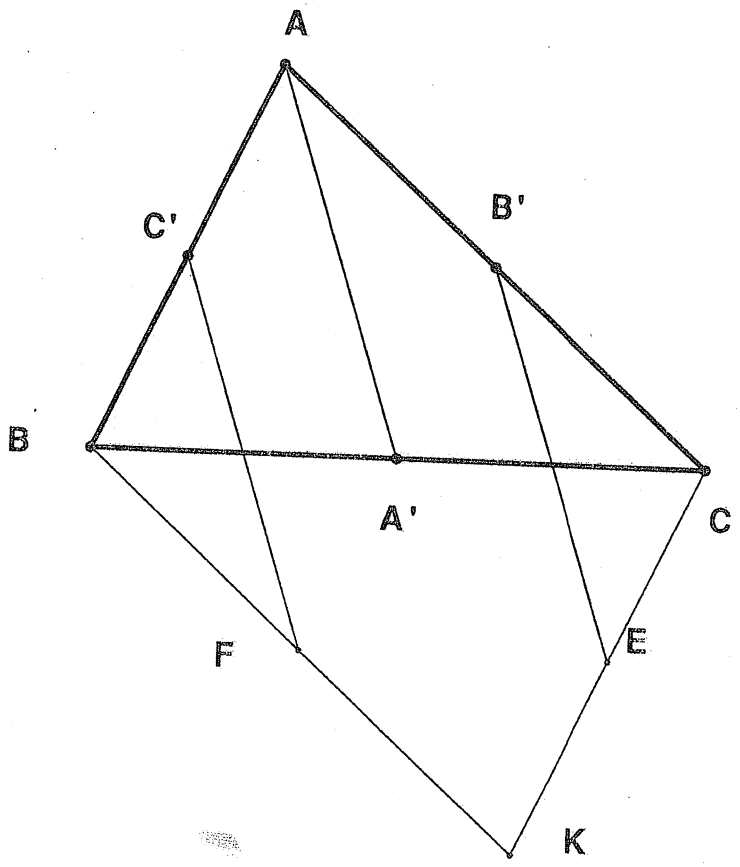
Exercice 17

On se donne un triangle ABC et on appelle A', B' et C' les milieux des côtés [B,C], [C,A] et [A,B].

La translation de bipoint (A,A') transforme B' en E et C' en F.

1° Démontrer que A' est le milieu de [C',E] et de [B',F].

2° Les droites (BF) et (CE) se coupent en K, démontrer que A' est le milieu de [A,K].



Exercice 18

Données:

- un triangle ABC,
- P et Q transformés des points A et C par la translation $t_{(B,C)}$
- I le milieu du segment [A,P]
- R le point d'intersection des droites (AB) et (IC).

On se propose d'établir que les points P, Q et R sont alignés.

1ère méthode:

1° Montrer que A est le milieu du segment [R,B]

Indication: On pourra s'inspirer de l'exercice précédent.

2° En déduire que les bipoints (R,A), (A,B) et ..... ont même vecteur.

3° Conclure.

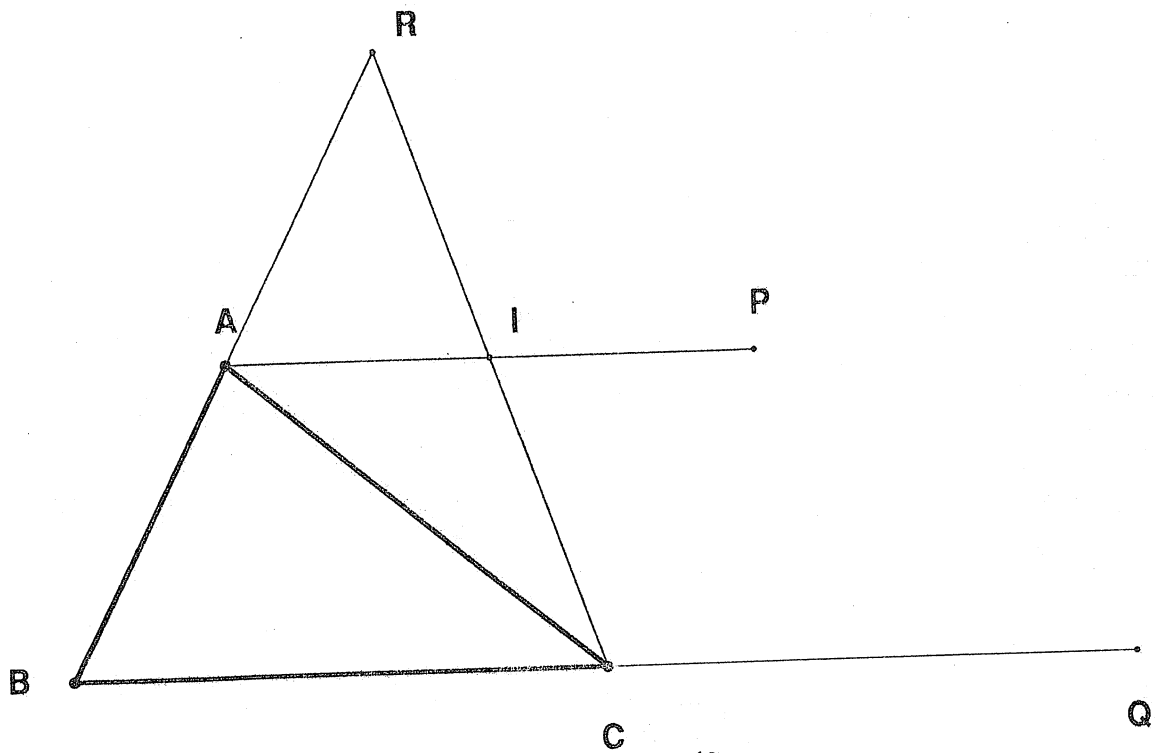
2ème méthode:

On désigne par T le point d'intersection des droites (AB) et (PQ).

1° Montrer que le triangle CPA est le triangle des milieux du triangle RBQ.

2° En déduire que les points I, C et T sont alignés. Comparer les points T et R.

3° Conclure.



Exercice 19

Etant donné un un parallélogramme ABCD, on note N le milieu de [D,C] et P le point d'intersection des droites (BN) et (AD).

On se propose de démontrer que D est le milieu de [P,A] et que N est le milieu de [P,B].

1ère méthode:

On introduit le milieu M du segment [A,B].

1° Montrer que les bipoints (A,M), (M,B) et (D,N) ont même vecteur.

Indication: On pourra faire intervenir la translation $t_{(A,D)}$

2° Conclure.

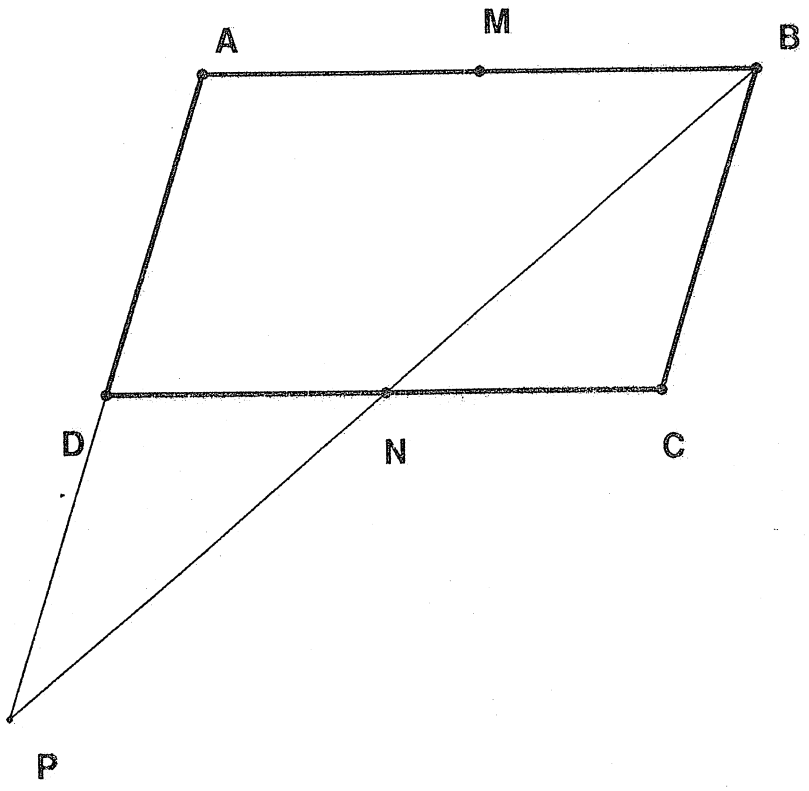
2ème méthode:

1° Montrer d'abord que N est le milieu de [P,B].

Indication: On pourra faire intervenir la symétrie de centre N -notée $\mathcal{S}_N$- et considérer que B appartient à deux droites dont on connait les transformées par $\mathcal{S}_N$.

2° a) Quelle est la nature du quadrilatère BCPD?

b) Conclure.



Exercice 20

On se donne un triangle ABC isocèle en A et un point D.

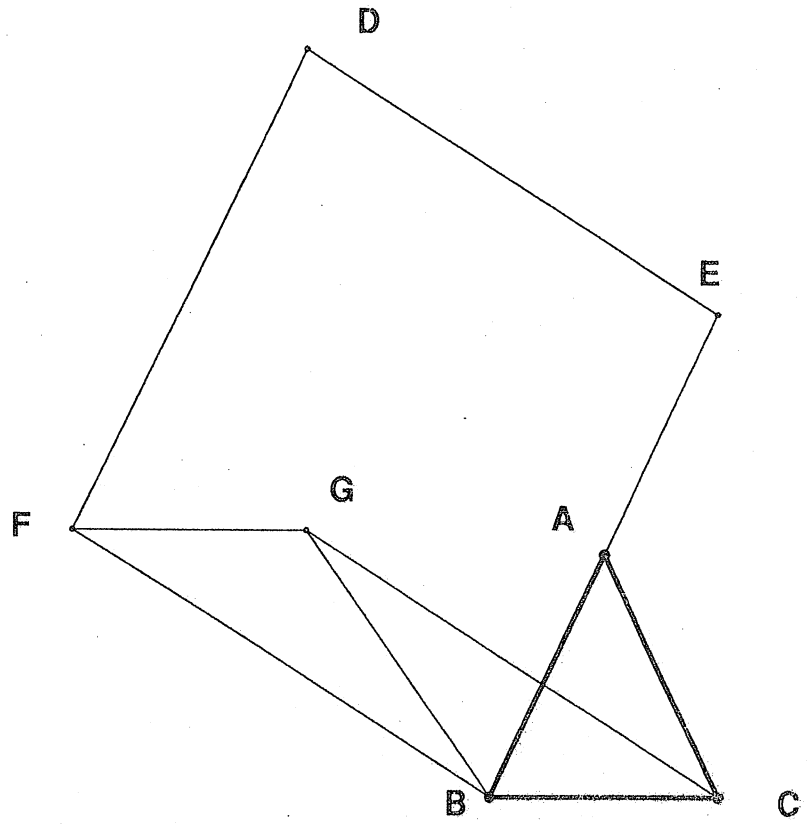
1° Construire le transformé E de B par la symétrie de centre A, puis les points F et G tels que les quadrilatères BEDF et CBFG soient des parallélogrammes.

2° On se propose d'établir que le triangle FGD est rectangle en G.

a) Quelle est la nature du triangle BCE ?

b) Comparer le triangle FGD au triangle BCE.

c) Conclure.



Exercice 21

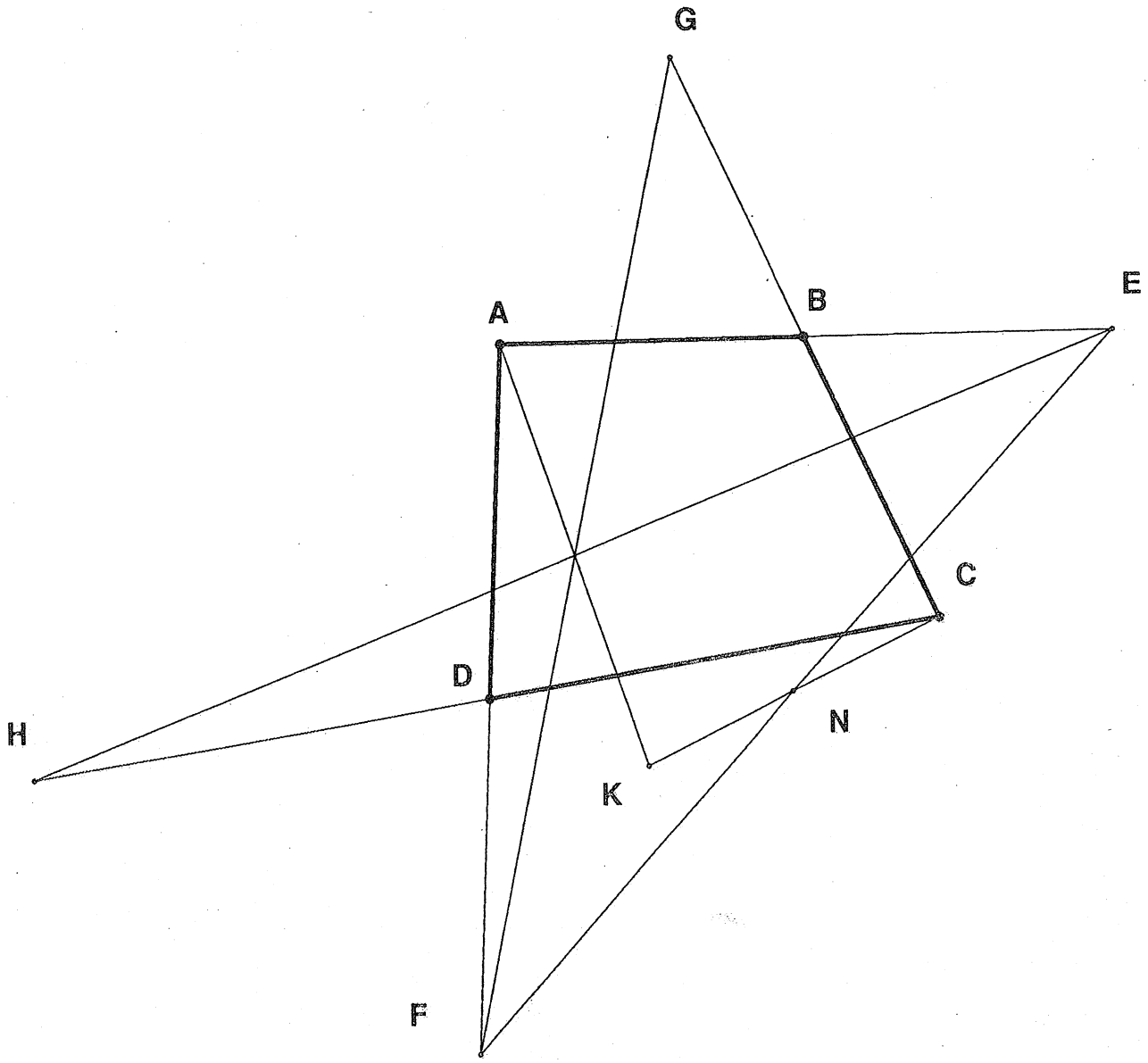
Soit un quadrilatère ABCD.

1° Construire les symétriques E et F de A par rapport à B et D.

2° Construire les symétriques G et H de C par rapport à B et D.

3° Montrer que EFHG est un parallélogramme.

4° On appelle N le milieu de [E,F] et K le symétrique de C par rapport à N. Montrer que (AK), (EH) et (FG) sont concourantes.



Exercice 22

On se donne un parallèlogramme ABCD et deux points E et F sur (AC).

1° Construire les points P et Q tels que:

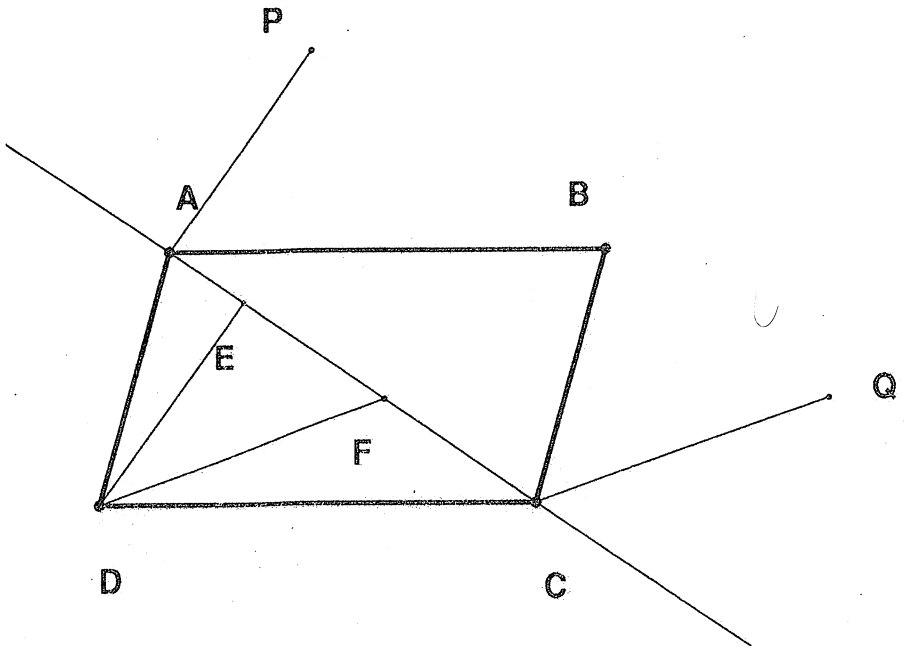
$$A \xmapsto{t_{(D,E)}} P \qquad \text{et} \qquad C \xmapsto{t_{(D,F)}} Q$$

2° a) Quel est le transformé du triangle CDE par la translation $t_{(D,A)}$?

b) Quel est le transformé du triangle ADF par la translation $t_{(D,C)}$?

c) En déduire que les points B, Q et P sont alignés.

3° Comment choisir les points E et F sur (AC) pour que B soit le milieu de [P,Q] ?



Exercice 23

Données:

- Deux droites sécantes $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$
- Une droite $\mathcal{D}'_1$ parallèle à $\mathcal{D}_1$
- Une droite $\mathcal{D}'_2$ parallèle à $\mathcal{D}_2$
- Un point M.

1° Montrer qu'il existe une translation unique t telle que

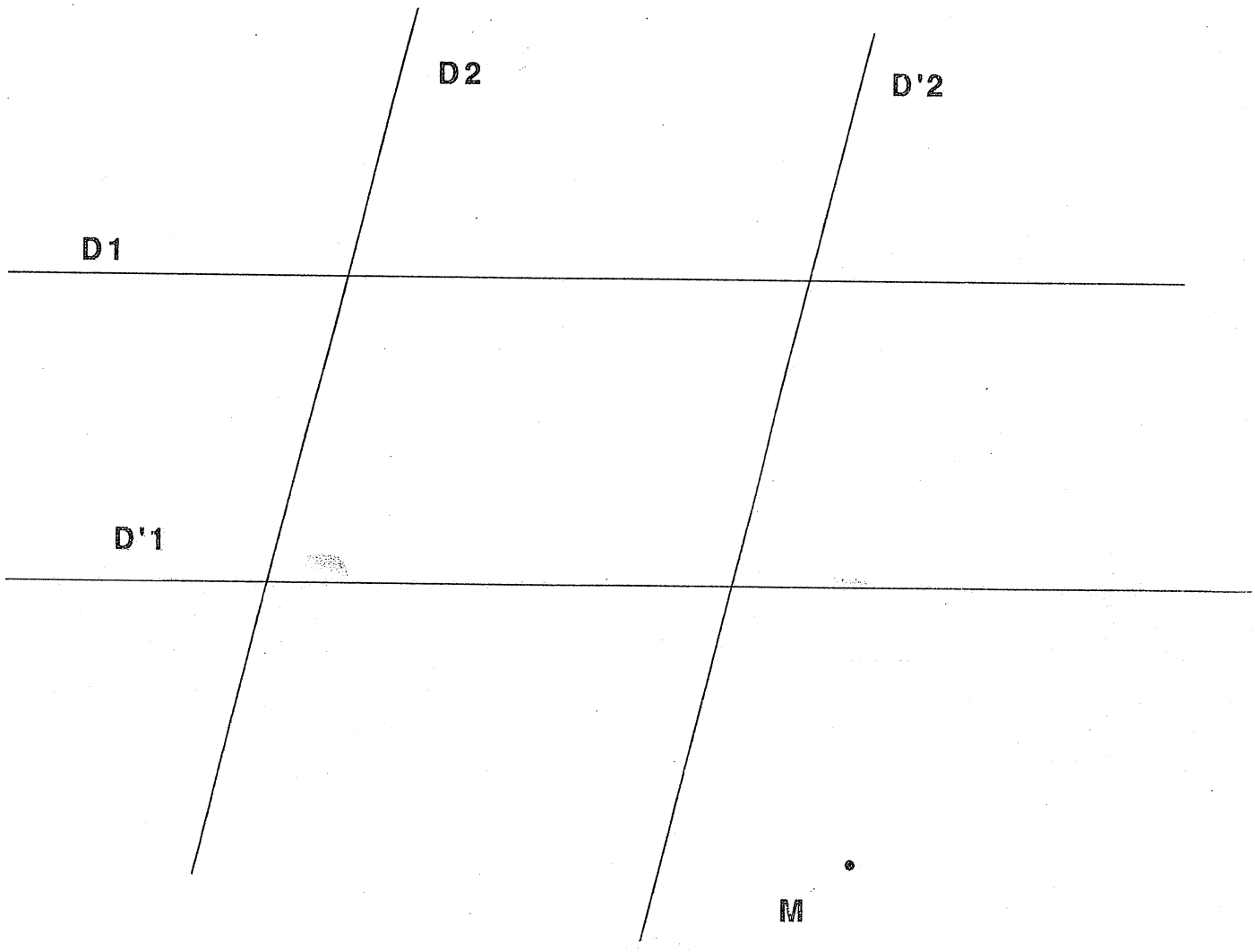
$$\mathcal{D}_1 \xmapsto{t} \mathcal{D}'_1$$
$$\mathcal{D}_2 \longmapsto \mathcal{D}'_2$$

2° Construire t(M).

3° Montrer qu'il existe une translation unique t' telle que

$$\mathcal{D}_1 \xmapsto{t'} \mathcal{D}'_1$$
$$\mathcal{D}'_2 \longmapsto \mathcal{D}_2$$

4° Construire t'(M).



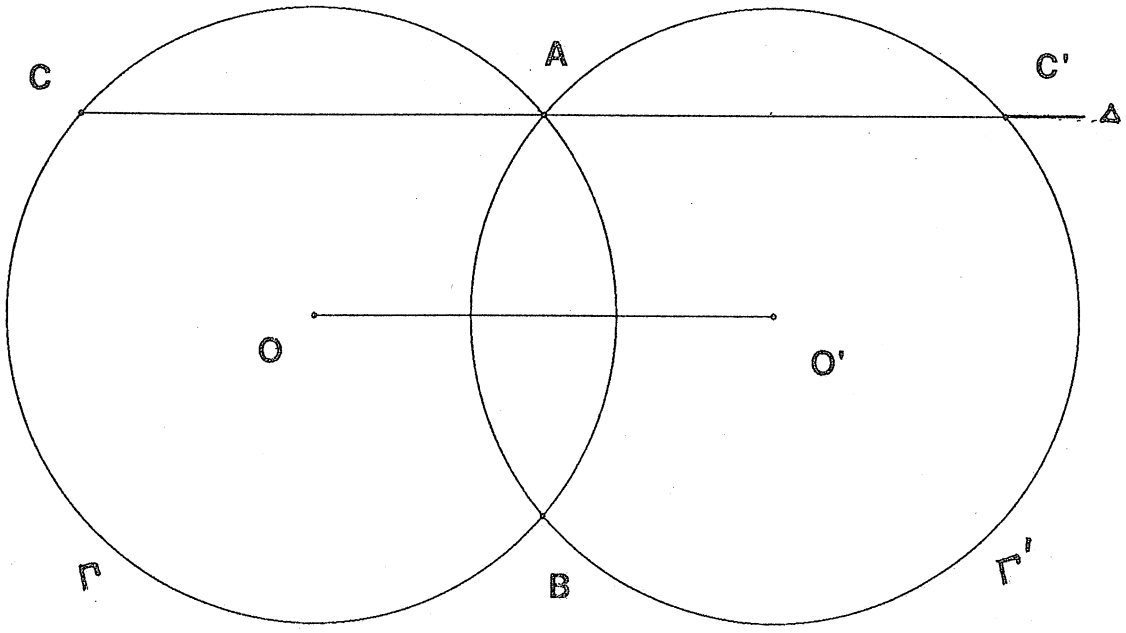
Exercice 24

Données:

- Deux cercles Γ et Γ' de centres O et O' et de même rayon sécants en A et B.
- La parallèle Δ à (OO') passant par A coupe Γ en C et Γ' en C'.

1° Démontrer que A est le milieu de [C,C'].

2° Démontrer que O est le milieu de [B,C] et que O' est le milieu de [B,C'].



Commentaire.

Il est clair que la translation $t_{(O,O')}$ transforme C en A et A en C'. La difficulté réside dans la justification de cette affirmation.

> Comme A appartient à la fois à Γ et Δ, son transformé appartient à Γ' et à Δ'. La translation $t_{(O,O')}$ ne laissant fixe aucun point, il s'ensuit que $t_{(O,O')}$ envoie A sur C'.

On s'occupe ensuite du transformé de C.

Remarque: en cherchant, au départ l'image du point C par la translation $t_{(O,O')}$ on a deux candidats possibles, et il est difficile a priori de trancher!

2

COMPOSEE de deux TRANSLATIONS

SOMME de deux VECTEURS

Partie A — ETUDE EXPERIMENTALE

Il s'agit d'étudier la correspondance entre une figure $\mathcal{F}$ donnée et la figure $\mathcal{F}''$ obtenue à partir de $\mathcal{F}$ comme le montre le schéma suivant où P, Q, R et S sont quatre points donnés:

$$\mathcal{F} \xmapsto{t_{(P,Q)}} \mathcal{F}' \xmapsto{t_{(R,S)}} \mathcal{F}''$$

1–Les bipoints (P,Q) et (R,S) n'ont pas même direction: T.P. (06)

1° En utilisant un papier calque comme cela a été explicité au T.P. (01) construire la figure $\mathcal{F}'$ transformée de $\mathcal{F}$ par la translation $t_{(P,Q)}$ puis la transformée $\mathcal{F}''$ de $\mathcal{F}'$ par la translation $t_{(R,S)}$.

2° Dessiner les bipoints de type (M,M") où M est un "point-clé" de $\mathcal{F}$ et M" son homologue dans $\mathcal{F}''$. Pouvez-vous faire une conjecture quant à la transformation qui envoie $\mathcal{F}$ sur $\mathcal{F}''$? Contrôler cette conjecture à l'aide d'un papier calque.

Nota: Cette transformation composée est appelée:

« $t_{(P,Q)}$ suivie de $t_{(R,S)}$ »

3° On se propose maintenant d'étudier l'action et l'effet de la composée: « $t_{(R,S)}$ suivie de $t_{(P,Q)}$ » sur la figure $\mathcal{F}$.

En utilisant un papier calque, construire la figure $\mathcal{F}_1$ tarnsformée de $\mathcal{F}$ par la translation $t_{(R,S)}$ puis la transformée de $\mathcal{F}_1$ par la translation $t_{(P,Q)}$. Que constatez-vous ?

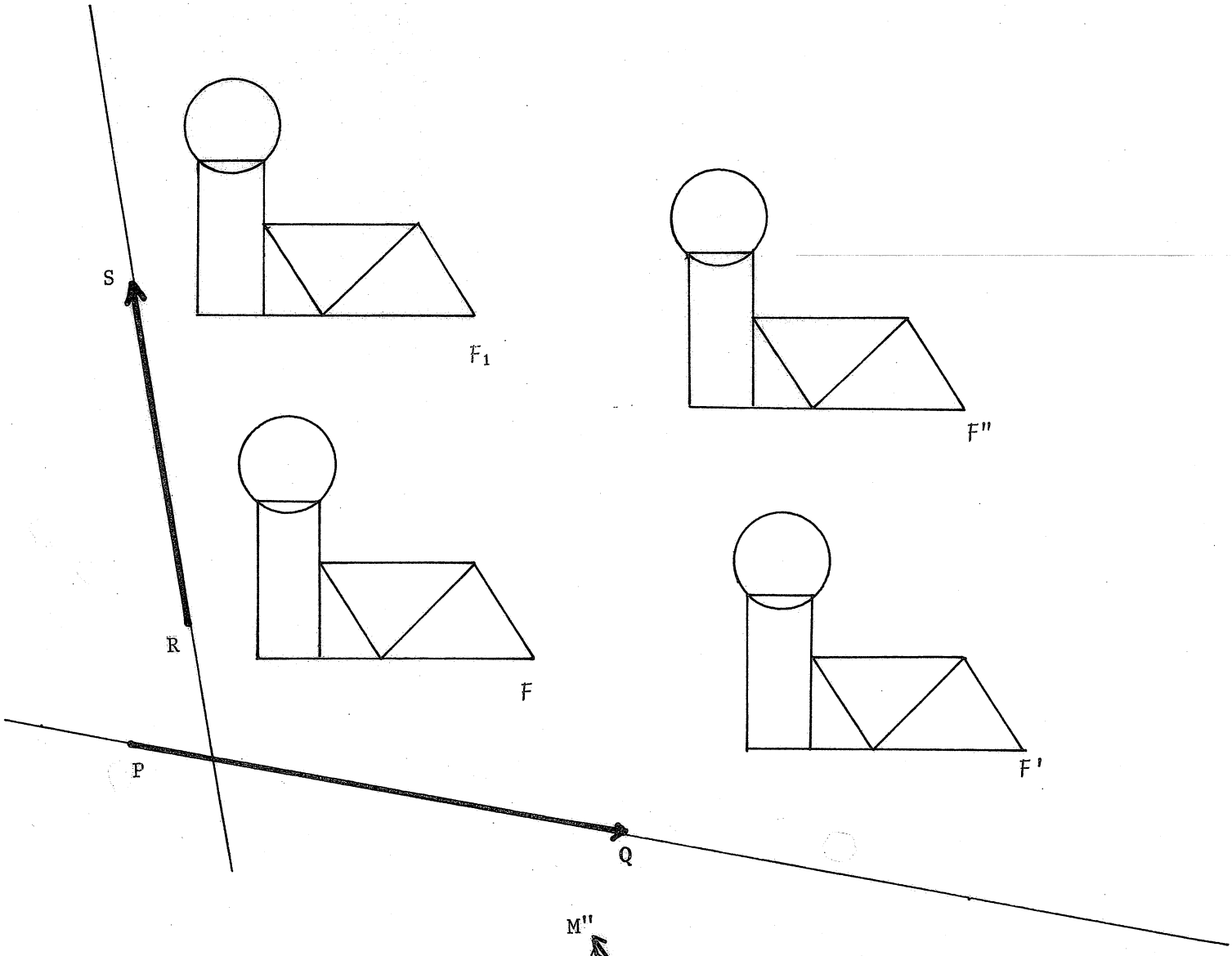
Quelle conjecture pouvez-vous faire alors concernant l'action et l'effet sur les figures des composées:
« $t_{(P,Q)}$ suivie de $t_{(R,S)}$ » et « $t_{(R,S)}$ suivie de $t_{(P,Q)}$ » ?

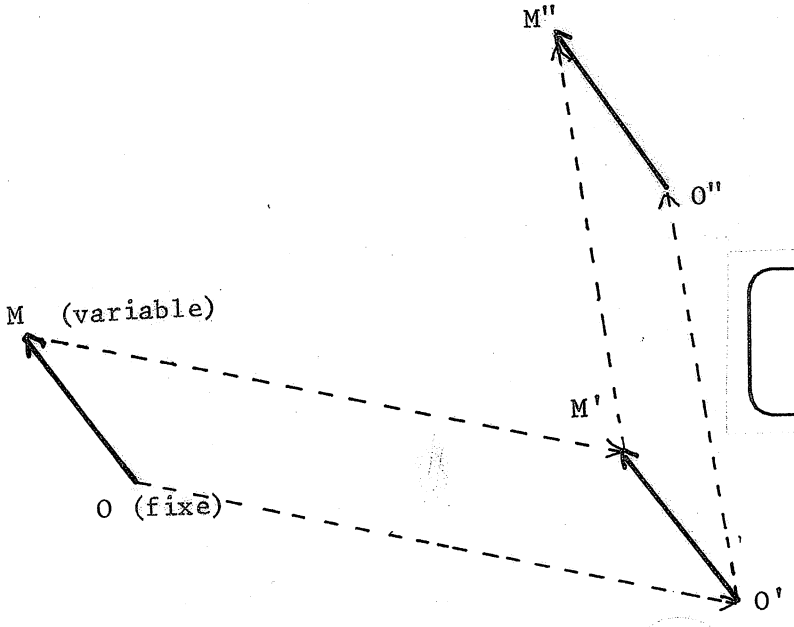
2–Les bipoints (P,Q) et (R,S) ont même direction: T.P. (07)

Reprendre dans le même ordre les manipulations décrites dans le T.P. (06). On expérimentera dans les deux cas suivants:

a) Les bipoints (R,S) et (P,Q) n'ont pas même vecteur.

b) Les bipoints (R,S) et (P,Q) ont même vecteur.





Feuille Annexe 5

Partie B ETUDE THEORIQUE

I - PREMIERE SEQUENCE DEDUCTIVE

Cette séquence a pour but d'authentifier la conjecture émise lors des trois manipulations précédentes quant à la nature de la composée de deux translations.

Les points P, Q, R et S sont donnés dans un plan $\mathcal{P}$.

1-Etude du cas général:

les bipoints (R,S) et (Q,P) n'ont pas même vecteur.

On choisit dans le plan $\mathcal{P}$ deux points O et M auxquels on accorde deux statuts différents:

- Le point O, une fois choisi, est considéré comme définitivement fixé.
- Le point M est considéré comme mobile et peut donc occuper n'importe quelle position dans $\mathcal{P}$. Son positionnement sur le dessin ne sert qu'à se faire une idée et ne doit en aucun cas être pris en compte.

Ceci dit on désigne par :

O' et M' les transformés de O et M par la translation $t_{(P,Q)}$

O" et M" les transformés de O' et M' par la translation $t_{(R,S)}$

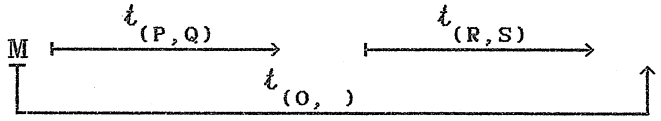
Questions:

1° Quel statut doit-on accorder aux points O' et O" ? Aux points M' et M" ?

2° En se référant à §I-B-II-2, quelle déduction peut-on faire concernant les bipoints (O,M) et (O',M') ? Les bipoints (O',M') et (O",M") ? Qu'en résulte-t-il alors pour les bipoints (O,M) et (O",M") ?

3° En se référant maintenant à la réponse précédente ainsi qu'à la propriété P03, quelle déduction peut-on faire quant aux bipoints (M,M") ?

Utiliser cette réponse pour compléter le schéma suivant:



Compte tenu de ce que M désigne un point quelconque de $\mathcal{P}$, connaissez-vous une transformation qui, dans le plan $\mathcal{P}$, fait exactement le même travail que la composée:

« $t_{(P,Q)}$ suivie de $t_{(R,S)}$ » ?

Compléter la phrase suivante:

La composée « $t_{(P,Q)}$ suivie de $t_{(R,S)}$ » est égale à la.....

.....

2-Etude du cas particulier:

les bipoints (R,S) et (Q,P) ont même vecteur.

M étant un point quelconque du plan $\mathcal{P}$, on note M' le transformé de M par la translation $t_{(P,Q)}$ et M" le transformé de M' par la translation $t_{(R,S)}$.

Ceci se traduit, en langage vectoriel, par les égalités suivantes:

$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{M'M''} = \overrightarrow{RS}$ et $\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{QP}$ (Hypothèse)

On en déduit d'une part: $\overrightarrow{M'M''} = \overrightarrow{QP}$, d'autre part: $\overrightarrow{M'M''} = \overrightarrow{QP}$.

Par suite il vient: $\overrightarrow{M'M''} = \overrightarrow{M'M}$, puis M" = M (propriété P0)

Le schéma: $M \xmapsto{t_{(P,Q)}} M' \xmapsto{t_{(R,S)}} M''$ montre alors que, dans le cas présent, la composée « $t_{(P,Q)}$ suivie de $t_{(R,S)}$ » laisse invariant chaque point du plan $\mathcal{P}$. Cette composée est donc une "transformation qui ne transforme pas".

3-Convention.

Le résultat précédent, que l'expérience laissait prévoir, est génant, car s'il n'était ce cas particulier, on pourrait énoncer le résultat suivant:

« la compossée de deux translations est une translation »

Pour remédier à cet état de fait, on convient d'appeler encore translation cette "transformation qui ne transforme pas". Les bipoints qu'elle engendre (O,O), (A,A), (B,B), ..., sont tous de longueur nulle et n'ont ni direction, ni sens. Ils constituent donc une espèce à part qu'il convient de rattacher au cas général en lui conférant une grandeur commune. On dit alors qu'ils sont de vecteur nul.

Le vecteur nul est donc la grandeur géométrique attachée aux bipoints de type (O,O), (K,K), (Q,Q), (B,B), ... On pourra, en cas de besoin le noter $\overrightarrow{OO}$, $\overrightarrow{KK}$, $\overrightarrow{QQ}$, $\overrightarrow{BB}$, ...

4-Conclusion.

Avant de clore cette séquence, nous devons étudier la composée de cette nouvelle translation et d'une translation quelconque.

Le résultat est évident. En effet, quel que soit le bipoint (A,B), il est clair que la composée « $t_{(O,O)}$ suivie de $t_{(A,B)}$ » fait le même travail que $t_{(A,B)}$ puisque $t_{(O,O)}$ ne fait rien. Il en est de même de la composée « $t_{(A,B)}$ suivie de $t_{(O,O)}$ ». On a donc:

« $t_{(O,O)}$ suivie de $t_{(A,B)}$ » = « $t_{(O,O)}$ suivie de $t_{(A,B)}$ » = $t_{(A,B)}$.

On peut maintenant conclure en toute généralité:

La composée de deux translations est une translation

II - DEUXIEME SEQUENCE DEDUCTIVE

Cette séquence a pour but d'authentifier la conjecture émise lors de l'étude expérimentale quant à l'ordre suivant lequel on compose deux translations.

Le cas où intervient la translation de vecteur nul (celle qui ne fait rien) a déjà été abordé dans le paragraphe précédent. Reste à étudier le cas général où on compose les translations $t_{(P,Q)}$ et $t_{(R,S)}$ P, Q, R et S étant quatre points d'un plan $\mathcal{P}$.

Fixons un point O dans le plan $\mathcal{P}$ et notons:

- O' le transformé de O par la translation $t_{(P,Q)}$.
- O_1 et O" les transformés de O et O' par la translation $t_{(R,S)}$

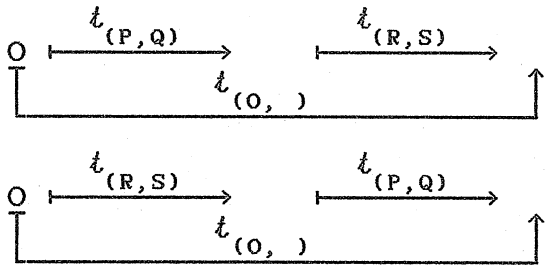
Questions:

1° Construire les points O', O_1 et O". Quel statut doit-on accorder à ces trois points ?

2° Quelle particularité ont les bipoints (P,Q) et (O,O') ? (R,S) et (O,O_1) ? (R,S) et (O',O") ? Justifier votre réponse en faisant référence à une propriété connue que l'on rappellera. Que peut-on en déduire concernant les bipoints (O,O_1) et (O',O") ?

3° En se référant aux réponses précédentes et à une proprété qu'on rappellera quelle déduction peut-on faire quant aux bipoints (O,O') et $(O_1,O")$? puis (P,Q) et $(O_1,O")$?

4° Compléter les deux schémas suivants:



Quel résultat a-t-on utilisé pour faire ce complément ? Qu'en découle-t-il ?

On peut alors conclure en toute généralité:

La composée de deux translations ne dépend pas de l'ordre dans lequel on les compose.

Partie C

COMPOSEE DE DEUX TRANSLATIONS

SOMME DE DEUX VECTEURS

Deuxieme phase de modelisation

I - COMPOSEE DE DEUX TRANSLATIONS

A la liste des résultats déjà institutionnalisés vient s'ajouter la propriété suivante:

Propriété P08

- La composée de deux translations est une translation.
- Cette translation composée ne dépend pas de l'ordre dans lequel on compose les translations initiales.

Commentaire.

Dans le cursus scolaire actuel l'étude de la composée de deux translations trouve place en classe de Troisième. Elle est reliée à l'addition vectorielle (travail d'initiation). L'apparition du vecteur nul est programmée en classe de Seconde.

Or pour obtenir un résultat facilement modélisable concernant la composée de deux translations, donc apte à servir d'appui à la définition de la somme de deux vecteurs, nous avons été contraints de faire naître, avant terme, le vecteur nul.

Comme il est de mise en pareille circonstance, il conviendra de placer en couveuse ce bébé prématuré. Ce n'est qu'à partir de la classe de Seconde qu'on pourra l'utiliser de façon systématique.

II - SOMME DE DEUX VECTEURS

1-Définition de la somme de deux vecteurs.

A, B, C et D étant des points d'un plan $\mathcal{P}$, on décide de noter:

- $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ le vecteur de la translation « $t_{(A,B)}$ suivie de $t_{(C,D)}$ »
- $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AB}$ le vecteur de la translation « $t_{(C,D)}$ suivie de $t_{(A,B)}$ »

Comme « $t_{(A,B)}$ suivie de $t_{(C,D)}$ » est égale à « $t_{(C,D)}$ suivie de $t_{(A,B)}$ » on a donc $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AB}$. On appellera ce vecteur "somme des vecteurs" $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$.

On adopte ainsi la définition suivante:

Etant donné des points A, B, C, D, E et F du plan $\mathcal{P}$, le vecteur de la translation obtenue en composant dans l'ordre qu'on veut les translations $t_{(A,B)}$ et $t_{(C,D)}$ est appelée:

somme des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$

On le note indifféremment $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ ou $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AB}$

2-Conséquences immédiates.

Soit A, B, C et D des points du plan $\mathcal{P}$.

- Supposons que la composée des translations $t_{(A,B)}$ et $t_{(C,D)}$ envoie E sur F.

  On peut alors noter $\overrightarrow{EF}$ le vecteur de cette translation composée. Comme par ailleurs, on a déjà décidé de noter ce vecteur $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$, on a donc: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF}$.

- Réciproquement supposons que l'on ait: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF}$.

  Alors $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont deux notations du vecteur de la composée des translations $t_{(A,B)}$ et $t_{(C,D)}$. Cette translation composée transforme donc E en F.

  On retiendra que:

- Si la composée des translations $t_{(A,B)}$ et $t_{(C,D)}$ envoie E sur F alors on a: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF}$.
- Si on a: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF}$ alors la composée des translations $t_{(A,B)}$ et $t_{(C,D)}$ envoie E sur F

Pour résumer cette situation, on dit que:

L'égalité $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF}$ est la traduction, en langage vectoriel, de l'énoncé: « la composée des translations $t_{(A,B)}$ et $t_{(C,D)}$ envoie E sur F »

3–Problème de construction.

Les points A, B, C, D et E étant donnés dans un plan $\mathcal{P}$, construire le point F tel que: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF}$.

D'après ce qui précède, on sait que F est le transformé de E par la composée des translations $t_{(A,B)}$ et $t_{(C,D)}$. On dispose alors de deux procédés de construction (voir figure (1) et (2))

1er procédé

On construit le bipoint (E,I) de même vecteur que (A,B) puis le bipoint (I,F) de même vecteur que (C,D).

On a alors schématiquement:

$$E \xmapsto{t_{(A,B)}} I \xmapsto{t_{(C,D)}} F$$

Autrement dit, F est le transformé de E par la translation:

« $t_{(A,B)}$ suivie de $t_{(C,D)}$ »

2eme procédé

On construit le bipoint (E,J) de même vecteur que (C,D) puis le bipoint (J,F) de même vecteur que (A,B).

On a alors schématiquement:

$$E \xmapsto{t_{(C,D)}} J \xmapsto{t_{(A,B)}} F$$

Autrement dit, F est le transformé de E par la translation:

« $t_{(C,D)}$ suivie de $t_{(A,B)}$ »

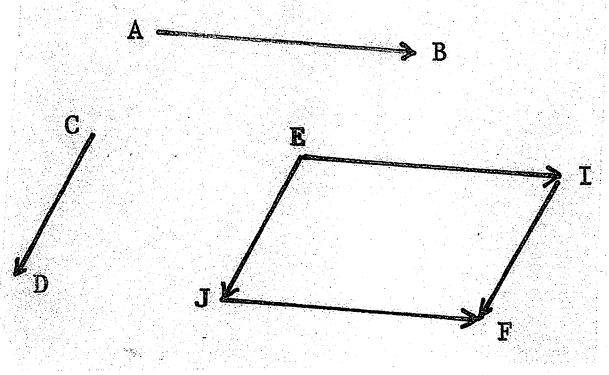


figure 1

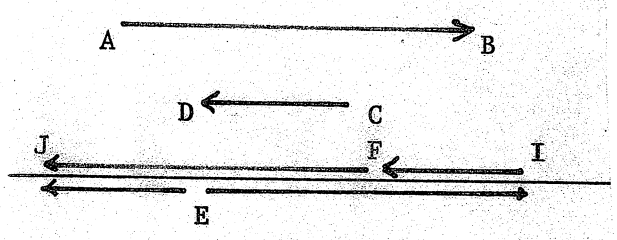


figure 2

Remarques:

- On est sûr que les deux procédés donnent le même point F puisqu'on sait que la composée « $t_{(A,B)}$ suivie de $t_{(C,D)}$ » fait le même travail que la composée « $t_{(C,D)}$ suivie de $t_{(A,B)}$ »
- L'énoncé: « la composée des translations $t_{(A,B)}$ et $t_{(C,D)}$ envoie E sur F » est la transcription, en *langage "transformations"*, de l'égalité: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF}$.

4-Relation de Chasles.

a) Exercice résolu.

Etant donné des point A, B et C d'un plan $\mathcal{P}$, déterminer le point X tel que: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AX}$.

Solution: L'égalité $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AX}$ signifie que la composée des translations $t_{(A,B)}$ et $t_{(B,C)}$ envoie A sur X.

Or on peut dresser le schéma suivant:

$$A \xmapsto{t_{(A,B)}} B \xmapsto{t_{(B,C)}} C$$

ce qui prouve que X = C.

b) La propriété.

Dans l'exercice précédent aucune mention n'est faite sur les positions des points A, B et C. On peut donc énoncer la propriété suivante:

Propriété P09:

Quels que soient les points A, B et C d'un plan $\mathcal{P}$, on a:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

Cette propriété est connue sous le nom de: **relation de Chasles.**

5-Parallèlogramme et somme vectorielle.

Les deux scénarios que nous proposons ci-après ont pour but de mettre en relief, pour un élève de Troisième, l'une et l'autre des deux étapes qui conduisent à l'énoncé des propriétés suivantes:

Propriété P10:

- Si ABCD est un parallèlogramme alors $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.
- Si un quadrilatère ABCD est tel que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ alors ce quadrilatère est un parallèlogramme.

1er Scénario.

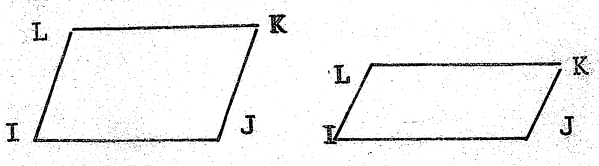
Acte I

Bernard, le professeur de Claire propose en classe l'énoncé suivant:

« Si IJKL est un parallélogramme alors $\overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{IL} = \overrightarrow{IK}$ »

et demande: "Est-il vrai ou faux? "

Claire sait que, indépendamment de la forme et de la taille du parallèlogramme IJKL les bipoints (I,L) et (J,K) ont même vecteur.



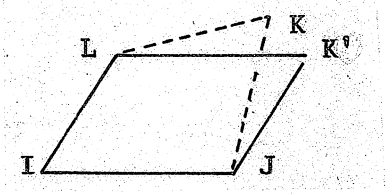
Elle répond alors à son professeur « L'énoncé est vrai et je peux le prouver en utilisant la relation de Chasles »

Question:

Quelle est l'argumentation de Claire?

Acte II.

Claire de retour à la maison, reçoit en cadeau de son frère Pierre la figure suivante accompagnée du commentaire:



J'ai construit un quadrilatère IJKL tel que: $\overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{IL} = \overrightarrow{IK}$.

Claire qui n'accorde qu'une confiance limitée aux propos de son frère construit alors le point K' tel que JILK' soit un parallélogramme.

Compte tenu du résultat qu'elle a établi le matin même, elle dit:

« Pierre, je peux te prouver que ta figure est fausse »

Question:

Quelle argumentation peut fournir Claire?

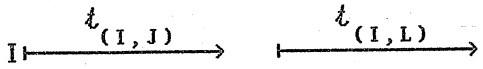
2ème Scénario.

Acte I

Christophe dit à sa sœur Marge:

« J'ai construit un quadrilatère IJKL tel que: $\overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{IL} = \overrightarrow{IK}$. Peux-tu deviner quelle gueule il a? »

Marge n'aime pas que son frère la prenne pour une tarée. Comme elle sait traduire l'égalité vectorielle $\overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{IL} = \overrightarrow{IK}$ en termes de translations, elle donne le schéma suivant:



puis, après l'avoir complété et réfléchi un bref instant, elle annonce à son frère:
« Je connais la nature du quadrilatère IJKL »

Questions:

- Compléter le schéma de Marge.
- Que peut-elle en déduire concernant les bipoints (I,L) et (J,K)?
- Quelle propriété va-t-elle évoquer pour justifier sa réponse?
- Faire une figure illustrant ses propos.

