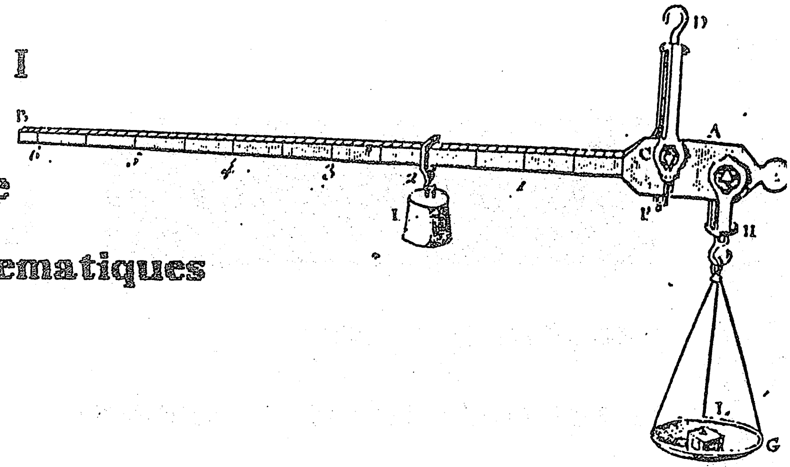
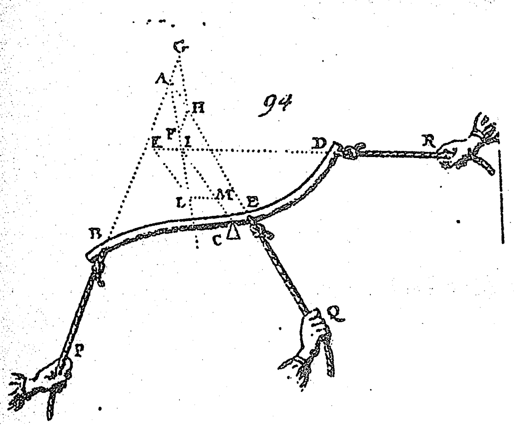
Université de Bordeaux I

Institut de Recherche
sur l'Enseignement des Mathematiques
351, cours de la Libération
33405 TALENCE CEDEX



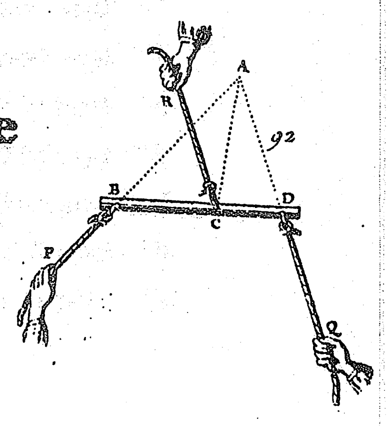
La notion d'EQUILIBRE

(BARYCENTRE et EQUILIBRES, Version 2)



Groupe de Geometrie

Bordeaux 90



ISSN N° 0750-0807

MARS 1990

Introduction

LE BARYCENTRE : un outil spécifique

Partie A

BARYCENTRE et EQUILIBRES

VIII-EXEMPLES DE FONCTIONNEMENT DE L'OUTIL BARYCENTRE ET EQUILIBRE

1° Exemple 1 (I 1ère S) <u>Etude d'une figure particulière</u>

2° Généralisation de l'exemple 1

3° Céviennes

4° Cinq exercices proposés dans (I 1ère S)

5° Exemple 2: Le problème 26

6° Exemple 3: Question de milieux (I 1èreS)

7° Exemple 4: D'après Tangente n° 2

8° Exemple double

9° Exemple 5: Bonnet, Joussein, Robl.

Partie B

MISE A L'ESSAI

- Eléments de cours
- Exercices
- Déroulement
- Tests
- Taux de réussite
- Conclusions

Partie C

ANNEXES

ANNEXE I : Essai de définition sans le calcul vectoriel

ANNEXE II : Définition complexe dans le plan

ANNEXE II : Extrait d'une publication de Y. Hellegouarch dans "Revue de Mathémathiques Spéciales" (Editions Vuibert)

ANNEXE IV : Théorisation

Introduction

I - Un état des lieux

"C'est une question d'équilibre"
Francis Cabrel

1-Actuellement le barycentre semble être un à-côté , *une simple dépendance du calcul vectoriel*, tant dans ses caractérisations que lors des manipulations que nécessitent son usage.

2-Dans les manuels, le chapitre "BARYCENTRE", lorsqu'il est distinct, conduit principalement, en Seconde et Première, à des exercices sur le calcul vectoriel et en Terminale sur la fonction numérique de Leibniz.
Peu exploité, il apparaît facile d'en faire l'impasse.

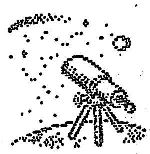
3-Dans les problèmes l'utilisation du barycentre se réduit trop souvent à des vérifications d'alignement et/ou de concours, utilisant essentiellement les deux propriétés suivantes:
- G, barycentre de A et B, est un point de (AB).
- G, barycentre de A, B et C, peut s'obtenir par plusieurs barycentres partiels.

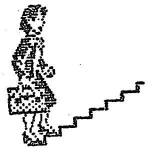
La conservation du barycentre est peu utilisée.

4-*Les caractérisations privilégient* G par rapport à A et B, Il est alors difficile de "retourner" les relations, la seule possibilité étant la modification d'écritures vectorielles.

5-*L'image mentale* du barycentre est souvent insuffisante pour permettre la traduction d'une situation en termes de barycentre.

6-Les *notations* sont souvent *lourdes*, peu lisibles et peu maniables.





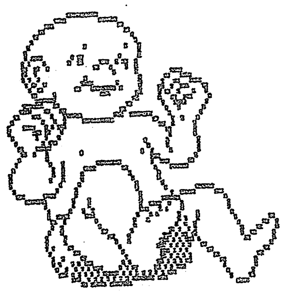
II - Les objectifs et la démarché

1-La volonté *d'aborder des problèmes en termes de barycentre* conduit d'abord à tenter d'éliminer les difficultés rencontrées dans son usage. Il s'agira donc d'*améliorer l'outil* "barycentre" en le rendant plus perceptible, plus disponible et plus maniable.

2-Pour *obtenir des manipulations* vectorielles *plus aisées*, on peut rechercher une caractérisation (vectorielle) plus symétrique du barycentre.

3-D'autre part, le désir de *rendre plus sensible le barycentre* conduit à lui associer une situation physique et sa représentation sur un schéma traduisant l'équilibre réalisé et le visualisant.
Ce schéma d'équilibre pourra alors être associé à plusieurs traductions barycentriques de la même situation.

4-Il serait également souhaitable de *disposer d'une notation plus lisible*: on la choisira de façon à permettre une modification des coefficients et aussi, la plus légère possible.



III - La génèse[1]

La décision de produire ce document est venue d'un désir de structurer divers travaux des membres du Groupe de Géométrie:

- d'une part, dans le cadre du C. P. R. de Bordeaux sur le barycentre et son usage dans la résolution des problèmes,

- d'autre part lors du travail de l'IREM de Bordeaux sur la diversité des angles d'attaque et des outils à mettre en oeuvre lors de la résolution de problèmes en vue, du document "Cinq problèmes de Géométrie" (Bordeaux, 1988).

Mais auparavant, déjà, la rédaction du chapitre "Barycentre" d'un ouvrage de Seconde, avait donné lieu à des discussions, parfois vives, sur l'introduction du barycentre comme point d'équilibre en liaison avec un schéma d'équilibre associé.

C'est en insistant sur ce point (qui fut à l'époque abandonné) que l'on a pu mettre en place la notion d'équilibre telle qu'elle est présentée dans ce document.

C'est à l'épreuve des résolutions de problèmes que, progressivement, il apparut nécessaire de:

- simplifier les notations,
- d'effectuer des opérations sur les équilibres,
- de relier les configurations aux équilibres.

1 "L'agenaise" vogue sur le Canal du Midi

IV - Présentation du document

Le document "BARYCENTRES et EQUILIBRES" réalisé par le Groupe de Géométrie de l'IREM de Bordeaux, présente, à partir de la notion de barycentre, celle d'équilibre et son utilisation dans la résolution de problèmes.

Le barycentre est introduit de façon habituelle à l'aide de la fonction vectorielle de Leibniz.

Cette présentation est destinée à permettre à tous ceux qui sont déjà familiarisé avec le barycentre de voir dans cette notion d'équilibre la prise en compte de leurs connaissances. Elle reste en accord avec les programmes actuels du second cycle (voir en Annexe: Programmes).

On pourra donc voir dans la notion d'équilibre, une notion qui intègre celle de barycentre et permet de revenir à celle-ci en cas de nécessité.

Une première présentation de ce travail a été faite le jeudi 26 mai 1988 au Colloque Inter-IREM de Géométrie (34 Mèze) organisée (avec maëstria) par l'IREM de Montpellier , près du bassin de τ.

Les encouragements prodigués au groupe à cette occasion ont conforté celui-ci dans la volonté d'approfondir le travail entrepris et d'envisager si possible d'autres directions de recherche.

Partie A

COURS DE MATHÉMATIQUES, À L'USAGE DU CORPS ROYAL DE L'ARTILLERIE.

TOME QUATRIÈME,

Concernant l'application des Principes généraux de la MÉCANIQUE, à différens cas de mouvement & d'équilibre.

Par M. BÉZOUT, de l'Académie royale des Sciences & de celle de Marine, Examinateur des Élèves & des Aspirans du Corps royal de l'Artillerie, & des Gardes du Pavillon & de la Marine; Censeur royal.

PRINCIPES GÉNÉRAUX DE LA *MÉCANIQUE.*

NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

149. SOUS le nom de *Mécanique*, nous comprenons la science du Mouvement, & celle de l'Équilibre.

Il y a du mouvement dans un corps, lorsque ce corps, ou quelques-unes de ses parties sont transportées d'un lieu en un autre.

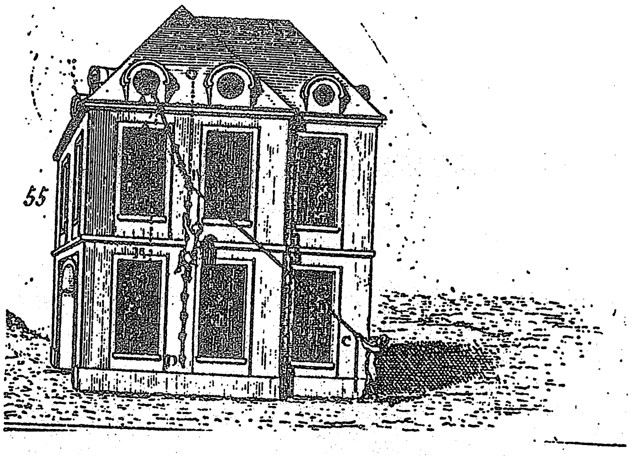
Un corps, ou l'assemblage de plusieurs parties matérielles, ne peut de lui-même se mettre en mouvement. Il ne peut être mu que par une cause, sans laquelle il peut, d'ailleurs, exister.

Cette cause, telle qu'elle soit, qui est capable de mouvoir un corps, est ce que nous appelons *Force* ou *Puissance*.

L'équilibre, est l'état d'un corps ou d'un assemblage ou *Système* de corps, qui est sollicité par plusieurs forces dont les effets sont détruits par quelques obstacles, ou se détruisent mutuellement.

Le repos, est l'état d'un corps dont les parties, non-seulement ne sont point déplacées, mais ne sont pas même sollicitées par aucune force.

Pour établir les principes du mouvement & de l'équilibre, nous imaginerons, d'abord, qu'il n'existe rien autre chose dans la Nature que les corps dont nous parlerons, & les forces que nous leur supposerons appliquées.



I - Fonction de Leibniz et barycentre

1° Quelques remarques préliminaires:

Les programmes actuels prévoient en classe de Seconde l'étude du barycentre de deux points pondérés puis d'un système de trois ou quatre points. Ceux des classes de Premières S et E ne prévoient pas une extension de la définition à un nombre fini n quelconque. C'est seulement au niveau des classes de Terminales C et E qu'apparaît la transformation de la somme $\Sigma\alpha_i.\overrightarrow{MA_i}$ dans chacun des cas

$$\Sigma\alpha_i \neq 0 \quad \text{et} \quad \Sigma\alpha_i = 0 \; .$$

En d'autres termes, le programme des Terminales C et E prévoit l'étude de la fonction vectorielle de Leibniz. C'est dans ce cadre plus général que nous allons rappeler, au début, les principes généraux. Une adaptation de ce qui suit à une classe de Seconde se fera dans une autre partie, en prenant $n = 2$ ou $n = 3$.

En première partie, les activités préliminaires ont été volontairement omises, l'objectif essentiel de ce fasciculeétant surtout d'étudier les interventions de l'outil barycentrique dans la résolution de divers problèmes.

2° Fonction vectorielle de Leibniz

a) Définition:

On se donne n points A_1, A_2, ..., A_n affectés respectivement de coefficients α_1, α_2, ..., α_n.

Les n points ne sont pas nécessairement distincts.

> La fonction vectorielle de Leibniz associée à ce système de points est l'application $\vec{f}$ du plan (ou de l'espace) dans l'ensemble des vecteurs du plan (ou de l'espace) définie par:
>
> $\vec{f} : M \longmapsto \alpha_1.\overrightarrow{MA_1} + \alpha_2.\overrightarrow{MA_2} + \ldots + \alpha_n.\overrightarrow{MA_n}$

b) Propriétés

> Soit M et N des points:
>
> $\vec{f}(M) - \vec{f}(N) = (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n).\overrightarrow{MN}$

Cette relation s'obtient immédiatement avec la formule de Chasles.

* Il en découle:

> La fonction vectorielle de Leibniz est constante si et seulement si
>
> $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = 0$

* Si, maintenant, la somme des coefficients est non nulle, l'application $\vec{f}$ est bijective.

D'après la propriété précédente $\vec{f}$ est injective. De plus si $\vec{u}$ est un vecteur quelconque et O un point fixe:

$$\vec{f}(M) = \vec{u} \iff \vec{f}(O) - \vec{u} = (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n).\overrightarrow{OM}$$

$$\iff \overrightarrow{OM} = \frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n}.(\vec{f}(O) - \vec{u})$$

Cette dernière égalité définit un seul point M et par suite l'équation $\vec{f}(M) = \vec{u}$ a une solution unique, d'où:

> Si $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n \neq 0$
>
> alors la fonction vectorielle de Leibniz est bijective.

3° Définition du barycentre et premières propriétés.

a) Définition

On appelle barycentre du système $A_1, A_2, \ldots, A_n$ affectés respectivement de coefficients $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ de somme non nulle

l'unique point G tel que:

$$\alpha_1.\overrightarrow{GA_1} + \alpha_2.\overrightarrow{GA_2} + \ldots + \alpha_n.\overrightarrow{GA_n} = \vec{0}$$

b) Premières propriétés

Le barycentre d'un système de points ne dépend pas de l'ordre dans lequel on énonce les points du système.

On ne change pas le barycentre d'un système de points lorsqu'on multiplie les coefficients par un même réel non nul.

Cette propriété permet alors de remplacer la suite des coefficients par une suite proportionnelle.

A cet effet, au lieu de la notation traditionnelle:

G barycentre du système $\{(A_1,\alpha_1)\ ;\ (A_2,\alpha_2)\ ;\ \ldots\ ;(A_n,\alpha_n)\}$,

on adoptera la notation:

G barycentre de

A_1	A_2	...	A_n
α_1	α_2	...	α_n

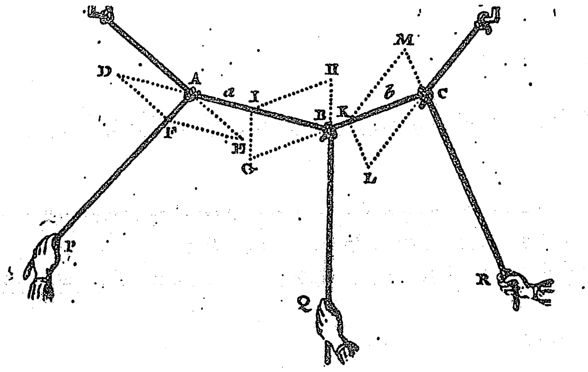
(Cela suppose $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n \neq 0$)

Cette notation aura l'avantage de faire apparaître un tableau de proportionnalité lorsqu'on aura besoin de remplacer les coefficients par des coefficients proportionnels.

Exemple:

G barycentre de

A	B	C	D	
2	-1	1	4	
1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	2	← Si on veut le coefficient de A égal à 1.
$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	← Si on veut la somme des coefficients égale à 1.



II - Propriétes du barycentre

1° Caractérisation du barycentre

Le théorème suivant découle immédiatement de la propriété:

$\vec{f}(M) - \vec{f}(N) = (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n).\overrightarrow{MN}$ pour tous points M et N.

Théorème:

> Soit un système (A_1,α_1), (A_2,α_2), ..., (A_n,α_n)
> tel que $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n \neq 0$ et un point G.
>
> Les propositions suivantes sont équivalentes:
>
> **[1]** G est barycentre de $\begin{array}{c|c|c|c} A_1 & A_2 & \ldots & A_n \\ \hline \alpha_1 & \alpha_2 & & \alpha_n \end{array}$
>
> **[2]** Pour tout point M:
> $(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n).\overrightarrow{MG} = \alpha_1.\overrightarrow{MA_1} + \ldots + \alpha_n.\overrightarrow{MA_n}$
>
> **[3]** Il existe un point P tel que:
> $(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n).\overrightarrow{PG} = \alpha_1.\overrightarrow{PA_1} + \ldots + \alpha_n.\overrightarrow{PA_n}$

Dans la pratique:

On utilise

[2] sous la forme:

Si G est barycentre de ... alors pour tout point M ...

[3] sous la forme:

S'il existe un point P ... alors G est barycentre ...

Remarques:

□ La propriété $\boxed{2}$ signifie que pour tout point M on a:

$$\vec{f}(M) = (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n).\overrightarrow{MG}$$

Autrement dit, la fonction vectorielle de Leibniz définie par le système: $\{(A_1,\alpha_1)\ ;\ (A_2,\alpha_2)\ ;\ \ldots\ ;(A_n,\alpha_n)\}$ est également définie par $\{(G\ ,\ \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n)\}$

□ Un point origine O étant fixé, en prenant M = O, on obtient:

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\alpha_1}{s}.\overrightarrow{OA_1} + \frac{\alpha_2}{s}.\overrightarrow{OA_2} + \ldots + \frac{\alpha_n}{s}.\overrightarrow{OA_n} \qquad \text{où} \quad s = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$$

Si on choisit pour M le point A_1 par exemple, on a:

$$\overrightarrow{A_1G} = \frac{\alpha_2}{s}.\overrightarrow{A_1A_2} + \frac{\alpha_3}{s}.\overrightarrow{A_1A_3} + \ldots + \frac{\alpha_n}{s}.\overrightarrow{A_1A_n}$$

2° Coordonnées du barycentre

Soit $(O,\vec{i},\vec{j})$ un repère du plan et G le barycentre de A_1, A_2, ..., A_n affectés des coefficients α_1, α_2, ..., α_n $(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n \neq 0)$.

D'après la remarque précédente on a:

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\alpha_1}{s}.\overrightarrow{OA_1} + \frac{\alpha_2}{s}.\overrightarrow{OA_2} + \ldots + \frac{\alpha_n}{s}.\overrightarrow{OA_n} \qquad \text{où} \quad s = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$$

Si A_k a pour coordonnées $(x_k\ ,\ y_k)$ dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$, les coordonnées de G dans ce repère sont $(x_G\ ,\ y_G)$ avec:

$$\boxed{x_G = \frac{\alpha_1 x x_1 + \ldots + \alpha_2 x x_n}{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n} \qquad y_G = \frac{\alpha_1 x y_1 + \ldots + \alpha_2 x y_n}{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n}}$$

Remarque:

Si on avait travaillé dans l'espace muni d'un repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on aurait obtenu des résultats analogues moyennant l'adjonction d'une troisième coordonnée.

Chaque coordonnée est la moyenne pondérée des coordonnées correspondantes des n points.

Le point G apparaît bien ainsi comme le point moyen du système pondéré des n points.

3° <u>Cas du barycentre de deux points ou de trois points. Exemples de constructions</u>

a) <u>Cas de deux points</u>:

Soit A et B deux points distincts du plan ou de l'espace et G barycentre du système $\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline \alpha & \beta \end{array}$ avec $\alpha + \beta \neq 0$

Alors, d'après la propriété $\boxed{2}$, on peut écrire, en choisissant $M = A$, $A_1 = A$ et $A_2 = B$:

$$\boxed{\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta}.\overrightarrow{AB}}$$

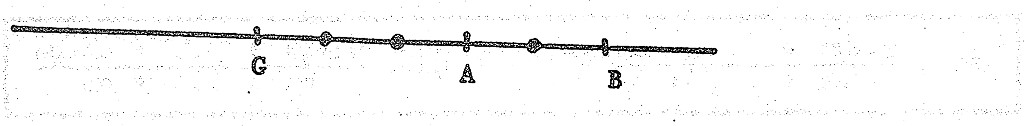
Ainsi, <u>le point G est le point de la droite (AB) qui a pour abscisse</u> $\frac{\beta}{\alpha + \beta}$ <u>dans le repère (A,B)</u>.

...Ceci donne une méthode de "construction" du barycentre de deux points que nous appellerons "méthode de l'abscisse".

<u>Exemple:</u>

<u>Placer le point G barycentre de</u> $\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 5 & -3 \end{array}$

On a $\overrightarrow{AG} = \frac{-3}{5\ (-3)}.\overrightarrow{AB} = -\frac{3}{2}.\overrightarrow{AB}$



G a pour abscisse $-\frac{3}{2}$ dans le repère (A,B).

...Réciproquement: soit un point M de la droite (AB), d'abscisse x dans le repère (A,B).

Alors $\overrightarrow{AM} = x.\overrightarrow{AB}$ d'où le point M est le barycentre de $\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 1-x & x \end{array}$

On dit que:

La droite (AB) est l'ensemble des barycentres des points A et B

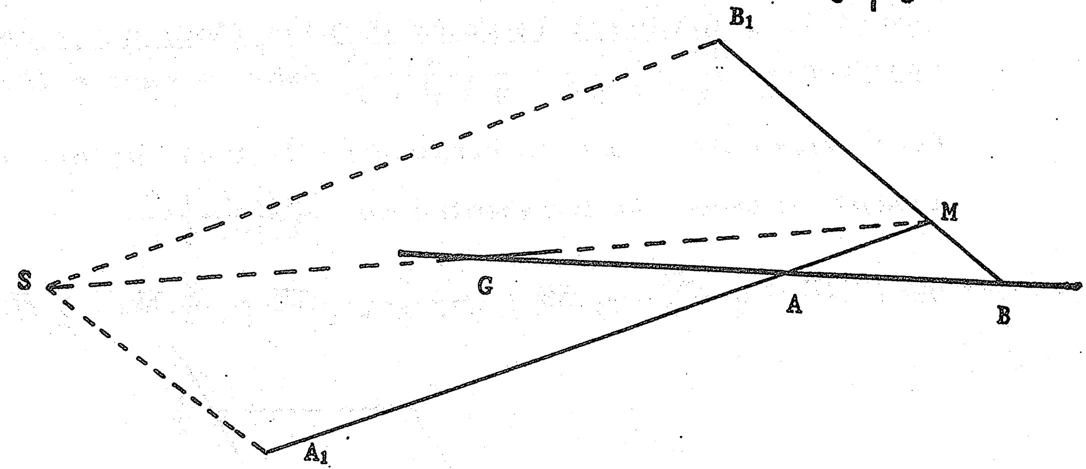
Remarquons au passage que A est le barycentre de $\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 1 & 0 \end{array}$ et B le barycentre de $\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & 1 \end{array}$

...Construction du barycentre: méthode du parallélogramme.

Toujours d'après la propriété $\boxed{2}$ on peut écrire, pour tout point M du plan: $(\alpha + \beta).\overrightarrow{MG} = \alpha.\overrightarrow{MA} + \beta.\overrightarrow{MB}$

Reprenons l'exemple précédent:

Construire le point G barycentre de $\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 5 & -3 \end{array}$



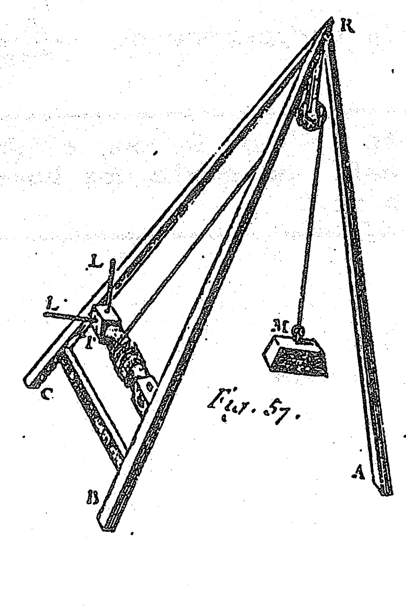
Choisissons un point M non situé sur (AB)

Pour ce point M on a: $5.\overrightarrow{MA} - 3.\overrightarrow{MB} = 2.\overrightarrow{MG}$

On construit A_1 et B_1 tels que $\overrightarrow{MA_1} = 5.\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB_1} = -3.\overrightarrow{MB}$, puis le point S tel que: $\overrightarrow{MS} = \overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MB_1}$

Ce point S est le quatrième sommet du parallélogramme A_1MB_1S.

On a alors $\overrightarrow{MS} = 2.\overrightarrow{MG}$ et les points M, S et G sont alignés. Comme G est sur la droite (AB), le barycentre cherché est l'intersection des droites (AB) et (MS).



b) <u>Cas de trois points</u>

Soit trois points A, B et C non alignés et G le barycentre de $\begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline \alpha & \beta & \gamma \end{array}$ (avec $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$)

Alors d'après la propriété $\boxed{2}$ on peut écrire

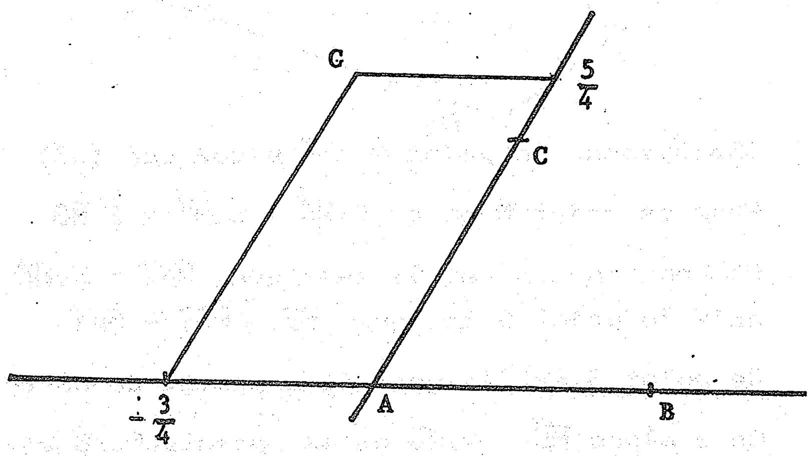
$$\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta + \gamma}.\overrightarrow{AB} + \frac{\gamma}{\alpha + \beta + \gamma}.\overrightarrow{AC}$$

<u>Ainsi le point G est le point du plan (ABC) qui a pour coordonnées</u> $\left(\frac{\beta}{\alpha + \beta + \gamma} ; \frac{\gamma}{\alpha + \beta + \gamma}\right)$ dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$

Ceci permet de placer le barycentre de trois points non alignés.

Exemple: Placer le barycentre de $\begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline 2 & -3 & 5 \end{array}$

On a $\overrightarrow{AG} = \frac{-3}{2 - 3 + 5}.\overrightarrow{AB} + \frac{5}{2 - 3 + 5}.\overrightarrow{AC} = \frac{-3}{4}.\overrightarrow{AB} + \frac{5}{4}.\overrightarrow{AC}$



...Réciproquement: soit M un point du plan (ABC). Le point M a pour coordonnées (x , y) dans le repère $(A , \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC})$ d'où

$$\overrightarrow{AM} = x.\overrightarrow{AB} + y.\overrightarrow{AC}.$$

Par suite M est le barycentre de $\begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline 1-x-y & x & y \end{array}$

Pour tous points A, B et C, non alignés, le plan (ABC) est l'ensemble des barycentres des points A, B et C.

4° <u>Un barycentre particulier</u>: <u>l'isobarycentre</u>.

a) <u>Définition</u>:

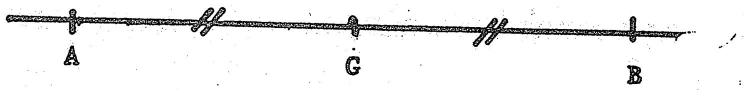
> L'isobarycentre de n points A_1, A_2, ..., A_n est le barycentre de ces points affectés du même coefficient non nul.

On peut prendre ce coefficient égal à 1. Ainsi l'isobarycentre de A_1, A_2, ..., A_n est le point G tel que: $\overrightarrow{GA_1} + \overrightarrow{GA_2} + \ldots + \overrightarrow{GA_n} = \vec{0}$

b) <u>Isobarycentre de deux points</u>:

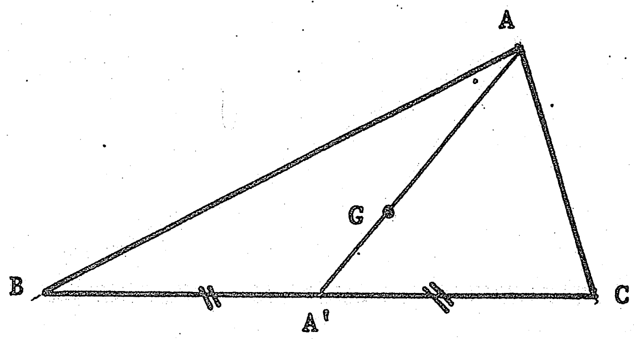
L'isobarycentre de A et B est le point G tel que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = \vec{0}$

<u>Le point G est le milieu de [A,B]</u>.



c) <u>Isobarycentre de trois points</u>:

L'isobarycentre de trois points A, B et C est le point G défini par $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.



Introduisons les milieux A', B' et C' des côtés [B,C], [C,A] et [A,B]. A' est l'isobarycentre de B et C, donc pour tout point M du plan on a: $(1 + 1).\overrightarrow{MA'} = 1.\overrightarrow{MB} + 1.\overrightarrow{MC}$. En particulier pour M = G on a: $2.\overrightarrow{GA'} = \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}$

Par suite $\overrightarrow{GA} + 2.\overrightarrow{GA'} = 0$ et G est le barycentre de $\begin{array}{c|c} A & A' \\ \hline 1 & 2 \end{array}$

<u>G appartient donc à la médiane (AA') et $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}.\overrightarrow{AA'}$</u>

c) <u>Commentaires</u>:

■ Ce résultat permet de ramener la construction du barycentre de n points à la construction de proche en proche de barycentres de deux points. Mais c'est surtout dans les problèmes de concours que son intervention est primordiale. Ce point de vue sera abondamment développé ultérieurement.

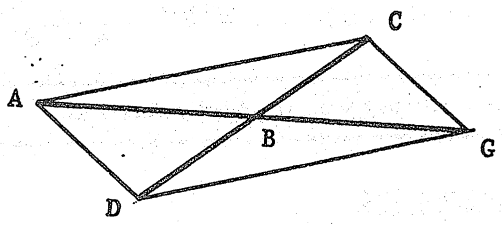
■■ <u>Un point important</u>:

Etant donné un système de points pondérés, on peut utiliser le théorème précédent de deux façons:

- soit diminuer le nombre de points en remplaçant k d'entre eux par leur barycentre;

- soit augmenter leur nombre en remplaçant, par exemple, un des points par un système de points pondérés dont il est le barycentre.

<u>Exemple</u>:



Soit G le barycentre de $\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline -1 & 2 \end{array}$ et B le milieu de [C,D].

Alors B est le barycentre de $\begin{array}{c|c} C & D \\ \hline 1 & 1 \end{array}$

d'où G est le barycentre de $\begin{array}{c|c|c} A & C & D \\ \hline -1 & 1 & 1 \end{array}$

(CADG est un parallèlogramme de centre B)

■■■ Remarquons enfin que le barycentre d'un système de n points ne change pas par adjonction d'un point auxiliaire affecté du coefficient 0:

Le barycentre de $\begin{array}{c|c|c} A_1 & \dots & A_n \\ \hline \alpha_1 & & \alpha_n \end{array}$ $(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots \alpha_n \neq 0)$

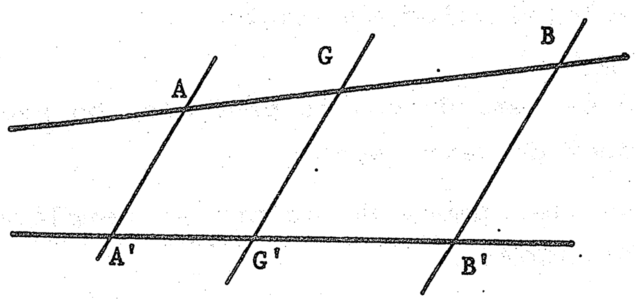
est le barycentre de $\begin{array}{c|c|c|c|c} A_1 & \dots & A_n & B & B \\ \hline \alpha_1 & & \alpha_n & \beta & -\beta \end{array}$ (B est affecté du coefficient 0!)

Ceci permet de considérer un autre barycentre partiel utilisant B affecté du coefficient β

6° <u>Action des transformations sur le barycentre</u>. (plan et espace)

a) <u>Projection et barycentre</u>.

Si G est le barycentre de A et B affectés des coefficients α et β ($\alpha + \beta \neq 0$), alors le projeté G' est le barycentre des projetés A' et B' affectés des mêmes coefficients α et β.



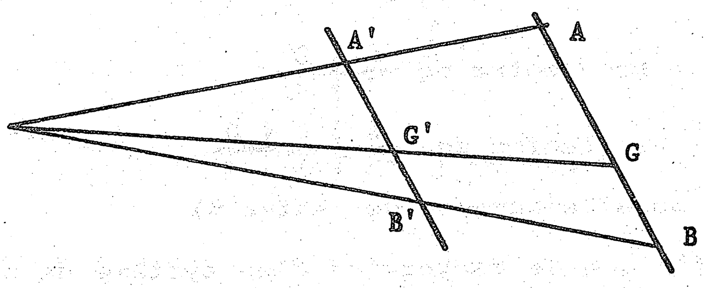
En effet, on sait que dans la configuration ci-dessus (Thalès) la projection conserve le coefficient de colinéarité de deux vecteurs.

De $\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta}.\overrightarrow{AB}$ il découle $\overrightarrow{A'G'} = \frac{\beta}{\alpha + \beta}.\overrightarrow{A'B'}$

Toute projection conserve le barycentre

b) <u>Homothétie et barycentre</u>.

Soit G le barycentre de $\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline \alpha & \beta \end{array}$ ($\alpha + \beta \neq 0$) et une homothétie de rapport k ($k \neq 0$). Elle transforme A en A', B en B' et G en G'.



Alors $\overrightarrow{G'A'} = k.\overrightarrow{GA}$ et $\overrightarrow{G'B'} = k.\overrightarrow{GB}$

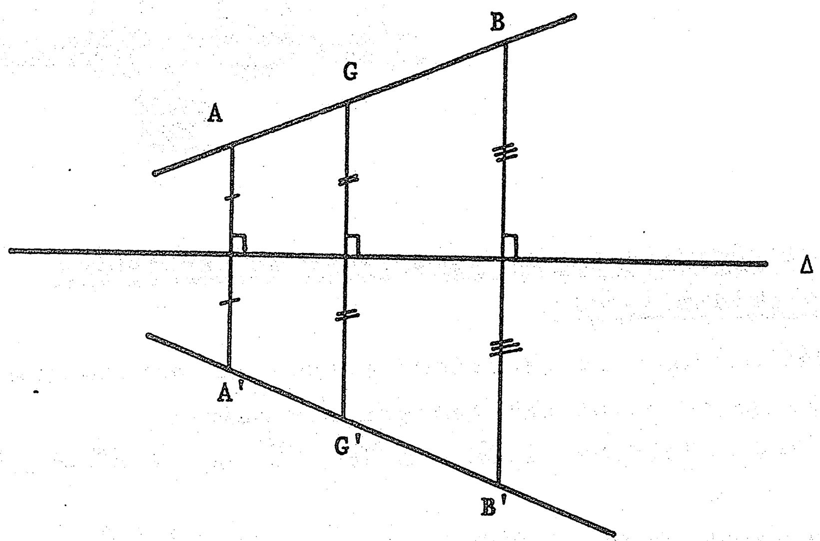
Mais $\alpha.\overrightarrow{GA} + \beta.\overrightarrow{GB} = \vec{0}$, donc $\alpha.\overrightarrow{G'A'} + \beta.\overrightarrow{G'B'} = \vec{0}$

c'est à dire: G' est le barycentre de $\begin{array}{c|c} A' & B' \\ \hline \alpha & \beta \end{array}$

Toute homothétie conserve le barycentre

c) <u>Barycentre et symétrie orthogonale</u>

Soit G le barycentre de $\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline \alpha & \beta \end{array}$ $(\alpha + \beta \neq 0)$



On désigne par A', B' et G' les symétriques des points A, B et G par rapport à la droite Δ.

Les droites (AA'), (BB') et (GG') sont parallèles.

Le point G' est donc le projeté orthogonal de G sur la droite (A'B').

Par suite G' est le barycentre de $\begin{array}{c|c} A' & B' \\ \hline \alpha & \beta \end{array}$

Toute symétrie orthogonale par rapport à une droite conserve le barycentre.

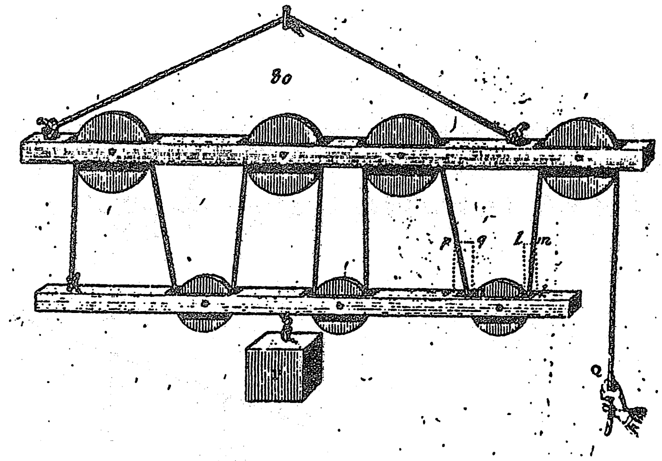
La démonstration précédente s'étend à l'espace en remplaçant la droite Δ par un plan Π.

d) <u>Barycentre et isométries</u>

Toute isométrie du plan (resp. de l'espace) est la composée de symétries orthogonales par rapport à des droites (resp. des plans). Donc,

Toute isométrie conserve le barycentre.

Remarque: Le théorème du barycentre partiel permet de de généraliser les résultats précédents au barycentre d'un nombre quelconque de points.



III - Equilibres

1° Une caractérisation plus symétrique du barycentre.

a) Le problème abordé.

Les définitions et caractérisations du barycentre privilégient le rôle de ce point par rapport aux autres.

Ainsi les relations $2.\overrightarrow{CA} + 5.\overrightarrow{CB} = \vec{0}$ ou $7.\overrightarrow{MC} = 2.\overrightarrow{MA} + 5.\overrightarrow{MB}$

font apparaître que C est barycentre de $\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 2 & 5 \end{array}$

Cependant à partir de la relation $2.\overrightarrow{CA} + 5.\overrightarrow{CB} = \vec{0}$ une transformation d'écriture pourra être nécessaire pour reconnaître

que B est le barycentre de $\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline 2 & -7 \end{array}$

mais aussi que A est le barycentre de $\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline 5 & -7 \end{array}$

Ce changement de point de vue à l'intérieur d'un même problème nécessite alors une caractérisation plus symétrique du barycentre.

La relation $7.\overrightarrow{MC} = 2.\overrightarrow{MA} + 5.\overrightarrow{MB}$ caractéristique de

"C barycentre de $\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 2 & 5 \end{array}$ ", peut s'écrire $2.\overrightarrow{MA} = -5.\overrightarrow{MB} + 7.\overrightarrow{MC}$

Elle est alors caractéristique de "A barycentre de $\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline -5 & 7 \end{array}$ "

En écrivant $5.\overrightarrow{MB} = -2.\overrightarrow{MA} + 7.\overrightarrow{MC}$,

il apparaît "B barycentre de $\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline -2 & 7 \end{array}$ "

C'est donc la relation $7.\overrightarrow{MC} - 2.\overrightarrow{MA} - 5.\overrightarrow{MB} = \vec{0}$ qui rend mieux compte qu'un des trois points est barycentre des deux autres.

b) Le résultat essentiel

Théorème

Soit A, B et C trois points, distincts, les propositions suivantes sont équivalentes:

$\boxed{1}$ Il existe un point P du plan et trois réels α, β et γ non nuls et de somme nulle tels que:

$$\alpha.\overrightarrow{PA} + \beta.\overrightarrow{PB} + \gamma.\overrightarrow{PC} = \vec{0}$$

$\boxed{2}$ A est barycentre de $\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline \beta & \gamma \end{array}$

$\boxed{3}$ B est barycentre de $\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline \alpha & \gamma \end{array}$

$\boxed{4}$ C est barycentre de $\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline \alpha & \beta \end{array}$

Démonstration:

Remarquons qu'aucune des sommes $\alpha + \beta$, $\alpha + \gamma$, $\beta + \gamma$ n'est nulle.
La relation $\alpha.\overrightarrow{PA} + \beta.\overrightarrow{PB} + \gamma.\overrightarrow{PC} = \vec{0}$ est équivalente à chacune des suivantes:

$(\beta + \gamma).\overrightarrow{PA} = \beta.\overrightarrow{PB} + \gamma.\overrightarrow{PC}$ (car $\beta + \gamma = -\alpha$)

$(\alpha + \gamma).\overrightarrow{PB} = \alpha.\overrightarrow{PA} + \gamma.\overrightarrow{PC}$ (car $\alpha + \gamma = -\beta$)

$(\alpha + \beta).\overrightarrow{PC} = \alpha.\overrightarrow{PA} + \beta.\overrightarrow{PB}$ (car $\alpha + \beta = -\gamma$)

Chacune des relations précédentes traduit qu'un des trois points est barycentre des deux autres affectés des coefficients convenables.

Par exemple l'existence d'un point P tel que
$2.\overrightarrow{PA} + 3.\overrightarrow{PB} - 5.\overrightarrow{PC} = \vec{0}$ traduira que:

A est barycentre de $\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline 3 & -5 \end{array}$, B est barycentre de $\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline 2 & -5 \end{array}$

et C est barycentre de $\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 2 & 3 \end{array}$

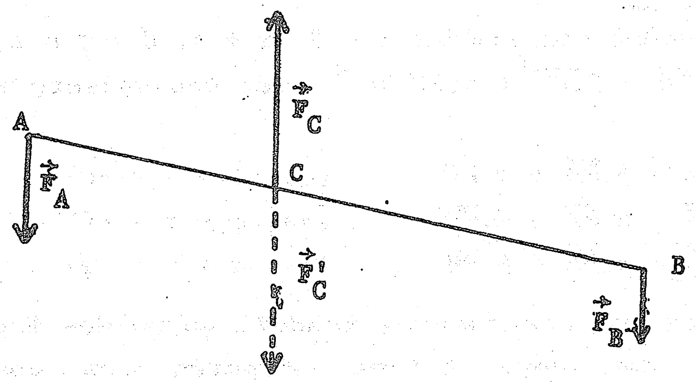
Remarques: 1) On notera l'aspect plus symétrique de "$\alpha.\overrightarrow{PA} + \beta.\overrightarrow{PB} + \gamma.\overrightarrow{PC} = \vec{0}$" par rapport aux autres caractérisations vues au II-1.
Aucun des points n'est "privilégié par rapport aux autres.

2) Notons aussi que, dans cette caractérisation, il est indispensable que la somme des coefficients soit nulle: elle privilégie donc la fonction vectorielle de Leibniz $:M \longmapsto \alpha.\overrightarrow{MA} + \beta.\overrightarrow{MB} + \gamma.\overrightarrow{MC}$ qui est constante et égale à zéro !!

3) Il est clair que le théorème précédent peut être étendu à n points <u>avec les mêmes conditions</u>. Par exemple, pour quatre points A, B, C et D,
"Il existe un point P et quatre réels α, β, γ et δ non nuls et de somme nulle tels que:
$\alpha.\overrightarrow{PA} + \beta.\overrightarrow{PB} + \gamma.\overrightarrow{PC} + \delta.\overrightarrow{PD} = \vec{0}$ " est équivalent à
"D est barycentre de $\begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline \alpha & \beta & \gamma \end{array}$ ..."
C'est une généralisation du théorème précédent (III-1° b)

c) <u>Schéma d'équilibre associé</u>

A la situation précédente (cas de trois points), on peut associer le schéma d'équilibre d'un solide soumis à trois forces parallèles.



Reprenons l'exemple du paragraphe précédent où les trois points A, B et C sont respectivement affectés des coefficients 2, 3 et -5. Imaginons deux forces $\vec{F}_A$ et $\vec{F}_B$ parallèles appliquées en A et B et d'intensités respectives 2N et 3N.

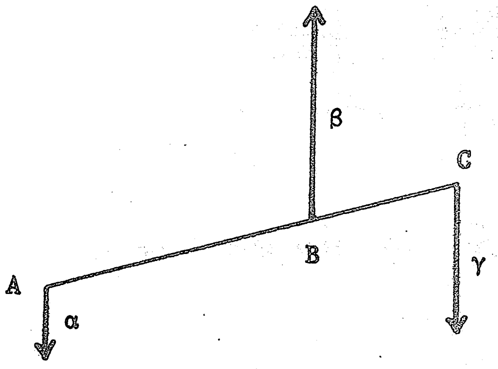
<u>La résultante de</u> $\vec{F}_A$ et $\vec{F}_B$ est une force $\vec{F'}_C$ <u>appliquée en C barycentre de</u> $\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 2 & 3 \end{array}$, parallèle à $\vec{F}_A$ et $\vec{F}_B$ et <u>d'intensité 5N</u>

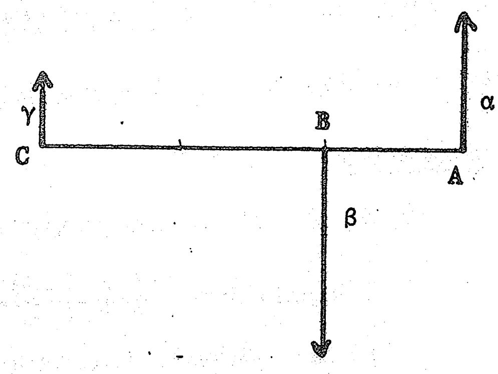
Cette force sera équilibrée par l'application en C de la force $\vec{F}_C$ telle que $\vec{F}_C = -\vec{F'}_C$

Pour traduire que $\vec{F}_C$ est de sens opposé à $\vec{F'}_C$, on dira que son intensité est -5N.

Dans le schéma précédent, chaque point est le point où <u>doit</u> être appliquée la force qui équilibre les deux autres.

De façon plus générale, étant donné trois points A, B et C affectés de coefficients α, β et γ non nuls et de somme nulle, tels que l'un soit barycentre des deux autres, on peut associer le schéma d'équilibre de trois forces parallèles et d'intensités α, β et γ.





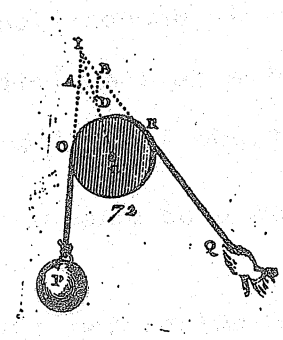
$$\alpha + \beta + \gamma = 0$$

Sur le schéma d'équilibre précédent, on peut alors lire de trois façons différentes que chaque point est le point d'équilibre des deux autres points affectés des coefficients correspondants.

Ainsi

- A est barycentre de $\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline \beta & \gamma \end{array}$
- B est barycentre de $\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline \alpha & \gamma \end{array}$
- C est barycentre de $\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline \alpha & \beta \end{array}$

Bien entendu, le schéma précédent se généralise au cas de n points par l'introduction de n forces parallèles.



2° <u>Notion d'équilibre</u>.

a) <u>Introduction</u>.

Etant donné n points $A_1, A_2, \dots, A_n$ $(n \geq 3)$ et n réels $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ <u>non nuls et de somme nulle</u>, l'illustration physique précédente nous conduit à introduire la <u>notion d'équilibre</u>:

On dira que l'on a <u>l'équilibre</u> $\left\{ \begin{array}{c|c|c|c} A_1 & A_2 & \dots & A_n \\ \hline \alpha_1 & \alpha_2 & & \alpha_n \end{array} \right\}$.

Si l'un des A_i est barycentre des $\begin{array}{|c|} A_k \\ \hline \alpha_k \end{array}$ pour $k \neq i$

<u>Exemples</u>:

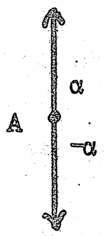
1) Si C est le barycentre de $\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 2 & -3 \end{array}$ on dira que l'on a l'équilibre $\left\{ \begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline 2 & -3 & 1 \end{array} \right\}$

Il en découle bien sûr que

B est barycentre de $\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline 2 & 1 \end{array}$ et que A est barycentre de $\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline -3 & 1 \end{array}$

2) L'équilibre $\left\{ \begin{array}{c|c|c} M & I & N \\ \hline 1 & -2 & 1 \end{array} \right\}$ traduira que I est le milieu du segment [M,N].