Acte II

Christophe revient à la charge et demande à Marge:
« Peux-tu me garantir que, pour n'importe quel parallèlogramme IJKL, on a $\overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{IL} = \overrightarrow{IK}$? »

Marge a des ressources. Elle répond aussitôt à son frère:
« Oui et de deux façons. Dans l'une j'utilise la composition des translations, dans l'autre la relation de Chasles ».

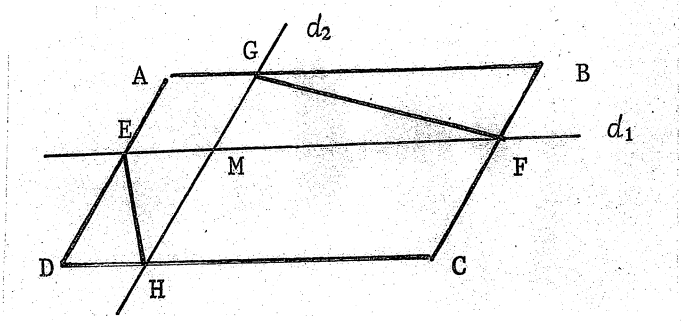
Question:

Quelle argumentation peut donner Marge?

III - TRAVAUX DIRIGES

1-T. D. 1: D'après "Activités Géométriques en Classe de Seconde", IREM de BORDEAUX (1981).

1ère Séquence:



Dans la figure ci-dessus ABCD est un parallèlogramme; d_1 et d_2 sont deux droites respectivement parallèles à (AB) et (AD) et M est leur leur point d'intersection

- Déterminer graphiquement le point X tel que $\overrightarrow{EH} + \overrightarrow{GF} = \overrightarrow{AX}$.
- Quelle conjecture peut-on faire quant au point X?

2ème Séquence:

On se propose maintenant de montrer que la conjecture émise en s'appuyant sur une construction graphique, est vraie, indépendamment de la forme et de la taille du parallèlogramme ainsi que la position du point M

Objectif: Il s'agit de prouver que la composée des translations $t_{(E,H)}$ et $t_{(G,F)}$ transforme A en ..... .

Méthode: Comme on ne peut pas situer exactement le transformé de A par l'une ou l'autre des translations $t_{(E,H)}$ et $t_{(G,F)}$, sans faire de dessin, on va considérer que le point A se trouve sur deux droites dont on connaît les transformées dans n'importe quel cas de figure.

Questions:

1° Compléter les deux schémas suivants: (justifier vos réponses)

- (AD) $\xrightarrow{t_{(E,H)}}$ $\xrightarrow{t_{(G,F)}}$
- (AB) $\xrightarrow{t_{(G,F)}}$ $\xrightarrow{t_{(E,H)}}$

2° On désigne par t la composée des translations $t_{(E,H)}$ et $t_{(G,F)}$.

a) A quelles figures élémentaires appartient le transformé de A par t ?

b) Que peut-on en déduire?

3° Proposer un énoncé de problème, dans lequel on demanderait à un élève n'ayant pas participé à ce travail dirigé, de démontrer le résultat précédent.

Commentaire.

1) Afin de dégager la méthode préconisée ci-dessus pour établir que $\overrightarrow{EH} + \overrightarrow{GF} = \overrightarrow{AC}$ le professeur pourra, une fois précisé l'objectif du problème, poser oralement à son auditoire les questions suivantes:

- A quelle figure élémentaire appartient le transformé A' du point A par la translation $t_{(E,H)}$? Pourquoi?
- A quelle figure élémentaire appartient le transformé du point A' par la translation $t_{(G,F)}$? Pourquoi?

2) La méthode généralement utilisée pour établir ce résultat est purement vectorielle. Elle consiste à décomposer chacun des vecteurs $\overrightarrow{EH}$ et $\overrightarrow{GF}$ en une somme de vecteurs colinéaires à $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. Or cette méthode ne peut être menée à terme en classe de Troisième car elle met en jeu la somme de quatre vecteurs et fait intervenir les propriétés d'associativité et de commutativité de l'addition vectorielle. Il faudra donc attendre la classe de Seconde pour la pratiquer.

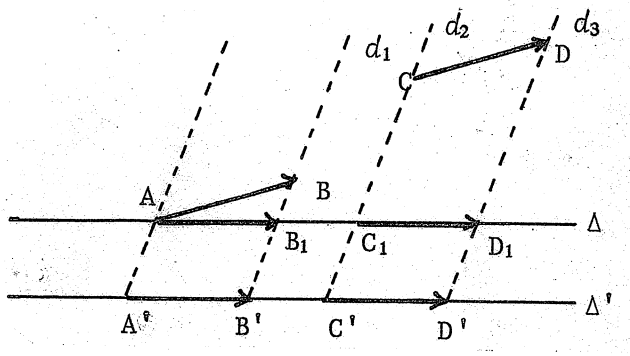
On pourra alors remarquer que, du point de vue élégance, la démonstration ci-dessus n'a rien à envier à celle qui doit lui faire concurrence.

2-T. D. 2: Effet d'une projection sur une égalité vectorielle.

On se propose d'établir le résultat suivant:

Si des points A, B, C et D satisfont à la relation $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ alors leurs projetés respectifs A', B', C' et D' sur une droite Δ satisfont à $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{C'D'}$. *(cf programme de Seconde)*

- Etude du cas général: la direction de projection n'est pas celle de (AB).



a) Remarque préliminaire.

La parallèle Δ' menée par A à la droite Δ rencontre les projetantes d_1, d_2 et d_3 passant par B, C et D en B_1, C_1 et D_1.

Justifier que les bipoints (A,B_1) et (A',B') d'une part ; (C_1,D_1) et (C',D') d'autre part ont même vecteur.

b) Exposé de la méthode.

Compte tenu de la remarque précédente, l'objet du problème consiste à montrer que les bipoints (A,B_1) et (C_1,D_1) ont même vecteur, autrement dit que la translation $t_{(A,B_1)}$ envoie C_1 sur D_1.

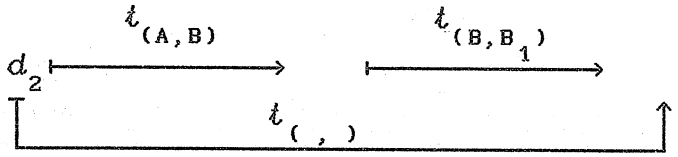
Ceci dit, pour déterminer le transformé de C_1 par $t_{(A,B_1)}$, on va chercher les transformées des droites Δ' et d_2 par cette translation.

c) Questions:

1° Quelle est la transformée de Δ' par $t_{(A,B_1)}$?

2° Pour trouver la transformée de d_2 par $t_{(A,B_1)}$ on va "décomposer" cette translation.

Compléter le schéma suivant en justifiant vos réponses:



(ne pas oublier que (A,B) et (C,D) ont même vecteur)

3° En vous appuyant sur les résultats obtenus dans les les questions 1 et 2, déterminer quel est le transformé de C_1 par la translations $t_{(A,B_1)}$? A quelle conclusion parvient-on en ce qui concerne les bipoints (A',B') et (C',D')?

- Etude du cas particulier: La direction de projection est celle de (AB).

  Question:

  ‖ La conclusion précédente est-elle encore vérifiée?

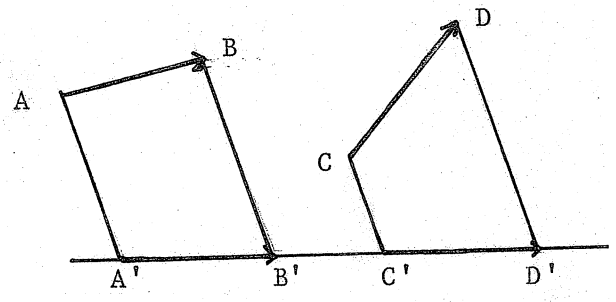
  Nota.

  On pourra retenir le résultat de cette étude sous la forme suivante:

  Propriété P11

Les projetés sur une droite de deux bipoints de même vecteur sont deux bipoints de même vecteur.

La réciproque de cette propriété, à savoir:
« Si les projetés sur une droite de deux bipoints sont des bipoints de même vecteur alors les bipoints initiaux sont de même vecteur » est fausse.



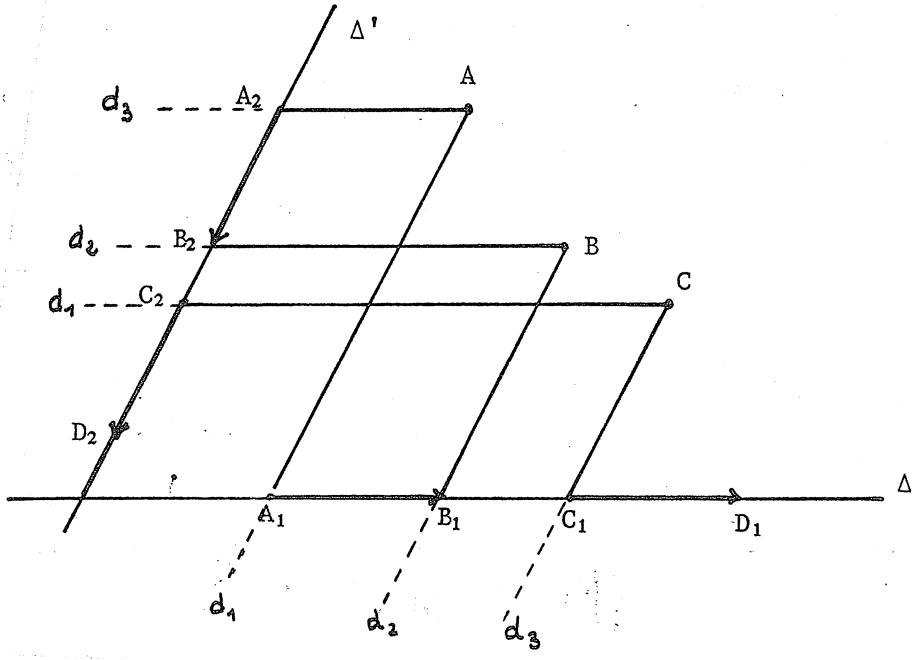
Pour s'en convaincre, il suffit de considérer la figure ci-dessus. Les projetés des bipoints (A,B) et (A,C) sur la droite Δ sont des bipoints de même vecteur et pourtant (A,B) et (A,C) n'ont pas le même vecteur.

Dans les travaux dirigés qui suivent on va voir que, sous certaines hypothèses, il est possible de conclure.

3-T. D. 3:

On considère d'abord deux droites sécantes Δ et Δ' et des points A, B et C. On note:

$\begin{cases} A_1 \text{ , } B_1 \text{ et } C_1 \text{ les projetés de A, B et C sur } \Delta \text{ parallèlement à } \Delta' \\ A_2 \text{ , } B_2 \text{ et } C_2 \text{ les projetés de A, B et C sur } \Delta' \text{ parallèlement à } \Delta \end{cases}$



puis on considère ensuite les points:

$\begin{cases} D_1 \text{ de } \Delta \text{ tel que } \overrightarrow{C_1D_1} = \overrightarrow{A_1B_1} \\ D_2 \text{ de } \Delta \text{ tel que } \overrightarrow{C_2D_2} = \overrightarrow{A_2B_2} \end{cases}$

puis on construit le point d'intersection -noté D- des droites:

$\begin{cases} d_4' \text{ parallèle à } \Delta' \text{ et passant par } D_1 \\ d_4 \text{ parallèle à } \Delta \text{ et passant par } D_2 \end{cases}$

a) Refaire une figure en conservant les notations utilisées dans la figure ci-dessus. Compléter cette figure.

b) On se propose maintenant d'établir que les bipoints (A,B) et (C,D) ont même vecteur.

c) Questions:

1° Compléter les schémas suivants en justifiant vos réponses

$d'_1 \xrightarrow{t_{(A_1,B_1)}} \ldots\ldots \xrightarrow{t_{(A_2,B_2)}} \ldots\ldots$

$d_1 \xrightarrow{t_{(A_1,B_1)}} \ldots\ldots \xrightarrow{t_{(A_2,B_2)}} \ldots\ldots$

$d'_3 \xrightarrow{t_{(A_1,B_1)}} \ldots\ldots \xrightarrow{t_{(A_2,B_2)}} \ldots\ldots$

$d_3 \xrightarrow{t_{(A_1,B_1)}} \ldots\ldots \xrightarrow{t_{(A_2,B_2)}} \ldots\ldots$

2° En déduire quels sont les transformés des points A et C par la composée « $t_{(A_1,B_1)}$ suivie de $t_{(A_2,B_2)}$ ». Comment nommer le vecteur de cette translation?

3° A quelle conclusion parvient-on en ce qui concerne les bipoints (A,B) et (C,D)? Compléter:

..... = $\overrightarrow{A_1B_1}$ + $\overrightarrow{A_2B_2}$ = ... + ... = ...

4° Enoncer le résultat obtenu:

« Etant donné deux droites sécantes Δ et Δ':

si des points A, B, C et D sont tels que leurs projetés respectifs $\begin{cases} A_1, B_1, C_1 \text{ et } D_1 \text{ sur } \Delta \text{ parallèlement à } \Delta' \\ A_2, B_2, C_2 \text{ et } D_2 \text{ sur } \Delta' \text{ parallèlement à } \Delta \end{cases}$

satisfont aux relations: $\overrightarrow{A_1B_1}$ = ... et $\overrightarrow{A_2B_2}$ = ...

alors .....»

IV - UTILISATION DU CALCUL VECTORIEL DANS LA RESOLUTION DE PROBLEME

1-Exposé du problème

Etant donné quatre points A, B, C et D d'un plan $\mathcal{P}$, il s'agit d'établir les deux résultats suivants:

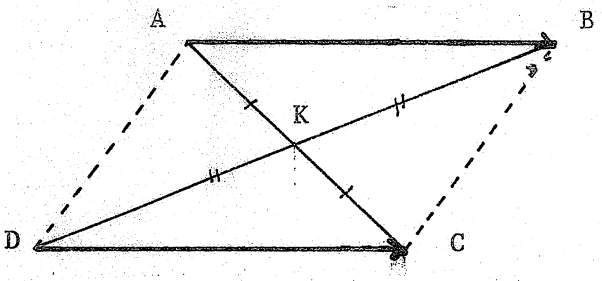
1 Si [A,C] et [B,D] ont même milieu alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

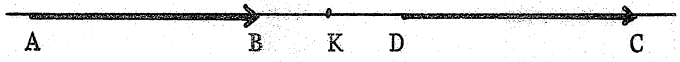
2 Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ alors [A,C] et [B,D] ont même milieu.

2-Solution.

1ère partie: [A,C] et [B,D] ont même milieu.

Deux cas de figures sont à envisager pour "illustrer" cette hypothèse suivant que les segments [A,C] et [B,D] ont même support ou non.





cas de figure 1 cas de figure 2

- Dans le cas de figure 1, le quadrilatère ABCD est un parallèlogramme, on en déduit immédiatement que: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. (P04)
- Cette démonstration ne s'applique évidemment pas au cas de figure 2. On désigne par K le milieu commun des segments [A,C] et [B,D].

K étant le milieu de [A,C] on a: $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{KC}$ ou $\overrightarrow{KA} = \overrightarrow{CK}$. (P05)

K étant le milieu de [B,D] on a: $\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{KD}$ ou $\overrightarrow{KB} = \overrightarrow{DK}$.

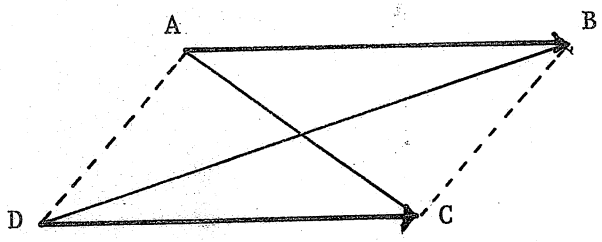
En considérant maintenant les égalités $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{KC}$ et $\overrightarrow{KB} = \overrightarrow{DK}$, on en déduit: $\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{KB} = \overrightarrow{DK} + \overrightarrow{KC}$ puis, d'après la relation de Chasles: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, ce qu'il fallait démontrer.

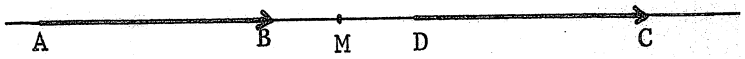
Dès lors, la démonstration spécifique au cas de figure 1 devient superflue puisque la démonstration précédente s'applique à n'importe quel cas de figure.

Remarque: cette démonstration convient encore dans le cas où certains des points A, B, C et D seraient confondus.

2ème partie: les bipoints (A,B) et (D,C) ont même vecteur, c'est à dire, même direction, même sens et même longueur.

A priori, deux cas de figure sont à envisager pour "illustrer" cette hypothèse suivant que les segments [A,C] et [B,D] ont même support ou non.





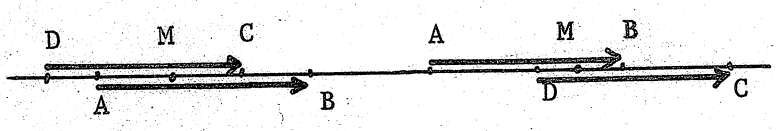
cas de figure 1 cas de figure 2

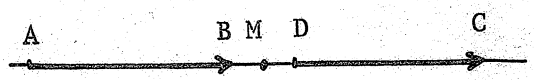
- Dans le cas de figure 1, le quadrilatère ABCD est un parallèlogramme (P04). Ses diagonales [A,C] et [B,D] ont même milieu.
- Il est clair que cette démonstration ne s'applique pas au cas de figure 2. On désigne alors par M le milieu de [A,C]. Reste à démontrer que M est aussi le milieu de [B,D].

  Méthode 1:

  On peut résoudre ce problème en utilisant la (seule) notion de longueur par l'intermédiaire de la propriété: « Si K est un point du segment [I,J] alors IK + KJ = IJ ». Mais alors il devient nécessaire de prendre en compte la position des points C et D par rapport aux points A et B. Trois autres cas de figure sont ainsi à adjoindre au cas de figure 2:

  (Dans le cas où D et C sont éléments de [A,B] alors [D,C] = [A,B] et c'est évident)





cas de figure 3 cas de figure 4 cas de figure 5

Dans le cas de figure 2, on a: $MB = MA + AB$ et $MD = MC + CD$

Par ailleurs $\begin{cases} AB = DC & \text{car (A,B) et (D,C) ont même vecteur} \\ MA = MC & \text{car M est le milieu de [A,C]} \end{cases}$

Il vient: $MB = MD$.

Sachant que M appartient à la droite (BD), il s'ensuit que M est le milieu de [B,D].

Question:

En procédant de la même manière, montrer que M est aussi le milieu de [B,D] dans les cas de figures 3, 4 et 5.

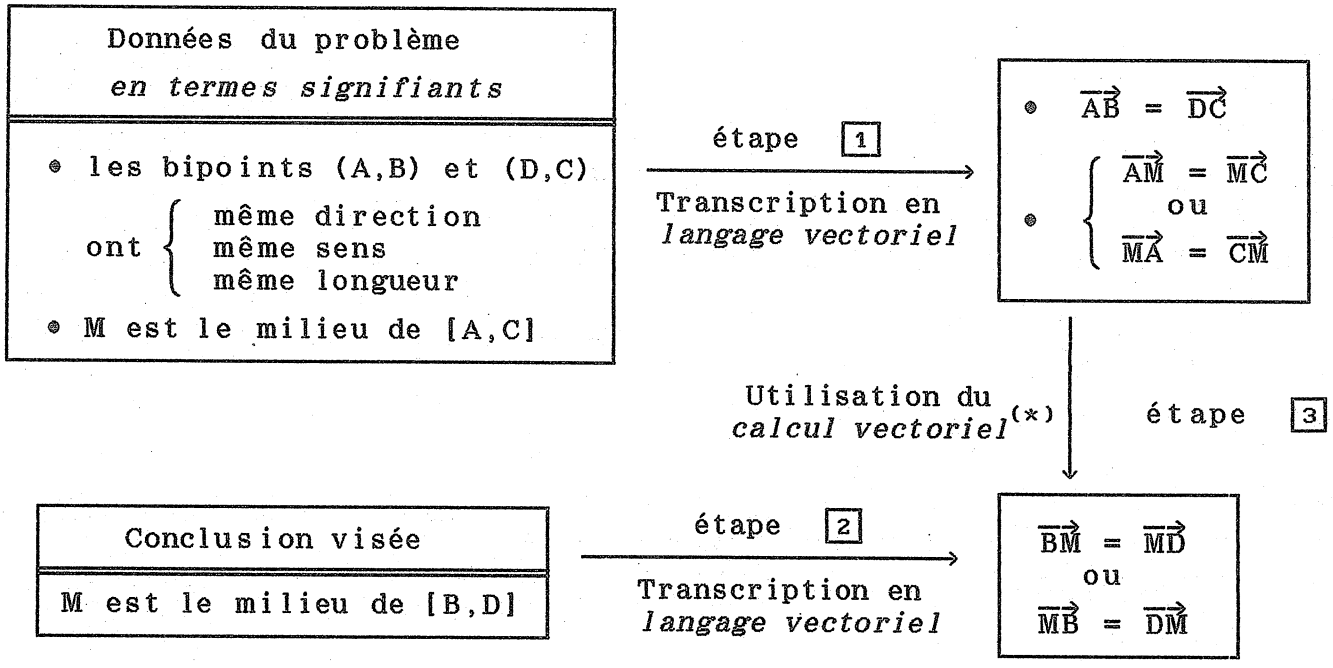
Bilan.

La méthode précédente s'avère à l'usage longue et fastidieuse. Cela tient au fait que la notion de mesure de longueur en tant qu'outil de résolution impose, en marge du cas de figure 1, de considérer quatre autres cas de figures. D'où l'idée de prendre le vecteur comme outil de travail.

Méthode 2:

a) Schéma de recherche:

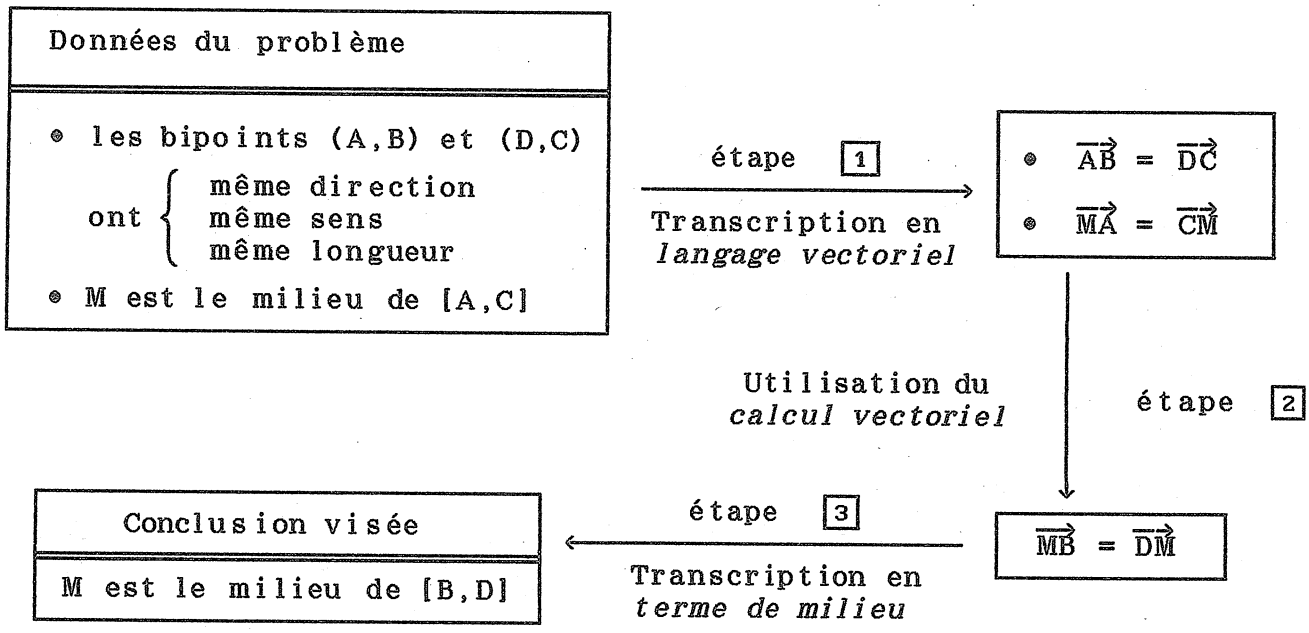
La démarche suivie dans la recherche de la démonstration peut se schématiser comme suit:



(*) En considérant les égalités $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{CM}$ on obtient: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CM}$ puis d'après la relation de Chasles $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{DM}$.

b) Schéma de résolution:

La démarche suivie dans la rédaction de la démonstration est un peu différente de la précédente, en voici le schéma:



c) Rédaction de la solution:

M étant le milieu de [A,C], on a: $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{CM}$.

Comme $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, on a: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CM}$.

En utilisant la relation de Chasles, il vient: $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{DM}$, égalité qui prouve que M est le milieu de [B,D], ce qu'il fallait démontrer.

On remarquera ici le caractère général de cette démonstration qui peut s'appliquer à n'importe quel cas de figure (y compris les cas où certains points parmi A, B, C et D seraient confondus). Elle seule suffit à assurer la résolution de la deuxième partie du problème donné.

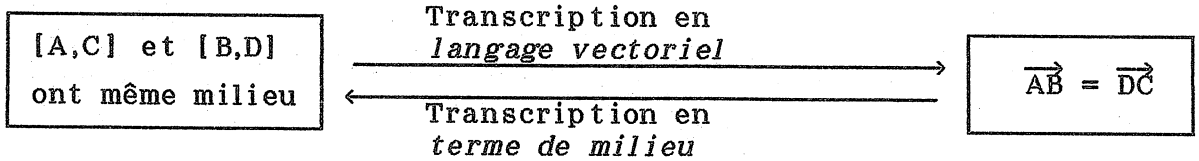
On retiendra que:

Propriété P12:

Etant donné des points A, B, C et D d'un plan $\mathcal{P}$,

- Si [A,C] et [B,D] ont même milieu alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.
- Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ alors [A,C] et [B,D] ont même milieu.

Cette propriété se schématise comme suit:



Nota.

Etant donné des points A, B, C et D d'un plan $\mathcal{P}$, on tiendra désormais pour acquis que les énoncés:

- « les segments [A,C] et [B,D] ont le même milieu »
- « $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ »

décrivent l'un comme l'autre la même configuration.

Exercice d'application.

Utiliser le résultat précédent pour établir la propriété P12

Indication:

On pourra s'appuyer sur la propriété suivante qui a été admise dans les classes antérieures:

« le projeté sur une droite du milieu d'un segment est le milieu du segment projeté ».

3

REPERAGE d'un POINT dans le PLAN

Coordonnées du translaté d'un point

Pour comprendre le contenu de ce chapitre, la mise au point suivante peut s'avérer utile:

- Le cadre de notre étude est un plan de l'espace qu'on désigne par la lettre $\mathcal{P}$.
- La notion de mesure permet de faire intervenir les nombres dans cette étude. En préalable à tout mesurage il faut choisir une unité de longueur. De façon concrète, on dessine dans le plan $\mathcal{P}$ un segment dont la longueur est prise pour unité (segment étalon).
- L'unité de longueur étant fixée,

  1° La mesure d'un segment [A,B] est un nombre positif. Ce nombre est aussi appelé distance des points A et B. On le note $d(A,B)$ ou AB.

  2° Quels que soient les points A et B on a: $d(A,B) = d(B,A)$.

  3° Deux segments de même longueur ont même mesure et vice-versa.
- La longueur L d'un segment connaissant sa mesure m relativement à l'unité de longueur ℓ s'exprime par l'égalité:

$$\boxed{L = m \times \ell}$$

Remarque: Dans la pratique on utilise une des unités légales de longueur: centimètre, décimètre, ..., dont on trouve de bons étalons dans le commerce.

I - EFFET D'UN CHANGEMENT D'UNITE DE LONGUEUR SUR LA MESURE D'UN SEGMENT

1-Etude expérimentale.

Nous nous proposons d'étudier expérimentalement l'effet d'un changement d'unité de longueur sur:

- la mesure d'un segment.
- le rapport des mesures de deux segments.

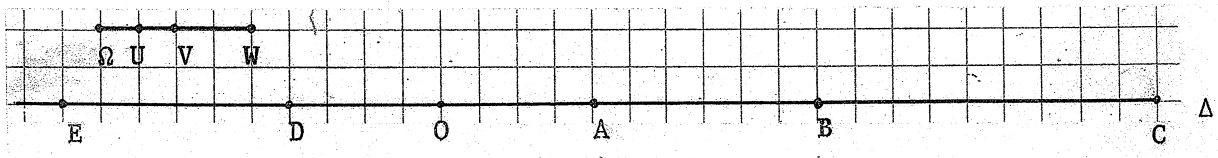
T. P. 08 **Description de la manipulation.**

Il s'agit de mesurer les longueurs de bipoints donnés en se référant à différentes unités de longueur:

- celle du segment [Ω,U] notée ℓ_1
- celle du segment [Ω,V] notée ℓ_2
- celle du segment [Ω,W] notée ℓ_3

} voir figure ci-desssous

On pourra éventuellement fabriquer avec des bandes de papier des règles graduées avec différentes unités.



Reporter les différentes mesures dans le tableau suivant prévu à cet effet (colonnes 1 à 5) puis compléter ce tableau (colonnes 6 à 9).

Unité	OA	OB	OC	OD	OE	$\frac{OB}{OA}$	$\frac{OC}{OA}$	$\frac{OD}{OA}$	$\frac{OE}{OA}$
ℓ_1									
$\ell_2=2\ell_1$									
$\ell_3=4\ell_1$									

Questions:

1° P et Q étant deux points quelconques d'un plan $\mathcal{P}$, on note

- m la mesure de [P,Q] relativement à l'unité de longueur ℓ
- m' la mesure de [P,Q] relativement à l'unité de longueur ℓ'
- k la mesure de la longueur ℓ' relativement à ℓ $(\ell' = k\ell)$

En vous inspirant des résultats enregistrés dans les colonnes 1 à 5 du tableau précédent, pouvez-vous émettre une conjecture quant au nombre α qui figure dans l'égalité:

$m = m' \times \alpha$?

2° Les résultats enregistrés dans les colonnes 6 à 9 vous permettent-ils d'émettre une conjecture quant au rapport des mesures de deux segments? Si oui, laquelle?

Commentaire.

Dans l'ensemble $\mathbb{S}$ des segments d'un plan $\mathcal{P}$, la relation $\mathcal{R}$: « avoir même longueur que » est une relation d'équivalence. L'ensemble quotient $\mathbb{S}/\mathcal{R}$ est donc l'ensemble des longueurs des segments de $\mathcal{P}$.

Une unité de longueur étant choisie, on admet que l'application

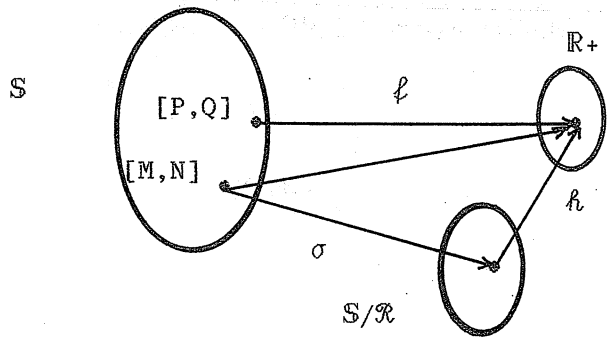
$$\ell : \mathbb{S} \longmapsto \mathbb{R}_+$$
$$[M,N] \longmapsto MN \text{ où } MN \text{ désigne la longueur de } [M,N]$$

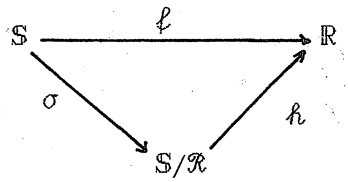
est surjective.

Considérons maintenant l'applcation

$$\sigma : \mathbb{S} \longmapsto \mathbb{S}/\mathcal{R}$$
$$[M,N] \longmapsto \text{classe de } [M,N]$$

σ est banalement surjective et on a:





On sait alors montrer qu'il existe une unique application k telle que $\ell = k \circ \sigma$. En outre, ℓ étant surjective, on a: k bijective.

Il est donc légitime d'employer indifféremment les expressions « mesure d'un segment » et « mesure d'une longueur ».

2-Institutionnalisation du résultat.

a) On admettra le résultat suivant:

Etant donné des points quelconques P et Q d'un plan $\mathcal{P}$, notons

- m la mesure de [P,Q] relativement à l'unité de longueur ℓ
- m' la mesure de [P,Q] relativement à l'unité de longueur ℓ'
- k la mesure de longueur ℓ' relativement à ℓ ($\ell' = k\ell$)

alors, on a $m = m' \times k$

Remarque:

La longueur L du segment [P,Q] s'exprime par l'une ou l'autre des égalités: $L = m\ell$ et $L = m'\ell'$.

Compte tenu des égalités $\ell' = k\ell$ et $m = m' \times k$, il vient: $L = m'(k\ell) = (m' \times k)\ell$.

Ainsi par exemple, on pourra rencontrer des écritures telles que: $L = 8\ cm = 80\ mm$ car $8\ cm = 8(10\ mm) = (8 \times 10)\ mm$.

Attention l'écriture "PQ = 8 *cm*" est dénuée de sens car PQ désigne un nombre et 8 *cm* une longueur.

La longueur d'un segment [M,N] pourra se noter ℓg[M,N].

b) Conséquences du résultat précédent.

Soit P, Q, R et S quatre points d'un plan *P*, notons:

- PQ_ℓ et RS_ℓ la mesure des segments [P,Q] et [R,S] relativement à une unité de longeur ℓ.
- $PQ_{\ell'}$ et $RS_{\ell'}$ la mesure des segments [P,Q] et [R,S] relativement à une unité de longeur ℓ'.
- k la mesure de ℓ' relativement à ℓ

Alors, on a: $$\frac{PQ_\ell}{RS_\ell} = \frac{PQ_{\ell' \times k}}{RS_{\ell' \times k}} = \frac{PQ_{\ell'}}{RS_{\ell'}}$$

On peut donc énoncer:

Le rapport des mesures de deux segments ne dépend pas du choix de la de l'unité de longueur.

En raison de la complexité des notations utilisée ce résultat pourra être admis.

II - REPERAGE D'UN POINT SUR UNE DROITE

On peut repérer la position d'un point quelconque M sur une droite Δ à l'aide d'un nombre dès lors qu'on a fixé, sur cette droite, un couple (O,I) de points distincts.

1-Description du procédé.

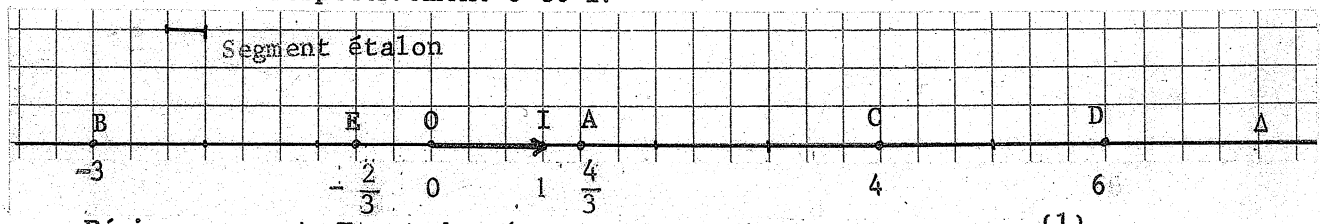
On choisit ici le demi-centimètre comme unité de longueur. Ceci dit, au point M on associe le nombre α définit comme suit:

- $\alpha = \frac{OM}{OI}$ lorsque M appartient à la demi-droite [OI)
- $\alpha = -\frac{OM}{OI}$ lorsque M n'appartient pas à la demi-droite [OI)

A titre d'exemple: (voir figure ci-après)

- Au point A est associé $\frac{4}{3}$ puisque: $A \in [OI)$ et $\frac{OA}{OI} = \frac{4}{3}$
- Au point B est associé -3 puisque: $B \notin [OI)$ et $\frac{OB}{OI} = \frac{9}{3} = 3$
- Au point C est associé 4 puisque: $C \in [OI)$ et $\frac{OC}{OI} = \frac{12}{3} = 4$

Il est clair également que les nombres associés aux points O et I sont respectivement 0 et 1.



Réciproquement, Etant donné un nombre α il existe un unique[1] point M de Δ qui par le procédé précédent, soit associé à α.

Lorsque:

- $\alpha \geq 0$, { M est le point de la demi-droite [OI) et $OM = \alpha \times OI$
- $\alpha < 0$, { M est le point de la demi-droite opposée à [OI) $OM = (-\alpha) \times OI$

A titre d'exemple: (voir figure ci-dessus)

- à 6 est associé le point $D \in [OI)$ tel que $OD = 6 \times OI = 6 \times 3 = 18$
- à $-\frac{2}{3}$ est associé le point $E \notin [OI)$ tel que $OE = \frac{2}{3} \times OI = \frac{2}{3} \times 3 = 2$

---

(1) L'existence et l'unicité du point M n'a pas à être mise en cause dans une classe de Troisième.

Questions:

1° Si, en conservant le bipoint (O,I), on utilise une unité de longueur autre que le demi-centimètre les résultats obtenus précédemment sont-ils changés? Justifier votre réponse.

2° Au lieu de se référer au bipoint (O,I) on prend maintenant (O,A) comme bipoint de référence. Quels sont alors les nombres associés aux différents points marqués sur la figure ci-dessus?

2-Définitions.

On adopte les définitions suivantes:

- Le bipoint (O,I) est appelé repère de Δ.
- La droite Δ munie du repère (O,I) est souvent appelée "axe (O,I)"
- Le nombre x qui est ainsi associé au point M de Δ est appelé abscisse de M dans le repère (O,I) ou abscisse de M sur l'axe (O,I)
- Le point I est appelé origine du repère (ou de l'axe).

Remarque importante.

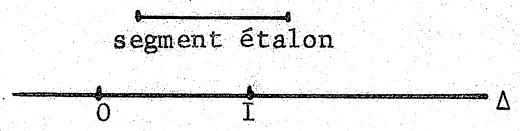
L'abscisse d'un point M sur une droite munie d'un repère ne dépend que du repère et non de l'unité de longueur fixée pour le plan.

3-Repère normal.

Deux situations sont à envisager:

- Une unité de longueur a été choisie pour le plan $\mathcal{P}$.

Dans ce cas, on dit que le bipoint (O,I) est un repère normal d'une droite Δ de $\mathcal{P}$ pour signifier que O et I sont deux points de Δ tels que OI = 1.



- Une unité de longueur n'a pas encore été choisie dans le plan $\mathcal{P}$.

Les points O et I étant deux points distincts d'une droite Δ de $\mathcal{P}$, dire que le bipoint (O,I) est un repère normal de Δ signifie dans ce cas que la longueur du bipoint (O,I) sera désormais l'unité de longueur pour le plan $\mathcal{P}$.

Question:

Comment définir l'abscisse d'un point porté par une droite munie d'un repère normal?

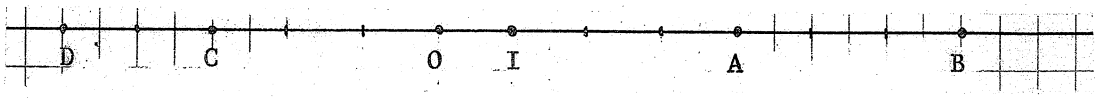
III - ABSCISSE DU MILIEU D'UN SEGMENT

1-Etude expérimentale.

On se propose de tester si, d'une manière générale, il peut exister une relation entre les abscisses de deux points P et Q d'une droite Δ munie d'un repère (O,I) et celle du milieu M du segment [P,Q].

T. P. 09 **Description de la manipulation.**

1° Placer les points E, F, G, H et K milieux respectifs des segments [O,I], [O,A], [A,B], [C,D] et [D,E] dans la figure suivante:



2° On note $\mathscr{a}_O$, $\mathscr{a}_I$, $\mathscr{a}_A$, ..., les abscisses des points O, I, A, ..., sur l'axe (O,I). Compléter le tableau suivant:

$\mathscr{a}_E$ =	$\mathscr{a}_F$ =	$\mathscr{a}_G$ =	$\mathscr{a}_H$ =	$\mathscr{a}_K$ =
$\mathscr{a}_O+\mathscr{a}_I$ =	$\mathscr{a}_O+\mathscr{a}_A$ =	$\mathscr{a}_A+\mathscr{a}_B$ =	$\mathscr{a}_C+\mathscr{a}_D$ =	$\mathscr{a}_D+\mathscr{a}_E$ =

Question:

D'une façon générale, P et Q étant deux points de l'axe (O,I), quelle conjecture peut-on émettre quant à l'abscisse du milieu M du segment [P,Q]?

2-Etude théorique.

On se propose maintenant d'étudier ce problème par voie déductive. Les notations sont celles de la question précedente.

a) Remarque préliminaire.

- Le milieu de [P,Q] étant celui de [Q,P], l'ordre dans lequel on rencontre les points P et Q, lorsqu'on parcourt la droite Δ dans le sens de O vers I, n'a aucune incidence sur le résultat final. On peut donc considérer qu'on rencontre P avant Q sans diminuer en rien la généralité.
- On a vu que l'abscisse d'un point sur une droite Δ munie d'un repère (O,I) ne dépend pas de l'unité de longueur choisie pour le plan. On peut donc, si nécessaire, changer l'unité de longueur afin que (O,I) soit un repère normal de Δ. L'abscisse d'un point dans ce repère est alors, soit sa distance à l'origine O, soit l'opposé de cette distance, selon que le point appartient ou non à la demi-droite [OI).

b) Etude du problème.

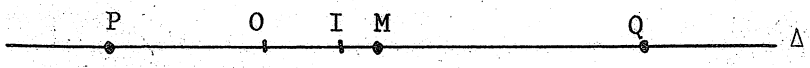
M étant le milieu de [P,Q], on a: MP = MQ.

Ceci dit, pour traduire cette égalité en termes d'abscisses, nous sommes amenés à considérer quatre cas de figures selon que les points P, M et Q appartiennent ou non à la demi-droite [OI).

• Cas de figure 1

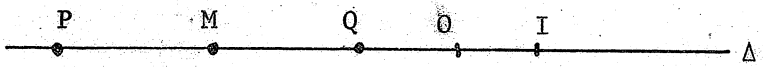
Dans ce cas, on a: $\begin{cases} MP = OM - OP = x_M - x_P \\ MQ = OQ - OM = x_Q - x_M \end{cases}$

• Cas de figure 2



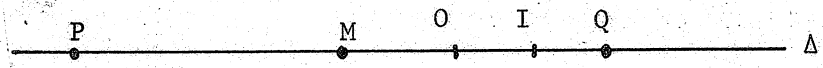
Dans ce cas, on a: $\begin{cases} MP = OM + OP = x_M + (-x_P) = x_M - x_P \\ MQ = OQ - OM = x_Q - x_M \end{cases}$

• Cas de figure 3



Dans ce cas, on a: $\begin{cases} MP = OP - OM = -x_P - (-x_M) = x_M - x_P \\ MQ = OQ - OM = x_Q + (-x_M) = x_Q - x_M \end{cases}$

• Cas de figure 4



Dans ce cas, on a: $\begin{cases} MP = OP - OM = -x_P - (-x_M) = x_M - x_P \\ MQ = OM - OQ = -x_M - (-x_Q) = x_Q - x_M \end{cases}$

Ainsi dans tous les cas envisageables, l'égalité MP = MQ se traduit par: $x_M - x_Q = x_P - x_M$, soit $2x_M = x_P + x_Q$, ou encore:

$x_M = \frac{1}{2}(x_P + x_Q)$

On retiendra donc le résultat suivant:

Propriété P13

Sur un axe (O,I) l'abscisse du milieu d'un segment est égale à la demi-somme des abscisses des extrémités de ce segment.

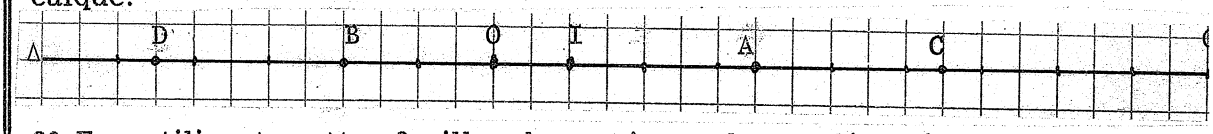
IV- ABSCISSE DU TRANSLATE D'UN POINT

1-Etude expérimentale.

On se propose de tester si, d'une manière générale, il peut exister une relation entre l'abscisse d'un point M d'une droite Δ munie d'un repère (O,I) et celle de son transformé M' par la translation $t_{(O,U)}$ où U est un point de Δ.

T. P. 10 Description de la manipulation.

1° Reproduire la figure suivante sur une feuille de papier calque.



2° En utilisant cette feuille de papier calque, déterminer les transformés O', I', A', B' C' et D' des points O, I, A, B, C et D par la translation $t_{(O,A)}$.

3° On note $\mathcal{X}_{O'}$, $\mathcal{X}_{I'}$, $\mathcal{X}_{A'}$, $\mathcal{X}_{B'}$, ..., les abscisses des points O, I, A, B, ... sur l'axe (O,I). Compléter le tableau suivant:

$\mathcal{X}_A$	$\mathcal{X}_{O'} - \mathcal{X}_O$	$\mathcal{X}_{I'} - \mathcal{X}_I$	$\mathcal{X}_{A'} - \mathcal{X}_A$	$\mathcal{X}_{B'} - \mathcal{X}_B$	$\mathcal{X}_{C'} - \mathcal{X}_C$	$\mathcal{X}_{D'} - \mathcal{X}_D$
		4,5−1=3,5				

4° Construire à l'aide de la feuille de papier calque les transformés O", I", ..., D" des points O, I, ..., D par la translation $t_{(O,B)}$, puis compléter le tableau suivant:

$\mathcal{X}_B$	$\mathcal{X}_{O''} - \mathcal{X}_O$	$\mathcal{X}_{I''} - \mathcal{X}_I$	$\mathcal{X}_{A''} - \mathcal{X}_A$	$\mathcal{X}_{B''} - \mathcal{X}_B$	$\mathcal{X}_{C''} - \mathcal{X}_C$	$\mathcal{X}_{D''} - \mathcal{X}_D$

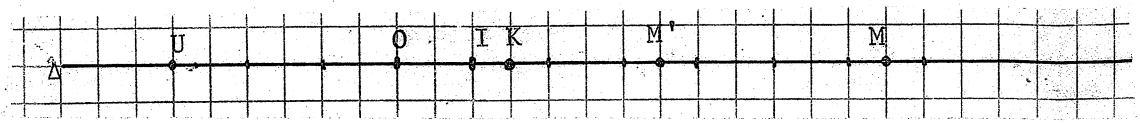
Question:

Plus généralement, soit M un point d'une droite Δ munie d'un repère (O,I), M' son transformé par la translation $t_{(O,U)}$ où U est un point de Δ.

Au vu des résultats expérimentaux, peut-on prévoir l'existence d'une relation entre les abscisses $\mathcal{X}_{M'}$, $\mathcal{X}_M$, $\mathcal{X}_U$ des points M', M et U qui soit indépendante de la position des points M et U sur la droite Δ? Si oui, quelle est cette relation?

2-Etude théorique.

On se propose maintenant d'étudier ce problème par voie déductive. les notations sont celles de la question précédente.



Les bipoints (O,U) et (M,M') ayant même vecteur, on sait que les segments [O,M'] et [U,M] sont de même milieu K (voir propriété P12).

Ceci dit, on a: $2\mathscr{a}_K = \mathscr{a}_O + \mathscr{a}_{M'} = \mathscr{a}_M + \mathscr{a}_U$ (Propriété P13)

d'où on tire: $\mathscr{a}_{M'} = \mathscr{a}_M + \mathscr{a}_U$ car $\mathscr{a}_O = 0$.

On peut donc énoncer:

Propriété P14

Soit une droite Δ munie d'un repère (O,I), M un point quelconque de cette droite, M' son transformé par la translation $t_{(O,U)}$ où U est un point de Δ.

Alors les abscisses des points M', M et U vérifient la relation:

$$\mathscr{a}_{M'} = \mathscr{a}_M + \mathscr{a}_U$$

V - REPERAGE D'UN POINT DANS LE PLAN

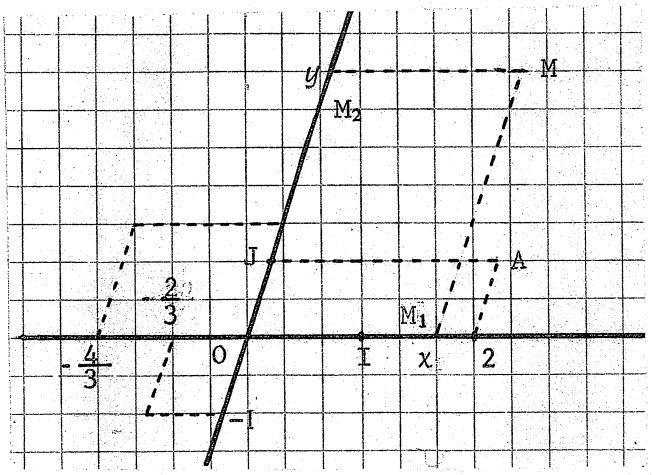
On peut repérer la position d'un point quelconque M d'un plan $\mathcal{P}$ à l'aide d'un couple de nombres dès lors que l'on a fixé dans ce plan un triplet[1] (O,I,J) de points non alignés.

1-Description du procédé.

Au point M on associe le couple (x,y) défini comme suit:

- x est l'abscisse sur l'axe (O,I) du point M_1 projeté de M sur (OI) parallèlement à (OJ).
- y est l'abscisse sur l'axe (O,J) du point M_2 projeté de M sur (OJ) parallèlement à (OI).

A titre d'exemple,



- au point A est associé le couple (2,1)
- au point B est associé le couple $(-\frac{4}{3},\frac{3}{2})$

Il est clair également que les couples associés aux points O, I et J sont respectivement (0,0), (1,0) et (0,1).