<u>Remarque</u>:



Dans le cas $\begin{array}{c|c} A & A \\ \hline \alpha & -\alpha \end{array}$ avec $\alpha \neq 0$, la proposition $\boxed{1}$ du théorème est vérifiée mais il est difficile de l'exploiter en terme de barycentre. On parlera cependant, de l'équilibre $\left\{ \begin{array}{c|c} A & A \\ \hline \alpha & -\alpha \end{array} \right\}$

il correspond au schéma d'équilibre de deux forces opposées appliquées en A.

Ceci nous conduit à donner une définition plus générale que celle qui a été donnée dans l'introduction.

b) Définition

> Le système $\left\{\begin{array}{c|c|c|c} A_1 & A_2 & \ldots & A_n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & & \alpha_n \end{array}\right\}$ est un équilibre
>
> si et seulement si
>
> la fonction vectorielle de Leibniz qui lui est associée est nulle.

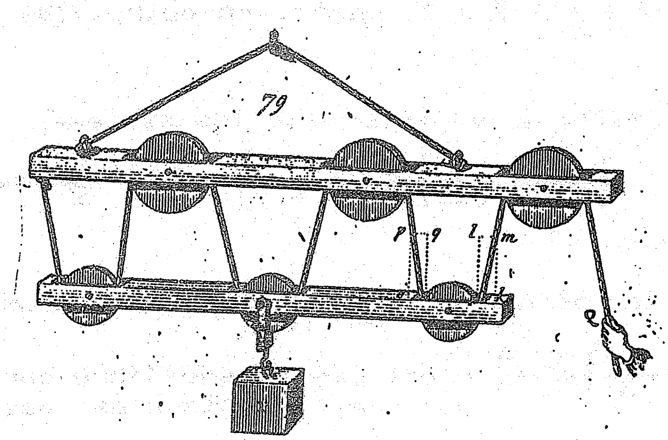
Notons que dans cette définition la somme $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n$ est nulle, sinon la fonction de Leibniz associée serait non constante, donc non nulle.

Cette définition étend la notion d'équilibre au cas de 1 ou 2 points. De plus les réels $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ ne sont plus supposés non nuls.

c) Une caractérisation immédiate

Il découle de la définition précédente le théorème suivant:

> Le système $\left\{\begin{array}{c|c|c|c} A_1 & A_2 & \ldots & A_n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & & \alpha_n \end{array}\right\}$ est un équilibre
>
> si et seulement si
>
> 1) $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots \alpha_n = 0$
>
> 2) Il existe un point P tel que:
> $\alpha_1.\overrightarrow{PA_1} + \ldots + \alpha_n.\overrightarrow{PA_n} = \vec{0}$



d) <u>Exemples</u>:

- Regardons d'abord ce qui se passe pour $n = 1$ ou $n = 2$.

  – <u>Equilibre à un point</u>: ils sont tous de la forme $\left\{\begin{array}{c} A \\ \hline 0 \end{array}\right\}$

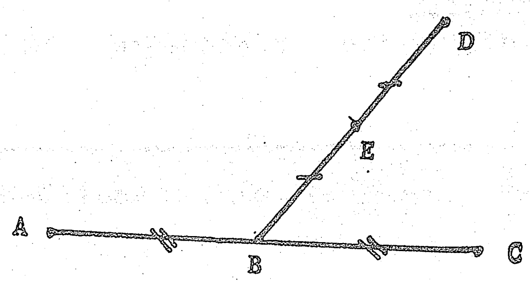
  – <u>Equilibre à deux points</u>: Si $\left\{\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline \alpha & \beta \end{array}\right\}$ est un équilibre

  alors $\alpha + \beta = 0$ et sa fonction de Leibniz $\vec{f}$ est telle que: $\vec{f}(A) = \vec{0}$, c'et à dire $\beta.\overrightarrow{AB} = \vec{0}$. Il en découle $A = B$ ou $\alpha = \beta = 0$.

  Finalement les seuls équilibres à un ou deux points sont:

  $\left\{\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right\}$ ou $\left\{\begin{array}{c|c} A & A \\ \hline \alpha & -\alpha \end{array}\right\}$ avec $\alpha \neq 0$

- - Dans la configuration ci-dessous, B est le milieu de [A,C] et E est le milieu de [B,D].



$\left\{\begin{array}{c|c|c|c} A & B & C & D \\ \hline 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right\}$ est un équilibre.

En effet, la fonction de Leibniz $\vec{f}$ associée à ce système est constante car $1 -2 + 1 + 0 = 0$. Comme, en outre $\vec{f}(B) = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \vec{0}$, $\vec{f}$ est nulle.

De même, il est facile de vérifier que les systèmes

$\left\{\begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline 3 & -6 & 3 \end{array}\right\}$, $\left\{\begin{array}{c|c|c|c} A & C & D & E \\ \hline 1 & 1 & 2 & -4 \end{array}\right\}$ et $\left\{\begin{array}{c|c|c} B & D & E \\ \hline 2 & 2 & -4 \end{array}\right\}$

sont des équilibres.

- - - Quels que soient les points A, B, C, D et E, le système

$\left\{\begin{array}{c|c|c|c|c} A & B & C & D & E \\ \hline 2 & 1 & 0 & 3 & -1 \end{array}\right\}$ n'est pas un équilibre car la somme des coefficients n'est pas nulle.

3° Modifications des écritures d'un équilibre

Théorème:

> Soit $\left\{ \begin{array}{c|c|c|c} A_1 & A_2 & \ldots & A_n \\ \hline \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \end{array} \right\}$ un équilibre.
>
> A partir de celui-ci on obtiendra encore un équilibre:
>
> 1) En permutant deux de ses colonnes;
>
> 2) En supprimant $\left| \begin{array}{c} A_i \\ \hline \alpha_i \end{array} \right|$ lorsque $\alpha_i = 0$;
>
> 3) En adjoignant une colonne du type $\left| \begin{array}{c} B \\ \hline 0 \end{array} \right|$ où B est un point quelconque de l'espace considéré;
>
> 4) En remplaçant les colonnes $\left| \begin{array}{c} A_i \\ \hline \alpha_i \end{array} \right|$ et $\left| \begin{array}{c} A_j \\ \hline \alpha_j \end{array} \right|$ par la colonne $\left| \begin{array}{c} A_i \\ \hline \alpha_i + \alpha_j \end{array} \right|$ lorsque $A_i = A_j$;
>
> 5) En remplaçant une colonne $\left| \begin{array}{c} A_i \\ \hline \alpha_i \end{array} \right|$ par les colonnes $\left| \begin{array}{c} A_i \\ \hline \beta \end{array} \right|$ et $\left| \begin{array}{c} A_i \\ \hline \gamma \end{array} \right|$ lorsque $\beta + \gamma = \alpha_i$.

Ce théorème se démontre facilement par transformation d'écriture de la fonction de Leibniz associée.

Exemples:

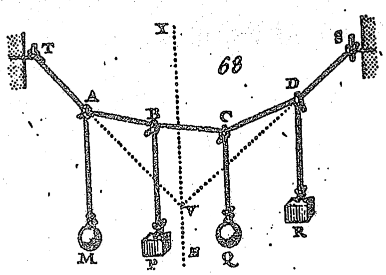
Etant donné l'équilibre $\left\{ \begin{array}{c|c|c|c|c|c} A & B & C & D & E & A \\ \hline 1 & 3 & -6 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right\}$

on vérifiera facilement que les écritures suivantes désignent encore le même équilibre.

$\left\{ \begin{array}{c|c|c|c|c|c} A & A & B & C & D & E \\ \hline 1 & 1 & 3 & -6 & 1 & 0 \end{array} \right\}$; $\left\{ \begin{array}{c|c|c|c} A & B & C & D \\ \hline 2 & 3 & -6 & 1 \end{array} \right\}$;

$\left\{ \begin{array}{c|c|c|c|c} A & D & C & B & C \\ \hline 2 & 1 & -3 & 3 & -3 \end{array} \right\}$; $\left\{ \begin{array}{c|c|c|c|c|c} A & F & C & B & D & F \\ \hline 2 & 2 & -6 & 3 & 1 & -2 \end{array} \right\}$

où F désigne un point quelconque de l'espace considéré.



4° <u>Egalité de deux équilibres.</u>

a) <u>Forme réduite d'un équilibre.</u>

Ce qui précède montre que l'on peut, dans l'écriture d'un équilibre, ne faire figurer que des points distincts, associés à des coefficients non nuls.

En dehors de l'équilibre nul $\left\{\frac{A}{0}\right\}$, un équilibre $\left\{\ldots \left| \frac{A_i}{\alpha_i} \right| \ldots\right\}$

sera réduit lorsque $\left[\begin{array}{l} \text{pour tout } i : \quad \alpha_i \neq 0 \\ \text{pour tout } i \text{ et tout } j : i \neq j \Longrightarrow A_i \neq A_j \end{array}\right.$

Pour obtenir la forme réduite d'un équilibre, il suffit de supprimer tous les points à coefficient nul et de regrouper les points qui figurent plusieurs fois.

Les propriétés 2) et 4) du théorème du 3° permettent d'obtenir la forme réduite. En revanche, les propriétés 3) et 5) agissent en sens inverse.

b) <u>Egalité</u>

Dire que la forme réduite d'un équilibre est unique équivaut à dire que:

<u>deux équilibres sont égaux lorsqu'ils ont la même forme réduite.</u>

On pourra conclure à l'égalité lorsque les seules transformations effectuées auront été celles permises par le théorème du 3°.

c) <u>Remarques:</u>

° On peut noter l'analogie avec la forme réduite des polynômes (mieux connue des élèves).

°° La diversité des écritures d'un même équilibre est du même type que celle des écritures d'un même rationnel.

°°° Les diverses écritures d'un même équilibre correspondent chacune à une description différente d'une même situation physique.

5° <u>Opérations sur les équilibres</u>

■ <u>Addition</u>

Théorème

> Soit $\left\{ \frac{A_1}{\alpha_1} \,\Big|\, \frac{A_2}{\alpha_2} \,\Big|\, \cdots \,\Big|\, \frac{A_n}{\alpha_n} \right\}$ et $\left\{ \frac{B_1}{\beta_1} \,\Big|\, \frac{B_2}{\beta_2} \,\Big|\, \cdots \,\Big|\, \frac{B_p}{\beta_p} \right\}$
> deux équilibres
>
> alors $\left\{ \frac{A_1}{\alpha_1} \,\Big|\, \frac{A_2}{\alpha_2} \,\Big|\, \cdots \,\Big|\, \frac{A_n}{\alpha_n} \,\Big|\, \frac{B_1}{\beta_1} \,\Big|\, \frac{B_2}{\beta_2} \,\Big|\, \cdots \,\Big|\, \frac{B_p}{\beta_p} \right\}$
> est un équilibre appelé <u>somme</u> des deux équilibres donnés.

En effet soit $\vec{f}_1$ et $\vec{f}_2$ les fonctions de Leibniz associées aux équilibres donnés.

Ces deux fonctions étant nulles, leur somme qui est la fonction de Leibniz du système

$\left\{ \frac{A_1}{\alpha_1} \,\Big|\, \frac{A_2}{\alpha_2} \,\Big|\, \cdots \,\Big|\, \frac{A_n}{\alpha_n} \,\Big|\, \frac{B_1}{\beta_1} \,\Big|\, \frac{B_2}{\beta_2} \,\Big|\, \cdots \,\Big|\, \frac{B_p}{\beta_p} \right\}$ est encore nulle.

D'où le résultat énoncé.

On notera $e_1 + e_2$ la somme des équilibres e_1 et e_2.

<u>Exemple</u>:

Comme $\left\{ \frac{A}{4} \,\Big|\, \frac{B}{-3} \,\Big|\, \frac{C}{-2} \,\Big|\, \frac{D}{1} \right\}$ et $\left\{ \frac{A}{-2} \,\Big|\, \frac{C}{3} \,\Big|\, \frac{D}{-1} \right\}$ sont des équilibres,

$\left\{ \frac{A}{4} \,\Big|\, \frac{B}{-3} \,\Big|\, \frac{C}{-2} \,\Big|\, \frac{D}{1} \,\Big|\, \frac{A}{-2} \,\Big|\, \frac{C}{3} \,\Big|\, \frac{D}{-1} \right\}$ est aussi un équilibre.

Après modification d'écriture $\left\{ \frac{A}{2} \,\Big|\, \frac{B}{-3} \,\Big|\, \frac{C}{1} \right\}$ est un équilibre.

On écrira $\left\{ \frac{A}{4} \,\Big|\, \frac{B}{-3} \,\Big|\, \frac{C}{-2} \,\Big|\, \frac{D}{1} \right\} + \left\{ \frac{A}{-2} \,\Big|\, \frac{C}{3} \,\Big|\, \frac{D}{-1} \right\} = \left\{ \frac{A}{2} \,\Big|\, \frac{B}{-3} \,\Big|\, \frac{C}{1} \right\}$

■■ <u>Multiplication par un réel</u>:

Théorème:

> Si $\left\{ \frac{A_1}{\alpha_1} \,\Big|\, \frac{A_2}{\alpha_2} \,\Big|\, \cdots \,\Big|\, \frac{A_n}{\alpha_n} \right\}$ est un équilibre et k un réel
>
> alors $\left\{ \frac{A_1}{k\alpha_1} \,\Big|\, \frac{A_2}{k\alpha_2} \,\Big|\, \cdots \,\Big|\, \frac{A_n}{k\alpha_n} \right\}$ est un équilibre
>
> appelé <u>produit</u> de l'équilibre donné par le réel k

En effet la fonction de Leibniz associée $\vec{f}$ de l'équilibre donné est nulle. Il s'ensuit que la fonction $k\vec{f}$ associée au système $\{(A_1,\alpha_1)\ ,\ (A_2,\alpha_2)\ ,\ \ldots,(A_n,\alpha_n)\}$ est encore nulle.

D'où le résultat annoncé.

On notera ke le produit de l'équilibre e par le réel k.

Exemple:

Le produit de l'équilibre $\left\{\begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline 5 & -15 & 10 \end{array}\right\}$ par $\frac{1}{5}$ est

l'équilibre $\left\{\begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline 1 & -3 & 2 \end{array}\right\}$

Si besoin est, on pourra utiliser les règles de calcul dans un espace vectoriel. Ainsi:

$$2\times\left\{\begin{array}{c|c|c|c} A & B & C & D \\ \hline 2 & -3 & 4 & -3 \end{array}\right\} - \left\{\begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline -5 & 4 & 1 \end{array}\right\}$$

sera l'équilibre $\left\{\begin{array}{c|c|c|c} A & B & C & D \\ \hline 9 & -10 & 7 & -6 \end{array}\right\}$

6° Equilibres et barycentres

Ne perdons pas de vue que la notion d'équilibre s'est dégagée à partir d'une caractérisation plus symétrique du barycentre. Les théorèmes suivants prolongent celui vu au (III-1).

Théorème (1)

> Si G est le barycentre de $\begin{array}{c|c|c|c} A_1 & A_2 & \dots & A_n \\ \hline \alpha_1 & \alpha_2 & & \alpha_n \end{array}$
>
> alors le système $\left\{\begin{array}{c|c|c|c|c} A_1 & A_2 & \dots & A_n & G \\ \hline \alpha_1 & \alpha_2 & & \alpha_n & \alpha \end{array}\right\}$,
>
> où $\alpha = -\sum_{i=1}^{n} \alpha_i$, est un équilibre.

Démonstration:

On a, pour tout point M, $(\alpha_1 + \dots + \alpha_n).\overrightarrow{MG} = \alpha_1.\overrightarrow{MA_1} + \dots + \alpha_n.\overrightarrow{MA_n}$

On en déduit: $\alpha_1.\overrightarrow{MA_1} + \dots + \alpha_n.\overrightarrow{MA_n} - (\alpha_1 + \dots + \alpha_n).\overrightarrow{MG} = \vec{0}$

Autrement dit, la fonction de Leibniz associée au système $\left\{\begin{array}{c|c|c|c|c} A_1 & A_2 & \dots & A_n & G \\ \hline \alpha_1 & \alpha_2 & & \alpha_n & \alpha \end{array}\right\}$ est nulle.

Théorème (2)

> Si le système $\left\{\begin{array}{c|c|c|c} A_1 & A_2 & \dots & A_n \\ \hline \alpha_1 & \alpha_2 & & \alpha_n \end{array}\right\}$ est un équilibre
>
> alors pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que α_i soit non nul, A_i est le barycentre du système privé du couple $\begin{array}{|c|} A_i \\ \hline \alpha_i \end{array}$

Démonstration:

Soit $i \in \{1,\dots,n\}$ tel que $\alpha_i \neq 0$ et $\vec{f}$ la fonction de Leibniz de l'équilibre considéré.

On a $\vec{f}(A_i) = \vec{0}$, autrement dit $\sum_{i\neq k}^{n} \alpha_i.\overrightarrow{A_iA_k} = \vec{0}$ (C. Q. F. D.)

• Cas de trois points:

■ Si G est barycentre de $\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline \alpha & \beta \end{array}$

alors $\left\{\begin{array}{c|c|c} A & B & G \\ \hline \alpha & \beta & -\alpha-\beta \end{array}\right\}$ est un équilibre

■■ Si $\left\{\begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline \alpha & \beta & \gamma \end{array}\right\}$ est un équilibre et si $\gamma \neq 0$

alors C est le barycentre de $\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline \alpha & \beta \end{array}$

•• Cas de quatre points:

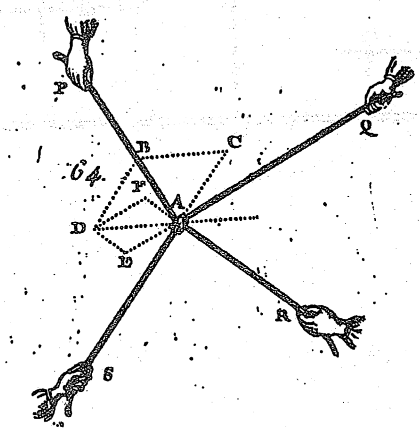
■ Si $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$, dire que

D est le barycentre de $\begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline \alpha & \beta & \gamma \end{array}$ est équivalent à dire que

$\left\{\begin{array}{c|c|c|c} A & B & C & D \\ \hline \alpha & \beta & \gamma & -\alpha-\beta-\gamma \end{array}\right\}$ est un équilibre

■■ Si $\left\{\begin{array}{c|c|c|c} A & B & C & D \\ \hline \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{array}\right\}$ est un équilibre et si $\delta \neq 0$

on peut conclure que D est le barycentre de $\begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline \alpha & \beta & \gamma \end{array}$

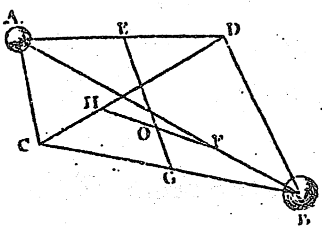


7° Equilibres et théorème du barycentre partiel

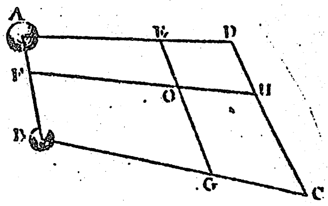
Les opérations sur les équilibres peuvent se substituer au théorème du barycentre partiel.

Exemples:

En termes de barycentres	En termes d'équilibres
Si G est barycentre de $\begin{array}{c\|c\|c\|c} A & B & C & D \\ \hline 1 & -1 & 3 & -4 \end{array}$ Si G' est barycentre de $\begin{array}{c\|c\|c} A & B & C \\ \hline 1 & -1 & 3 \end{array}$ alors G est barycentre de $\begin{array}{c\|c} G' & D \\ \hline 3 & -4 \end{array}$	Si on a les équilibres $\left\{\begin{array}{c\|c\|c\|c\|c} A & B & C & D & G \\ \hline 1 & -1 & 3 & -4 & 1 \end{array}\right\}$ et $\left\{\begin{array}{c\|c\|c\|c} A & B & C & G' \\ \hline 1 & -1 & 3 & -3 \end{array}\right\}$ on a, par différence, l'équilibre $\left\{\begin{array}{c\|c\|c} G' & D & G \\ \hline 3 & -4 & 1 \end{array}\right\}$
Si G est barycentre de $\begin{array}{c\|c\|c} A & B & C \\ \hline 2 & 5 & -3 \end{array}$ Si B est barycentre de $\begin{array}{c\|c\|c} A & D & E \\ \hline 3 & 1 & 1 \end{array}$ alors G est barycentre de $\begin{array}{c\|c\|c\|c\|c} A & A & D & E & C \\ \hline 2 & 3 & 1 & 1 & -3 \end{array}$ ou encore de $\begin{array}{c\|c\|c\|c} A & C & D & E \\ \hline 5 & -3 & 1 & 1 \end{array}$	Si on a les équilibres $\left\{\begin{array}{c\|c\|c\|c} A & B & C & G \\ \hline 2 & 5 & -3 & -4 \end{array}\right\}$ et $\left\{\begin{array}{c\|c\|c\|c} A & D & E & B \\ \hline 3 & 1 & 1 & -5 \end{array}\right\}$ on a, par addition, l'équilibre $\left\{\begin{array}{c\|c\|c\|c\|c} A & C & D & E & G \\ \hline 5 & -3 & 1 & 1 & -4 \end{array}\right\}$



IV - Equilibres et configurations



L'intervention des équilibres dans les problèmes est possible grâce à la caractérisation de certaines propriétés en termes d'équilibre.

1° <u>Equilibre à trois points</u>: <u>Alignement</u>

a) <u>Soit</u> $\left\{\begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline \alpha & \beta & \gamma \end{array}\right\}$ <u>un équilibre</u>.

▸ Ou bien les trois coefficients sont nuls: $\alpha = \beta = \gamma = 0$

▸ Ou bien l'un des réels, α, β ou γ est non nul: l'un des deux points est alors barycentre des deux autres et les trois points sont alignés.

Ainsi: si $\alpha \neq 0$, A est barycentre de $\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline \beta & \gamma \end{array}$.

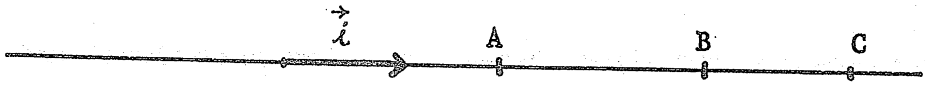
b) <u>Soit A, B et C trois points alignés</u>.

On sait déjà que si deux d'entre eux sont distincts alors le troisième est le barycentre des deux autres.
(Si $A \neq B$, la droite (AB) est l'ensemble des barycentres de A et B: cf II-3°- a)
Cette propriété est encore vraie si deux (ou trois) de ces points sont confondus.

A, B et C alignés $\Leftrightarrow$ il existe un équilibre $\left\{\begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline \alpha & \beta & \gamma \end{array}\right\}$ (à coefficients non tous nuls)

c) <u>Une expression des coefficients</u>

Si C est barycentre de $\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline \alpha & \beta \end{array}$, on a $\alpha.\overrightarrow{CA} + \beta.\overrightarrow{CB} = \vec{0}$,
α ou β n'est pas nul, supposons que α ne soit pas nul,
$\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CB}$ sont colinéaires et si $\overrightarrow{BC} = \alpha.\vec{i}$, on en déduit:
$\overrightarrow{CA} = \beta.\vec{i}$ (cela si $\alpha \neq 0$).
Si A, B et C sont alignés sur une droite de vecteur directeur $\vec{i}$,



il existe alors des réels α, β et γ tels que:

$$\overrightarrow{BC} = \alpha.\vec{i}, \quad \overrightarrow{CA} = \beta.\vec{i} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AB} = \gamma.\vec{i}$$

On a $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$, donc $(\alpha + \beta + \gamma).\vec{i} = \vec{0}$
donc $\alpha + \beta + \gamma = 0$

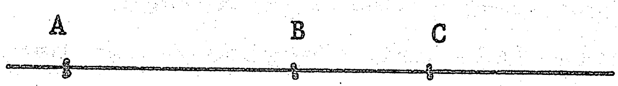
De plus: $\alpha.\overrightarrow{CA} + \beta.\overrightarrow{CB} = \alpha.(\beta.\vec{i}) - \beta.(\alpha.\vec{i}) = \vec{0}$

On en déduit que: $\left\{\begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline \alpha & \beta & \gamma \end{array}\right\}$ est un équilibre (II-2°-c)

(La fonction vectorielle qui lui est associée est nulle)

Ainsi α, β et γ sont les coordonnées, dans une base $\vec{i}$, des vecteurs $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{AB}$.

Remarquons que si B est entre A et C comme sur la figure ci-dessous:



on a AC = AB + BC

et l'on peut choisir d'écrire l'équilibre $\left\{\begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline BC & -AC & AB \end{array}\right\}$

La notion de mesure algébrique permettrait d'écrire dans tous les cas: $\left\{\begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline \overline{BC} & \overline{CA} & \overline{AB} \end{array}\right\}$

Mais cela s'avère rarement utile dans la pratique.

Résumons les résultats obtenus

1° Si $\left\{\begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline \alpha & \beta & \gamma \end{array}\right\}$ est un équilibre,

alors l'une des deux propositions suivantes est vraie:

- $\alpha = \beta = \gamma = 0$ (On dira que l'équilibre est trivial)
- A, B et C sont alignés

2° Si A, B et C sont alignés, il existe des coefficients

α, β et γ tels que $\left\{\begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline \alpha & \beta & \gamma \end{array}\right\}$ soit un équilibre.

Cet équilibre sera dit associé aux points alignés A, B et C.

On peut choisir pour α, β et γ les coordonnées de $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{AB}$ dans une base $\vec{\imath}$, c'est à dire, au signe près, des nombres proportionnels aux longueurs BC, CA et AB.

On peut ainsi s'appuyer sur la notion physique d'équilibre.

2° Equilibre associé à un quadrilatère ABCD.

a) Si A, B et C sont alignés

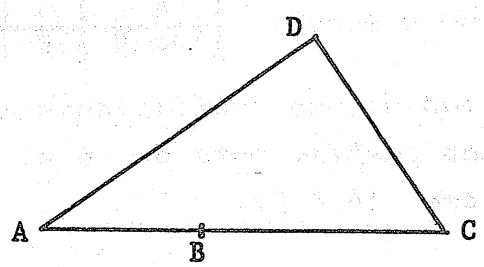
et si $\left\{\begin{array}{c|c|c|c} A & B & C & D \\ \hline \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{array}\right\}$ est un équilibre:

ou $\delta = 0$

ou D est aligné avec A, B et C.

En effet, si $\delta \neq 0$, puisque l'on a: $\delta.\overrightarrow{AD} + \gamma.\overrightarrow{AC} + \beta.\overrightarrow{AB} = \vec{0}$, et que $\overrightarrow{AC}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ est également colinéaire à $\overrightarrow{AB}$

En conséquence, il n'y a pas d'équilibre associé à la figure suivante, sauf si le coefficient de D est nul



Ce qui précède est physiquement évident.

b) <u>Equilibre associé à un quadrilatère</u> (au sens strict)

ABCD est un quadrilatère au sens strict si trois quelconques des quatre points A, B, C et D ne sont pas alignés.

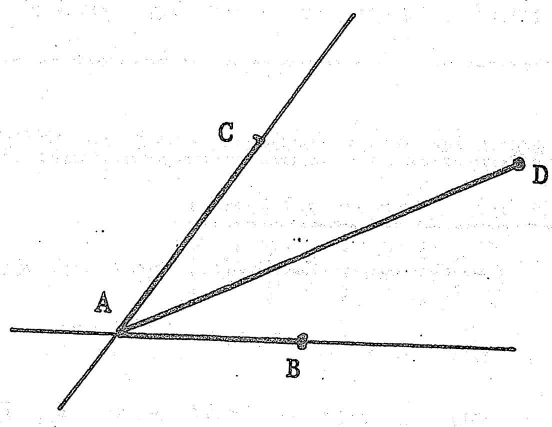
On a alors le résultat suivant:

> Si ABCD est, au sens strict, un quadrilatère,
>
> alors il existe un équilibre $\left\{\begin{array}{c|c|c|c} A & B & C & D \\ \hline \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{array}\right\}$
>
> à coefficients non nuls, uniques à un facteur multiplicatif près.

<u>Démonstration</u>

- <u>Existence</u>: Il s'agit de démontrer que

D est barycentre de $\begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline \alpha & \beta & \gamma \end{array}$



Or, A, B et C étant non alignés, (A,B,C) est un repère.

On peut écrire: $\overrightarrow{AD} = \beta.\overrightarrow{AB} + \gamma.\overrightarrow{AC}$, ce qui équivaut à:

D est barycentre de $\begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline \alpha & \beta & \gamma \end{array}$

avec $\alpha = 1 - \beta - \gamma$, puisque le coefficient de $\overrightarrow{AD}$ est 1.

L'équilibre obtenu s'écrit: $\left\{\begin{array}{c|c|c|c} A & B & C & D \\ \hline 1-\alpha-\beta & \beta & \gamma & -1 \end{array}\right\}$

Il est tel qu'aucun de ses coefficients n'est nul et l'on peut prendre comme coefficients de B et C les coordonnées de D dans le repère (A,B,C).

• "Unicité"

Soit e un équilibre $\left\{\begin{array}{c|c|c|c} A & B & C & D \\ \hline \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{array}\right\}$

dont aucun coefficient n'est nul.

Soit e' $\left\{\begin{array}{c|c|c|c} A & B & C & D \\ \hline \alpha' & \beta' & \gamma' & \delta' \end{array}\right\}$ un autre équilibre.

On peut éliminer D par la combinaison $\delta'.e - \delta.e'$

On obtient alors l'équilibre $\left\{\begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline \delta'\alpha-\delta\alpha' & \delta'\beta-\delta\beta' & \delta'\gamma-\delta\gamma' \end{array}\right\}$

Comme ces trois points ne sont pas alignés, on a:

$$\delta'\alpha - \delta\alpha' = \delta'\beta - \delta\beta' = \delta'\gamma - \delta\gamma' = 0$$

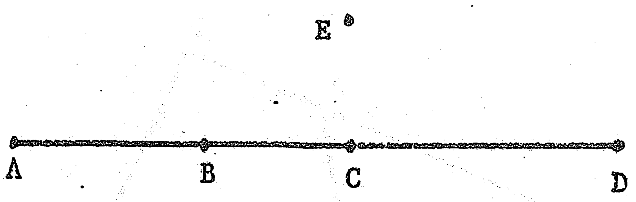
d'où $\dfrac{\alpha'}{\alpha} = \dfrac{\beta'}{\beta} = \dfrac{\delta'}{\delta}$ (C. Q. F. D.)

3° Equilibre à plus de quatre points dans le plan

a) Peut-on trouver un équilibre correspondant à 5 points?

b) Si un tel équilibre existe, est-il unique?

• La réponse au a) est généralement positive toutefois (voir 2° a)) il se peut que l'un des points ne puisse être exprimé comme barycentre des autres ; par exemple le point E ci-dessous:



• La réponse au b) peut être apportée par un contre-exemple ou par la remarque suivante:

Si $\left\{\begin{array}{c|c|c|c} A & B & C & D \\ \hline \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{array}\right\}$ et $\left\{\begin{array}{c|c|c|c} A & B & C & D' \\ \hline \alpha & \beta & \gamma & \delta' \end{array}\right\}$

sont des équilibres e et e' toute combinaison $\lambda e + \mu e'$ est un équilibre.

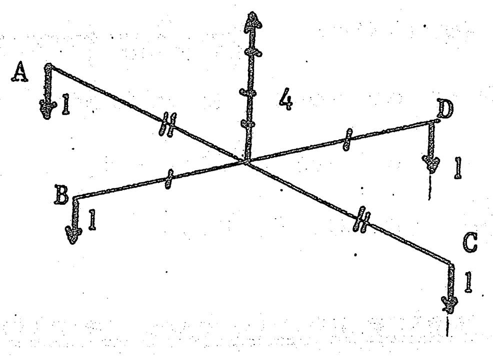
Ainsi si I est le milieu de [A,C] et [B,D], on pourra trouver

de nombreux équilibres de la forme $\left\{\begin{array}{c|c|c|c|c} A & B & C & D & I \\ \hline .. & .. & .. & .. & .. \end{array}\right\}$

dont les coefficients ne forment pas de suites proportionnelles.

(On rappelle que le milieu est caractérisé par par un équilibre du type $\left\{\begin{array}{c|c|c} A & I & B \\ \hline \alpha & -2\alpha & \alpha \end{array}\right\}$.)

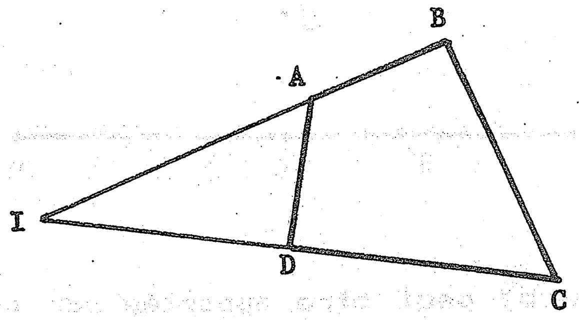
Physiquement ceci est visible: on peut faire varier les masses dans un des deux équilibres seulement.



4° Caractérisation du parallélisme

Soit ABCD un quadrilatère (strict) et

e $\left\{\begin{array}{c|c|c|c} A & B & C & D \\ \hline \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{array}\right\}$ l'équilibre associé.



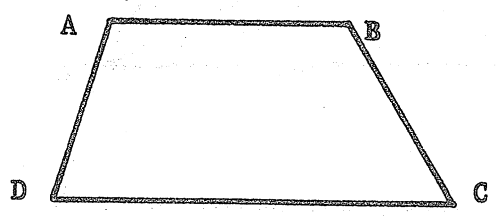
a) Supposons $\alpha + \beta \neq 0$ (il en résulte $\gamma + \delta \neq 0$)

Il existe I barycentre de $\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline \alpha & \beta \end{array}$ et l'on a l'équilibre $\left\{\begin{array}{c|c|c} A & B & I \\ \hline \alpha & \beta & -\alpha-\beta \end{array}\right\}$

On a aussi, par différence, l'équilibre $\left\{\begin{array}{c|c|c} I & C & D \\ \hline \alpha+\beta & \gamma & \delta \end{array}\right\}$

b) <u>Supposons $\alpha + \beta = 0$</u> (il en résulte $\gamma + \delta = 0$)

L'équilibre e s'écrit alors $\left\{\begin{array}{c|c|c|c} A & B & C & D \\ \hline \alpha & -\alpha & \gamma & -\gamma \end{array}\right\}$



On a, dans ce dernier cas:

pour tout point M $\quad \alpha.(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}) + \gamma.(\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD}) = \vec{0}$

Soit $\alpha.\overrightarrow{BA} + \gamma.\overrightarrow{DC} = \vec{0}$.

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ étant colinéaires, ABCD est un trapèze.

<u>Conclusion</u>:

Etant donné un quadrilatère ABCD et
l'équilibre associé $\left\{\begin{array}{c|c|c|c} A & B & C & D \\ \hline \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{array}\right\}$

□ <u>Les droites (AB) et (CD)</u> sont <u>parallèles</u> $\Leftrightarrow$ <u>$\alpha + \beta = 0$</u>

L'équilibre associé à un tel trapèze s'écrit donc

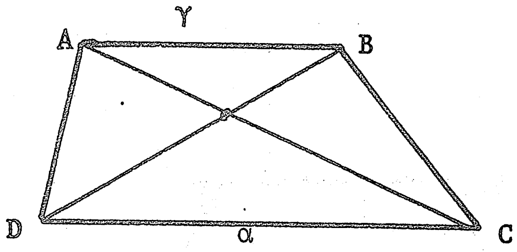
$$\left\{\begin{array}{c|c|c|c} A & B & C & D \\ \hline \alpha & -\alpha & \gamma & -\gamma \end{array}\right\}$$

□ <u>Les droites (AB) et (CD)</u> sont <u>sécantes</u> $\Leftrightarrow$ <u>$\alpha + \beta \neq 0$</u>

Leur point commun I est à la fois

barycentre de $\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline \alpha & \beta \end{array}$ et barycentre de $\begin{array}{c|c} C & D \\ \hline \gamma & \delta \end{array}$

Remarque: Soit ABCD un trapèze de bases [A,B] et [C,D] et tel que les diagonales [A,C] et [B,D] soient sécantes.



On peut prendre comme coefficients de l'équilibre: α = CD et γ = AB

En effet, on a $\alpha.\overrightarrow{AB} + \gamma.\overrightarrow{CD} = \vec{0}$.

On peut aussi utiliser les projections ayant comme directions celles des diagonales.

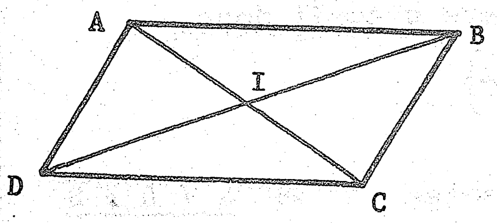
5° Trapèzes et parallélogrammes

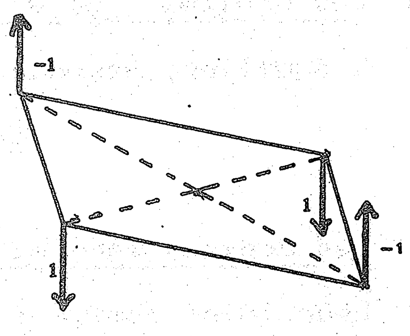
a) Parallélogramme

La relation caractéristique $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, tout comme les équilibres $\left\{\begin{array}{c|c|c} A & I & C \\ \hline 1 & -2 & 1 \end{array}\right\}$ et $\left\{\begin{array}{c|c|c} B & I & D \\ \hline 1 & -2 & 1 \end{array}\right\}$ conduisent à

l'équilibre $\left\{\begin{array}{c|c|c|c} A & B & C & D \\ \hline 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right\}$

caractéristique du parallèlogramme.

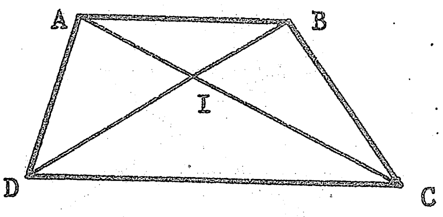




Le schéma physique associé fait ressentir cet équilibre.

Les quatre points A, B, C et D déterminent un parallèlogramme ABCD si et seulement si on a l'équilibre $\left\{\begin{array}{c|c|c|c} A & B & C & D \\ \hline 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right\}$

b) <u>Trapèzes</u> <u>(parallèlisme et convexité)</u>



□ La relation caractéristique: $\overrightarrow{AB} = k.\overrightarrow{DC}$, tout comme les deux

équilibres $\left\{\begin{array}{c|c|c} A & I & C \\ \hline \alpha & -\alpha-\gamma & \gamma \end{array}\right\}$ et $\left\{\begin{array}{c|c|c} B & I & D \\ \hline \alpha & -\alpha-\gamma & \gamma \end{array}\right\}$,

conduisent à l'équilibre $\left\{\begin{array}{c|c|c|c} A & B & C & D \\ \hline \alpha & \alpha & \gamma & -\gamma \end{array}\right\}$

(Le premier équilibre existe si $\alpha + \gamma \neq 0$ et par conservation du barycentre par projection, on obtient le deuxième équilibre)

> L'équilibre $\left\{\begin{array}{c|c|c|c} A & B & C & D \\ \hline \alpha & -\alpha & \gamma & -\gamma \end{array}\right\}$ est caractéristique du trapèze et du parallèlisme: (AB) // (CD) (α et γ non nuls)

En effet il correspond à $\alpha.\overrightarrow{BA} + \gamma.\overrightarrow{CD} = \vec{0}$

□□ Plaçons nous dans le cas où $\alpha + \gamma \neq 0$ (sinon ABCD est un parallèlogramme).

Supposons de plus que: (AB) $\neq$ (CD).

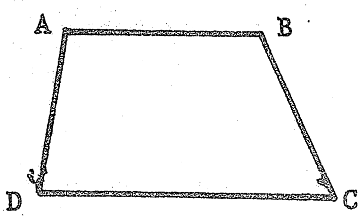
Dans ce cas les diagonales (AC) et (BD) sont sécantes en I

qui est à la fois barycentre de $\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline \alpha & \gamma \end{array}$ et de $\begin{array}{c|c} B & D \\ \hline -\alpha & -\gamma \\ \hline \alpha & \gamma \end{array}$

1* <u>Si α et γ sont de même signe ($\alpha\gamma > 0$),</u>

$I \in [A,C]$ et $I \in [B,D]$

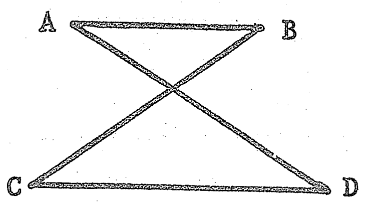
<u>Le trapèze ABCD est convexe</u>



2* <u>Si α et γ sont de signes contraires</u> $(\alpha\gamma < 0)$

$I \notin [A,C]$ et $I \notin [B,D]$

<u>Le trapèze ABCD est croisé</u>

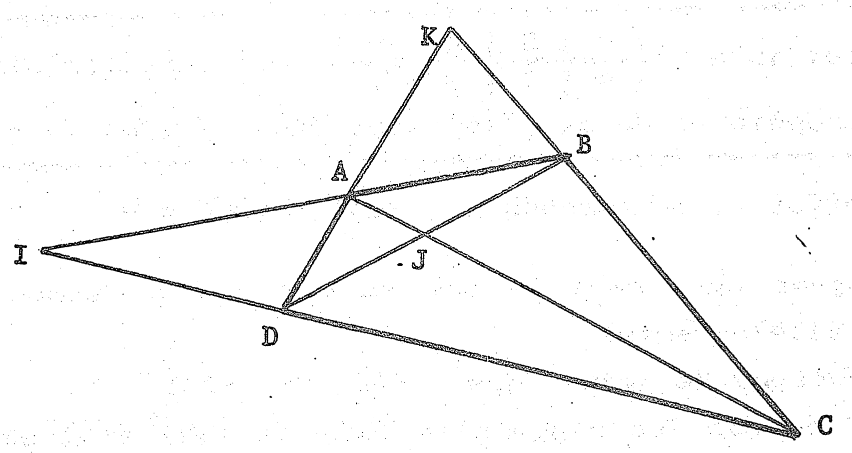


Les deux configurations sont analogues, les rôles de C et D (ou de A et B) étant échangés.

6° <u>Le quadrilatère complet</u>.

Soit ABCD un quadrilatère et

$\left\{ \begin{array}{c|c|c|c} A & B & C & D \\ \hline \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{array} \right\}$ son équilibre associé.



On suppose $\alpha + \beta$, $\alpha + \gamma$ et $\alpha + \delta$ non nuls.

Alors:

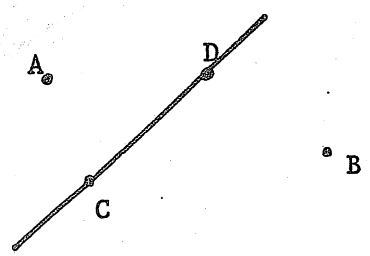
- (AB) et (CD) sont sécantes en I barycentre de $\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline \alpha & \beta \end{array}$ et $\begin{array}{c|c} C & D \\ \hline \gamma & \delta \end{array}$
- (AC) et (BD) sont sécantes en J barycentre de $\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline \alpha & \gamma \end{array}$ et $\begin{array}{c|c} B & D \\ \hline \beta & \delta \end{array}$
- (AD) et (BC) sont sécantes en K barycentre de $\begin{array}{c|c} A & D \\ \hline \alpha & \delta \end{array}$ et $\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline \beta & \gamma \end{array}$

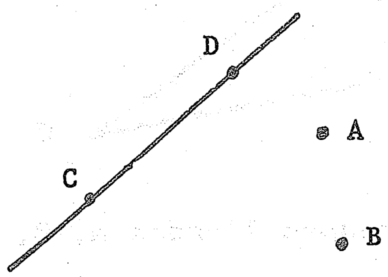
7° **Conséquences**:

a) **Convexité**:

Etant donné une droite Δ et deux points A et B non situés sur Δ, on peut choisir deux points C et D de Δ tels que ABCD soit un quadrilatère et trouver α, β, γ et δ des réels tels que

$\left\{\begin{array}{c|c|c|c} A & B & C & D \\ \hline \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{array}\right\}$ soit l' équilibre associé.





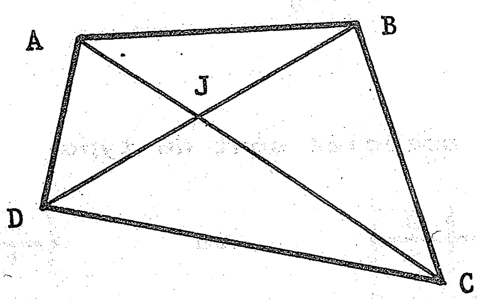
A et B de part et d'autre de Δ	A et B d'un même côté de Δ
$\alpha \times \beta > 0$	$\alpha \times \beta < 0$

Ceci résulte du théorème sur le quadrilatère complet (6°).

b) **Nature du quadrilatère ABCD**

(d'après les coefficients d'un équilibre associé)

- **Convexe**



ABCD convexe ⟺ [A,C] et [B,D] se coupent en J.

⟺ $\alpha \times \gamma > 0$ et $\beta \times \delta > 0$

En pratique: les quatre coefficients α, β, δ et γ (dans cet ordre) ont des signes alternés: + , − , + , − par exemple.

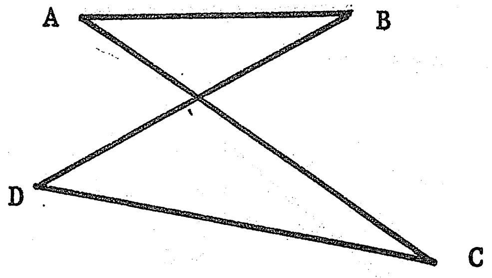
On peut toujours supposer $\alpha > 0$ (il en sera ainsi dans tout ce qui suit).

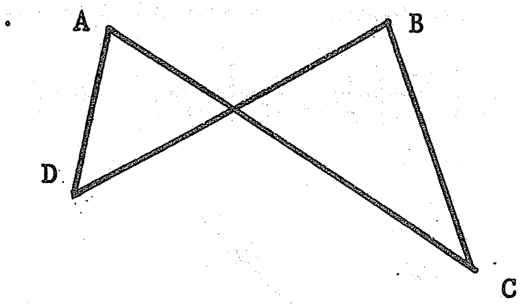
On peut ainsi caractériser la convexité part le type d'équilibre:

$$\boxed{\text{ABCD convexe} \iff \left\{\begin{array}{c|c|c|c} A & B & C & D \\ \hline + & - & + & - \end{array}\right\}}$$

●● <u>Croisé</u>

A partir du cas précédent on obtient deux quadrilatères croisés:



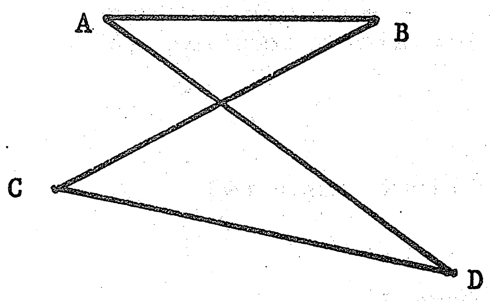


Reprenons l'ordre A, B, C, D.

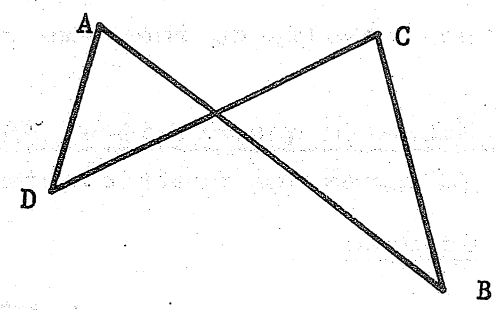
<u>ABCD est croisé</u>

si et seulement si on a l'une ou l'autre des deux formes

a)



b)



Les équilibres associés sont du type

$$\left\{\begin{array}{c|c|c|c} A & B & C & D \\ \hline + & + & - & - \end{array}\right\}$$

$\alpha\beta > 0$ et $\gamma\delta > 0$
(ACBD est convexe)

Fig b)

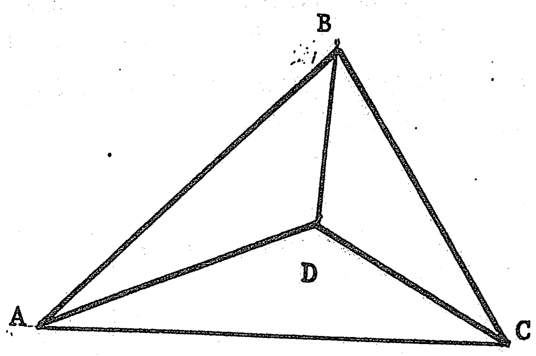
ou

$$\left\{\begin{array}{c|c|c|c} A & B & C & D \\ \hline + & & & + \end{array}\right\}$$

$\alpha\delta > 0$ et $\beta\gamma > 0$
(ABDC est convexe)

Fig a)

••• Fer de lance



ABCD en fer de lance avec D intérieur au triangle ABC.

α, β, γ sont de même signe et δ est de signe contraire.

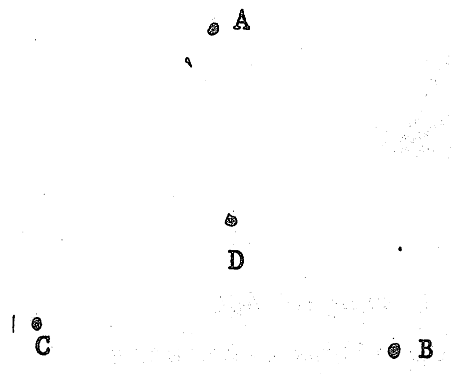
On a un équilibre du type : $\left\{\begin{array}{c|c|c|c} A & B & C & D \\ \hline + & + & + & - \end{array}\right\}$

Si dans un équilibre de quatre points, trois points ont des coefficients de même signe, le quatrième est le barycentre de ces trois points et est intérieur au triangle qu'ils déterminent.

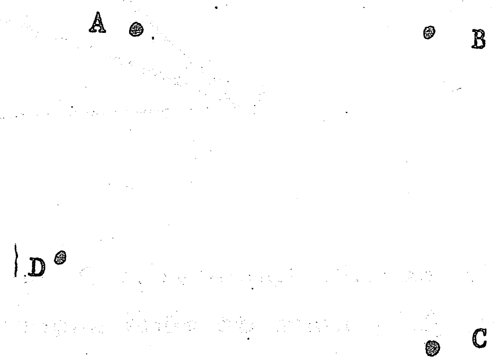
> <u>ABCD est en fer de lance</u>
> si et seulement si
> trois coefficients de l'équilibre associé sont de même signe
> soit: $\left\{\begin{array}{c|c|c|c} A & B & C & D \\ \hline + & + & + & - \end{array}\right\}$ ou $\left\{\begin{array}{c|c|c|c} A & B & C & D \\ \hline + & + & - & + \end{array}\right\}$ ou $\left\{\begin{array}{c|c|c|c} A & B & C & D \\ \hline + & - & + & + \end{array}\right\}$

c) <u>Quadrilatères déduits d'un équilibre à quatre points</u>

Quatre points du plan (dont trois ne sont pas alignés) sont disposés de deux façons possibles (du point de vue de leur enveloppe convexe):



1er Cas



2ème Cas

Chacun conduit à trois quadrilatères:

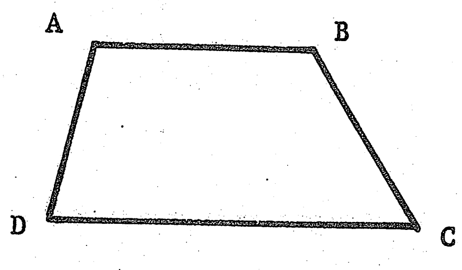
- en fer de lance dans le 1er cas
- un convexe et deux croisés dans le 2 ^{ème}cas

Chaque façon est liée à un équilibre de type différent:

$$\left\{\begin{array}{c|c|c|c} + & + & + & - \end{array}\right\} \quad \text{ou} \quad \left\{\begin{array}{c|c|c|c} + & + & - & - \end{array}\right\}$$ quant au nombre de signes moins (impair ou pair).

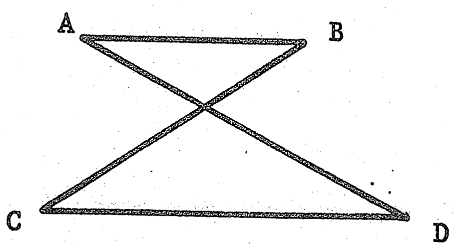
C'est ensuite l'ordre des points qui détermine dans le second cas si le quadrilatère est convexe ou croisé.

d) <u>Cas du trapèze</u> ((AB) // (CD)). On a deux cas:



$\alpha + \beta = 0$ et $\alpha \times \gamma > 0$

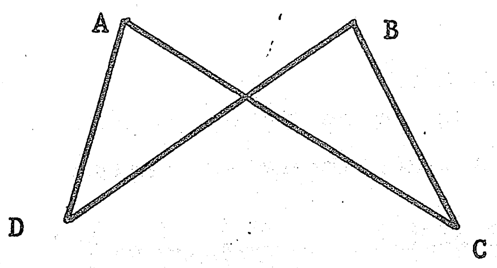
$$\left\{\begin{array}{c|c|c|c} A & B & C & D \\ \hline \alpha & -\alpha & \gamma & -\gamma \\ + & - & + & - \end{array}\right\}$$



$\alpha + \beta = 0$ et $\alpha \times \gamma < 0$

$$\left\{\begin{array}{c|c|c|c} A & B & C & D \\ \hline \alpha & -\alpha & \gamma & -\gamma \\ + & - & - & + \end{array}\right\}$$

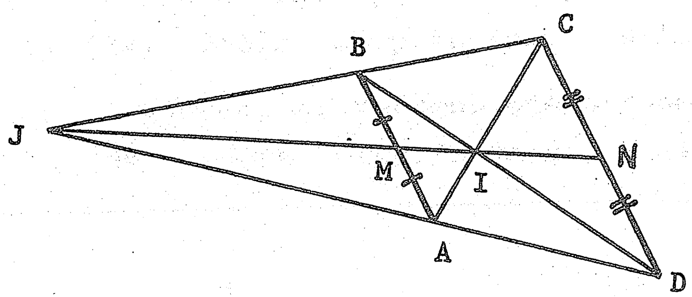
Remarquons que, ici, ACBD n'est pas un trapèze
En représentant ACBD on aurait:



qui correspond à l'équilibre $\left\{\begin{array}{c|c|c|c} A & C & B & D \\ \hline \alpha & \beta & -\alpha & -\beta \end{array}\right\}$ avec $\alpha\beta > 0$

(ACBD n'a pas ici ses côtés parallèles, ce sont ses diagonales qui le sont)

8° La configuration du trapèze complet



On a vu (cf 5°) que ABCD étant un quadrilatère complet, la considération de l'équilibre associé $\left\{\begin{array}{c|c|c|c} A & B & C & D \\ \hline \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{array}\right\}$

montrait que:

$\alpha + \beta = 0 \iff (AB) \mathbin{//} (CD)$

On a dans ce cas l'équilibre $\left\{\begin{array}{c|c|c|c} A & B & C & D \\ \hline \alpha & -\alpha & \gamma & -\gamma \end{array}\right\}$

- Si $\alpha = \gamma$ alors ABCD est un parallèlogramme.
- Si $\alpha \neq \gamma$ alors (BC) et (AD) se coupent en J.

On supposera désormais que que les points I et J existent; c'est à dire que $\alpha \neq \gamma$ et $\alpha \neq -\gamma$.

On remarquera le rôle analogue de I et J par permutations, soit de C et D, soit de A et B.

a) <u>Alignement de I, J, M et N</u>

Soit M et N les milieux de de [A,B] et [C,D].

On a la combinaison d'équilibres suivante:

$$\left\{\begin{array}{c|c|c} I & A & C \\ \hline -\alpha-\gamma & \alpha & \gamma \end{array}\right\} - \left\{\begin{array}{c|c|c} I & B & D \\ \hline \alpha+\gamma & -\alpha & -\gamma \end{array}\right\} - \left\{\begin{array}{c|c|c} A & M & B \\ \hline \alpha & -2\alpha & \alpha \end{array}\right\} - \left\{\begin{array}{c|c|c} C & N & D \\ \hline \gamma & -2\gamma & \gamma \end{array}\right\}$$

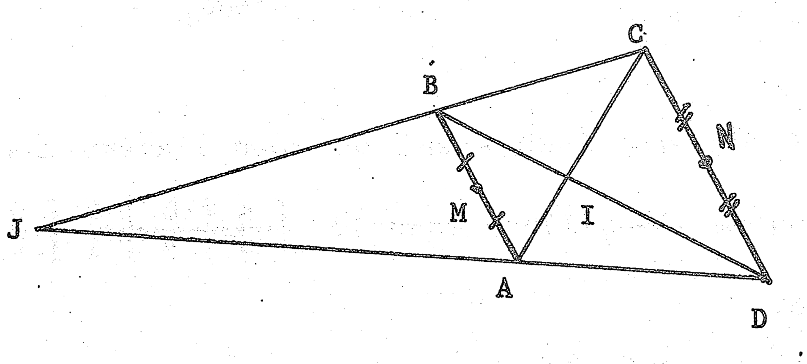
Ce qui élimine A, B, C et D et donne l'équilibre $\left\{\begin{array}{c|c|c} I & M & N \\ \hline -2\alpha-2\gamma & 2\alpha & 2\gamma \end{array}\right\}$

Soit I aligné avec M et N (I barycentre de $\begin{array}{c|c} A & M \\ \hline \alpha & \gamma \end{array}$)

Ceci prouve que <u>I, J, M et N sont alignés</u>, mais est moins simple que l'utilisation des homothéties.

b) <u>Réciproques</u>

$\boxed{1}$ Si dans un quadrilatère complet les points I, J et M (ou les points I, J et N sont alignés alors (AB) // (CD)).
$\boxed{2}$ Si dans un quadrilatère complet les points I, M et N (ou les points J, M et N sont alignés alors (AB) // (CD)).



$\boxed{1}$ On a les équilibres $\left\{\begin{array}{c|c|c} J & A & D \\ \hline -\alpha-\delta & \alpha & \delta \end{array}\right\}$ et $\left\{\begin{array}{c|c|c} I & B & D \\ \hline -\beta-\delta & \beta & \delta \end{array}\right\}$

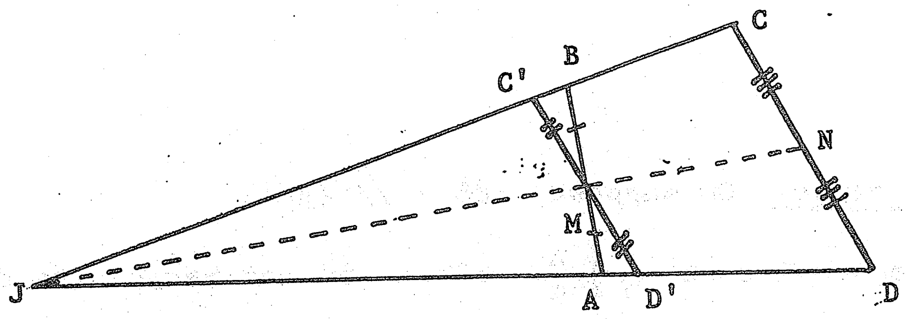
Par soustraction, on élimine D et on obtient l'équilibre

$$\left\{\begin{array}{c|c|c|c} J & I & A & B \\ \hline -\alpha-\delta & \beta+\delta & \alpha & -\beta \end{array}\right\}$$

Lorsque (IJ) coupe (AB) (ce qui équivaut à $\alpha \neq \beta$), c'est au barycentre de $\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline \alpha & -\beta \end{array}$.

Ce point est le point M milieu de [A,B] si et seulement si $-\beta = \alpha$, soit $\alpha + \beta = 0$, c'est à dire si et seulement si (AB)// (CD).

$\boxed{2}$ La figure est plus claire en supposant J, M et N alignés.



On construit C' et D'en construisant le trapèze CDD'C', M est alors le milieu de [C',D'] (d'après a)).

Si l'on avait C' $\neq$ B on en déduirait que (AD'BC' étant un parallélogramme) (C'B) et (D'A) se coupent en J.

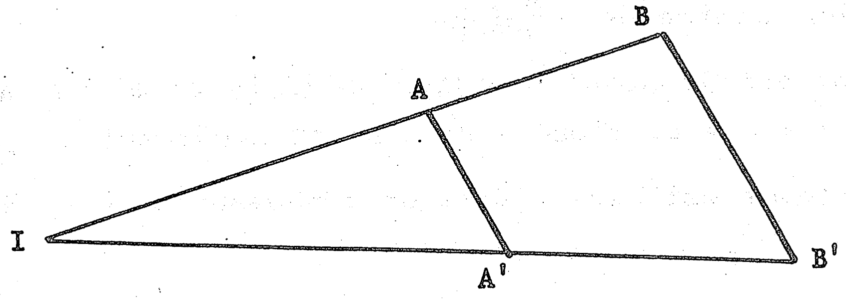
Ainsi C' = B, D' = A et on a bien (AB) // (CD) (C.Q.F.D.)

Il s'agit en fait de la réutilisation de la partie directe.

L'utilisation des équilibres serait ici beaucoup plus longue.

9° La configuration de Thalès-triangle

Il s'agit d'appliquer la conservation du barycentre par projection.



a) Enoncé direct On suppose (BB') // (AA')

Si B est barycentre de $\begin{array}{c|c} I & A \\ \hline \gamma & \alpha \end{array}$ alors B' est barycentre de $\begin{array}{c|c} I & A' \\ \hline \gamma & \alpha \end{array}$

ou bien

Si $\left\{\begin{array}{c|c|c} B & A & I \\ \hline \beta & \alpha & \gamma \end{array}\right\}$ est un équilibre alors $\left\{\begin{array}{c|c|c} B' & A' & I \\ \hline \beta & \alpha & \gamma \end{array}\right\}$ est un équilibre

b) Réciproque C'est surtout elle qui intervient dans les problèmes.

- En termes de barycentres

$$\left.\begin{array}{l} B \text{ est barycentre de } \begin{array}{c|c} I & A \\ \hline \gamma & \alpha \end{array} \\ \\ B' \text{ est barycentre de } \begin{array}{c|c} I & A' \\ \hline \gamma & \alpha \end{array} \end{array}\right\} \Longrightarrow (BB') \,//\, (AA')$$

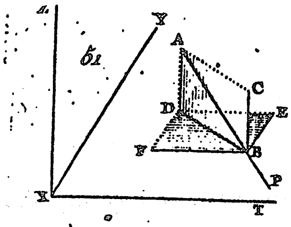
Autre forme (plus utilisée)

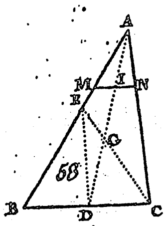
$$\left.\begin{array}{l} I \text{ est barycentre de } \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline \alpha & \beta \end{array} \\ \\ I \text{ est barycentre de } \begin{array}{c|c} A' & B' \\ \hline \alpha & \beta \end{array} \end{array}\right\} \Longrightarrow (BB') \,//\, (AA')$$

- - En termes d'équilibres

$$\left.\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{c|c|c} I & A & B \\ \hline \gamma & \alpha & \beta \end{array}\right\} \text{ est un équilibre} \\ \\ \left\{\begin{array}{c|c|c} I & A' & B' \\ \hline \gamma & \alpha & \beta \end{array}\right\} \text{ est un équilibre} \end{array}\right\} \Longrightarrow (BB') \,//\, (AA')$$

Remarque: on voit ici le lien avec le quadrilatère complet et le trapèze complet.





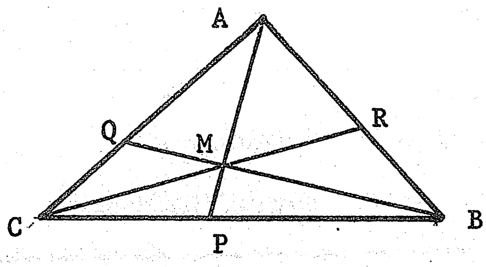
V - Les configurations et théorèmes de Céva et Ménélaus

Les théorèmes de Céva et de Ménélaüs jouent un rôle important dans la résolution des problèmes d'incidence: alignement, concours, parallèlisme ...

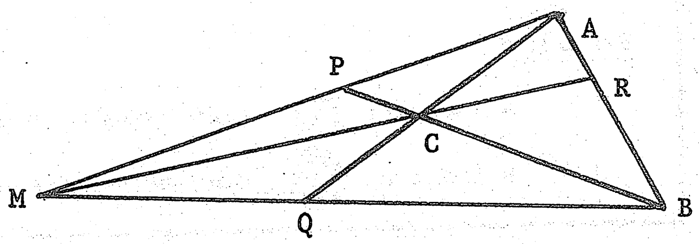
Leur connaisance simultanée est indispensable car, des problèmes de l'un de ces types peut souvent être transformé en problèmes des deux autres types.

La considération simultanée des configurations associées conduira ultérieurement aux notions de points conjugués, d'harmonicité, de polaires de droites.

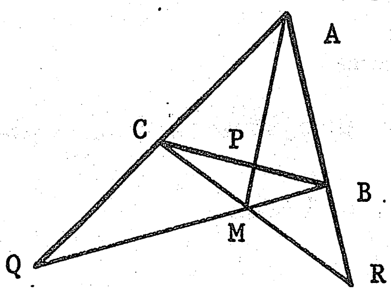
1° Les quatre aspects de la configuration de Céva.



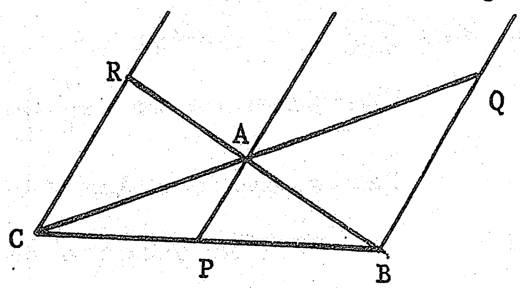
(C_1): M intérieur à ABC



(C_2): M extérieur, "en angle"



(C_3): M extérieur,"en côté"



(C_4): (AP), (BQ) et (CR) parallèles

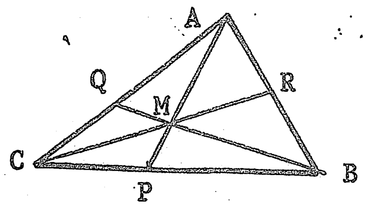
(C_1) et (C_2) sont tout à fait analogues

(C_3) est vraiment différent et d'utilisation plus difficile

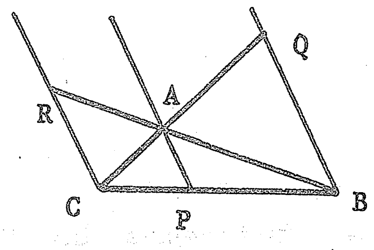
(C_4) est proche de la configuration de Thalès. (M est le point à l'infini de (AP)).

2° <u>Le théorème de de Céva</u> (Il s'agit de la partie directe)

On suppose que les points P, Q et R sont respectivement situés sur les côtés (BC), (CA) et (AB) du triangle ABC.



$\boxed{1}$



$\boxed{2}$

<u>Enoncé</u>: Si (AP), (BQ) et (CR) sont concourantes $\boxed{1}$
ou
Si (AP), (BQ) et (CR) sont parallèles $\boxed{2}$

alors il existe trois réels α, β et γ tels que:

R est barycentre de $\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline \alpha & \beta \end{array}$

P est barycentre de $\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline \beta & \gamma \end{array}$

Q est barycentre de $\begin{array}{c|c} C & A \\ \hline \gamma & \alpha \end{array}$

<u>De plus</u>

- Le cas $\boxed{1}$ correspond à $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ (concours)
- Le cas $\boxed{2}$ correspond à $\alpha + \beta + \gamma = 0$ (parallèlisme)

<u>Démonstration</u>:

- Cas $\boxed{1}$: il suffit de considérer M comme barycentre de $\begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline \alpha & \beta & \gamma \end{array}$ et de projeter sur chaque côté.

  Par exemple selon (AP) sur (BC) on obtient

  P barycentre de $\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline \beta & \gamma \end{array}$

- Cas $\boxed{2}$: on peut trouver β et γ tels que

  P soit le barycentre de $\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline \beta & \gamma \end{array}$

  en posant $\alpha = -\beta - \gamma$ $(\alpha + \beta + \gamma = 0)$ on obtient

  l'équilibre $\left\{\begin{array}{c|c|c} P & B & C \\ \hline \alpha & \beta & \gamma \end{array}\right\}$

  qui se projette selon les équilibres $\left\{\begin{array}{c|c|c} A & B & R \\ \hline \alpha & \beta & \gamma \end{array}\right\}$ et $\left\{\begin{array}{c|c|c} A & Q & C \\ \hline \alpha & \beta & \gamma \end{array}\right\}$

  ce qui correspond bien au résultat annoncé.

3° <u>Réciproque du théorème de Céva</u>.

(C'est surtout elle qui va servir dans les problèmes)

> S'il existe trois réels α, β et γ tels que:
>
> R est barycentre de $\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline \alpha & \beta \end{array}$
>
> P est barycentre de $\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline \beta & \gamma \end{array}$
>
> Q est barycentre de $\begin{array}{c|c} C & A \\ \hline \gamma & \alpha \end{array}$
>
> alors les droites (AP), (BQ) et (CR) sont
>
> $\boxed{1}$ concourantes si $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$
>
> $\boxed{2}$ parallèles si $\alpha + \beta + \gamma = 0$

<u>Démonstration</u>:

On réutilise la partie directe:

$\boxed{1}$ On considère le barycentre de $\begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline \alpha & \beta & \gamma \end{array}$

Il est situé sur (AP), (BQ) et (CR).

$\boxed{2}$ En projetant l'équilibre $\left\{\begin{array}{c|c|c} B & P & C \\ \hline \beta & -\beta-\gamma & \gamma \\ \hline \beta & \alpha & \gamma \end{array}\right\}$

on obtient les deux équilibres $\left\{\begin{array}{c|c|c} Q & A & C \\ \hline \beta & \alpha & \gamma \end{array}\right\}$ et $\left\{\begin{array}{c|c|c} B & A & R \\ \hline \beta & \alpha & \gamma \end{array}\right\}$

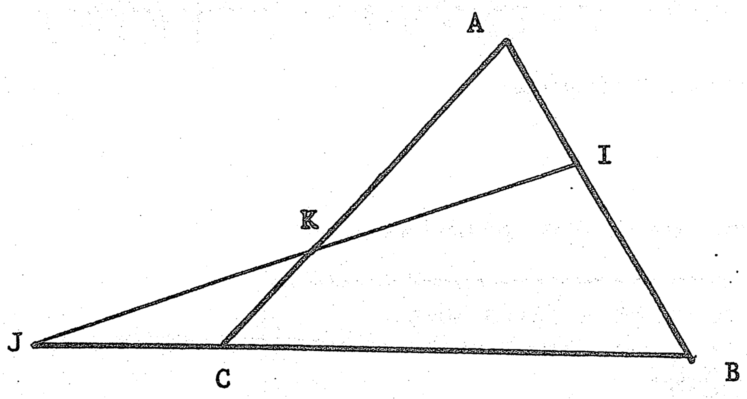
En éliminant A, on obtient l'équilibre $\left\{\begin{array}{c|c|c|c} B & Q & C & R \\ \hline \beta & -\beta & -\gamma & \gamma \end{array}\right\}$

qui assure le parallélisme de (BQ) et (CR).

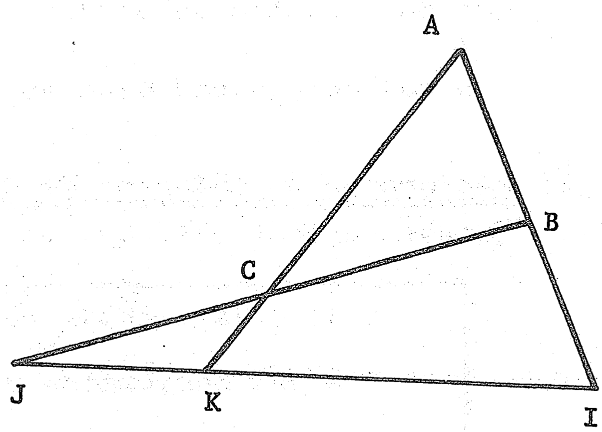
(On peut aussi dans le cas $\boxed{2}$ utiliser la configuration de Thalès-triangle).

4° <u>La configuration de Ménélaüs</u>.

Les points I, J et K sont des points situés respectivement sur (AB), (BC) et (CA).



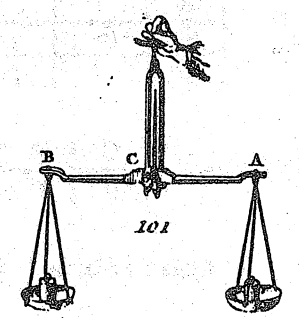
$\boxed{M_1}$



$\boxed{M_2}$

Sans les noms des points on a (évidemment) la configuration du quadrilatère complet (qui est contenue dans la configuration de Céva).

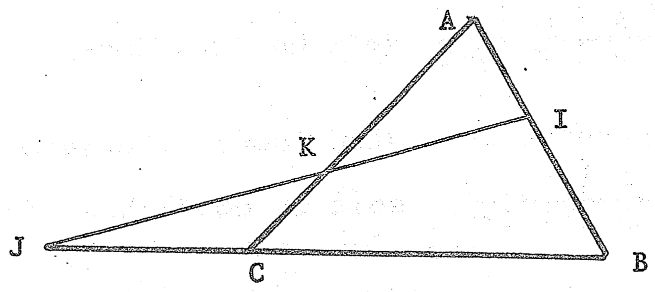
La distinction entre $\boxed{M_1}$ et $\boxed{M_2}$ provient de l'axiome de Pasch: *Une droite ne passant par aucun sommet d'un triangle coupe 0 ou 2 côtés (segments) de ce triangle.*



5° Forme barycentrique du théorème de Ménélaüs.

a) Théorème

Soit ABC un triangle et I, J et K trois points situés (respectivement) sur (AB), (BC) et (CA)



• Si I, J et K sont distincts des sommets et alignés

alors il existe trois nombres réels α, β et γ tels que I, J et K soient les barycentres de $\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline \alpha & -\beta \end{array}$, $\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline \beta & -\gamma \end{array}$ et $\begin{array}{c|c} C & A \\ \hline \gamma & -\alpha \end{array}$ $\boxed{1}$

•• S'il existe trois nombres réels α, β et γ tels que I, J et K soient les barycentres de $\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline \alpha & -\beta \end{array}$, $\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline \beta & -\gamma \end{array}$ et $\begin{array}{c|c} C & A \\ \hline \gamma & -\alpha \end{array}$ $\boxed{1}$

alors I, J et K sont alignés

Une variante est la suivante

I, J et K sont alignés
si et seulement si
il existe trois nombres réels a, b et c tels que I, J et K soient les barycentres de $\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline a & b \end{array}$, $\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline b & c \end{array}$ et $\begin{array}{c|c} C & A \\ \hline c & -a \end{array}$ $\boxed{2}$

On y perçoit mieux le lien avec le théorème de Céva.
(voir ultérieurement points conjugués et division harmonique)

Remarque 1 : il est tout à fait possible de formuler $\boxed{1}$ et $\boxed{2}$ en termes d'équilibres, mais on y perdrait ici en lisibilité de formulations.

Remarque 2 : il est d'usage d'exprimer la restriction "distincts des sommets" pour la réciproque, ce qui est inutile. Ceci étant supposé pour la formulation par équivalence.

b) Démonstration

- Partie directe: I, J et K sont alignés.

I est un barycentre de A et B, donc il existe des réels α et β

tels que $\left\{\begin{array}{c|c|c} A & B & I \\ \hline \alpha & -\beta & \beta-\alpha \end{array}\right\}$ soit un équilibre

J est un barycentre de B et C, donc il existe un réel γ

tel que $\left\{\begin{array}{c|c|c} B & C & J \\ \hline \beta & -\gamma & \gamma-\beta \end{array}\right\}$ soit un équilibre (car $\beta \neq 0$).

La somme de ces deux équilibres est l'équilibre $\left\{\begin{array}{c|c|c|c} A & C & I & J \\ \hline \alpha & -\gamma & \beta-\alpha & \gamma-\beta \end{array}\right\}$

Or les droites (AC) et (IJ) sont sécantes en K donc

K est le barycentre de $\begin{array}{c|c} C & A \\ \hline -\gamma & \alpha \\ \hline \gamma & -\alpha \end{array}$

- Réciproque: α, β et γ sont trois réels vérifiant $\boxed{1}$

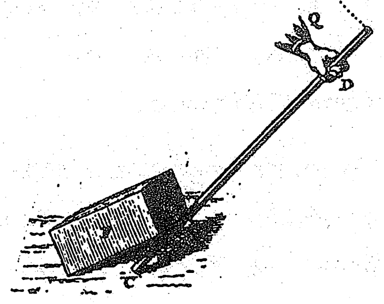
L'addition des trois équilibres

$\left\{\begin{array}{c|c|c} A & B & I \\ \hline \alpha & -\beta & \beta-\alpha \end{array}\right\}$, $\left\{\begin{array}{c|c|c} B & C & J \\ \hline \beta & -\gamma & \gamma-\beta \end{array}\right\}$ et $\left\{\begin{array}{c|c|c} C & A & K \\ \hline \gamma & -\alpha & \alpha-\gamma \end{array}\right\}$

donne l'équilibre $\left\{\begin{array}{c|c|c} I & J & K \\ \hline \beta-\alpha & \gamma-\beta & \alpha-\gamma \end{array}\right\}$

ce qui prouve l'alignement des trois points I, J et K.

c) Remarque: contrairement à ce qui va suivre il n'est nul besoin, dans la réciproque ci-dessus de supposer les points distincts des sommets ou distincts deux à deux.



6° Les formes traditionnelles des théorèmes de Céva et Ménélaüs.

On doit supposer les points distincts des sommets.

Soit R, S et T ces points situés sur les côtés d'un triangle ABC

posons $k = \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} \times \frac{\overline{SB}}{\overline{SC}} \times \frac{\overline{TC}}{\overline{TA}}$

Enoncés:

R, S et T alignés $\Leftrightarrow k = 1$	(AR), (BS) et (CT) concourantes ou parallèles $\Leftrightarrow k = -1$
Ménélaüs	Céva

Démonstration

Posons $r = \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}}$, $s = \frac{\overline{SB}}{\overline{SC}}$ et $t = \frac{\overline{TC}}{\overline{TA}}$ (on a $k = r \times s \times t$)

Ce qui correspond vectoriellement à:

$\overrightarrow{RA} = r.\overrightarrow{RB}$, $\overrightarrow{SB} = s.\overrightarrow{SB}$ et $\overrightarrow{TC} = t.\overrightarrow{TA}$

et du point de vue barycentrique à

R est barycentre de $\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 1 & -r \end{array}$,

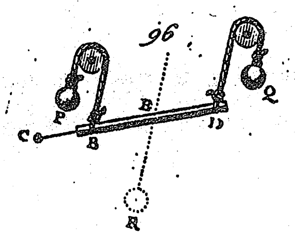
S est barycentre de $\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline 1 & -s \\ \hline -r & rs \end{array}$

T est barycentre de $\begin{array}{c|c} C & A \\ \hline 1 & -t \\ \hline rs & -rst \end{array}$

D'après ce qui précède (2°, 3° et 5°):

R, S et sont alignés si et seulement si $rst = 1$ $(k = 1)$
(Ménélaüs c'est plus)

(AR), (BS) et (CT) sont concourantes ou parallèles si et seulement si $rst = -1$ $(k = -1)$



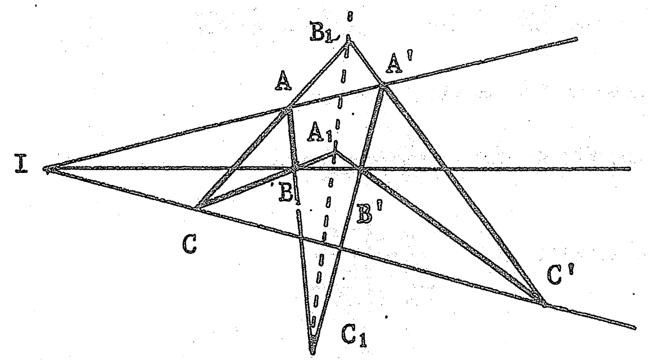
7° <u>Exemple d'une forme d'intervention de ces deux théorèmes.</u>

a) La procédure utilisée dans la démonstration des deux théorèmes et de leurs réciproques est très simple et, dans la pratique, cette démonstration sera souvent faite sur le cas particulier lui-même , sans citer le théorème de Céva ou de Ménélaüs, que l'on se bornera à reconnaître.

Il est possible que les formulations soient plus souvent en terme d'équilibres qu'en terme de barycentre.

Nous allons en donner un exemple bien que nous réservions l'étude du fonctionnement de l'outil à un autre paragraphe. L'exemple vaut aussi par l'importance de son résultat qui servira aussi dans les problèmes de même nature.

b) <u>Le théorème de Desargues.</u>



Les triangles ABC et A'B'C' sont tels que:

(AB) et (A'B') se coupent en C_1

(BC) et (B'C') se coupent en A_1

(CA) et (C'A') se coupent en B_1

Si les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes, alors les points A_1, B_1 et C_1 sont alignés.

Sa réciproque:

$$\left[\begin{array}{l} A_1,\ B_1 \text{ et } C_1 \text{ alignés} \\ \text{et} \\ (AA') \text{ et } (BB') \text{ sécantes} \end{array}\right] \Longrightarrow (AA'),\ (BB') \text{ et } (CC') \text{ concourantes}$$

s'obtient en appliquant la partie directe aux triangles $BB'C_1$ et $CC'B_1$

Les cas de parallélisme sont à traiter différemment.

Démonstration:

Supposons les droites (AA'), (BB') et (CC') concourantes en I.

On peut définir I comme barycentre de $\begin{array}{c|c} A & A' \\ \hline \alpha & \alpha' \end{array}$, $\begin{array}{c|c} B & B' \\ \hline \beta & \beta' \end{array}$ et $\begin{array}{c|c} C & C' \\ \hline \gamma & \gamma' \end{array}$

en imposant $\alpha + \alpha' = \beta + \beta' = \gamma + \gamma'$ (l'un des coefficients restant arbitraire)

On a alors les équilibres

$\left\{\begin{array}{c|c|c|c} A & A' & B & B' \\ \hline \alpha & \alpha' & -\beta & -\beta' \end{array}\right\}$, $\left\{\begin{array}{c|c|c|c} B & B' & C & C' \\ \hline \beta & \beta' & -\gamma & -\gamma' \end{array}\right\}$ et $\left\{\begin{array}{c|c|c|c} C & C' & A & A' \\ \hline \gamma & \gamma' & -\alpha & -\alpha' \end{array}\right\}$

C_1 étant commun aux droites (AB) et (A'B') on en déduit que:

- C_1 est barycentre de $\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline \alpha & -\beta \end{array}$ et l'équilibre $\left\{\begin{array}{c|c|c} A & B & C_1 \\ \hline \alpha & -\beta & \beta-\alpha \end{array}\right\}$

et de même que:

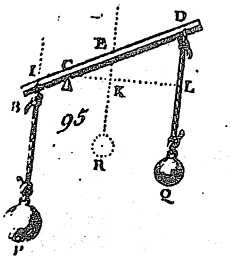
- A_1 est barycentre de $\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline \beta & -\gamma \end{array}$ et l'équilibre $\left\{\begin{array}{c|c|c} B & C & A_1 \\ \hline \beta & -\gamma & \gamma-\beta \end{array}\right\}$

- B_1 est barycentre de $\begin{array}{c|c} C & A \\ \hline \gamma & -\alpha \end{array}$ et l'équilibre $\left\{\begin{array}{c|c|c} C & A & B_1 \\ \hline \gamma & -\alpha & \alpha-\gamma \end{array}\right\}$

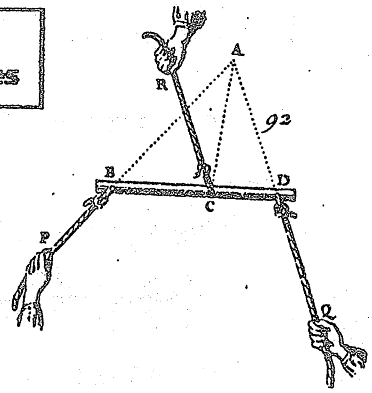
L'addition de ces trois derniers équilibres conduit à

l'équilibre $\left\{\begin{array}{c|c|c} A_1 & B_1 & C_1 \\ \hline \gamma-\beta & \alpha-\gamma & \beta-\alpha \end{array}\right\}$ d'où A_1, B_1 et C_1 sont alignés.

On reconnaît ici une utilisation du théorème de Ménélaüs que l'on a en fait redémontré.



VI - Recherches d'équilibres
Lien avec les coordonnées barycentriques



1° Repérage sur une droite (AB)

a) Définition

Etant donné deux points A et B distincts,
la droite (AB) est l'ensemble des barycentres de $\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline \alpha & \beta \end{array}$
α et β décrivant $\mathbb{R}$ et vérifiant $\alpha + \beta \neq 0$ (II-3°-a)

fig 52

Le couple (α,β) est dit système de <u>coordonnées barycentriques</u> de C relativement à (A,B)
si et seulement si
C est barycentre de $\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline \alpha & \beta \end{array}$

b) Expression

Nous avons vu au IV-1°-b que:

A, B et C alignés $\Leftrightarrow$ $\left\{\begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline \alpha & \beta & \gamma \end{array}\right\}$ est un équilibre
avec α, β et γ proportionnels, au signe près, aux distances BC, CA et AB.

Plus exactement, α, β et γ sont proportionnels aux coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{AB}$ dans une même base.
On peut utiliser:

- des abscisses (dans un repère quelconque): $\left\{\begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline c-b & a-c & b-a \end{array}\right\}$
- des mesures algébriques: $\left\{\begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline \overline{BC} & \overline{CA} & \overline{AB} \end{array}\right\}$

Exercices

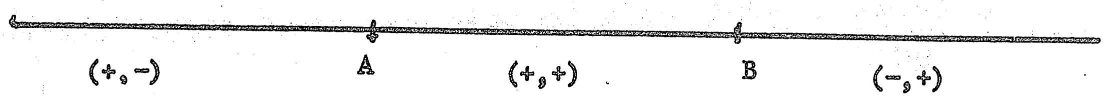
E1 Examiner les cas de A, B et I milieu de [A,B]

E2 Comparer les positions de $M(\alpha,\beta)$ et $N(\beta,\alpha)$ sur (AB).

E3 Montrer que si $M \in [A,B]$ alors α et β sont proportionnels à MB et MA ou $\frac{1}{MA}$ et $\frac{1}{MB}$

c) Localisation du barycentre

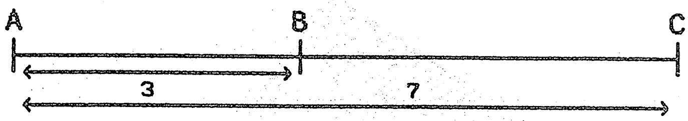
Quitte à changer tous les signes on supposera $\alpha + \beta > 0$.
La position relative de C sur (AB) est liée aux signes de α et β de la façon suivantes:



Exercices

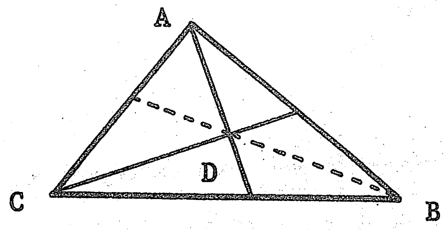
E4 Comment sont caractérisés les points du segment [A,B]?

E5 Quel est l'équilibre associé au schéma ci-dessous?



2° Repérage dans le plan (ABC)

a) Définition

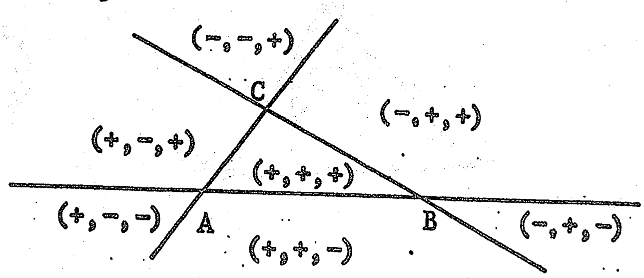


Etant donné un triangle ABC,
pour tout point D du plan (ABC) on peut déterminer
un équilibre $\left\{\begin{array}{c|c|c|c} A & B & C & D \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{array}\right\}$ avec $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ (II-3°-b)

On dit que (α, β, γ) est un système de coordonnées barycentriques par rapport à (A,B,C) de D

b) Localisation.

On peut supposer que $\alpha + \beta + \gamma > 0$
Dans (A,B,C) le point D a pour coordonnées $\left(\dfrac{\beta}{\alpha + \beta + \gamma}, \dfrac{\alpha}{\alpha + \beta + \gamma}\right)$
En utilisant les repères (B,C,A) et (C,A,B) on obtient la distribution des signes ci-dessous:



Exercices

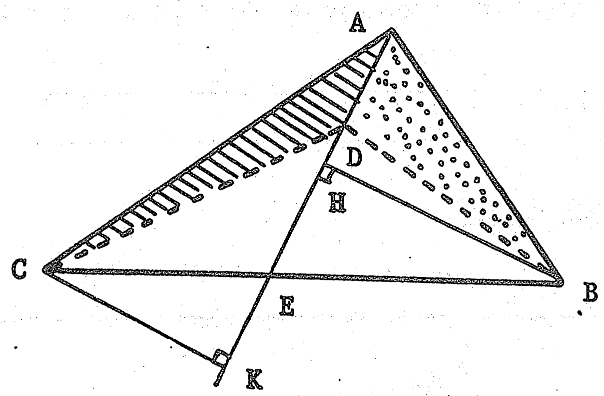
E6 Comment sont caractérisés les points de (AB), (BC) et (CA)?

E7 Comment sont caractérisés les points intérieurs au triangle ABC?

E8 Comment sont caractérisés les demi-plans limités par (BC)?

c) Expression. Détermination de β et γ.

Etant donné un triangle ABC et un point D,



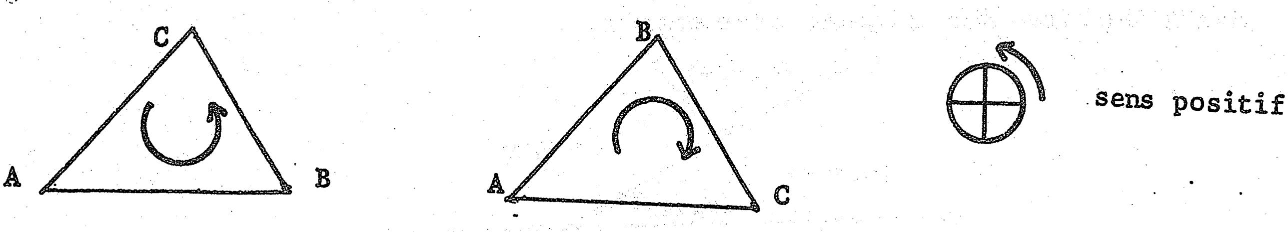
L'équilibre $\left\{\begin{array}{c|c|c|c} A & B & C & D \\ \hline \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{array}\right\}$ se projette sur (BC) suivant (AD) selon l'équilibre $\left\{\begin{array}{c|c|c} B & C & E \\ \hline \beta & \gamma & / \end{array}\right\}$

Si E est fixé sur (BC) tout point de (AE) conduit au même couple (β, γ) (ou à un couple proportionnel).

Les triangles DAC et DBA ont pour hauteurs CK et DH qui sont proportionnels, à EC et EB, d'autre part ils ont la même base [A,D].

Ainsi, au signe près, β et γ sont proportionnels aux aires des triangles DAC et DBA. (On remarquera que ceci correspond à une répartition de masse sur la plaque ABC, si D est intérieur).

On peut utiliser des aires algébriques notées $\overline{ABC}$. On choisit une orientation et on obtient des aires positives ou négatives:



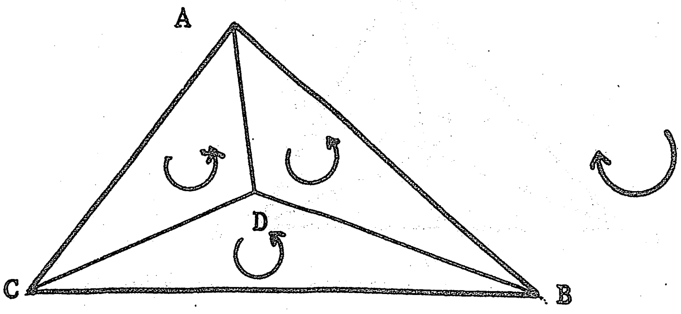
Remarquons que: ▪ $\overline{ABC} = \frac{1}{2} \times \sin(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$

▪ $\overline{ABC} = -\overline{ACB}$

▪ $\overline{ABC} = \overline{BCA}$

L'équilibre réalisé est alors

$$\left\{\begin{array}{c|c|c|c} A & B & C & D \\ \hline \overline{DCB} & \overline{DAC} & \overline{DBA} & \overline{ABC} \end{array}\right\} \quad \text{ou} \quad \left\{\begin{array}{c|c|c|c} A & B & C & D \\ \hline \overline{DBC} & \overline{ADC} & \overline{ABD} & -\overline{ABC} \end{array}\right\}$$



On vérifiera que cette utilisation d'aires algébriques correspond bien à la localisation du b).

Exercice

E9 Démontrer que l'équilibre suivant (au demeurant fort sympathique) est faux:

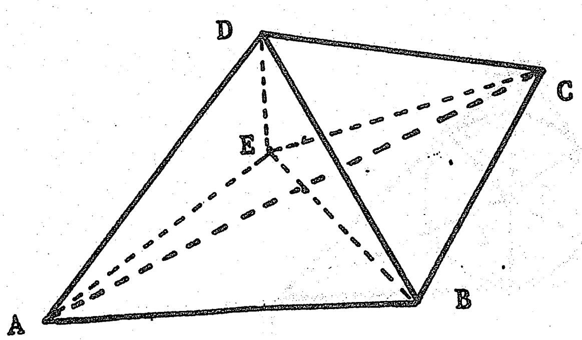
$$\left\{\begin{array}{c|c|c|c} A & B & C & D \\ \hline \overline{DCB} & \overline{CDA} & \overline{DAB} & \overline{ABC} \end{array}\right\}$$

3° Extension à l'espace.

On se donne un tétraèdre ABCD et on se place dans le repère (A,B,C,D). Les aires ci-dessus seront remplacées par les volumes algébriques de tétraèdres selon la règle du bonhomme d'Ampère. Dans le cas ci-dessous, par exemple, on aurait

l'équilibre: $\left\{\begin{array}{c|c|c|c|c} A & B & C & D & E \\ \hline \overline{EDBC} & \overline{ECAD} & \overline{EBBA} & \overline{EACB} & \overline{ABCD} \end{array}\right\}$

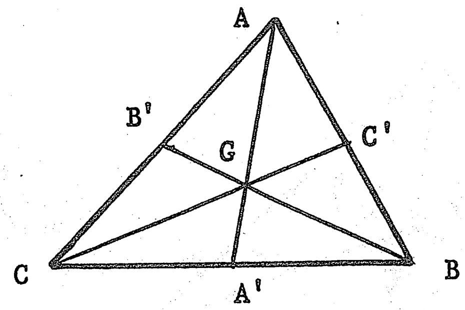
($\overline{ABCD}$ désigne le volume du tétraèdre ABCD, etc...)



4° Quelques équilibres classiques dans le triangle

Dans tout ce paragraphe nous utiliserons les notations classiques concernant le triangle et les droites particulières qui lui sont attachées.

a) Centre de gravité.

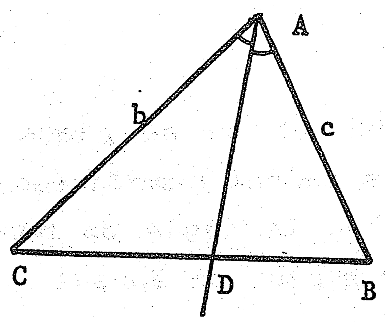


Soit G le centre de gravité du triangle ABC,

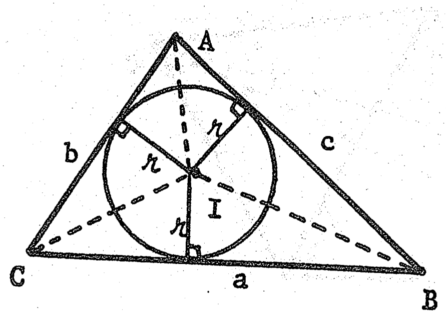
on a l'équilibre $\left\{\begin{array}{c|c|c|c} A & B & C & G \\ \hline 1 & 1 & 1 & / \end{array}\right\}$

On montrera que G est situé sur chacune des trois médianes et que celles-ci découpent le triangle ABC en six triangles de même aire.

b) Centre du cercle inscrit.



□ I étant commun à deux bissectrices intérieures, on montrera qu'il est intérieur au triangle ABC.