Réciproquement, étant donné un couple (x,y) de nombres, on sait qu'il existe:

- un unique point M_1 d'abscisse x sur l'axe (O,I).
- un unique point M_2 d'abscisse y sur l'axe (O,J).

---

(1) Un triplet de points est une liste ordonnée de trois points distincts ou non.

Il existe donc un unique point M du plan qui, par le procédé précédent, est associé au couple (x,y), M est le point d'intersection de:

$\left[\begin{array}{l}\text{la parallèle à (OJ) passant par } M_1\\ \text{la parallèle à (OI) passant par } M_2\end{array}\right.$

Par exemple, le couple $(-\frac{2}{3}, -1)$ est associé au point C.

2-Définitions.

On adopte les définitions suivantes:

- Le triplet (O,I,J) de points non alignés du plan $\mathcal{P}$ est appelé repère de $\mathcal{P}$. Le point O est l'origine du repère.
- Le couple (x,y) de nombres associés au point M par le procédé précédent est appelé couple des coordonnées de M dans le repère (O,I,J)
- Le nombre x est l'abscisse de M, le nombre y est l'ordonnée de M.
- L'axe (O,I) est appelé axe des abscisses
- L'axe (O,J) est appelé axe des ordonnées
- On écrit $M(x,y)$ ou $M\left|\begin{array}{l}x\\y\end{array}\right.$ pour indiquer que les coordonnées de M sont x et y.

3-Repère orthogonal, repère orthonormal.

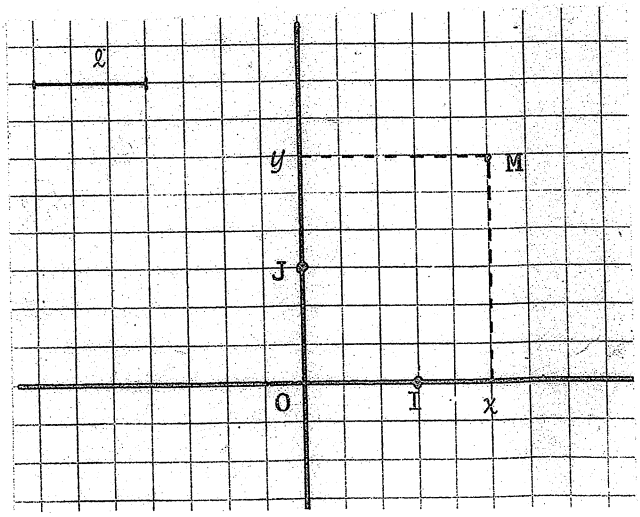
a) Repère orthogonal.

On dit que le triplet (O,I,J) est un repère orthogonal du plan $\mathcal{P}$ lorsque les droites (OI) et (OJ) sont orthogonales.

b) Repère orthonormal.

Deux situations sont à envisager:

- Une unité de longueur a déjà été choisie dans le plan $\mathcal{P}$.



Dans ce cas, on dit que le triplet (O,I,J) est un repère orthonormal de $\mathcal{P}$ pour signifier que: d'une part, les droites (OI) et (OJ) sont orthogonales et d'autre part, les points O, I et J sont tels que OI = OJ = 1.

- Une unité de longueur n'a pas encore été choisie dans le plan $\mathcal{P}$.

Lorsque les points O, I et J sont les sommets d'un triangle rectangle isocèle en O, dire que le triplet (O,I,J) est un repère orthonormal de $\mathcal{P}$ signifie dans ce cas que la longueur du segment [O,I] sera désormais l'unité de longueur du plan $\mathcal{P}$.

VI - COORDONNEES DU TRANSLATE D'UN POINT

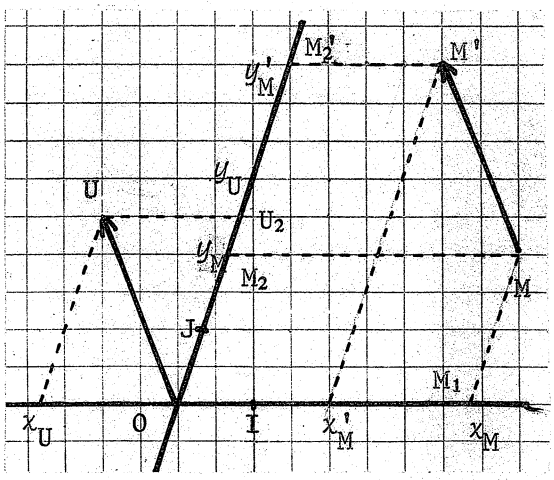
Toute translation agissant dans le plan $\mathcal{P}$ est déterminée sitôt que l'on connaît son action sur un point de ce plan.

Lorsque le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère (O,I,J), il suffit par exemple de donner le transformé U de O pour définir une translation agissant dans $\mathcal{P}$, en l'occurence la translation $t_{(O,U)}$

1-Effet d'une translation sur les coordonnées d'un point.

Le plan $\mathcal{P}$ étant muni d'un repère (O,I,J), soit M un point de ce plan, M' son transformé par la translation $t_{(O,U)}$ où U est un point de $\mathcal{P}$.

Les bipoints (O,U) et (M,M') ayant même vecteur se projettent sur la droite (OI) d'une part et sur la droite (OJ) suivant des bipoints de même vecteur (Propriété P11).



Les notations étant celles utlisées dans la figure ci-dessus, on a donc:

- d'un part: $\overrightarrow{OU_1} = \overrightarrow{M_1M'_1}$
- d'autre part: $\overrightarrow{OU_2} = \overrightarrow{M_2M'_2}$

Autrement dit:

- la translation $t_{(O,U_1)}$ envoie M_1 sur M'_1
- la translation $t_{(O,U_2)}$ envoie M_2 sur M'_2

Il s'ensuit que: $\begin{cases} x_{M'} = x_M + x_U \\ y_{M'} = y_M + y_U \end{cases}$

On peut donc énoncer:

Propriété P15

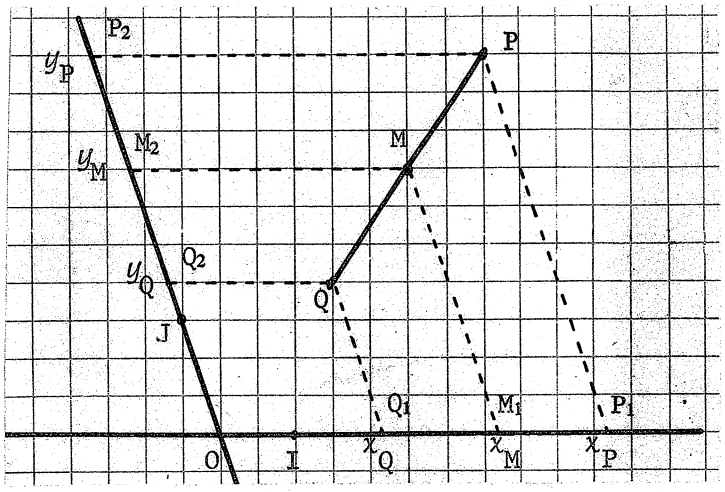
Soit M un point d'un plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère (O,I,J);
M' le transformé de M par la translation $t_{(O,U)}$ où U est un point du plan $\mathcal{P}$.

Alors les coordonnées des points M', M et U vérifient les égalités:

$$\begin{cases} x_{M'} = x_M + x_U \\ y_{M'} = y_M + y_U \end{cases} \quad \text{soit encore} \quad \begin{cases} x_{M'} - x_M = x_U \\ y_{M'} - y_M = y_U \end{cases}$$

2-Coordonnées du milieu d'un segment.

Soit P et Q deux points d'un plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère (O,I,J), M le milieu du segment [P,Q].



Le projeté du milieu d'un segment sur une droite étant le milieu du projeté de ce segment il s'ensuit que:

M_1 est le milieu du segment $[P_1,Q_1]$.
M_2 est le milieu du segment $[P_2,Q_2]$.

Ceci dit, compte tenu de la propriété P13, il vient:

$$x_M = \frac{1}{2}(x_P + x_Q) \qquad \text{et} \qquad y_M = \frac{1}{2}(y_P + y_Q)$$

On peut alors énoncer:

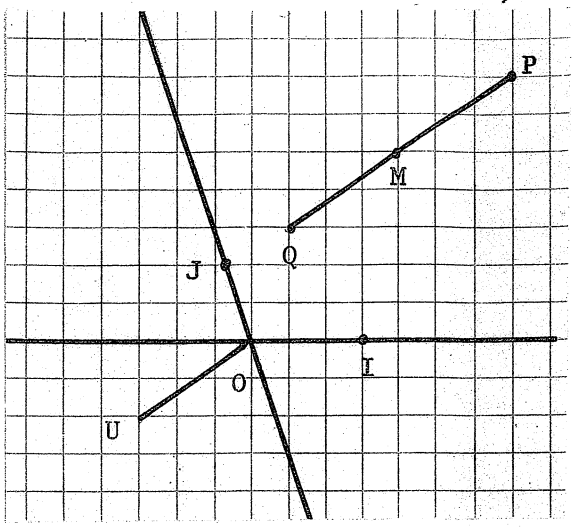
Propriété P16

Dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère (O,I,J),

- l'abscisse du milieu d'un segment est égale à la demi-somme des abscisses des extrémités de ce segment.
- l'ordonnée du milieu d'un segment est égale à la demi-somme des ordonnées des extrémités de ce segment.

Exercice.

Les notations étant celles précédemment utilisées, on désigne par U le transformé de O par la translation $t_{(P,M)}$.



On feint maintenant d'ignorer que le projeté du milieu d'un segment sur une droite est le milieu du segment projeté.

Retrouver les résultats concernant les coordonnées du milieu d'un segment en utilisant ceux concernant les coordonnées du translaté d'un point.

4

LE CALCUL VECTORIEL

Première phase de modélisation

Partie A — LE PLAN VECTORIEL $\vec{\mathcal{P}}$

I - INTRODUCTION

Les nouveaux programmes fixent en classe de Seconde la mise en place du calcul vectoriel. Or, l'étude des propriétés de l'addition vectorielle puis celle de la multiplication d'un vecteur par un nombre vont nous conduire à considérer les vecteurs des couples de points d'un plan $\mathcal{P}$ dans leur totalité.

A ce stade du cursus scolaire, par souci de commodité mais aussi de clarté et de précision, nous ferons appel à un vocabulaire ensembliste pour aborder cette étude. .Le plan $\mathcal{P}$ sera considéré comme un ensemble de points. On fera également référence à l'ensemble des vecteurs des couples de points du plan $\mathcal{P}$ appelé plan vectoriel associé à $\mathcal{P}$.

On désignera cet ensemble par le symbole $\vec{\mathcal{P}}$, la flèche servant ici à rappeler que les éléments de $\vec{\mathcal{P}}$ sont des vecteurs alors que les éléments de $\mathcal{P}$ sont des points.

II - IDENTIFICATION DU PLAN VECTORIEL $\vec{\mathcal{P}}$ AU PLAN $\mathcal{P}$ MUNI D'UN POINT ORIGINE

1–Pourquoi munir le plan $\mathcal{P}$ d'un point "origine"?

L'idée de choisir un point de référence dans un plan $\mathcal{P}$ est consécutive à la remarque suivante:

Toute translation dans un plan $\mathcal{P}$ est déterminée sitôt que l'on l'on connaît son action sur un point de ce plan.

On fixe un point de référence dans le plan $\mathcal{P}$. Dès lors toute translation agissant dans $\mathcal{P}$ est déterminée par son action sur ce point.

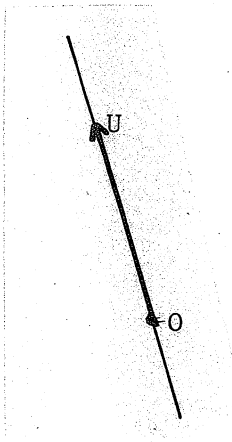
Vocabulaire et notations.

- Lorsqu'on choisit un point origine dans le plan on dit que l'on "pointe" le plan. Ce point de référence, sorte de nombril de $\mathcal{P}$, est traditionnellement noté O et appelé point origine de $\mathcal{P}$.
- Un plan muni d'un point origine est dit pointé.
  On le note $\mathcal{P}o$ (lire: p,O)

A l'aide des points de $\mathcal{P}o$ on peut donc recenser toutes les translations agissant dans $\mathcal{P}$.

A titre d'exemple,

- au point U correspond la translation qui envoie O sur U, c'est à dire $t_{(O,U)}$.
- au point O correspond la translation qui envoie O sur O, c'est à dire la translation de vecteur nul (celle qui ne fait rien).



2–Image d'un vecteur dans un plan pointé.

a) Définition.

Quels que soient les points A et B d'un plan pointé $\mathcal{P}o$, il existe un unique point U dans $\mathcal{P}o$ tel que $\overrightarrow{OU} = \overrightarrow{AB}$, U est le transformé de O par la translation $t_{(A,B)}$.

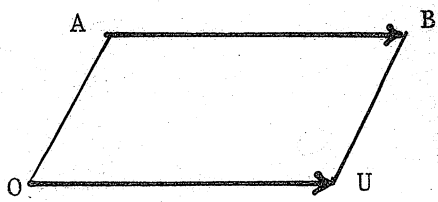


figure 1

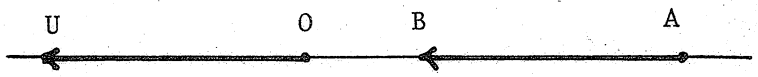


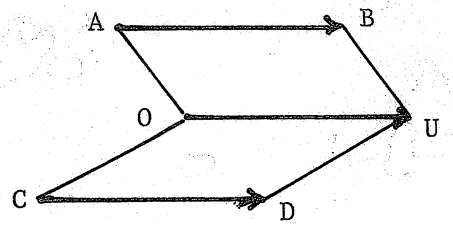
figure 2

On dit alors que ce point U est l'image du vecteur $\overrightarrow{AB}$ dans le plan point $\mathcal{P}o$.

Cette définition amène les deux remarques suivantes:

1° L'égalité des vecteurs coïncide avec l'égalité des images.

En effet, soit A, B, C et D des points de $\mathcal{P}o$, U l'image de $\overrightarrow{AB}$, V celle de $\overrightarrow{CD}$.



On a donc d'après la définition précédente $\overrightarrow{OU} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{OV} = \overrightarrow{CD}$.

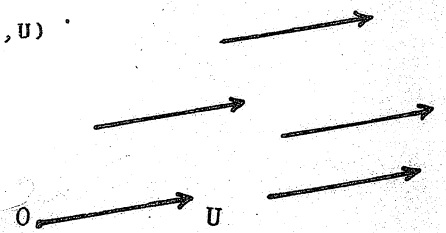
Dès lors:

- Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, il vient: $\overrightarrow{OU} = \overrightarrow{OV}$, puis $U = V$.
- Si $U = V$, il vient: $\overrightarrow{OU} = \overrightarrow{OV}$, puis $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

D'où le résultat annoncé.

2° Chaque point de $\mathcal{P}o$ est l'image d'un vecteur et d'un seul.

En effet il est clair qu'un quelconque point U de $\mathcal{P}o$ représente le vecteur de la translation $t_{(O,U)}$.



En outre, la remarque précédente permet d'affirmer qu'il n'y a pas d'autre vecteur représenté par le point U. En particulier, le point O représente le vecteur nul.

b) Utlilisation du vocabulaire des fonctions.

Pour décrire cette situation on peut faire appel au vocabulaire des fonctions.

Lorsque, à chaque élément (vecteur) du plan vectoriel $\vec{\mathcal{P}}$ on fait correspondre un unique élément (point) du plan pointé $\mathcal{P}o$, on définit une fonction de $\vec{\mathcal{P}}$ dans $\mathcal{P}o$.

Compte tenu des remarques formulées ci-dessus, cette fonction a la particularité suivante: chaque point de l'ensemble d'arrivée $\mathcal{P}o$ est l'image d'un et d'un seul vecteur de l'ensemble de départ $\vec{\mathcal{P}}$.

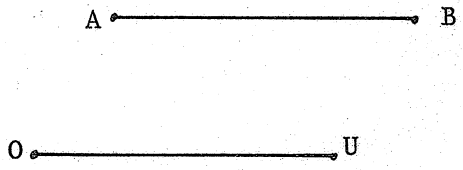
Ainsi pour résumer:

- à chaque vecteur de $\vec{\mathcal{P}}$ correspond un unique point de $\mathcal{P}o$.
- à chaque point de $\mathcal{P}o$ correspond un unique vecteur de $\vec{\mathcal{P}}$.

3-Notation $\vec{u}$. Convention d'emploi.

On convient de noter $\vec{u}$, le vecteur de $\vec{\mathcal{P}}$ représenté par le point U de $\mathcal{P}o$ et, d'une manière générale, par une seule lettre minuscule surmontée d'une flèche le vecteur représenté par le point désigné par la lettre majuscule du même nom. En particulier, le vecteur nul qui est représenté par le point O sera noté $\vec{o}$.

En conséquence, étant donnés deux points A et B de $\mathcal{P}o$:

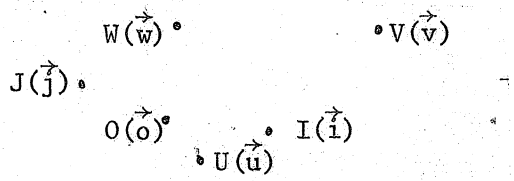


- Si on note U l'image dans $\mathcal{P}o$ du vecteur $\overrightarrow{AB}$ alors $\vec{u}$ devient automatiquement une nouvelle désignation de ce vecteur. On peut alors écrire: $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.
- Si on décide de noter $\vec{u}$ le vecteur du bipoint (A,B), autrement dit si l'on pose $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, alors U désigne automatiquement l'image de ce vecteur dans le plan pointé $\mathcal{P}o$.

4-Identification du plan vectoriel $\vec{\mathcal{P}}$ au plan pointé $\mathcal{P}o$.

Il est extrèmement difficile de concevoir mentalement cet ensemble $\vec{\mathcal{P}}$ dont les éléments sont des grandeurs géométriques à trois composantes.

Toutefois, en pointant le plan $\mathcal{P}$ (origine O) on obtient une représentation concrétisable de $\vec{\mathcal{P}}$: chaque point de $\mathcal{P}o$ représente un élément de $\vec{\mathcal{P}}$ et chaque élément de $\vec{\mathcal{P}}$ est représenté par un point de $\mathcal{P}o$.



Il est à remarquer que cette façon de représenter le plan vectoriel $\vec{\mathcal{P}}$ ne fait pas perdre de vue que ses éléments sont des grandeurs géométriques prenant en compte les notions de direction, sens et longueur puisque la donnée d'un point dans $\mathcal{P}o$, à une exception près, fixe chacune de ces trois notions.

On en arrive ainsi à considérer que les ensembles $\mathcal{P}o$ et $\vec{\mathcal{P}}$ sont identiques. Les points de $\mathcal{P}o$, par représentants interposés, sont les vecteurs de $\vec{\mathcal{P}}$.

Pour traduire cette situation, on dit que l'on "identifie" le plan vectoriel $\vec{\mathcal{P}}$ au plan pointé $\mathcal{P}o$.

Choisir un vecteur dans $\vec{\mathcal{P}}$ revient à choisir un point dans $\mathcal{P}o$ et vice-versa.

Commentaires.

1° Certains trouveront la convention d'emploi de la notation "$\vec{u}$" trop contraignante. Elle s'avère pourtant commode, notamment lors de l'étude de la "structure" de $\vec{\mathcal{P}}$ car elle permet de ne pas expliciter à chaque fois:

- soit la désignation par une lettre d'un vecteur représenté dans $\mathcal{P}o$ par un point déjà nommé,
- soit la désignation de l'image dans $\mathcal{P}o$ d'un vecteur de $\vec{\mathcal{P}}$ déjà signifié au moyen d'une seule lettre.

Il serait donc dommageable de ne pas respecter cette convention au moins pendant la période de mise en place du calcul vectoriel.

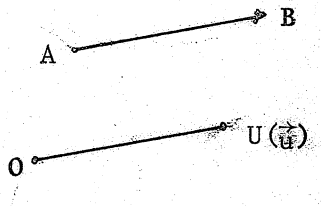
2° Lorsque les vecteurs étaient représentés comme classes d'équivalence de bipoints pour la relation d'équipollence, tout vecteur avait une infinité de représentants. On choisissait un vecteur en se donnant un élément de la classe d'équivalence, en l'occurence un bipoint. La terminologie:

« soit $\vec{u}$ un vecteur, (A,B) un représentant de $\vec{u}$ »

était alors légitime.

Dans la présentation que nous venons de donner cette terminologie ne se justifie plus. Elle est donc à proscrire. On lui substituera la terminologie suivante (au besoin accompagnée d'un dessin):

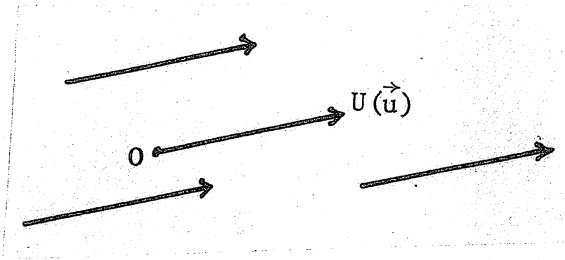
« soit $\vec{u}$ un vecteur, (A,B) un bipoint de vecteur $\vec{u}$ »



III - NOUVELLE NOTATION D'UNE TRANSLATION

- Rappelons qu'à chaque translation agissant dans le plan $\mathcal{P}$ on associe tout naturellement <u>le</u> vecteur des bipoints qu'elle engendre, c'est à dire le vecteur des bipoints (M,M') où M désigne un point quelconque de $\mathcal{P}$ et M' son transformé.

- <u>Réciproquement</u>, étant donné un élément $\vec{u}$ de $\vec{\mathcal{P}}$ – autrement dit étant donné un point U de $\mathcal{P}o$ – il existe une unique translation qui engendre les bipoints de vecteur $\vec{u}$, à savoir $t_{(O,U)}$.



Ainsi:

- A chaque translation correspond un unique vecteur.
- A chaque vecteur correspond une unique translation.

Ceci nous conduit à désigner par $t_{\vec{u}}$ la translation associée au vecteur $\vec{u}$. on dit alors <u>indifféremment</u> que:

$t_{\vec{u}}$ est la translation de vecteur $\vec{u}$
$\vec{u}$ est le vecteur de la translation $t_{\vec{u}}$

Plus généralement, A et B étant deux points d'un plan $\mathcal{P}$, la translation de bipoint (A,B) pourra se noter $t_{\overrightarrow{AB}}$.

<u>Commentaire</u>.

Bien que la notation $t_{\overrightarrow{AB}}$ soit traditionnellement utilisée pour désigner la translation qui envoie A sur B, nous lui préfèrerons la notation $t_{(A,B)}$ et ceci pour deux raisons:

- C'est "en pratique" la donnée d'un bipoint qui définit une translation et du même coup son vecteur.
- La notation $t_{\overrightarrow{AB}}$, par la lecture habituelle qu'on en fait, donne une préséance au vecteur sur la translation. c'est pourquoi beaucoup de gens croient encore qu'il faut préalablement définir la notion de vecteur pour parler de translation.

Par contre, lorsque dans un contexte donné $\vec{u}$ sera le vecteur déjà signifié, nous utiliserons la notation $t_{\vec{u}}$ pour désigner la translation associée à ce vecteur.

Partie B — ADDITION VECTORIELLE

I - PROPRIETE DE L'ADDITION VECTORIELLE

Dans tout ce qui suit le plan vectoriel $\vec{\mathcal{P}}$ est identifié au plan pointé $\mathcal{P}o$.

1-Somme de deux vecteurs.

a) Rappel de la définition.

La somme des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur noté $\vec{u} + \vec{v}$ ou $\vec{v} + \vec{u}$ de la translation composée des translations $t_{\vec{u}}$ et $t_{\vec{v}}$

Remarque.

En utilisant la nouvelle notation des translations, on peut donc écrire: $t_{\vec{u}+\vec{v}} = t_{\vec{v}+\vec{u}}$,

car « $t_{\vec{u}}$ suivie de $t_{\vec{v}}$ » = « $t_{\vec{v}}$ suivie de $t_{\vec{u}}$ »

b) Image du vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ dans $\mathcal{P}o$.

Lorsque les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont donnés – autrement dit lorsque les points U et V sont donnés dans $\mathcal{P}o$ – on sait construire l'image W vecteur $\vec{w}$ somme des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$: W est le transformé de O par la composée des translations $t_{\vec{u}}$ et $t_{\vec{v}}$.

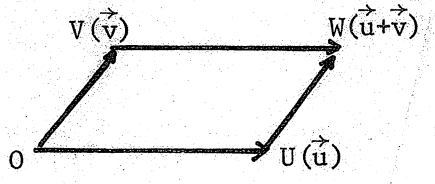


figure 1

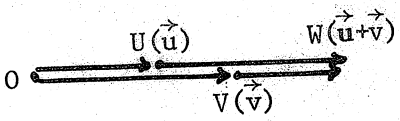


figure 2

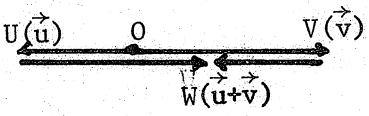


figure 3

Ceci dit, compte tenu que $\begin{cases} \bullet \text{ le transformé de O par } t_{\vec{u}} \text{ est le point U} \\ \bullet \text{ le transformé de O par } t_{\vec{v}} \text{ est le point V} \end{cases}$

On obtient $\begin{cases} \bullet \text{ W est le transformé de U par } t_{\vec{v}} \\ \bullet \text{ W est le transformé de V par } t_{\vec{u}} \end{cases}$

On retiendra le résultat suivant:

Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de $\vec{\mathcal{P}}$

Autrement dit, quels que soient les points U, V et W de $\mathcal{P}o$

$\vec{u} + \vec{v} = \vec{w}$ <u>équivaut à</u>

- W est le transformé de U par $t_{\vec{v}}$ ($U \xmapsto{t_{\vec{v}}} W$)

ou

- W est le transformé de V par $t_{\vec{u}}$ ($V \xmapsto{t_{\vec{u}}} W$)

(langage vectoriel) (*langage des transformations* dans $\mathcal{P}o$)

---

c) <u>Le vecteur $\vec{u} + \vec{0}$.</u>

<u>Par définition</u>, $\vec{u} + \vec{0}$ est le vecteur de la composée des translations $t_{\vec{u}}$ et $t_{\vec{0}}$. Or, il est clair que cette translation composée est égale à $t_{\vec{u}}$ puisque $t_{\vec{0}}$ est la translation qui ne fait rien.

En définitive, $\vec{u} + \vec{0}$ est le vecteur de la translation $t_{\vec{u}}$.

Donc: $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$.

On retiendra que:

Pour tout vecteur $\vec{u}$, on a $\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$

2-<u>Somme de trois vecteurs.</u>

a) <u>Exposé du problème.</u>

Pour effectuer la somme de trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ pris dans cet ordre, on peut a priori procéder comme suit:

- Soit on détermine les vecteurs $\vec{a} = \vec{u} + \vec{v}$ puis $\vec{b} = \vec{a} + \vec{w}$
- Soit on détermine les vecteurs $\vec{c} = \vec{v} + \vec{w}$ puis $\vec{d} = \vec{u} + \vec{c}$

Le problème consiste maintenant à savoir si les vecteurs $\vec{b}$ et $\vec{d}$ ainsi obtenus sont égaux ou non.

b) Test graphique. (pour se faire une idée du résultat)

Questions.

- Choisir trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ (donc trois points U, V et W dans $\mathcal{P}o$) puis construire les points A, B, C et D images respectives dans $\mathcal{P}o$ des vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ et $\vec{d}$.
- A travers cet exemple, peut-on prévoir un résultat général concernant les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$? Si oui, lequel ?

c) Etude théorique.

En *langage "transformations"* dans $\mathcal{P}o$, les égalités qui définissent les vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ et $\vec{d}$ peuvent se traduire par les tableaux suivants:

$$\left[\begin{array}{ccccc} V & \xrightarrow[\vec{u}+\vec{v}=\vec{a}]{t_{\vec{u}}} & A & \xrightarrow[\vec{a}+\vec{w}=\vec{b}]{t_{\vec{w}}} & B \\ V & \xrightarrow[\vec{v}+\vec{w}=\vec{c}]{t_{\vec{w}}} & C & \xrightarrow[\vec{u}+\vec{c}=\vec{d}]{t_{\vec{u}}} & D \end{array}\right.$$

De même que le point B, le point D est le transformé de V par la translation composée des translations $t_{\vec{u}}$ et $t_{\vec{w}}$.
On a donc B = D ce qui, dans $\mathcal{P}$, se traduit par $\vec{b} = \vec{d}$.

On vient ainsi de montrer que:

Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, on a:

$$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$$

En conséquence, on pourra noter ce vecteur $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$.

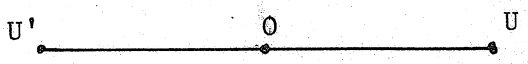
3-Opposé d'un vecteur.

a) Problème.

Etant donné un vecteur $\vec{u}$, peut-on trouver une vecteur $\vec{u}'$ tel que $\vec{u} + \vec{u}' = \vec{0}$?

Solution.

Transcrit en *langage "transformations"* dans $\mathcal{P}o$, le problème posé s'énonce comme suit:
« Etant donné un point U, peut-on trouver un point U' tel que la composée des translations $t_{(O,U)}$ et $t_{(O,U')}$ envoie le point O sur lui-même? »



La réponse est alors immédiate: pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que le bipoint (O,U') ait même vecteur que le bipoint (U,O). Le problème a donc une solution unique.

En conclusion on retiendra que:

Pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe un et un seul vecteur $\vec{u}'$ tel que: $\vec{u} + \vec{u}' = \vec{0}$

---

b) Définition.

L'unique vecteur $\vec{u}'$ qui vérifie l'égalité $\vec{u}' + \vec{u} = \vec{0}$ est appelé opposé de $\vec{u}$ et noté $-\vec{u}$.

Pour tout vecteur $\vec{u}$, on a donc : $\vec{u} + (-\vec{u}) = (-\vec{u}) + \vec{u} = \vec{0}$.
Ainsi, $\vec{u}$ est l'opposé de $(-\vec{u})$. On traduit cette situation en disant que les vecteurs $\vec{u}$ et $-\vec{u}$ sont opposés.

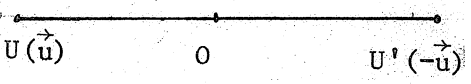
Remarques:

- Le vecteur nul est son propre opposé.
- Quels que soient les points A et B, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont opposés. En effet, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$.

c) Image du vecteur $-\vec{u}$ dans $\mathcal{P}o$.

L'étude précédente a montré que:

Dans $\mathcal{P}o$, l'image du vecteur $-\vec{u}$ est le point symétrique par rapport à O du point U image de $\vec{u}$.



---

d) Vecteurs opposés: traductions diverses.

Etant donnés des points A, B, C et D d'un plan $\mathcal{P}$ ($A \neq B$), il importe de savoir que les quatre énoncés suivants sont équivalents:

---

1. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont opposés ($\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \vec{0}$)
2. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$
3. Les bipoints (A,B) et (C,D) ont { même direction ; des sens opposés ; même longueur }
4. Le segments [A,C] et [B,D] ont même milieu

En effet:

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \vec{0}$ *équivaut à* $\overrightarrow{AB}$ est l'opposé de $\overrightarrow{CD}$ [1]

" " $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ car $\overrightarrow{DC}$ est l'unique opposé de $\overrightarrow{CD}$ [2]

" " Les bipoints (A,B) et (D,C) ont { même direction, même sens, même longueur } [3]

" " Les bipoints (A,B) et (C,D) ont { même direction, des sens opposés, même longueur } [4]

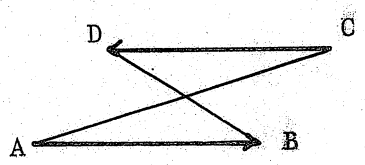


figure 1

figure 2

Par ailleurs, l'équivalence des énoncés [2] et [4] a déjà été établie précédemment.

On remarquera en outre que:

- les énoncés [1] et [2] son exprimés en *langage vectoriel.*
- les énoncés [3] et [4] son exprimés en *langage "configurations"*

4–Différence de deux vecteurs.

a) Définition.

Etant donné deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, le vecteur $\vec{u} + (-\vec{v})$ est appelé différence des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. On le note $\vec{u} - \vec{v}$.

b) Nouvelle expression de la relation de Chasles.

Quels que soient les points A, B et M, on a: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}$

En effet, $\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB} + (-\overrightarrow{MA}) = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB}$

c) Image de la différence de deux vecteurs dans $\mathcal{P}_o$.

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ étant donnés -autrement dit les points U et V étant donnés dans $\mathcal{P}_o$- désignons par T l'image de $\vec{u} - \vec{v}$.

On a alors: $\overrightarrow{OT} = \vec{u} - \vec{v} = \overrightarrow{OU} - \overrightarrow{OV} = \overrightarrow{VU}$.

Le point T est donc le transformé de O par la translation $t_{(V,U)}$

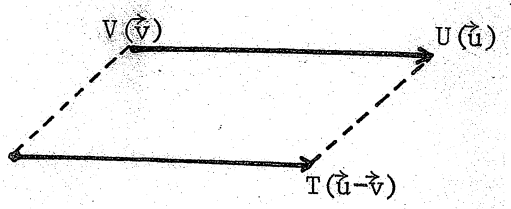


figure 1

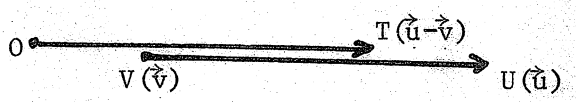


figure 2

On retiendra donc que:

Dans $\mathcal{P}_o$, le point représentant le vecteur $\vec{u} - \vec{v}$ est le transformé de O par la translation $t_{(V,U)}$.

II - REGLES DE CALCUL CONCERNANT L'ADDITION VECTORIELLE

Le tableau ci-dessous présente "en parallèle" les propriétés de l'addition des vecteurs et celles de l'addition des nombres.

$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont des éléments quelconques de $\mathcal{P}$.	x, y et z sont des éléments quelconques de $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$.
<u>Commutativité</u>	
$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$	$x + y = y + x$
<u>Associativité</u>	
$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$	$(x + y) + z = x + (y + z)$
<u>Elément neutre</u>	
$\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$	$x + 0 = 0 + x = x$
<u>Opposé</u>	
$\vec{u} + (-\vec{u}) = (-\vec{u}) + \vec{u} = \vec{0}$	$x + (-x) = (-x) + x = 0$

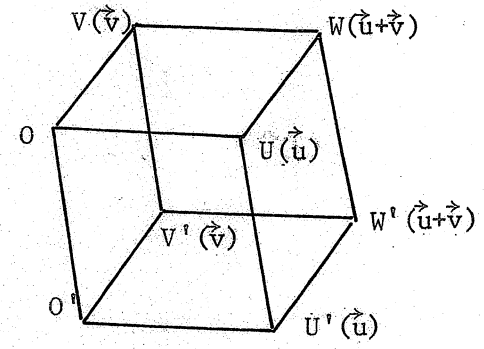
L'addition des vecteurs bénéficie donc des mêmes propriétés que l'addition des nombres. En conséquence les règles de calcul régissant l'addition vectorielle sont identiques à celles qu'on utilise <u>couramment</u> pour l'addition des nombres.

<u>Commentaire</u>.

Il n'y a pas lieu de s'attarder sur les règles de calcul en usage dans un groupe commutatif. Les élèves ont l'habitude d'opérer dans ce type de structure.

Remarque.

Pour établir les propriétés de l'addition dans le plan vectoriel $\vec{\mathcal{P}}$, nous avons identifié ce plan au plan pointé $\mathcal{P}o$, et établi en fait que $\mathcal{P}o$ avait une structure de groupe abélien.



Il est clair que le remplacement dans $\mathcal{P}$ du point origine O par le point O' ne change rien à l'affaire vu que la translation $t_{(O,O')}$ est un isomorphisme du groupe $(\mathcal{P}o,+)$ sur le groupe $(\mathcal{P}o',+)$. En d'autres termes, les groupes $\mathcal{P}o$ et $\mathcal{P}o'$ sont deux "images" identiques à un isomorphisme près du groupe additif $\vec{\mathcal{P}}$.

Partie C

MULTIPLICATION D'UN VECTEUR PAR UN NOMBRE REEL

I - REPRESENTATION DE $\mathbb{R}$: LA DROITE NUMERIQUE REELLE

L'introduction de la notion de nombre réel et de la notation $\mathbb{R}$, pour désigner l'ensemble des nombres réels, est actuellement programmée en classe de Seconde. C'est pourquoi nous n'avons pas fait référence à cet ensemble dans les chapitres 1, 2 et 3 qui sont destinés aux classes de Quatrième et Troisième.

Nous supposons ici que les propriétés de l'addition et de la multiplication des nombres réels ainsi que les règles concernant à la fois ces opérations et l'ordre dans $\mathbb{R}$ sont connues.

Pour conforter ces connaissances, nous allons institutionnaliser les pratiques et acquis antérieurs concernant le repèrage d'un point sur une droite (voir chapitre 3).

Dans la suite de ce paragraphe nous nous plaçons dans la situation suivante:

Dans un plan $\mathcal{P}$ de l'espace est fixée une unité de longueur;
Δ est une droite de ce plan munie d'un repère (O,I).

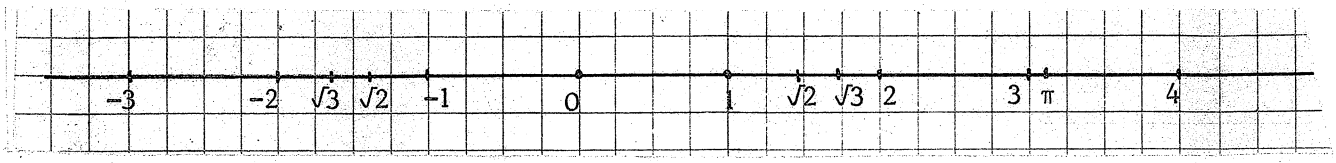
1–Correspondance entre l'ensemble des points d'un axe et $\mathbb{R}$.

Nous admettrons alors que:

1 On définit une fonction φ de Δ dans $\mathbb{R}$ en associant à chaque point M de Δ:

- le nombre $\frac{OM}{OI}$ lorsque M appartient à la demi-droite [OI)
- le nombre $-\frac{OM}{OI}$ dans le cas contraire.

Ce nombre appelé abscisse du point M dans le repère (O,I) –ou sur l'axe (O,I)– sera, sauf mention contraire, noté $\mathscr{a}_M$.



2 Cette fonction φ est telle que:

- Chaque point de Δ admet une abscisse
- Chaque élément de $\mathbb{R}$ (ensemble d'arrivée) est l'abscisse d'un et d'un seul point de la droite Δ (ensemble de départ).

Autrement dit:

- à chaque point de Δ correspond un unique nombre réel.
- à chaque nombre réel correspond un unique point de Δ.

3 Quels que soient les points U, M et M' de Δ:

M' est le transformé de M par $t_{(O,U)}$ équivaut à $\mathscr{a}_{M'} = \mathscr{a}_M + \mathscr{a}_U$

langage numérique

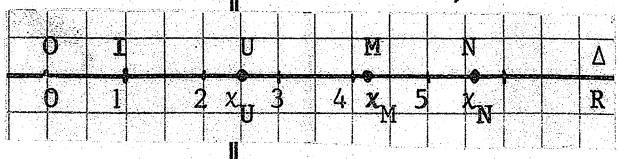


figure 1

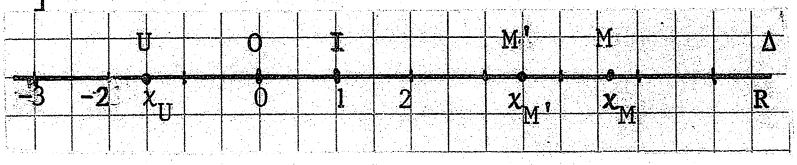


figure 2

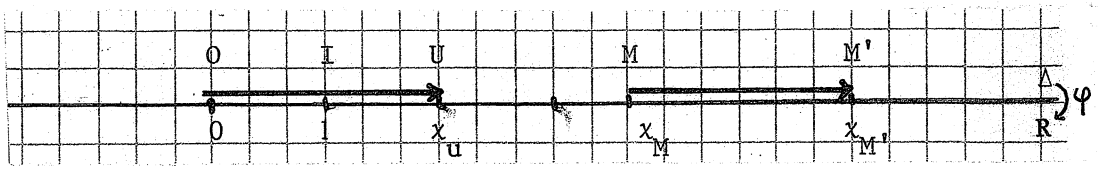
La correspondance entre ensemble des points d'un axe et $\mathbb{R}$ bénéficie d'autres propriétés que celles que nous venons d'admettre. Elles résultent de ces trois premières propriétés. Nous les aborderons ci–après.

2–Ordre sur l'axe (O,I) et ordre sur $\mathbb{R}$.

La définition d'une relation d'ordre sur l'axe (O,I) repose sur la notion intuitive de sens de parcours d'une droite.

On dit qu'un point M est avant un point M' sur l'axe (O,I) pour exprimer que:

- soit M = M'
- soit le bipoint (M,M') a le même sens que le bipoint (O,I)



Ceci dit, étant donné des points M et M' désignons par U le transformé de O par la translation $t_{(M,M')}$.

Les bipoints (O,U) et (M,M') sont alors de même vecteur. Ils sont donc de même sens. Par suite:

M est avant M' sur l'axe (O,I)

équivaut à	O est avant U sur l'axe (O,I)	
équivaut à	U appartient à la demi-droite [OI)	
équivaut à	$O \leq x_U$	← ordre et addition dans $\mathbb{R}$
équivaut à	$x_M \leq x_M + x_U$	← ordre et addition dans $\mathbb{R}$
équivaut à	$x_M \leq x_{M'}$, car $t_{(O,U)}(M) = M'$ (P03)	

L'ordre dans lequel on rencontre les points de Δ lorsqu'on parcourt cette droite dans le sens de O vers I coïncide avec celui dans lequel sont rangées leurs abscisses dans $\mathbb{R}$. (relation ≤)

De façon plus précise, quels que soient les points M et M' de l'axe (O,I):

---

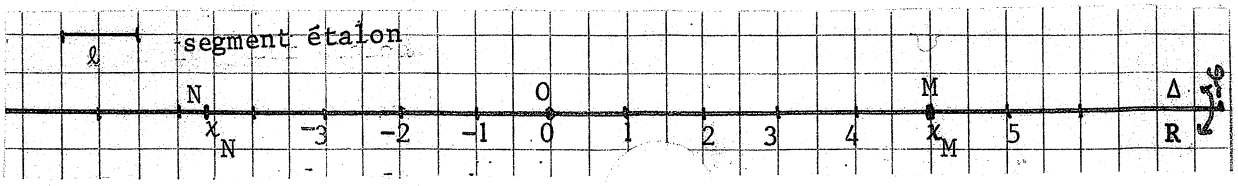
langage numérique

M est avant M' sur l'axe (O,I) équivaut à $x_M \leq x_{M'}$

3–Distance de deux points et distance de deux réels.

a) Valeur absolue d'un réel.

Rappelons que l'abscisse x_M d'un point M sur l'axe (O,I) est soit $\frac{OM}{OI}$, soit $-\frac{OM}{OI}$ suivant que M appartient ou non à la demi-droite [OI).



Autrement dit, en posant $\lambda = OI$, la distance d'un point M à l'origine est, soit λx_M lorsque $x_M \geq 0$, soit $-\lambda x_M$ lorsque $x_M \leq 0$.

Ceci nous conduit à adopter la définition suivante:

Définition.

On appelle valeur absolue du nombre réel x le nombre positif noté $|x|$ défini comme suit:

- Si $x \geq 0$ alors $|x| = x$
- Si $x \leq 0$ alors $|x| = -x$

Ainsi, pour tout point M de Δ, on peut écrire: $OM = \lambda |x_M|$ (avec $\lambda = OI$)

Remarque.

En notant $\sup(x , -x)$ le plus grand des deux nombres x et $-x$, on a: $|x| = \sup(x , -x)$.

On en déduit: $|-x| = \sup(-x , x) = \sup(x , -x) = |x|$.

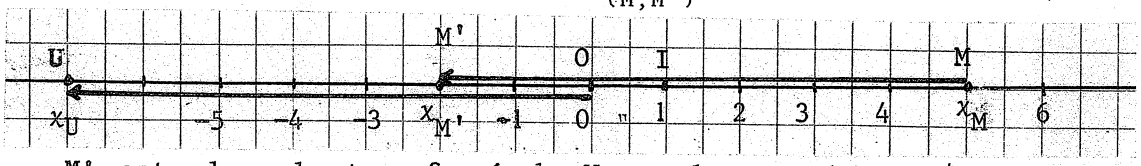
Conclusion:

Deux nombres opposés ont même valeur absolue

---

b) Distance de deux réels.

Soit deux points M et M' de l'axe (O,I). Désignons par U le transformé de O par la translation $t_{(M,M')}$.



M' est alors le transformé de M par la translation $t_{(O,U)}$.

Compte tenu de la propriété PO3, ceci se traduit numériquement par: $x_M = x_{M'} - x_U$.

Par ailleurs $MM' = OU = |x_U|$.

Or, $OU = \lambda |x_U|$, en posant $\lambda = OI$, il s'ensuit que:

$MM' = \lambda |x_{M'} - x_M|$

Ce résultat nous conduit à adopter la définition suivante:

Définition.

Etant donné deux nombres x et y, le nombre positif $|x - y|$ est appelé distance du réel x au réel y.

$|x - y|$ se lit indifféremment "*valeur absolue de y moins x*" ou "distance de x à y"

Remarques.

- On a vu que: $|y - x| = |x - y|$. Autrement dit, la distance de x à y est égale à la distance de y à x. On peut donc parler de la distance de deux nombres réels. En particulier $|x|$ est la distance de x à zéro (ou de zéro à x).
- Il convient de retenir la formule qui lie la distance de deux points d'un axe (O,I) à celle de leurs abscisses.

Quels que soient les points M et M' d'un axe (O,I), on a:

$$MM' = \lambda |x_{M'} - x_M|$$

où λ est la mesure de [O,I] en se référant à l'unité de longueur choisie dans le plan

---

Exercice:

Dans le plan $\mathcal{P}$, une droite Δ est munie d'un repère (O,I), l'unité de longueur est le centimètre.

1° Calculer la distance des points A et B de Δ sachant que

$x_A = -5$, $x_B = -\frac{3}{2}$ et $OI = \frac{1}{2}$.

Vérifier vos résultats en faisant un dessin.

2° Les points M et N de Δ sont tels que:

$x_M = 3$, $x_N = -\frac{5}{3}$ et $MN = 7$.

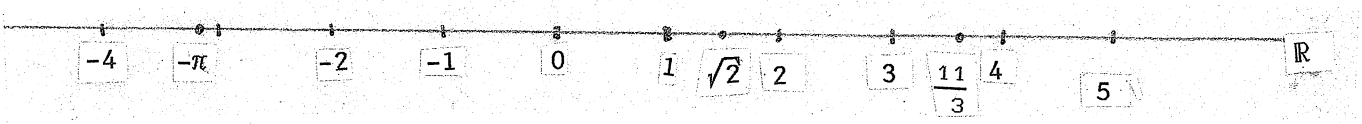
Quelle est la mesure du segment [O,I]? Vérifier votre résultat en faisant un dessin.

4-Représentation géométrique de $\mathbb{R}$.

Lorsqu'une droite Δ d'un plan $\mathcal{P}$ est munie d'un repère (O,I), la fonction $\varphi : \Delta \longrightarrow \mathbb{R}$ fait coïncider:
$M \longmapsto x_M$

- l'ordre sur Δ (relation "*être avant*") induit par son sens de parcours de O vers I et l'ordre dans $\mathbb{R}$ (relation $\leq$).
- la distance de deux points de Δ et la distance de leurs abscisses dès lors que (O,I) est un repère normal de Δ.

Il paraît donc naturel d'identifier chaque nombre réel au point de Δ dont il est l'abscisse. Ce faisant, on obtient une représentation géométrique de l'ensemble $\mathbb{R}$ appelée droite numérique réelle ou encore axe numérique réel. Les "points" de la droite numérique réelle sont les nombres réels.



Cette identification justifie l'usage du vocabulaire géométrique à propos des nombres réels. On comprendra donc aisément le sens qu'il convient d'accorder à des phrases telles que: « les points 2 et -2 sont symétriques par rapport à zéro » ou encore « 2 est le centre du segment [1;3] ».

II - PRODUIT D'UN VECTEUR PAR UN NOMBRE REEL

INTRODUCTION

1-Propriété de Thalès.

Rappelons que par côté d'un triangle on entend, soit le segment qui joint deux sommets, soit la droite qui passe par deux sommets. Dans ce qui suit c'est le deuxième point de vue que nous retenons.

> On dit que deux triangles ayant un sommet commun sont homothétiques pour signifier que ces triangles ont deux côtés communs et que leurs troisièmes côtés sont parallèles.

Voici les deux aspects de cette configuration connue sous le nom de "*configuration des triangles de Thalès*".

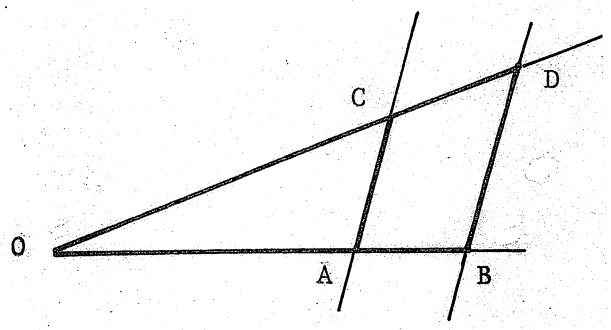


figure 1

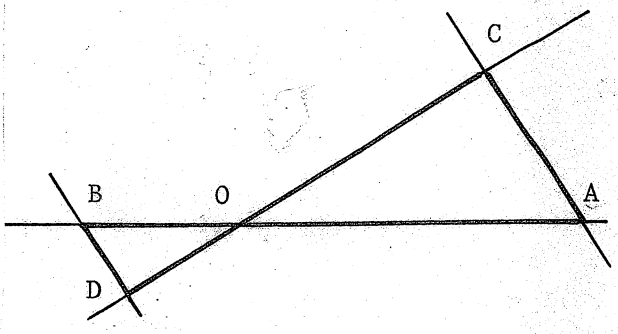


figure 2

Actuellement, on programme en classe de Troisième l'étude qui conduit à l'institutionnalisation de la propriété[1] dite de Thalès.

> Lorsque deux triangles $\begin{cases} OBD \\ OAC \end{cases}$ sont homothétiques (voir figure ci-dessus) alors on a : $\frac{OB}{OA} = \frac{OD}{OC}$

---

(1) *Cette propriété peut s'établir en utilisant la notion d'aire.*

Voici en abrégé cette démonstration:

$\frac{aire(OAD)}{aire(OAC)} = \frac{OD}{OC}$ et $\frac{aire(OBC)}{aire(OAC)} = \frac{OB}{OA}$

or $aire(OAD) = aire(OBC)$, donc $\frac{OD}{OC} = \frac{OB}{OA}$

2-Etude du problème réciproque.

L'étude du problème réciproque, sous l'hypothèse:

« O, A et B alignés, et, O, C et D alignés, et, $\frac{OB}{OA} = \frac{OD}{OC}$ »

ne conduit pas nécessairement à la conclusion:

« les triangles OAC et OBD sont homothétiques »

(voir figures ci-dessous où OB = OB')

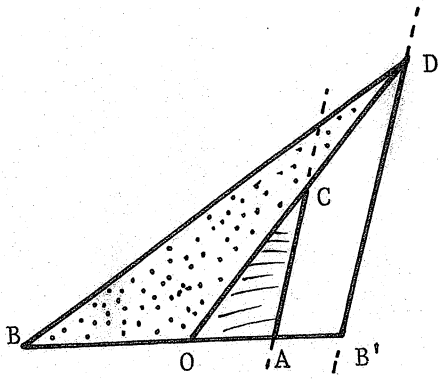


figure 3

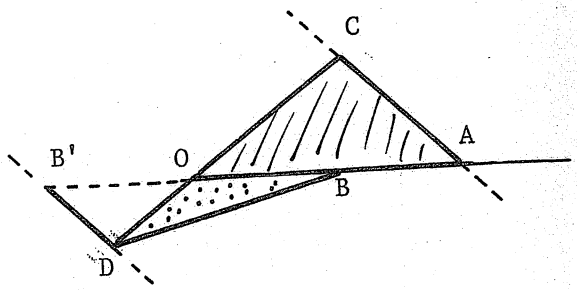


figure 4

On doit faire entrer dans l'hypothèse la condition supplémentaire :

« les bipoints (O,A) et (O,B) d'une part, et les bipoints (O,C) et (O,D) d'autre part, sont simultanément de même sens ou de sens opposés »

Dès lors le vecteur (grandeur associée au bipoint) semble être un outil plus adéquat que la longueur (grandeur associée à un segment) pour aborder un tel problème. A charge pour nous d'apporter réponse à la question suivante:

« Etant donnés des points alignés O, A et B avec $O \neq A$, peut-on trouver un nombre qui fasse apparaître le rapport $\frac{OB}{OA}$ et de plus, rende compte du fait que les bipoints (O,A) et (O,B) soient de même sens ou de sens opposé? »

Une idée vient immédiatement à l'esprit. ce nombre pourrait-être:

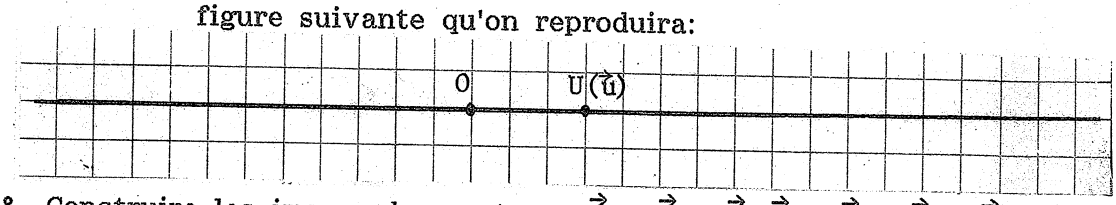
- le rapport $\frac{OB}{OA}$ lorsque les bipoints (O,A) et (O,B) sont de même sens (figure 4)
- l'opposé de ce rapport lorsque les bipoints (O,A) et (O,B) sont de sens contraires (figure 3)

En somme le nombre α qu'on propose n'est autre que l'abscisse du point C sur l'axe (O,A). Ceci dit, pour coder en langage vectoriel les informations concernant la position du point B sur la droite (OA) que fournit la donnée du réel α, on pourra écrire: $\overrightarrow{OB} = \alpha\overrightarrow{OA}$.

Reste maintenant à tester si l'option que nous venons de prendre peut prolonger de façon cohérente la partie du modèle mathématique déjà mis en place. C'est l'objet de l'étude qui suit.

3-Les vecteurs $\vec{u} + \vec{u}$, $\vec{u} + \vec{u} + \vec{u}$, ..., $-\vec{u}$, $(-\vec{u}) + (-\vec{u})$, ...

T. P. 11 Les données du problème sont celles fournies par la figure suivante qu'on reproduira:



1° Construire les images des vecteurs $\vec{v} = \vec{u} + \vec{u}$, $\vec{w} = \vec{u} + \vec{u} + \vec{u}$, $\vec{u}' = -\vec{u}$, $\vec{v}' = (-\vec{u}) + (-\vec{u})$, $\vec{w}' = (-\vec{u}) + (-\vec{u}) + (-\vec{u})$, ...

2° Quels sont les abscisses des points U, V, W, ..., U', V', W' sur l'axe (O,U)?

3° Pour compléter les égalités suivantes, coder en *langage vectoriel* les informations qu'on vient d'obtenir concernant les positions des points U, V, ... sur la droite (OU)

$\vec{u} =$ ..... $\vec{u}$, $\vec{v} = \vec{u} + \vec{u} =$ ..... $\vec{u}$, $\vec{w} = \vec{u} + \vec{u} + \vec{u} =$ ..... $\vec{u}$,

$\vec{u}' =$ ..... $\vec{u}$, $\vec{v}' = (-\vec{u}) + (-\vec{u}) =$ ..... $\vec{u}$,

$\vec{w} = (-\vec{u}) + (-\vec{u}) + (-\vec{u}) =$ ..... $\vec{u}$, ...

Ces écritures vous paraissent-elles cohérentes ou non?

III - PRODUIT D'UN VECTEUR PAR UN NOMBRE REEL

MODELISATION

Dans toute la suite de ce chapitre, le plan $\mathcal{P}$ qui sert de cadre référentiel de notre étude est muni d'un point origine O. Le plan vectoriel $\vec{\mathcal{P}}$ qui lui est associé est identifié au plan pointé $\mathcal{P}o$.

1-Vecteurs colinéaires.

a) Définition.

En langage vectoriel, pour signifier que deux bipoints ont même direction on dit que leurs vecteurs sont colinéaires.

On convient en outre de dire que le vecteur nul est colinéaire à n'importe quel vecteur.

Ainsi, quels que soient les points A, B, C et D,

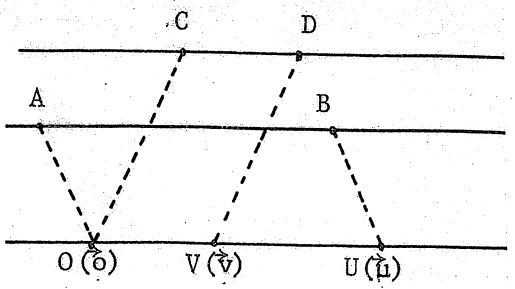
langage vectoriel		*autre description de la configuration*
• $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ colinéiares	équivaut à	A, B et C alignés.
• $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ non nuls et colinéaires	équivaut à	(AB) et (CD) parallèles.

b) Images de vecteurs colinéaires dans le plan pointé $\mathcal{P}o$.

Etant donné des points A, B, C et D du plan $\mathcal{P}$, on pose:

$\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$.

Il est clair que la colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$, autrement dit des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, se traduit par O, U et V alignés (y compris lorsque l'un au moins des vecteurs est nul).



On peut donc donner une autre définition de la colinéarité de deux vecteurs.

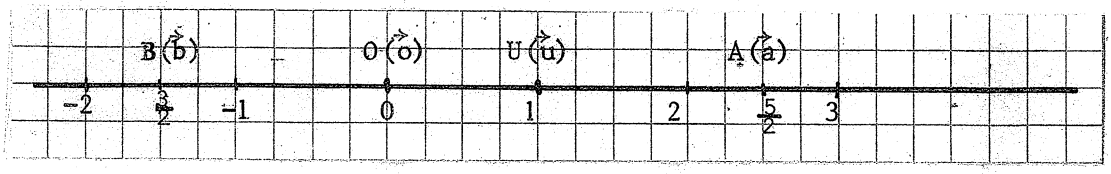
Définition bis

Deux éléments du plan vectoriel $\mathcal{P}$ sont dits colinéaires pour signifier que, dans le plan pointé $\mathcal{P}o$, leurs images sont alignées avec l'origine.

On remarquera que le choix du point origine dans $\mathcal{P}$ n'a aucune influence sur le fait que deux vecteurs soient colinéaires ou non. Cette dernière définition est donc parfaitement légitime.

2–Produit d'un vecteur par un nombre réel. Coefficient de colinéarité.

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs colinéaires, $\vec{u}$ non nul, α l'abscisse de V sur l'axe (O,U).



Pour transcrire ces informations en *langage vectoriel*, on décide de dire que:

- Le vecteur $\vec{v}$ est le produit du vecteur $\vec{u}$ par le réel α
- Le réel α est le coefficient de colinéarité du vecteur $\vec{v}$ au vecteur $\vec{u}$.
- puis d'écrire: $\vec{v} = \alpha\vec{u}$.

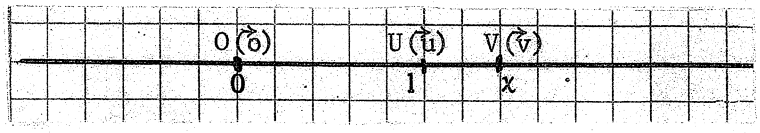
A titre d'exemple, en se reportant à la figure ci-dessus, on peut écrire:

$\vec{0} = 0\vec{u}$, $\vec{u} = 1\vec{u}$, $\vec{a} = \frac{5}{2}\vec{u}$, $\vec{b} = -\frac{3}{2}\vec{u}$.

On adopte ainsi les définitions suivantes:

Définitions.

- On appelle produit d'un vecteur non nul $\vec{u}$ par le réel α le vecteur noté $\alpha\vec{u}$ représenté par le point V d'abscisse α sur l'axe (O,U).



On a donc: $\vec{v} = \alpha\vec{u}$

Le réel α est appelé coefficient de colinéarité du vecteur $\vec{v}$ au vecteur non nul $\vec{u}$.

- On complète cette définition en convenant que le produit du vecteur nul par n'importe quel réel est le vecteur nul.

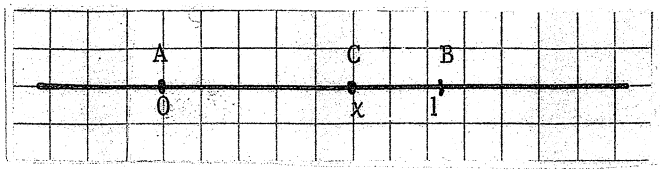
On écrira donc: pour tout réel α, $\alpha\vec{0} = \vec{0}$

Remarques:

1° Pour tout vecteur $\vec{u}$, on a: $0\vec{u} = \vec{0}$.

2° Dire que les points A, B et C, avec $A \neq B$ satisfont la relation $\overrightarrow{AC} = \alpha\overrightarrow{AB}$ signifie que:

- Les points A, B et C sont alignés.
- Le point C a comme abscisse α sur l'axe (A,B).



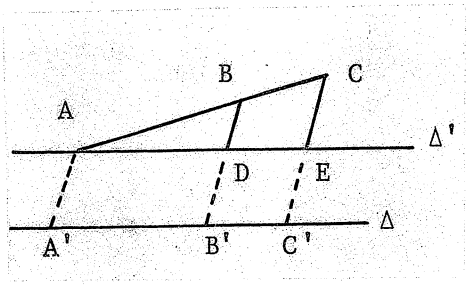
A ce propos, il est bon de rappeler que le réel α, baptisé coefficient de colinéarité de $\overrightarrow{AB}$ à $\overrightarrow{AC}$ en *langage vectoriel*, est indépendant du choix de l'unité de longueur dans le plan $\mathcal{P}$:

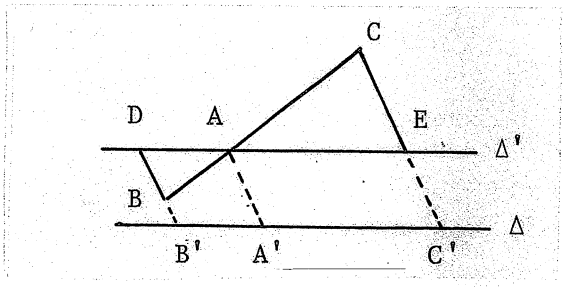
$\alpha = \frac{AC}{AB}$ lorsque $C \in [AB]$, $\alpha = -\frac{AC}{AB}$ lorsque $C \notin [AB]$.

On notera également que, pour $\alpha \neq 0$, le coefficient de colinéarité du vecteur $\overrightarrow{AB}$ au vecteur $\overrightarrow{AC}$ est $\frac{1}{\alpha}$.

3-Propriété de Thalès (revue et généralisée)

Soit A, B et C des points satisfaisant à la relation $\overrightarrow{AC} = \alpha\overrightarrow{AB}$; A', B' et C' leurs projetés respectifs sur une droite Δ.





a) Etude du cas général: la parallèle Δ' à Δ passant par A coupe les projetantes passant par B et C en D et E (voir figure ci-dessus).

Les triangles ABD et ACE étant homothétiques, on a:

1° $\frac{AC}{AB} = \frac{AE}{AD}$ (Résultat déjà institutionnalisé en classe de 3ème)

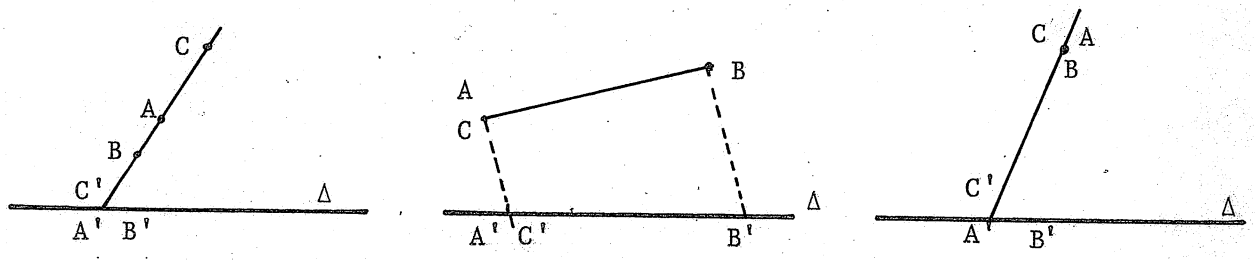
2° Les bipoints (A,B) et (A,C) d'une part, les bipoints (A,D) et (A,E) d'autre part, sont à la fois, soit de même sens soit de sens opposés. (ceci résulte du fait -admis- que le projeté d'un segment est un segment)

Le coefficient de colinéarité de $\overrightarrow{AE}$ à $\overrightarrow{AD}$ est donc égal à celui de $\overrightarrow{AC}$ à $\overrightarrow{AB}$. Autrement dit, on a: $\overrightarrow{AE} = \alpha\overrightarrow{AD}$.

Ceci étant, compte tenu des égalités vectorielles :
$\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AD}$, il vient: $\overrightarrow{A'C'} = \alpha\overrightarrow{A'B'}$

b) Etude des cas particuliers.

En marge du cas général reste à étudier les trois cas particuliers illustrés par les figures ci-dessous.



Dans chacun des cas on a: $\overrightarrow{A'C'} = \alpha\overrightarrow{A'B'}$.

c) Enoncé du résultat.

Propriété de Thalès.

Si des points A, B et C satisfont à la relation $\overrightarrow{AC} = \alpha\overrightarrow{AB}$

alors [leurs projetés respectifs A', B' et C' sur une droite satisfont à la relation $\overrightarrow{A'C'} = \alpha\overrightarrow{A'B'}$

4-Ensemble des vecteurs colinéaires à un vecteur non nul: droite vectorielle

a) Définition.

L'ensemble des vecteurs colinéaires à un vecteur $\vec{i}$ non nul est constitué des vecteurs représentés par les points de la droite (OI).

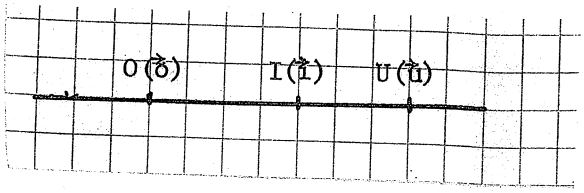
On l'appelle droite vectorielle engendrée par $\vec{i}$.

Notations.

Quand un point M décrit la droite (OI), son abscisse α décrit $\mathbb{R}$. Il s'ensuit que l'ensemble des vecteurs colinéaires au vecteur $\vec{i}$ est constitué des vecteurs $\alpha\vec{i}$ pour α décrivant $\mathbb{R}$. C'est pourquoi la droite vectorielle engendrée par $\vec{i}$ est notée $\mathbb{R}\vec{i}$.

b) Conséquences.

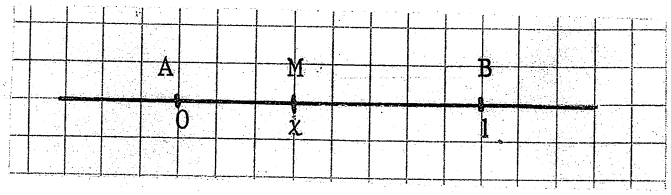
1° Il est clair que la droite vectorielle engendrée par un vecteur non nul $\vec{u}$, colinéaire à $\vec{i}$, est égale à celle engendrée par $\vec{i}$.



> Deux vecteurs non nuls et colinéaires engendrent la même droite vectorielle.

2° Soient deux points A et B de $\mathcal{P}$. L'ensemble des points M de $\mathcal{P}$ définis par la relation vectorielle $\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB}$ est:

- la droite (AB) lorsque α décrit $\mathbb{R}$
- la demi-droite [AB) lorsque α décrit $\mathbb{R}_+$ (les réels positifs)
- le segment [A,B] lorsque α décrit l'intervalle [0,1] de $\mathbb{R}$.



5-Les trois aspects d'une droite Δ munie d'un reepère (O,I).

Le point O joue ici un double rôle: il est à la fois l'origine du plan $\mathcal{P}$ et l'origine du repère (O,I). En pareille situation la droite Δ peut revétir trois aspects suivant qu'on se place dans l'un ou l'autre des domaines suivants:

a) Le domaine géométrique:

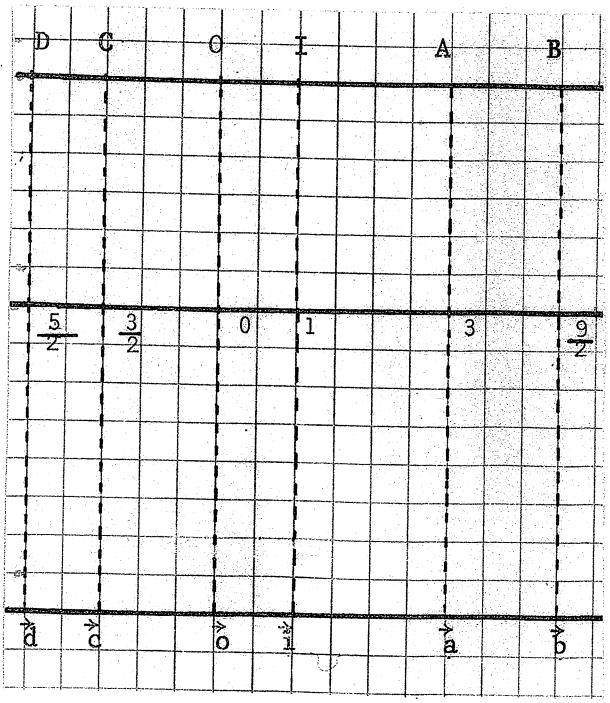
Δ est vue comme un ensemble de points géométriques. C'est son aspect premier. Il est sous-jacent aux deux autres.

b) Le domaine numérique:

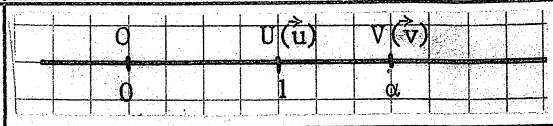
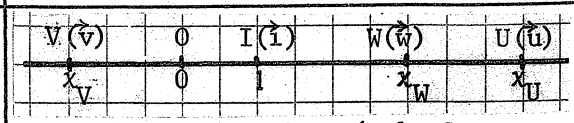
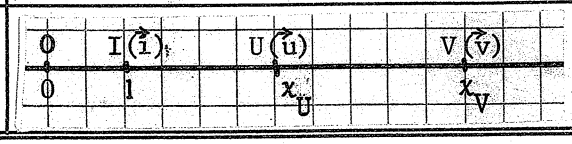
Δ est vue comme représentation de l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels. Elle porte alors le nom de droite numérique réelle.

c) Le domaine vectoriel:

Δ est vue comme représentant l'ensemble $\mathbb{R}\vec{i}$ des vecteurs colinéaires à $\vec{i}$. Elle porte alors le nom de droite vectorielle.

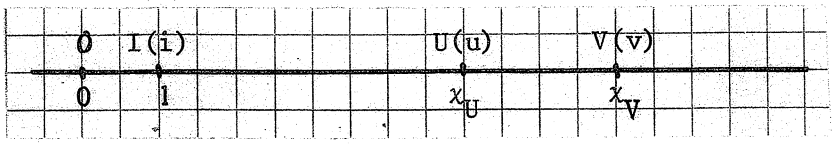


Il est indispensable de savoir transcrire des données d'un domaine dans l'autre. Le tableau ci-dessous résume les situations essentielles (le sigle c.c. est l'abréviation de "coefficient de colinéarité").

Langage		
vectoriel	*des transformations*	*numérique*
$\vec{v} = \alpha\vec{u}$ α est le c.c. de $\vec{v}$ à $\vec{u}$		α est l'abscisse de V sur l'axe (O,U)
$\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$	 W est le transformé de O par la composée de $t_{\vec{U}}$ et $t_{\vec{V}}$ $V \xmapsto{t_{\vec{U}}} W$ ou $U \xmapsto{t_{\vec{V}}} W$	$\mathscr{x}_W = \mathscr{x}_U + \mathscr{x}_V$
$\vec{v} = \alpha\vec{u}$		$\mathscr{x}_V = \alpha \times \mathscr{x}_U$

Le dernier résultat reste à établir. Pour ce faire, on peut considérer que le repère (O,I) est normal puisque l'abscisse d'un point sur sur un axe ne dépend pas du choix de l'unité de longueur dans le plan. ceci dit, en supposant $U \neq O$, quatre éventualités sont à envisager:

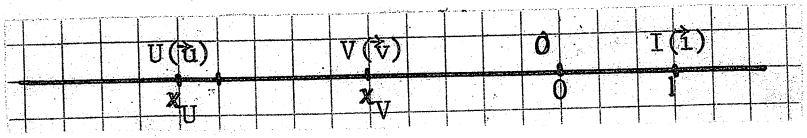
1° U$\in$(OI) et V$\in$(OI).



Dans ce cas, on a: $\mathscr{x}_U = OU$ et $\mathscr{x}_V = OV$

Par suite: $\vec{v} = \alpha\vec{u} \iff \alpha = \dfrac{OV}{OU} = \dfrac{\mathscr{x}_V}{\mathscr{x}_U}$, c'est à dire $\mathscr{x}_V = \alpha \times \mathscr{x}_U$

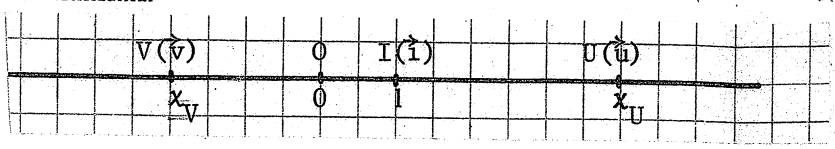
2° U$\notin$(OI) et V$\notin$(OI).



Dans ce cas, on a: $\mathscr{x}_U = -OU$ et $\mathscr{x}_V = -OV$

Par suite: $\vec{v} = \alpha\vec{u} \iff \alpha = \dfrac{OV}{OU} = \dfrac{-\mathscr{x}_V}{-\mathscr{x}_U} = \dfrac{\mathscr{x}_V}{\mathscr{x}_U}$, c'est à dire $\mathscr{x}_V = \alpha \times \mathscr{x}_U$

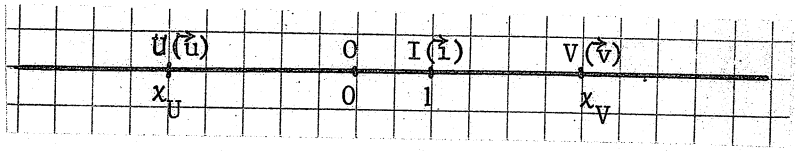
3° $U \in (OI)$ et $V \notin (OI)$



Dans ce cas, on a: $\mathcal{x}_U = OU$ et $\mathcal{x}_V = -OV$

Par suite: $\vec{v} = \alpha\vec{u} \iff \alpha = -\dfrac{OV}{OU} = \dfrac{\mathcal{x}_V}{\mathcal{x}_U}$, c'est à dire $\mathcal{x}_V = \alpha \times \mathcal{x}_U$

4° $U \notin (OI)$ et $V \in (OI)$



Dans ce cas, on a: $\mathcal{x}_U = -OU$ et $\mathcal{x}_V = -OV$

Par suite: $\vec{v} = \alpha\vec{u} \iff \alpha = -\dfrac{OV}{OU} = \dfrac{\mathcal{x}_V}{\mathcal{x}_U}$, c'est à dire $\mathcal{x}_V = \alpha \times \mathcal{x}_U$

Ainsi dans tous les cas de figure on a:

$$\vec{v} = \alpha\vec{u} \iff \mathcal{x}_V = \alpha \times \mathcal{x}_U \qquad \text{(C.Q.F.D.)}$$

Pour achever cette démonstration, il reste à observer que cette équivalence est encore vérifiée lorsque le point U est confondu avec l'origine O. (On a alors: $\vec{u} = \vec{0}$ et $\mathcal{x}_U = 0$)

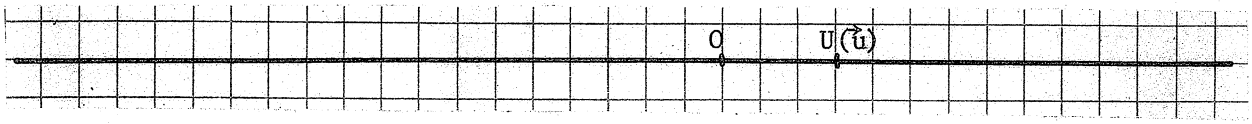
IV - PROPRIETES DE LA MULTIPLICATION D'UN VECTEUR PAR UN NOMBRE REEL

1–Etude expérimentale.

T. P. 12 : Description sommaire.

L'objet de cette manipulation est de permettre à l'élève de se faire une idée des règles de calcul concernant la multiplication d'un vecteur par un nombre au travers de constructions élémentaires dans le plan pointé $\mathcal{P}o$. En voici un exemple:

Les données sont celles de la figure ci–dessous:



Questions:

1) Construire l'image V du vecteur $\vec{v} = 2\vec{u}$, puis celle W du vecteur $\vec{w} = (-3)\vec{v}$.
2) Quelle est l'abscisse du point W dans le repère (O,U)?
   Compléter les égalités suivantes: $\vec{w} =$ ..... $\vec{u}$.
   Autrement dit: $(-3)(2\vec{u}) =$ (..... x .....)$\vec{u}$.

2–Etude théorique.

Il s'agit d'établir, par voie déductive, les propriétés dégagées précédemment à l'aide de quelques exemples. Ces propriétés sont données dans l'encadré suivant:

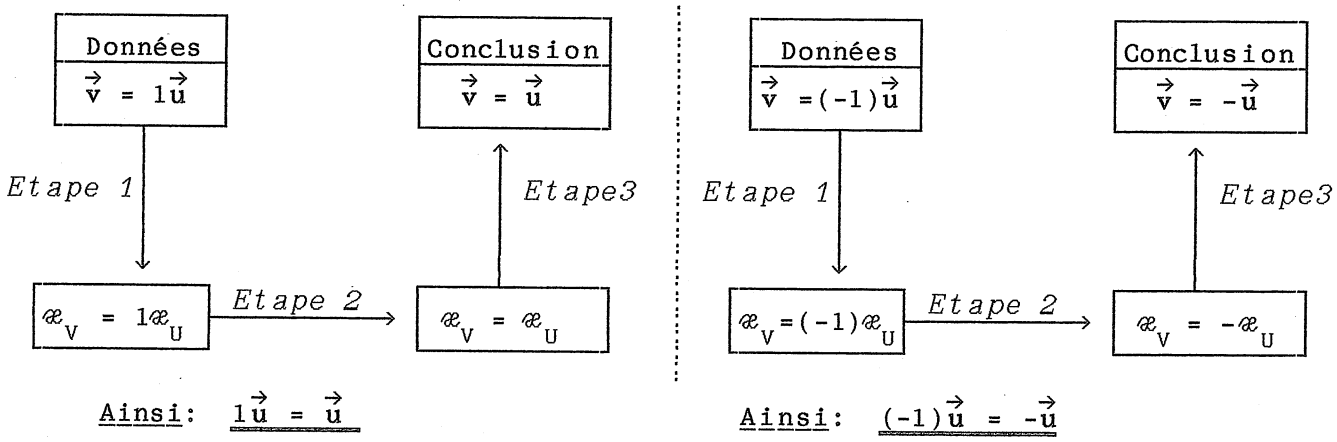
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des éléments quelconques de $\mathcal{P}$;
α et β sont des réels quelconques.

(1) $1\vec{u} = \vec{u}$ et $(-1)\vec{u} = -\vec{u}$	(2) $\alpha(\beta\vec{u}) = (\alpha\beta)\vec{u}$
(3) $(\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$	(4) $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$

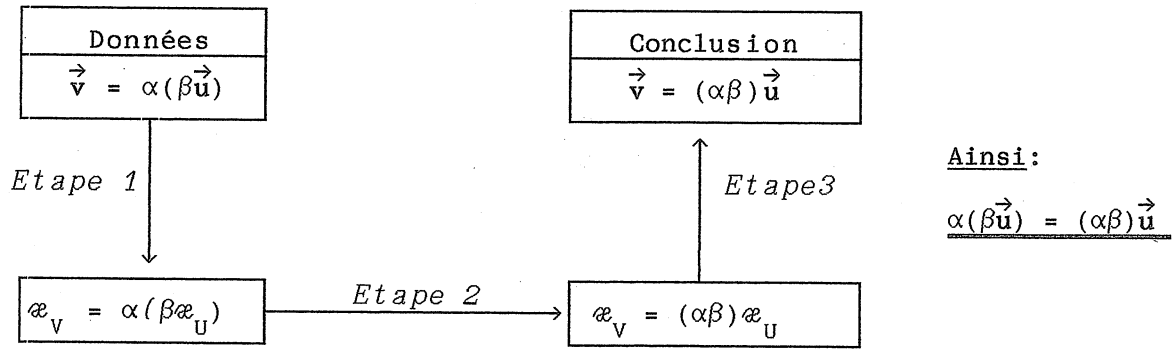
Les démonstrations de ces propriétés, mis à part la propriété P4 dans le cas où les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires, se conduisent toutes selon le même schéma:

- Etape 1 : transcription des données "*vectorielles*" en *langage numérique*
- Etape 2 : utilisation d'une règle adéquate de calcul numérique.
- Etape 3 : transcription du résultat obtenu en *langage vectoriel.*

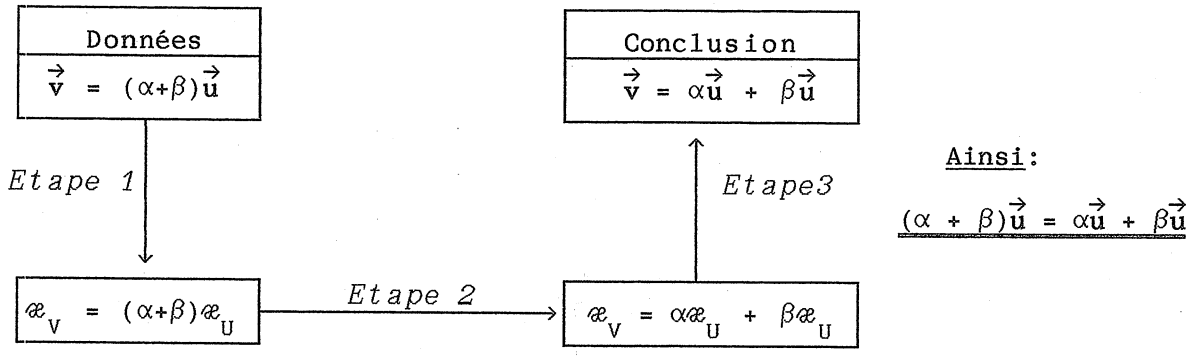
a) **Propriété P1.**



b) **Propriété P2.**

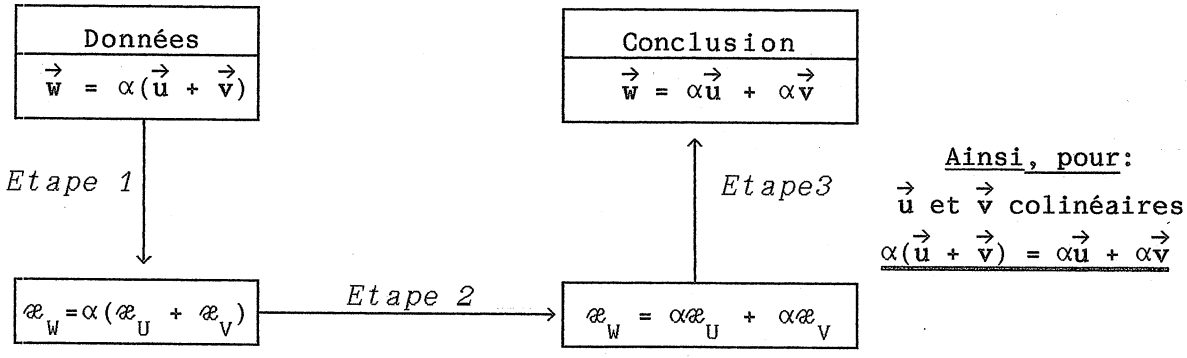


c) **Propriété P3.**



d) **Propriété P4.**

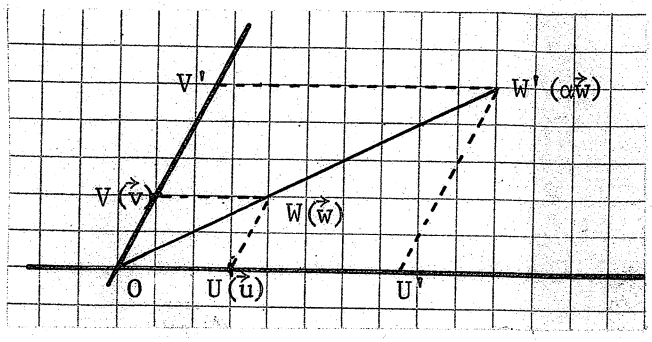
- Cas où les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.



• Cas où les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

On pose: $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$, $\vec{w}' = \alpha\vec{w}$ et on désigne par:

$\left\{\begin{array}{l} \text{U' le projeté de W' sur la droite (OU) parallèlement à (OV)} \\ \text{V' le projeté de W' sur la droite (OV) parallèlement à (OU)} \end{array}\right.$



Alors, d'une part U'OV'W' est un parallélogramme

et donc $\overrightarrow{OW}' = \overrightarrow{OU}' + \overrightarrow{OV}'$

d'autre part, étant donné que $\overrightarrow{OW}' = \alpha\overrightarrow{OW}$, d'après la propriété de Thalès, il vient: $\overrightarrow{OU}' = \alpha\overrightarrow{OU}$ et $\overrightarrow{OV}' = \alpha\overrightarrow{OV}$.

Il s'ensuit que: $\overrightarrow{OW}' = \alpha\overrightarrow{OU} + \alpha\overrightarrow{OV}$, soit, compte tenu des notations employées : $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$.

Ainsi, quels que soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ (colinéaires ou non) on a: $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$ (C. Q. F. D.)

Commentaire.

Il apparaît clairement que la propriété 4 est, pour $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires, une conséquence de la propriété de Thalès. C'est donc un cercle vicieux que commettent certains auteurs de manuels scolaires, lorsqu'ils utilisent cette propriété pour donner une démonstration du "Théorème de Thalès".

3–Règles usuelles du calcul vectoriel.

Nous avons montré que:

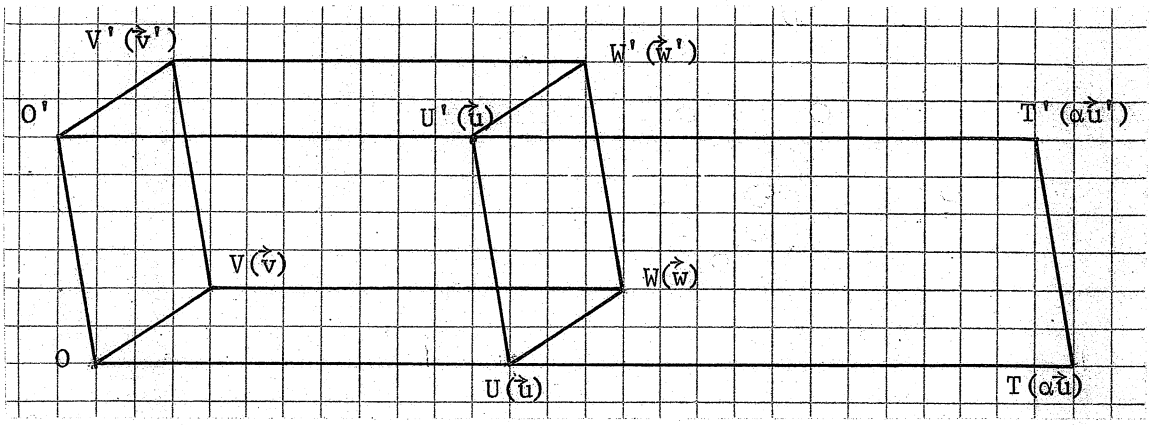
- L'addition des vecteurs bénéficie des mêmes propriétés que celle des nombres réels.
- La multiplication d'un vecteur par un nombre bénéficie de propriétés analogues à celles des nombres réels.

Il s'ensuit que les règles régissant le calcul vectoriel sont identiques à celles qu'on utilise couramment dans le calcul numérique.

Commentaire .

Pour établir les propriétés de l'addition des vecteurs et celles de la multiplication par un nombre réel, nous avons identifié le plan vectoriel $\vec{\mathcal{P}}$ au plan pointé $\mathcal{P}o$ et établi que $\mathcal{P}o$ avait une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Il est clair que le remplacement dans $\mathcal{P}$ du point origine O par le point O' ne change rien à l'affaire.



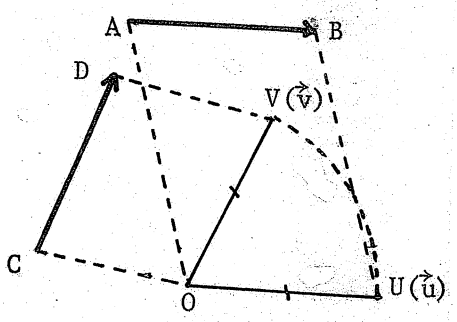
En effet, la translation $t_{(O,O')}$ est un isomorphisme du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $(\mathcal{P}o,+,\cdot)$ sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $(\mathcal{P}o',+,\cdot)$. Autrement dit ces deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels sont des "images" identiques à un isomorphisme près du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $(\vec{\mathcal{P}},+,\cdot)$.

V - COMPLEMENTS

1-Extension du langage vectoriel.

a) Norme d'un vecteur.

En *langage vectoriel*, pour signifier que deux bipoints (A,B) et (C,D) ont même longueur, on convient de dire que leurs vecteurs ont même "norme".



Les images U et V des vecteurs sont alors équidistantes de l'origine.

Cette constatation nous conduit à adopter les définitions suivantes:

Une unité de longueur étant fixée dans le plan $\mathcal{P}$, on appelle:

- norme d'un vecteur $\vec{u}$: la distance de son image à l'origine.
  La norme du vecteur $\vec{u}$ se note $\|\vec{u}\|$.
  On a donc : $\|\vec{u}\| = OU$
- vecteur unitaire: tout vecteur de norme 1

Conséquences immédiates:

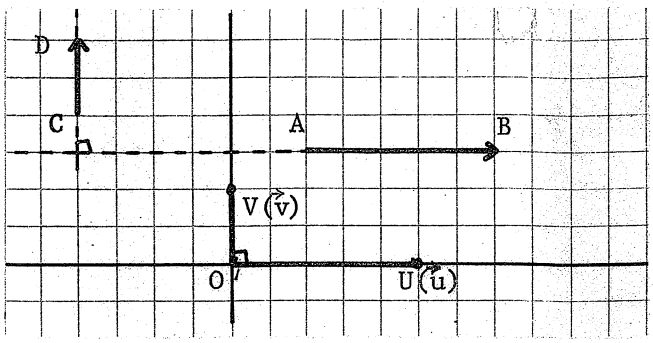
- La norme d'un vecteur est un réel positif.
- La norme de $\overrightarrow{AB}$ est la mesure du segment [A,B] : $\|\overrightarrow{AB}\| = AB$
- Quels que soient le vecteur $\vec{u}$ et le réel α, $\|\alpha\vec{u}\| = |\alpha| \times \|\vec{u}\|$.

En effet, l'égalité précédente est manifestement vérifiée lorsque $\vec{u} = \vec{0}$. Pour $\vec{u} \neq \vec{0}$, en posant $\vec{v} = \alpha\vec{u}$, on a soit $\frac{OV}{OU} = \alpha$, soit $\frac{OV}{OU} = -\alpha$ suivant que α est positif ou non. Autrement dit, pour tout nombre réel α on a $OV = |\alpha| \times OU$ d'où le résultat annoncé.

- L'ensemble des images des vecteurs unitaires est le cercle ayant pour centre l'origine O et pour rayon 1.

b) Vecteurs orthogonaux.

En *langage vectoriel*, pour signifier que deux bipoints (A,B) et (C,D) ont des directions orthogonales, on dit que leurs vecteurs sont orthogonaux.



Les images U et V de ces vecteurs sont alors telles que: (OU) ⊥ (OV).

D'où la définition suivante:

- Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits orthogonaux pour signifier que les droites (OU) et (OV) sont orthogonales. On écrit alors $\vec{u} \perp \vec{v}$.
- On convient en outre de considérer que le vecteur nul est orthogonal à n'importe quel vecteur.

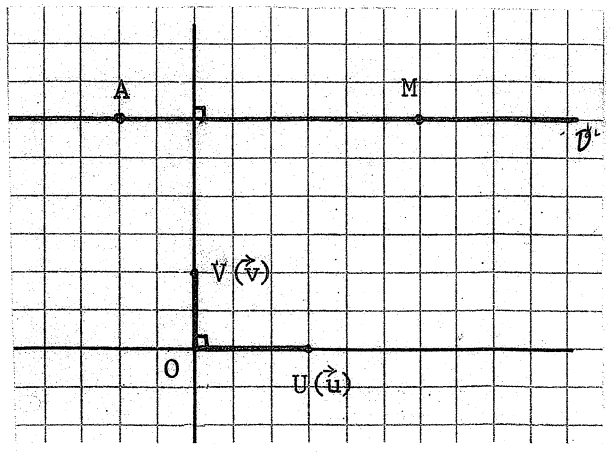
Ainsi, étant donné quatre points A, B, C et D:

langage vectoriel

$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$ équivaut à (AB) ⊥ (CD)

c) Vecteur directeur d'une droite, vecteur normal à une droite.

Un point A et deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls et orthogonaux étant donnés, l'ensemble des points M du plan $\mathcal{P}$ tels que $\overrightarrow{AM}$ soit colinéaire à $\vec{u}$ (respectivement orthogonal à $\vec{v}$) est la droite $\mathcal{D}$ passant par A et parallèle à (OU) (respectivement orthogonale à (OV)).



On dit alors que:

- $\mathcal{D}$ est la droite passant par A et dirigée par le vecteur $\vec{u}$
- $\vec{u}$ est un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$
- $\vec{v}$ est un vecteur normal à la droite $\mathcal{D}$

Ces définitions appellent les remarques suivantes:

1° { Tout vecteur non nul colinéaire à $\vec{u}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$
{ Tout vecteur non nul colinéaire à $\vec{v}$ est un vecteur normal de $\mathcal{D}$

Autrement dit, une droite $\mathcal{D}$ admet une infinité de vecteurs directeurs et une infinité de vecteurs normaux.

2° Une droite est déterminée par la donnée :

{ Soit d'un point et d'un vecteur directeur
{ Soit d'un point et d'un vecteur normal

2-Deux savoir-faire essentiels.

Les résultats qui suivent ne sont pas à mémoriser tant il est immédiat de les conjecturer. On retiendra seulement la procédure qui permet de les justifier.

a) Problème de parallèlisme.

On se trouve en présence de la situation suivante: A, B, C D et E sont cinq points d'un plan $\mathcal{P}$ satisfaisants aux relations: $\overrightarrow{AC} = \alpha\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE} = \alpha\overrightarrow{AD}$

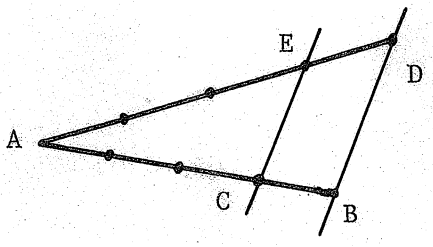


figure (1) $\left(\alpha = \frac{3}{4}\right)$

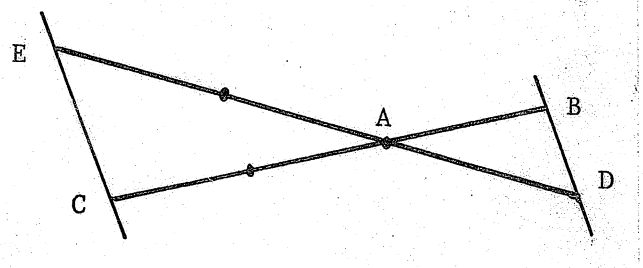


figure (2) $(\alpha = -2)$

Apparemment, les droites (BD) et (CE) sont parallèles. Il s'agit de le justifier.

La procédure utilisée consiste à établir que les vecteurs $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{CE}$ sont colinéaires.

Compte tenu de l'hypothèse, nous avons:

$$\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AC} = \alpha\overrightarrow{AD} - \alpha\overrightarrow{AB} = \alpha(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) = \alpha\overrightarrow{BD}.$$

Les vecteurs $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{CE}$ sont donc colinéaires. Par suite les droites (BD) et (CE) sont parallèles (C.Q.F.D.)

b) Problème d'alignement.

On se trouve en présence de la situation suivante: A, B, C D et E sont cinq points d'un plan $\mathcal{P}$ satisfaisants aux relations: $\overrightarrow{AC} = \alpha\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CE} = \alpha\overrightarrow{BD}$

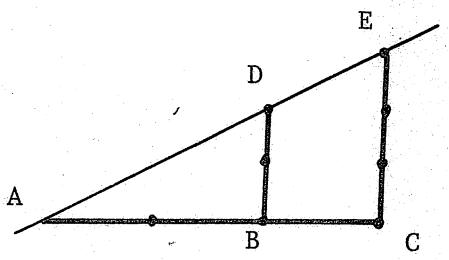


figure (1)

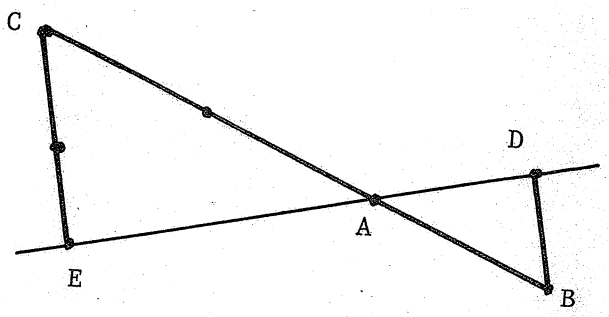


figure (2)

Apparemment, les points A, D et E sont alignés. Il s'agit de le justifier.

La procédure utilisée consiste à établir que les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont colinéaires.

Compte tenu de l'hypothèse, nous avons:

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CE} = \alpha\overrightarrow{AB} + \alpha\overrightarrow{BD} = \alpha(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}) = \alpha\overrightarrow{AD}.$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont donc colinéaires. Par suite les points A, D et E sont alignés. (C.Q.F.D.)

Commentaire.

Le premier des deux problèmes que nous venons d'aborder est connu dans la littérature mathématique sous le nom de "réciproque ... de Thalès"; les pointillés remplaçant ici soit « de la propriété », soit de « du théorème ».

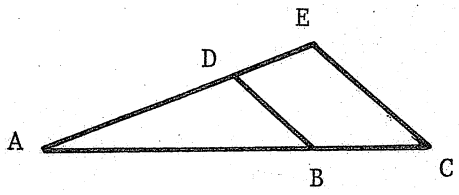
De ce fait, beaucoup d'élèves devant une figure qui renferme des triangles homothétiques, ou apparemment tels, ne se préoccupent plus de la problématique qu'elle sous-tend. Point n'est besoin de connaître le contenu de l'hypothèse et du même coup d'expliciter la démarche déductive que requiert la conclusion dès lors qu'en pareille situation on dispose d'une sorte de formule magique: « *d'après Thalès* » qui traite les différents problèmes attachés à ce type de figure.