□□ On prouvera le résultat important suivant (à réinvestir):

(AD) étant une bissectrice intérieure:

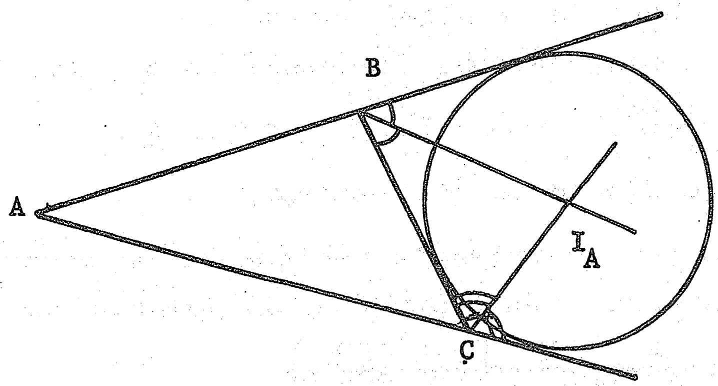
$$\left\{\begin{array}{c|c|c} B & C & D \\ \hline b & c & -b-c \end{array}\right\} \quad \text{est un équilibre}$$

□□□ On en déduira l'équilibre $\left\{\begin{array}{c|c|c|c} A & B & C & I \\ \hline a & b & c & / \end{array}\right\}$

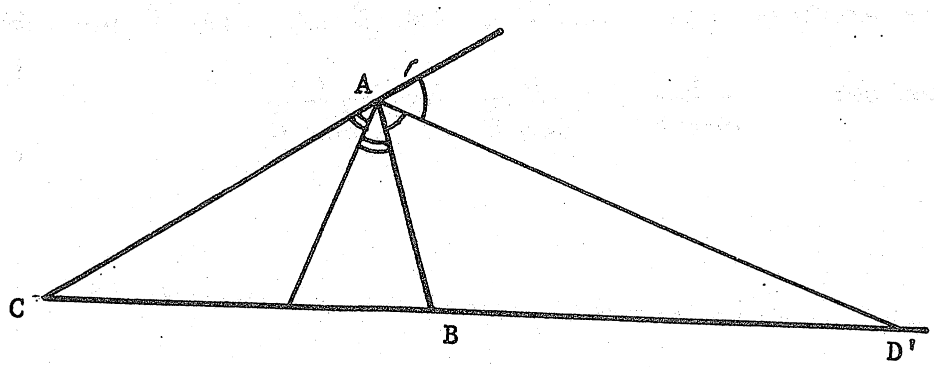
(Les aires $\overline{ICB}$, $\overline{IAC}$ et $\overline{IBA}$ sont en effet proportionnelles à a, b et c).

On aura ainsi prouvé que les bissectrices sont concourantes.

c) <u>Centres des cercles exinscrits</u>.



□ I_A désigne le point commun aux deux bissectrices extérieures issues de B et C. On montrera que I_A est extérieur à ABC.



□□ On prouvera le résultat important suivant (à réinvestir):

(AD') étant une bissectrice extérieure:

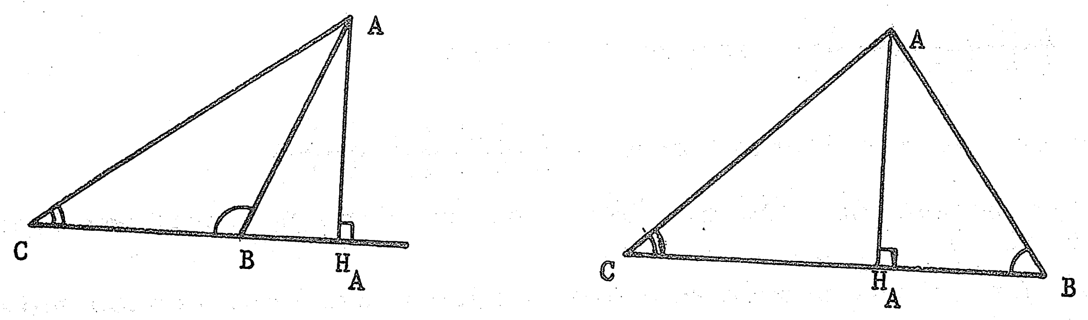
$b \neq c$ (ABC non isocèle en A)

$$\left\{\begin{array}{c|c|c} B & C & D' \\ \hline b & -c & c-b \end{array}\right\} \quad \text{est un équilibre}$$

□□□ On en déduira l'équilibre $\left\{\begin{array}{c|c|c|c} A & B & C & I_A \\ \hline -a & b & c & a-b-c \end{array}\right\}$

On aura ainsi prouvé que I_A est sur la bissectrice intérieure issue de A.

d) Orthocentre.



□ On établira d'abord le résultat suivant:

Dans les deux configurations ci-dessus on a l'équilibre

$\left\{\begin{array}{c|c|c} B & C & H_A \\ \hline \tan \hat{B} & \tan \hat{C} & / \end{array}\right\}$ avec $\tan \hat{B} + \tan \hat{C} \neq 0$

(Il est inutile d'orienter les angles)

□□ En excluant le cas du triangle rectangle, on montrera que les trois hauteurs sont concourantes en un point H car on obtient l'équilibre $\left\{\begin{array}{c|c|c|c} A & B & C & H \\ \hline \tan \hat{A} & \tan \hat{B} & \tan \hat{C} & / \end{array}\right\}$

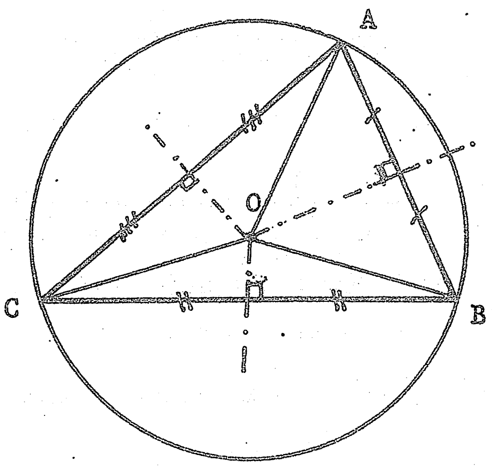
On pourra s'assurer que $\tan \hat{A} + \tan \hat{B} + \tan \hat{C} \neq 0$

en montrant que $\tan \hat{A} + \tan \hat{B} + \tan \hat{C} = \tan \hat{A} \times \tan \hat{B} \times \tan \hat{C}$

□□□ On pourra montrer que $\tan \hat{A}$, $\tan \hat{B}$ et $\tan \hat{C}$ peuvent être remplacés par $\dfrac{a}{\cos \hat{A}}$, $\dfrac{b}{\cos \hat{B}}$ et $\dfrac{c}{\cos \hat{C}}$

e) <u>Centre du cercle circonscrit.</u>

On sait que les médiatrices sont concourantes en O.



□ On utilise l'équilibre $\left\{\begin{array}{c|c|c|c} A & B & C & O \\ \hline \overline{OCB} & \overline{OAC} & \overline{OBA} & \overline{ABC} \end{array}\right\}$ (On a bien $\overline{ABC} \neq 0$)

On sait que:

$$\overline{OCB} = \frac{1}{2} \times OC \times OB \times \sin\,(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OB})$$

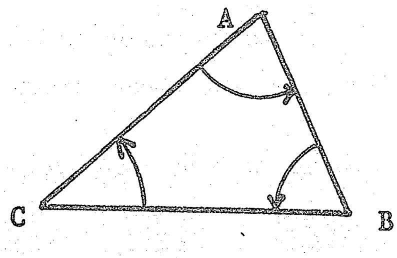
$$\overline{OAC} = \frac{1}{2} \times OA \times OC \times \sin\,(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC})$$

$$\overline{OBA} = \frac{1}{2} \times OB \times OA \times \sin\,(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA})$$

D'autre part: $OA = OB = OC = R$

On a donc l'équilibre $\left\{\begin{array}{c|c|c|c} A & B & C & O \\ \hline \sin\,(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OB}) & \sin\,(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}) & \sin\,(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA}) & / \end{array}\right\}$

D'autre part, en orientant les angles on a:



$(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OB}) = 2(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB})$, $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}) = 2(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC})$ et $(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA}) = 2(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA})$

Ainsi on a l'équilibre $\left\{\begin{array}{c|c|c|c} A & B & C & O \\ \hline \sin 2\hat{A} & \sin 2\hat{B} & \sin 2\hat{C} & / \end{array}\right\}$

Ceci prouve que $\sin 2\hat{A} + \sin 2\hat{B} + \sin 2\hat{C} \neq 0$

□□ Variante

- On peut utiliser le fait que O est l'orthocentre du "triangle des milieux" A'B'C' et

l'équilibre $\left\{\begin{array}{c|c|c|c} A' & B' & C' & O \\ \hline 2\tan\hat{A} & 2\tan\hat{B} & 2\tan\hat{C} & / \end{array}\right\}$

En orientant les angles pour continuer les calculs, on obtient

l'équilibre $\left\{\begin{array}{c|c|c|c} A & B & C & O \\ \hline \tan\hat{B} + \tan\hat{C} & \tan\hat{C} + \tan\hat{A} & \tan\hat{A} + \tan\hat{B} & / \end{array}\right\}$

- Cette forme peut aussi être obtenue en utilisant la relation $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ et un résultat déduit du d):

$$(\tan\hat{A} + \tan\hat{B} + \tan\hat{C}).\overrightarrow{OM} = \tan\hat{A}.\overrightarrow{OA} + \tan\hat{B}.\overrightarrow{OB} + \tan\hat{C}.\overrightarrow{OC}$$

5° Problème général de l'alignement à l'aide coordonnées barycentriques.

■ Etant donné un triangle ABC supposons que P, Q et R soient repérés par les équilibres $\boxed{e1}$, $\boxed{e2}$ et $\boxed{e3}$

$$\boxed{e1} = \left\{\begin{array}{c|c|c|c} A & B & C & P \\ \hline \alpha 1 & \beta 1 & \gamma 1 & / \end{array}\right\}, \quad \boxed{e2} = \left\{\begin{array}{c|c|c|c} A & B & C & Q \\ \hline \alpha 2 & \beta 2 & \gamma 2 & / \end{array}\right\}, \quad \boxed{e3} = \left\{\begin{array}{c|c|c|c} A & B & C & R \\ \hline \alpha 3 & \beta 3 & \gamma 3 & / \end{array}\right\}$$

■ P, Q et R alignés
si et seulement si
on peut trouver un équilibre $\boxed{e}$ $\left\{\begin{array}{c|c|c} P & Q & R \\ \hline \bullet & \bullet & \bullet \end{array}\right\}$

On va rechercher à déduire $\boxed{e}$ de $\boxed{e1}$, $\boxed{e2}$ et $\boxed{e3}$

Mais il serait illusoire de croire, sauf cas favorables, que l'on pourra trouver, en contemplant béatement les coefficients, la bonne combinaison linéaire éliminant simultanément A, B et C, combinaison qui correspondrait à une superposition d'équilibres physiques associés.

■ Il s'agit en fait de déterminer des coefficients x , y et z de façon que: $\boxed{e} = x\boxed{e1} + y\boxed{e2} + z\boxed{e3}$

L'élimination de A, B et C se traduit par le système homogène:

$$(\mathcal{S}) \quad \left\{\begin{array}{l} \alpha 1 x + \alpha 2 y + \alpha 3 z = 0 \\ \beta 1 x + \beta 2 y + \beta 3 z = 0 \\ \gamma 1 x + \gamma 2 y + \gamma 3 z = 0 \end{array}\right.$$

Ce système a une solution, autre que la solution triviale (0,0,0) $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 0$

Ceci donne une condition d'alignement mais ne précise pas la position relative des points.

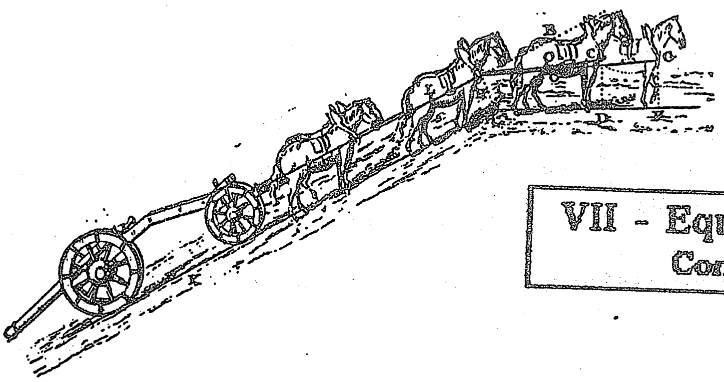
■ <u>Dans la pratique</u>, on pourra profiter de la présence d'un zéro parmi les coefficients, mais, dans le cas général on utilisera des procédés s'apparentant à la méthode du pivot. Par exemple:

en éliminant C entre $\boxed{e_1}$ et $\boxed{e_3}$, on obtient $\boxed{e'_1}$

en éliminant C entre $\boxed{e_2}$ et $\boxed{e_3}$, on obtient $\boxed{e'_2}$

puis en éliminant C entre $\boxed{e'_1}$ et $\boxed{e'_2}$, on est conduit à un équilibre qui doit éliminer A, si P, Q et R sont alignés, et qui permettra de préciser la position relative des trois points.

On pourra procéder d'une manière analogue pour prouver la coplanarité de quatre points de l'espace, mais les difficultés techniques augmenteront.

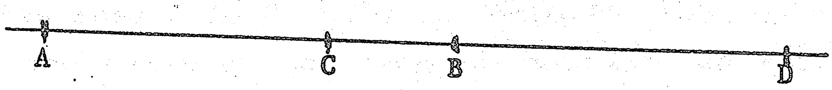


VII - Equilibres et harmonicité
Conjugaison - Polaires

Il s'agit d'un thème sur lequel va fonctionner "l'outil barycentre et équilibres"

1° Points conjugués, division harmonique.

a) Définition en termes de barycentre ou d'équilibre.



Deux points C et D sont dits conjugués par rapport à deux points A et B (supposés distincts)

si et seulement si

C est barycentre de $\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline \alpha & \beta \end{array}$ et D est barycentre de $\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline \alpha & -\beta \end{array}$

ou bien

si et seulement si

on a les deux équilibres

$\boxed{e1} = \left\{ \begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline \alpha & \beta & -\alpha-\beta \end{array} \right\}$ et $\boxed{e2} = \left\{ \begin{array}{c|c|c} A & B & D \\ \hline \alpha & -\beta & \beta-\alpha \end{array} \right\}$

On disait, naguère, que C et D divisait le segment [A,B] dans le même rapport k (ici $k = \left|\frac{\beta}{\alpha}\right|$)

Conditions: $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, $\alpha + \beta \neq 0$ et $\alpha - \beta \neq 0$

b) Propriété (Réciprocité)

Si C et D sont conjugués par rapport à A et B alors A et B sont conjugués par rapport à C et D.

En effet $\boxed{e1} + \boxed{e2}$: $\left\{ \begin{array}{c|c|c} A & C & D \\ \hline 2\alpha & -\alpha-\beta & \beta-\alpha \end{array} \right\}$ $\boxed{e1} - \boxed{e2}$: $\left\{ \begin{array}{c|c|c} B & C & D \\ \hline -2\beta & \alpha+\beta & \beta-\alpha \end{array} \right\}$

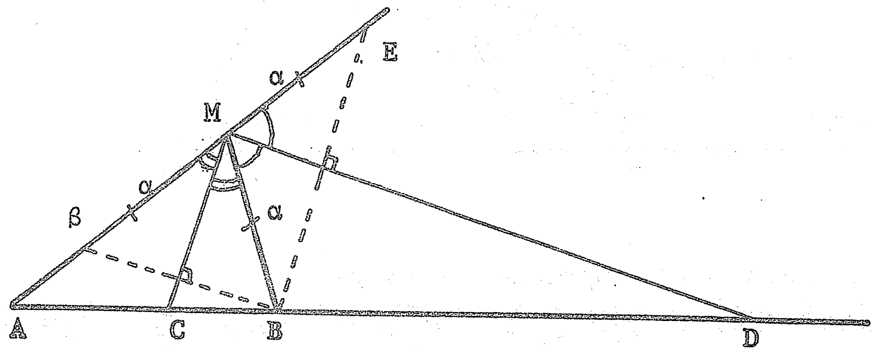
Nous obtenons le même coefficient pour D et des coefficients opposés pour C.

c) <u>Division harmonique.</u>

> On dit que (A,B,C,D) est une division harmonique pour dire que l'une des conditions précédentes est vérifiée.

<u>Obtention et tracé.</u>

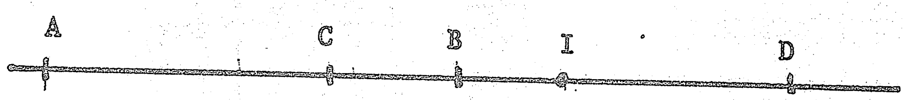
Le cas des bissectrices (VI-4°) permet d'obtenir une telle situation.



On construit C intérieur à [A,B] en utilisant $AM = \beta$ et $ME = \alpha$, puis (MC) // (BE), puis (MD) $\perp$ (MC)

Ceci nous conduit à la configuration caractéristique du 3°

d) <u>Repérage du milieu des conjugués.</u>



Enoncé sous forme traditionnelle:

> Si C et D divisent harmoniquement [A,B] dans le rapport k alors le milieu I de [C,D] divise [A,B] dans le rapport k^2

Plus précisément

Si on a les équilibres $\boxed{eC}$: $\left\{\begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline 1 & k & -1-k \end{array}\right\}$ et $\boxed{eD}$: $\left\{\begin{array}{c|c|c} A & B & D \\ \hline 1 & -k & k-1 \end{array}\right\}$

alors on a l'équilibre $\boxed{eI}$: $\left\{\begin{array}{c|c|c} A & B & I \\ \hline 1 & -k^2 & k^2-1 \end{array}\right\}$

Pour pouvoir utiliser le fait que I est le milieu de [C,D], il faut avoir en C et D des coefficients égaux. Pour cela on multiplie $\boxed{eD}$ par $(-k-1)$ et $\boxed{eC}$ par $(k-1)$ et on remplace

$$\begin{array}{|c|c|} D & C \\ \hline 1-k^2 & 1-k^2 \end{array} \quad \text{par} \quad \begin{array}{|c|} I \\ \hline 2-2k^2 \end{array}$$

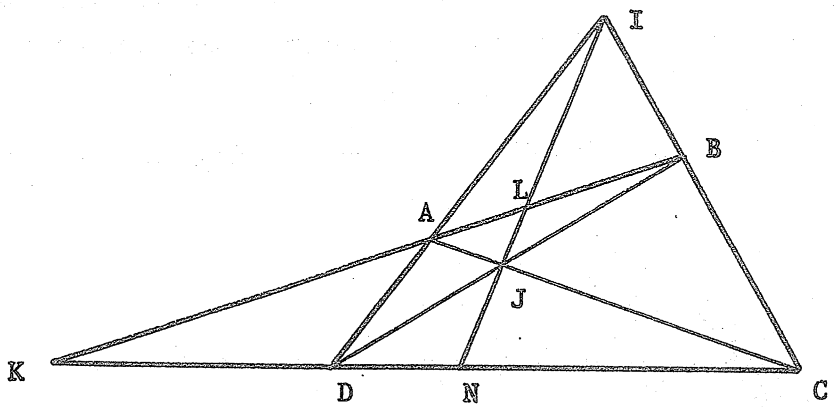
On a ainsi $\left\{\begin{array}{c|c|c|c|c} A & B & A & B & I \\ \hline k-1 & k^2-k & -k-1 & k^2+k & 2-2k^2 \end{array}\right\}$

Soit $\left\{\begin{array}{c|c|c} A & B & I \\ \hline -2 & 2k^2 & 2-2k^2 \end{array}\right\}$ ou $\left\{\begin{array}{c|c|c} A & B & I \\ \hline 1 & -k^2 & k^2-1 \end{array}\right\}$

Ceci prouve que I est extérieur à [A,B]

2° Points conjugués et quadrilatère complet.

a) Reprenons le travail et les résultats du IV-4°, 6° et 8°



Tous les points sont supposés exister.

Nous allons montrer que (I,J,L,N), (K,L,A,B) et (K,D,N,C) sont des divisions harmoniques.

On a pour l'équilibre associé au quadrilatère ABCD:

$\boxed{e}$ $\quad \left\{\begin{array}{c|c|c|c} A & B & C & D \\ \hline \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{array}\right\}$

et les équilibres:

$\boxed{e1}$ $\quad \left\{\begin{array}{c|c|c} A & C & J \\ \hline \alpha & \gamma & -\alpha-\gamma \end{array}\right\}$, $\qquad \boxed{e2}$ $\quad \left\{\begin{array}{c|c|c} B & D & J \\ \hline \beta & \delta & -\beta-\delta \end{array}\right\}$,

$\boxed{e3}$ $\quad \left\{\begin{array}{c|c|c} A & D & I \\ \hline \alpha & \delta & -\alpha-\delta \end{array}\right\}$, $\qquad \boxed{e4}$ $\quad \left\{\begin{array}{c|c|c} B & C & I \\ \hline \beta & \gamma & -\beta-\gamma \end{array}\right\}$

On en déduit l'équilibre $\boxed{e5}$ $\quad \left\{\begin{array}{c|c|c|c} A & B & I & J \\ \hline \alpha & -\beta & -\alpha-\delta & \beta+\delta \end{array}\right\}$

en calculant $\boxed{e3}$ - $\boxed{e2}$

Ainsi on obtient l'équilibre $\left\{\begin{array}{c|c|c} I & J & L \\ \hline -\alpha-\delta & \beta+\delta & \alpha-\beta \end{array}\right\}$

puisque les droites (AB) et (IJ) se coupent en L.

On en tire l'équilibre $\boxed{e6}$ $\left\{\begin{array}{c|c|c|c} D & C & I & J \\ \hline -\delta & \gamma & \alpha+\delta & -\alpha-\gamma \end{array}\right\}$ en calculant $\boxed{e1}$ - $\boxed{e3}$

Ainsi on obtient l'équilibre $\left\{\begin{array}{c|c|c} I & J & N \\ \hline \alpha+\delta & -\alpha-\gamma & \gamma-\delta \end{array}\right\}$ ou $\left\{\begin{array}{c|c|c} I & J & N \\ \hline \alpha+\delta & \beta+\delta & \gamma-\delta \end{array}\right\}$

puisque les droites (DC) et (IJ) se coupent en N.

Ainsi (L,N,I,J) est une division harmonique.

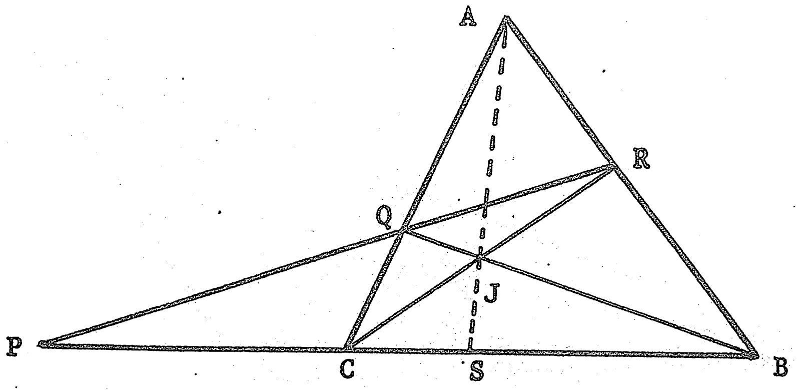
On a l'équilibre $\left\{\begin{array}{c|c|c} K & A & B \\ \hline -\alpha-\beta & \alpha & \beta \end{array}\right\}$ car (AB) et (CD) se coupent en K

et l'équilibre $\left\{\begin{array}{c|c|c} L & A & B \\ \hline \beta-\alpha & \alpha & -\beta \end{array}\right\}$ d'après $\boxed{e5}$

Donc (A,B,L,K) est une division harmonique.

On montre de même que (K,D,N,C) est une division harmonique.

b) <u>Céva, Ménélaüs et harmonicité</u>.



Montrons que (B,C,P,S) est une division harmonique.

Des équilibres $\left\{\begin{array}{c|c|c} A & C & Q \\ \hline \alpha & \gamma & -\alpha-\gamma \end{array}\right\}$ et $\left\{\begin{array}{c|c|c} A & B & R \\ \hline \alpha & \beta & -\alpha-\beta \end{array}\right\}$ on déduit:

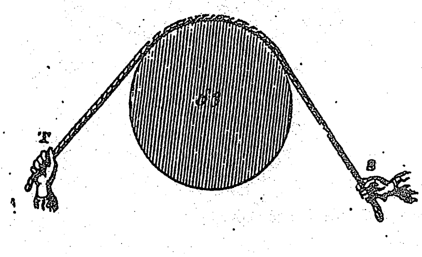
- J est barycentre de $\begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline \alpha & \beta & \gamma \end{array}$ car J est sur (CR) et (BQ),

et donc S est barycentre de $\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline \beta & \gamma \end{array}$ $\boxed{1}$

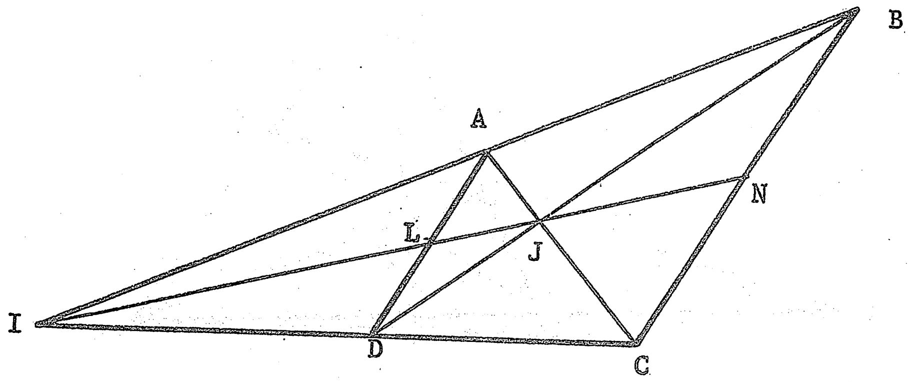
- par différence l'équilibre $\left\{\begin{array}{c|c|c|c} B & C & R & Q \\ \hline -\beta & \gamma & \alpha+\beta & -\alpha-\gamma \end{array}\right\}$

et donc P est barycentre de $\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline -\beta & \gamma \end{array}$ $\boxed{2}$

D'après $\boxed{1}$ et $\boxed{2}$, (B,C,P,S) est une division harmonique.



c) Cas du trapèze complet.



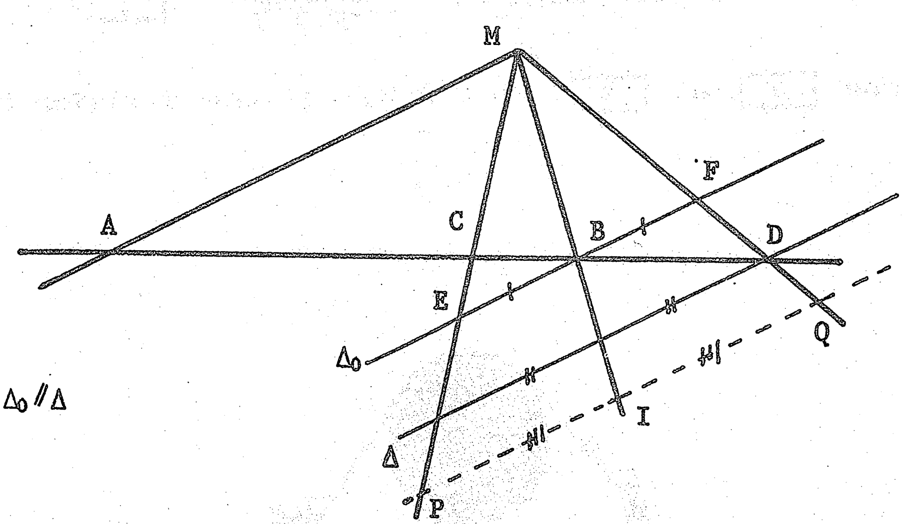
Pour montrer que (I,J,L,N) est une division harmonique,

- On utilise un équilibre associé à ABCD,
- On en déduit des équilibres à trois points utilisant I et J que l'on combine avec les équilibres traduisant le fait que L et N sont les milieux de [A,D] et [B,C] de façon à obtenir des équilibres du type $\left\{ \begin{array}{c|c|c} I & L & N \end{array} \right\}$ et $\left\{ \begin{array}{c|c|c} J & L & N \end{array} \right\}$ qui permettront de prouver le résultat souhaité.

3° Configuration caractéristique de l'harmonicité.

$\boxed{F}$

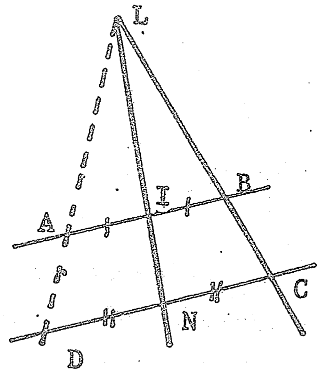
$\Delta_0 /\!/ \Delta$



Les droites Δ_0 et Δ sont parallèles.

La configuration ci-dessus va permettre de caractériser l'harmonicité et de construire des divisions harmoniques.

a) Remarque:



Dans la configuration ci-dessus on a:

(AB) // (CD), et, I, L et N alignés.
I est le milieu de [A,B] $\Leftrightarrow$ N est le milieu de [C,D]

Ceci est une propriété de l'homothétie ou résulte de la configuration du trapèze complet.

b) A propos de la configuration $\boxed{F}$

Considérons la configuration $\boxed{F}$

Deux des propositions suivantes entraînent la troisième:

$\boxed{P_1}$ (A,B,C,D) est une division harmonique

$\boxed{P_2}$ Δ // (AM)

$\boxed{P_3}$ B est le milieu de [E,F] (ou I est le milieu de [P,Q]

Nous allons démontrer ce résultat de deux façons:

■ En termes de barycentres

Traductions de $\boxed{P_1}$, $\boxed{P_2}$ et $\boxed{P_3}$

Supposons au préalable que C soit barycentre de $\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline \alpha & \beta \end{array}$

$\boxed{P_1}$ $\Leftrightarrow$ D est barycentre de $\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline \alpha & -\beta \end{array}$

$\boxed{P_2}$ $\Leftrightarrow$ C est barycentre de $\begin{array}{c|c} M & E \\ \hline \alpha & \beta \end{array}$

$\boxed{P_3}$ $\Leftrightarrow$ B est barycentre de $\begin{array}{c|c} E & F \\ \hline \beta & \beta \end{array}$

• $\boxed{P_1}$ et $\boxed{P_2}$ $\Rightarrow$ $\boxed{P_3}$

On a C barycentre de $\begin{array}{c|c} M & E \\ \hline \alpha & \beta \end{array}$, et par projection, on obtient D est barycentre de $\begin{array}{c|c} M & F \\ \hline \alpha & -\beta \end{array}$, donc F est barycentre de $\begin{array}{c|c} M & D \\ \hline \alpha & \beta-\alpha \end{array}$

B est situé sur (EF) et (CD) et est le barycentre de $\begin{array}{c|c|c} M & E & D \\ \hline \alpha & \beta & \beta-\alpha \end{array}$
(On avait pour C et F le même coefficient en M)

On en déduit que B est le barycentre de $\begin{array}{c|c} E & F \\ \hline \beta & \beta \end{array}$, soit $\boxed{P_3}$.

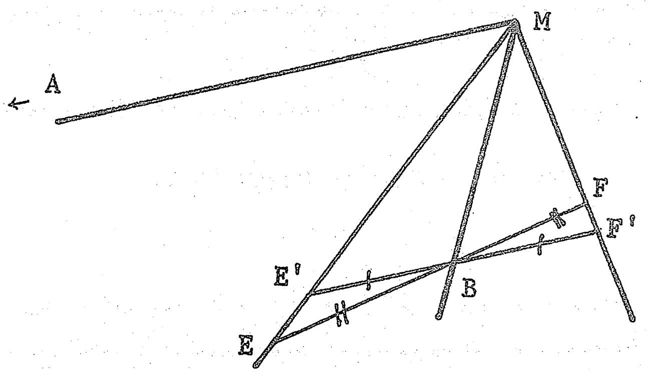
• $\boxed{P_2}$ et $\boxed{P_3}$ $\Rightarrow$ $\boxed{P_1}$

C est barycentre de $\begin{array}{c|c} M & E \\ \hline \alpha & \beta \end{array}$

B est barycentre de $\begin{array}{c|c} E & F \\ \hline \beta & \beta \end{array}$

donc D est barycentre de $\begin{array}{c|c} M & F \\ \hline \alpha & -\beta \end{array}$
(forme barycentrique du théorème de Ménélaüs)

• $\boxed{P_1}$ et $\boxed{P_3}$ $\Rightarrow$ $\boxed{P_2}$



(EF) // (AM) sinon la configuration est impossible, car il y a unicité de la direction qui réalise B milieu de [E,F] (voir également remarque a)).

■■ <u>En termes d'équilibres.</u>

On a l'équilibre $\left\{\begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline \alpha & \beta & -\alpha-\beta \end{array}\right\}$

Traductions de $\boxed{P_1}$, $\boxed{P_2}$ et $\boxed{P_3}$

$\boxed{P_1} \iff \left\{\begin{array}{c|c|c} A & B & D \\ \hline \alpha & -\beta & \beta-\alpha \end{array}\right\}$ est un équilibre

$\boxed{P_2} \iff \left\{\begin{array}{c|c|c} M & E & C \\ \hline \alpha & \beta & -\alpha-\beta \end{array}\right\}$ est un équilibre

$\boxed{P_3} \iff \left\{\begin{array}{c|c|c} E & F & B \\ \hline \beta & \beta & -2\beta \end{array}\right\}$ est un équilibre

• $\boxed{P_1}$ et $\boxed{P_2}$ $\Rightarrow$ $\boxed{P_3}$

$\left\{\begin{array}{c|c|c} M & F & D \\ \hline \alpha & -\beta & \beta-\alpha \end{array}\right\}$ est un équilibre, par projection.

$$\left\{\begin{array}{c|c|c} M & E & C \\ \hline \alpha & \beta & -\alpha-\beta \end{array}\right\} - \left\{\begin{array}{c|c|c} M & F & D \\ \hline \alpha & -\beta & \beta-\alpha \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c|c|c|c} E & F & D & C \\ \hline \beta & \beta & \alpha-\beta & -\alpha-\beta \end{array}\right\}$$

On obtient l'équilibre $\left\{\begin{array}{c|c|c} E & F & B \\ \hline \beta & \beta & -2\beta \end{array}\right\}$ en projetant sur (EF) selon (DC)

• $\boxed{P_2}$ et $\boxed{P_3}$ $\Rightarrow$ $\boxed{P_1}$

$$\left\{\begin{array}{c|c|c} M & E & C \\ \hline \alpha & \beta & -\alpha-\beta \end{array}\right\} - \left\{\begin{array}{c|c|c} E & F & B \\ \hline \beta & \beta & 2\beta \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c|c|c|c} M & F & C & B \\ \hline \alpha & -\beta & -\alpha-\beta & 2\beta \end{array}\right\}$$

On obtient l'équilibre $\left\{\begin{array}{c|c|c} M & F & D \\ \hline \alpha & -\beta & \beta-\alpha \end{array}\right\}$ en projetant selon (BC),

puis l'équilibre $\left\{\begin{array}{c|c|c} A & B & D \\ \hline \alpha & -\beta & \beta-\alpha \end{array}\right\}$ en projetant selon (EF).

• $\boxed{P_1}$ et $\boxed{P_3}$ $\Rightarrow$ $\boxed{P_2}$

$$\left\{\begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline \alpha & \beta & -\alpha-\beta \end{array}\right\} - \left\{\begin{array}{c|c|c} A & B & D \\ \hline \alpha & -\beta & \beta-\alpha \end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{c|c|c} E & F & B \\ \hline \beta & \beta & -2\beta \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c|c|c|c} C & D & E & F \\ \hline -\alpha-\beta & \alpha-\beta & \beta & \beta \end{array}\right\}$$

On obtient l'équilibre $\left\{\begin{array}{c|c|c} M & E & C \\ \hline \alpha & \beta & -\alpha-\beta \end{array}\right\}$ en projetant selon (FD).

<u>*Commentaires:*</u>

1-On remarquera la plus grande facilité de manipulations des équilibres qui ne nécessitent pas de "retourner les relations" et se projettent aussi plus facilement.

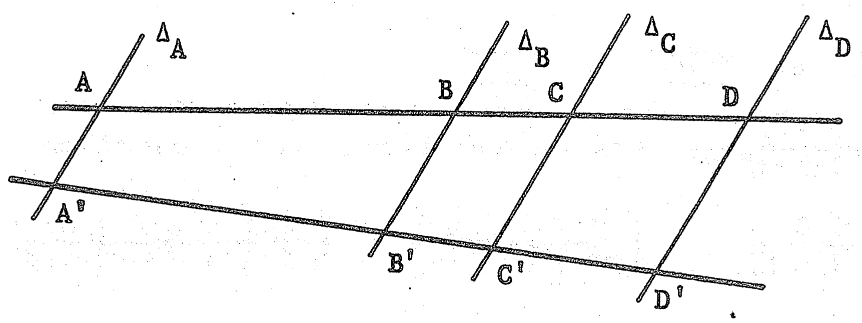
2-On a, à la fois une caractérisation et un mode d'obtention des divisions harmoniques.

4° Faisceaux harmoniques.

Il s'agit d'établir le résultat suivant:

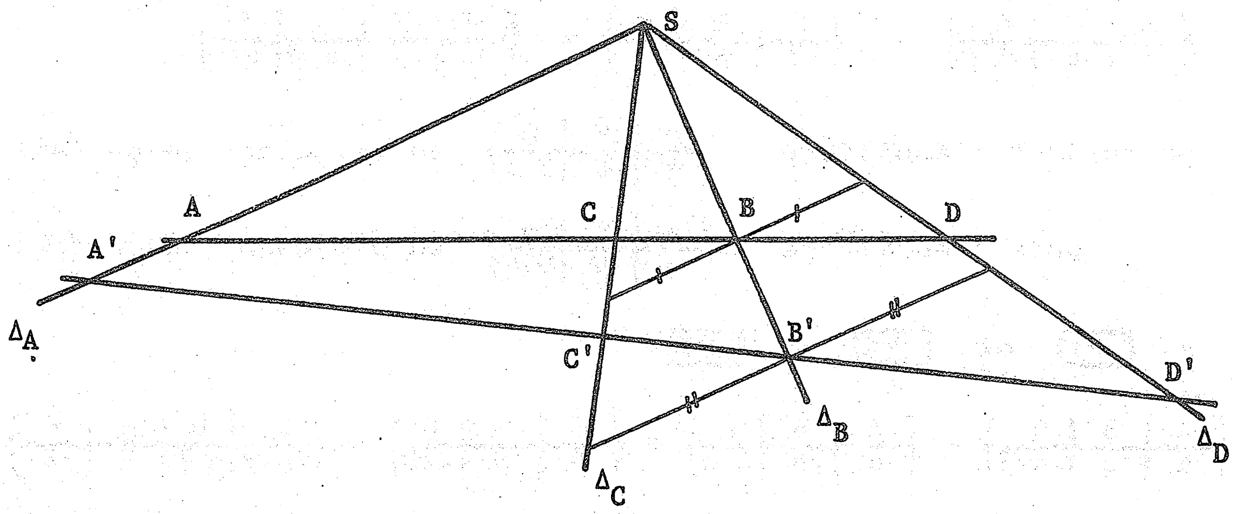
> Si quatre droites parallèles ou concourantes découpent sur une sécante une division harmonique,
>
> alors elles découpent sur toute sécante une division harmonique.

- Cas des droites parallèles.



Cela résulte de la conservation du barycentre par projection.

- Cas des droites concourantes.

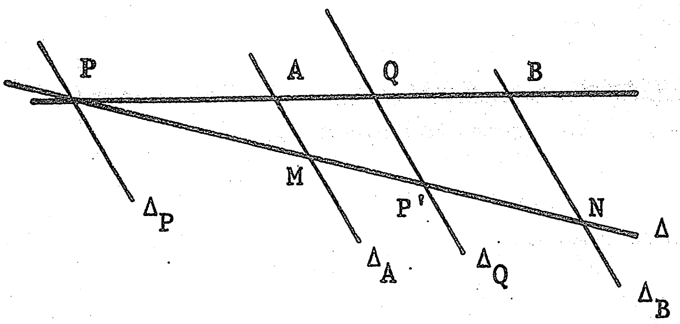


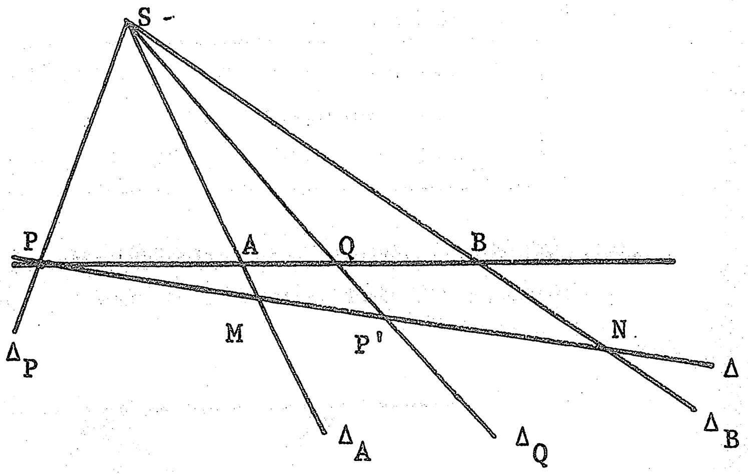
Cela résulte du 3°-a et du 3°-b

On dit que: **le faisceau des quatre droites est un faisceau harmonique.**

5° Polaire d'un point par rapport à deux droites.

a) Conjugué d'un point.



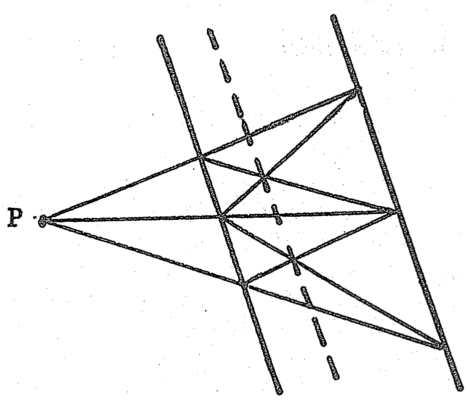


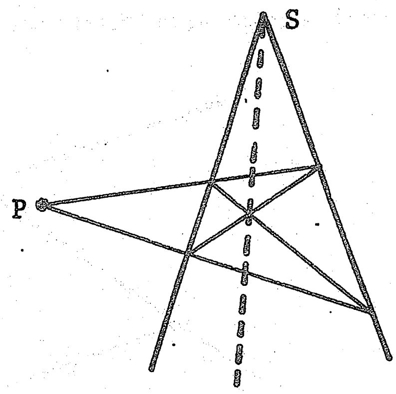
Dans les deux cas de figure ci-dessus, on peut affirmer d'après ce qui précède (4°) que, si l'on fixe le point P, le lieu de P' conjugué de P par rapport à M et N lorsque P varie sur Δ est la droite Δ_Q (qui est fixe) privéée du point S.

On dit que: $\boxed{\Delta_Q \text{ est la polaire de P par rapport à } \Delta_A \text{ et } \Delta_B.}$

b) Construction de la polaire d'un point.

Il suffit de réaliser la configuration du 2°





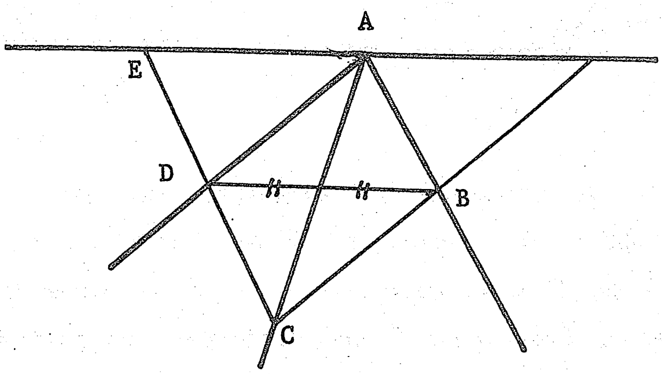
Trapèze complet dans le cas de droites parallèles.

Quadrilatère complet dans le cas de droites concourantes.

c) Réciprocité

P est un point de la polaire de Q si et seulement si Q est un point de la polaire de P

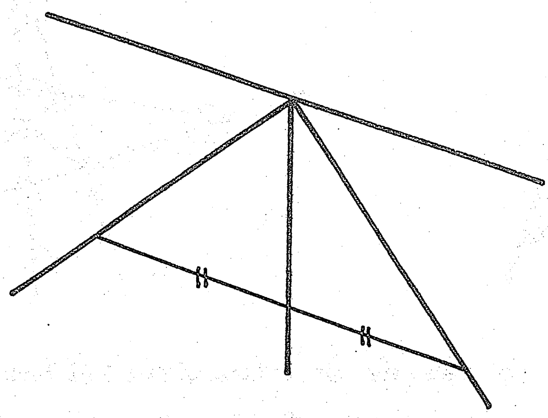
d) Un moyen simple d'obtenir des faisceaux harmoniques et par conséquent des divisions harmoniques : le parallèlogramme.



Dans la configuration ci-dessus ABCD est un parallèlogramme et (AE) // (BD)

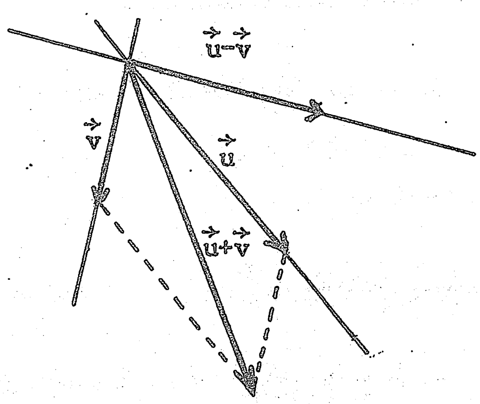
▪ Les directions des diagonales (AC) et (BD) sont conjuguées par rapport aux directions des côtés (AB) et (AD).

▪ on peut aussi utiliser un triangle et une médiane.

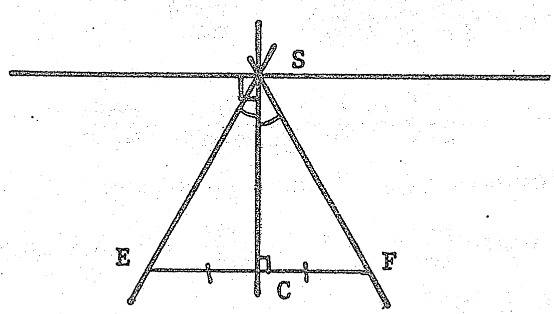


Remarque: La configuration du parallèlogramme caractérise les faisceaux de droites concourantes (voir 4°). Ainsi:

((SA), (SB), (SC), (SD)) est un faisceau harmonique si et seulement si il existe des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que, $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{u} + \vec{v}$ et $\vec{u} - \vec{v}$ soient les vecteurs directeurs de (SA), (SB), (SC) et (SD)



e) <u>Cas particulier des bissectrices.</u>



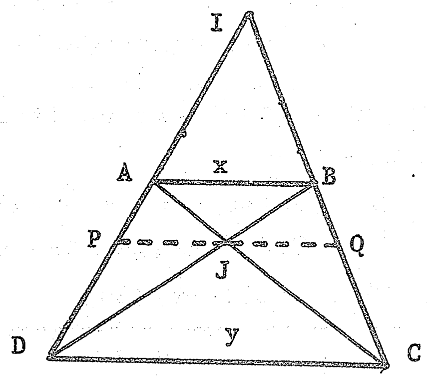
Dans tous les cas (SC) est une médiane du triangle SEF

(SC) est une bissectrice de l'angle en S si et seulement si elle est aussi une hauteur.

Ainsi les côtés et les bissectrices d'un angle forment un faisceau harmonique.

Si	dans un faisceau harmonique deux droites conjuguées sont perpendiculaires,
alors	ces deux droites sont les bissectrices de l'angle formé par les deux autres.

6° Construction de la moyenne harmonique à l'aide du trapèze complet



Montrons que: PQ est moyenne harmonique de AB et CD.

On pose PQ = h, AB = x et CD = y .

[A,C] et [B,D] se coupent en J

On a l'équilibre $\left\{\begin{array}{c|c|c|c} A & B & C & D \\ \hline y & -y & x & -x \end{array}\right\}$ qui se projette sur (AC)

selon l'équilibre $\left\{\begin{array}{c|c|c} A & C & J \\ \hline y & x & -x-y \end{array}\right\}$ qui se projette lui-même

selon l'équilibre $\left\{\begin{array}{c|c|c} A & D & P \\ \hline y & x & -x-y \end{array}\right\}$, ce qui entraîne

l'équilibre $\left\{\begin{array}{c|c|c|c} C & D & P & J \\ \hline x & -x & x+y & -x-y \end{array}\right\}$ $\boxed{e}$

On a de même l'équilibre $\left\{\begin{array}{c|c|c|c} C & D & J & Q \\ \hline x & -x & x+y & -x-y \end{array}\right\}$ $\boxed{e'}$

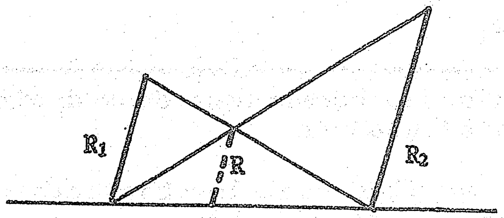
(On retrouvera par différence que J est le milieu de [P,Q])

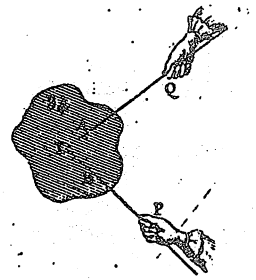
Par addition des équilibres $\boxed{e}$ et $\boxed{e'}$ on obtient

l'équilibre $\left\{\begin{array}{c|c|c|c} C & D & P & Q \\ \hline 2x & -2x & x+y & -x-y \end{array}\right\}$

Donc $\overrightarrow{PQ} = \dfrac{2x}{x+y}.\overrightarrow{CD}$, qui entraîne $h = \dfrac{2xy}{x+y}$ ou $\dfrac{2}{h} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$

D'où la méthode de construction de R vérifiant $\dfrac{1}{R} = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}$
(résistance équivalente à deux résistances en parallèles).