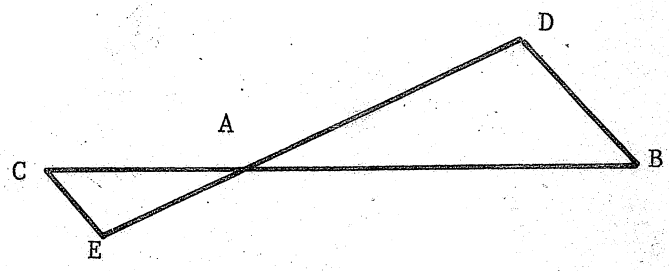
Pour éviter ce genre de malentendu, si tant est que cela soit possible, il nous est paru souhaitable de réserver l'étiquette "Thalès" à la seule propriété: « *Si trois points* A, B *et* C *satisfont la relation* $\overrightarrow{AC} = \alpha\overrightarrow{AB}$, *alors leurs projetés respectifs* A', B' *et* C' *sur une droite satisfont à la relation* $\overrightarrow{A'C'} = \alpha\overrightarrow{A'B'}$ ».

En conséquence l'élève devra reconnaître, face à une situation donnée, si elle satisfait ou non aux conditions d'utilisation de la propriété de Thalès. En présence de situations analogues à celles décrites dans les deux théorèmes précédemment traités, il sera tenu de fournir une justification du résultat visé, démarche peu coûteuse puisqu'elle tient en une seule ligne.

3-Redécouverte d'une propriété des triangles dits "de Thalès".

Etant donné deux triangles homothétiques ABD et ACE, désignons par α le coefficient de colinéarité de $\overrightarrow{AC}$ à $\overrightarrow{AB}$.





On a donc $\overrightarrow{AC} = \alpha\overrightarrow{AB}$ et compte tenu de la propriété de Thalès, $\overrightarrow{AE} = \alpha\overrightarrow{AD}$.

On en déduit immédiatement:

$\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AC} = \alpha\overrightarrow{AD} - \alpha\overrightarrow{AB} = \alpha(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) = \alpha\overrightarrow{BD}$.

En terme de distance, ces égalités se traduisent par:

$AC = |\alpha| \times AB$; $AE = |\alpha| \times AD$ et $CE = |\alpha| \times AD$.

On peut donc énoncer:

Lorsque deux triangles $\left\{\begin{matrix} ACE \\ ABD \end{matrix}\right.$ sont homothétiques

alors, on a $\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{AE}{AD} = \dfrac{CE}{BD}$

On retrouve ainsi une propriété mise à jour en classe de troisième.

4-Caractérisations vectorielles du milieu d'un segment.

a) Propriété P5

---

langage vectoriel

I milieu du segment [A,B] équivaut à

(1) $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$

(2) $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$

(3) $2\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB}$

La caractérisation vectorielle du milieu I de [A,B] par $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$ est déjà connue. Les autres équivalences sont immédiates à établir.

b) Autres propriétés.

Elles sont également faciles à établir. Leur formulation préfigure l'usage qu'il convient d'en faire.

Propriété P6

Si I est le milieu d'un segment [A,B]
alors pour tout point M de $\mathcal{P}$ on a : $2\overrightarrow{MI} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$

On peut utiliser cette propriété dès lors qu'on sait que le point I est le milieu de [A,B].

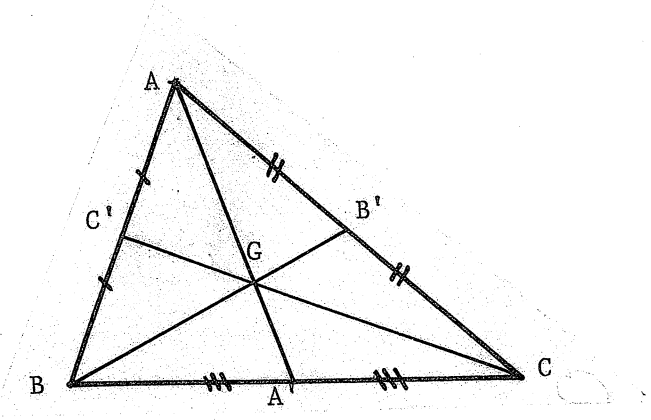
Propriété P7

S'il existe un point P du plan $\mathcal{P}$ tel que: $2\overrightarrow{PI} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}$
alors I est le milieu d'un segment [A,B]

On utilise cette propriété lorsqu'on veut montrer que le point I est le milieu de [A,B].

5-Caractérisation vectorielle du centre de gravité d'un triangle.

On a déjà établi que les médianes d'un triangle sont concourantes. Leur point de concours G est, sur chaque médiane, deux fois plus loin d'un sommet du triangle que du milieu du côté opposé à ce sommet.



On a sur [A,A'], par exemple, la configuration suivante:

G est sur [A,A'] aux deux-tiers à partir de A ou au tiers à partir de A'.

En *langage vectoriel*, le point G est donc caractérisé par l'une des égalités suivantes:

(1) $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$ (2) $\overrightarrow{A'G} = \frac{1}{3}\overrightarrow{A'A}$

ou toute relation équivalente:

(3) $\overrightarrow{GA'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GA}$ (4) $\overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{GA'}$ (5) $\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GA'} = \vec{0}$

En effet (3), (4) et (5) sont équivalentes à (1) car:

(1) s'écrit $3\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{AA'}$, puis $-3\overrightarrow{AG} + 2(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GA'}) = \vec{0}$,

soit $-\overrightarrow{AG} + 2\overrightarrow{GA'} = \vec{0}$.

Remarquons que ceci prouve l'unicité du point P vérifiant:

$\overrightarrow{PA} + 2\overrightarrow{PA'} = \vec{0}$ (P = G).

Caractérisation du centre de gravité par rapport aux sommets.

G est caractérisé par: $\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GA'} = \vec{0}$.

Or, A' est caractérisé en tant que milieu de [B,C] par:

$2\overrightarrow{GA'} = \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}$

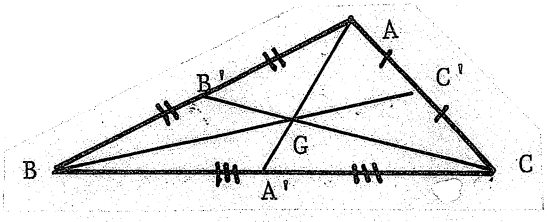
Donc G est caractérisé par: $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ (6)

C'est à dire que:

- Si G est le centre de gravité du triangle ABC
  alors $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$
- Si un point K vérifie $\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} = \vec{0}$
  alors K est le centre de gravité du triangle ABC

On prouve ainsi l'unicité du point K véfifiant: $\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} = \vec{0}$

Propriété P8

		langage vectoriel
G est le centre de gravité du triangle ABC 	équivaut à	(1) $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$ (2) $\overrightarrow{A'G} = \frac{1}{3}\overrightarrow{A'A}$ (5) $\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GA'} = \vec{0}$ (6) $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BC} = \vec{0}$

Remarque:

Dans les égalités (1), (2) et (5) on peut remplacer le couple (A,A') par le couple (B,B') ou le couple (C,C').

A titre d'exercice on pourra établir les propriétés suivantes:

Propriété P9

Etant donné un triangle ABC de centre de gravité G,
pour tout point M de $\mathcal{P}$ on a: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$

Propriété P10

Etant donné un triangle ABC et un point K de $\mathcal{P}$,

S'il existe un point P vérifiant: $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = 3\overrightarrow{PK}$

alors K est le centre de gravité du triangle ABC

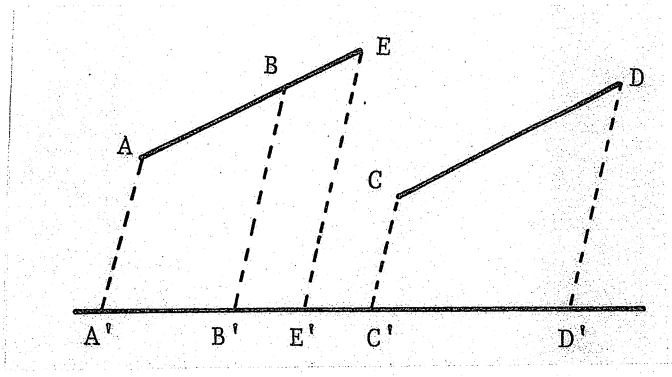
6-Effet d'une projection sur le coefficient de colinéarité de deux vecteurs.

Propriété P11

Si des points A, B, C et D vérifient $\overrightarrow{CD} = \alpha\overrightarrow{AB}$

alors [leurs projetés respectifs A', B', C' et D' sur une droite vérifient: $\overrightarrow{C'D'} = \alpha\overrightarrow{A'B'}$

La démonstration de cette propriété peut-être proposée en exercice.



Indication: On considère le point E tel que: $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CD}$.

Le résultat annoncé découle alors des propriétés suivantes:

- « Les projetés sur une droite de deux bipoints de même vecteur sont deux bipoints de même vecteur »
- Propriété de Thalès

Remarque:

On énonce souvent ce résultat en disant:

« Une projection conserve le coefficient de colinéarité d'un vecteur à un autre vecteur »

VI - COORDONNEES D'UN POINT DANS UN REPERE
COORDONNEES D'UN VECTEUR DANS UNE BASE

1-Etude "en parallèle" dans $\mathcal{P}$ et dans $\vec{\mathcal{P}}$.

L'étude des coordonnées d'un point dans un repère a déjà été abordée en classe de Troisième. Il s'agit ici d'une reprise conduite en "parallèle" avec celle des coordonnées dans une base.

Les données

dans $\mathcal{P}$	dans $\vec{\mathcal{P}}$
Un triplet (O,I,J) de points non alignés.	Un couple $(\vec{i},\vec{j})$ de vecteurs non colinéaires.

Premier acte

Soit M un point de $\mathcal{P}$ et $\vec{m}$ le vecteur de $\vec{\mathcal{P}}$

P projeté de M sur (OI) selon (OJ)
Q projeté de M sur (OJ) selon (OI)

x l'abscisse de P sur l'axe (O,I)
y l'abscisse de Q sur l'axe (O,J)

Alors

x est le coefficient de colinéarité de $\vec{p}$ à $\vec{i}$

y est le coefficient de colinéarité de $\vec{q}$ à $\vec{j}$

et on peut écrire

$\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{OI}$; $\overrightarrow{OQ} = y\overrightarrow{OJ}$ | $\vec{p} = x\vec{i}$; $\vec{q} = y\vec{j}$

Par ailleurs

la composée des translations $t_{(O,P)}$ et $t_{(O,Q)}$ envoie O sur M

On a donc

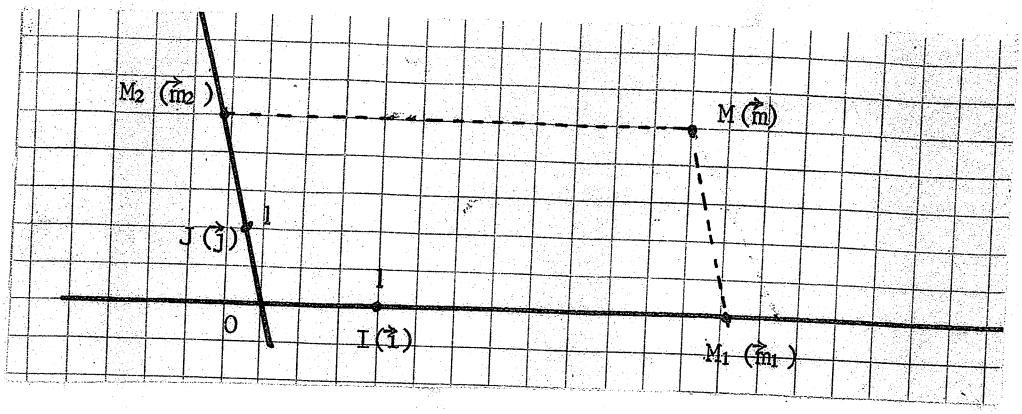
$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} = x\overrightarrow{OI} + y\overrightarrow{OJ}$ | $\vec{m} = \vec{p} + \vec{q} = x\vec{i} + y\vec{j}$

Ainsi

à chaque point M de $\mathcal{P}$ | à chaque vecteur $\vec{m}$ de $\vec{\mathcal{P}}$

on vient d'associer un couple (x,y) de nombres réels tels que

$\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OI} + y\overrightarrow{OJ} = x\vec{i} + y\vec{j}$ | $\vec{m} = x\vec{i} + y\vec{j}$



Deuxième acte

Soit (x,y) un couple de nombres réels. On sait alors qu'il existe

un unique point P d'abscisse x sur l'axe (O,I)	un unique vecteur $\vec{p}$ tel que $\vec{p} = x\vec{i}$
un unique point Q d'abscisse y sur l'axe (O,J)	un unique vecteur $\vec{q}$ tel que $\vec{q} = y\vec{j}$

Notons M le transformé de O par la composée des translations $t_{(O,P)}$ et $t_{(O,Q)}$	Notons $\vec{m}$ la somme des vecteurs $\vec{p}$ et $\vec{q}$

Alors P, Q et M sont respectivement les images dans $\mathcal{P}_O$ des vecteurs $\vec{p}$ et $\vec{q}$ et $\vec{m}$ et on peut écrire:

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} = x\overrightarrow{OI} + y\overrightarrow{OJ}$ | $\vec{m} = \vec{p} + \vec{q} = x\vec{i} + y\vec{j}$

Ainsi

à chaque couple (x,y) de nombres réels, on vient d'associer

un unique point M de $\mathcal{P}$ tel que $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OI} + y\overrightarrow{OJ}$	un unique vecteur $\vec{m}$ de $\vec{\mathcal{P}}$ tel que $\vec{m} = x\vec{i} + y\vec{j}$

Conclusion.

Le choix d'un triplet de points non alignés de $\mathcal{P}$ (respectivement d'un couple de vecteurs non colinéaires de $\vec{\mathcal{P}}$) nous a permis d'associer

- à chaque point de $\mathcal{P}$ / à chaque vecteur de $\vec{\mathcal{P}}$ } un unique couple de nombres réels
- à chaque couple de nombres réels { un unique point de $\mathcal{P}$ / un unique vecteur de $\vec{\mathcal{P}}$

2-Définitions.

L'étude précédente nous conduit à adopter les définitions suivantes:

•Tout triplet (O,I,J) de points non alignés d'un plan $\mathcal{P}$ constitue un repère de ce plan.	•Tout couple $(\vec{i},\vec{j})$ de vecteurs non colinéaires de $\vec{\mathcal{P}}$ constitue une base de ce plan.
•Pour chaque point M de $\mathcal{P}$, l'unique couple (x,y) de réels tels que: $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OI} + y\overrightarrow{OJ}$ est appelé couple de coordonnées de M dans le repère (O,I,J)	•Pour chaque vecteur $\vec{m}$ de $\vec{\mathcal{P}}$, l'unique couple (x,y) de réels tels que: $\vec{m} = x\vec{i} + y\vec{j}$ est appelé couple de coordonnées de $\vec{m}$ dans le repère (O,I,J)
Le nombre x est l'abscisse de M Le nombre y est l'ordonnée de M	Le vecteur $x\vec{i}$ est la composante de $\vec{m}$ dans $\mathbb{R}\vec{i}$
(O,I) est l'axe des abscisses (O,J) est l'axe des ordonnées	Le vecteur $y\vec{j}$ est la composante de $\vec{m}$ dans $\mathbb{R}\vec{j}$
On écrit $M(x,y)$ ou $M\begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix}$ pour indiquer que M a pour coordonnées x et y	On écrit $\vec{m}(x,y)$ ou $\vec{m}\begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix}$ pour indiquer que $\vec{m}$ a pour coordonnées x et y
•Lorsque les droites (OI) et (OJ) sont orthogonales le repère (O,I,J) est dit orthogonal Une longueur étalon étant choisie dans $\mathcal{P}$: Si, de plus, OI = OJ = 1 le repère (O,I,J) est orthonormal (ou orthonormé)	•Lorsque les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont orthogonaux la base $(\vec{i},\vec{j})$ est dite orthogonale Si, de plus, $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$ la base $(\vec{i},\vec{j})$ est orthonormale (ou orthonormée)

Remarques:

- Le point M dans le repère (O,I,J) et le vecteur $\vec{m}$ (d'image M) dans la base $(\vec{i},\vec{j})$ de $\vec{\mathcal{P}}$ ont le même couple de coordonnées.
- L'unicité du couple de coordonnées d'un point dans un repère (O,I,J) d'un plan $\mathcal{P}$ -respectivement d'un vecteur $\vec{m}$ dans une base $(\vec{i},\vec{j})$- font que les propriétés suivantes sont équivalentes:

d'une part	d'autre part
(1) M = N	(1) $\vec{m} = \vec{n}$
(2) M et N ont même couple de coordonnées dans (O,I,J)	(2) $\vec{m}$ et $\vec{n}$ ont même couple de coordonnées dans $(\vec{i},\vec{j})$

Commentaire.

La démonstration -classique- de l'unicité de la décomposition d'un vecteur dans une base :

« Si $x\vec{i} + y\vec{j} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$ alors $(x - x')\vec{i} + (y - y')\vec{j}$ ..... d'où $x = x'$ et $y = y'$ »

qui s'appuie sur la non colinéarité des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ est superflue.

De surcroît, elle est à contre-courant de la démarche suivie dans l'enseignement secondaire qui consiste à passer, pas à pas, de "l'affine euclidien" au "vectoriel".

3-Expression des coordonnées des vecteurs $\vec{u} + \vec{v}$, $\lambda\vec{u}$ et $\overrightarrow{AB}$.

On a les résultats suivants:

Etant donné un repère (O,I,J) de $\mathcal{P}$ -resp. une base $(\vec{i},\vec{j})$ de $\vec{\mathcal{P}}$- :

- Soit $\vec{u}\begin{vmatrix} x_U \\ y_U \end{vmatrix}$ et $\vec{v}\begin{vmatrix} x_V \\ y_V \end{vmatrix}$ deux vecteurs de $\vec{\mathcal{P}}$ et λ un nombre réel

  alors le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $\begin{vmatrix} x_U + x_V \\ y_U + y_V \end{vmatrix}$

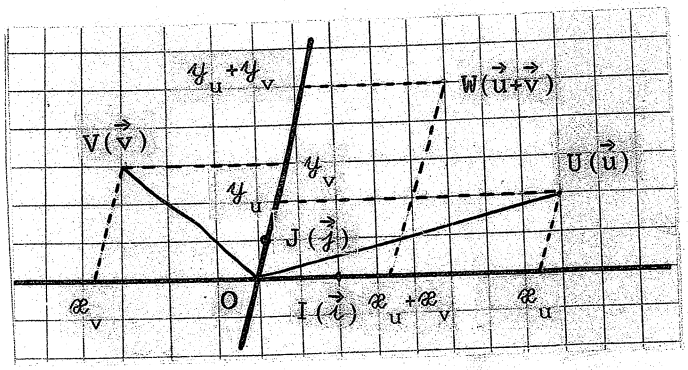
  le vecteur $\lambda\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{vmatrix} \lambda x_U \\ \lambda y_U \end{vmatrix}$

- Soit $A\begin{vmatrix} x_A \\ y_A \end{vmatrix}$ et $B\begin{vmatrix} x_B \\ y_B \end{vmatrix}$ deux points de $\mathcal{P}$

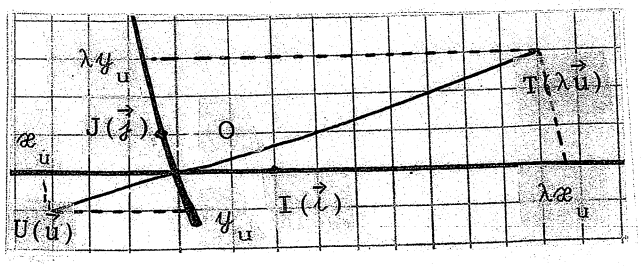
  alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{vmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{vmatrix}$

Démonstration.

- $\vec{u} + \vec{v} = (x_U\vec{i} + y_U\vec{j}) + (x_V\vec{i} + y_V\vec{j})$
  $= (x_U + x_V)\vec{i} + (y_U + y_V)\vec{j}$



- $\lambda\vec{u} = \lambda(x_U\vec{i} + y_U\vec{j})$
  $= (\lambda x_U)\vec{i} + (\lambda y_U)\vec{j}$

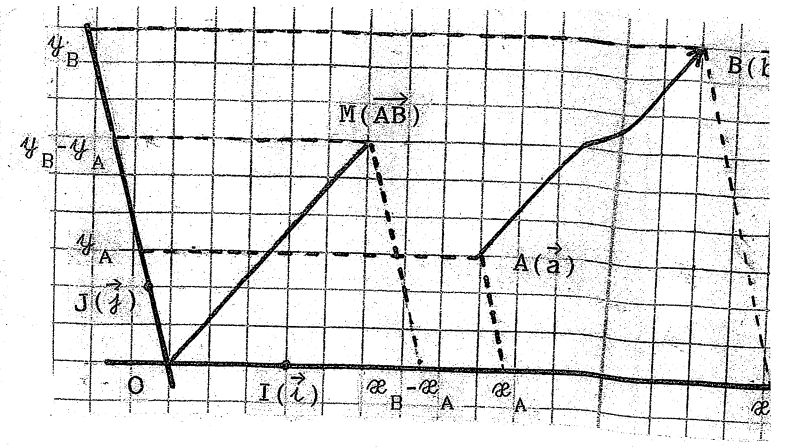


• $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

$= \vec{b} - \vec{a}$

$= (x_B\vec{i} + y_B\vec{j}) - (x_A\vec{i} + y_A\vec{j})$

$= (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j}$



4-Expression de la norme d'un vecteur, de la distance de deux points.

Les résultats à connaître:

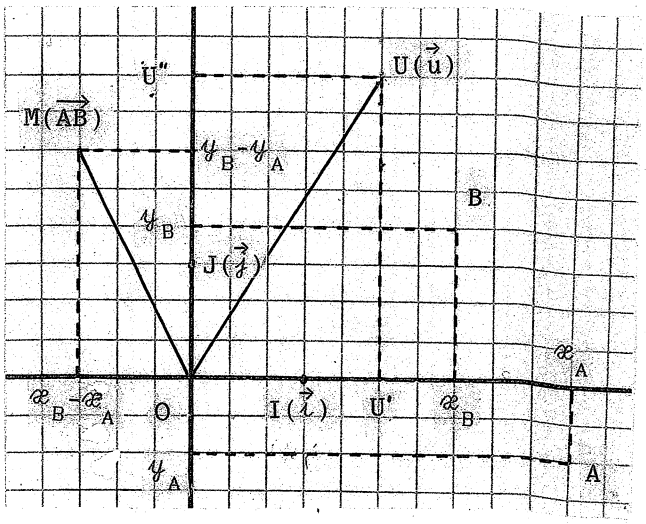
• Le plan $\mathcal{P}$ étant muni d'une base orthonormale $(\vec{i},\vec{j})$, la norme du vecteur $\vec{u}$ (x,y) est donnée par:

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

• Le plan $\mathcal{P}$ étant muni d'un repère orthonormal (O,I,J), la distance de deux points A (x_A,y_A) et B (x_B,y_B) est donnée par:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Démonstration.



• Nous avons, du fait que:

‖ le repère (O,I,J) est orthonormal

‖ la base $(\vec{i},\vec{j})$ est orthonormale

d'une part,

$\|\vec{u}\|^2 = OU^2 = OU'^2 + OU''^2$ d'après le théorème de Pythagore.

d'autre part, $OU' = |x|$ et $OU'' = |y|$

de sorte que $\|\vec{u}\|^2 = x^2 + y^2$ d'où $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

• Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ dans la base $(\vec{i},\vec{j})$ étant $\begin{vmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{vmatrix}$

On obtient immédiatement: $AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

5-Condition analytique de la colinéarité de deux vecteurs.

a) Exposé du problème.

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ étant donnés par leurs coordonnées (x,y) et (x',y') dans une base $(\vec{i},\vec{j})$, il s'agit de reconnaître si ces deux vecteurs sont colinéaires ou non.

b) Exemples.

(1) $\vec{u}(1\ ;\ -2)$ et $\vec{u}'(2\ ;\ -4)$ (2) $\vec{u}(-4\ ;\ 3)$ et $\vec{u}'(1\ ;\ -\frac{4}{3})$

(3) $\vec{u}(-\frac{3}{7}\ ;\ \frac{2}{5})$ et $\vec{u}'(\frac{8}{5}\ ;\ -\frac{14}{9})$ (4) $\vec{u}(\sqrt{3}\ ;\ \sqrt{3}-\sqrt{2})$ et $\vec{u}'(\sqrt{3}+\sqrt{2}\ ;\ \frac{1}{\sqrt{3}})$

S'il est clair que dans l'exemple (1): $\vec{u}' = 2\vec{u}$ et que dans l'exemple (2) $\vec{u} = -4\vec{u}'$, en revanche, la réponse aux exemples (3) et (4) n'est pas évidente. Par ailleurs faire un dessin ne semble pas ici très pertinent. De surcroît cela ne permettrait, au mieux, que d'émettre une conjecture.

Il convient donc de trouver un procédé calculatoire qui permette de conclure en toutes circonstances.

Recherche du procédé.

Nous allons supposer le vecteur $\vec{u}$ non nul attendu que, dans le cas contraire, la réponse au problème posé est immédiate.

- Pour $\vec{u} \neq \vec{0}$, si $\vec{u}'$ est colinéaire à $\vec{u}$ alors $\vec{u}'$ appartient à $\mathbb{R}\vec{u}$.

  On a donc: $\vec{u}' = k\vec{u}$ avec $k \in \mathbb{R}$

  c'est à dire $\begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases}$

  on en déduit $xy' - x'y = kxy - kxy = 0$

- Réciproquement, si $xy' - x'y = 0$ (e)

  du fait que $\vec{u} \neq \vec{0}$, l'un au moins des réels x et y est non nul.

  Pour $x \neq 0$, en multipliant les deux membres de l'égalité (e) par $\frac{1}{x}$ on obtient : $y' - y\frac{x'}{x} = 0$ puis, en posant $\frac{x'}{x} = k$, il vient $\begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases}$ et donc $\vec{u}' = k\vec{u}$. Autrement dit $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont colinéaires.

  Pour $y \neq 0$, on arrive à la même conclusion.

  Ainsi, pour $\vec{u} \neq \vec{0}$, $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ colinéaires équivaut à $xy' - x'y = 0$

  Il reste maintenant à observer que, pour $\vec{u} = \vec{0}$ cette équivalence est encore vérifiée puisque, dans ce cas, on a : $x = y = 0$.

On retiendra le résultat suivant:

Le plan $\mathcal{P}$ étant muni d'une base $(\vec{i},\vec{j})$,

les vecteurs $\vec{u}\begin{vmatrix}x\\y\end{vmatrix}$ et $\vec{u}'\begin{vmatrix}x'\\y'\end{vmatrix}$ sont colinéaires

si et seulement si

$xy' - yx' = 0$

Pour obtenir le nombre qui permet de dire si deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont colinéaires ou non, on peut adopter la disposition suivante:

coordonnées de $\vec{u}$ ↓ coordonnées de $\vec{u}'$ ↓

$$\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - yx'$$

Le calcul s'effectue alors comme le montre le schéma ci-dessus.

c) Utilisation du procédé.

Reprenons les exemples (3) et (4) donnés précédemment.

• Exemple (3) : $\vec{u}(-\frac{3}{7}\ ;\ \frac{2}{5})$ et $\vec{u}'(\frac{8}{5}\ ;\ -\frac{14}{9})$

On a $\begin{vmatrix} -\frac{3}{7} & \frac{8}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{14}{9} \end{vmatrix} = \left(-\frac{3}{7}\right)\times\left(-\frac{14}{9}\right) - \frac{2}{5}\times\frac{8}{5} = \frac{2}{3} - \frac{16}{25} = \frac{2}{75} \neq 0$

donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ ne sont pas orthogonaux.

• Exemple (4): $\vec{u}(\sqrt{3}\ ;\ \sqrt{3}-\sqrt{2})$ et $\vec{u}'(\sqrt{3}+\sqrt{2}\ ;\ \frac{1}{\sqrt{3}})$

On a $\begin{vmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{3}+\sqrt{2} \\ \sqrt{3}-\sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{vmatrix} = \sqrt{3}\times\frac{1}{\sqrt{3}} - (\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2}) = 1 - (3-2) = 0$

donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont colinéaires.

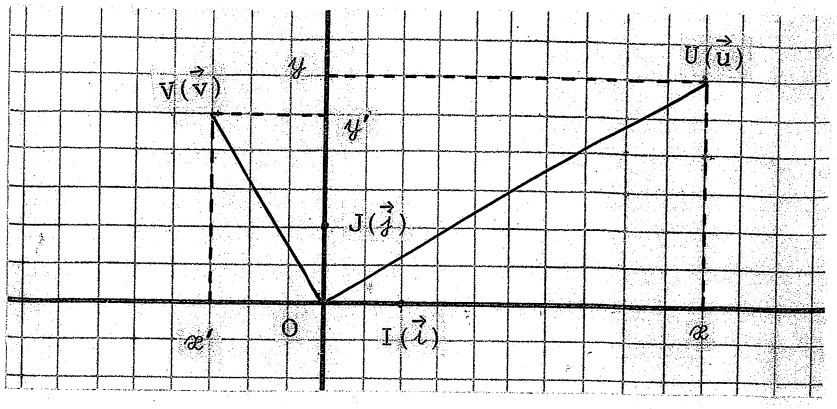
6-Condition analytique de l'orthogonalité de deux vecteurs.

a) Exposé du problème.

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ étant donnés par leurs coordonnées (x,y) et (x',y') dans une base orthonormale $(\vec{i},\vec{j})$, il s'agit de reconnaître si ces deux vecteurs sont orthogonaux ou non.

Nous allons chercher un procédé calculatoire qui permette de conclure dans la situation la plus générale possible.

b) Recherche du procédé.



Il est facile de justifier que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont orthogonaux si et seulement si $UV^2 = OU^2 + OV^2$ (y compris lorsque l'un au moins des vecteurs $\vec{u}$ ou $\vec{u}'$ est nul).

Cela dit, on sait exprimer la norme d'un vecteur –ou mieux la distance de deux points– uniquement lorsque la base $(\vec{i},\vec{j})$ de $\mathscr{P}$ –ou le repère (O,I,J) de $\mathscr{P}$– est orthonormale.

En pareille situation, l'égalité précédente se traduit numériquement par:

$$(x' - x)^2 + (y' - y)^2 = (x^2 + y^2) + (x'^2 + y'^2)$$

Soit après simplification: $xx' + yy' = 0$.

On retiendra donc le résultat suivant:

Le plan $\mathscr{P}$ étant muni d'une base orthonormale $(\vec{i},\vec{j})$,

les vecteurs $\vec{u}\begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix}$ et $\vec{u}'\begin{vmatrix} x' \\ y' \end{vmatrix}$ sont orthogonaux

si et seulement si

$xx' + yy' = 0$

---

c) Utilisation du procédé.

- Exemple (1): $\vec{u}$ (4 ; 2) et $\vec{u}'$(−1 ; 2)

  On a: $4\times(-1) + 2\times2 = 0$

  Ces vecteurs sont donc orthogonaux.

- Exemple (2): $\vec{u}$ $(\sqrt{5} - 1 ; 2)$ et $\vec{u}'(\sqrt{5} + 1 ; -2)$

  On a: $(\sqrt{5} - 1)(\sqrt{5} + 1) + 2\times(-2) = (5 - 1) - 4 = 0$

  Ces vecteurs sont donc orthogonaux.

- Exemple (3): $\vec{u}\left(\frac{2}{3} ; \frac{9}{5}\right)$ et $\vec{u}'\left(-6 ; \frac{5}{2}\right)$

  On a: $\frac{2}{3}\times(-6) - \frac{9}{5}\times\frac{5}{2} = -4 + \frac{9}{2} = \frac{1}{2}$

  Ces vecteurs ne sont donc pas orthogonaux.

- Exemple (4):

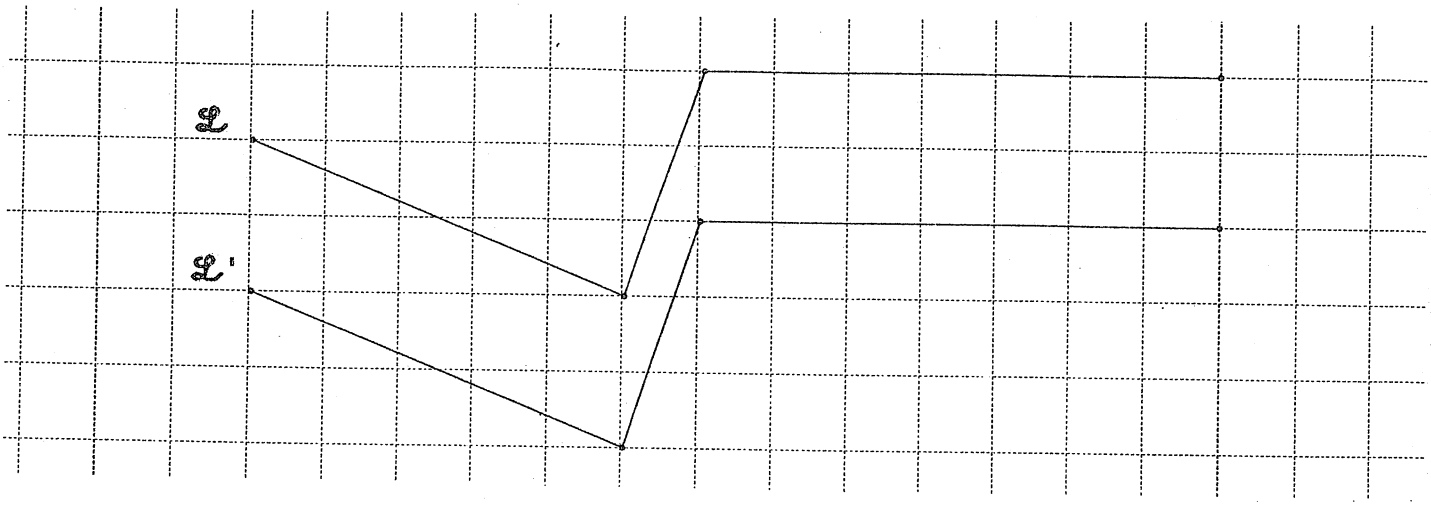
  Les vecteurs $\vec{u}$ (a , b) et $\vec{u}'$(−b , a) sont orthogonaux.

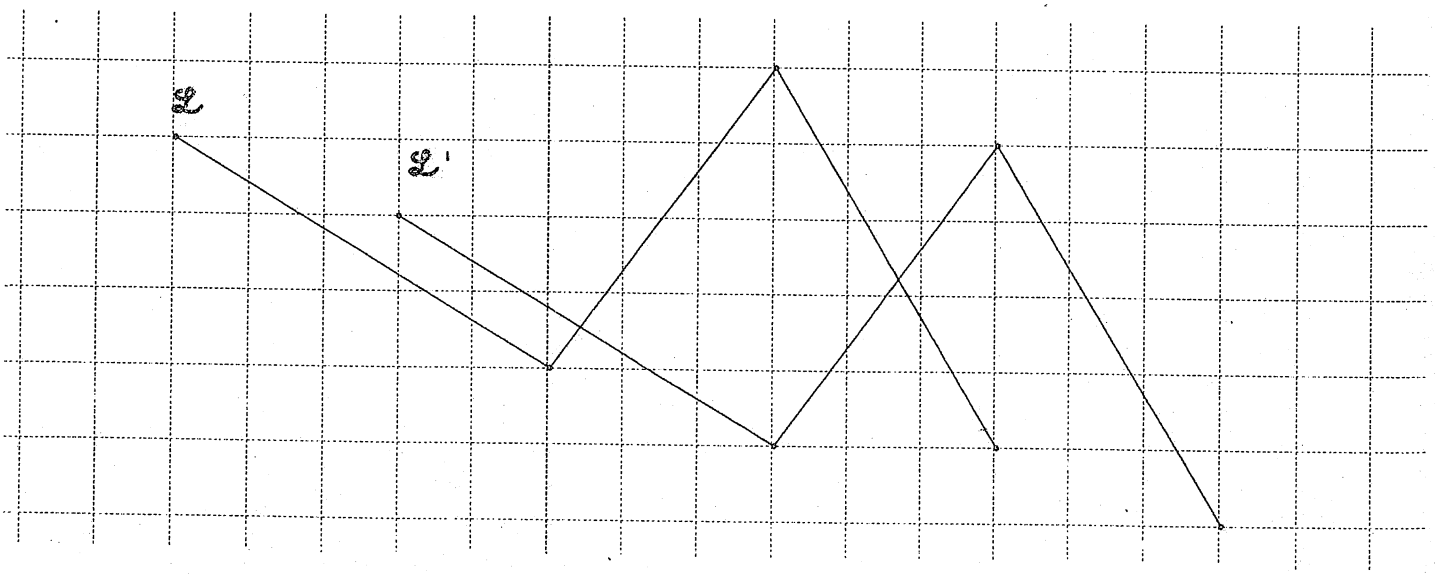
EXERCICES

Les exercices numéros 30 à 60 peuvent être abordés au niveau des classes de Troisièmes et Secondes.

Leur libellé peut être modifié, notamment pour la classe de Troisième, de façon à les rendre accessibles aux élèves de cette classe. Certains d'entre eux, vus une première fois, pourront être refaits avec d'autres outils l'année suivante.

Exercice 30





La ligne brisée $\mathcal{L}'$ se déduit de la ligne brisée $\mathcal{L}$. Est-ce VRAI ou FAUX?

Exercice 31

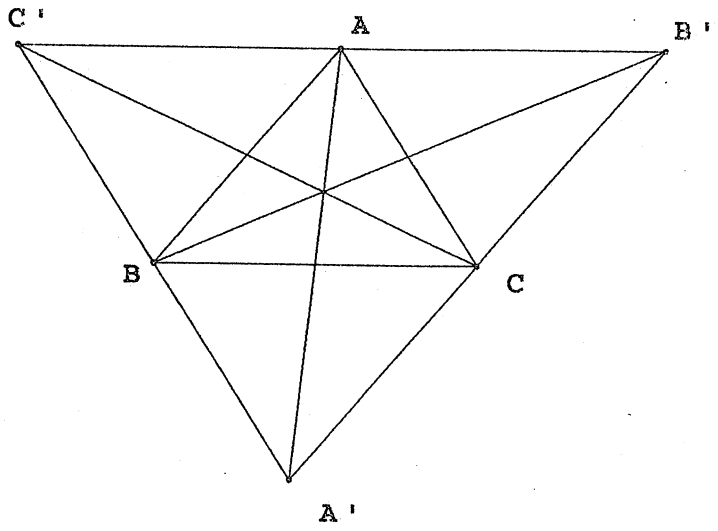
Données :

- Un triangle ABC.

1° Placer les points A', B' et C' tels que:

$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA}$.

2° Démontrer que les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes.



Exercice 32

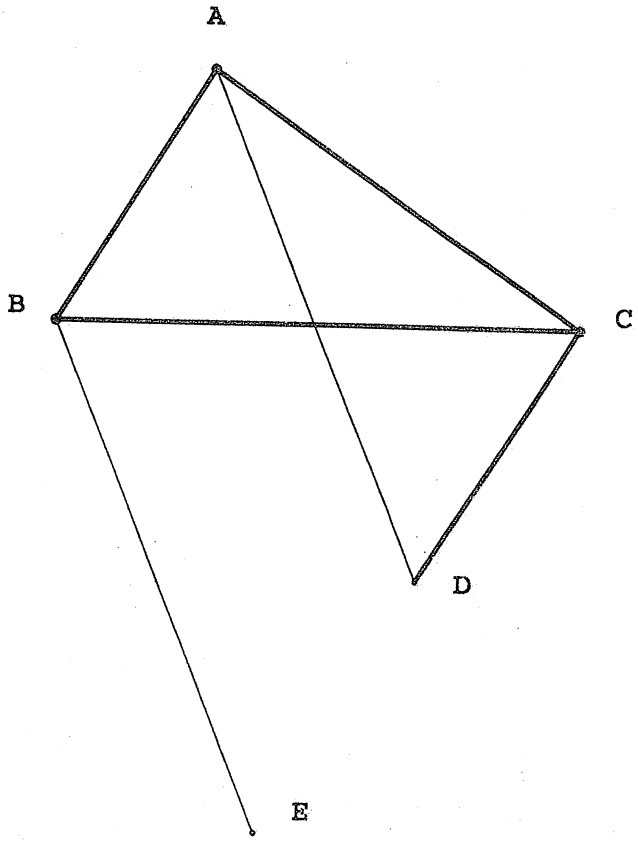
Données:

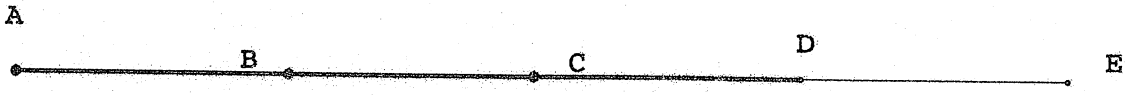
- Trois points A, B et C.

1° Construire le transformé D de C par la translation de bipoint (A,B).

2° Construire le transformé E de B par la translation de bipoint (A,D).

3° Démontrer que D est le milieu de [C,E].





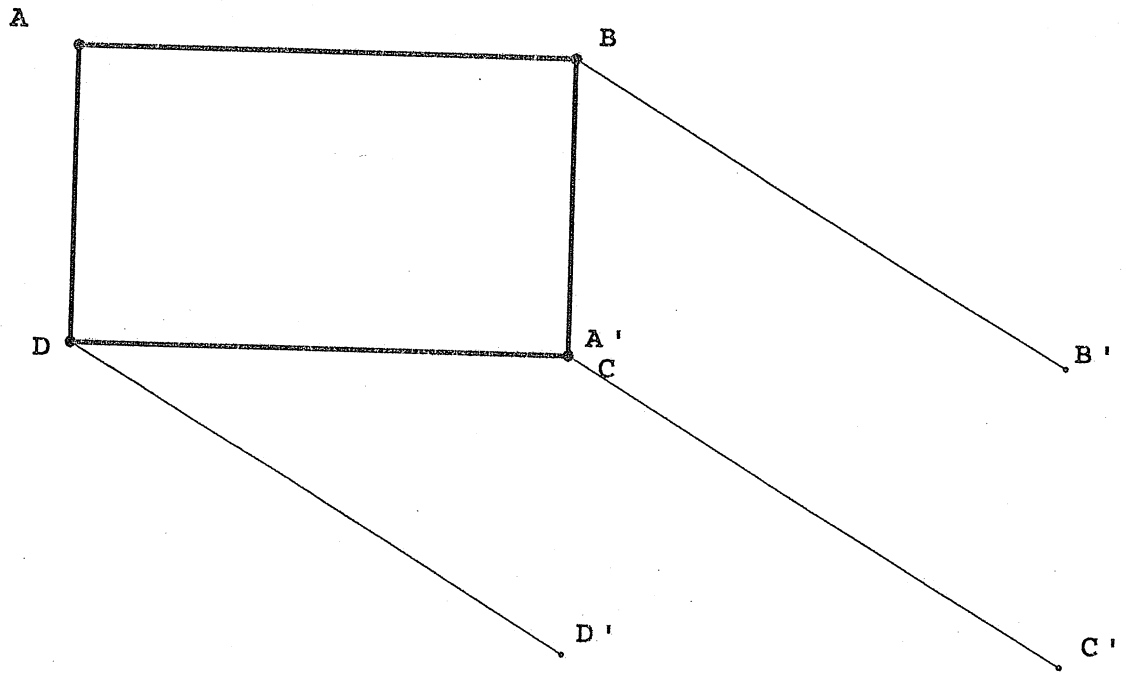
Exercice 33

Données:

- Un rectangle ABCD
- les translatés A', B', C' et D' de A, B, C et D par $t_{(A,C)}$

1° Montrer que BB'D'D est un losange.

2° Montrer que lorsque ABCD est un carré alors BB'D'D est un carré .



Exercice 34

Données:

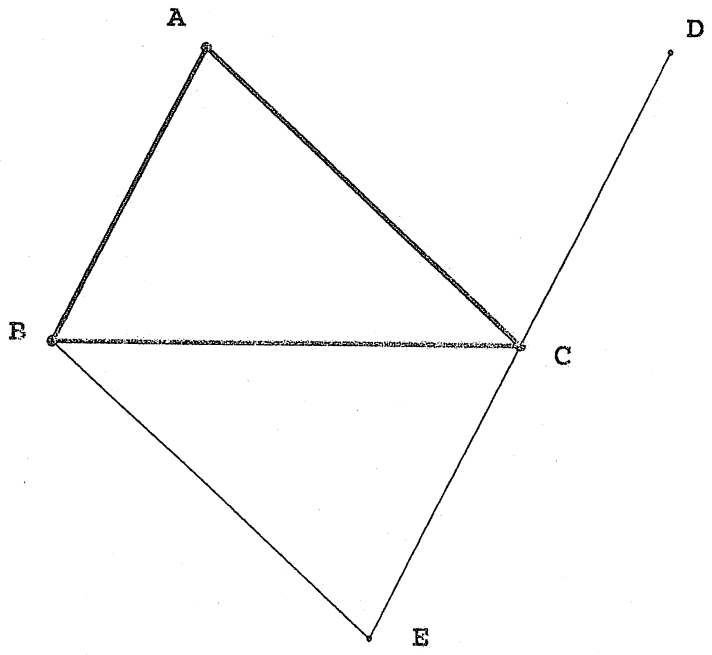
- Un triangle ABC.
- Les translations t et t' telles que:

$$A \overset{t}{\longmapsto} B \quad \text{et} \quad A \overset{t'}{\longmapsto} C$$

1° Construire les points D et E tels que:

$$D \overset{t}{\longmapsto} C \quad \text{et} \quad B \overset{t'}{\longmapsto} E$$

2° Démontrer que D, C et E sont alignés et que C est le milieu de [D,E].

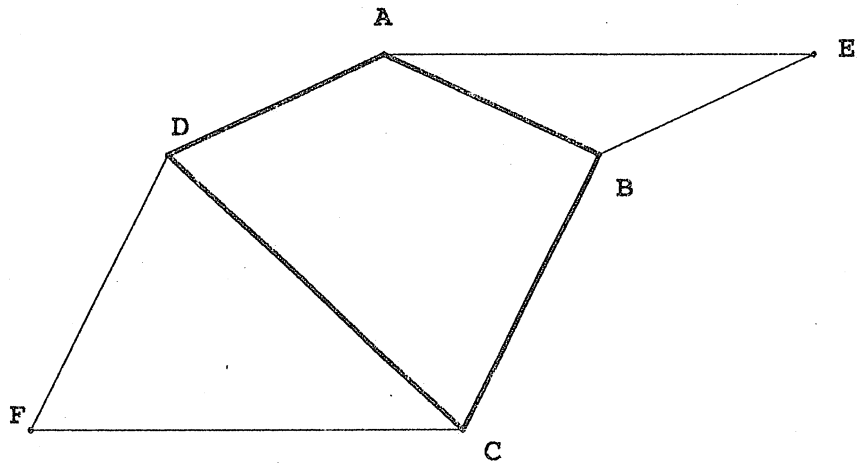


Exercice 35

Données:

- Un quadrilatère ABCD.
- Le point E tel que $E = t_{(D,A)}(B)$.
- Le point F tel que $F = t_{(B,C)}(D)$.

Démontrer que $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{FC}$

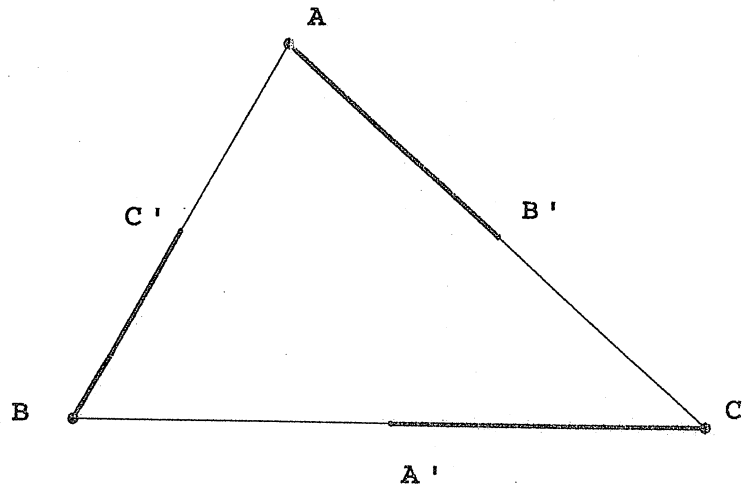


Exercice 36

Données:

- Un triangle ABC.
- A' le milieu de [B,C].
- B' le milieu de [C,A].
- C' le milieu de [A,B].

Démontrer que $\overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{BC'} = \overrightarrow{A'C}$.