VIII - Exemples de fonctionnement de l'outil barycentre et équilibre

- Nous ne distinguerons pas les problèmes d'alignement, de concours ou de parallèlisme qui peuvent apparaître dans les énoncés.

  En effet, par exemple:

  Le point P étant commun aux droites (AA') et (BB'), montrer que "les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes" et montrer que "les points C, C' et P sont alignés" conduisent au même résultat.

  Dans la plupart des cas, un problème d'un type peut-être transformé en un problème de l'autre type.

•• Les énoncés des exemples notés (I 1ère S) sont extraits de: "*Maths* 1ère *Scientifique*", I.R.E.M. de Strasbourg.

1° Exemple 1 (I 1ère S) Etude d'une figure particulière

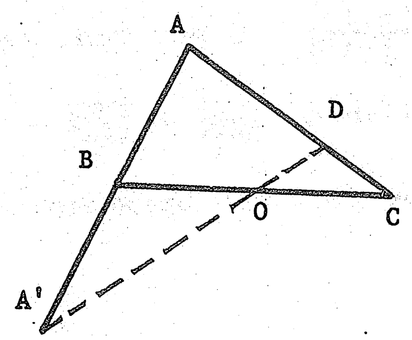
Enoncé

Soit un triangle ABC et D le point défini par $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

On note A' le symétrique de A par rapport à B.

Les droites (A'D) et (BC) se coupent en O

Montrer que O est le milieu de [B,C]



Remarque: Il serait équivalent de montrer que si O est le milieu de [B,C] alors A', O et D sont alignés.

a) <u>Traduction de l'énoncé en termes de barycentres et d'équilibres:</u>

Le point D est tel que: $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$:

D est barycentre de $\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline 1 & 2 \end{array}$ ou, on a l'équilibre $\left\{\begin{array}{c|c|c} A & C & D \\ \hline 1 & 2 & -3 \end{array}\right\} = \boxed{e1}$

Le point A' est le symétrique de A par rappoprt à B :

B est barycentre de $\begin{array}{c|c} A & A' \\ \hline 1 & 1 \end{array}$ ou, on a l'équilibre $\left\{\begin{array}{c|c|c} A & B & A' \\ \hline 1 & -2 & 1 \end{array}\right\} = \boxed{e2}$

b) <u>Résolution en termes de barycentres</u>

On en déduit que le barycentre de $\begin{array}{c|c|c} A & A' & C \\ \hline 1 & 1 & 2 \end{array}$ est situé à la fois sur les droites (A'D) et (BC), c'est donc le point O.

Ce point O est aussi (en regroupant A et A') barycentre de $\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline 2 & 2 \end{array}$ et donc O est le milieu de [B,C].(Il est aussi barycentre de $\begin{array}{c|c} A' & D \\ \hline 1 & 3 \end{array}$)

c) <u>Résolution en termes d'équilibres</u>

L'équilibre $\boxed{e1} - \boxed{e2} = \left\{\begin{array}{c|c|c|c} B & C & D & A' \\ \hline 2 & 2 & -3 & -1 \end{array}\right\}$ prouve que la la droite (A'D) coupe [B,C] en son milieu O.

(On a les équilibres $\left\{\begin{array}{c|c|c} B & C & O \\ \hline 2 & 2 & -4 \end{array}\right\} = \boxed{e3}$ et $\left\{\begin{array}{c|c|c} D & A' & O \\ \hline -3 & -1 & 4 \end{array}\right\} = \boxed{e4}$)

$\boxed{e4}$ prouve que O est le barycentre de $\begin{array}{c|c} A' & D \\ \hline 1 & 3 \end{array}$.

On peut ajouter que (BD) coupe (A'C) en un point I tel que l'on ait l'équilibre $\left\{\begin{array}{c|c|c} C & A' & I \\ \hline 2 & -1 & -1 \end{array}\right\}$. C est donc le milieu de [A',I]

De plus on a l'équilibre $\boxed{e2} + \boxed{e3} = \left\{\begin{array}{c|c|c|c} A & A' & C & O \\ \hline 1 & 1 & 2 & -4 \end{array}\right\}$, qui prouve que (AO) coupe (A'C) au barycentre de $\begin{array}{c|c} A' & C \\ \hline 1 & 2 \end{array}$

2° Généralisation de l'exemple 1

> Des points I, J et K étant repérés sur les côtés d'un triangle ABC, quelles sont les conditions de leur alignement?
> (On supposera I, J et K distincts des sommets)

a) On pourra se reporter au paragraphe V et chercher à utiliser le théorème de Ménélaüs (réciproque).

b) On pourra aussi envisager une démonstration directe.

Dans les deux cas on parviendra à des équilibres de la forme

$$\left\{\begin{array}{c|c|c} A & C & I \\ \hline & & \end{array}\right\},\quad \left\{\begin{array}{c|c|c} A & B & J \\ \hline & & \end{array}\right\}\quad \text{et}\quad \left\{\begin{array}{c|c|c} C & B & K \\ \hline & & \end{array}\right\}$$

Il s'agit d'associer ces trois équilibres pour éliminer A, B et C, car un équilibre de la forme $\left\{\begin{array}{c|c|c} I & J & K \\ \hline & & \end{array}\right\}$ assure l'alignement cherché.

Or il est toujours possible d'éliminer A et B et d'obtenir l'équilibre $\left\{\begin{array}{c|c|c|c} C & I & J & K \\ \hline k & \alpha & \beta & \gamma \end{array}\right\}$

Si le coefficient k est non nul, C est barycentre de $\begin{array}{c|c|c} I & J & K \\ \hline \alpha & \beta & \gamma \end{array}$

Dans ce cas I, J et K ne sont pas alignés sinon C serait sur la droite contenant I, J et K et alors C serait l'un de ces points.

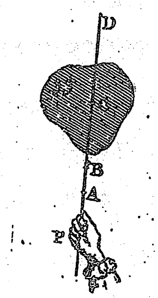
Autrement dit: I, J et K sont alignés $\Leftrightarrow k = 0$.

Ceci équivaut à dire que l'élimination de A et B entraîne celle de C.

Prenons un exemple: soit les équilibres

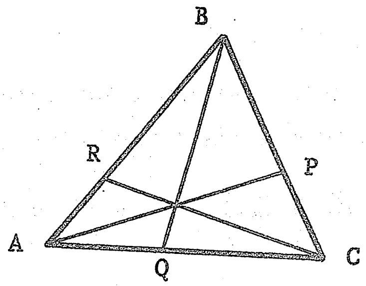
$$\boxed{e1} = \left\{\begin{array}{c|c|c} A & C & I \\ \hline 1 & 3 & -4 \end{array}\right\},\quad \boxed{e2} = \left\{\begin{array}{c|c|c} A & B & J \\ \hline -2 & 3 & -1 \end{array}\right\}\quad \text{et}\quad \boxed{e3} = \left\{\begin{array}{c|c|c} C & B & K \\ \hline 2 & 1 & -3 \end{array}\right\}$$

$2\boxed{e1} + \boxed{e2} - 3\boxed{e3}$ élimine A et B mais aussi C, donc les points I, J et K sont alignés.



3° Céviennes

> Des points P, Q et R étant repérés sur les côtés d'un triangle ABC, rechercher à quelles conditions les droites (AP), (BQ) et (CR) sont soit parallèles, soit concourantes.



On cherchera à établir les équilibres définissant P, Q et R comme barycentres sur chacun des côtés de façon à avoir les mêmes coefficients α, β et γ aux mêmes points A, B et C.

Si cela n'est pas possible, on obtient les équilibres

$\left\{\begin{array}{c|c|c} A & B & R \\ \hline \alpha & \beta & \end{array}\right\}$, $\left\{\begin{array}{c|c|c} B & C & P \\ \hline \beta & \gamma & \end{array}\right\}$ et $\left\{\begin{array}{c|c|c} A & C & Q \\ \hline \alpha & \gamma' & q \end{array}\right\}$ avec $\gamma \neq \gamma'$.

Le barycentre de $\begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline \alpha & \beta & \gamma \end{array}$ est alors sur (CR) et (AP), mais pas sur (BQ) (lorsque $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$).

Si $\alpha + \beta + \gamma = 0$, les équilibres $\left\{\begin{array}{c|c|c} A & B & R \\ \hline \alpha & \beta & \gamma \end{array}\right\}$ et $\left\{\begin{array}{c|c|c} B & C & P \\ \hline \beta & \gamma & \alpha \end{array}\right\}$

entraînent l'équilibre $\left\{\begin{array}{c|c|c|c} A & C & P & R \\ \hline \alpha & -\gamma & -\alpha & \gamma \end{array}\right\}$ et (CR) // (AP),

l'équilibre $\left\{\begin{array}{c|c|c|c} B & R & C & Q \\ \hline \alpha & \gamma & -\gamma' & -q \end{array}\right\}$ prouve que (BQ) coupe (CR) ($\gamma \neq \gamma'$).

Autrement dit:

> on a la possibilité d'attribuer les mêmes coefficients à A, B et C si et seulement si les droites (AP), (BR) et (CQ) sont parallèles ou concourantes.

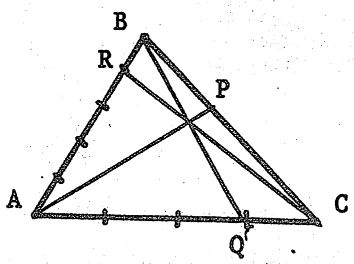
Si $\alpha + \beta + \gamma = 0$ alors les droites sont parallèles.

Si $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ alors [les droites sont concourantes et le point commun est le barycentre de $\begin{array}{c|c|c} A & B & R \\ \hline \alpha & \beta & \gamma \end{array}$

Remarque: On peut (toujours) éviter de se référer au théorème de De Céva et faire une démonstration directe

Exemple 3-1

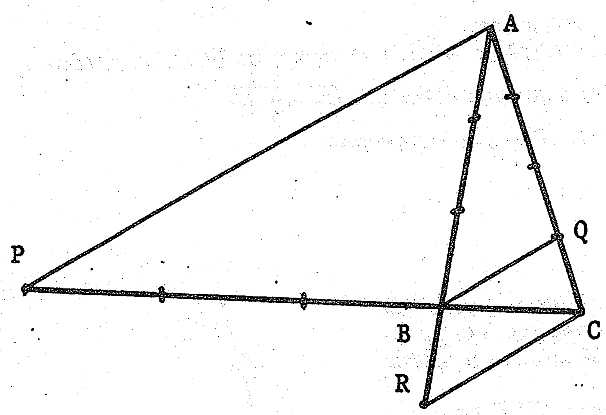
Soit les équilibres $\left\{\begin{array}{c|c|c} A & B & R \\ \hline 1 & 4 & -5 \end{array}\right\}$, $\left\{\begin{array}{c|c|c} B & C & P \\ \hline 4 & 3 & -7 \end{array}\right\}$ et $\left\{\begin{array}{c|c|c} A & C & Q \\ \hline 1 & 3 & -4 \end{array}\right\}$



Le barycentre de $\begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline 1 & 4 & 3 \end{array}$ est sur (AP), (BQ) et (CR)

Exemple 3-2

Soit les équilibres $\left\{\begin{array}{c|c|c} A & B & R \\ \hline 1 & -4 & 3 \end{array}\right\}$, $\left\{\begin{array}{c|c|c} B & C & P \\ \hline -4 & 3 & 1 \end{array}\right\}$ et $\left\{\begin{array}{c|c|c} A & C & Q \\ \hline 1 & 3 & -4 \end{array}\right\}$

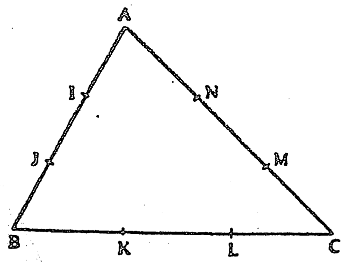


On en déduit les équilibres $\left\{\begin{array}{c|c|c|c} A & C & P & R \\ \hline 1 & -3 & -1 & 3 \end{array}\right\}$ et $\left\{\begin{array}{c|c|c|c} B & R & C & Q \\ \hline -4 & 3 & -3 & 4 \end{array}\right\}$ qui prouvent que les droites (AP), (BQ) et (CR) sont parrallèles, mais le théorème de De Céva permet d'obtenir ce résultat car $1 - 4 + 3 = 0$.

4° Cinq exercices proposés dans (I $1^{ère}$ S)

Il s'agit du TP 23 sur les problèmes de concours. Nous allons résoudre les exercices 1, 3, 4, 5 et 7

Exercice 1 : Soit ABC un triangle. Chacun de ses côtés est partagé en trois segments de même longueur. Les points I, J, K, L, M et N sont définis par le dessin ci-contre.
Montrer que les droites (IL), (JM) et (KN) sont concourantes.



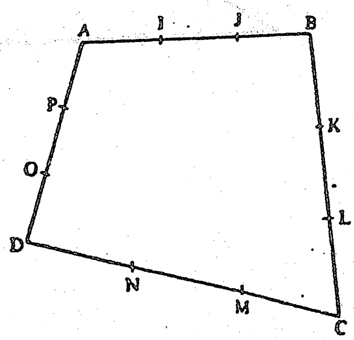
Exercice 3 : Soit ABC un triangle. Les points A', B' et C' sont les milieux des côtés [BC], [CA] et [AB], et le point E est défini par $\overline{AE} = \frac{1}{3}\overline{AB}$.
Montrer que les droites (AA'), (B'C') et (CE) sont concourantes.

Exercice 4 : Soit ABC un triangle.

1. Placer les points I, J et K tels que :
   - $I \in (BC)$ et $\frac{\overline{IB}}{\overline{IC}} = -\frac{1}{2}$
   - $J \in (CA)$ et $\frac{\overline{JA}}{\overline{JC}} = -\frac{2}{3}$
   - $K \in (AB)$ et $\frac{\overline{KB}}{\overline{KA}} = -\frac{3}{4}$
2. Démontrer que les droites (AI), (BJ) et (CK) sont concourantes.

Exercice 5 : Soient A, B, C et D quatre points non alignés.
On appelle G le centre de gravité du triangle ABC, I le milieu de [AB], J le milieu de [BC], K le point défini par $\overline{CK} = \frac{3}{4}\overline{CD}$, et L le point défini par $\overline{DL} = \frac{1}{4}\overline{DA}$.
Montrer que les droites (IK), (JL) et (DG) sont concourantes.

Exercice 7 : Soit ABCD un quadrilatère. Chacun de ses côtés est partagé en trois segments de même longueur. Les points I, J, K, L, M, N, O et P sont définis par le dessin ci-contre.
Comment faut-il chosir le quadrilatère ABCD pour que les quatre droites (IM), (JN), (KO) et (LP) soient concourantes?



Exercice 4-1

On a les équilibres $\left\{\begin{array}{c|c|c} A & B & I \\ \hline 2 & 1 & -3 \end{array}\right\}$ et $\left\{\begin{array}{c|c|c} B & L & C \\ \hline 1 & -3 & 2 \end{array}\right\}$

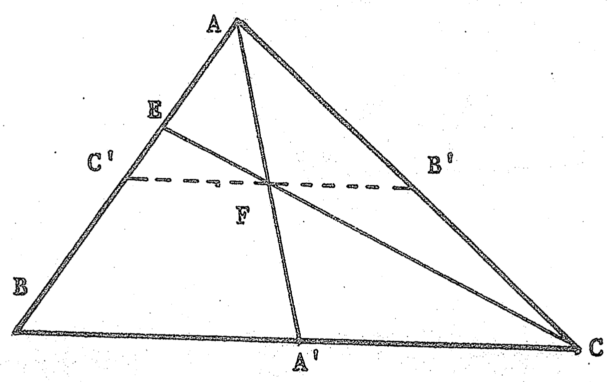
dont on déduit par addition l'équilibre $\left\{\begin{array}{c|c|c|c|c} A & B & C & I & L \\ \hline 2 & 2 & 2 & -3 & -3 \end{array}\right\}$

Si G est l'isobarycentre de A, B et C, on a l'équilibre $\left\{\begin{array}{c|c|c} G & I & L \\ \hline 6 & -3 & -3 \end{array}\right\}$

Ainsi G est le milieu de [I,L].

On montre de même que G est le milieu de [J,M] et [N,K].

Exercice 4-3



On peut conjecturer que le point cherché est le milieu de [A,A'] et [B,B'].

On a les équilibres $\left\{\begin{array}{c|c|c} A & B & E \\ \hline 2 & 1 & -3 \end{array}\right\}$ et $\left\{\begin{array}{c|c|c} A' & B & C \\ \hline -2 & 1 & 1 \end{array}\right\}$

Le barycentre F de $\begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline 2 & 1 & 1 \end{array}$ est alors sur (AA') et (CE).

F est donc le barycentre de $\underbrace{\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 1 & 1 \end{array}}_{C'} \Big| \underbrace{\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline 1 & 1 \end{array}}_{B'}$

F est donc le barycentre de $\begin{array}{c|c} C' & B' \\ \hline 2 & 2 \end{array}$ (F est le milieu de [B',C'])

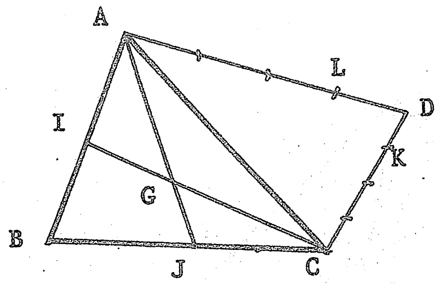
Exercice 4-4

Sans figure on peut écrire les équilibres

$\left\{\begin{array}{c|c|c} I & B & C \\ \hline / & 2 & 1 \\ \hline / & 4 & 2 \end{array}\right\}$ $\quad$ $\left\{\begin{array}{c|c|c} J & A & C \\ \hline / & 3 & 2 \end{array}\right\}$ $\quad$ $\left\{\begin{array}{c|c|c} K & A & B \\ \hline / & 3 & 4 \end{array}\right\}$

Le barycentre de $\begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline 3 & 4 & 2 \end{array}$ est donc sur (AI), (BJ) et (CK)

Exercice 4-5

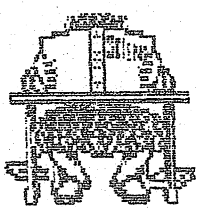


On a les équilibres $\left\{\begin{array}{c|c|c} A & L & D \\ \hline 1 & -4 & 3 \end{array}\right\} = \boxed{e1}$ et $\left\{\begin{array}{c|c|c} C & K & D \\ \hline 1 & -4 & 3 \end{array}\right\} = \boxed{e2}$

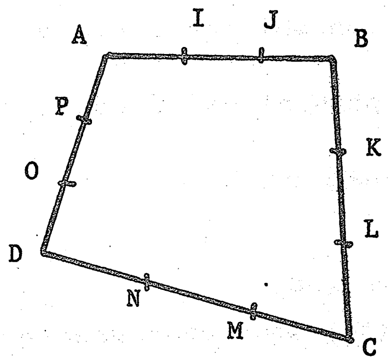
Le point G intervient par l'équilibre $\left\{\begin{array}{c|c|c|c} A & B & C & G \\ \hline 1 & 1 & 1 & -3 \end{array}\right\} = \boxed{e3}$, dont on déduit les équilibres $\left\{\begin{array}{c|c|c} A & J & G \\ \hline 1 & 2 & -3 \end{array}\right\} = \boxed{e4}$ et $\left\{\begin{array}{c|c|c} C & G & I \\ \hline 1 & -3 & 2 \end{array}\right\} = \boxed{e5}$

$\boxed{e1} - \boxed{e4}$ est l'équilibre $\left\{\begin{array}{c|c|c|c} L & D & J & G \\ \hline -4 & 3 & -2 & 3 \end{array}\right\}$, ce qui prouve que la droite (JL) coupe [D,G] en son milieu.

$\boxed{e2} - \boxed{e5}$ est l'équilibre $\left\{\begin{array}{c|c|c|c} K & D & I & G \\ \hline -4 & 3 & -2 & 3 \end{array}\right\}$, ce qui prouve que la droite (IK) coupe [D,G] en son milieu.



Exercice 4-7



1) Les points A, B, C et D sont coplanaires dès que les droites (IM) et (JN) sont sécantes.

2) Nature des quadrilatères IPML et JKNO

On a les équilibres

$$\left\{\begin{array}{c|c|c} A & I & B \\ \hline 2 & -3 & 1 \end{array}\right\} = \boxed{e1}, \quad \left\{\begin{array}{c|c|c} A & P & D \\ \hline 2 & -3 & 1 \end{array}\right\} = \boxed{e2},$$

$$\left\{\begin{array}{c|c|c} C & L & B \\ \hline 2 & -3 & 1 \end{array}\right\} = \boxed{e3}, \quad \left\{\begin{array}{c|c|c} C & M & D \\ \hline 2 & -3 & 1 \end{array}\right\} = \boxed{e4}$$

En calculant $\boxed{e1} - \boxed{e2} + \boxed{e3} - \boxed{e4}$ on obtient

l'équilibre $\left\{\begin{array}{c|c|c|c} I & P & M & L \\ \hline -3 & 3 & -3 & 3 \end{array}\right\}$, donc IPML est un parallèlogramme.

Par analogie JKNO est un parallèlogramme.

3) Dès lors, pour que les droites (IM), (JN), (KO) et (LP) soient concourantes il faut et il suffit que les parallèlogrammes IPML et JKNO aient même centre; par conséquent il faut et il suffit que que les quadrilatères IJMN et KLOP soient des parallèlogrammes.

4) IJMN est un parallèlogramme $\Leftrightarrow$ ABCD est un parallélogramme

5° __Exemple 2__: __Le problème 26__[1]

Soit un parallèlogramme ABCD et un point E situé sur la droite (AC)

La parallèle à la droite (AD) passant par E coupe les droites (DC) et (AB) en F et G.

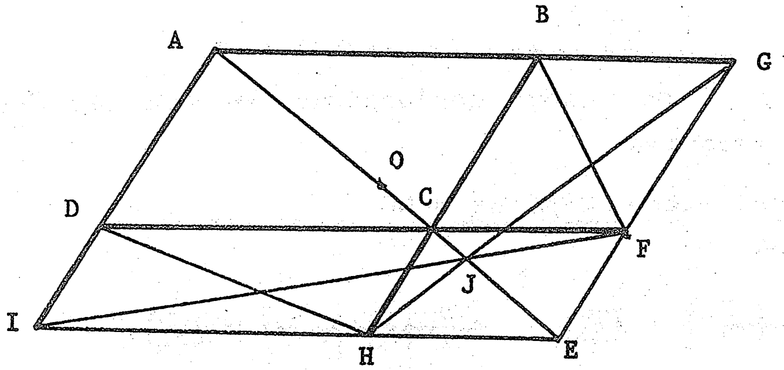
La parallèle à la droite (AB) passant par E coupe les droites (BC) et (AD) en H et I.

Les droites(GH) et (IF) se coupent en J.

Démontrer que:

1° Le point J est sur la droite (AC)

2° Les droites (BF), (DH) et (AE) sont concourantes.



1° De l'équilibre $\left\{\begin{array}{c|c|c} A & C & E \\ \hline \alpha & 1 & \beta \end{array}\right\}$ on déduit

les équilibres $\left\{\begin{array}{c|c|c} G & F & E \\ \hline \alpha & 1 & \beta \end{array}\right\}$ et $\left\{\begin{array}{c|c|c} I & H & E \\ \hline \alpha & 1 & \beta \end{array}\right\}$

Le barycentre de $\begin{array}{c|c|c} I & G & E \\ \hline \alpha & \alpha & \beta \end{array}$ est donc situé sur (IF) et (GH),

c'est donc le point J. On a ainsi l'équilibre $\left\{\begin{array}{c|c|c|c} J & I & G & E \\ \hline 1 & \alpha & \alpha & \beta \end{array}\right\}$

Si on appelle O le milieu de [I,G], on a l'équilibre $\left\{\begin{array}{c|c|c} I & G & O \\ \hline \alpha & \alpha & -2\alpha \end{array}\right\}$.

L'équilibre $\left\{\begin{array}{c|c|c} J & O & E \\ \hline 1 & 2\alpha & \beta \end{array}\right\}$, prouve que J est sur la droite (OE).

Ainsi le point J __est sur la droite (AC)__.

2° Ce résultat est en fait le même car on l'obtient en permuttant les parallélogrammes ABCD et AGEI.

Remarque: On aurait pu également utiliser la configuration du trapèze complet et l'équilibre $\left\{\begin{array}{c|c|c|c} I & H & F & G \\ \hline \alpha & -\alpha-\beta & \alpha+\beta & -\alpha \end{array}\right\}$

(1) Activités géométriques en Seconde, IREM de Bordeaux (1981)

6° <u>Exemple 3</u>: <u>Question de milieux (I $1^{ère}$S)</u>

Données: ▪ Un triangle ABC

▪ Un point M

▪ A', B' et C' les milieux de [B,C], [C,A] et [A,B]

▪ P, Q et R les symétriques de M par rapport à A', B' et C'

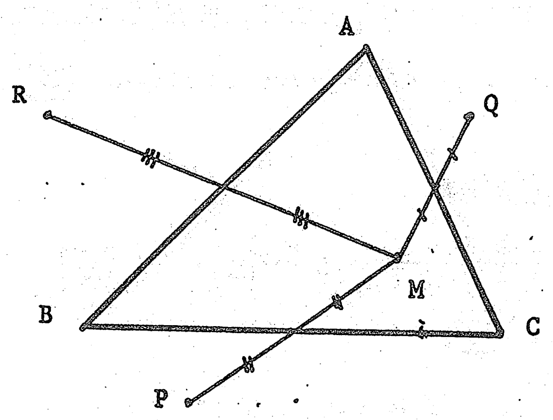
▪ G et K les centres de gravité de ABC et PQR

Questions:

1° Montrer que [A,P], [B,Q] et [C,R] ont même milieu L

2° Quel est le milieu de [G,K]?

3° Quel est le milieu de [M,K]?



En utilisant la caractérisation du parallélogramme on obtient les équilibres $\left\{\begin{array}{c|c|c|c} A & B & R & M \\ \hline 1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right\} = \boxed{e1}$, $\left\{\begin{array}{c|c|c|c} B & C & P & M \\ \hline 1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right\} = \boxed{e2}$

et $\left\{\begin{array}{c|c|c|c} C & A & Q & M \\ \hline 1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right\} = \boxed{e3}$.

$\boxed{e1} - \boxed{e2}$ élimine B et M.

$\boxed{e1} - \boxed{e2}$ donne l'équilibre $\left\{\begin{array}{c|c|c|c} A & R & C & P \\ \hline 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right\}$ qui prouve que

[A,P] et [C,R] ont même milieu L

Par analogie: [C,R] et [B,Q] ont même milieu L

Ainsi <u>[A,P], [C,R] et [B,Q] ont même milieu L</u>

2° Pour chercher le milieu de [G,K], on doit utiliser G et K avec les mêmes coefficients.

G et K étant les barycentres de ABC et PQR, on a

les équilibres $\left\{\begin{array}{c|c|c|c} G & A & B & C \\ \hline -3 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right\} = \boxed{e4}$ et $\left\{\begin{array}{c|c|c|c} K & P & Q & R \\ \hline -3 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right\} = \boxed{e5}$

$\boxed{e4} + \boxed{e5} = \left\{\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c} G & K & A & B & C & P & Q & R \\ \hline -3 & -3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right\} = \boxed{e6}$

D'autre part L étant le milieu de [A,P], [B,Q] et [C,R] on a les équilibres $\left\{\begin{array}{c|c|c} A & P & L \\ \hline 1 & 1 & -2 \end{array}\right\}$, $\left\{\begin{array}{c|c|c} B & Q & L \\ \hline 1 & 1 & -2 \end{array}\right\}$ et $\left\{\begin{array}{c|c|c} G & K & L \\ \hline 1 & 1 & -2 \end{array}\right\}$

Ainsi en "retranchant" ces trois équilibres à $\boxed{e6}$ on obtient

l'équilibre $\left\{\begin{array}{c|c|c} G & K & L \\ \hline -3 & -3 & 6 \end{array}\right\}$, donc <u>L est le milieu de [G,K]</u>.

3° Pour faire intervenir M et K on doit utiliser $\boxed{e1}$, $\boxed{e2}$, $\boxed{e3}$ et $\boxed{e5}$

$\boxed{e1} + \boxed{e2} + \boxed{e3} + \boxed{e5}$ est

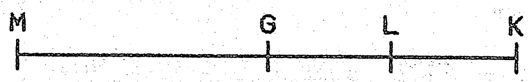
l'équilibre $\left\{\begin{array}{c|c|c|c|c} A & B & C & M & K \\ \hline 2 & 2 & 2 & -3 & -3 \end{array}\right\} = \boxed{e7}$

G intervient à l'aide de $\boxed{e4}$

$\boxed{e7} - 2\boxed{e4}$ est l'équilibre $\left\{\begin{array}{c|c|c} M & K & G \\ \hline -3 & -3 & 6 \end{array}\right\}$,

donc <u>G est le milieu de [M,K]</u>.

On a la disposition suivante:



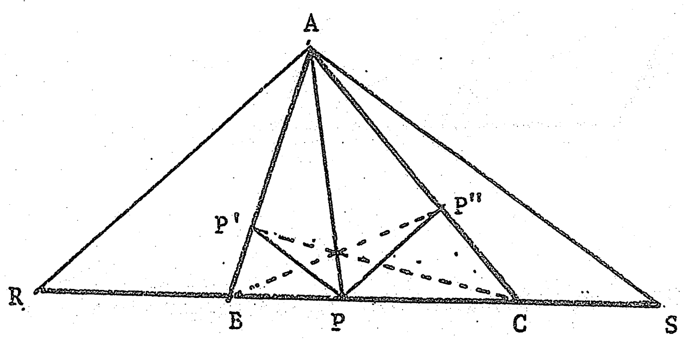
<u>*Remarque:*</u> Le problème a été traité aussi bien dans l'espace que dans le plan.

7° <u>Exemple 4</u>: <u>D'après Tangente n° 2</u>

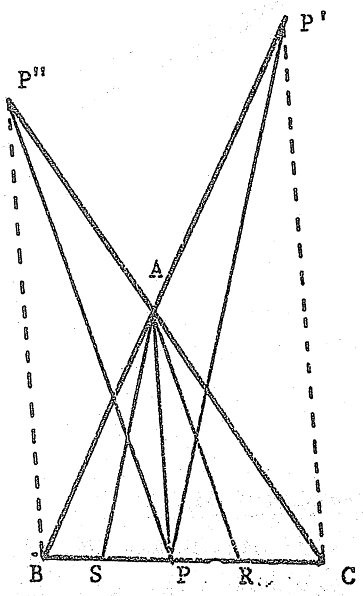
Données:
- Un triangle ABC
- Trois points P, R et S situés sur (BC)
- La parallèle à (AS) passant par P coupe (AB) en P'
- La parallèle à (AR) passant par P coupe (AC) en P"

Démontrer que:

les droites (AP), (BP") et (CP') sont concourantes (ou parallèles) si et seulement si P est le milieu de [R,S]



a) Cas de concours



b) Cas du parallélisme

On peut trouver des coefficients α, β et γ (avec α arbitraire) pour avoir les équilibres $\boxed{e1} = \left\{\begin{array}{c|c|c} A & B & P' \\ \hline \alpha & \beta & / \end{array}\right\}$ et $\boxed{e2} = \left\{\begin{array}{c|c|c} A & C & P" \\ \hline \alpha & \gamma & / \end{array}\right\}$

En projetant sur (BC) on obtient les équilibres

$\boxed{e3} = \left\{\begin{array}{c|c|c} S & B & P \\ \hline \alpha & \beta & / \end{array}\right\}$ et $\boxed{e4} = \left\{\begin{array}{c|c|c} R & C & P \\ \hline \alpha & \gamma & / \end{array}\right\}$ qui par addition donnent

l'équilibre $\boxed{e5} = \left\{\begin{array}{c|c|c|c|c} S & R & B & C & P \\ \hline \alpha & \alpha & \beta & \gamma & / \end{array}\right\}$

P milieu de [R,S] $\Leftrightarrow$ $\boxed{e6} = \left\{\begin{array}{c|c|c} S & R & P \\ \hline -\alpha & -\alpha & 2\alpha \end{array}\right\}$ est un équilibre

$\Leftrightarrow$ $\lambda\boxed{e5} + \mu\boxed{e6}$ est un équilibre et $\mu \neq 0$

$\Leftrightarrow$ $\boxed{e5} + \boxed{e6} = \left\{\begin{array}{c|c|c} B & C & P \\ \hline \alpha & \gamma & / \end{array}\right\}$ est un équilibre

$\Leftrightarrow$ $\boxed{e1}$, $\boxed{e2}$ et $\boxed{e5} + \boxed{e6}$ sont des équilibres

$\Leftrightarrow$ [(AP), (BP") et (CP') sont
concourantes ($\alpha + \beta + \gamma \neq 0$) ou parallèles ($\alpha + \beta + \gamma = 0$)

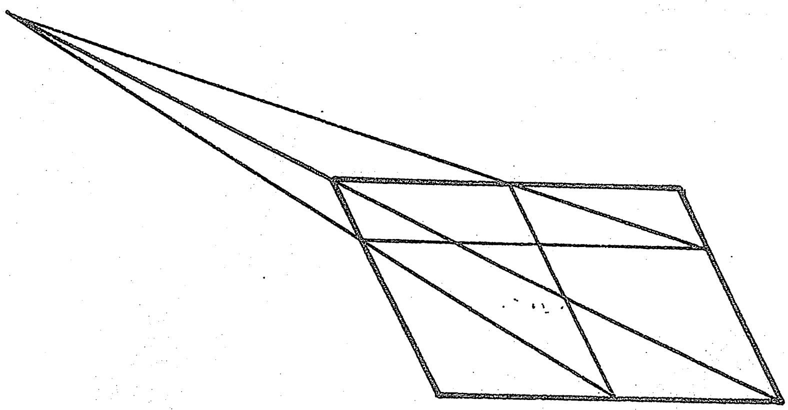
(Hypothèses du théorème de Céva)

8° Exemple double

Deux situations bien connues qui n'en sont qu'une.

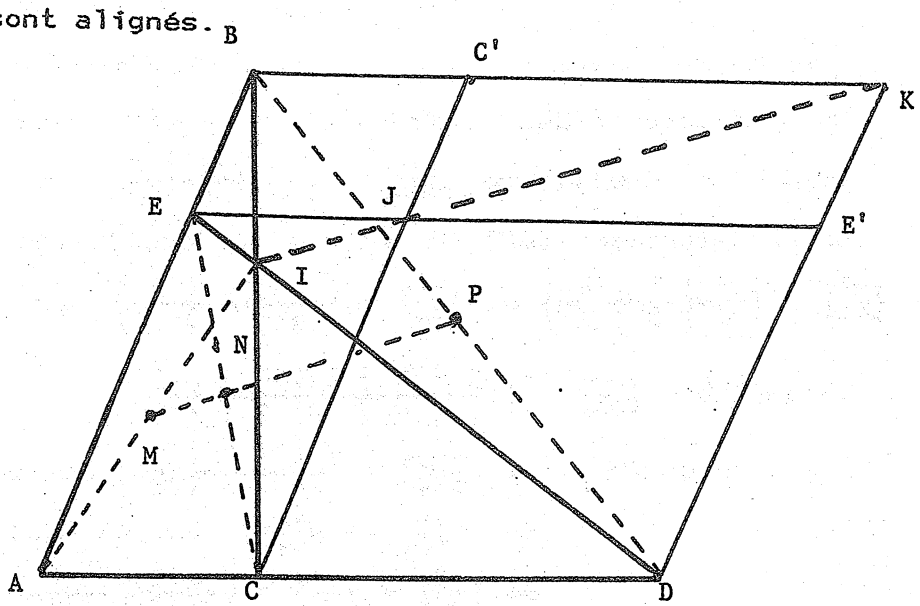
a) Formulation 1 : Problèmes 10 et 11 [2]

Les droites qui joignent les projetés d'un point selon et sur les côtés d'un parallèlogramme se coupent sur une diagonale (ou bien sont parallèles à cette diagonale).



b) Formulation 2

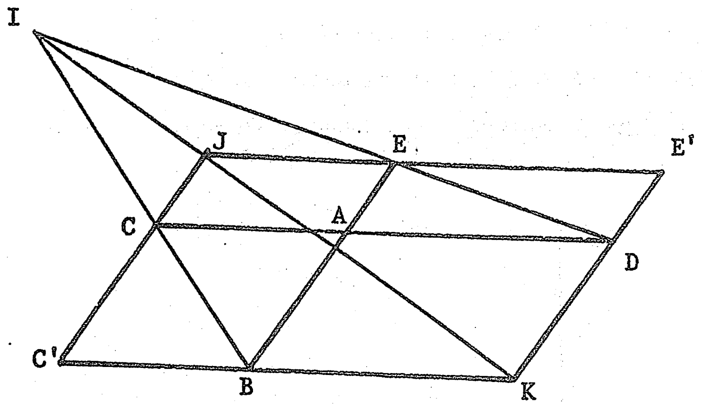
Les milieux (M, N et P) des diagonales d'un quadrilatère complet sont alignés.



L'homothétie de centre A et de rapport 2 ramène la démonstration de l'alignement de M, N et P à celui de l'alignement de I, J et K, les quadrilatères AEJC et ABKD étant des parallèlogrammes.

(2) Activités géométriques en Seconde, IREM de Bordeaux (1981)

c) Pour faire coïncider les formulations 1 et 2 il suffit de placer ainsi les points sur la configuration 1:



d) Démonstration

On a les équilibres $\boxed{e1} = \left\{\begin{array}{c|c|c} J & E & E' \\ \hline -a & a+b & -b \end{array}\right\}$ et $\boxed{e2} = \left\{\begin{array}{c|c|c} E' & D & K \\ \hline -b & b+c & -c \end{array}\right\}$

qui par soustraction donnent l'équilibre $\boxed{e3} = \left\{\begin{array}{c|c|c|c} J & K & E & D \\ \hline -a & c & a+b & -b-c \end{array}\right\}$

En projetant on obtient les équilibres

$\boxed{e4} = \left\{\begin{array}{c|c|c} C' & B & K \\ \hline -a & a+b & -b \end{array}\right\}$ et $\boxed{e5} = \left\{\begin{array}{c|c|c} J & C & C' \\ \hline -b & b+c & -c \end{array}\right\}$.

c $\boxed{e4}$ - a $\boxed{e5}$ est l'équilibre $\boxed{e6} = \left\{\begin{array}{c|c|c|c} J & K & B & C \\ \hline ab & -bc & ac+bc & -ab-ac \end{array}\right\}$

<u>Si a ≠ c</u> (JK) coupe (ED) au barycentre I de $\begin{array}{c|c} J & K \\ \hline a & -c \end{array}$ d'après $\boxed{e3}$

et (JK) coupe (BC) au barycentre I de $\begin{array}{c|c} J & K \\ \hline ab & -bc \\ \hline a & -c \end{array}$ d'après $\boxed{e6}$

<u>Si a = c</u> JKDE et JKBC sont des trapèzes d'après $\boxed{e3}$ et $\boxed{e6}$

Ainsi <u>(JK), (ED) et (BC) sont concourantes ou parallèles</u>

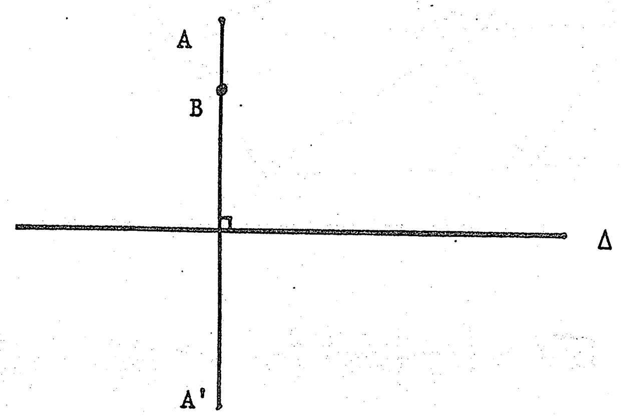
Dans le cas du quadrilatère complet l'existence du point I est assurée.

Le cas du parallèlogramme est également traité pages 14, 15 et 16 dans "*Equilibres*" Hamel, Lachaud et Sinègre (IREM de Rouen, *Mai 1989)*.

9° <u>Exemple 5:</u>

La propriété a son origine dans le problème suivant proposé aux élèves:

Etant donné une droite Δ et un point A, non situé sur Δ, et dont on connaît le symétrique A' par rapport à Δ.
Construire, <u>à la règle seule</u>, le symétrique d'un point B de (AA').



Chaque année, certains élèves, proposent des constructions qu'il est difficile de justifier au niveau considéré. En voici trois: les droites sont numérotées dans l'ordre de construction.

a) <u>Bonnet:</u> $4^{ème}$ (1983)

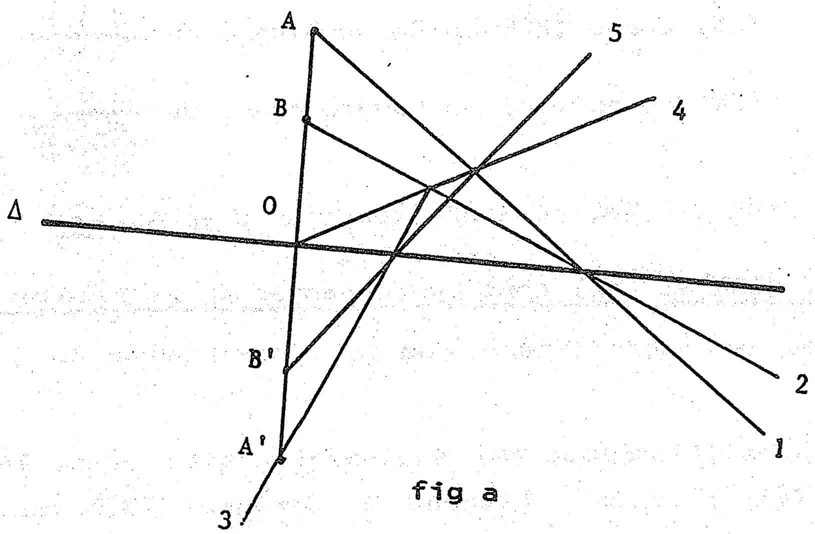


fig a

b) Joussein: 2° (1988)

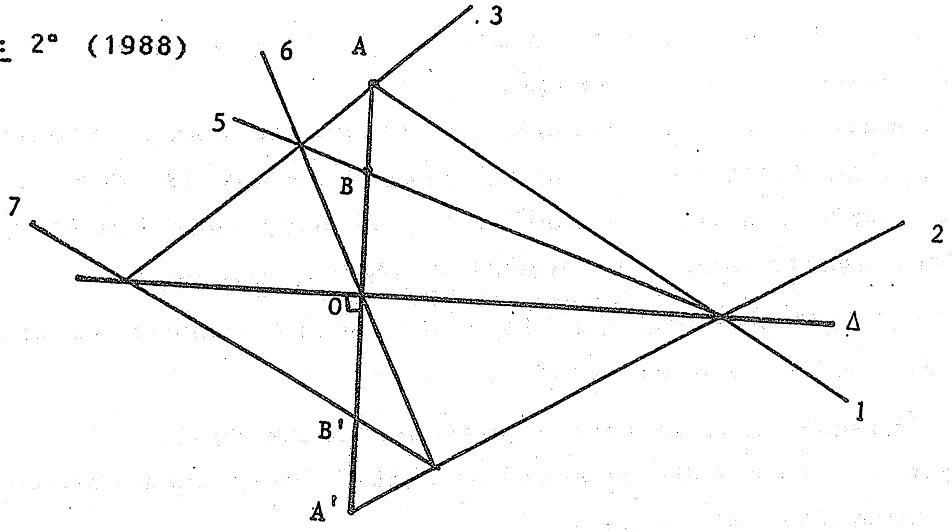


fig b

c) Robl: 2° (1989)

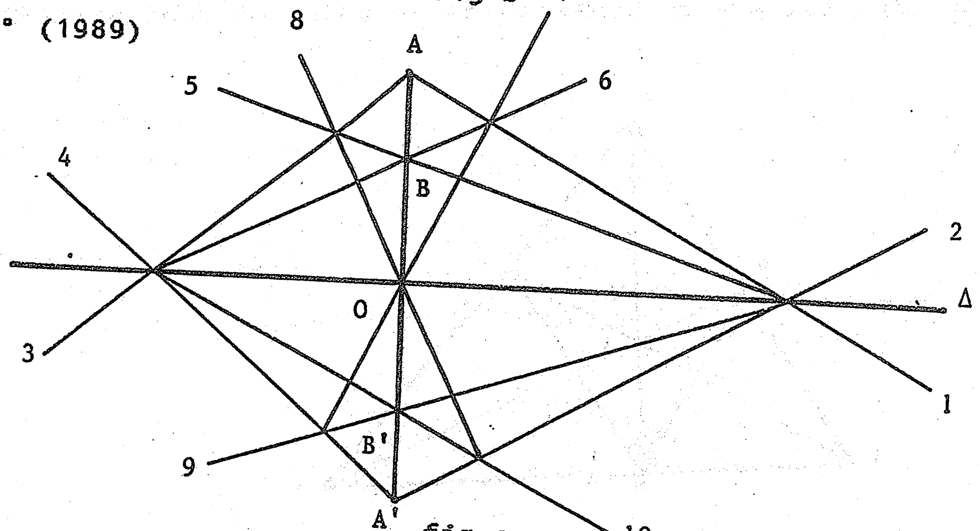
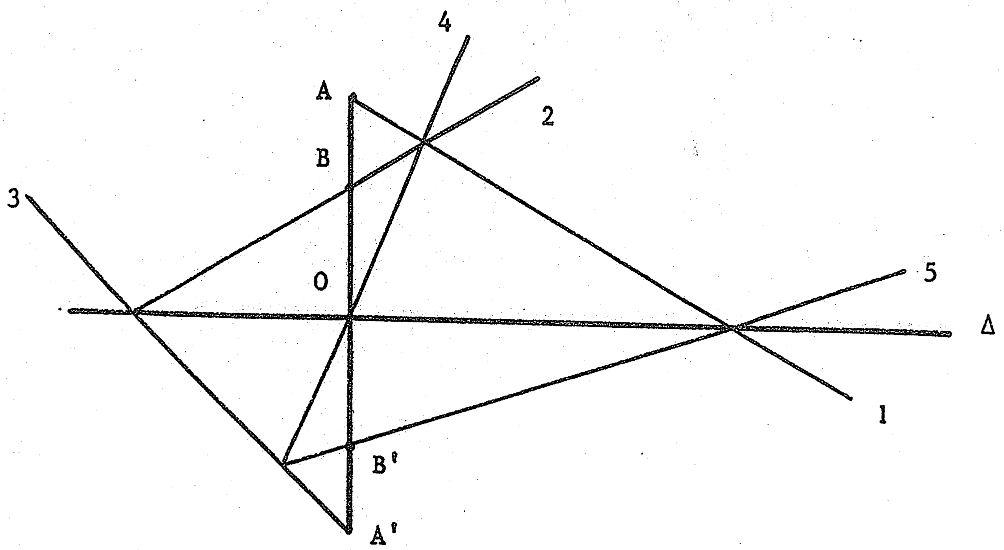


fig c

- Evidemment, il ne fut pas possible de valider immédiatement les constructions de ces élèves.
- En apparence différentes, ces trois constructions n'en sont qu'une. Voici la construction minimale:



▪ Bien que non épurée, la construction de Robl donne la clé d'une justification au niveau Seconde.

Cette construction est valable si la figure admet effectivement Δ comme axe de symétrie. Il suffit pour cela que les droites Δ_5 et Δ_7 soient symétriques par rapport à Δ , et donc, que les droites Δ_5 et Δ_7 soient symétriques par rapport à (AA').

A Robl il fut répondu que la construction serait valable si la propriété suivante était vraie:

Soit un triangle ABC et (AH) la hauteur issue de A.
Pour tout point de (AH) on appelle E et F les intersections de (CM) et (BM) avec (AB) et (AC).
La droite (AH) est axe de symétrie de la paire de droites {(HE),(HF)}

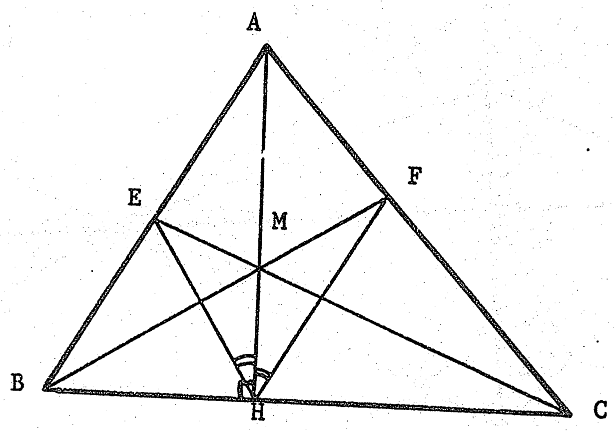


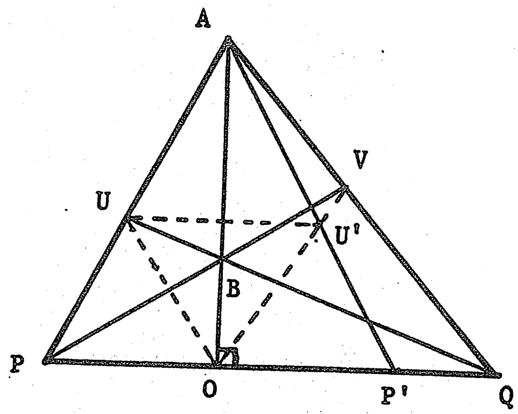
fig e

Cette propriété est bien connue lorsque M est l'orthocentre du triangle ABC (triangle orthique), mais peu ou pas connue lorsque M est un point quelconque de la hauteur.