Exercice 37

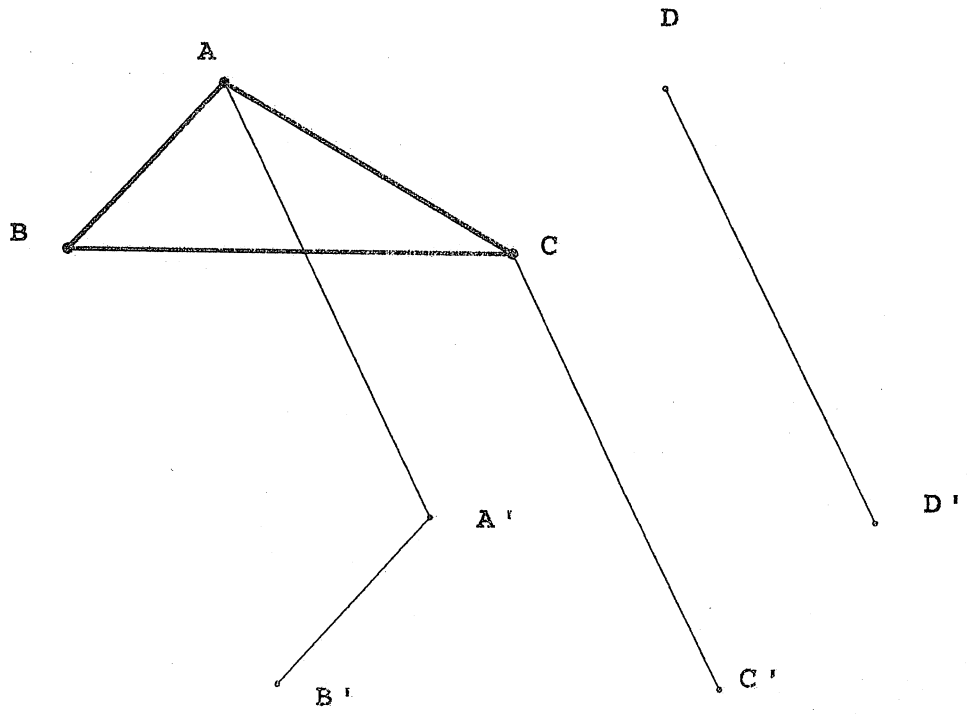
Données:

- Un triangle ABC.
- Les points A', B', C', D' et D tels que:
  - (A,B) et (A',B') ont même vecteur.
  - (C,C') , (D,D') et (A,A') ont même vecteur.
  - (A,D) et (B',C') ont même vecteur.

1° Réaliser cette figure.

2° Déterminer successivement tous les bipoints de même vecteur que chacun des bipoints d'origine A.

3° En déduire que le milieu de [A,C'] est aussi le milieu de trois autres segments.



Exercice 38

Données:

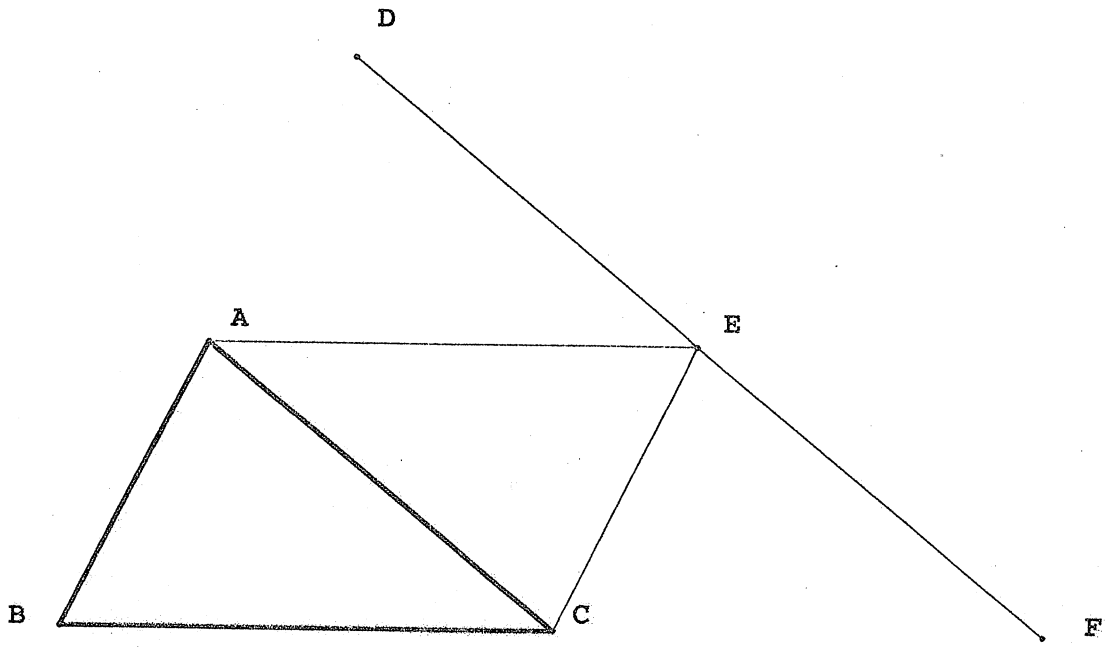
- Un triangle ABC.

1° Construire les points E, D et F tels que:

- ABCE soit un parallélogramme.
- La translation de bipoint (A,C) envoie E sur F.
- Les bipoints (D,E) et (A,C) sont de même vecteur.

2° Démontrer que A, E et C sont les milieux des côtés du triangle BDF.

3° Calculer $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF}$.

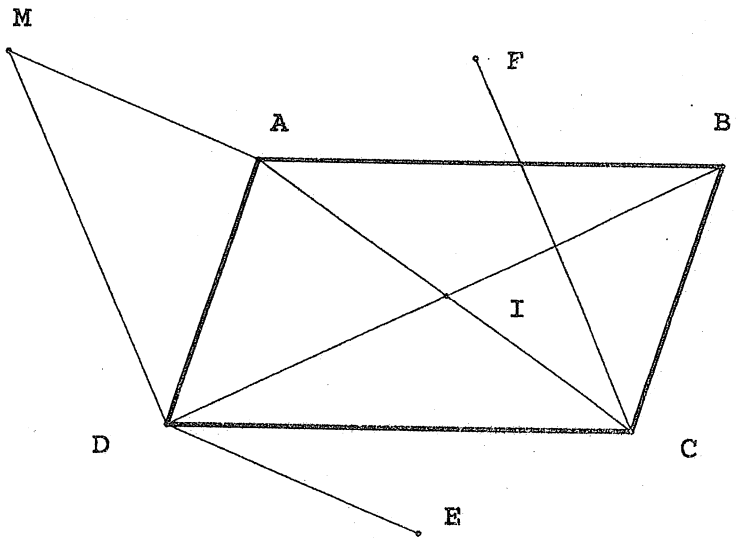


Exercice 39

Données :

- Un parallélogramme ABCD de centre I.
- Un point M quelconque.
- Le point E tel que $E = t_{(M,A)}(D)$.
- Le point F tel que $F = t_{(D,M)}(C)$.

Démontrer que I est le milieu de [E,F].

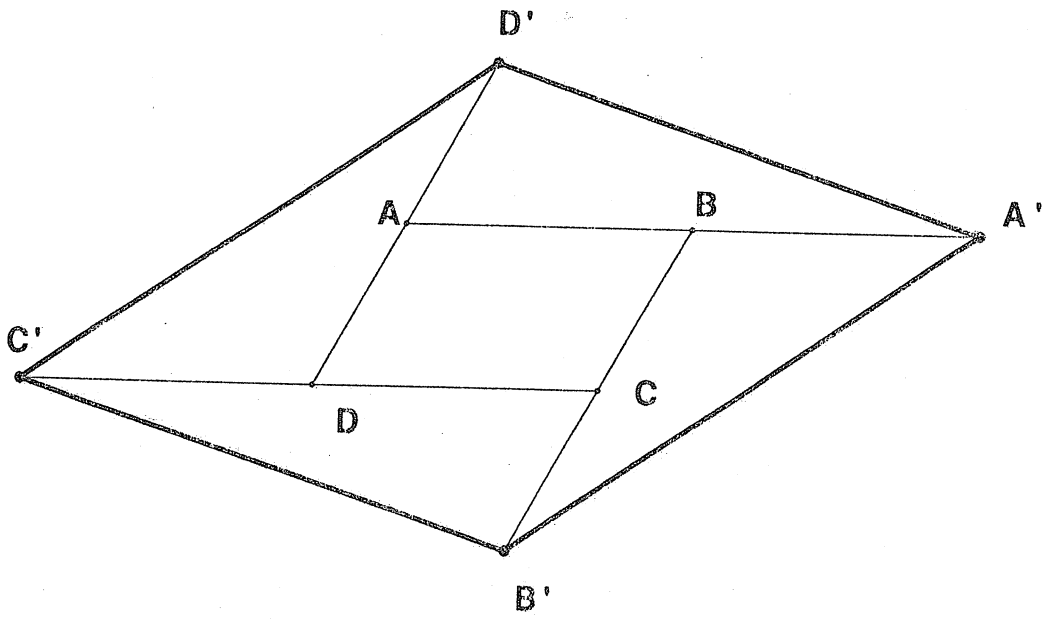


Exercice 40

Données:

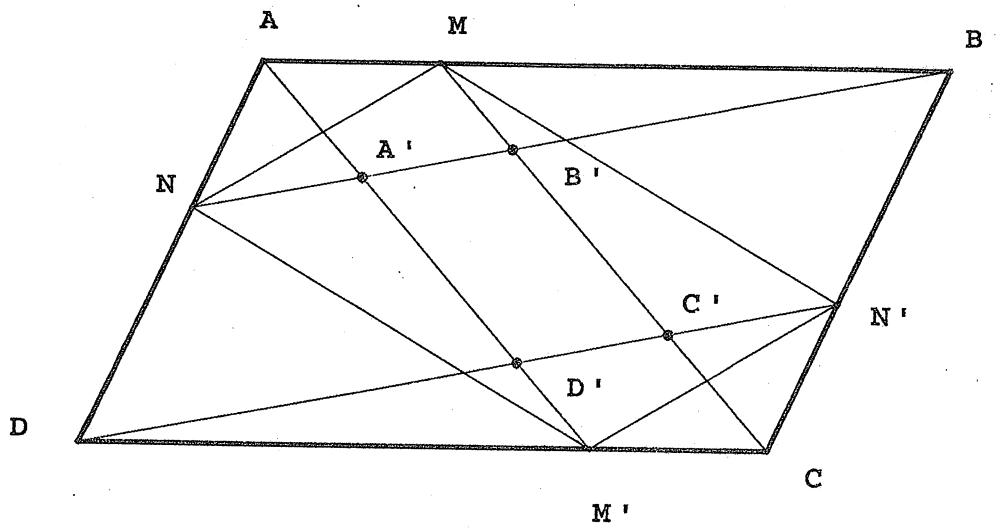
- Un parallélogramme ABCD.
- Un point A' tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA'}$.
- Un point B' tel C soit le milieu de [B,B'].
- Un point C' tel C' = $\mathcal{S}_D(C)$.
- Un point D' tel que $t_{(D,A)}(A)$.

Démontrer que A'B'C'D' est un parallélogramme de même centre que ABCD.



Note: Lorsqu'on se donne un parallélogramme ABCD on obtient le parallélogramme A'B'C'D', maintenant on se donne le parallélogramme A'B'C'D' construire le parallélogramme ABCD.

Exercice 41



Dans la figure ci-dessus:

- ABCD est un parallélogramme.
- $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{M'C}$.
- $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{N'C}$.

Démontrer que A'B'C'D' et MN'M'N sont des parallélogrammes qui ont même centre I.

Exercice 42

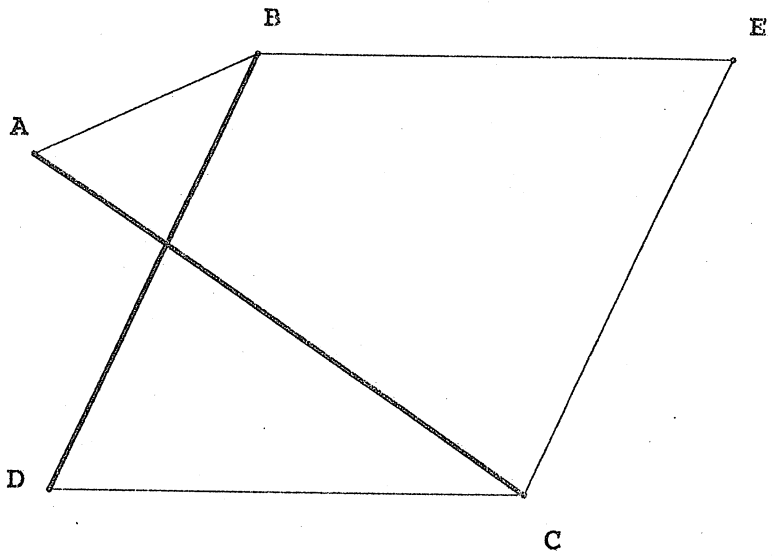
Données:

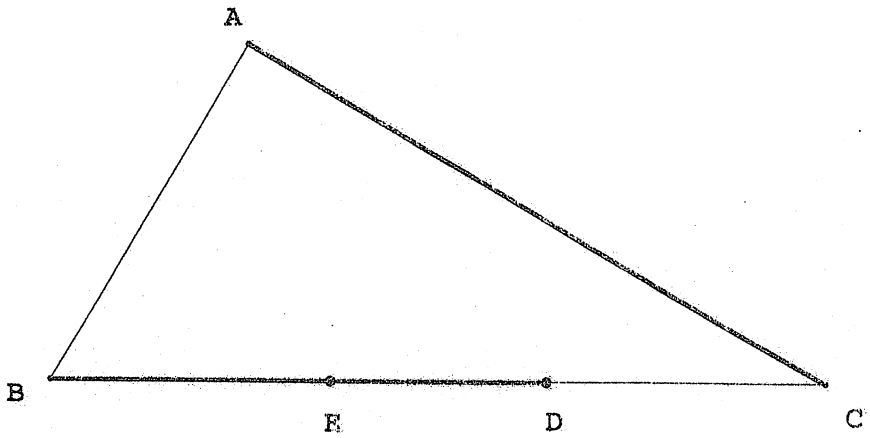
- Un quadrilatère ABCD.

Démontrer que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$ en utilisant:

a) la relation de Chasles.

b) le point E tel que $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{DC}$.





Exercice 43

Données:

- Un parallélogramme ABCD.
- Un point M quelconque.
- La parallèle à (AB) passant par M coupe (AD) en E et (BC) en F.
- La parallèle à (AD) passant par M coupe (AB) en G et (DC) en H.

1° Démontrer que $\overrightarrow{EH} + \overrightarrow{GF} = \overrightarrow{AC}$ en utilisant:

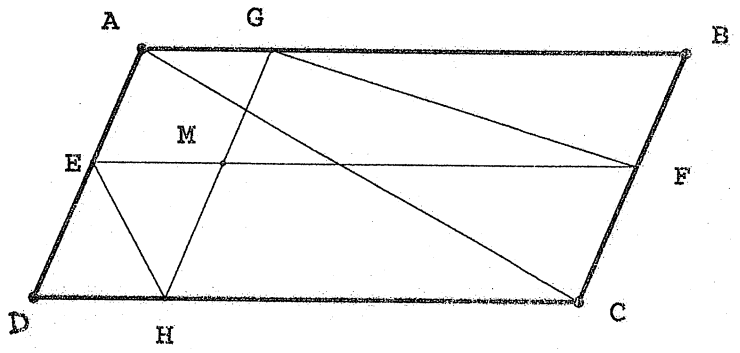
a) la relation de Chasles.

b) les translations $t_{(G,H)}$ et $t_{(G,F)}$ et en recherchant l'image de A par les translations composées comme indiqué ci-dessous:

$$(AB) \xmapsto{t_{(G,H)}} \cdots\cdots \xmapsto{t_{(G,F)}}$$

$$(AD) \xmapsto{t_{(G,F)}} \cdots\cdots \xmapsto{t_{(G,H)}}$$

2° Trouver d'autres relations analogues.

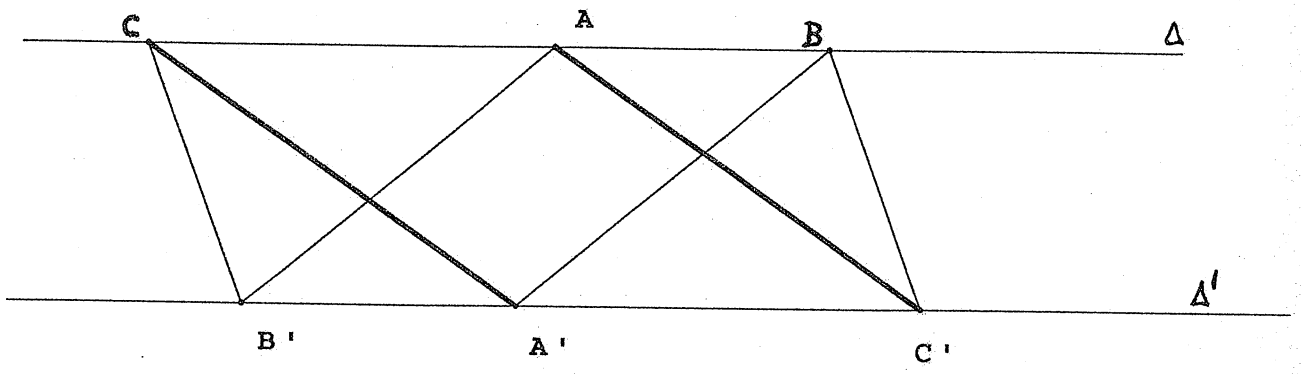


Exercice 44

Données:

- Deux droites parallèles Δ et Δ'.
- Deux points A et B sur la droite Δ.
- Deux points A' et C' sur la droite Δ'.
- La parallèle à (AC') passant par A' coupe Δ en C.
- La parallèle à (BC') passant par C coupe Δ' en B'.

Démontrer que (AB')//(A'B).



Exercice 45

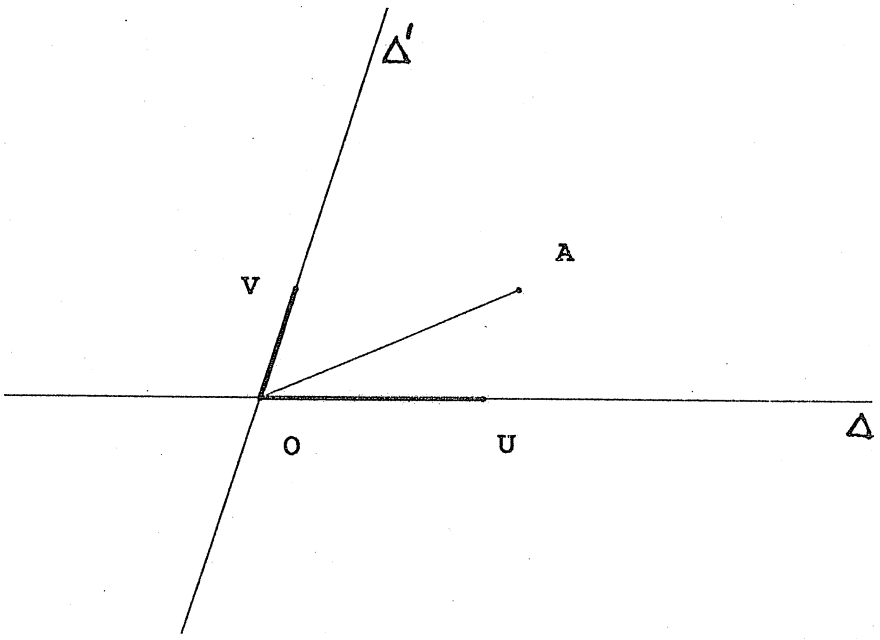
Données :

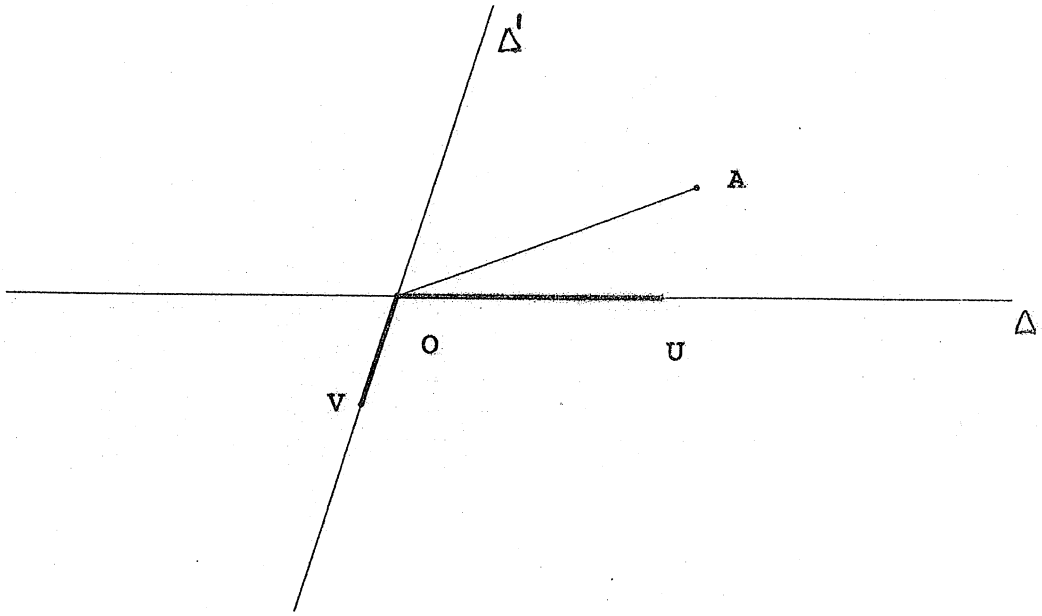
- Deux droites Δ et Δ' sécantes en O.
- Un point A.

Construire le point U situé sur Δ et le point V situé sur Δ' tels que:

1° $\overrightarrow{OU} + \overrightarrow{OV} = \overrightarrow{OA}$.

2° $\overrightarrow{OU} - \overrightarrow{OV} = \overrightarrow{OA}$.





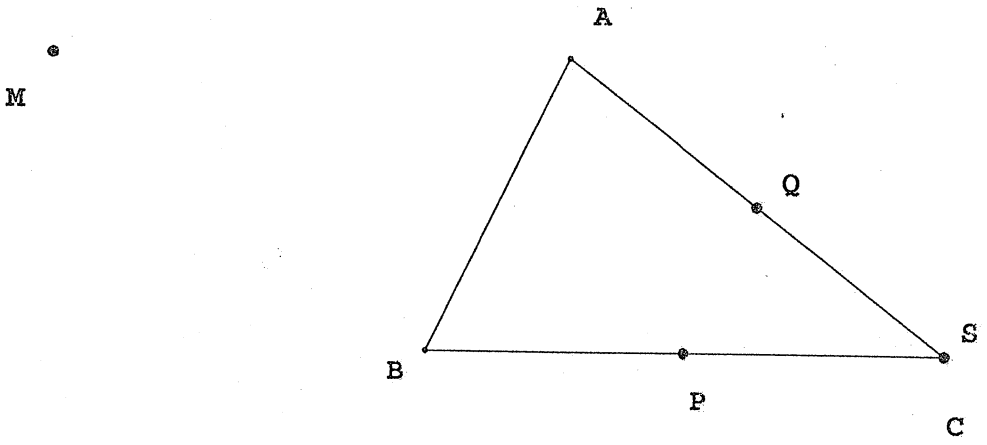
Exercice 46

Données:

- Des points A, B et C.

Construire:

- le point M tel que: $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.
- le point P tel que: $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{AC}$.
- le point Q tel que: $\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{QB}$.
- le point R tel que: $\overrightarrow{RA} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CR}$.
- le point S tel que: $\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{SC}$.



Remarques:

- P est le milieu de [B,C].
- Q est le milieu de [A,C].
- S = C.
- R n'existe pas

Exercice 47

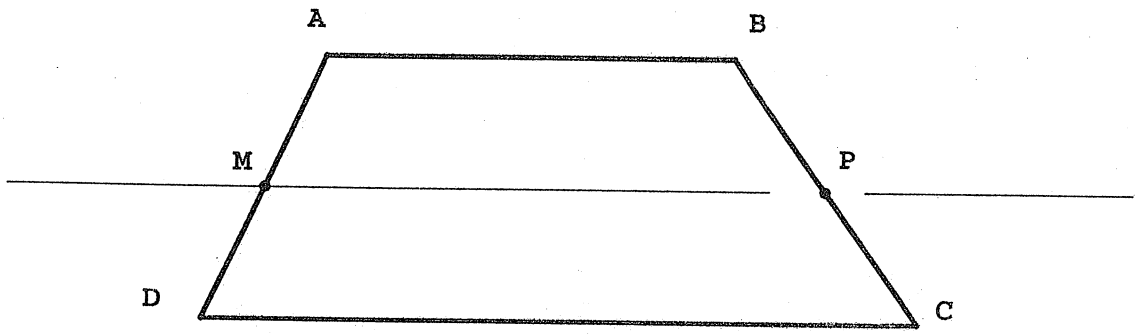
Données:

- Un trapèze ABCD de bases [A,B] et [C,D].
- M le milieu de [A,D].
- Un point P situé sur la droite (BC).

Démontrer que:

Si P est le milieu de [B,C] alors (MP)//(DC).

Si (MP)//(DC) alors P est le milieu de [B,C].

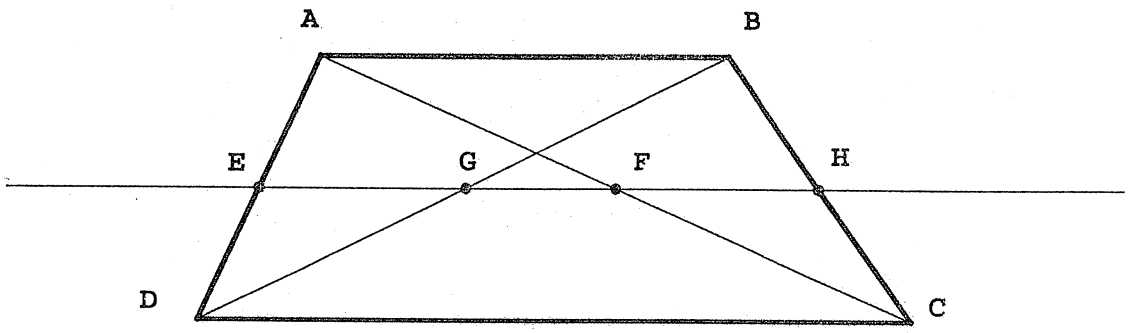


Exercice 48

Données:

- Un trapèze ABCD de bases [A,B] et [C,D].
- E le milieu de [A,D].
- F le milieu de [A,C].
- G le milieu de [B,D].
- H le milieu de [B,C].

Démontrer que E, F, G et H sont alignés.



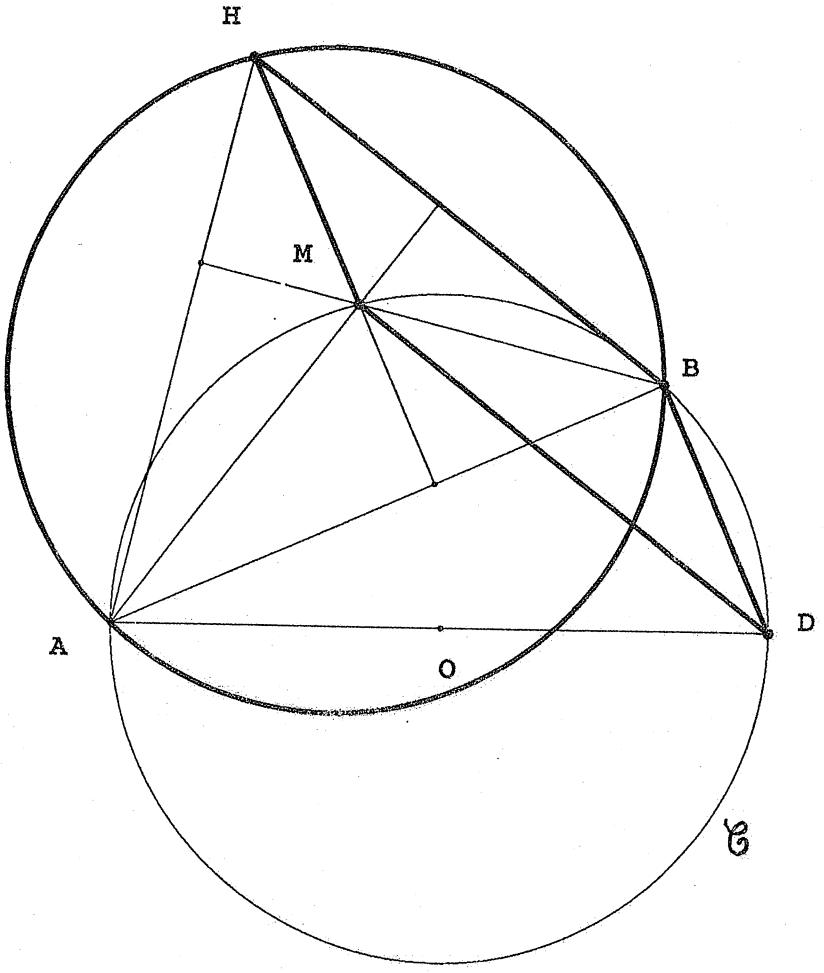
Exercice 49

Données:

- Un cercle $\mathcal{C}$ de diamètre [A,D].
- Un point B situé sur le cercle $\mathcal{C}$.
- Un point M situé sur le cercle $\mathcal{C}$ et différent des points A et B.
- H l'orthocentre du triangle AMB.

1° Démontrer que BDMH est un parallélogramme.

2° Déterminer l'ensemble décrit par le point H lorsque le point M décrit $\mathcal{C}$ privé des points A et B.

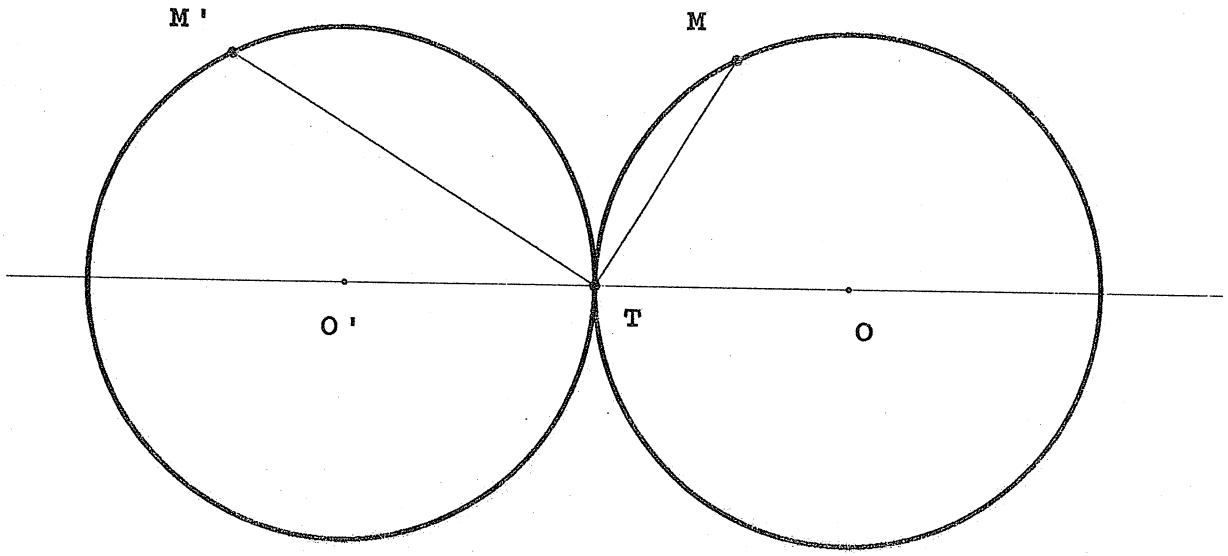


Exercice 50

Données:

- Deux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ de centres O et O', de même rayon et tangents en T.
- M un point situé sur $\mathcal{C}$ et différent de T.
- La perpendiculaire en T à (OM) recoupe $\mathcal{C}'$ en M'.

Démontrer que $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{OO'}$.

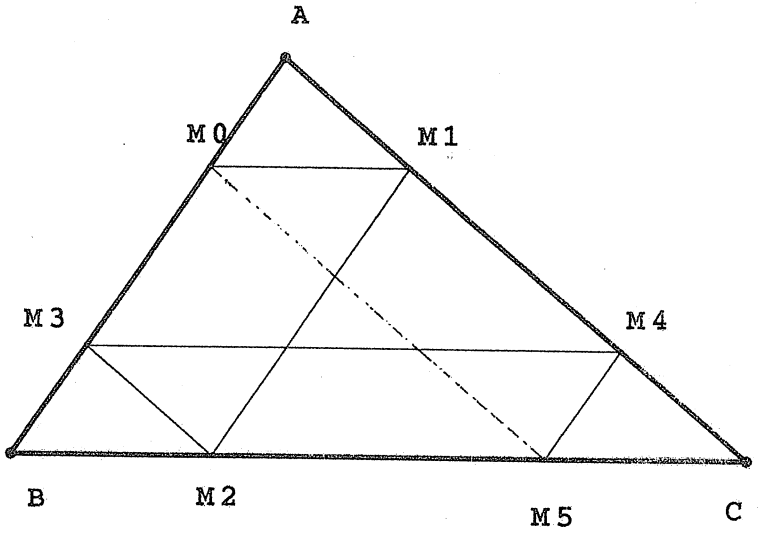


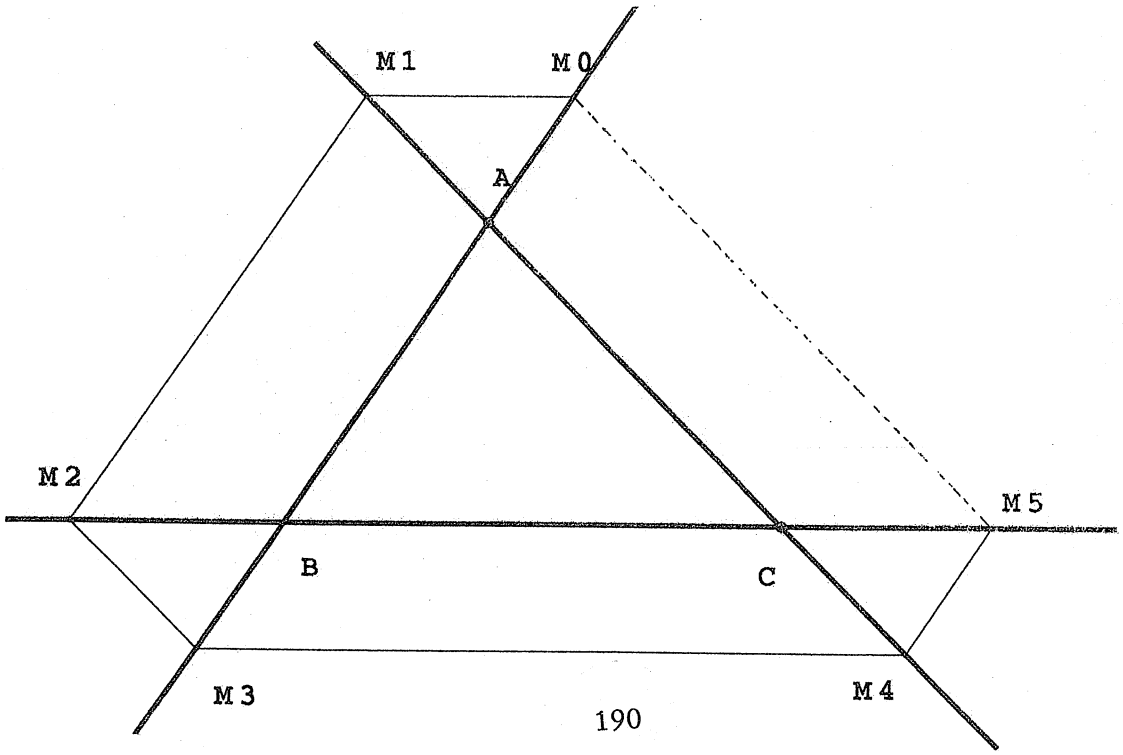
Exercice 51

Données:

- Un triangle ABC.
- M_0 un point situé sur (AB).
- La parallèle à (BC) passant par M_0 coupe (CA) en M_1.
- La parallèle à (AB) passant par M_1 coupe (BC) en M_2.
- La parallèle à (CA) passant par M_2 coupe (AB) en M_3.
- La parallèle à (BC) passant par M_3 coupe (CA) en M_4.
- La parallèle à (AB) passant par M_4 coupe (BC) en M_5.

Démontrer que $(M_0M_5)//(AC)$.



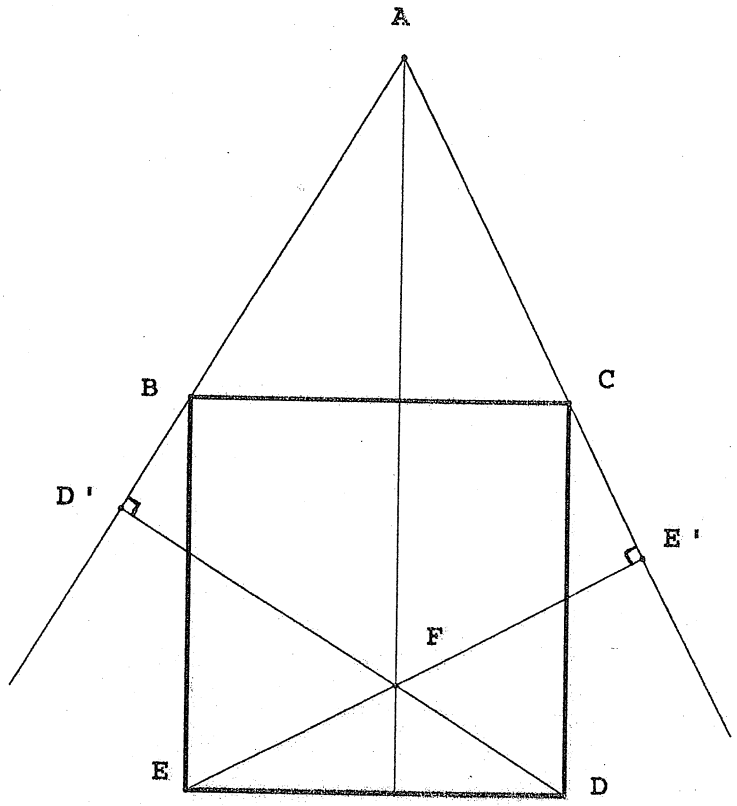


Exercice 52

Données:

- Un triangle ABC.
- Un rectangle BCDE.
- D' le projeté orthogonal de D sur (AB).
- E' le projeté orthogonal de E sur (AC).
- F l'intersection des droites (DD') et (EE').

Démontrer que le droites (AF) et BC) sont perpendiculaires.

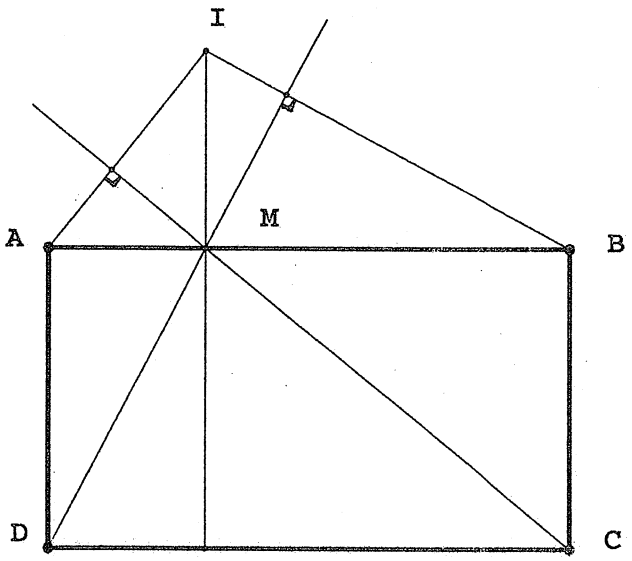


Exercice 53

Données:

- Un rectangle ABCD.
- M un point situé sur (AB).
- La perpendiculaire à (MC) passant par A et la perpendiculaire à (MD) passant par B se coupent en I.

Démontrer que les droites (IM) et (CD) sont perpendiculaires.



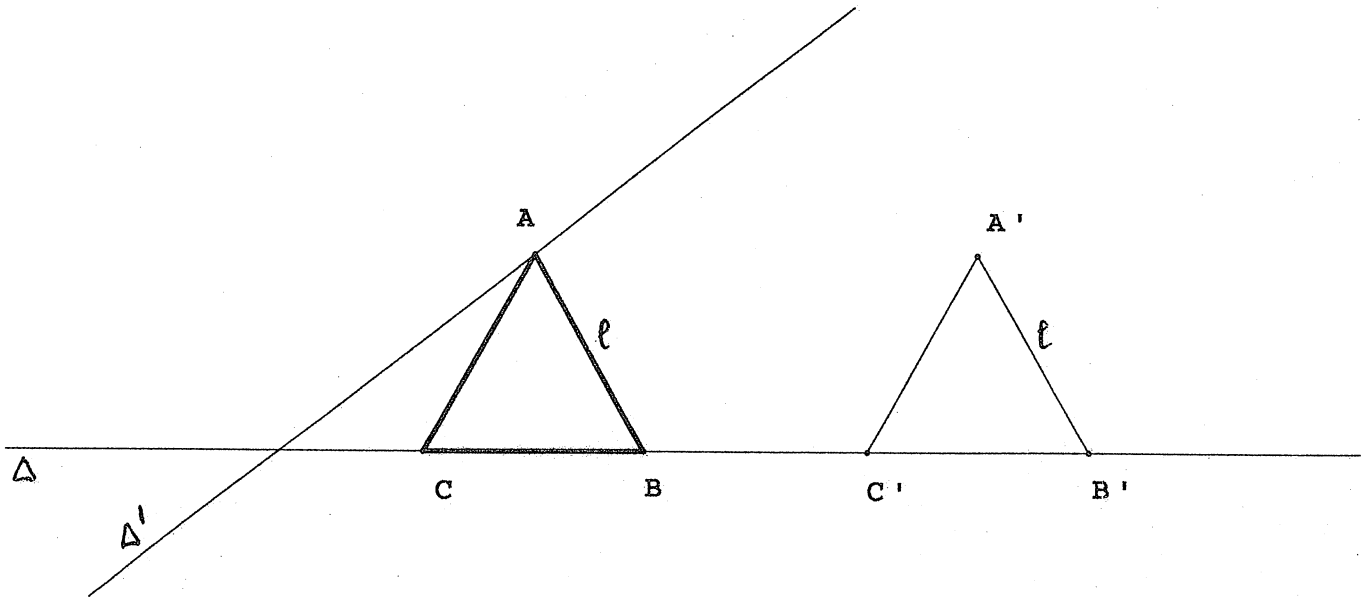
Exercice 54

Données:

- Deux droites sécantes Δ et Δ'.
- Une longueur ℓ.

Construire un triangle équilatéral ABC tel que:

- le points B et C sont sur la droite Δ et $AB=\ell$
- le point A est sur la droite Δ'.



Exercice 55

Données:

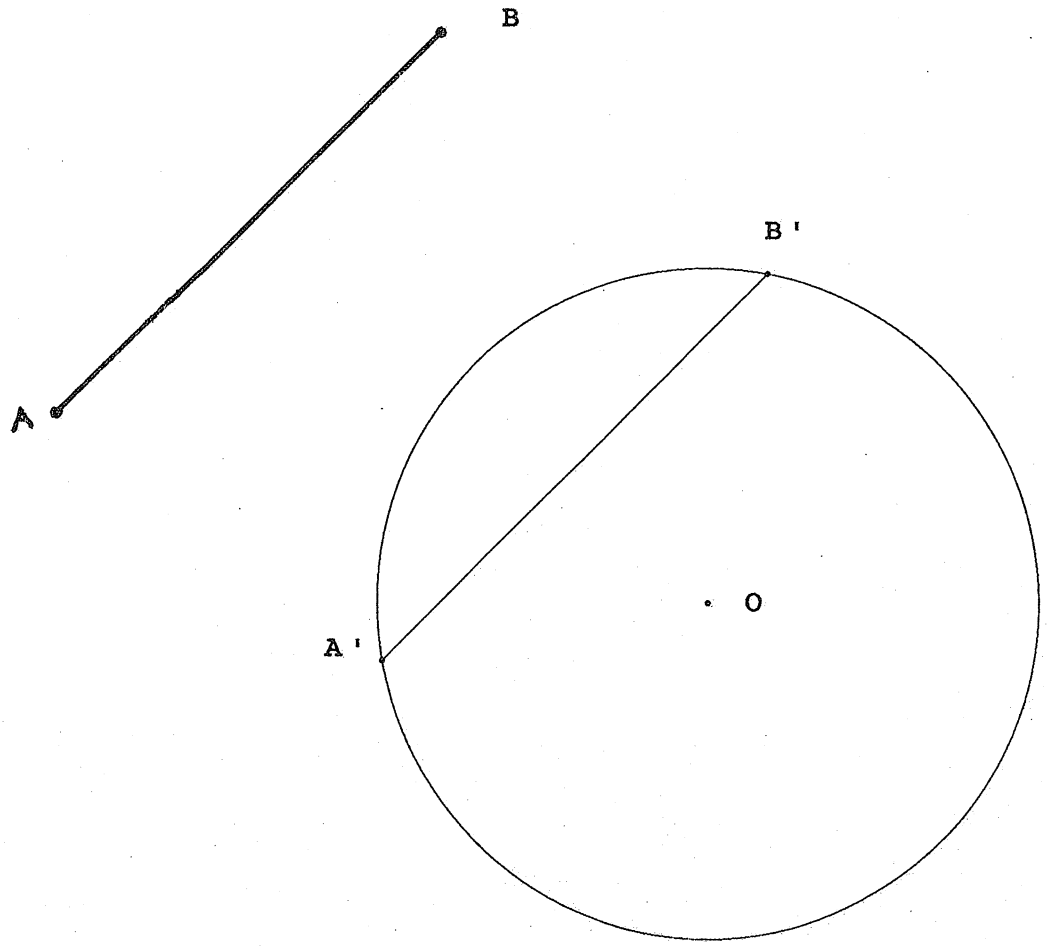
- Un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon r.
- un segment [A,B] tel que AB < $2r$.

1° Construire les points A' et B' situés sur le cercle $\mathcal{C}$ tels que:

A'B' = AB et (A'B')//(AB).

2° Que se passe-t-il lorsque AB = $2r$?

3° Que se passe-t-il lorsque AB > $2r$?



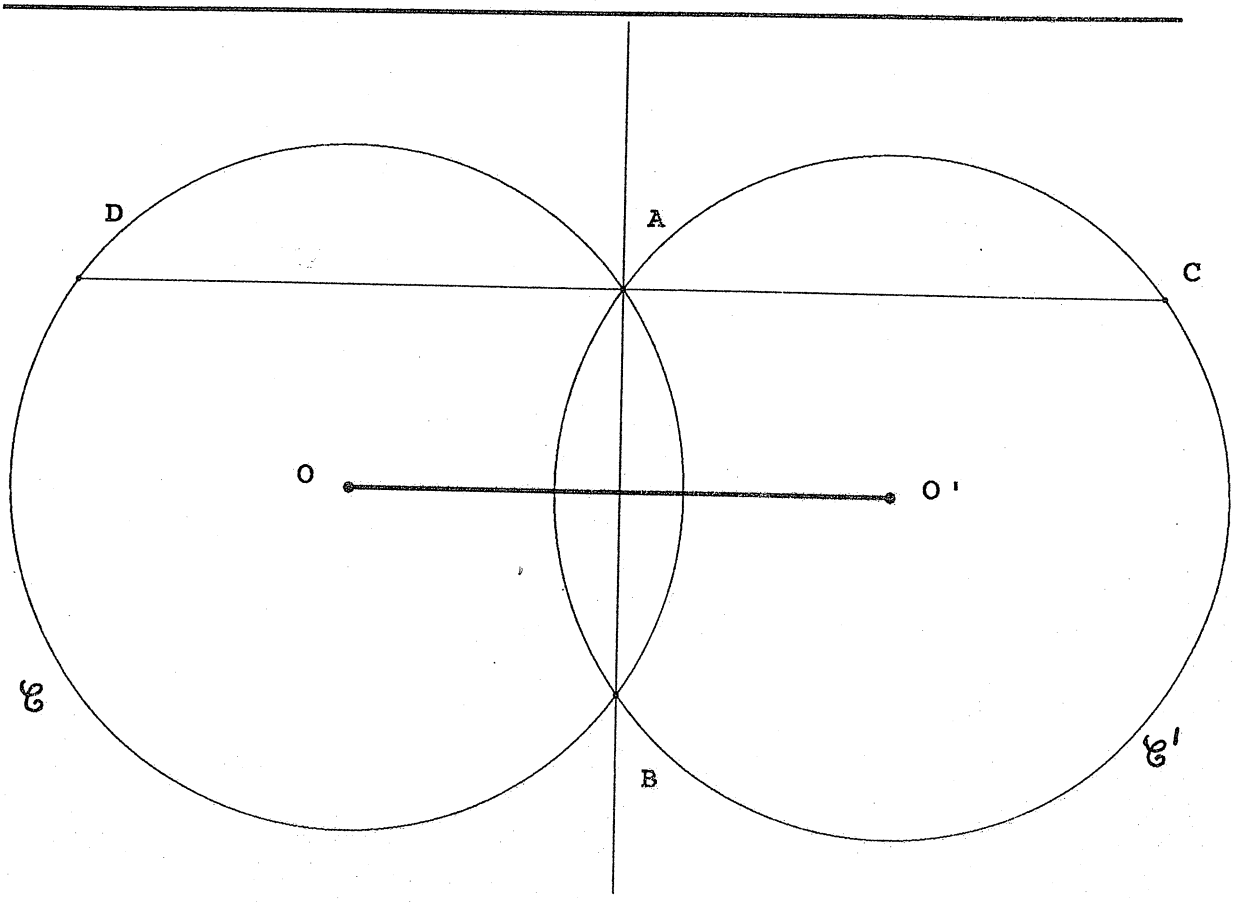
Exercice 56

Données:

- un cercle $\mathcal{C}$.
- un translation t telle que les cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}' = t(\mathcal{C})$ soient sécants en A et B.

1° Montrer que (AB) est la médiatrice de [O,O'].

2° Soit C et D les points tels que O'OAC et OO'AD soient des parallélogrammes. Montrer que $C \in \mathcal{C}'$ et $D \in \mathcal{C}$ et que A est le milieu de [D,C].