Démonstration:

(Il n'est pas question, étant donné le niveau considéré, d'utiliser les faisceaux harmoniques, les polaires, etc ...)

La démonstration ci dessous donne un exemple d'intervention des équilibres dans un problème de symétrie (et d'alignement).



Soit $U' = s_{(OA)}(U)$ et $P' = s_{(OA)}(P)$.

Montrer que $(OV) = s_{(OA)}(OU)$, équivaut à montrer que O, U' et V sont alignés.

Il existe un équilibre $\boxed{e1} = \left\{\begin{array}{c|c|c|c} A & P & Q & B \\ \hline a & p & q & / \end{array}\right\}$ qui entraîne

les équilibres $\boxed{e2} = \left\{\begin{array}{c|c|c} A & U & P \\ \hline a & -a-p & p \end{array}\right\}$, $\boxed{e3} = \left\{\begin{array}{c|c|c} P & O & Q \\ \hline p & -p-q & q \end{array}\right\}$

et $\boxed{e4} = \left\{\begin{array}{c|c|c} A & V & Q \\ \hline a & -a-q & q \end{array}\right\}$

La symétrie conduit à l'équilibre $\boxed{e5} = \left\{\begin{array}{c|c|c} A & U' & P' \\ \hline a & -a-p & p \end{array}\right\}$

On a aussi l'équilibre $\boxed{e6} = \left\{\begin{array}{c|c|c} P & O & P' \\ \hline p & -2p & p \end{array}\right\}$ car O est milieu de [P,P']

On peut donc repérer P' sur [O,Q] par l'équilibre $\boxed{e7}$ tel que

$\boxed{e7} = \boxed{e3} - \boxed{e6} = \left\{\begin{array}{c|c|c} Q & P' & O \\ \hline q & -p & p-q \end{array}\right\}$.

En faisant intervenir U' en considérant l'équilibre $\boxed{e8}$ tel que

$\boxed{e8} = \boxed{e5} + \boxed{e7} = \left\{\begin{array}{c|c|c|c} A & U' & Q & O \\ \hline a & -a-p & q & p-q \end{array}\right\}$

En reprenant $\boxed{e4}$ pour tester l'alignement de V avec O et U' on obtient l'équilibre $\boxed{e9} = \boxed{e8} - \boxed{e4} = \left\{\begin{array}{c|c|c} O & U' & V \\ \hline p-q & -a-p & a+q \end{array}\right\}$.

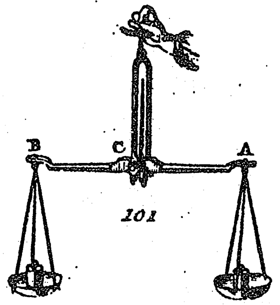
Cet équlibre prouve que les points O, U' et V sont alignés.

Partie B

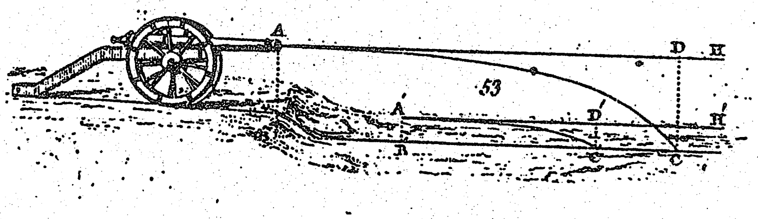
Carte postale - 1925 (référence inconnue).

I.R.E.M. de Bordeaux

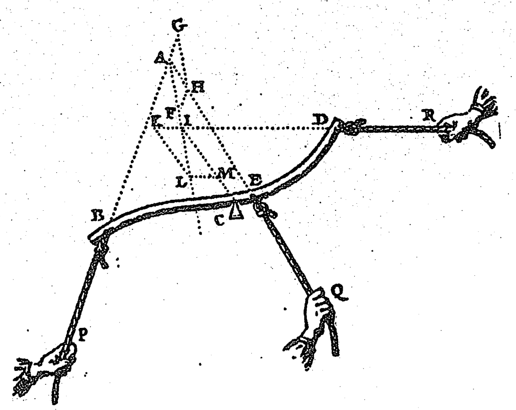
Groupe de Géométrie



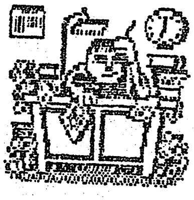
MISE A L'ESSAI
EN CLASSE DE SECONDE
BARYCENTRES ET EQUILIBRES



Elements de cours suivis d'exercices



I- ELEMENTS DE COURS



Barycentres et Equilibres

ELEMENTS de COURS

Pour la Classe de Seconde

Les éléments de cours correspondent à un travail de géométrie plane, mais les situations peuvent être présentées dans l'espace. Une extension de ce chapitre à l'espace ne pose aucun problème, si ce n'est de représentation. Il est même souhaitable que les images mentales, liées à l'aspect physique soient conçues dans l'espace.

PROGRAMME DE PHYSIQUE DE SECONDE (extrait du B.O. février 87)

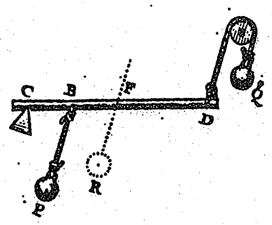
/MECANIQUE/

I. Le mouvement.

II. La force.

III. Centre d'inertie, quantité de mouvement.

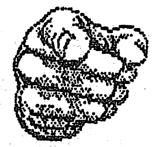
IV. Equilibre d'un solide.



Exemples d'équilibre d'un solide dans les seuls cas suivants :

- sous l'action de deux forces ;
- sous l'action de trois forces non parallèles ;
- sous l'action de deux forces appliquées, le solide étant susceptible de tourner autour d'un axe fixe.

I. ETUDE DE QUELQUES SITUATIONS UTILISANT ET INTRODUISANT LE BARYCENTRE.



1°) Recherche d'un point d'équilibre.

a) La balançoire

Les points A, B, C sont alignés dans cet ordre.

La tige [A,C] est supposée sans masse et tournant autour d'un axe passant par B, les forces et le mouvement étant dans le plan de la figure.

Les forces d'intensité α et γ appliquées en A et C sont parallèles.

Par conséquent, la réaction du support leur est parallèle (intensité β).

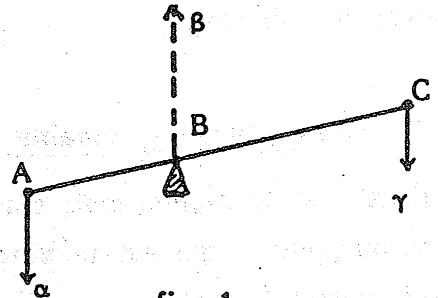
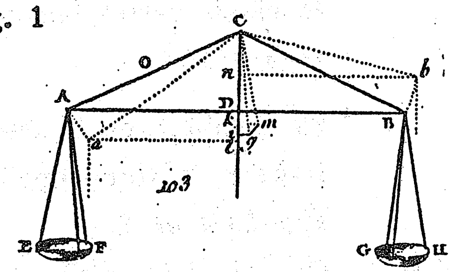


fig. 1



<u>Lorsque l'équilibre est réalisé</u> on a :

- d'une part $\beta = (\alpha + \gamma)$
- d'autre part le moment résultant par rapport à l'axe passant par B est nul, ce qui correspond ici à l'égalité :

(1) $\alpha\, AB = \gamma\, BC$ (voir figure 2)

Ceci suffit pour placer le point B sur [A,C].

Compte tenu de la position relative des points la relation (1) peut se traduire vectoriellement par :

(2) $\alpha\,\overrightarrow{BA} + \gamma\,\overrightarrow{BC} = \vec{0}$

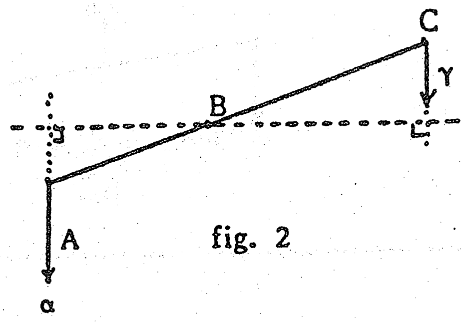


fig. 2

(e1) *Placer le point d'équilibre sur la balançoire schématisée ci-contre :*

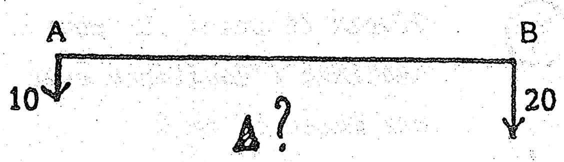


Fig. e_1

(e2) *Equilibrer, par une masse correcte, la balance ci-contre :*

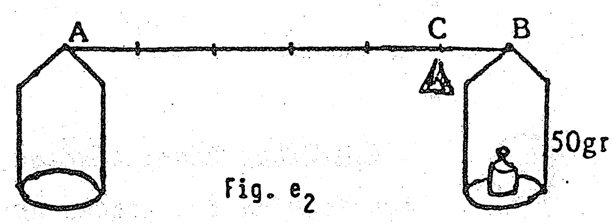


Fig. e_2

- La situation est dans l'espace mais la représentation qui la traduit, schématise une projection sur un plan (orthogonal à l'axe situé en B).
- Si l'on craint de représenter les forces en jeu par des flèches, pour éviter le voisinage avec $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$, on peut mettre des bâtons, des gros points, des plateaux de balance...

b) La balance romaine

Le principe est le même, mais c'est la position du point C qui est recherchée, la masse correspondant à α est lue en regard de C.

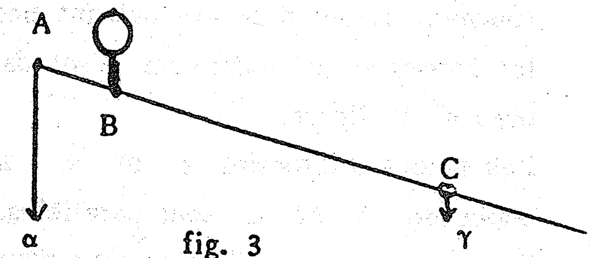


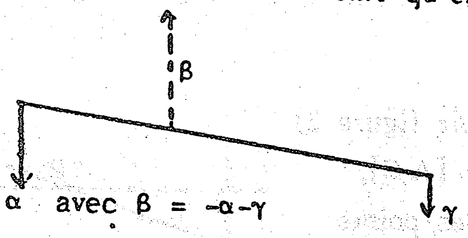
fig. 3

On équilibre en C, avec une force d'intensité fixée γ, la force appliquée en A et la réaction appliquée en B.

On doit donc avoir : $\alpha \, CA = (\alpha + \beta) \, CB$ (3)

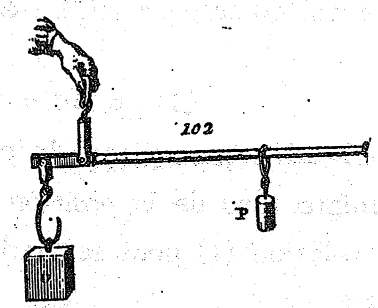
qui s'écrit ici vectoriellement $\alpha \, \overrightarrow{CA} + (-\alpha - \gamma) \, \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{0}$ (4)

A l'équilibre, la situation est le même qu'en a):



avec $\beta = -\alpha - \gamma$

fig. 4



ooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

(e3) *Placer le point C pour réaliser l'équilibre avec une masse 5N en C*

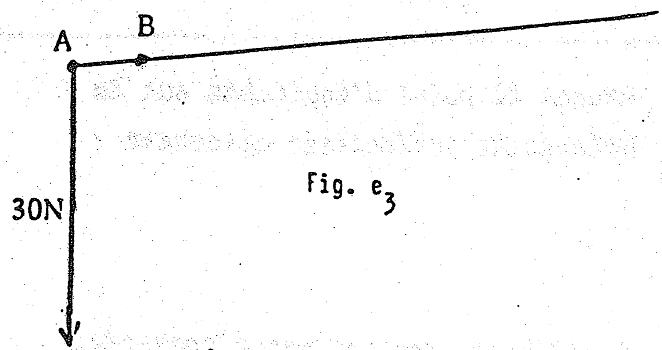


Fig. e_3

(e4) *L'équilibre étant réalisé, représenter les forces appliquées en A et C.*

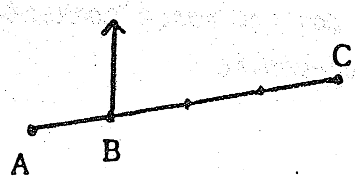


Fig. e_4

brouette, n. f. 1 Autref. Chaise fermée à deux roues, tirée par un homme. 2 Auj. Petit tombereau à une roue et deux brancards qu'on pousse devant soi.
Orig.—bas lat. birota, *à deux roues.*

c) La brouette

L'axe est en A.
L'intensité de la force appliquée en A est encore déterminée par la relation (1), lorsque l'équilibre est réalisé.

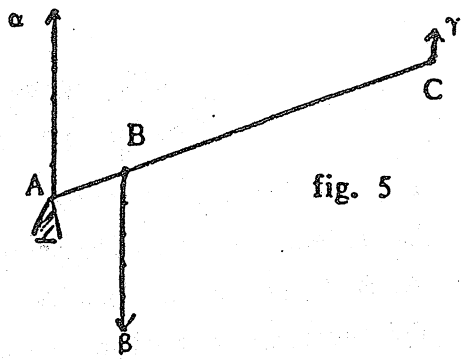
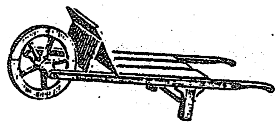


fig. 5



On peut dire aussi que les forces appliquées en B et C s'équilibrent et que : β AB = γ AC (5).
soit, vectoriellement : $(-\alpha-\gamma)\,\overrightarrow{AB} + \gamma\,\overrightarrow{AC} = \vec{0}$ (6)

....

e5 *On exerce en C une force de 200N*
a) Où doit-on placer sur (AC) un poids de 1200N ?
b) Même question avec 400N.

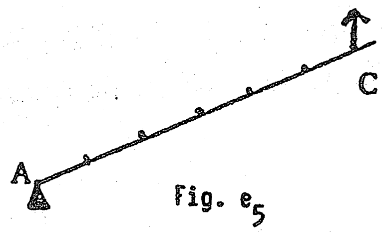
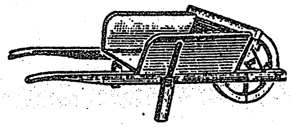
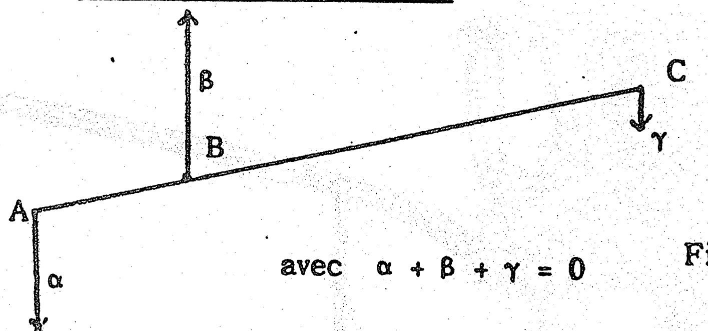


Fig. e_5

....

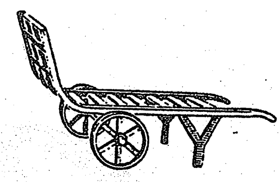


Les trois exemples a), b), c), sont trois aspects de leviers et se traduisent par le même schéma d'équilibre :



avec $\alpha + \beta + \gamma = 0$

Fig. 6



Les problèmes sont relatifs à la détermination d'inconnues dans la liste A, B, C, α, β, γ, de façon que l'équilibre soit réalisé.

d) Equilibre d'un mobile dans l'espace,
Equilibre partiel.

Les tiges sont sans masse.
Le schéma est dans l'espace et
A, B, C, D sont coplanaires.
On recherche la position de D dans le plan (ABC).
Le point P est le point d'équilibre
pour les forces appliquées en B et C.
Le point D est le point d'équilibre
pour la force appliquée en A et la résultante
des forces appliquées en B et C.

On a ainsi : $\alpha \vec{DA} + (\beta+\gamma)\ \vec{DP} = \vec{0}$ et
$\beta \vec{PB} + \gamma \vec{PC} = \vec{0}$

Donc $\alpha \vec{DA} + \beta \vec{DB} + \gamma \vec{DC} = \vec{0}$ (7)
(en utilisant la relation de Chasles).

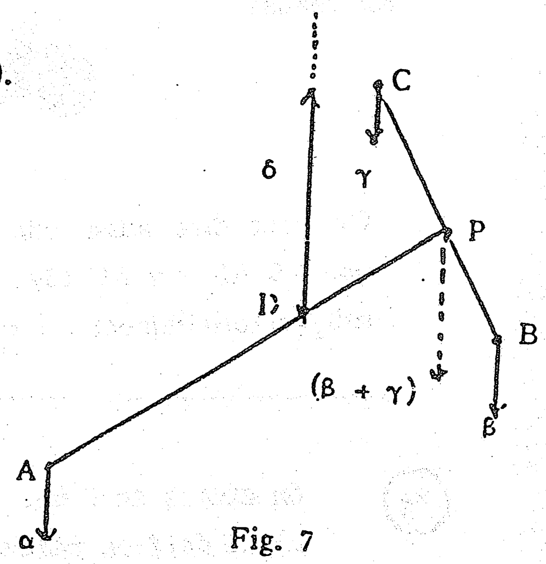
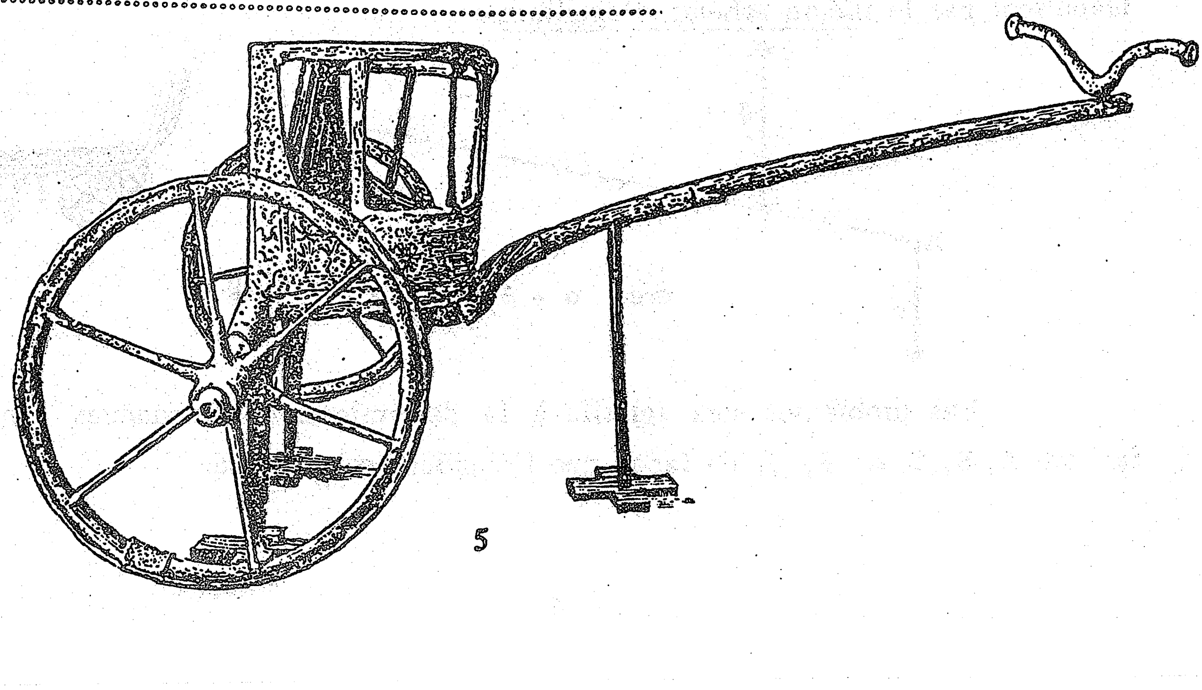


Fig. 7

e_6 *Faire un schéma analogue à celui de la figure 7 avec* $\alpha = 2$, $\beta = \gamma = 1$



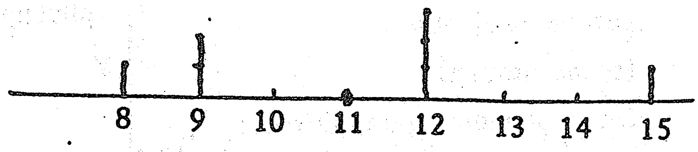
2°) Moyennes

a) Calcul d'une moyenne

Un candidat a obtenu à un examen les 4 notes suivantes avec les coefficients correspondants :

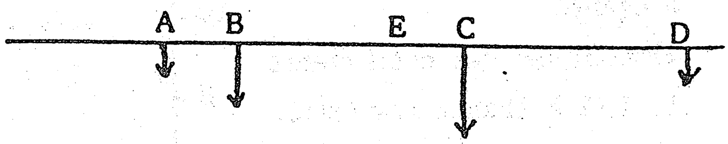
notes	8	9	12	15
coefficients	1	2	3	1

On peut représenter cette situation par un diagramme en bâtons :



ou par celui-ci :

Fig. 8



qui rappelle la recherche des équilibres au (1°)

Le calcul donne $m = \dfrac{1 \times 8 + 2 \times 9 + 3 \times 12 + 1 \times 15}{1 + 2 + 3 + 1}$, soit $m = 11$

Sur la figure 8, E apparaît comme le point moyen ou le point d'équilibre dans les représentations des notes.
Il est inchangé si les coefficients sont remplacés par des coefficients proportionnels.
On perçoit également la possibilité de faire des regroupements pour la détermination de E.

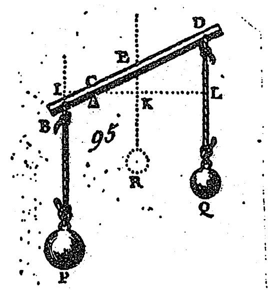
....

e7 *Voici les résultats d'un devoir*

notes	*4*	*7*	*9*	*10*	*11*	*12*
effectif	*3*	*7*	*12*	*4*	*7*	*3*

a) Placer, sur une droite graduée chaque note en représentant son effectif.

b) Calculer la moyenne des notes du devoir.



....

b) Moyennes couplées, point moyen

Pour un élève, on note chaque trimestre la moyenne en mathématique et en physique. On représente ce couple par un point du plan.

Chaque élève est ainsi représenté par trois points A, B et C dans l'ordre.

On se propose de le représenter par un seul point. (point moyen).

On a plusieurs possibilités :

1) Placer chaque trimestre à égalité.

2) Attribuer les coefficients 1, 1, 2 à chaque trimestre.

3) Donner les coefficients 1, 2, 3 à chacun des trimestres.

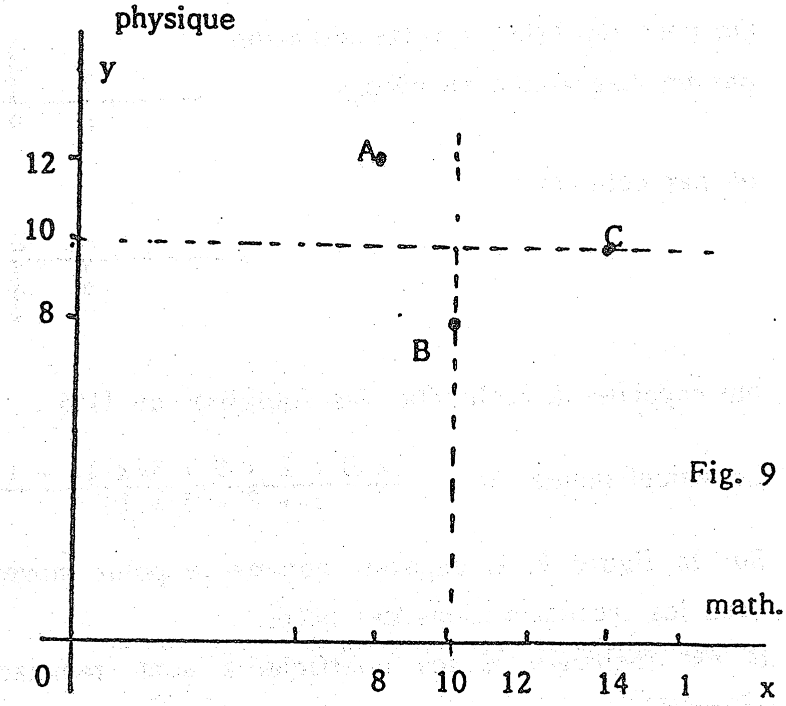
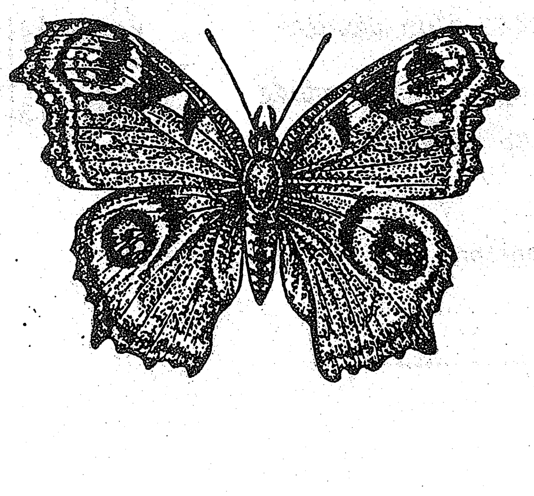


Fig. 9

Dans chacun des cas, le point obtenu a pour coordonnées les moyennes en Mathématiques et en Physique (avec les coefficients correspondants).



Faire les constructions en regroupant les deux premiers trimestres.

1) On obtient P_1, centre de gravité de ABC.

2) On obtient
le milieu de [C', C] : P_2.

3) On détermine Q, point moyen, pour les deux premiers trimestres, que l'on affecte de 3, P_3 est alors le milieu de [C, Q].

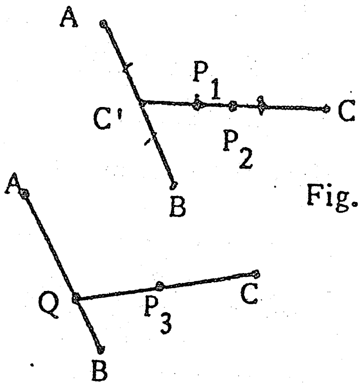
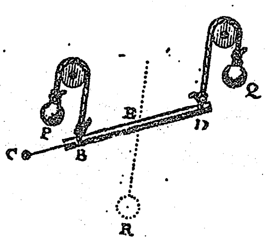
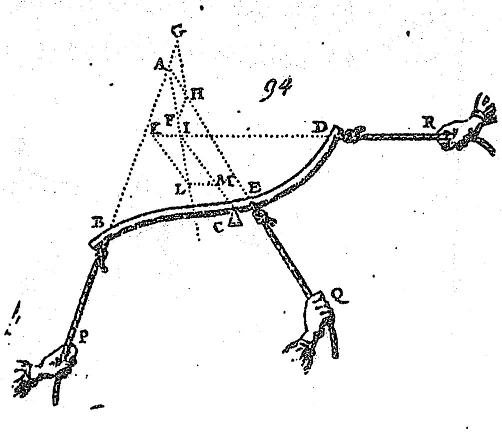


Fig. 10



e_8 *On donne trois points par leurs coordonnées. Déterminer le point moyen pour les coefficients indiqués.*

	A	B	C
x	11	7	13
y	9	12	6
coefficients	2	1	2



II. BARYCENTRES DE DEUX POINTS PONDERES.

1°) Propriété et définition

Etant donné deux réels α et β, de somme non nulle, affectés à deux points A et B, la relation (b) : $\alpha\,\overrightarrow{GA} + \beta\,\overrightarrow{GB} = \vec{0}$ définit un point G unique qui est dit

$$\boxed{\text{barycentre de } \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline \alpha & \beta \end{array}} \quad (b)$$

en effet (b) équivaut à :

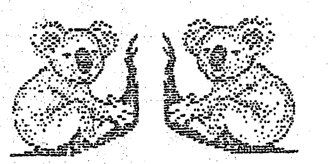
$$\boxed{\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta}\,\overrightarrow{AB} \qquad (b')}$$

Vocabulaire

Le couple (A, α) est dit point pondéré.
On dit que A est affecté du coefficient α.

e_9 *Indiquer la relation vectorielle définissant le point C,*

barycentre de $\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 3 & -5 \end{array}$



e_{10} *Préciser C comme barycentre de A et B lorsque l'on a :*

$2\,\overrightarrow{CA} - 4\,\overrightarrow{CB} = \vec{0}$

SCHEMA D'EQUILIBRE ASSOCIE, EQUILIBRE A TROIS POINTS

Du point de vue physique, la recherche de G correspond à la recherche sur (AB) du point d'application de la résultante $\vec{R}$ de deux forces parallèles d'intensité α et β appliquées en A et B.

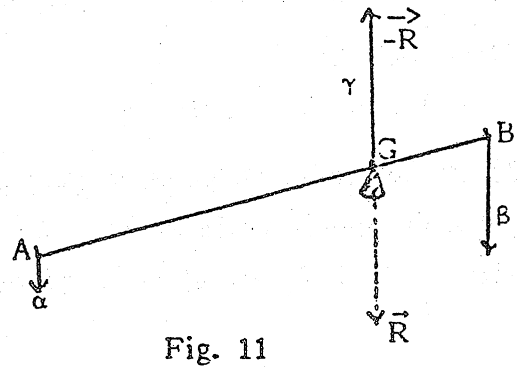


Fig. 11

A l'équilibre, la résultante équilibre la réaction qui est d'intensité γ et l'on a :

$$\alpha + \beta + \gamma = 0$$

e_{11} *Les points A et B étant donnés, construire chacun des schémas d'équilibres dans les deux cas suivants :*

a) C est le barycentre de $\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 3 & 2 \end{array}$

b) B est le barycentre de $\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline 3 & -5 \end{array}$

Que peut-on remarquer ?

e_{12} *Traduire en termes de barycentre le schéma ci-dessous :*

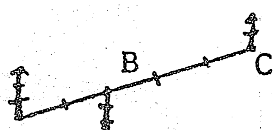


Fig. e_{12}

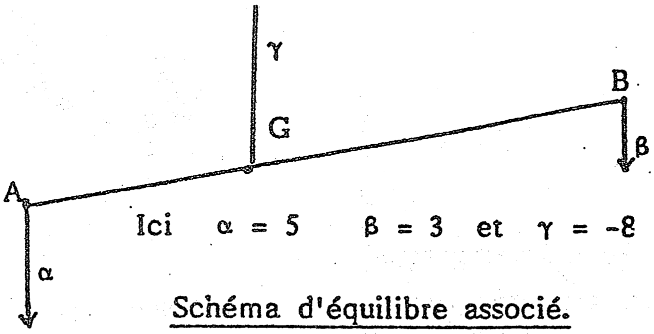


Fig. 12 Ici $\alpha = 5$ $\beta = 3$ et $\gamma = -8$

Schéma d'équilibre associé.

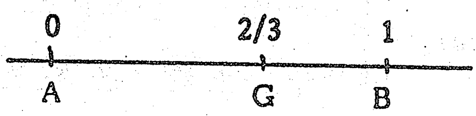
2°) Repérage du barycentre

La relation $\overrightarrow{AG} = \dfrac{\beta}{\alpha + \beta}\ \overrightarrow{AB}$ relie G à A et B et donne immédiatement un moyen de placer G sur (AB).

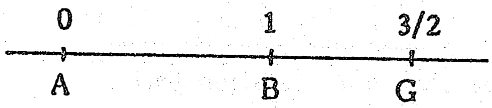
Elle peut se lire :

G est d'abscisse $\dfrac{\beta}{\alpha + \beta}$ dans le repère (A,B)

Ex. 1 : G barycentre de $\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 1 & 2 \end{array}$



Ex. 2 : G barycentre de $\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline -1 & 3 \end{array}$



e13

Placer sur la droite (AB) les trois points G_1, G_2 et G_3 :

G_1 est le barycentre de $\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 2 & 6 \end{array}$

G_2 est le barycentre de $\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 3 & 1 \end{array}$

G_3 est celui de $\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 3 & -5 \end{array}$

3°) Cas particuliers

$\alpha = 0$ $G = B$

$\beta = 0$ $G = A$

$\alpha = \beta$ $G = I$ (milieu de [A,B])

Penser au point d'équilibre permet de conjecturer la position du barycentre d'après les valeurs de α et β. En particulier :

"le barycentre est du côté du plus lourd"

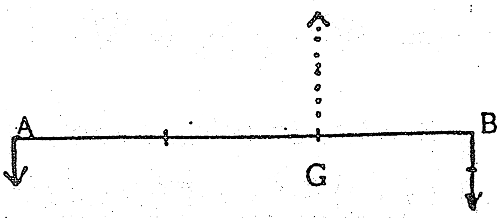


Fig. 13

Physiquement, on peut estimer la position correspondant à l'"égalité" des moments.

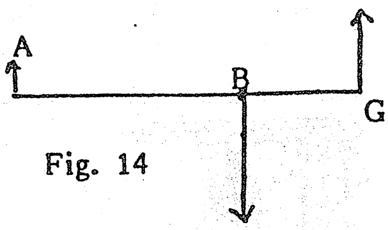
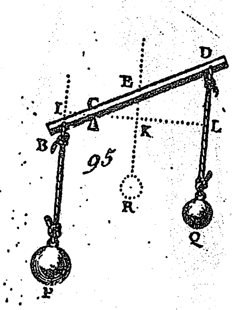


Fig. 14



Evidents physiquement.

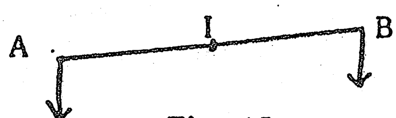


Fig. 15

A et B sont à égale distance de l'axe

4°) Caractérisations

L'utilisation de la relation de Chasles permet de montrer que les relations suivantes sont équivalentes :

(b) $\alpha\,\overrightarrow{GA} + \beta\,\overrightarrow{GB} = \vec{0}$

avec sa version : $\overrightarrow{AG} = \dfrac{\beta}{\alpha + \beta}\,\overrightarrow{AB}$

(m) Pour tout point M :

$(\alpha + \beta)\,\overrightarrow{MG} = \alpha\,\overrightarrow{MA} + \beta\,\overrightarrow{MB})$

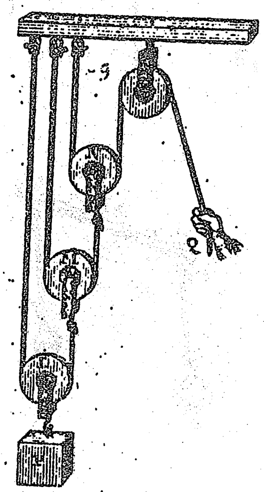
(ou $\overrightarrow{MG} = \dfrac{1}{\alpha + \beta}\,(\alpha\,\overrightarrow{MA} + \beta\,\overrightarrow{MB})$ (m')

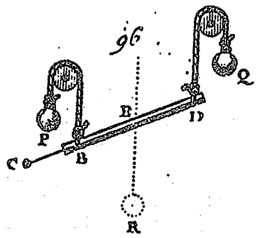
(p) Il existe un point P tel que

$(\alpha + \beta)\,\overrightarrow{PG} = \alpha\,\overrightarrow{PA} + \beta\,\overrightarrow{PB}$

(m) est utilisé lorsque l'on sait que l'on a un barycentre G.

(p) est utilisé pour prouver que G est un barycentre.





On a un aspect plus symétrique avec les équilibres :

Si $\alpha + \beta = -\gamma$, on peut écrire

(m) <=> $\begin{cases} \text{Pour tout point M} \\ \alpha\,\overrightarrow{MA} + \beta\,\overrightarrow{MB} + \gamma\,\overrightarrow{MG} = \vec{0} \end{cases}$

Remarque : (m) => $\alpha + \beta + \gamma = 0$
(par différence)

De même :

(p) <=> $\begin{cases} \text{Il existe P vérifiant} \\ \alpha\,\overrightarrow{PA} + \beta\,\overrightarrow{PB} + \gamma\,\overrightarrow{PG} = \vec{0} \end{cases}$

Définition : On dira que l'on a l'équilibre

$$\left\{\begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline \alpha & \beta & \gamma \end{array}\right\} \quad (e)$$

si l'on a la relation (m) :

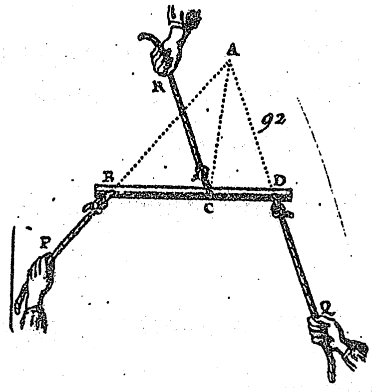
$$\boxed{\text{Pour tout M ; } \alpha\,\overrightarrow{MA} + \beta\,\overrightarrow{MB} + \gamma\,\overrightarrow{MC} = \vec{0}}$$

Remarque 1 :

(m) => $\alpha + \beta + \gamma = 0$ (par différence)

Remarque 2 :

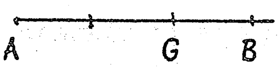
(m) <=>
- $\alpha + \beta + \gamma = 0$
- $\begin{cases} \text{Il existe P tel que} \\ \alpha\,\overrightarrow{PA} + \beta\,\overrightarrow{PB} + \gamma\,\overrightarrow{PC} = \vec{0} \end{cases}$



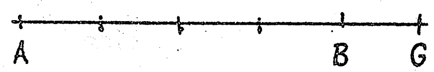
Définir G comme barycentre de A et B :

e_{14}

a)



b)



Les relations suivantes définissent-elles U, V, W comme barycentres ?
Précisez la réponse.

e_{15}

a) $3\,\overrightarrow{PU} = 4\,\overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PB}$

b) $4\,\overrightarrow{PV} = 2\,\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}$

c) $\overrightarrow{PW} = \frac{1}{5}\,\overrightarrow{PA} + \frac{4}{5}\,\overrightarrow{PB}$

Les points A, B, C et D vérifient :

e_{16}

$4\,\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + 3\,\overrightarrow{AD}$

En déduire sans calculs l'alignement de B, C et D.

Si aucun coefficient n'est nul, l'équilibre

$$(e)\quad \left\{\begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline \alpha & \beta & \gamma \end{array}\right\}.$$

traduit simultanément les 3 propriétés :

A est barycentre de $\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline \beta & \gamma \end{array}$,

B est barycentre de $\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline \alpha & \gamma \end{array}$,

C est barycentre de $\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline \alpha & \beta \end{array}$.

ainsi, (e) assure l'alignement de A, B et C.

e_{17}

Le point I est le milieu de [AB].
Donner la notation de l'équilibre associé.

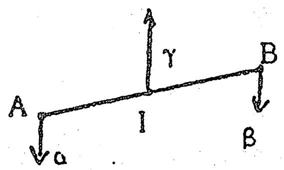


Fig. e_{17}

----

e_{18}

A Quelle relation vectorielle correspond l'équilibre :

$$\left\{\begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline 1 & 3 & -4 \end{array}\right\}$$

Quel est le schéma associé ?

----

e_{19}

Quel équilibre correspond à :
P est le barycentre de $\begin{array}{c|c} Q & R \\ \hline 1 & -2 \end{array}$?
En déduire Q comme barycentre de P et R.

5°) Propriétés

a) L'ordre des points est sans importance.

b) Les coefficients α, β, γ peuvent être remplacés par des coefficients proportionnels (on peut les multiplier (ou les diviser) par un même nombre k non nul)

On peut ainsi fixer, si on le désire, un coefficient ou la somme des coefficients.

Exemple : Déterminer des coefficients (positifs) convenant pour définir B barycentre de $\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline \alpha & \gamma \end{array}$ dans la figure ci-dessous :

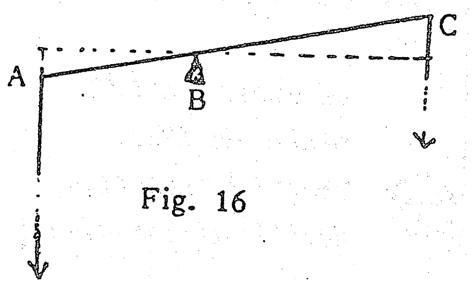
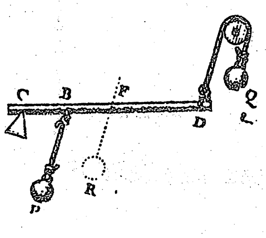


Fig. 16

En pensant aux moments de forces appliquées en A et C, on peut choisir de voir B comme barycentre de

	A	C
avec comme coefficients :	BC	BA
ou bien :	$\frac{1}{BA}$	$\frac{1}{BC}$

Remarque : La notation adoptée permet d'utiliser la proportionnalité des deux suites de coefficients affirmée à la propriété (b).



	A	C	
B est barycentre de.....	10	-30	
si l'on veut 1 en A : ...	1	-3	
	-1	+3	
	-1/2	3/2	... Somme 1
	-1/3	1	.... si l'on veut 1 en C.

Déterminer un système de coefficients α et β pour que C soit le barycentre

(e_{20}) *de* $\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline \alpha & \beta \end{array}$ *avec successivement :* a) $\alpha = 1$

b) $\beta = 1$

c) $\alpha + \beta = 1$

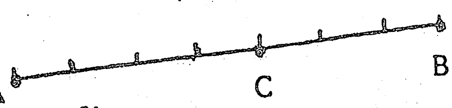


fig. e_{20}

6°) Localisation du barycentre :

a) G, barycentre de $\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline \alpha & \beta \end{array}$, est un point de (AB).

b) Soit M un point de (AB). Il existe un réel x tel que $\overrightarrow{AM} = x\ \overrightarrow{AB}$, expression qui est de la forme $\frac{\beta}{\alpha + \beta}\ \overrightarrow{AB}$ avec $\beta = x$ et $\alpha = 1-x$.

M est donc barycentre de $\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 1-x & x \end{array}$

Ainsi :

$$\boxed{\text{(AB) est l'ensemble des barycentres de A et B}}$$

c) G est entre A et B <=> $\overrightarrow{GA}$ et $\overrightarrow{GB}$ sont de sens contraires

<=> α et β sont de même signe

(car $\alpha\ \overrightarrow{GA} = -\beta\ \overrightarrow{GB}$)

Exercice : Soit I le milieu de [A,B]

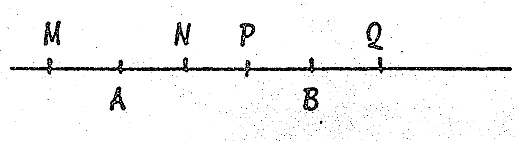
Montrer que G est un point de la demi-droite [I, B)

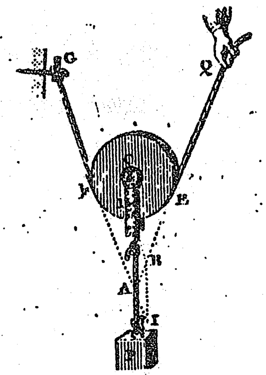
si et seulement si $|\ \beta\ | > |\ \alpha\ |$

....

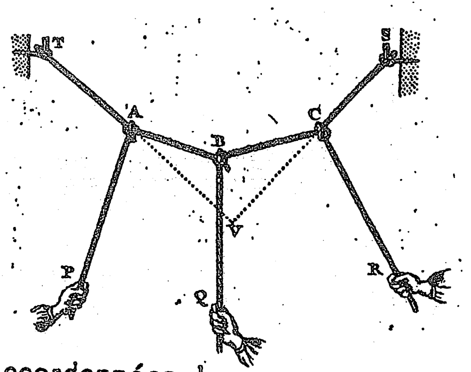
Parmi les points M, N, P, Q, lesquels ne peuvent pas être le barycentre G

e_{21} *de* $\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline -4 & 1 \end{array}$?





(Indication : on peut écrire l'équilibre $\left\{\begin{array}{c|c|c} A & B & G \\ \hline -4 & 1 & . \end{array}\right\}$ *et en déduire la position de A).*



7°) Coordonnées.

Dans un repère, le barycentre a pour coordonnées les moyennes (pondérées) des coordonnées respectives des différents points.
Cela résulte du fait que G est le point moyen du système de points pondérés, et de la relation (m') : $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{\alpha+\beta}(\alpha\ \overrightarrow{OA} + \beta\ \overrightarrow{OB})$

$$\boxed{x_G = \frac{\alpha\ x_A + \beta\ x_B}{\alpha + \beta} \qquad y_G = \frac{\alpha\ y_A + \beta\ y_B}{\alpha + \beta}}$$

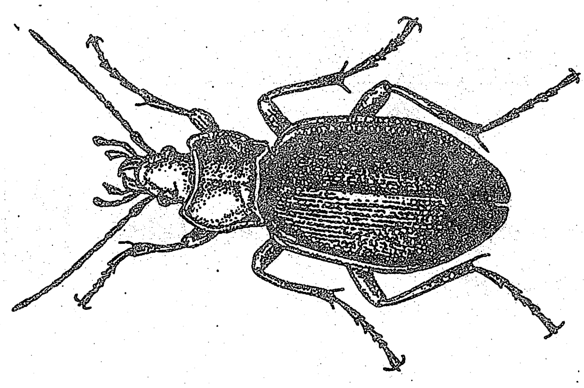
(e22) *Dans un repère, on donne A(1 ; 7) et B (-2 ; 6). Calculer les coordonnées de G, barycentre de*

A	B
2	-1

(e23) *On donne A(0, 7) et C(7, 4). Déterminer les coordonnées de B de façon que C soit le barycentre de*

A	B
3	5

(On pourra encore écrire l'équilibre assoxié et définir B comme barycentre ou bien désigner par x et y les coordonnées de B).



8°) **Constructions**

a) la relation $(\alpha + \beta)\,\overrightarrow{MG} = \alpha\,\overrightarrow{MA} + \beta\,\overrightarrow{MB}$ conduit à la <u>méthode du parallélogramme</u> :

A partir d'un point M_o hors de (AB)

on construit $\overrightarrow{M_oS} = \alpha\,\overrightarrow{M_oA} + \beta\,\overrightarrow{M_oB}$

$G \in (AB) \cap (MS)$

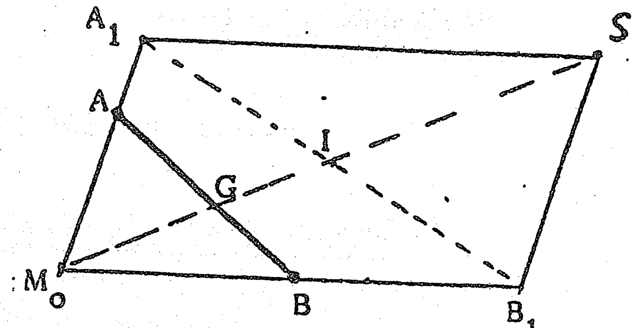


Fig. 17

Les points A et B étant donnés, construire à l'aide de la méthode du parallélogramme :

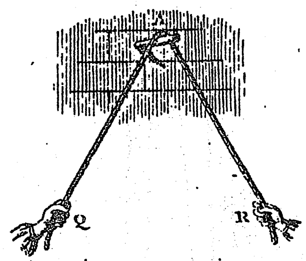
e24

a) G barycentre de

A	B
2	3

b) H barycentre de

A	B
1	-3



b) <u>Usage de la proportionnalité (Thalès)</u>

On trace en A et B deux parallèles, que l'on oriente différemment.

On "placé" α en B

et β en A

On a alors $\dfrac{GA}{GB} = \dfrac{\beta}{\alpha}$

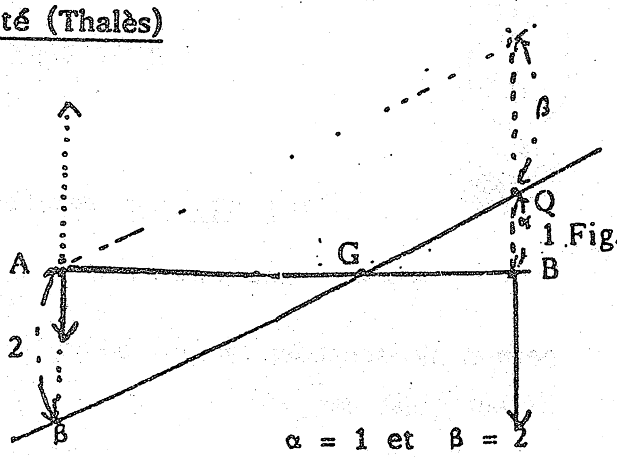


Fig. 18

$\alpha = 1$ et $\beta = 2$

Cette méthode utilisée en physique fonctionne bien si l'on sait, à l'avance, localiser G (voir 6°) ce qui donne un moyen de contrôle.

Utiliser la <u>méthode des parallèles</u> décrite ci-dessus

e25

a) pour construire G barycentre de

A	B
1,5	2,5

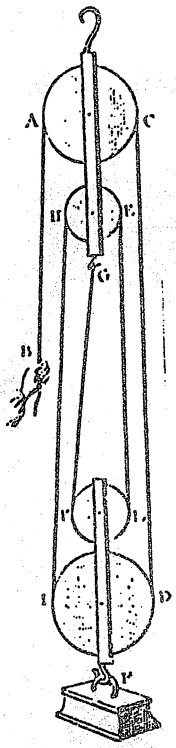
b) pour construire G barycentre de

A	B
-1	3

III. BARYCENTRE DE PLUSIEURS POINTS. BARYCENTRE PARTIEL. EQUILIBRES PARTIELS.

La situation est dans l'espace ou, si nécessaire, dans un plan.

1°) Généralisation de la définition et des caractéristiques.



a) (b) s'écrit $\alpha\,\overrightarrow{GA} + \beta\,\overrightarrow{GB} + \gamma\,\overrightarrow{GC} + \ldots = \overrightarrow{0}$

et définit un point G unique lorsque $s = \alpha + \beta + \gamma + \ldots \neq 0$

b) La relation

(m) s'écrit : pour tout M

$$s\,\overrightarrow{MG} = \alpha\,\overrightarrow{MA} + \beta\,\overrightarrow{MB} + \gamma\,\overrightarrow{MC} + \ldots$$

$$\text{ou } \overrightarrow{MG} = \frac{1}{s}\,[\ldots\ldots]$$

c) (p) s'écrit : il existe P tel que

$$s\,\overrightarrow{PG} = \alpha\,\overrightarrow{PA} + \beta\,\overrightarrow{PB} + \gamma\,\overrightarrow{PC} + \ldots$$

d) L'équilibre associé

A	B	C	G	...	...
α	β	γ	$-s$	...	...

permet de redonner un des points comme barycentre des autres (si son coefficient n'est pas nul).

....

e_{26} *Caractériser des diverses façons décrites ci-dessus :*

le point G est barycentre de

A	B	C
1	2	3

....

2°) Exemples particuliers

a) Le barycentre de $\begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline \alpha & \beta & 0 \end{array}$ est celui de $\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline \alpha & \beta \end{array}$

b) Le barycentre de $\begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline \alpha & 0 & 0 \end{array}$ est le point A

c) Le barycentre de $\begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline \alpha & \alpha & \alpha \end{array}$ est dit <u>isobarycentre</u> de A, B et C.

Ce point est le centre de gravité du triangle ABC.
A', B', C' désignent les milieux des côtés.

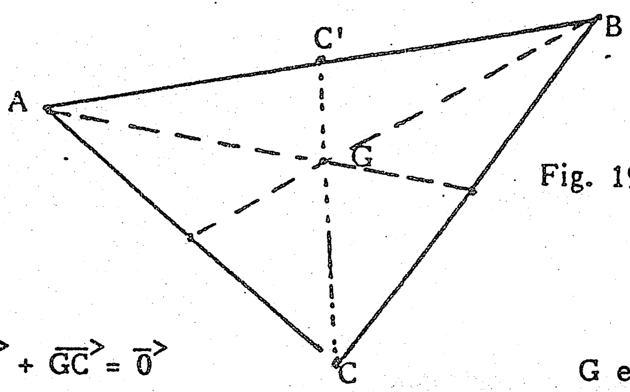
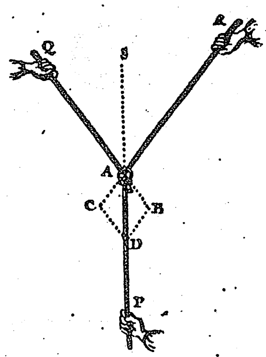


Fig. 19



$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$ G est barycentre de $\begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline 1 & 1 & 1 \end{array}$

or $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = 2\,\overrightarrow{GC'}$ or C' est barycentre de $\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 1 & 1 \end{array}$

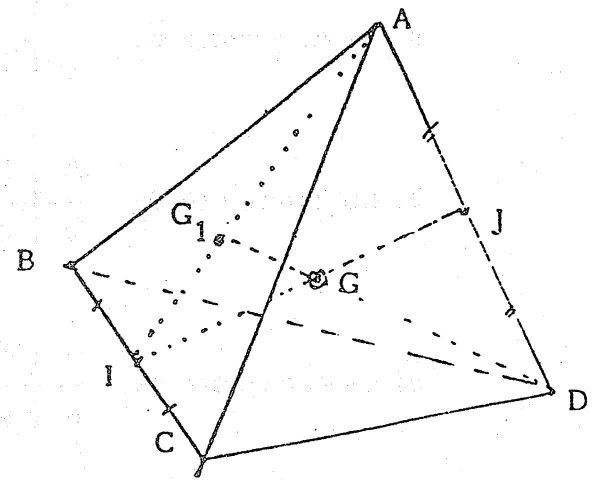
Donc $2\,\overrightarrow{GC'} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$

Donc G est barycentre de $\begin{array}{c|c} C' & C \\ \hline 2 & 1 \end{array}$

On retrouve le résultat :
Dans un triangle, les médianes sont concourantes en un point situé sur chacune d'elle aux $\frac{2}{3}$ à partir du sommet ($\overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\,\overrightarrow{CC'}$).

d) Isobarycentre de 4 points (plan ou espace)

- Placer G_1 isobarycentre de A, B, C.
- Placer G sur (G_1D)
- Montrer que G est un point de 3 autres droites analogues.
- Montrer que G est situé sur les trois droites qui joignent les milieux des arêtes opposées du tétraèdre.



(e27) *Placer l'isobarycentre de A, B, C et D*

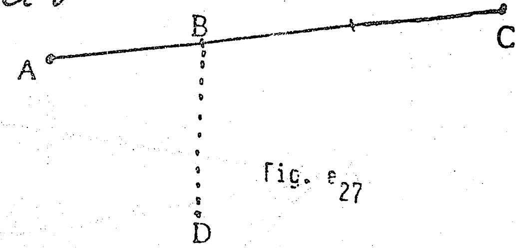


Fig. e27

3°) Propriétés

Comme pour un équilibre à trois points :

◊ l'ordre des points est indifférent ;

◊◊ les coefficients peuvent être remplacés par des coefficients proportionnels.

4°) Exemples de constructions de barycentre de trois points.

Placer G barycentre de

A	B	C
1	2	1

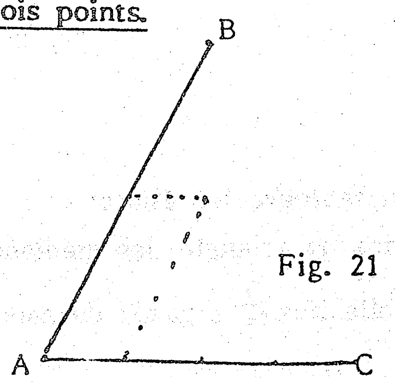


Fig. 21

a) Le point G vérifie :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}\,(2\,\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$$

G est donc des coordonnées $(\frac{1}{2}\,,\,\frac{1}{4})$ dans (A, B, C)

b) La relation $4\,\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MA} + 2\,\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ peut s'écrire :

$$4\,\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MA} + 3\,\overrightarrow{ME} \text{ avec E barycentre de } \begin{array}{c|c} B & C \\ \hline 2 & 1 \end{array}$$

(ou bien $4\,\overrightarrow{MG} = 2\,\overrightarrow{MB} + 2\,\overrightarrow{MB'}$ avec B' milieu de [A,C])

On peut donc (de deux façons) se ramener au cas de deux points comme on le fait (physiquement) pour équilibrer un mobile.

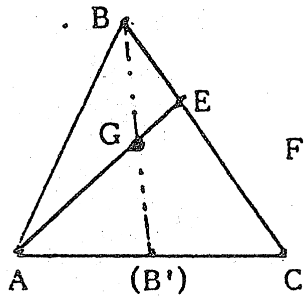
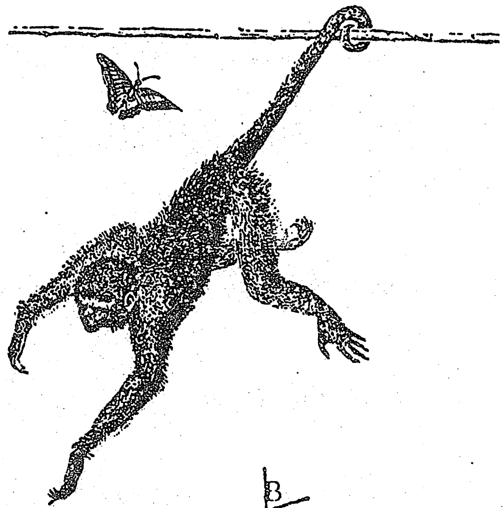


Fig. 22



....

e28 *Réaliser de deux façons la construction de G barycentre de* $\begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline 1 & 3 & 6 \end{array}$

....

5°) <u>Conservation du barycentre (ou des équilibres)</u>

a) La définition vectorielle permet de montrer que le barycentre est conservé par projection, par symétrie par translation, par rotation...par homothétie...

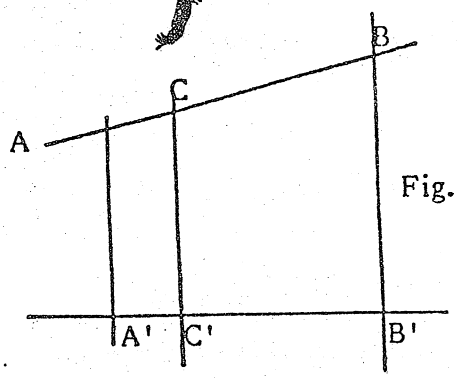


Fig. 23

Par exemple :

<u>Toute projection conserve le barycentre de deux points.</u>

C'est-à-dire :

$$C \text{ barycentre de } \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline \alpha & \beta \end{array} \Rightarrow C' \text{ barycentre de } \begin{array}{c|c} A' & B' \\ \hline \alpha & \beta \end{array}$$

C'est une forme d'énoncé du théorème de Thalès ($\overrightarrow{AC} = k\,\overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{A'C'} = k\,\overrightarrow{A'B'}$)

b) Applications

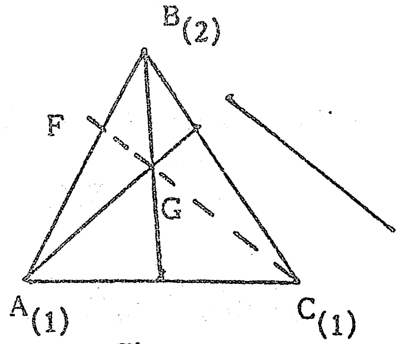


Fig. 24

Lorsque G est déterminé on peut projeter selon une direction.

Ici G est le barycentre de

A	B	C
1	2	1

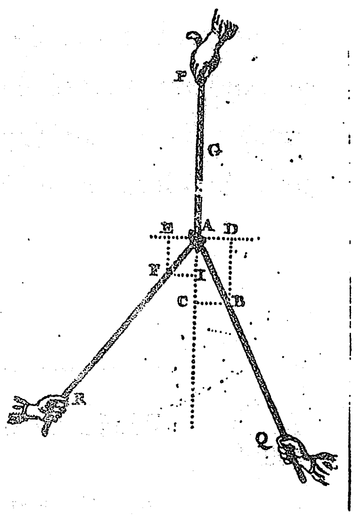
Dans la direction de (GC),
G et C se projettent sur (AB) en F.

F est donc le barycentre de

A	B
1	2

car il est barycentre de

A	B	F
1	2	1



$(4\,\overrightarrow{MF} = \overrightarrow{MF} + \overrightarrow{MA} + 2\,\overrightarrow{MB} \iff 3\,\overrightarrow{MF} = \overrightarrow{MA} + 2\,\overrightarrow{MB})$

(On peut rajouter une colonne $\left|\frac{F}{n}\right|$ (avec $n \neq -3$ ici))

Supposons un équilibre du type

A	B	C	G
1	-1	2	-2

projetons le sur (AC) selon (GB) et sur (GB) selon (AC)

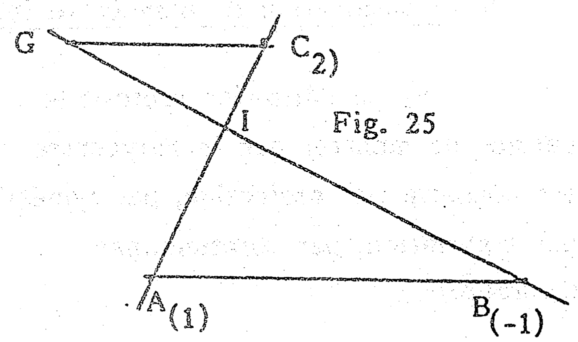


Fig. 25

On trouve : I barycentre de

A	C
1	2

et I barycentre de

B	G
1	2

on a donc (GC)//(AB)

Ce qui était clair vectoriellement

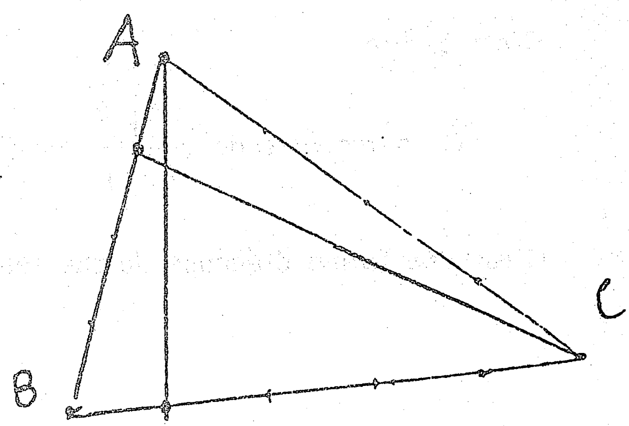
$$\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\,\overrightarrow{MC} - 2\,\overrightarrow{MG} = \iff \overrightarrow{BA} + 2\,\overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

(e29) *Indiquer les 3 équilibres obtenus*
- en projetant sur les côtés du triangle et selon les directions des droites passant par G barycentre de

A	B	C
3	1	4

- en utilisant l'équilibre

A	B	C	G
3	1	4	-8



6°) Barycentres partiels. Equilibres partiels.

On a vu que l'on pouvait dans un équilibre faire intervenir des équilibres ou des barycentres partiels.

Si Z est le barycentre de $\begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline \alpha & \beta & \gamma \end{array}$,

On peut écrire : $s\,\overrightarrow{MG} = (\alpha\,\overrightarrow{MA} + \beta\,\overrightarrow{MB} + \gamma\,\overrightarrow{MC}) + \delta\,\overrightarrow{MD} + \dots$

$$= (\alpha + \beta + \gamma)\,\overrightarrow{MZ} + \delta\,\overrightarrow{MD} + \dots$$

> Ce qui prouve que l'on peut, dans la détermination du barycentre de points poindérés, ou dans un équilibre :
>
> - soit diminuer le nombre de points en remplaçant plusieurs d'entre eux par leur barycentre affecté de la somme des coefficients correspondants,
> - soit remplacer un point par plusieurs dont il est le barycentre.

Exemple : Construction du barycentre G de $\begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline 1 & 2 & 3 \end{array}$

a) G est le barycentre de $\begin{array}{c|c|c|c} A & C & B & C \\ \hline 1 & 1 & 2 & 2 \end{array}$

Or, B' est le milieu de [A, C].

G estdonc le barycentre de $\begin{array}{c|c|c} B' & B & C \\ \hline 2 & 2 & 2 \end{array}$

(isobarycentre)

$\overrightarrow{B'G} = \frac{2}{3}\,\overrightarrow{B'A'}$

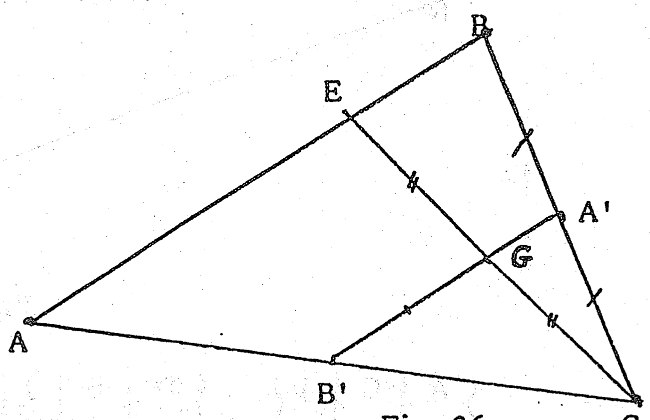


Fig. 26

b) Si E est le barycentre de $\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 1 & 2 \end{array}$

G est le barycentre de $\begin{array}{c|c} E & C \\ \hline 3 & 3 \end{array}$ (milieu de [E, C]).

. Du point de vue équilibres, on peut considérer que l'on a additionné :

au a)

$$\left\{\begin{array}{c|c|c|c} A & B & C & G \\ \hline 1 & 2 & 3 & / \end{array}\right\}$$

$$+ \left\{\begin{array}{c|c|c} A & C & B' \\ \hline -1 & -1 & 2 \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{c|c|c|c} B' & B & C & G \\ \hline 2 & 2 & 2 & / \end{array}\right\}$$

au b)

$$\left\{\begin{array}{c|c|c|c} A & B & C & G \\ \hline 1 & 2 & 3 & / \end{array}\right\}$$

$$+ \left\{\begin{array}{c|c|c} A & B & E \\ \hline -1 & -2 & 3 \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{c|c|c} C & E & G \\ \hline 3 & 3 & / \end{array}\right\}$$

....

(e_{30}) *Traduire en termes de barycentres partiels et d'équilibres partiels les exercices* (e_{28}) et (e_{29}) *ci-dessus.*

....

7°) Exemples d'équilibres à 4 points.

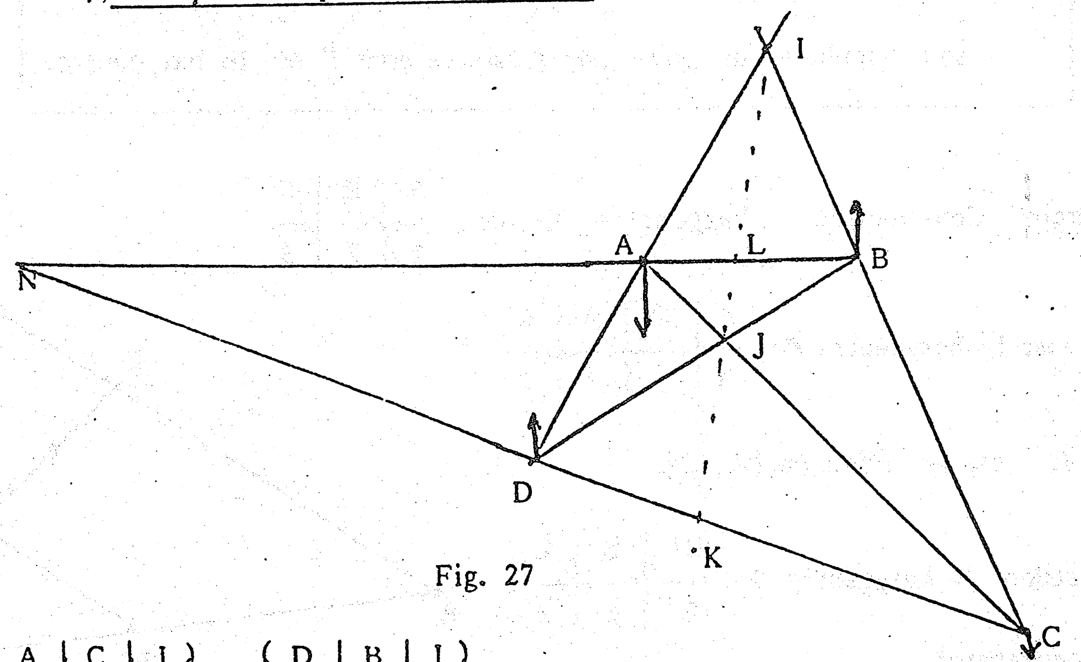


Fig. 27

$$\left\{\begin{array}{c|c|c} A & C & J \\ \hline 4 & 1 & -5 \end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{c|c|c} D & B & J \\ \hline -2 & -3 & 5 \end{array}\right\}$$

------> Un équilibre à 4 points : $\left\{\begin{array}{c|c|c|c} A & B & C & D \\ \hline 4 & -3 & +1 & -2 \end{array}\right\}$

Chaque point est le barycentre des trois autres avec les coefficients correspondants.

Dans l'exemple précédent (6°) :

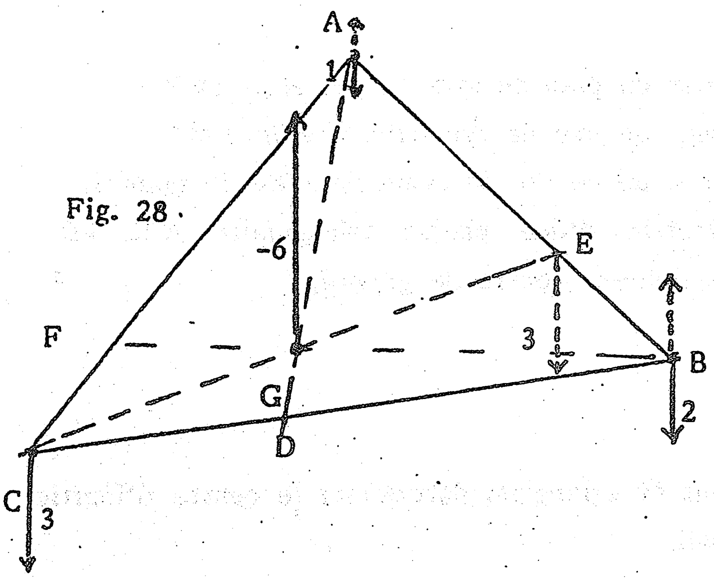


Fig. 28.

Les équilibres

A	B	C	G
1	2	3	-6

et

A	B	E
-1	-2	3

donnent par superposition

l'équilibre

C	G	E
3	-6	3

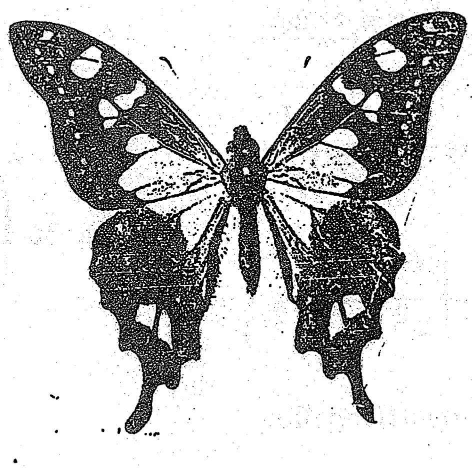
(milieu)

On a aussi les équilibres :

A	G	D
1	-6	5

et

B	G	F
2	-6	4



IV. CENTRE D'INERTIE DE PLAQUES ET SOLIDES HOMOGENES.

1°) Propriétés

Soit I le centre d'inertie.

On admettra que :

a) Si le solide admet un plan de symétrie P, alors $I \in P$

b) Si le solide admet un axe de symétrie Δ, alors $I \in \Delta$

c) Si le solide admet un centre de symétrie c'est le point I.

d) Le centre d'inertie d'une plaque triangulaire ABC est l'isobarycentre des sommets (centre de gravité).

2°) Exemples :

On peut, en partageant en triangles, déterminer le centre d'inertie de toute plaque à contour polygonal.

a) Le marteau

On sait construire E, H et F centres d'inertie de ABM, BMD et BDC. Ici G est l'isobarycentre de E, H, F.

De plus, $G \in (ER)$

et $G \in (FJ)$

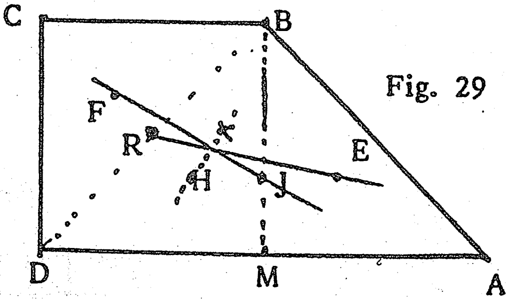


Fig. 29

figure dans le plan de symétrie

b) Le disque troué

$I \in (AO)$

O est barycentre de $\begin{array}{c|c} A & I \\ \hline r^2 & R^2 - r^2 \end{array}$

On a l'équilibre $\left\{ \begin{array}{c|c|c} A & O & I \\ \hline -r^2 & R^2 & r^2 - R^2 \end{array} \right\}$

car les masses sont proportionnelles aux carrés des rayons.

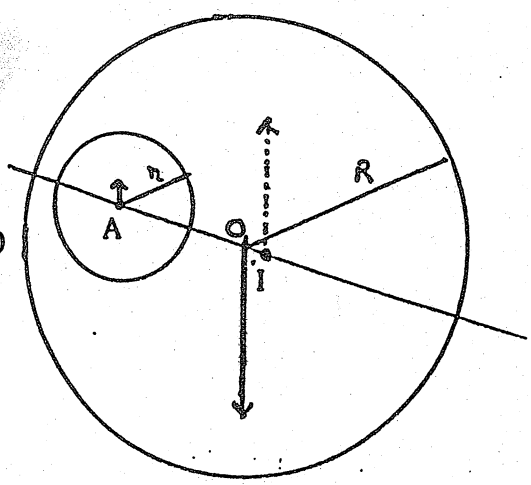


Fig. 30

e31

Placer le centre d'inertie de la plaque homogène ci-contre, qui est formée de deux parallélogrammes.

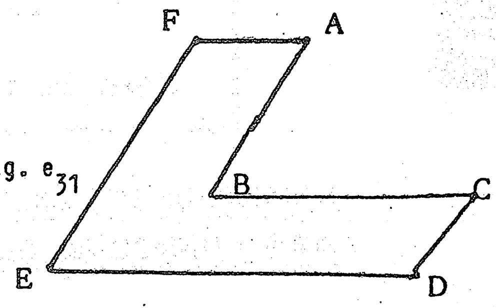
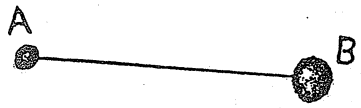
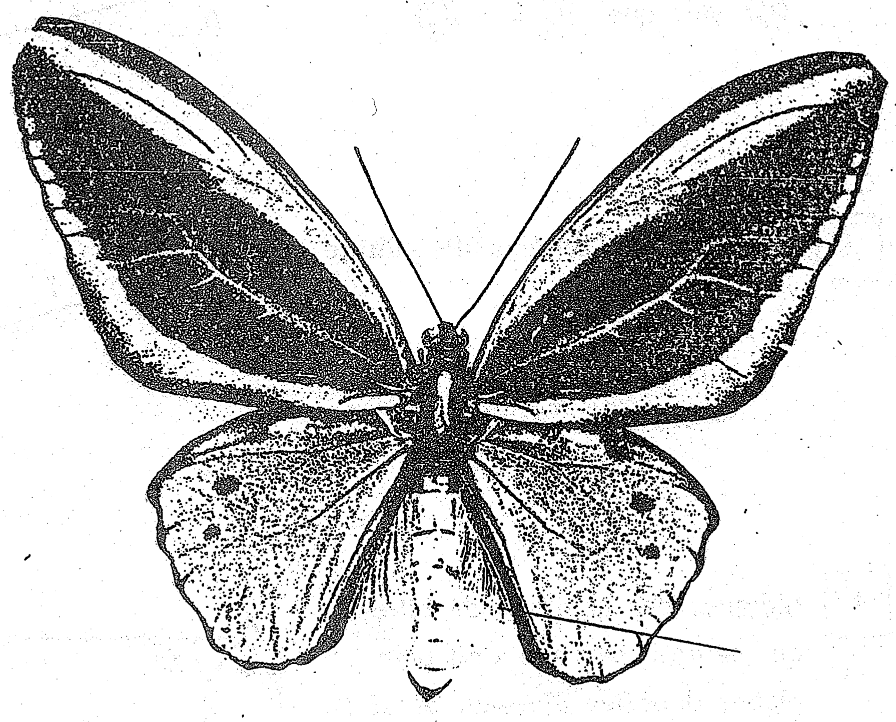


Fig. e31

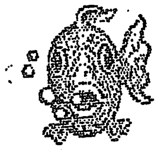
e32

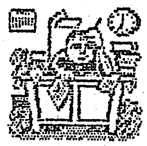
Placer le centre de gravité des deux boules de rayons respectifs R et 2R et de centres A et B (avec AB > 3R)





II - EXERCICES



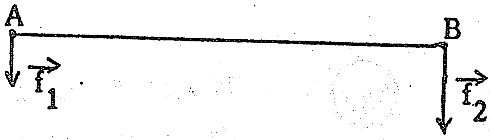
Barycentres et Equilibres

EXERCICES

Pour la Classe de Seconde

DANS TOUS LES EXERCICES, LES ELEMENTS PHYSIQUES DE LIAISON SONT CONSIDERES COMME ETANT SANS MASSE.

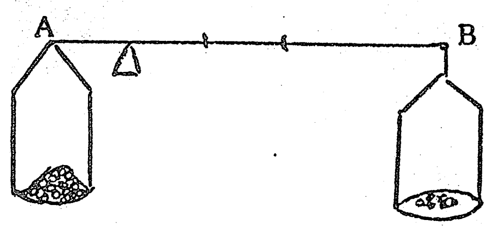
1 Dans le schéma ci-contre, placer sur (AB) le point d'équilibre G. (La force $\vec{f_2}$ est le double de la force $\vec{f_1}$).



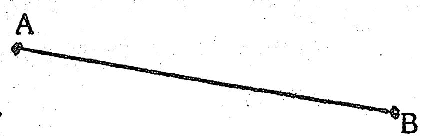
2 Placer sur le schéma, la résultante et son point d'application C. (On sait que $\vec{F_2} = 3\ \vec{F_1}$).

3 Compléter le schéma d'équilibre ci-contre :

4 Indiquer des nombres de billes de même masse que l'on peut placer dans les plateaux A et B.

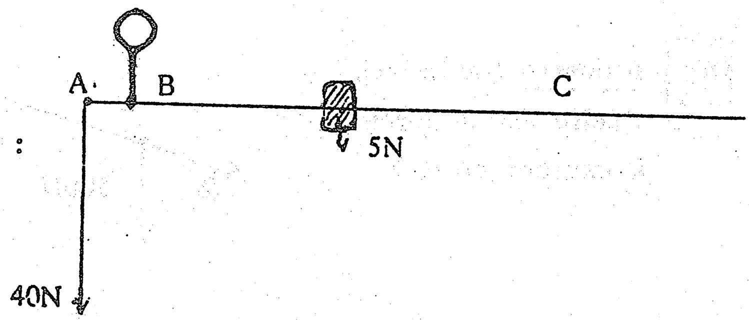


5 On place en A une masse de 20 unités et en B une masse de 30 unités.
Placer le point d'équilibre correspondant.



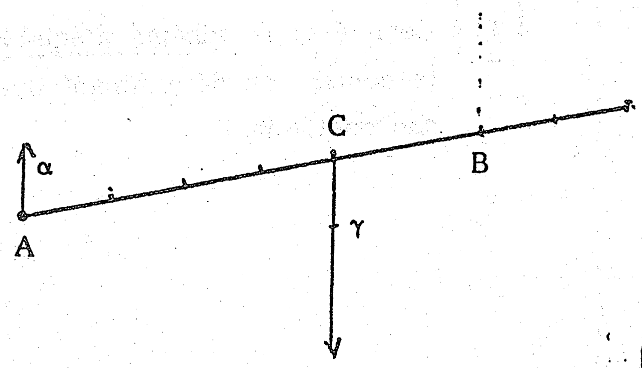
....

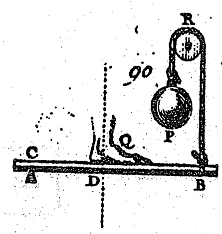
6 Placer le peson de la balance romaine :



....

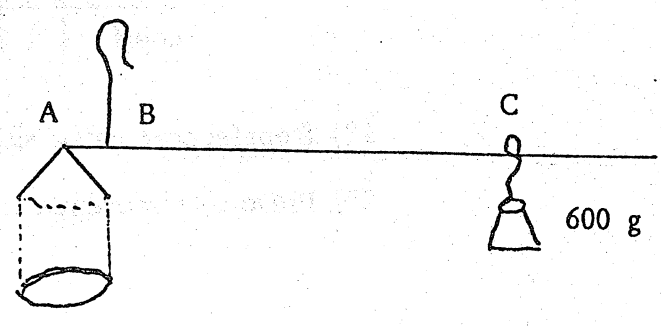
7 Vérifier et compléter le schéma d'équilibre en déterminant β



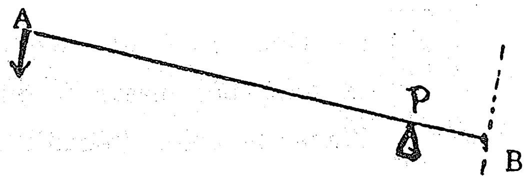


....

8 Quelle est (en kg) la masse dans le plateau de la balance romaine ?

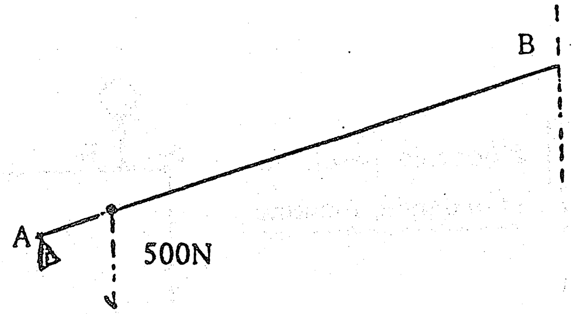


9 <u>Levier</u> : Avec un effort de 200N, quelle force peut-on équilibrer en B ?



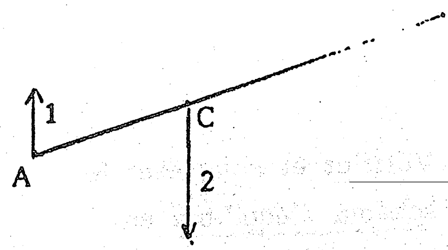
....

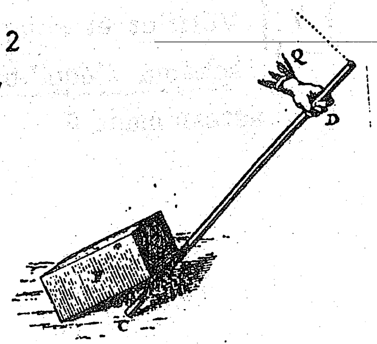
10 <u>Brouette</u> (ou levier). Quelle est la force à exercer en B ?



....

11 Compléter le <u>schéma d'équilibre</u> ci-contre, en déterminant B et son coefficient.





....

12 Les quatre notes sont affectées des coefficients indiqués

notes	7	9	10	11
coeff. :	1	3	7	5

1°) Représenter cette situation sur un schéma.

2°) Prévoir la moyenne sur le schéma puis la calculer.

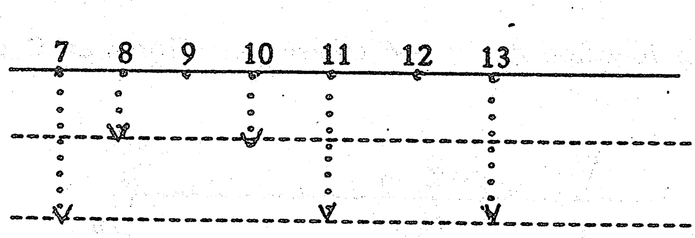
....

13 <u>La moyenne pondérée</u> des notes 10 et 16 est 11,5. De quels coefficients ont-elles été affectées ?

14 Un élève a 4 notes dans le trimestre. Quelle doit être la quatrième pour avoir juste 10 de moyenne ?

notes	7	8	11	?
Coeff.	1/3	1	1	1

15 Notes :



Montrer, <u>sans calculs</u>, <u>que la moyenne</u> est 10.

16 Représenter dans un repère du plan les points : A(12,6), B(6,12), C(9,12) et D(8,12).
Déterminer successivement : E point moyen de $\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 1 & 1 \end{array}$,
F point moyen de $\begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline 1 & 1 & 2 \end{array}$ et G point moyen de $\begin{array}{c|c|c|c} A & B & C & D \\ \hline 1 & 1 & 2 & 4 \end{array}$

17 Moyenne par classe. <u>Moyenne par élève.</u>
Trois classes ont pour effectifs 20, 20 et 40
Quel est le nombre moyen d'élèvesdans la classe d'un élève ?
(40 élèves sont dans une classe de 40)
Comparer avec la moyenne par classe.

....

18 Expliquer la facture EDF suivante :

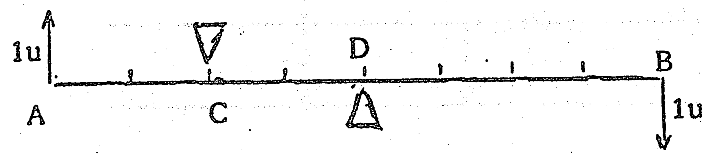
"Consommation du 16.04.88 au 16.08.88
105 jours à 0,4959 F. + 15 jours à 0,5112 F.
soit 120 jours à 0,4978 F."

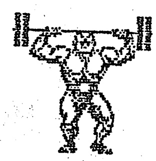
....

19 Calculer les proportions de vin à 7 F. le litre et à 12 F. le litre qui correspondrait à un vin à 10 F. le litre.

....

20 Déterminer en fonction de l'unité choisie les efforts en C et D.





....

21 <u>Unicités</u>

1°) On sait que G est barycentre de $\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline \alpha & \beta \end{array}$ et de $\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline \alpha & \beta' \end{array}$ $(\alpha \neq 0)$

Montrer que $\beta' = \beta$

2°) En déduire que si G est à la fois barycentre de $\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline \alpha & \beta \end{array}$ et de $\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline \alpha' & \beta' \end{array}$, les couples (α, β) et (α', β') sont proportionnels.

3°) En déduire que si on a les équilibres $\left\{\begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline \alpha & \beta & \gamma \end{array}\right\}$ et $\left\{\begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline \alpha' & \beta' & \gamma' \end{array}\right\}$

alors les suites (α, β, γ) et $(\alpha', \beta', \gamma')$ sont proportionnelles.

4°) Montrer que si l'on a les équilibres $\left\{\begin{array}{c|c|c} A & B & G \\ \hline \alpha & \beta & / \end{array}\right\}$ et $\left\{\begin{array}{c|c|c} A & C & G \\ \hline \alpha & \beta & / \end{array}\right\}$
pour quatre points A, B, C, G,
alors B = C .

....

22 Deux points A et B distincts étant donnés, placer, en utilisant l'abcisse de ce point dans le repère (A,B) (ou le repère B,A) le barycentre de A et B dans les cas suivants :

a) $\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 2 & 6 \end{array}$ b) $\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 2/3 & 1/3 \end{array}$ c) $\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 5 & -1 \end{array}$ d) $\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 1/2 & 1/3 \end{array}$

23 Même exercice que le précédent pour :

a) $\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 5 & -2 \end{array}$ b) $\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline \sqrt{2} & 1-\sqrt{2} \end{array}$ c) $\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline -3 & -2 \end{array}$ d) $\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline \frac{-2}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{array}$

24 Même exercice que les deux précédents avec :

a) $\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 1500 & 4500 \end{array}$ b) $\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 10^{-6} & -5.10^{-7} \end{array}$ c) $\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline \sqrt{3} & \sqrt{2} \end{array}$ d) $\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 1 & -10 \end{array}$

25 Etant donné deux points A et B,

1°) Déterminer le point C de telle sorte que B soit le barycentre

de $\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline 3 & 2 \end{array}$

2°) Déterminer D tel que A soit barycentre de $\begin{array}{c|c} B & D \\ \hline 5 & -2 \end{array}$

26 On sait que C est le barycentre de $\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 2 & -5 \end{array}$

Utiliser l'équilibre associé pour donner B puis A comme barycentre des deux autres points.

....

27 $\left\{\begin{array}{c|c|c} P & Q & R \\ \hline 1 & 2 & -3 \end{array}\right\}$ est un équilibre. Donner chaque point comme barycentre des deux autres.

....

28 On a : $7\,\overrightarrow{CA} - 5\,\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{0}$ pour trois points A,B,C donnés.
En introduisant un point M, écrire cette relation en utilisant $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$ et $\overrightarrow{MC}$.
En déduire chaque point comme barycentre des deux autres.

....

29 a) Montrer, sans calcul, que la relation $7\,\overrightarrow{KB} = 5\,\overrightarrow{KA} + 2\,\overrightarrow{KC}$ entraîne l'alignement de A, B, C.

b) Faire de même pour : $3\,\overrightarrow{KA} - 5\,\overrightarrow{KB} + 2\,\overrightarrow{KC} = \overrightarrow{0}$

....

30 Les points A, B et C sont alignés.
Montrer que l'on peut trouver des coefficients α, β et γ tel que pour tout point P on ait : $\gamma\,\overrightarrow{PC} = \alpha\,\overrightarrow{PA} + \beta\,\overrightarrow{PB}$

....

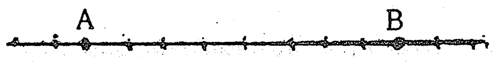
31 Déterminer dans le repère (A,B), l'abscisse du point G barycentre de $\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 3 & 7 \end{array}$.

....

32 Déterminer dans le repère (A,B) l'abscisse des barycentres de $\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 2 & -3 \end{array}$ et de $\begin{array}{c|c} B & A \\ \hline -3 & 7 \end{array}$.

....

33 Placer sur le schéma les barycentres de $\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 2 & 6 \end{array}$ et de $\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 1 & -9 \end{array}$.



....

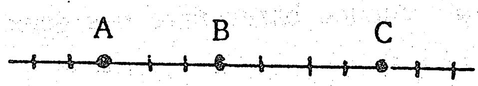
34 A partir des relations données, définir C comme barycentre de A et B.

a) $\overrightarrow{AC} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ b) $\overrightarrow{AC} = \frac{2}{7}\overrightarrow{AB}$ e) $\overrightarrow{AC} = \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\overrightarrow{AB}$

c) $\overrightarrow{AC} = -\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$ d) $\overrightarrow{AC} = 7\,\overrightarrow{AB}$ f) $\overrightarrow{AC} = -3\,\overrightarrow{AB}$

....

35



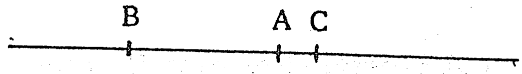
1°) Déterminer 3 coefficients pour l'équilibre associé.

2°) Déterminer ces trois coefficients α, β, γ en imposant :
$\alpha = 2$; $\beta = 1$; $\gamma = 10$; $\alpha + \gamma = 1$ (successivement)

....

°°°°°°°°

36 1°) Dans la figure ci-contre, A est le barycentre de $\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline \beta & \gamma \end{array}$



Expliquer pourquoi, sans mesurer, les nombres suivants ne conviennent pas :

$(2;1)$; $(-2;\ 1)$; $(3;\ -10)$; $(\sqrt{2};\ \sqrt{2})$

2°) Donner en mesurant une estimation des nombres β et γ.

°°°°°°°°

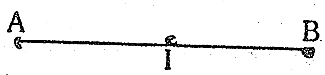
37 Etant donné trois points alignés A, B et C, montrer que :

1°) Si C est entre A et B alors C est barycentre de $\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline CB & CA \end{array}$ ou de $\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline \frac{1}{CA} & \frac{1}{CB} \end{array}$

2°) Si C est extérieur à [A,B], alors C est barycentre de $\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline CB & -CA \end{array}$ ou $\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline \frac{1}{CA} & -\frac{1}{CB} \end{array}$

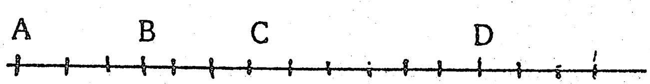
°°°°°°°°

38 Le point I étant le milieu de [A,B] définir, à partir de l'équilibre associé chacun des points comme barycentre des deux autres.



°°°°°°°°

39 Pour le schéma ci-contre : déterminer C comme barycentre de deux quelconques des autres points (3 cas)



°°°°°°°°

....

40 Transformer les relations vectorielles suivantes pour faire apparaître A comme barycentre de B et C.

a) $\overrightarrow{AB} - 4\,\overrightarrow{CA} = \vec{0}$ b) $\overrightarrow{BA} = 4\,\overrightarrow{AC}$

c) $3\,\overrightarrow{BC} + 2\,\overrightarrow{AC} = \vec{0}$ d) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} = 3\,\overrightarrow{BA}$

41 Représenter des situations correspondant aux équilibres suivants :

a) $\left\{\begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline 1 & 2 & -3 \end{array}\right\}$ b) $\left\{\begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline 2 & -5 & 3 \end{array}\right\}$

c) $\left\{\begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline 1 & -4 & 3 \end{array}\right\}$ d) $\left\{\begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline 0{,}2 & 1 & -1{,}2 \end{array}\right\}$

....

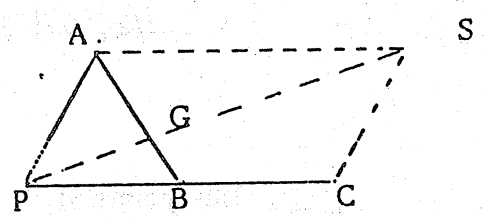
42 Construire en utilisant la méthode du parallélogramme

a) le barycentre de $\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 1{,}2 & 1{,}5 \end{array}$

b) le barycentre de $\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline \sqrt{2} & -1 \end{array}$

....

43 Montrer que la figure ci-contre correspond à la construction d'un barycentre par la méthode du parallélogramme.
En déduire que l'on peut ainsi partager [AB] en trois.



....

°°°°°°°°

44 1°) Traduire en termes d'équilibre :

a) B est barycentre de $\begin{array}{c|c} P & Q \\ \hline 2 & -3 \end{array}$

b) Pour tout M : $2\,\overrightarrow{MA} - 3\,\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{0}$

c) $3\,\overrightarrow{KB} - 5\,\overrightarrow{KC} + 2\,\overrightarrow{KD} = \overrightarrow{0}$

Donner dans chaque cas le schéma d'équilibre associé.

°°°°°°°°

45 Déterminer les coordonnées du barycentre dans le repère $(D, \vec{i}, \vec{j})$

a) pour $\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 1 & -6 \end{array}$ avec $A(1, -3)$ et $B(3, -4)$

b) pour $\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 1-\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{array}$ avec $A(1, 2)$ et $B(3, 7)$

°°°°°°°°

46 Construire, en précisant la façon de procéder, le barycentre de A, B, C.

a) $\begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline 1 & 2 & 1 \end{array}$ b) $\begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline -1 & -2 & -5 \end{array}$ c) $\begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline -1 & 3 & 2 \end{array}$

°°°°°°°°

47 Même exercice que ci-dessus pour :

a) $\begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline 1/2 & -2 & 3 \end{array}$ b) $\begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline 1/2 & 1/3 & 1/4 \end{array}$ c) $\begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline 1 & 2 & -2 \end{array}$

°°°°°°°°°°

48 Les points A, B et C étant donnés,
placer le point D tel que C soit barycentre de $\begin{array}{c|c|c} A & B & D \\ \hline -1 & 2 & 2 \end{array}$

°°°°°°°°

°°°°°°°°

$\boxed{49}$ On désigne par G le barycentre de $\begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline \alpha & -\alpha & \gamma \end{array}$

1°) Quelle est la notation de l'équilibre associé ?

2°) Donner une relation vectorielle associée et en déduire que l'on a (CG)//(AB).