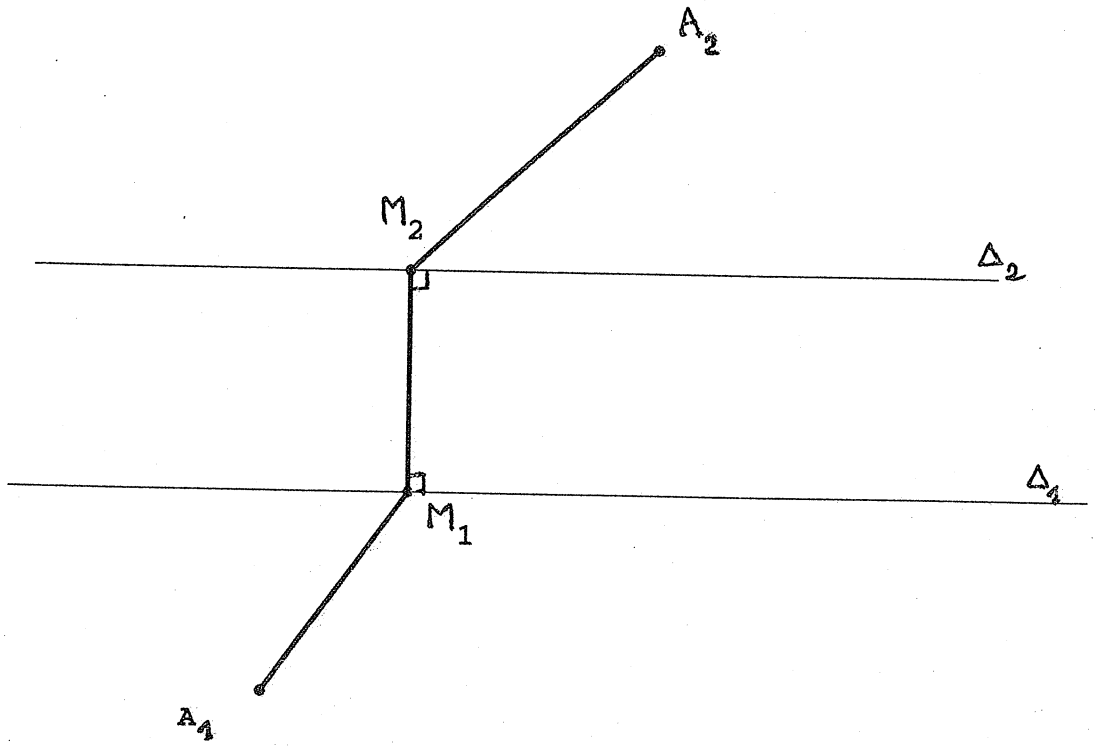
Exercice 57

Données :

- Deux droites parallèles Δ_1 et Δ_2.
- Un point A_1 situé dans le demi-plan de bord Δ_1 ne contenant pas Δ_2.
- Un point A_2 situé dans le demi-plan de bord Δ_2 ne contenant pas Δ_1.

Où placer les points M_1 et M_2 afin que le chemin

$A_1M_1 + M_1M_2 + M_2A_2$ soit le plus court possible et $M_1M_2 \perp \Delta_1$?



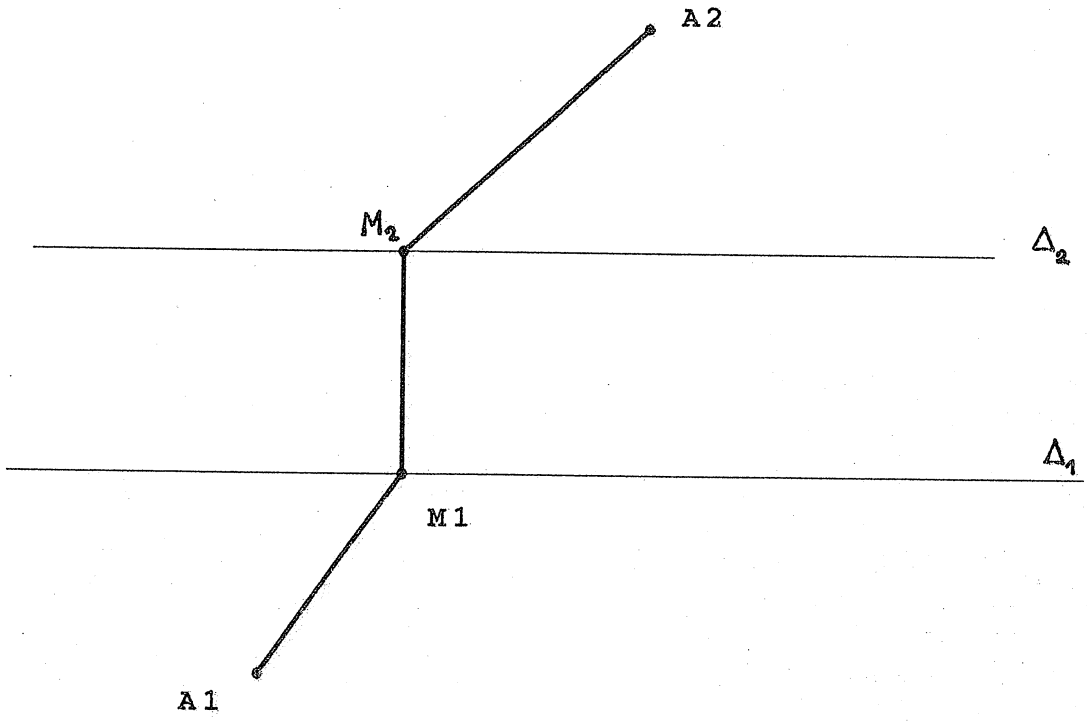
Exercice 58

Données:

- Deux droites parallèles Δ_1 et Δ_2.
- Un point A_1 situé dans le demi-plan de bord Δ_1 ne contenant pas Δ_2.
- Un point A_2 situé dans le demi-plan de bord Δ_2 ne contenant pas Δ_1.

Construire les points M_1 et M_2 tels que:

- $M_1 \in \Delta_1$ et $M_2 \in \Delta_2$.
- (M_1M_2) et Δ_1 soient perpendiculaires.
- $A_1M_1 = A_2M_2$.



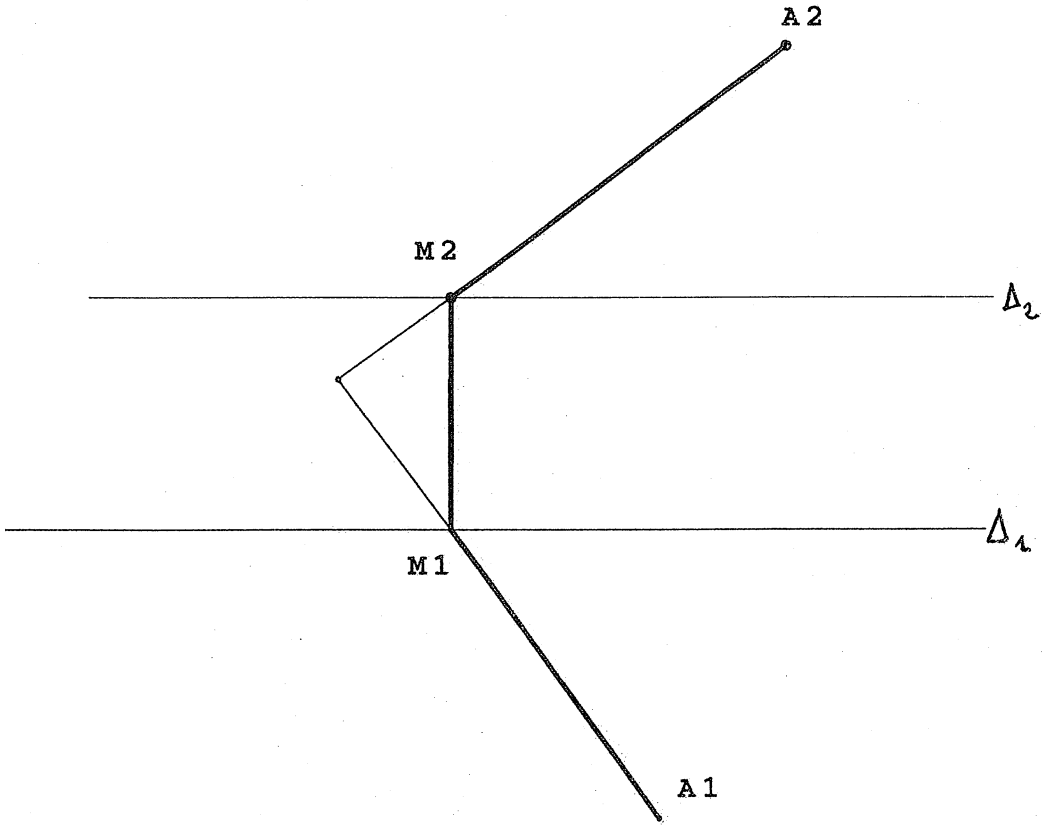
Exercice 59

Données:

- Deux droites parallèles Δ_1 et Δ_2.
- Un point A_1 situé dans le demi-plan de bord Δ_1 ne contenant pas Δ_2.
- Un point A_2 situé dans le demi-plan de bord Δ_2 ne contenant pas Δ_1.

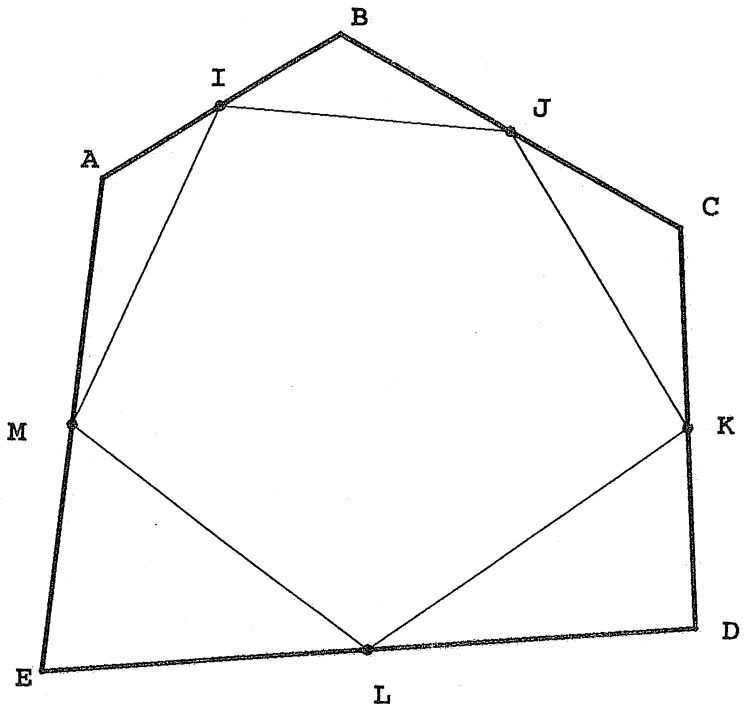
Construire les points M_1 et M_2 tels que:

- $M_1 \in \Delta_1$ et $M_2 \in \Delta_2$.
- (M_1M_2) et Δ_1 soient perpendiculaires.
- Les droites (A_1M_1) et (A_2M_2) soient perpendiculaires.



Exercice 60

Lorsqu'on se donne un pentagone quelconque ABCDE, il est aisé de construite le pentagone obtenu en joignant les milieux I, J, K, L,et M des côtés [A,B], [B,C], [C,D], [D,E] et [E,F]. (Voir figure ci-dessous)



Le but de cet exercice est de construire le pentagone ABCDE connnaissant le pentagone IJKLM.

1° Démontrer que $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{JI} + \overrightarrow{LK}$.

2° Faire la construction demandée.

Annexe 1 HOMOTHETIES AGISSANT DANS UN PLAN $\mathcal{P}$

Notre intention n'est pas de faire ici un exposé sur les homothéties, mais de mettre seulement en lumière l'intervention du langage vectoriel lors de la mise en place de ces transformations ainsi que de l'usage de l'outil vectoriel dans l'étude de leurs propriétés.

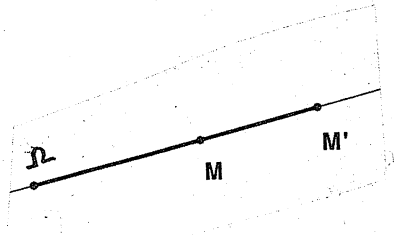
I-DEFINITIONS ET CONSEQUENCES IMMEDIATES.

1-Définition d'une homothétie: action sur les points.

Soit Ω un point d'un plan $\mathcal{P}$ et λ un nombre réel non nul:

- l'homothétie de centre Ω et de rapport λ est une transformation géométrique qui agit sur tous les points du plan $\mathcal{P}$. On la note $h_{\Omega,\lambda}$
- le transformé d'un point M de $\mathcal{P}$ par l'homothétie $h_{\Omega,\lambda}$ est le point M' de ce plan tel que: $\overrightarrow{\Omega M'} = \lambda\overrightarrow{\Omega M}$.

Le passage du domaine géométrique au domaine numérique via le domaine vectoriel peut se schématiser comme suit:

Langage des transformations	Langage vectoriel	Langage numérique
 M' est le transformé de M par l'homothétie $h_{\Omega,\lambda}$	$\overrightarrow{\Omega M'} = \lambda\overrightarrow{\Omega M}$	Lorsque M ≠ Ω, le réel λ est l'abscisse du point M' sur l'axe (Ω,M)

2-Conséquences.

- Le centre d'une homothétie, un point et son transformé par cette homothétie sont alignés.
- Le centre d'une homothétie de rapport $\lambda \neq 1$ est l'unique point du plan $\mathcal{P}$ invariant par cette homothétie.

3-Définition de la transformée d'une figure plane.

La transformée d'une figure par une homothétie est l'ensemble des transformés des points de cette figure.

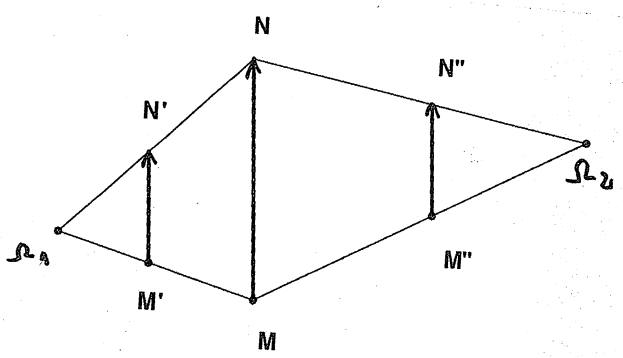
Connaissant l'action d'une homothétie sur les points du plan $\mathcal{P}$ on connaît donc son action sur chaque figure tracée dans $\mathcal{P}$.

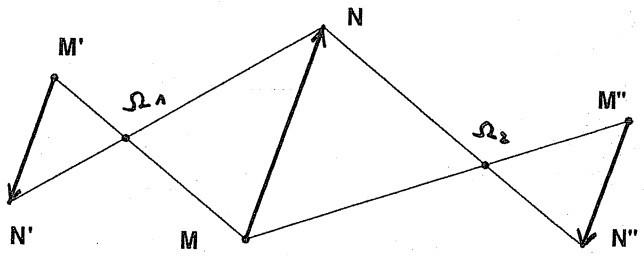
II-PROPRIETES FONDAMENTALES.

1-Effet d'une homothétie de rapport λ sur un bipoint.

Propriété 01.

Toute homothétie de rapport λ, indépendamment de son centre, transforme un bipoint (M,N) en un bipoint (M',N') tel que: $\overrightarrow{M'N'} = \lambda\overrightarrow{MN}$.





Démonstration:

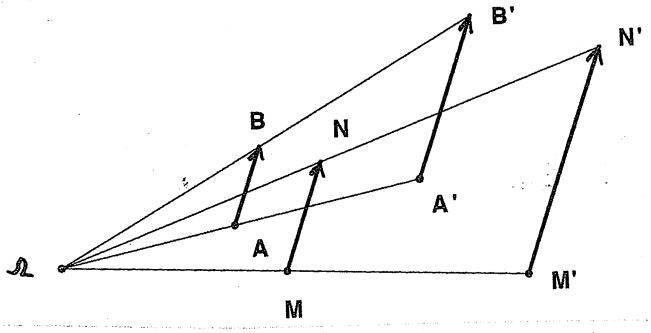
Soit h une homothétie de rapport λ et de centre Ω. Nous avons:

$\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{\Omega N'} - \overrightarrow{\Omega M'} = \lambda\overrightarrow{\Omega N} - \lambda\overrightarrow{\Omega M} = \lambda(\overrightarrow{\Omega N} - \overrightarrow{\Omega M}) = \lambda\overrightarrow{MN}$.

2-Conservation du coefficient de colinéarité.

Propriété 02.

Si des points A, B, M et N satisfont à la relation $\overrightarrow{MN} = \alpha\overrightarrow{AB}$ alors leurs transformés respectifs A', B', M' et N' satisfont à la relation $\overrightarrow{M'N'} = \alpha\overrightarrow{A'B'}$.



Démonstration:

En désignant par λ le rapport de l'homothétie considérée, on a:
$\overrightarrow{M'N'} = \lambda\overrightarrow{MN} = \lambda(\alpha\overrightarrow{AB}) = \alpha(\lambda\overrightarrow{AB}) \overset{*}{=} \alpha\overrightarrow{A'B'}$ (*) d'après la propriété 01.

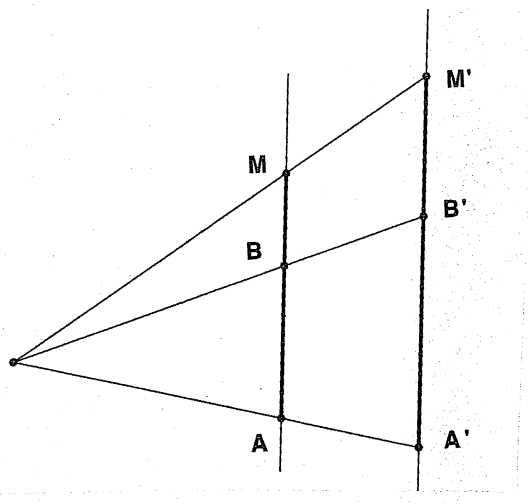
Nota.

Pour traduire cette propriété on dit qu'une homothétie "conserve le coefficient de colinéarité d'un vecteur à un autre vecteur."

III-PROPRIETES DECOULANT DES PROPRIETES FONDAMENTALES.

1-Effet d'une homothétie sur les figures élémentaires.

a)Transformés d'une droite, d'une demi-droite, d'un segment et de son milieu.



Dans le plan $\mathcal{P}$ sont donnés deux points A et B. On considère un point M vérifiant la relation: $\boxed{\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB}}$ et on note A', B' et M' les transformés des points A, B et M par une homothétie h agissant dans $\mathcal{P}$.

D'après la propriété O2 on sait que: $\overrightarrow{A'M'} = \alpha\overrightarrow{A'B'}$.

Les résultats suivant en découlent:

Lorsque M décrit	alors α décrit	L'égalité $\overrightarrow{A'M'} = \alpha\overrightarrow{A'B'}$ prouve que M' décrit	h transforme donc
la droite (AB)	$\mathbb{R}$	(A'B')	(AB) en (A'B')
la demi-droite [AB)	$\mathbb{R}+$	[A'B')	[AB) en [A'B')
le segment [A,B]	[0,1]	[A'B']	[A,B] en [A',B']
Lorsque M est le milieu de [A,B]	alors $\alpha = \frac{1}{2}$	L'égalité $\overrightarrow{A'M'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{A'B'}$ se traduit par «M' est le milieu de [A',B']»	h transforme donc le milieu de [A,B] en le milieu de [A',B'].

Revenons maintenant à la propriété O1. En désignant par λ le rapport de l'homothétie h, on a: $\overrightarrow{A'B'} = \lambda\overrightarrow{AB}$. La droite (A'B') est donc parallèle à la droite (AB). D'où le résultat suivant.

Une droite et sa transformée par homothétie sont parallèles.

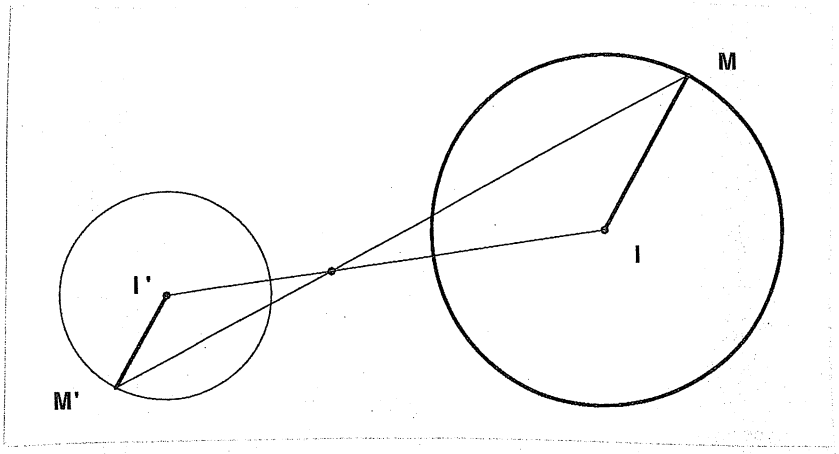
---

b)Transformé d'un cercle.

- Une homothétie de rapport λ transforme un cercle de rayon r en un cercle de rayon $|\lambda|r$. Le centre du cercle transformé est le transformé du centre du cercle donné.
- Le transformé d'un cercle de diamètre [A,B] par un homothétie h est le cercle de diamètre $[h(A),h(B)]$.

Démonstration.

1°Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre I et de rayon r, M un point "variable" de $\mathcal{C}$, I' et M' les transformés de I et M par une homothétie h de rapport λ ($\lambda = \frac{1}{2}$ dans la figure ci-dessous). Le point I' est donc fixe et le point M' un point variable de $h(\mathcal{C})$ transformé du cercle $\mathcal{C}$ par l'homothétie h.



Cela dit, nous avons:

$I'M' = \|\overrightarrow{I'M'}\| \overset{*}{=} \|\lambda\overrightarrow{IM}\|$ (*) d'après la propriété O1.

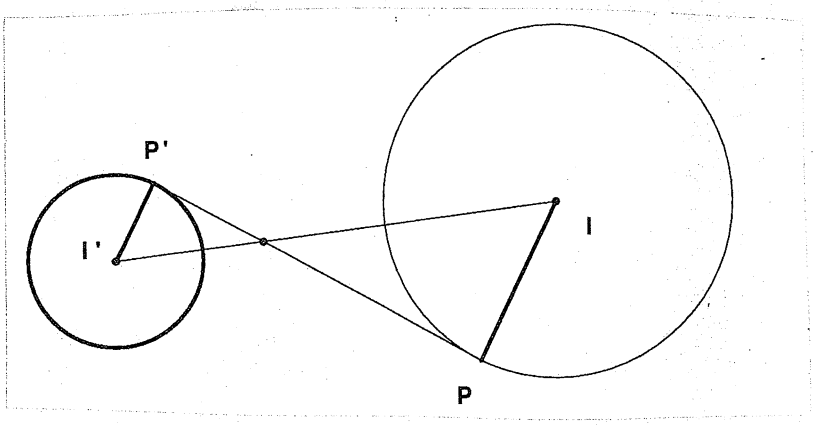
$= |\lambda|\|\overrightarrow{IM}\| = |\lambda|r$ ce qui prouve que le point M' appartient au cercle $\mathcal{C}'$ de centre I' et de rayon $|\lambda|r$.

Nous venons d'établir le résultat suivant:

«Tout point M' de $h(\mathcal{C})$ est un point du cercle $\mathcal{C}'$».

Résultat qui peut se traduire par l'inclusion: $\underline{h(\mathcal{C}) \subset \mathcal{C}'}$ (ι).

• Réciproquement, soit P' un point "variable" du cercle $\mathcal{C}'$ de centre I' et de rayon $|\lambda|r$.



En considérant le point P du plan défini par $\overrightarrow{IP} = \frac{1}{\lambda}\overrightarrow{I'P'}$ nous avons:

d'une part: $IP = \left\|\frac{1}{\lambda}\overrightarrow{I'P'}\right\| = \frac{1}{|\lambda|}\|\overrightarrow{I'P'}\| = \frac{1}{|\lambda|}(|\lambda|r) = r$

Donc $\underline{P \in \mathcal{C}}$

d'autre part: $\overrightarrow{I'h(P)} \overset{*}{=} \lambda\overrightarrow{IP}$ (*) d'après la propriété O1

$= \lambda\left(\frac{1}{\lambda}\overrightarrow{I'P'}\right) = \overrightarrow{I'P'}$

Donc $\underline{P' = h(P)}$.

Ceci étant, de $P' = h(P)$ et $P \in \mathcal{C}$ on déduit: $P' \in h(\mathcal{C})$.

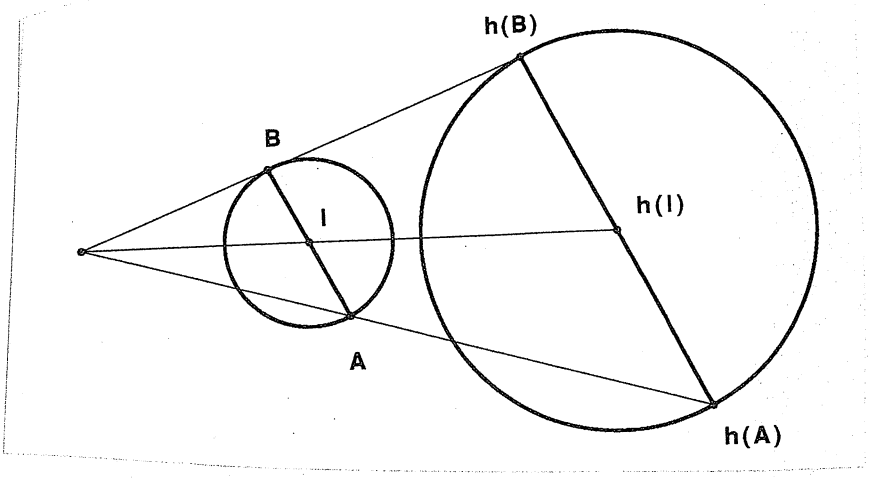
Nous venons ainsi d'établir le résultat:

«Tout point P' de $\mathcal{C}$ est un point de $h(\mathcal{C})$».

Résultat qui peut se traduire par l'inclusion: $\underline{\mathcal{C}' \subset h(\mathcal{C})}$ $(\iota\iota)$

• Conclusion: Des inclusions (ι) et (ιι) on déduit: $h(\mathcal{C}) = \mathcal{C}'$, d'où le premier résultat annoncé.

2°Considérons maintenant un cercle $\mathcal{C}$ de diamètre [A,B].



D'après le 1° on sait que le transformé de $\mathcal{C}$ par une homothétie h est un cercle dont le centre est le transformé par h du centre I de $\mathcal{C}$. Or I est le milieu de [A,B], donc $h(I)$ est le milieu de $[h(A),h(B)]$.
Par ailleurs le cercle $h(\mathcal{C})$ passe par les points $h(A)$ et $h(B)$, donc $h(\mathcal{C})$ est le cercle de diamètre $[h(A),h(B)]$, d'où le deuxième résultat annoncé.

2-Effet d'une homothétie sur le parallélisme et l'orthogonalité.

On a vu qu'une droite et sa transformée par une homothétie sont parallèles. Il en découle immédiatement que:
«Deux droites parallèles (resp. orthogonales) ont pour transformées par une homothétie deux droites parallèles resp. orthogonales»

On traduit cette propriété en disant qu'une homothétie "conserve le parallélisme et l'orthogonalité".

3-Effet d'une homothétie de rapport λ sur les mesures des longueurs et des aires.

On a vu qu'entre des points A et B et leurs transformés A' et B' par une homothétie de rapport λ existe la relation: $\overrightarrow{A'B'} = \lambda\overrightarrow{AB}$.
On en déduit: $\overrightarrow{A'B'} = \|\overrightarrow{A'B'}\| = \|\lambda\overrightarrow{AB}\| = |\lambda|\|\overrightarrow{AB}\| = |\lambda|AB$

On traduit ce résultat en disant qu'une homothétie de rapport λ "multiplie les mesures des longueurs par le réel $|\lambda|$".

Il en découle immédiatement que la même homthétie "multiplie les mesures des aires par le réel λ^2 "

4-Autres déterminations d'une homothétie.

Pour le moment, une homothétie est déterminée dès lors que l'on connaît son centre et son rapport. Nous allons ici mettre en évidence deux autres façons de définir une homothétie.

a) Problème résolu.

Etant donné des points A, B, A' et B' vérifiant les conditions $A \neq B$ et $\overrightarrow{A'B'} = \lambda\overrightarrow{AB}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}-\{0;1\}$, peut-on trouver une homothétie qui envoie A sur A' et B sur B' ?

Solution.

1ère partie. S'il existe une homothétie h qui transforme le bipoint (A,B) en le bipoint (A',B') alors:

son rapport ne peut être que λ

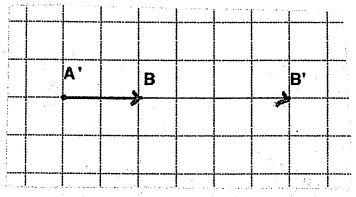
son centre ne peut être que le (*) point Ω défini par la relation $\overrightarrow{\Omega A'} = \lambda\overrightarrow{\Omega A}$.

(*) Comme en classe de seconde on ne dispose pas de la notion de barycentre l'unicité du point Ω apparaît en faisant remarquer que:

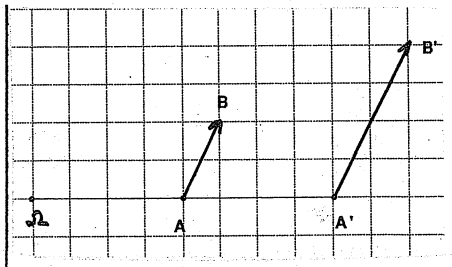
$$\overrightarrow{\Omega A'} = \lambda\overrightarrow{\Omega A} \iff \overrightarrow{AA'} - \overrightarrow{A\Omega} = -\lambda\overrightarrow{A\Omega}$$
$$\iff \overrightarrow{AA'} = (1-\lambda)\overrightarrow{A\Omega}$$
$$\iff \overrightarrow{A\Omega} = \frac{1}{1-\lambda}\overrightarrow{AA'}$$

Cette dernière égalité montre que $\Omega = A$ lorsque $A = A'$ sinon Ω est le point d'abscisse $\frac{1}{1-\lambda}$ sur l'axe (A,A').

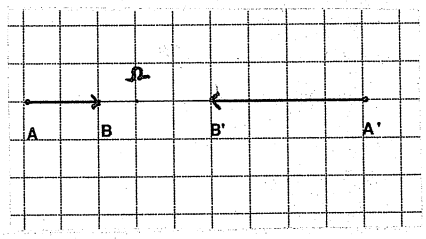
En voici trois exemples illustrés:



$A = A'$ d'où $\Omega = A = A'$



$\overrightarrow{A'B'} = 2\overrightarrow{AB}$ d'où $\overrightarrow{A\Omega} = \overrightarrow{AA'}$



$\overrightarrow{A'B'} = -2\overrightarrow{AB}$ d'où $\overrightarrow{A\Omega} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AA'}$

Le problème admet donc au plus une "homothétie-solution".

2ème partie. On contrôle si l'homothétie h de centre Ω et de rapport λ retenue envoie effectivement A sur A' et B sur B'.

- h transforme A en A' car $\overrightarrow{\Omega A'} = \lambda\overrightarrow{\Omega A}$
- h transforme B en B' car $\overrightarrow{A'h(B)} = \lambda\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$, donc $h(B) = B'$.

Le problème posé admet donc une et une seule "homothétie-solution", d'où le résultat:

Si deux bipoints (A,B) et (A',B') ont même direction ($A \neq B$ et $A' \neq B'$) alors il existe une et une seule homothétie qui transforme (A,B) en (A',B').

---

b)Conséquence.

- Une homothétie est déterminée par la donnée d'un bipoint et de son transformé.

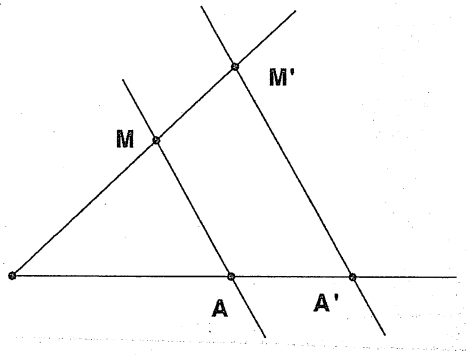
En particulier.

- Une homothétie est déterminée par la donnée de son centre, d'un point et de son transformé.

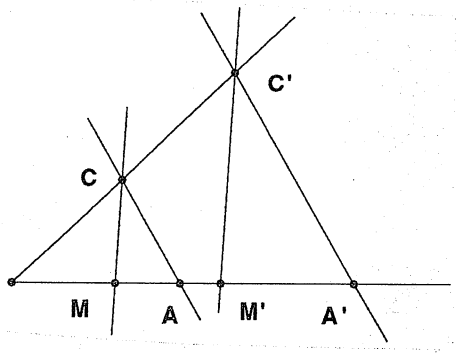
En effet, étant donné trois points alignés Ω, A et A', il existe une et une seule homothétie de centre Ω qui envoie A sur A': celle qui transforme le bipoint (Ω,A) en le bipoint $(\Omega A')$. On la note $h_{\Omega, A \longmapsto A'}$

5-Construction de l'homothétique d'un point M.

a)L'homothétie est définie par son centre Ω, un point A et son image A'

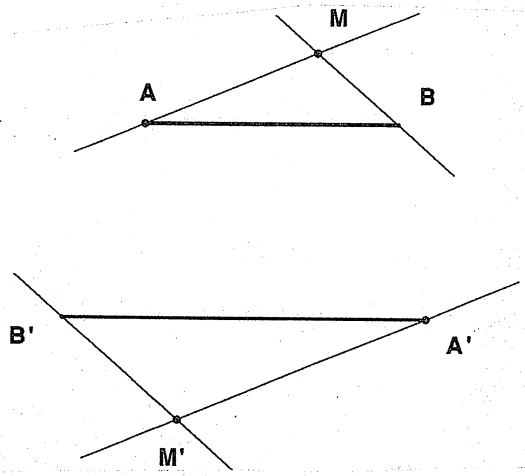


1er cas: $M \notin (\Omega A)$

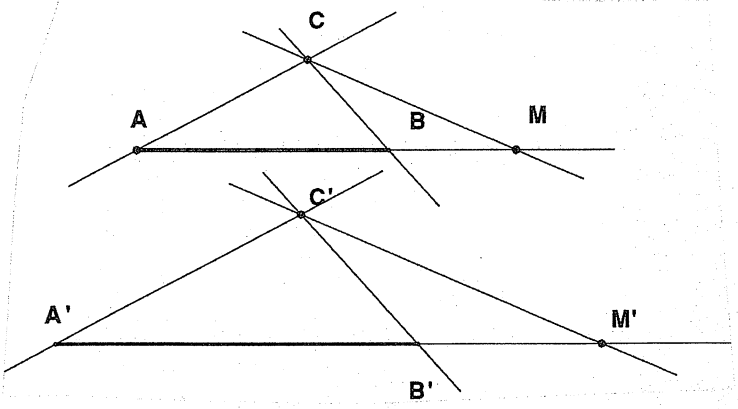


2ème cas: $M \in (\Omega A)$

a)L'homothétie est définie par un bipoint (A,B) et son image (A',B').



1er cas: $M \notin (AB)$



2ème cas: $M \in (AB)$

Nous laissons au lecteur le soin de justifier ces différentes constructions.

Annexe 2 PROBLEMES de CONSTRUCTIONS

Dans un problème dit "de construction" on demande de construire une figure satisfaisant à des conditions imposées, la construction d'une telle figure n'étant pas à priori évidente.

Résoudre un problème de construction c'est déterminer l'ensemble de toutes les solutions, autrement dit de toutes les figures satisfaisant aux conditions imposées. Lorsque cet ensemble est non vide, il convient par ailleurs de décrire comment construire la ou les figure(s) solution(s) du problème.

COMMENT RESOUDRE UN PROBLEME DE CONSTRUCTION?

On ne dispose pas d'une méthode standard pour résoudre ce type de problème. Toutefois, on peut s'inspirer des techniques grossièrement décrites dans les alinéas suivants:

[1] On utilise les propriétés inhérentes à la figure qu'on demande de construire.

[2] On commence par étudier des problèmes dits "intermédiaires" dans lesquels on ne prend en compte qu'une partie des conditions imposées. Pour chaque problème intermédiare envisagé, on détermine le lieu géométrique des points clés de la figure à construire qui ne sont pas soumis à la totalité des conditions auxquelles ils sont initialement assujettis.
Dès lors, toute solution du problème initial, ne peut être qu'une solution commune à tous les problèmes intermédiaires traités.

[3] Lorsque, au départ, certains constituants de la figure à construire sont donnés, la difficulté du problème peut provenir du fait que l'ordre de mise en place des constituants de cette figure se trouve en partie pré-imposé. Pour ce soustraire à cette difficulté, on peut alors imaginer de construire l'image de la figure demandée par une transformation géométrique bijective T judicieusement choisie: translation, homothétie, réflexion, ...
On remplace ainsi le problème initial par un deuxième problème.
On remarquera que, pour T fixée:

- Si $\mathcal{F}$ est une figure-solution du problème initial alors $T(\mathcal{F})$ est une figure solution du deuxième problème.
- Réciproquement, si $\mathcal{F}'$ est une figure solution du deuxième problème alors $T^{-1}(\mathcal{F}')$ est une solution du problème initial.

Autrement dit, le problème initial et le deuxième problème ont, à la transformation T près, les même figures-solutions.

4 ...

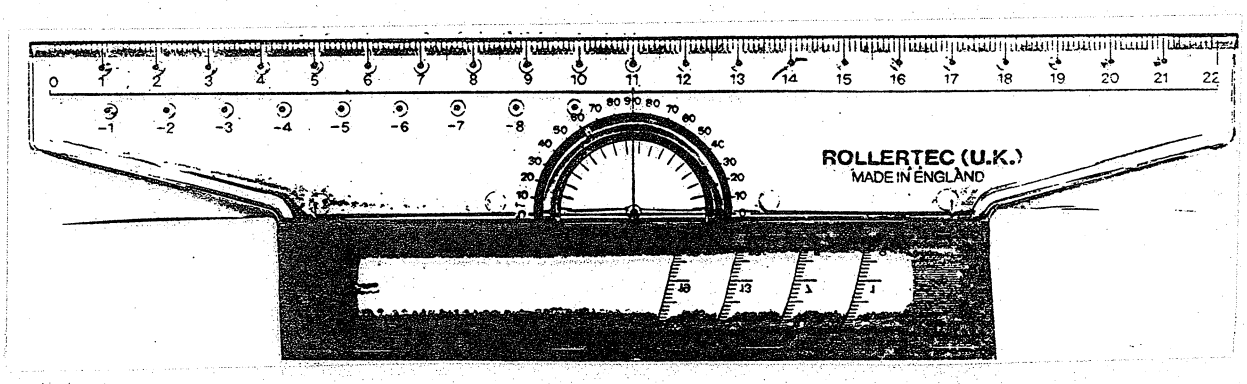
Remarques:

- Cette liste n'est pas exhaustive.
- Dans un même problème on peut utiliser deux, voire les trois techniques décrites ci-dessus.

Dans les pages qui suivent nous avons résolu quatre exercices. Pour les trois premiers nous proposons plusieurs méthodes faisant intervenir l'une ou l'autre des techniques précédentes.

Le dernier exercice est ... délicat. Nous l'avons présenté pour montrer comment, dans un même problème, on peut utiliser successivement des techniques différentes.

Les instruments de dessin utilisés sont: la règle, le compas, l'équerre et le "traceur de parallèles" (voir photo ci-dessous).

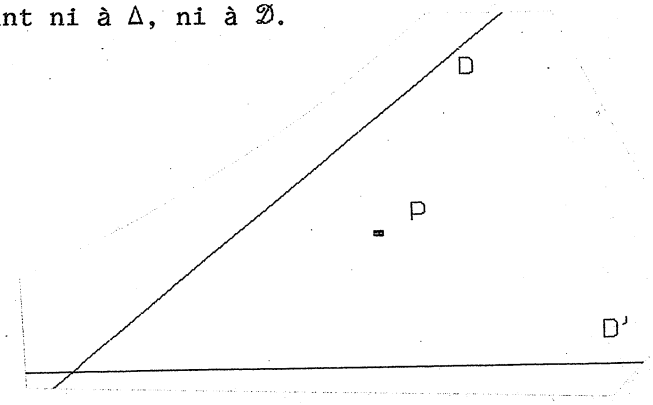


Distribué par:
PASSAT FRANCE
95610 - ERAGNY SUR OISE

Les problèmes de construction sont généralement assez difficiles tant dans la partie "recherche" proprement dite que dans la partie "rédaction" de la solution. Il importe de bien étalonner les difficultés qu'ils représentent de manière à les proposer à bon escient (dans les classes de lycées).

EXERCICE 1

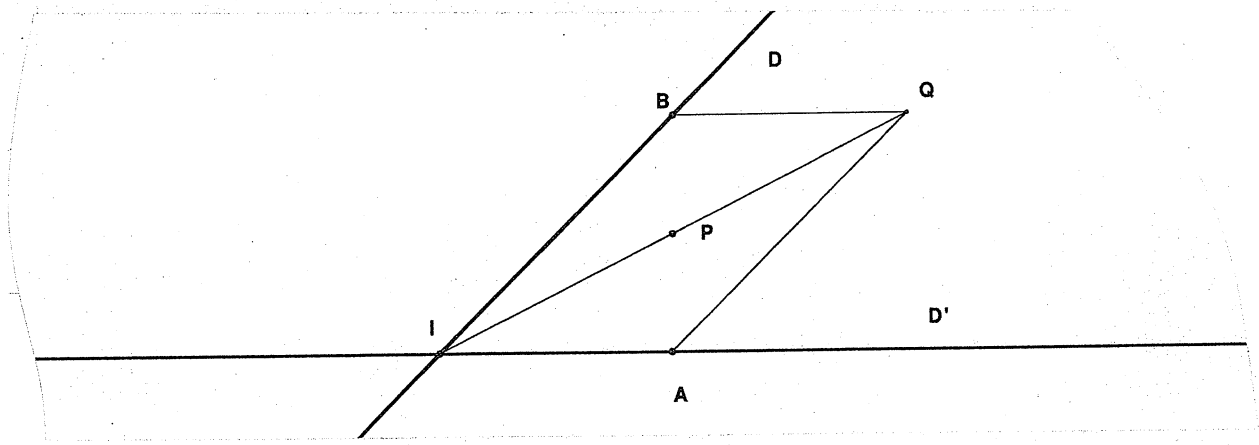
Dans le plan $\mathcal{P}$ sont donnés deux droites sécantes Δ et $\mathcal{D}$, et, un point P n'appartenant ni à Δ, ni à $\mathcal{D}$.



Construire un segment [A,B] satisfaisant aux conditions suivantes:

$A \in \Delta$ (1) , $B \in \mathcal{D}$ (2) et P est milieu de [A,B] (3).

M E T H O D E N° 1



Notons I le point commun à Δ et $\mathcal{D}$.

1ère étape: (voir alinéa [1])

Si le segment [A,B] a pour milieu P alors $2\overrightarrow{IP} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}$

(Transcription vectorielle)

En introduisant le point Q tel que $\overrightarrow{IQ} = 2\overrightarrow{IP}$, il vient $\overrightarrow{IQ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}$, égalité qui se traduit par:

« le quadrilatère AIBQ est un parallèlogramme »

Dès lors, si le problème initial admet une figure-solution, dans cette figure:

- A ne peut être que l'intersection de Δ et de la parallèle à $\mathcal{D}$ passant par Q
- B ne peut être que l'intersection de $\mathcal{D}$ et de la parallèle à Δ passant par Q

Le problème posé admet au plus une solution.

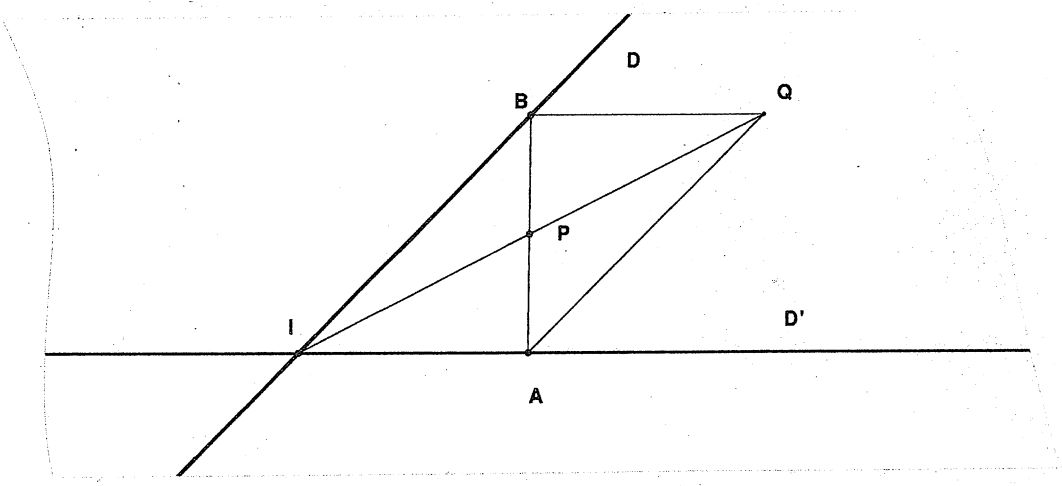
2ème étape: (on contrôle si les points A et B précédemment retenus sont effectivement éléments d'une figure-solution du problème)

Ici, A et B sont respectivement éléments de Δ et $\mathcal{D}$. En outre, étant donné que le quadrilatère AIBQ est un parallèlogramme et que P est le milieu de [I,Q] on est assuré que P est aussi le milieu de [A,B].

Les conditions (1), (2) et (3) sont donc satisfaites.

Conclusion: le problème posé admet une et une solution.

Plan de construction de la figure-solution.



- On place le point Q tel que $\overrightarrow{IQ} = 2\overrightarrow{IP}$
- On place le point A intersection de Δ et de la parallèle à $\mathcal{D}$ passant par Q
- On place le point B intersection de $\mathcal{D}$ et de la parallèle à Δ passant par Q
- On trace le segment [A,B].

Nota: la figure-solution est constituée des droites Δ et $\mathcal{D}$, du point P et du segment [A,B].

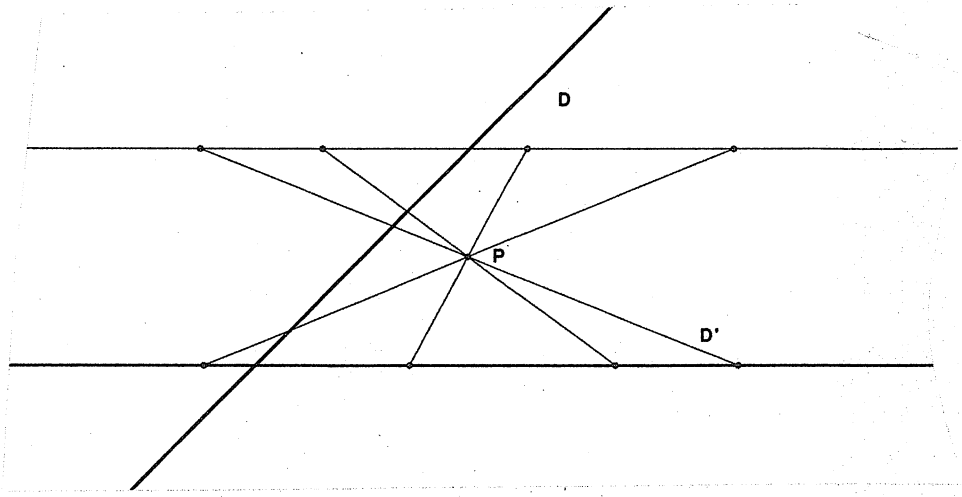
M E T H O D E N° 2

1ère étape: (voir alinéa [2])

Les données du problème initial étant conservées, on considère le problème intermédiaire:

« construire un segment [A,B] satisfaisant aux conditions :

A∈Δ (1) et P milieu de [A,B] (3) »



Il est clair que ce problème admet une infinité de solutions.

Lorsque A parcourt Δ, l'ensemble des points B tels que P soit le milieu de [A,B] est la droite Δ′ transformée de Δ par la symétrie $\diamond_P$ de centre P.

Ceci dit, la droite $\mathcal{D}$ coupant Δ coupe aussi la droite Δ′ qui est parallèle à Δ.

Dès lors, si le problème initial admet une figure-solution, dans cette figure:

- B ne peut être que le point commun à Δ′ et $\mathcal{D}$
- A ne peut être que le transformé de ce point par la symétrie $\diamond_P$

Le problème posé admet au plus une seule solution.

2ème étape: (on contrôle si les points A et B précédemment retenus sont effectivement éléments d'une figure-solution du problème)

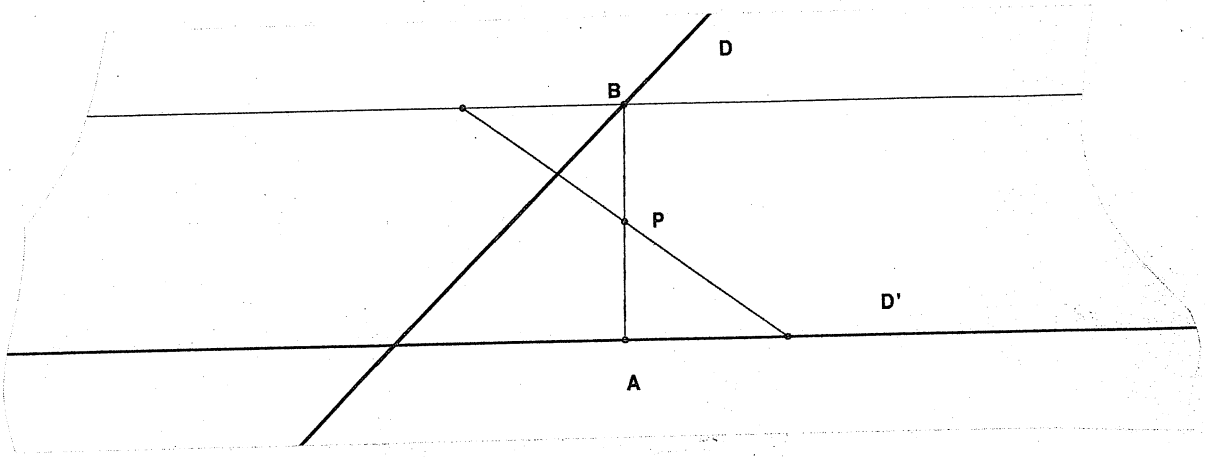
Ici, B appartient à $\mathcal{D}$ et P est le milieu de [A,B] car A = $\diamond_P$(B).

En outre, comme B appartient également à Δ′, son transformé A par $\diamond_P$ se trouve sur la droite $\diamond_P$(Δ′) c'est à dire Δ.

Les conditions (1), (2) et (3) sont donc satisfaites.

Conclusion: le problème posé admet une et une seule solution.

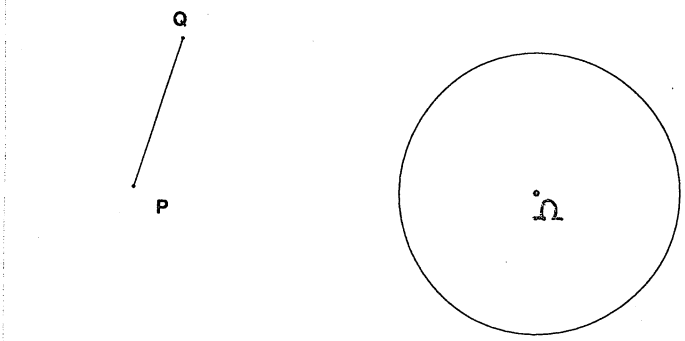
Plan de construction de la figure-solution.



- On trace Δ' transformée de Δ par la symétrie $\mathcal{S}_P$ de centre P.
- On place le point B commun à $\mathcal{D}$ et Δ'.
- On place A transformé de B par $\mathcal{S}_P$ (le point A est l'intersection des droites Δ et (BP)).
- On trace le segment [A,B].

EXERCICE 2

Dans le plan $\mathcal{P}$ sont donnés un cercle $\mathcal{C}$ de centre Ω, de rayon r et deux points P et Q tels que $PQ < 2r$.

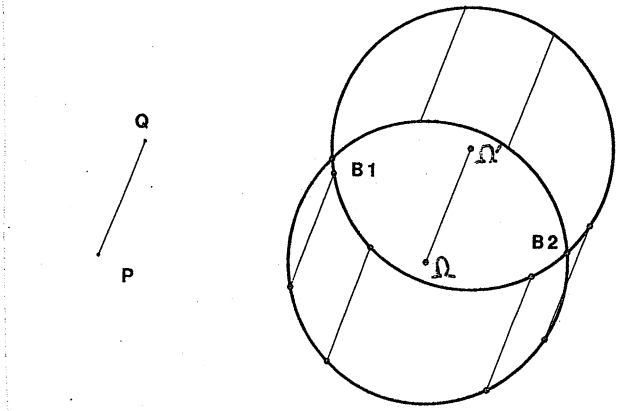


Construire un bipoint (A,B) satisfaisant aux conditions suivantes:

$A \in \mathcal{C}$ (1) , $B \in \mathcal{C}$ (2) et $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{PQ}$ (3)

M E T H O D E N° 1

1ère étape: (voir alinéa [2])



Les données du problème initial étant conservées, on considère le problème intermédiaire:

« construire un bipoint (A,B) satisfaisant aux conditions suivantes:

$A \in \mathcal{C}$ (1) et $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{PQ}$ (3) »

Il est clair que ce problème admet une infinité de solutions.

Lorsque A parcourt $\mathcal{C}$, l'ensemble des points B tels que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{PQ}$ est le cercle $\mathcal{C}'$ transformé de $\mathcal{C}$ par la translation $t_{(P,Q)}$. Le centre de $\mathcal{C}'$ est le point Ω' transformé de Ω par cette translation et on a $\overrightarrow{\Omega\Omega'} = \overrightarrow{PQ}$. Le rayon de $\mathcal{C}'$ est r.

Du fait que: $0 < \Omega\Omega' < 2r$, les cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont sécants.

Dès lors, si le problème initial admet une figure-solution, dans cette figure:

- B ne peut être qu'un des deux points B_1 et B_2 communs à $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$.
- A ne peut être que le transformé de B par la translation $t_{(Q,P)}$.

Le problème posé admet donc au plus deux solutions.

2ème étape: (On contrôle si les bipoints (A_1,B_1) et (A_2,B_2) précédemment retenus sont effectivement des constituants d'une figure-solution du problème).

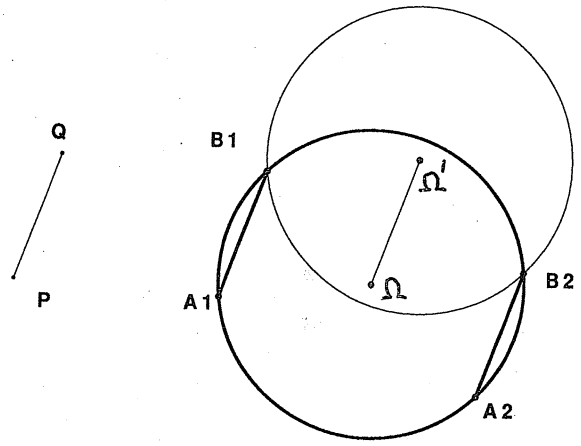
Ici, B_1 et B_2 sont éléments de $\mathcal{C}$ et A_1 et A_2 transformés de ces points par la translation $t_{(Q,P)}$ sont tels que: $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{A_2B_2} = \overrightarrow{PQ}$.

En outre, comme B_1 et B_2 sont éléments de $\mathcal{C}'$, les points A_1 et A_2 sont éléments de $t_{(Q,P)}(\mathcal{C}')$ c'est à dire de $\mathcal{C}$.

Ainsi, (A_1,B_1) et (A_2,B_2) vérifient les conditions (1), (2) et (3).

Conclusion: le problème admet donc (exactement) deux solutions.

Plan de construction des deux figures-solutions.



- On trace le cercle $\mathcal{C}'$ transformé de $\mathcal{C}$ par la translation $t_{(P,Q)}$.
- On place les points B_1 et B_2 communs aux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$.
- On place les points A_1 et A_2 transformés de B_1 et B_2 par la translation $t_{(Q,P)}$. Les points A_1 et A_2 sont respectivement les intersections du cercle $\mathcal{C}$ et et des parallèles à la droite (PQ) menées par B_1 et B_2.
- On trace les bipoints (A_1,B_1) et (A_2,B_2).

Nota: Chacune des deux figures-solutions est constituée du cercle $\mathcal{C}$ et de l'un ou l'autre des bipoints (A_1,B_1) et (A_2,B_2).

M E T H O D E N° 2 (voir alinéa [3])

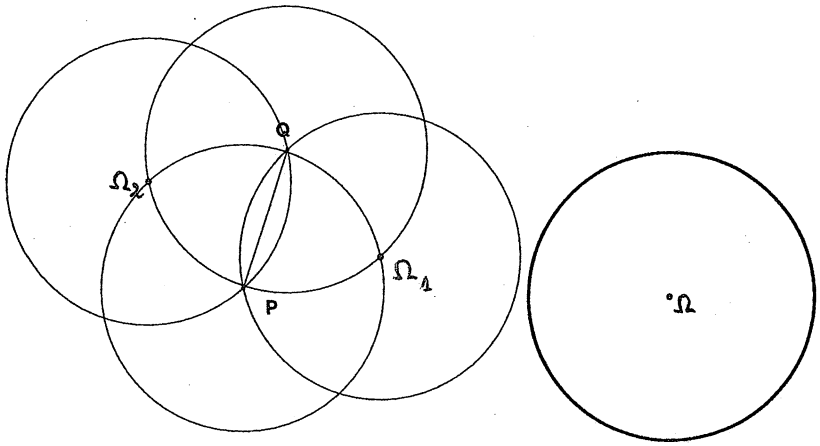
On sait qu'une translation transforme:

- un bipoint en un bipoint de même vecteur.
- un cercle en un cercle de même rayon.

Par suite, si le problème posé admet une figure-solution, la translation qui envoie le bipoint (A,B) sur le bipoint (P,Q) transforme le cercle $\mathcal{C}$ en un cercle de même rayon passant par P et Q.

On est donc amené à résoudre le problème suivant:

« construire un cercle de rayon r passant par les points P et Q ».



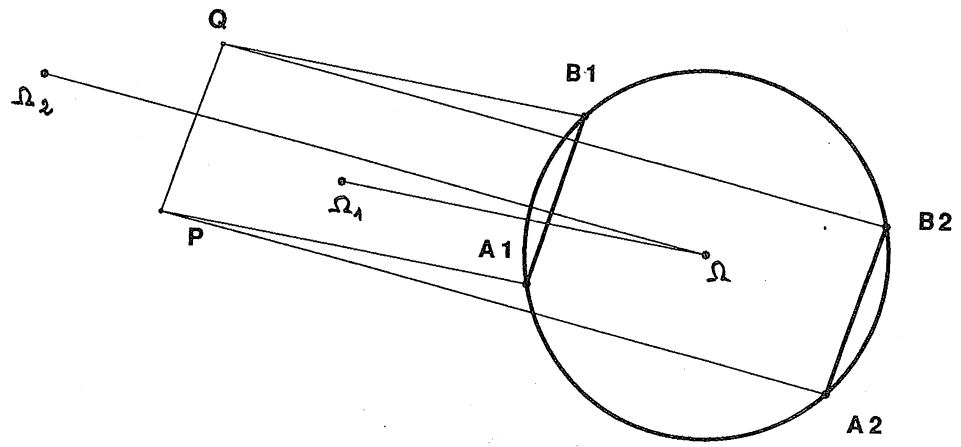
Il est clair que ce dernier problème admet deux figures-solutions car $PQ < 2r$:

$\begin{cases} \mathcal{F}_1 \text{ constituée du cercle } \mathcal{C}_1 \text{ et du bipoint (P,Q).} \\ \mathcal{F}_2 \text{ constituée du cercle } \mathcal{C}_2 \text{ et du bipoint (P,Q).} \end{cases}$

Par conséquent le problème initial admet deux figues-solutions:

$\begin{cases} \text{la transformée de } \mathcal{F}_1 \text{ par la translation } t_{(\Omega_1,\Omega)} \text{ qui envoie } \mathcal{C}_1 \text{ sur } \mathcal{C}. \\ \text{la transformée de } \mathcal{F}_2 \text{ par la translation } t_{(\Omega_2,\Omega)} \text{ qui envoie } \mathcal{C}_2 \text{ sur } \mathcal{C}. \end{cases}$

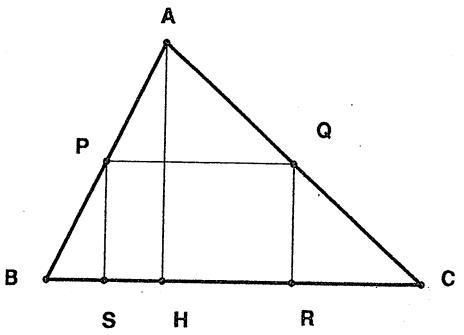
Plan de construction des figures-solutions.



- On construit les centres Ω_1 et Ω_2 des cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ de rayon r qui passent par les points P et Q. Les points Ω_1 et Ω_2 sont les points d'intersection des cercles de rayon r centré en P et Q.
- On trace le bipoint (A_1,B_1) transformé de (P,Q) par $t_{(\Omega_1,\Omega)}$.
- On trace le bipoint (A_2,B_2) transformé de (P,Q) par $t_{(\Omega_2,\Omega)}$.

EXERCICE 3

Etant donné un triangle ABC,



Construire un carré PQRS satisfaisant aux conditions suivantes:

$P \in [A,B]$ (1) , $Q \in [A,C]$ (2) et $[R,S] \subset [B,C]$ (3)

Remarque préliminaire.

Désignons par H le projeté orthogonal de A sur la droite (BC). Si le problème admet une solution alors les points S et R sont les projetés orthogonaux des points P et Q sur la droite (BC). Donc S et R ne peuvent appartenir respectivement qu'aux segments [B,H] et [H,C] privés de leurs extrémités. Lorsque H est extérieur au segment [B,C] le problème posé n'a pas de solution car, dans ce cas, la condition (3) ne peut être satisfaite.

Dans la suite du problème on considère que le point H est élément du segment [B,C].

M E T H O D E N° 1 (voir alinéa 3)

Les conditions imposées aux sommets du carré PQRS à construire font que l'on connaît:

- la direction et le sens des bipoints (P,Q) et (S,R).
- la direction et le sens des bipoints (P,S) et (Q,R).

Par contre, on ignore quelle est la longueur commune à ces quatre bipoints.

Ce constat, ajouté au fait qu'une homothétie positive conserve la direction et le sens des bipoints et transforme un carré en un carré, nous suggère l'idée de construire l'image de la figure demandée par une transformation de ce type.

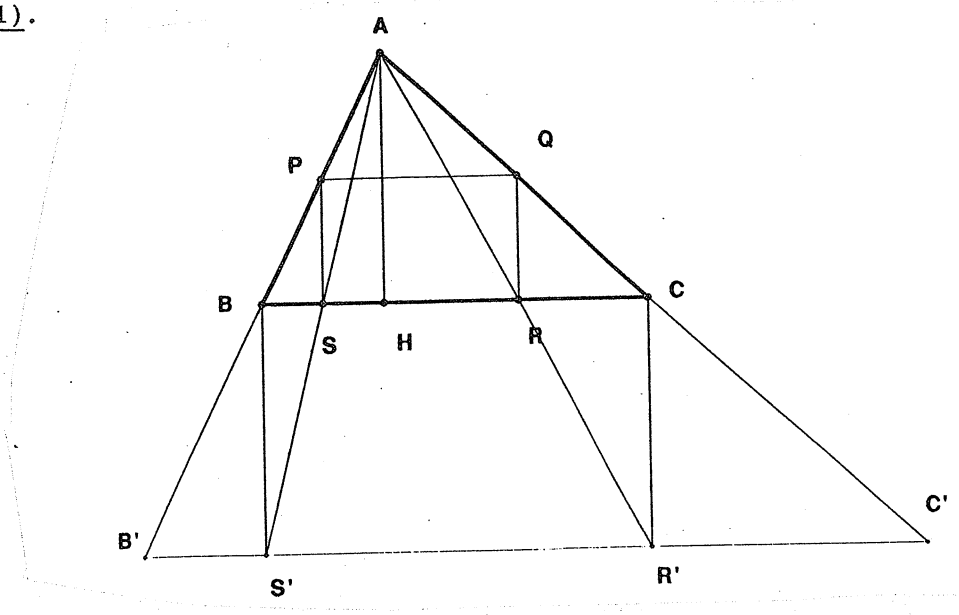
Pour déterminer l'homothétie envisagée, on peut procéder de deux façons:

- On fixe son centre et son action sur le point P (ou le point Q).
- On fixe son action sur le bipoint (P,Q).

Dans ce qui suit, nous avons accordé notre préférence au premier procédé car il permet de faire des économies sur les tracés en utilisant au mieux les constituants déjà en place de la figure à construire. Nous laissons lecteur le loisir d'expérimenter l'autre façon de faire.

Ceci dit voici deux exemples illustrant le premier procédé.

Exemple (1).



Si le problème posé admet une figure solution, l'homothétie de centre A qui envoie P sur B (donc Q sur C) transforme:

- le triangle ABC en le triangle AB'C'.
- le carré PQRS en le carré BCR'S'.

De sorte que $B \in [A,B']$, $C \in [A,C']$ et $[R',S'] \subset [B',C']$.

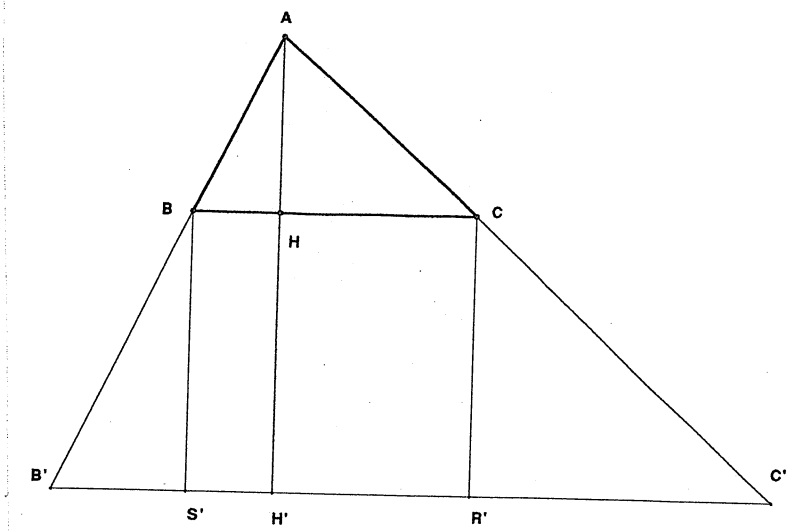
On substitue au problème initial le problème suivant:

« Etant donné un triangle ABC tel que le point H, projeté orthogonal de A sur la droite (BC), soit élément du segment [B,C], construire un triangle AB'C' et un carré BCR'S' satisfaisant aux conditions:

$B \in [A,B']$, $C \in [A,C']$ et $[R',S'] \subset [B',C']$ ».

La résolution de ce problème est relativement facile:

1ère étape:



Compte tenu des conditions imposées, les points R' et S' ne peuvent appartenir qu'au demi-plan de frontière (BC) ne contenant pas le point A. Or dans ce demi-plan on ne peut tracer qu'un seul carré BCR'S'. Dès lors les points B' et C' ne peuvent être que les points d'intersection de la droite (R'S') avec les droites (AB) et (AC).

Le problème admet donc au plus une solution.

2ème étape:

Dans la figure retenue les deux premières conditions requises sont automatiquement satisfaites. Reste à justifier que la troisième l'est aussi (ne pas se fier aux apparences). Pour cela considérons la projection orthogonale -notée φ- du plan sur la droite (B'C') et désignons par H' le projeté orthogonal de A par φ. Alors nous avons,

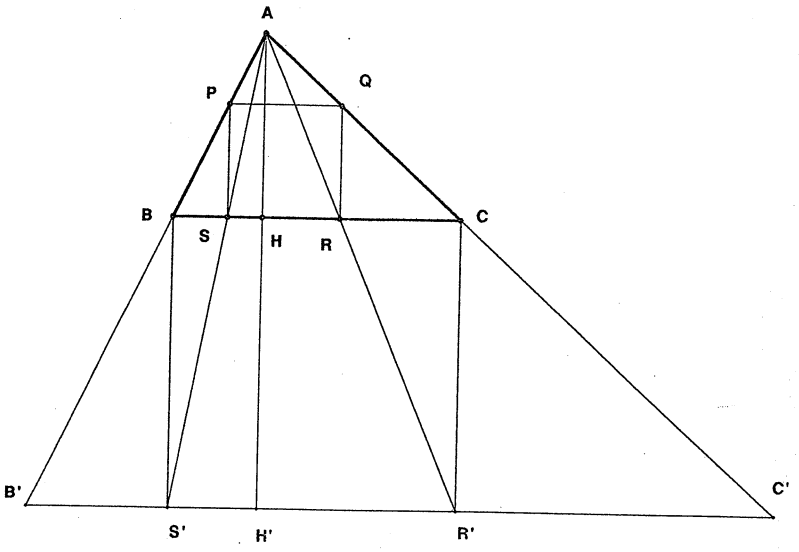
- d'une part:
  - $B \in [A,B']$, donc $\varphi(A) \in \varphi([A,B'])$, c'est à dire $S' \in [H',B']$ (i)
  - $C \in [A,C']$, donc $\varphi(C) \in \varphi([A,C'])$, c'est à dire $R' \in [H',C']$ (ii)
- d'autre part les points A, H et H' sont alignés car les droites (BC) et (B'C') sont parallèles. Ceci étant, l'homothétie h de centre A qui envoie H sur H' transforme le segment [B,C] en le segment [B',C']. Par suite, comme $H \in [B,C]$, on a $h(A) \in h([B,C])$, c'est à dire $H' \in [B',C']$.

Ainsi, des relations (i) et (ii), il résulte que R' et S' sont des points de [B',C']. On est donc assuré que la condition $[R',S'] \subset [B',C']$ est bien satisfaite.

Conclusion:

Le problème initial admet, à l'instar du problème qu'on lui a substitué, une et une seule figure-solution.

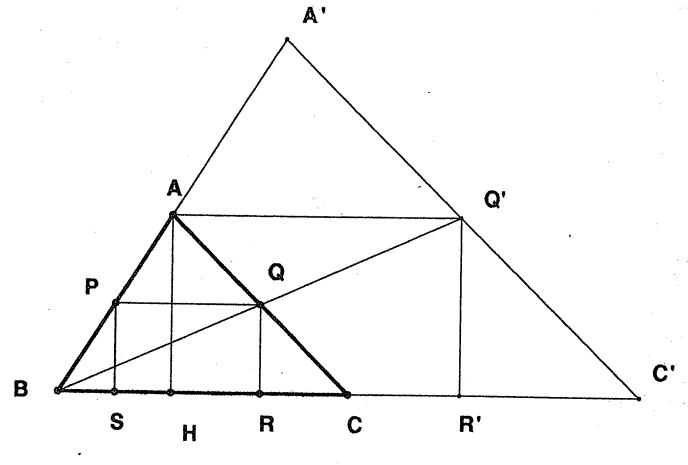
Plan de construction de la figure-solution.



- On trace le carré BCR'S' dans le demi-plan de frontière (BC) ne contenant par A.
- On place les points d'intersection B' et C' de la droite (R'S') avec les droites (AB) et (AC).
- On place les points R, S, P et Q transformés respectifs des points R', S', B et C par l'homothétie qui transforme le triangle AB'C' en le triangle ABC, en l'occurence par l'homothétie $h_{A,B' \longmapsto B}$
- On trace le carré PQRS.

Nota: la figure-solution du problème initial est constituée par le triangle ABC et le carré PQRS.

Exemple (2).



Si le problème admet une figure-solution, l'homothétie de centre B qui envoie P sur A (donc S sur H) transforme:

- le triangle ABC en le triangle A'BC'.
- le carré PQRS en le carré AQ'R'H.

de sorte que: (A'C')//(AC), $A \in [B,A']$, $Q' \in [A',C']$ et $[H,R'] \subset [B,C']$.

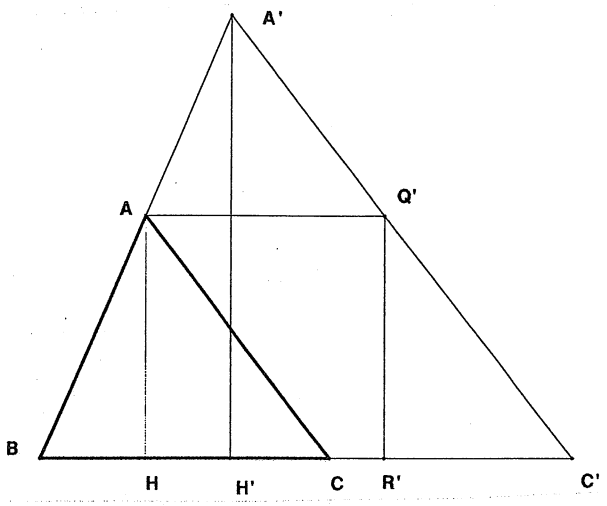
On substitue donc au problème initial le problème suivant:

« Etant donné un triangle ABC tel que le projeté orthogonal H du point A sur la droite (BC) soit élément du segment [B,C], construire un triangle A'BC' et un carré AQ'R'H satisfaisant aux conditions:

$(A'C')//(AC)$, $A\in[B,A']$, $Q'\in[A',C']$ et $[H,R']\subset[B,C']$ »

La résolution de ce problème de remplacement est assez facile.

1ère étape.



• La condition $[H,R']\subset[B,C']$ entraîne $(BC')\perp(AH)$ puis $(BC')//(BC)$ car $(AH)\perp(BC)$.

Donc le point C' ne peut appartenir qu'à la demi-droite [BC).

• Les trois autres conditions imposées font que Q' ne peut être qu'un point du secteur angulaire ABC. On ne peut donc tracer qu'un seul carré AQ'R'H. Dès lors les points A' et C' ne peuvent être que les points d'intersection des droites (BA) et (BC) avec la parallèle à (AC) passant par Q'.

Le problème de remplacement admet donc au plus une solution.

2ème étape.

Dans la figure retenue, les trois premières conditions requises sont automatiquement satisfaites. Reste à justifier que la quatrième condition $[H,R']\subset[B,C']$ l'est aussi. Pour cela, introduisons le point H' projeté orthogonal de A' sur la droite (BC). Il est clair que les points H et R' projetés orthogonaux sur (BC) des points A et Q' appartiennent respectivement aux segments [H',B] et [H',C'].

Par ailleurs, l'homothétie h de centre B qui envoie A sur A' envoie aussi C sur C' et H sur H'. Comme H appartient (par hypothèse) au segment [B,C], on a: $h(H)\in h([B,C])$, c'est à dire $H'\in[B,C']$.

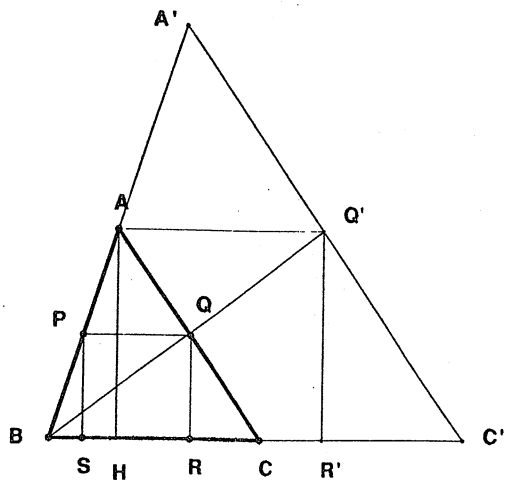
Par suite, des relations $H\in[H',B]$ et $R'\in[H',C]$, il résulte que H et R' sont des éléments du segment [B,C']. La condition $[H,R']\subset[B,C']$ est ainsi effectivement vérifiée.

Le problème de remplacement admet donc une et une seule figure-solution.

Conclusion.

Le problème initial admet, à l'instar du problème qu'on lui a substitué, une et une seule figure-solution.

Plan de construction de la figure-solution.

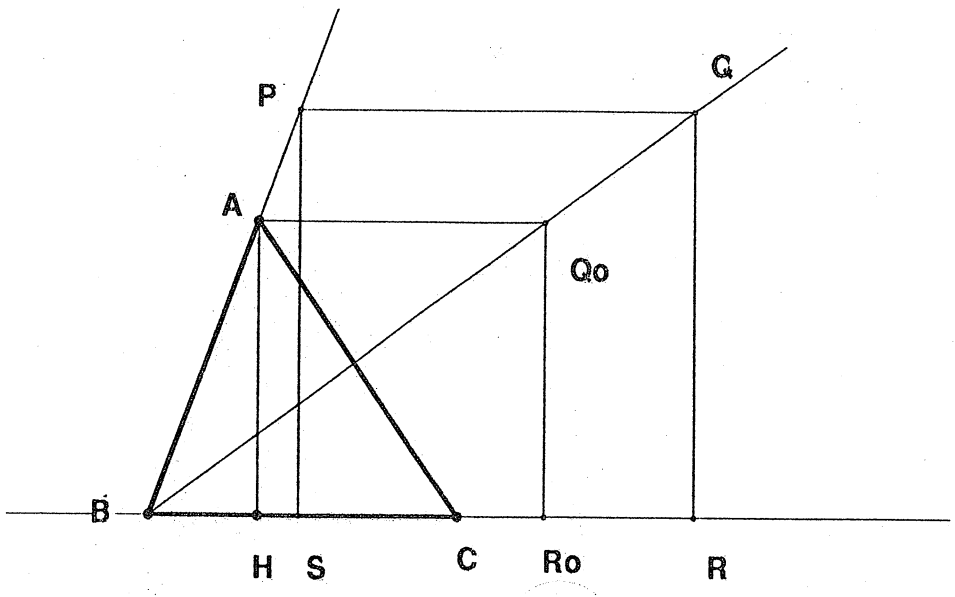


- On trace le carré AQ'R'H où Q' est un point du secteur angulaire ABC.
- On place les points d'intersection A' et C' des droites (BA) et (BC) avec la parallèle à la droite (AC) menée par le point Q'.
- On place les points Q, R, P et S transformés respectifs des points Q', R', A et H par l'homothétie qui transforme le triangle A'BC' en le triangle ABC, en l'occurence par l'homothétie $h_{B,A' \longmapsto A}$.

METHODE N° 2 (voir alinéa [2])

1ère étape.

On considère le problème intermédiaire suivant:
« Etant donné un triangle ABC tel que le projeté orthogonal H de A sur la droite (BC) soit élément du segment [B,C], construire un carré PQRS satisfaisant aux conditions: P∈[BA), S∈[BC) et S∈[B,R] »



Ce problème a, de façon évidente, une infinité de figures-solutions. Les carrés PQRS entrant dans la constitution de ces figures sont les transformés du carré AQ_0R_0H par les homothétoes positives de centre B.

Lorsque P décrit la demi droite]BA), le lieu géométrique des points Q est la demi-droite $]BQ_0)$.

Ceci dit, étant donné que le bipoint (A,Q_0) a même direction et même sens que le bipoint (B,C), le point Q_0 appartient au secteur angulaire ABC. Par conséquent la demi-droite $]BQ_0)$ et le segment [A,C] ont un point commun et un seul.

Dès lors, si le problème initial admet une figure-solution, dans cette figure:

- le point Q ne peut-être que le point commun à $]BQ_0)$ et [A,C].
- les points P, Q, R et S ne peuvent être respectivement que les transformés des points A, R_0 et H par l'homothétie de centre B qui envoie Q_0 sur Q.

Le problème posé admet donc au plus une solution.

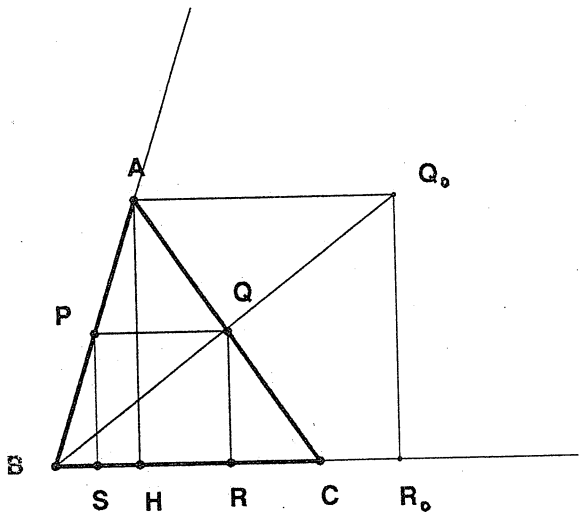
2ème étape. (On contrôle si les points P, Q, R et S précédemment retenus sont effectivement éléments d'une figure solution du problème).

- Le quadrilatère PQRS, transformé du carré AQ_0R_0H par l'homothétie $h_{B,Q_0 \longmapsto Q}$, est donc un carré.
- Le point Q étant élément du segment [A,C] on est assuré que les points P et R, puis le point S sont respectivement éléments des segments [A,B], [H,C] et [H,B].
- De plus des relations $R \in [H,C]$, $S \in [H,B]$ et $H \in [B,C]$ on déduit $[R,S] \subset [B,C]$.

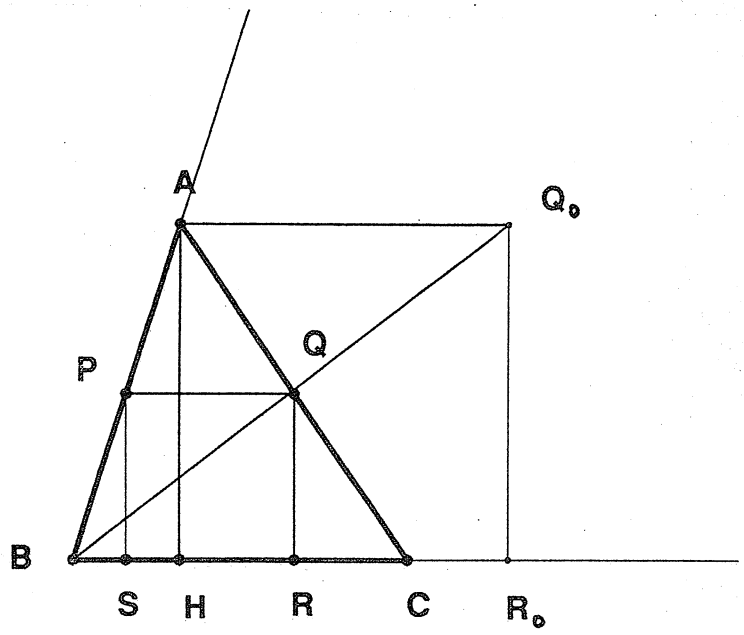
Le carré PQRS vérifie ainsi toutes les conditions imposées.

Conclusion.

Le problème initial admet une et une seule figure-solution.



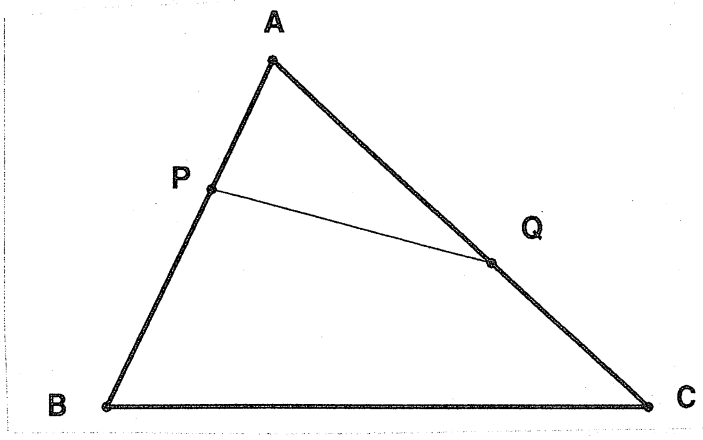
Plan de construction de la figure-solution.



- On trace le carré AQ_0R_0H où Q_0 est un point du secteur angulaire ABC.
- On place le point Q commun au segment [A,C] et la demi-droite $[BQ_0]$
- On construit le carré PQRS transformé du carré AQ_0R_0S par l'homothétie de centre B qui envoie Q_0 sur Q.

EXERCICE 4

Etant donné un triangle ABC,

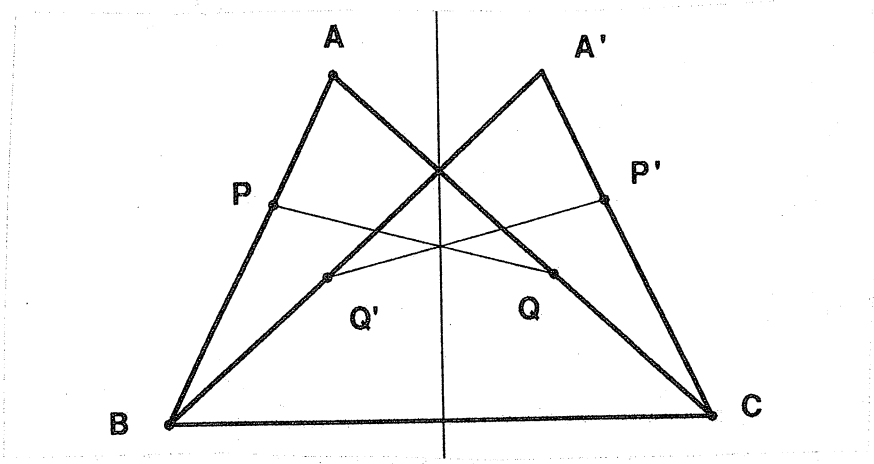


Construire un segment [P,Q] satisfaisant aux conditions suivantes:

$P \in [A,B]$ (1) , $Q \in [A,C]$ (2) et $BQ = PQ = QC$ (3)

a) Remarques préliminaires.

1-On peut réduire l'étude du problème au cas où le triangle ABC est tel que $AB \leq AC$.



En effet, soit un triangle ABC tel que AB > AC, la médiatrice Δ de [B,C], A' le transformé de A par la réflexion σ_Δ. Le triangle A'BC est alors tel que $A'B \leq A'C$.

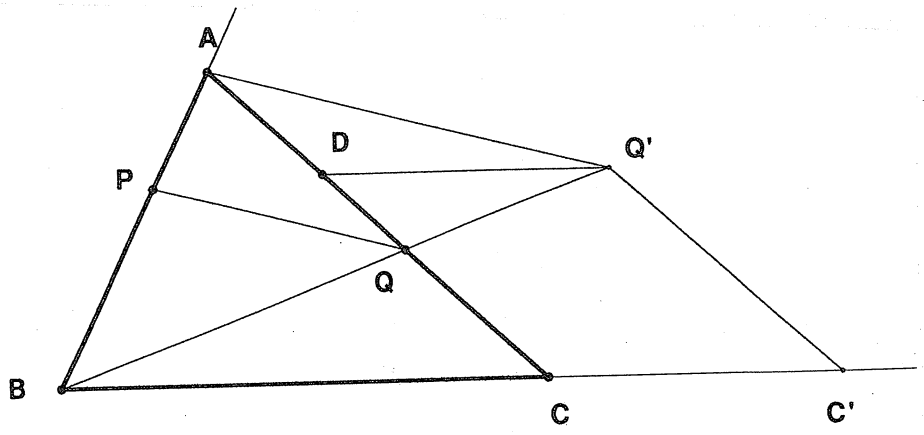
Ceci dit, compte tenu de ce que la réflexion σ_Δ est une isométrie:

- Si le segment [P,Q] est un constituant d'une figure-solution du problème pour le triangle ABC alors le segment $\sigma_\Delta([P,Q])$ est un constituant d'une figure solution du problème pour le triangle A'BC.

■ Réciproquement, si le segment [P',Q'] est un constituant d'une figure-solution du problème pour le triangle A'BC alors le segment $\delta_\Delta([P',Q'])$ est un constituant d'une figure-solution pour le triangle ABC.

Autrement dit, le problème concernant le triangle ABC et celui concernant le triangle A'BC ont, à la réflexion δ_Δ près, les mêmes figures-solutions.

2-Les conditions imposées aux points P et Q font que l'on connaît la direction et le sens des bipoints (B,P) et (C,Q). Par contre on ignore quelle est leur longueur.



Ce constat nous suggère l'idée de construire l'image du quadrilatère BPQC par une homothétie positive.

On choisit ici une homothétie de centre B qui envoie P sur A. (Son rapport est supérieur à 1). Si le problème posé admet une figure-solution alors cette homothétie transforme le quadrilatère BPQC en le quadrilatère BAQ'C' où:

- $\overrightarrow{BC'} = \alpha\overrightarrow{BC}$ avec $\alpha \geq 1$
- le bipoint (C',Q') a même direction et même sens que le bipoint (C,A) et même longueur que le bipoint (B,A).
- le point Q' appartient à l'intersection -notée $\mathfrak{S}$- du secteur angulaire ABC et du demi-plan de frontière (AC) ne contenant pas B.
- AQ' = BA.

b) Problème de remplacement.

On remplace le problème posé par le problème suivant -dit problème bis- :

« Soit un triangle ABC, D le point de la demi-droite [CA) tel que CD = BA et $\mathfrak{S}$ l'intersection du secteur angulaire ABC et du demi-plan de frontière (AC) ne contenant pas le point B. Construire un quadrilatère BAQ'C' satisfaisant aux conditions:

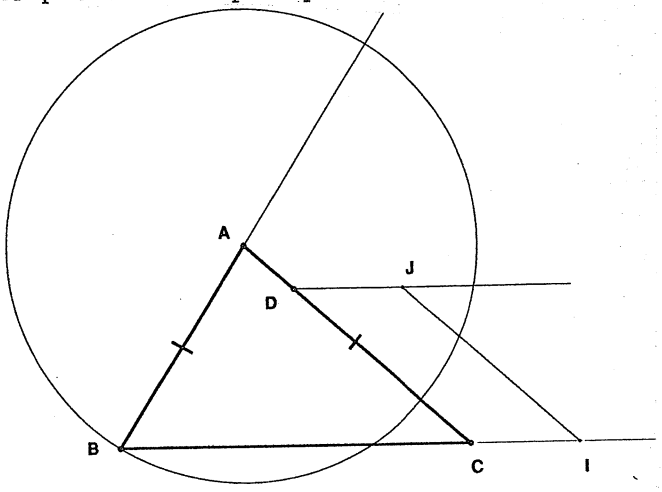
BC' = αBC avec $\alpha \geq 1$ (1), C'Q' = CD (2), $Q' \in \mathfrak{S}$ (3) et AQ'= BA (4) »

Conformément à la remarque (1) ci-dessus nous allons résoudre ce problème dans le cas où le triangle ABC est tel que AB ≤ AC.

1ère étape: (voir alinéa [2])

On décompose le problème-bis en deux problèmes intermédiaires.

Dans le premier, on ne prend en compte que les conditions (1) et (2).



Ce problème admet une infinité de quadrilatère BAQ'C' solutions.

- le lieu des points C' est la demi-droite [CI) où I est le point de la demi-droite [BC) n'appartenant pas au segment [B,C].
- le lieu des points Q' est alors la demi-droite [DJ) transformée de la demi-droite [CI) par la translation $t_{(C,D)}$.

Dans le deuxième, on ne prend en compte que les conditions (1), (3) et (4).

Ce problème admet une infinité de quadrilatères BAQ'C' solutions.

- le lieu des points C' est la demi-droite [CI).
- le lieu des points Q' est l'arc de cercle Γ intersection du cercle $\mathcal{C}$ de centre A qui passe par B et de l'ensemble $\mathcal{E}$ défini plus haut.

Par suite, si ce problème-bis admet une figure-solution, dans cette figure:

- le point Q' ne peut être qu'un point de l'ensemble $\Gamma \cap [DJ)$.
- le point C' ne peut être que le transformé de Q' par la translation $t_{(D,C)}$.

En remarquant que AD = AC - AB, l'ensemble $\Gamma \cap [DJ)$ est:

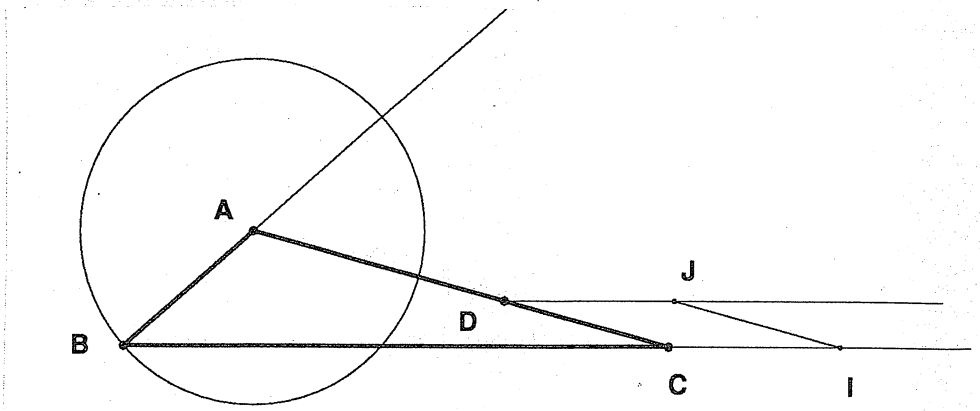
- Réduit à un point lorsque AB ≤ AC ≤ 2AB.

  En effet dans ce cas (voir figure ci-dessus),

  Le point D est "intérieur" au cercle $\mathcal{C}$ car AD < AB;
  donc [DJ) coupe $\mathcal{C}$ en un seul point.

  La demi-droite [DJ) est contenue dans $\mathcal{E}$;
  donc [DJ) coupe l'arc Γ en un seul point.

• Vide lorsque AC > 2AB.



En effet, la distance de A à la demi-droite [CJ) est AD car $AD = \inf\{AM \in \mathbb{R}+ \mid M \in [DJ)\}$. Dans le cas présent, on a: AD > AB.

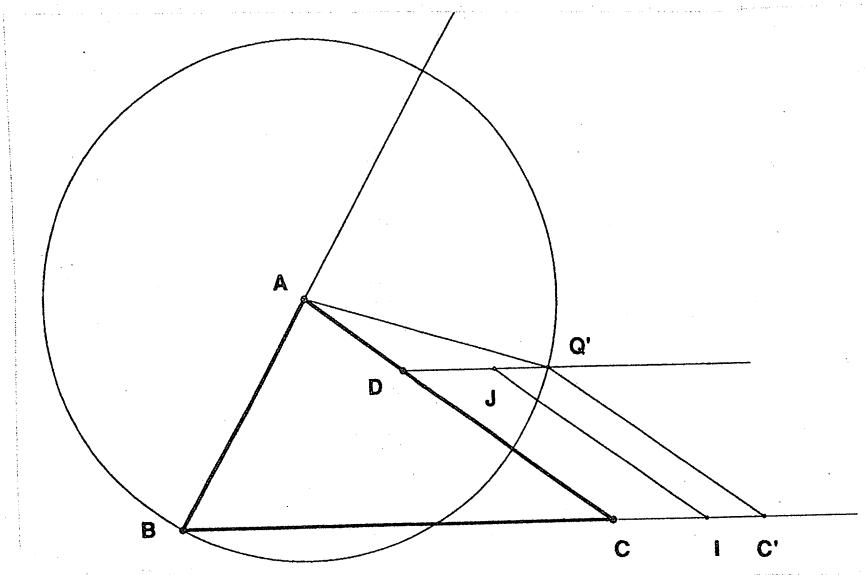
La demi-droite [DJ) est donc "extérieure" au cercle $\mathcal{C}$. D'où le résultat annoncé.

Ainsi le problème-bis:

- admet au plus une solution lorsque $AB \leq AC \leq 2AB$.
- n'admet pas de solution lorsque $AC > 2AB$..

2ème étape.

Dans le cas où $AB \leq AC \leq 2AB$ reste à contrôler si les points Q' et C' précédemment retenus sont effectivement des éléments d'une figure-solution.



Ici il s'agit d'une formalité:

• De $Q' \xmapsto{t_{(D,C)}} C'$ on tire $\overrightarrow{Q'C'} = \overrightarrow{DC}$, puis $\overrightarrow{C'Q'} = \overrightarrow{CD}$ (2)

• De $Q' \in [DJ)$ et $Q' \xmapsto{t_{(D,C)}} C'$ on déduit: $C' \in t_{(D,C)}([DJ))$
c'est à dire $C' \in [DI)$ (1)

• De $Q' \in \Gamma$ on déduit d'une part: $Q' \in \mathcal{C}$ (3), d'autre part: AQ' = AB (4)

Ainsi le quadrilatère BAQ'C' vérifie bien les quatre conditions imposées.

Le problème-bis a donc, dans le cas où $AB \leq AC \leq 2AB$, une et une seule solution.

c) Retour au problème initial.

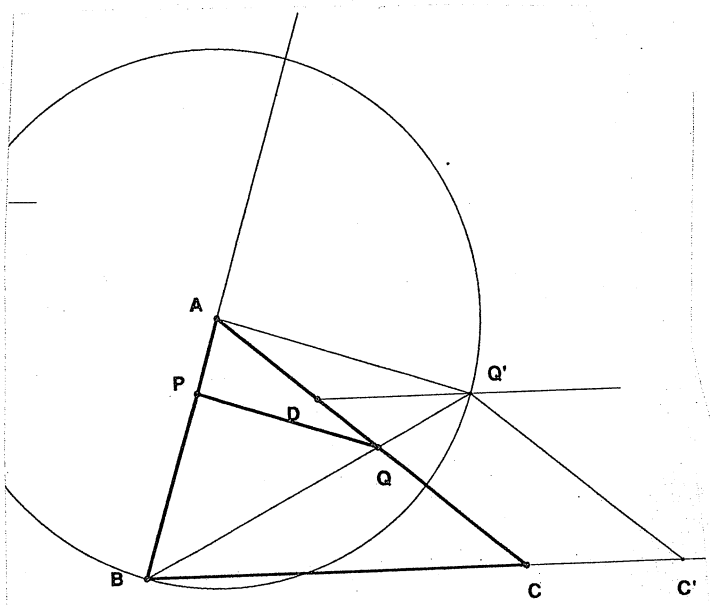
A l'issue du problème-bis, le problème initial:

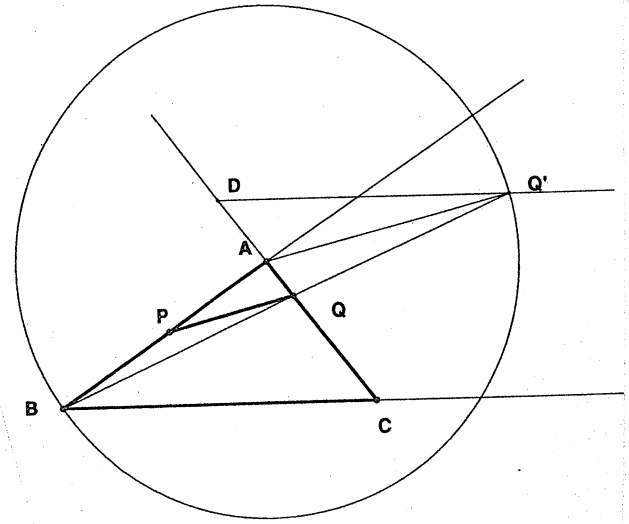
- admet une et une seule solution lorsque $AB \leq AC \leq 2AB$.
- n'admet pas de solution lorsque $AC > 2AB$.

Ceci étant, compte tenu de la remarque (1), on peut affirmer que le problème initial:

- admet une et une seule solution lorsque $AB \leq AC \leq 2AB$ ou $AC \leq AB \leq 2AC$.
- n'admet pas de solution lorsque $AC > 2AB$ ou $AB > 2AC$.

Plan de construction de la figure-solution.





- On place le point D de la demi-droite [CA) tel que CD = AB.
- On trace la demi-droite [DJ).
- On trace l'arc de cercle Γ.
- On place le point Q' commun à Γ et à [DJ).
- On place le point Q commun à [BQ') et [A,C].
- On place le point P transformé de A par l'homothétie $h_{B,Q' \longmapsto Q}$
- On trace le segment [P,Q].