3°) Construire G pour $\alpha = 1$ et $\gamma = 2$

°°°°°°°°

$\boxed{50}$ Etant donné un trapèze ABCD pour lequel $\overrightarrow{AB} = 3\,\overrightarrow{CD}$,

1°) Montrer que l'on peut écrire pour tout M : $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = 3\,\overrightarrow{MC} - 3\,\overrightarrow{MD}$

2°) Donner la notation de l'équilibre associé et en déduire D comme barycentre de $\begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline . & . & . \end{array}$

°°°°°°°°

$\boxed{51}$ 1°) Montrer que Si D est le barycentre de $\begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline \alpha & -\alpha & \gamma \end{array}$ alors (AB)//(CD)

2°) Construire D a) pour $\alpha = \gamma = 1$
b) pour $\alpha = 2$ et $\gamma = 1$

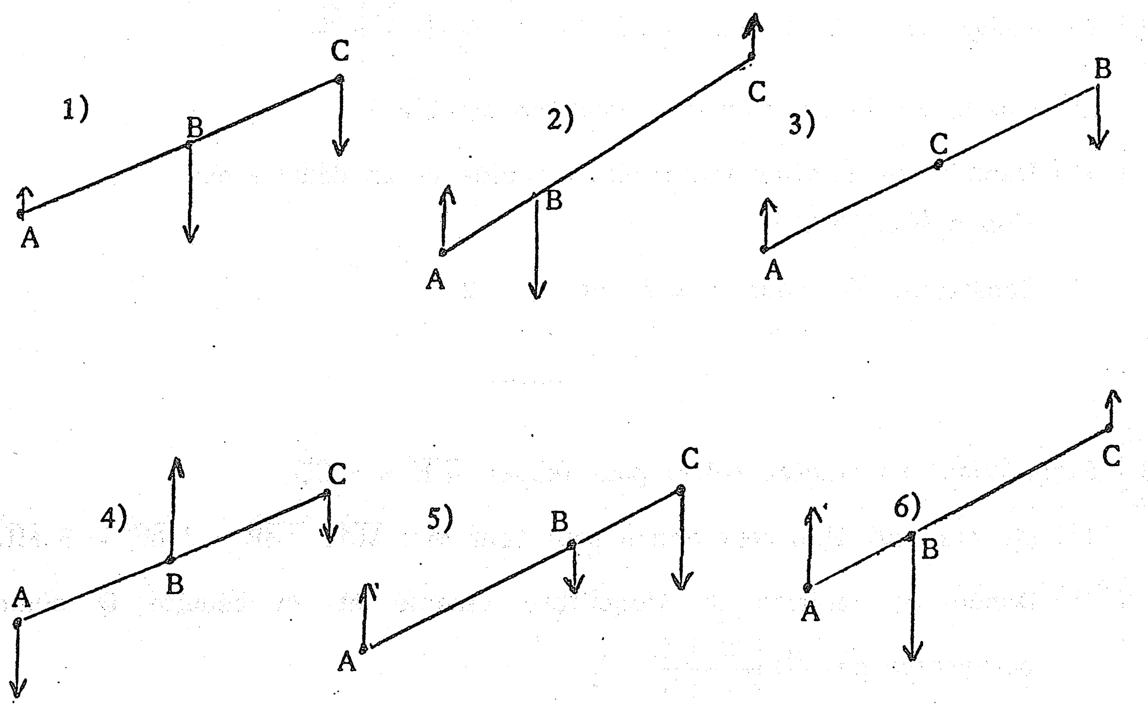
°°°°°°°°

$\boxed{52}$ Compléter l'équilibre et placer les trois points :

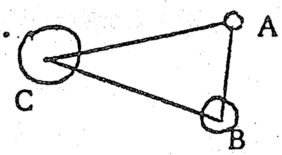
a) $\left\{\begin{array}{c|c|c} A & B & G \\ \hline 2 & -4 & . \end{array}\right\}$ b) $\left\{\begin{array}{c|c|c} A & B & G \\ \hline 2 & 4 & . \end{array}\right\}$ c) $\left\{\begin{array}{c|c|c} A & B & G \\ \hline 2 & -18 & \end{array}\right\}$

°°°°°°°°

53 Parmi les schémas suivants, lesquels ne sont pas des schémas d'équilibres ? :

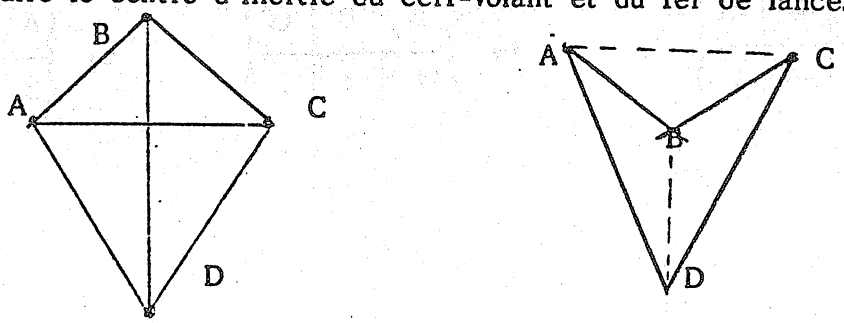


54 Un mobile est constitué de 3 sphères de rayon 1, 2 et 3.



Quel est le point du plan (A,B,C) correspondant au point d'équilibre ?

55 Construire le centre d'inertie du cerf-volant et du fer de lance.



56 On sait que C est barycentre de $\begin{array}{c|c|c} A & B & D \\ \hline -1 & 2 & 2 \end{array}$.

1°) Ecrire l'équilibre associé et définir D comme barycentre de A,B,C.

2°) Les points A,B et C étant donnés, construire D de façon que C soit barycentre de $\begin{array}{c|c|c} A & B & D \\ \hline -1 & 2 & 2 \end{array}$

57 On donne l'équilibre $\left\{ \begin{array}{c|c|c|c} A & B & C & D \\ \hline 1 & 2 & -4 & 1 \end{array} \right\}$

En déduire chaque point comme barycentre de trois autres et représenter la situation correspondante.

58 Représenter l'équilibre $\left\{ \begin{array}{c|c|c|c} A & B & C & D \\ \hline 2 & -4 & 1 & 1 \end{array} \right\}$.

59 Quelle est la figure associée à l'équilibre $\left\{ \begin{array}{c|c|c|c} A & B & C & D \\ \hline 1 & 3 & -3 & -1 \end{array} \right\}$?

60 Représenter le schéma d'équilibre associé à

$$\left\{ \begin{array}{c|c|c|c} A & B & C & D \\ \hline 1 & 1 & 2 & -4 \end{array} \right\}.$$

....

61 Déterminer les coordonnées du barycentre dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

a) Pour le barycentre G de $\begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline 1 & 8 & -2 \end{array}$ avec A(2,7), B(-1,7), C(3,4).

b) Pour le barycentre K de $\begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline -5 & 1 & 7 \end{array}$ avec A(-1,9), B(-3,7), C(-2,15)

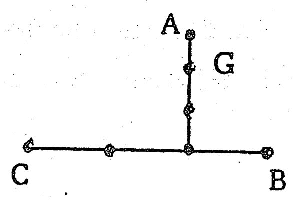
c) Pour l'isobarycentre de A, B, C avec A(-1,9), B(-3,7), C(-2,15)

....

62 A quelle figure correspond l'équilibre $\left\{\begin{array}{c|c|c|c} A & B & C & D \\ \hline 1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right\}$?

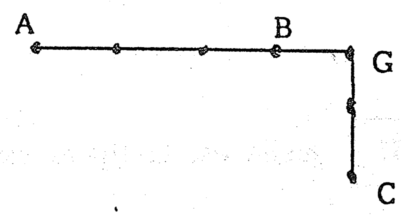
....

63 Préciser G comme barycentre de A, B, C :



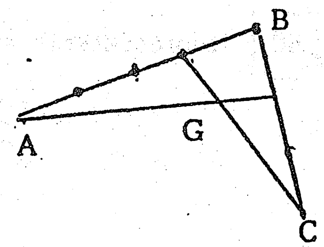
....

64 Préciser G comme barycentre de A, B, C :



....

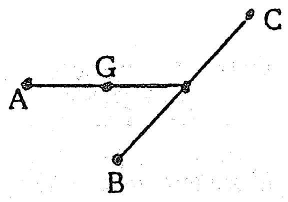
65 Trouver une suite α, β, γ convenable pour définir G comme barycentre de $\begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline \alpha & \beta & \gamma \end{array}$



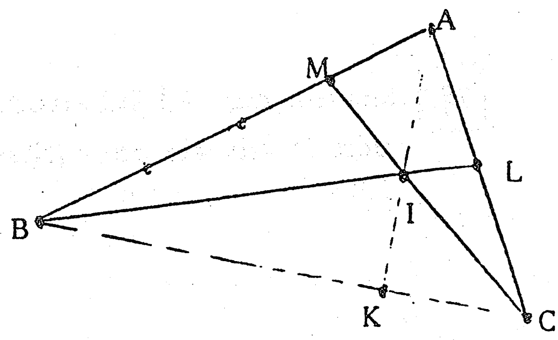
....

....

66 Montrer que G est barycentre de $\begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline 2 & 1 & 1 \end{array}$



....



67 1°) Définir I comme barycentre de A,B,C.

2°) Préciser K comme barycentre de B et C.

....

68 Le point P a pour coordonnées 3 et 4 dans le repère (A,B,C)
En utilisant la relation $\overrightarrow{AP} = 3\ \overrightarrow{AB} + 4\ \overrightarrow{AC}$ trouver l'équilibre associé et définir P comme barycentre de (A,B,C).

....

69 Quelle relation vectorielle est associée à l'équilibre :

$$\left\{ \begin{array}{c|c|c|c} A & B & C & D \\ \hline 1 & 2 & 2 & -5 \end{array} \right\} ?$$

....

70 Deux triangles ABC et A'B'C' ont pour isobarycentres G et G'.
Montrer que G = G' équivaut à $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$

....

$\circ\circ\circ\circ\circ\circ\circ\circ$

71 A partir du triangle ABC on construit le triangle A'B'C' en posant :
$\overrightarrow{AB'} = 3\ \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC'} = 3\ \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA'} = 3\ \overrightarrow{CA}$

1°) Montrer que ABC et A'B'C' ont le même isobarycentre.

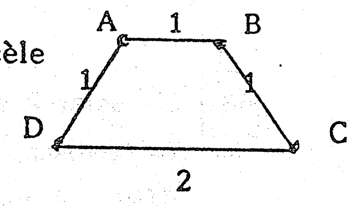
2°) Peut-on généraliser en remplaçant 3 par k ?

$\circ\circ\circ\circ\circ\circ\circ\circ$

72 Montrer que si l'isobarycentre d'un triangle est centre du cercle circonscrit alors le triangle est équilatéral .

$\circ\circ\circ\circ\circ\circ\circ\circ$

73 1°) Construire l'isobarycentre des 4 sommets du trapèze isocèle



2°) Construire le centre d'inertie de ABCDE supposé en fil homogène.

3°) Construire le centre d'inertie de la plaque ABCD supposée homogène.

$\circ\circ\circ\circ\circ\circ\circ\circ$

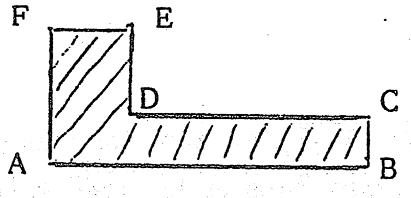
74 1°) Construire par des découpages en triangles le centre d'inertie d'une plaque en forme de quadrilatère.

2°) Faire de même pour une plaque pentagonale.

$\circ\circ\circ\circ\circ\circ\circ\circ$

°°°°°°°°

75 Construire à la règle seule le centre d'inertie de la plaque hachurée :
avec (ED)//(AF)//(CB)
et (FE)//(DC)//(AB)

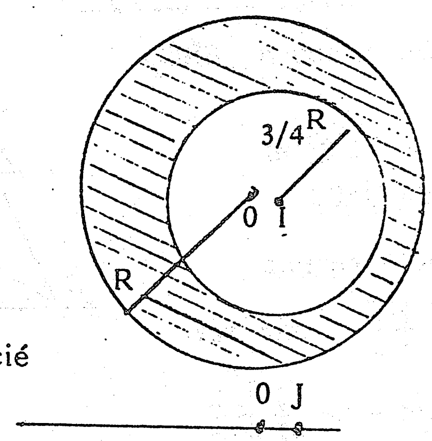


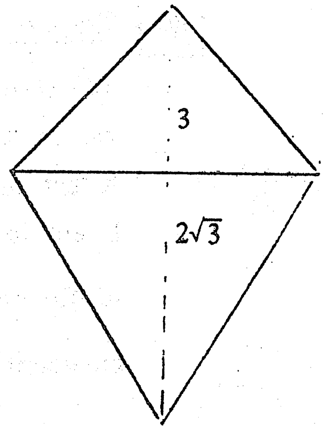
°°°°°°°°

76 Placer le centre d'inertie de la plaque,

après avoir réalisé le schéma d'équilibre associé

(Eventuellement agrandi)





°°°°°°°°

77 Montrer que si quatre points A, B, C, D situés sur un cercle $\mathcal{C}$ de centre 0 ont pour isobarycentre le point 0 alors ABCD est un rectangle.

°°°°°°°°

78 Comment doit-on répartir cinq points sur un cercle de façon que le centre soit leur isobarycentre ?

°°°°°°°°

79 Etant donné un triangle ABC, on désigne par

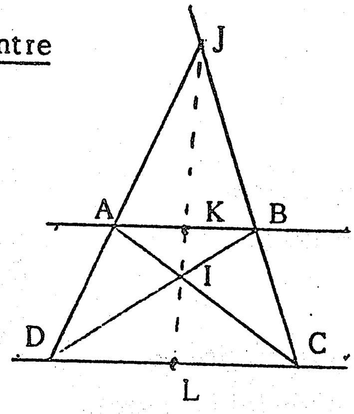
G_1 le barycentre de $\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 2 & -3 \end{array}$, G_2 celui de $\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline -3 & 1 \end{array}$, G_3 celui de $\begin{array}{c|c} C & A \\ \hline 1 & 2 \end{array}$

1°) Faire la figure.

2°) Montrer que $(C\,G_1) // (B\,G_3) // (A\,G_2)$

(On pourra exprimer $\overrightarrow{CG_1}$, $\overrightarrow{BG_3}$ et $\overrightarrow{AG_2}$ en fonction des mêmes vecteurs, ou utiliser des différences d'équilibres et la caractérisation du trapèze).

80 Trapèze complet (1) Usage du barycentre



1°) Dans la figure ci-contre, ABCD est un trapèze

K est le milieu de [A,B] et

L est le milieu de [C,D].

a) En considérant A comme barycentre de $\begin{array}{c|c} J & D \\ \hline 1 & a \end{array}$, montrer

que B est barycentre de $\begin{array}{c|c} J & C \\ \hline 1 & a \end{array}$

puis, que I est celui de $\begin{array}{c|c|c} J & C & D \\ \hline 1 & a & a \end{array}$

b) En déduire que I, J, L sont alignés, puis que I, J, K sont alignés.

2°) Réciproque :

On suppose I, J et L sont alignés. Il s'agit de montrer que ABCD est un trapèze.

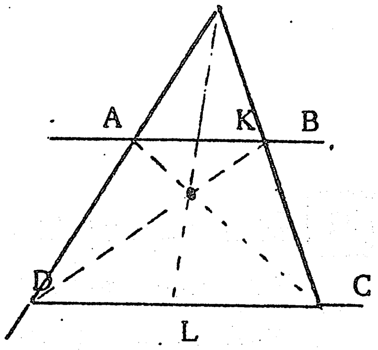
a) En considérant I comme barycentre de $\begin{array}{c|c} J & L \\ \hline 1 & \ell \end{array}$

Montrer que I est le barycentre de $\begin{array}{c|c|c} J & D & C \\ \hline 1 & \ell/2 & \ell/2 \end{array}$

b) En déduire que A est barycentre de $\begin{array}{c|c} J & D \\ \hline 1 & \ell/2 \end{array}$

que B est barycentre de $\begin{array}{c|c} J & C \\ \hline 1 & \ell/2 \end{array}$ et conclure.

81 Trapèze complet (2) Usage d'équilibres



Dans la figure ci-contre K et L sont les milieux des côtés [A,B] et [C,D], ((AB)//(CD)), dans le trapèze ABCD.

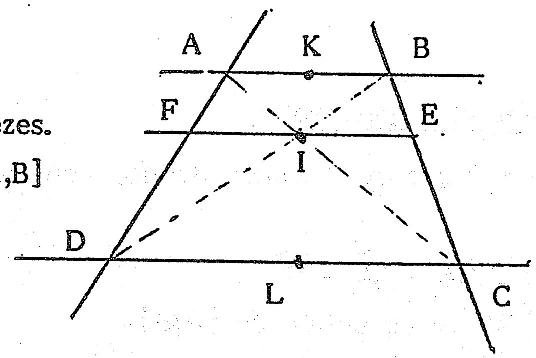
1°) En considérant l'équilibre $\left\{\begin{array}{c|c|c} A & I & C \\ \hline \alpha & i & \gamma \end{array}\right\}$

montrer que $\left\{\begin{array}{c|c|c} B & I & D \\ \hline \alpha & i & \gamma \end{array}\right\}$ est un équilibre

puis que l'équilibre (1) $\left\{\begin{array}{c|c|c|c} A & B & C & D \\ \hline \alpha & -\alpha & \gamma & -\gamma \end{array}\right\}$ s'en déduit .

2°) En déduire, en caractérisant K et L dans deux équilibres, et en combinant avec (1) que l'on a $\left\{\begin{array}{c|c|c} K & I & L \\ \hline \alpha & i & \gamma \end{array}\right\}$ puis l'alignement de I, K, L et de même l'alignement de J, K, L.

82 Trapèze complet (3)



Dans la figure ci-contre ABCD et FECD sont des trapèzes. K et L sont les milieux de [A,B] et de [C,D].

1°) Montrer qu'il existe α et γ tels que (e) $\left\{\begin{array}{c|c|c|c} A & B & C & D \\ \hline \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{array}\right\}$ soit un équilibre.

2°) Caractériser K et L par des équilibres.

En déduire, à l'aide de (e) que l'on a l'équilibre $\left\{\begin{array}{c|c|c} K & I & L \\ \hline \alpha & i & \gamma \end{array}\right\}$ et l'alignement de I, K, L.

3°) Caractériser F et E par des équilibres.

En déduire à l'aide de (e) un équilibre du type $\left\{\begin{array}{c|c|c} E & I & F \\ \hline k & -2k & k \end{array}\right\}$ et préciser la position de I sur [E,F].

°°°°°°°°

83 Le triangle-barre

Une tige métallique homogène et de section régulière, a été pliée selon PQR (masse spécifique linéaire μ).
Les milieux de [Q,R], [R,P], [P,Q] sont A, B, C.
On désigne par G_1 le centre d'inertie de la tige PQRP.

1°) Faire une figure en choisissant $PQ = r = 5$, $QR = p = 3$ et $PR = q = 6$.
Conserver p, q, r dans les calculs.
Indiquer les centres d'inerties et les masses des côtés de P, Q, R.

2°) Montrer que G_1 est barycentre de $\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline p & q \end{array}$

Montrer que G_1 est situé sur la bissectrice intérieure de l'angle en C de ABC.
Sur quelles autres droites se trouve le point G_1 ?
Construire ce point sur la figure.

°°°°°°°°

84 Equilibres et alignement :

1°) Le triangle ABC étant donné, construire les points L, M et N définis par :

(1) $3\,\vec{LA} + \vec{LC} = \vec{0}$

(2) M est le milieu de [A;B]

(3) N est le barycentre de $\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline 3 & -1 \end{array}$

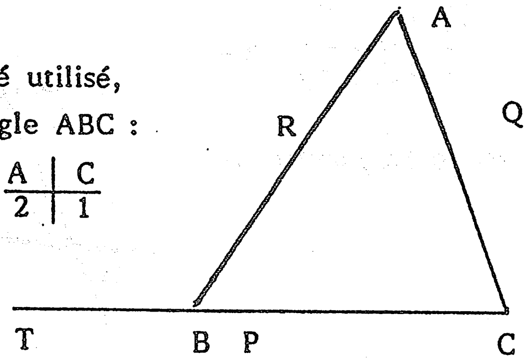
2°) Traduire (1), (2) et (3) en termes d'équilibres.

3°) Trouver en combinant ces trois équilibres, un équilibre correspondant aux points L, M et N.

4°) En déduire leur alignement et préciser chacun d'eux comme barycentre des deux autres.

°°°°°°°°

85 Barycentre et alignement



I. 1°) En indiquant le procédé utilisé, placer, sur les côtés du triangle ABC :

- Le point Q barycentre de $\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline 2 & 1 \end{array}$

- le point R barycentre de $\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 1 & 2 \end{array}$

2°) Utiliser Q et R pour construire le barycentre de $\begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline 2 & 4 & 1 \end{array}$: G

3°) Préciser G comme barycentre de B et Q,
puis comme barycentre de C et R.
Montrer que (AG) coupe (BC) en un point P que l'on précisera comme barycentre de B et C.

II. 1°) Utiliser un schéma d'équilibre ou un calcul pour préciser B comme barycentre de A et R, puis C comme barycentre de A et Q.

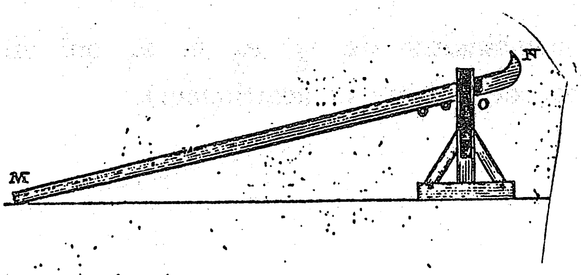
2°) On désigne par T le barycentre de $\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline 4 & -1 \end{array}$ Placer ce point.

3°) Montrer que l'on peut considérer T comme le barycentre de $\begin{array}{c|c|c|c} A & R & A & Q \\ \hline -2 & 6 & 2 & -3 \end{array}$

4°) En déduire que T est le barycentre de $\begin{array}{c|c} R & Q \\ \hline 2 & -1 \end{array}$ Donner le schéma d'équilibre correspondant et la position relative de T, R, Q.

III. 1°) Vérifier que T et P sont barycentres de B et C avec des coefficients de la forme (β, γ) et $(\beta, -\gamma)$. (Division harmonique).

2°) En utilisant les deux équilibres associés que l'on combinera, montrer que B et C sont également des barycentres de T et P avec des coefficients de la forme (u, v) et (u, -v).



BARYCENTRES ET EQUILIBRES

◊ Le triangle ABC est donné.

◊ Le point M est défini par l'équilibre $\left\{\begin{array}{c|c|c} A & M & B \\ \hline 1 & -4 & 3 \end{array}\right\} = e_1.$

◊ le point K est le barycentre de $\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline 2 & 1 \end{array}$

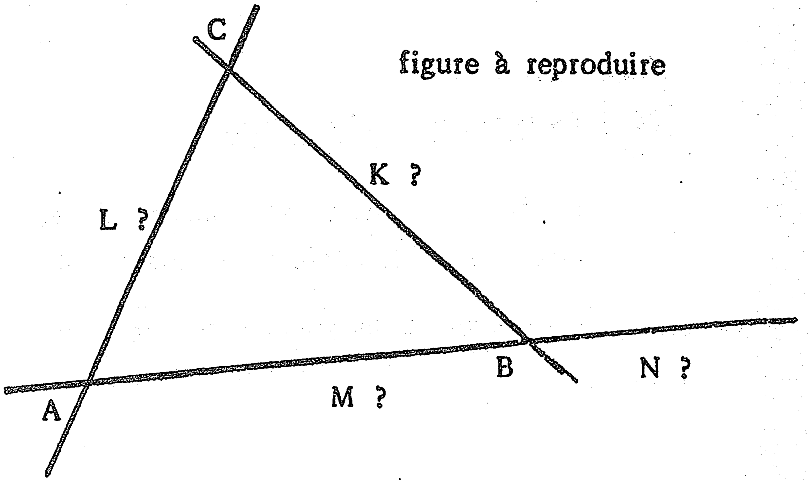


figure à reproduire

I. CONSTRUCTIONS

1°) Placer M, puis K. (Indiquer l'abscisse de K dans le repère (B, C)).

2°) Construire, à part, un schéma de l'équilibre $\left\{\begin{array}{c|c|c} A & C & L \\ \hline 2 & 3 & -5 \end{array}\right\} = e_2.$

Placer L sur la figure.

3°) N désigne le barycentre de $\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 1 & -3 \end{array}$.

Ecrire l'équilibre associé et placer N.

II. On veut montrer que (AK), (CM) et (BL) sont concourantes.

1°) Montrer que l'on peut utiliser M et K pour construire le barycentre G de $\begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline 2 & 6 & 3 \end{array}$.

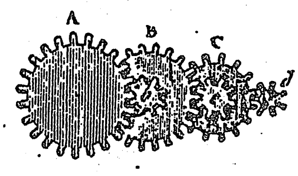
2°) Ecrire un équilibre associé à A, B, C, G : e_4 et utiliser e_2 pour obtenir un équilibre e_5 prouvant que G est un point de (BL).

III. On veut démontrer l'alignement de K, L, N.

1°) Ecrire un équilibre associé à B, K et C : e_6

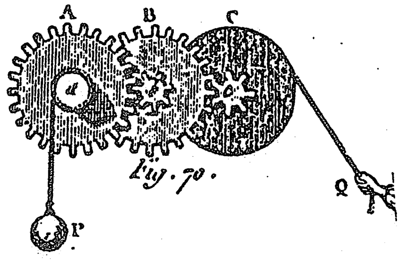
2°) Trouver une combinaison de e_6, e_2 et e_3 qui élimine A, B et C. (On pourra aussi modifier les coefficients et additionner).

III - DEROULEMENT



EQUILIBRES ET BARYCENTRES

DEROULEMENT ET MISE EN OEUVRE



Le document [Classe de Seconde, Mise à l'essai, Barycentres et Equilibres] a été distribué à tous les élèves de $2T_1$ et $2T_2$ (et au professeur de $2T_4$).

Le principe de la mise à l'essai, a été de réaliser l'assimilation des informations contenues dans le fascicule par leur mise en oeuvre immédiate et systématique dans les exercices de fonctionnement inclus dans le cours.

Ces exercices e_1 à e_{32} ont été traités en classe, certains ayant été préparés à la maison.

L'introduction (I), ayant paru fondamentale, a nécessité plusieurs séquences.

Le II (Barycentre de deux points, équilibres à 3 points) a été suivi du test 1.

Le III (Barycentre de plusieurs points...) a été suivi du test 2.

Un devoir à la maison (exercice $\boxed{80}$) a été demandé.

La fin du chapitre a été suivie du contrôle (exercice $\boxed{85}$ dont la page avait été retirée du document-élève).

Environ la moitié des exercices ($\boxed{1}$ à $\boxed{85}$) a été traitée, le plus souvent après préparation à la maison.

En moyenne dans les trois classes, l'expérience a duré 2 semaines et demie à 3 semaines, ce qui semble normal pour un concept nouveau.

***
*

IV - TESTS

TEST N° 1

25 à 30 min - Réponses - sur - la feuille.

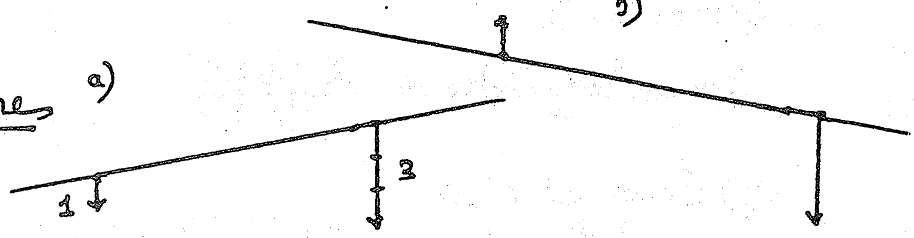
EQUILIBRES et BARYCENTRE

(1) Quels sont les coefficients à affecter aux notes 6 et 12 pour que la moyenne soit 10,5 ? (On peut s'aider d'un schéma)
La Réponse est-elle unique ?

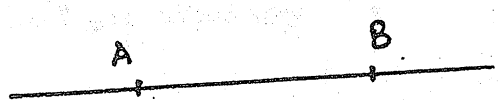
(2) Compléter les 2 schémas d'équilibre ci-contre :

a)

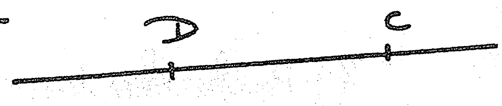
b)



(3) a) Placer le barycentre de $\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline -2 & -3 \end{array}$



b) Placer le barycentre de $\begin{array}{c|c} C & D \\ \hline -1 & 4 \end{array}$

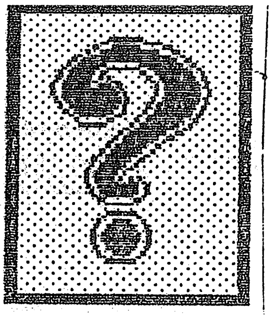


Justifier l'un des deux cas :

(4) 1°) Représenter le schéma d'équilibre associé à :
P est le barycentre de $\begin{array}{c|c} Q & R \\ \hline 1 & -4 \end{array}$

2°) Écrire l'équilibre associé →
et exprimer Q, puis R comme barycentres des deux autres points ?
→

NOM :



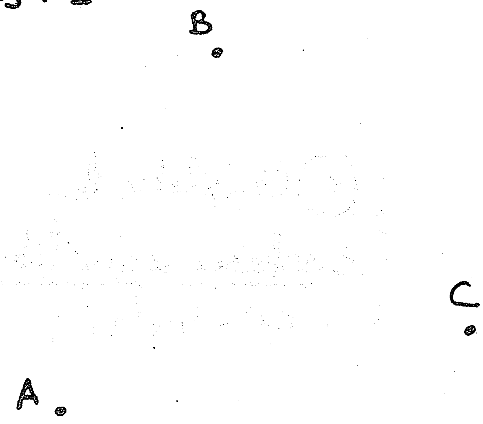
EQUILIBRES — BARYCENTRE

TEST N° 2

30 min ~
Réponses sur la fiche

Le triangle ABC est donné et le point C est le barycentre de

A	D	B
2	-5	1



1) Ecrire l'équilibre associé.

2) Préciser D comme barycentre de

A	B	C
.	.	.

3) Construire D en utilisant deux barycentres partiels que l'on précisera.

4) Rechercher les coordonnées de D dans (A, B, C). (justifier)

5) Soit I le projeté de A et D sur (B C), (selon (AD)).
Soit J " " " C et D sur (A B), (selon (CD)).

a) Préciser les équilibres

$$\left\{\begin{array}{c|c|c} B & I & C \\ \hline . & . & . \end{array}\right\} \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{c|c|c} B & J & A \\ \hline . & . & . \end{array}\right\}$$

Comment sont-ils obtenus ?

b) Quelle propriété permet alors de démontrer que l'on a :
(I J) // (A C)

NOM :

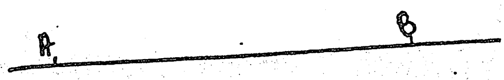
2°T4 BARYCENTRE Test 1 (sur 16) NOM

(Réponses sur la feuille)

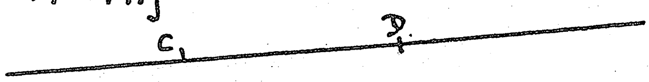
points

① Quels sont les coefficients à affecter aux notes 6 et 12 pour que la moyenne soit 10,5 ? La réponse est-elle unique ?

② a) Placez le barycentre de $\{(A,-2),(B,-3)\}$



b) Placez le barycentre de $\{(C,-1),(D,4)\}$



c) Justifiez l'un des deux cas.

③ P est le barycentre de $\{(Q,1),(R,-4)\}$

a) Représentez la situation.

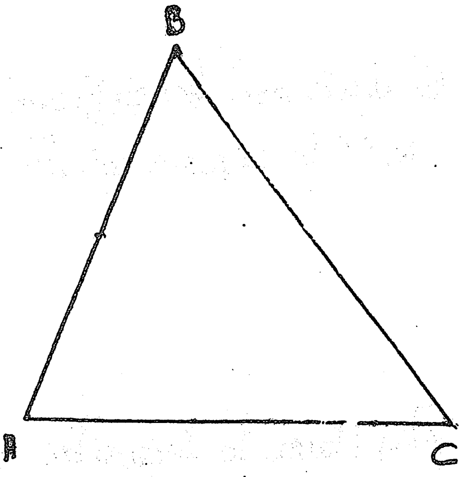
b) Utilisez un calcul vectoriel pour exprimer Q, puis R comme barycentre des deux autres points

(20 minutes)

Total :

3° T_4 (30 mn) **Barycentre : Test n° 2** NOM:

Le triangle ABC est donné et le point D est le barycentre de $\{(A,2),(B,1),(D,-5)\}$



1) Ecrire une relation vectorielle caractérisant cette situation.

2) Préciser D comme barycentre de

A	B	C

3) Construire D en utilisant deux barycentres partiels que l'on précisera.

4) Déterminer les coordonnées de D dans le repère (A, B, C).

5) Soit I le projeté de A et D sur (BC), selon (AD).
Soit J le projeté de C et D sur (AB), selon (CD).

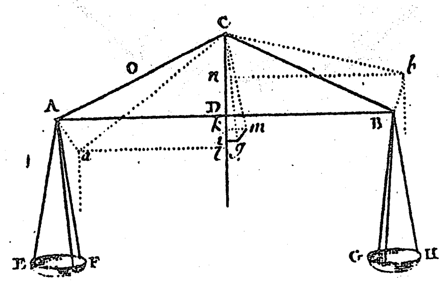
puis a) Préciser I comme barycentre de B et C [chercher les coefficients]
J comme barycentre de A et B.

6) Quelle propriété permet alors de démontrer que l'on a (I J)//(A C) ? (Justifier votre réponse)

V - TAUX DE REUSSITE

BARYCENTRE DE 2 POINTS

N°		QUESTIONS	Taux de Réussite en % — CLASSES 2° T1	2° T2	2° T4
1		"Moyenne"	91	53	9
2	a)	Schéma a) (1;3)	100	82	
	b)	Schéma b) (1;-3)	71	53	
3	a)	Placer le barycentre de $\frac{A \mid B}{-2 \mid -3}$	88	94	85
	b)	Placer le barycentre de $\frac{C \mid D}{-1 \mid 4}$	50	53	59
	c)	Justifier	82	62	80
4	1°	Schéma d'équilibre P bary. $\frac{Q \mid R}{.. \mid ..}$	68	79	
	2°	Notation d'équilibre	100	76	
		Exprimer Q comme bary. de $\frac{P \mid R}{.. \mid ..}$	100	85	9
		Exprimer R comme bary. de $\frac{Q \mid P}{.. \mid ..}$	91	76	9



BARYCENTRE DE 3 POINTS

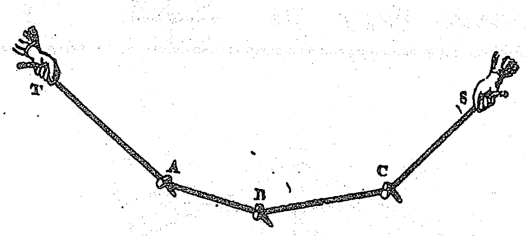
N°		QUESTIONS	Taux de Réussite en % — CLASSES 2° T_1	2° T_2	2° T_4
1		Equilibre associé	100	100	
2		D barycentre de ...	100	100	40
3		Construire D (2 barycentres partiels)	57	97	50
4		Coordonnées dans le repère (A,B,C)	66	38	22
5	a1	En projetant sur (BC)	94	91	16
	a2	En projetant sur (AB)	20	12	16
	b	Barycentre en projection	46	3	6

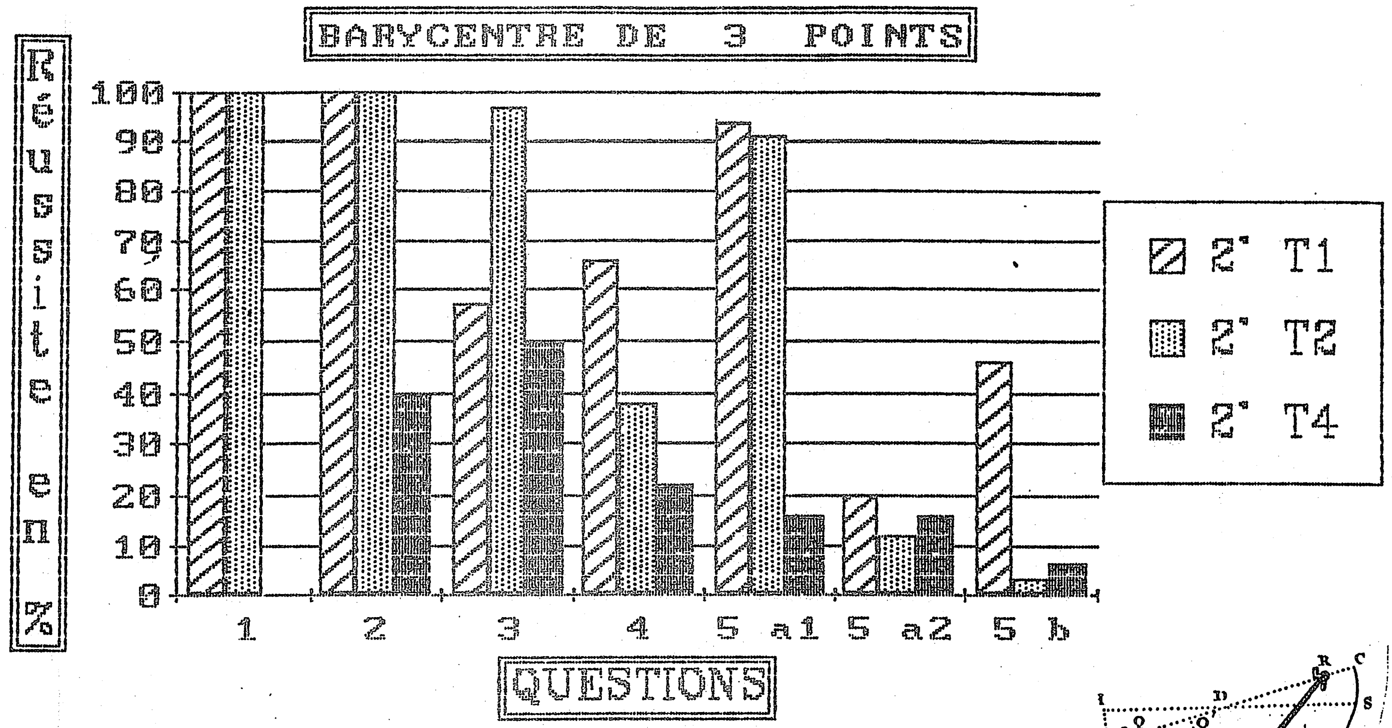
La classe 2° T_1 est de très bon niveau.

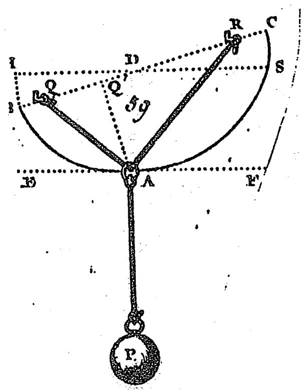
Les classes de 2° T_2 et 2° T_4 sont plus faibles.

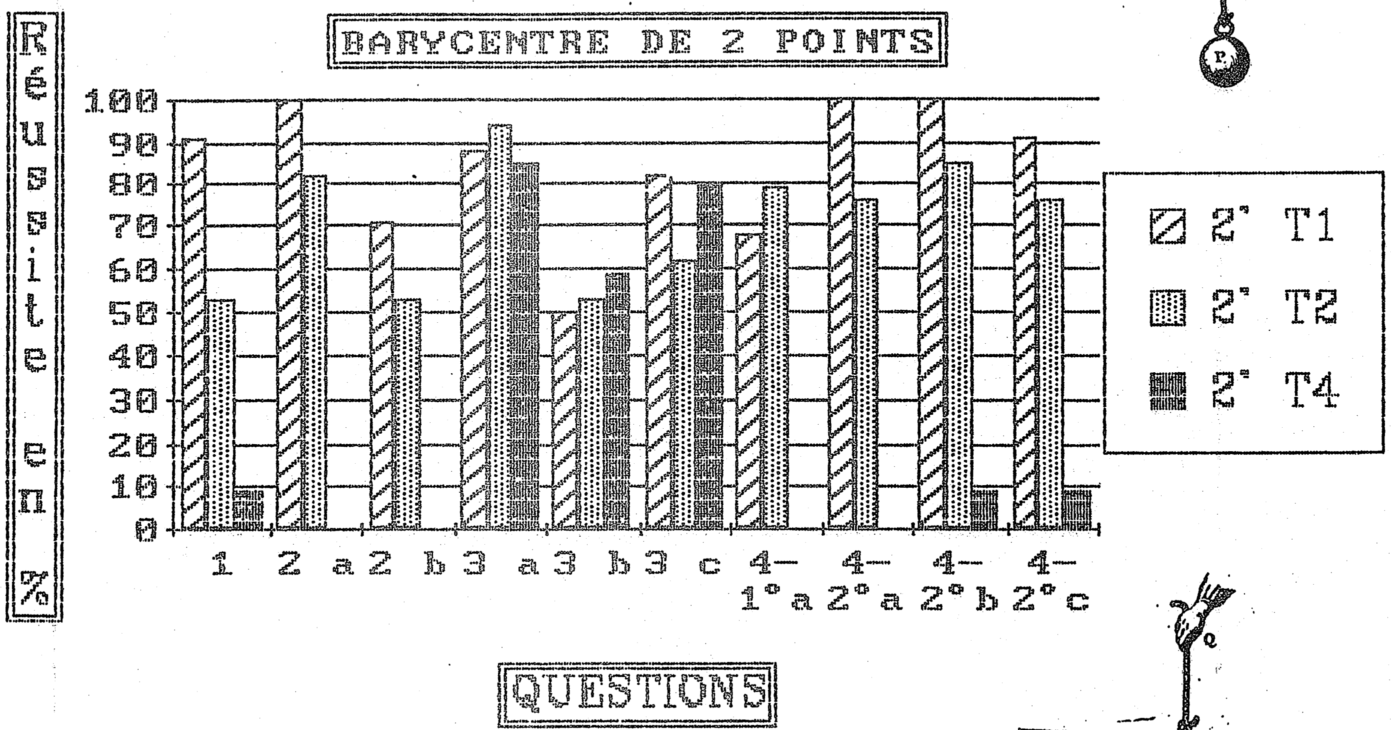
Ceci est connu grâce aux devoirs communs qui ont lieu tout au long l'année.

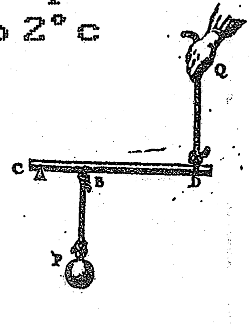
La classe de 2° T_4 est la classe témoin.




BARYCENTRE DE 3 POINTS
Réussite en %
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
1
2
3
4
5 a1
5 a2
5 b
QUESTIONS
2° T1
2° T2
2° T4




BARYCENTRE DE 2 POINTS
Réussite en %
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
1
2 a
2 b
3 a
3 b
3 c
4— 1° a
4— 2° a
4— 2° b
4— 2° c
QUESTIONS
2° T1
2° T2
2° T4



VI - CONCLUSIONS

BARYCENTRE ET EQUILIBRES : CONCLUSIONS DE LA MISE A L'ESSAI

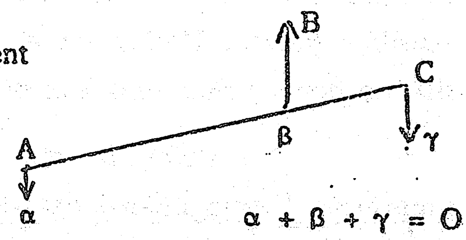
A) L'étude comparée des tests et contrôles réalisés, l'avis des collègues concernés et des élèves redoublants permettent de dire dans quelle mesure les objectifs ont été atteints.

1. La notation : "C est barycentre de $\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline \alpha & \beta \end{array}$" se révèle très adaptée à la traduction de l'homogénéité des coefficients. Cette notation proposée en second aux élèves de la classe témoin a été adoptée très rapidement.

2. Dans la classe témoin, beaucoup d'élèves sont rebutés par la manipulation de la relation de Chasles lorsque le nombre de termes est trop important. Même la caractérisation vectorielle symétrique du barycentre, en T1 et T2, est ressentie comme trop lourde et disparaît au profit de la notation de l'équilibre associé :

$$\left\{ \begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline \alpha & \beta & \gamma \end{array} \right\}$$

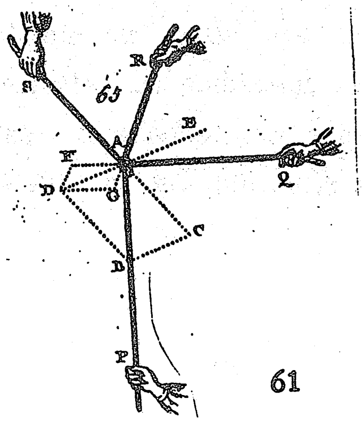
3) Le schéma d'équilibre est très facilement lu des trois façons souhaitées mais la notation d'équilibre lui est préférée.



$\alpha + \beta + \gamma = O$

La tendance à la formalisation est très nette : il y aura donc lieu d'insister davantage sur le schéma d'équilibre associé à un équilibre donné et sur le point de vue physique correspondant de façon à ne pas se couper du sens que l'on doit lui attribuer.

Le schéma permet un contrôle sur les coefficients (ou la position) lorsqu'il permet de concevoir un équilibre physique associé (image mentale).



C) Place du barycentre (et des équilibres) dans un apprentissage.

1. La notion de barycentre est liée à celle de moyenne pondérée et intervient donc fréquemment en statistique. Elle est plus sensible en physique dans ce qui touche à la distribution de masse dans un système : centre d'inertie, point d'équilibre.

2. En mathématique, le concept est présent dans tout ce qui a trait aux moyennes, aux transformations affines, à la convexité...

Il permet des transferts entre différentes branches de la discipline.

3. Le schéma d'équilibre permet le passage de l'aspect physique à l'aspect mathématique et fait de la notion barycentre-équilibre un modèle accessible pour diverses situations physique.
Inversement, le point de vue de l'équilibre physique associé apporte au barycentre une concrétisation qui le rend perceptible et lui donne du sens. L'image mentale élaborée à partir du point de vue physique permet de revenir à l'aspect pratique et d'éviter la tentation du formalisme provoquée par la facilité d'emploi des notations. La signification de la notion peut être préservée tout au lon de son emploi, ce qui crée une situation favorable à sa compréhension, à son enseignement, et à sa mise en oeuvre. C'est une notion qui, de par sa proximité avec le monde sensible, permet l'aller-retour entre écriture et situation, assurant ainsi la possibilité de donner duu sens aux définitions, aux calculs et aux résultats.

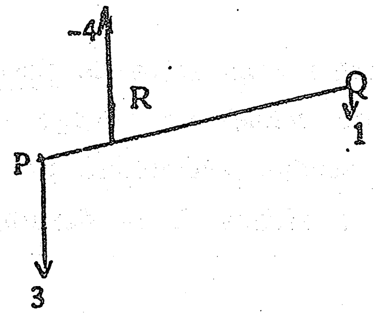
Le point de vue physique associé permet de rendre sensibles des propriétés (homogénéïté des coefficients, barycentres partiels,...) et permet aussi de contrôler l'adéquation du modèle. Les calculs sur les équilibres correspondent à autant de réalisations physiques.

4. En dehors de l'élaboration du concept général de barycentre, on doit y voir aussi l'élaboration simultanée d'un outil spécifique particulièrement adapté à la résolution de problèmes de concours d'lignement et de parallélisme.

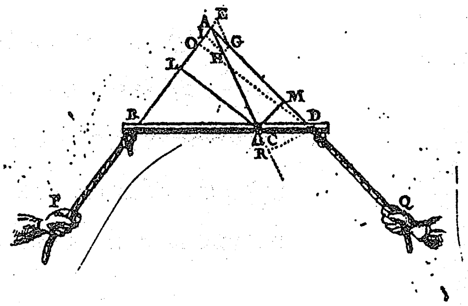
Le barycentre ne doit pas rester un simple prétexte à la mise en oeuvre de la relation de Chasles et appendice du calcul vectoriel. La notion d'équilibre et sa notation sollicite moins les techniques calculatoires et permet des raisonnements plus proches de la situation, ne se réduisant pas à des procédures répétitives.

.../...

B) <u>Rôle du schéma d'équilibre et de la notation de l'équilibre.</u>



$$\left\{\begin{array}{c|c|c} P & Q & R \\ \hline 3 & 1 & -4 \end{array}\right\}$$



1) Tous ceux qui, au test (1), réalisent le schéma d'équilibre réussissent à placer correctement le barycentre de $\begin{array}{c|c} Q & R \\ \hline 1 & -4 \end{array}$

Ce schéma est bien restitué s'il est demandé malgré une confusion (de langage) avec la notation.

2) Quant à l'écriture $\left\{\begin{array}{c|c|c} P & Q & R \\ \hline 3 & 1 & -4 \end{array}\right\}$, tous ceux qui l'utilisent savent exprimer Q, puis R, comme barycentres des autres points.

Il y a échec presque total dans la classe témoin (9 %) sur l'exercice parallèle nécessitant l'utilisation de la relation de chasles.

3) L'avantage du point de vue est proposé est donc très significatif.

* Techniquement, il se révèle d'une grande facilité.

* Pédagogiquement, il permet de travailler au niveau du sens.

* Du point de vue de la méthode, il est spécifique et se substitue à un apprentissage de procédures calculatoires utilisant la relation de Chasles.

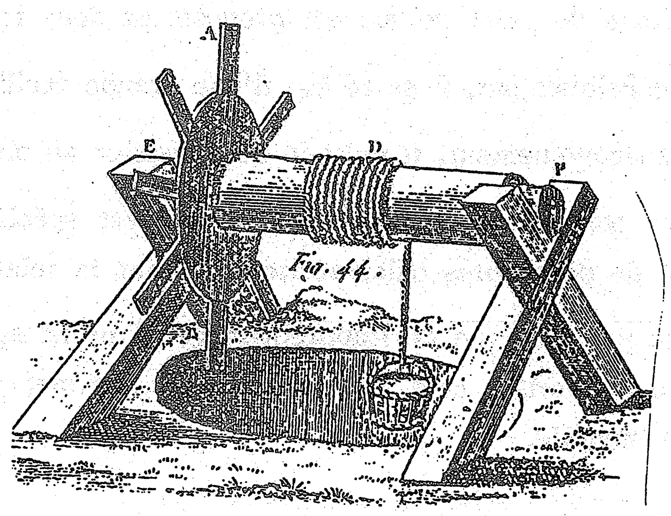
* Du point de vue de l'apprentissage, il prend appui sur aspect physique, sensible, facile à mémoriser et à visualiser, ce qui permet de dégager immédiatement une image mentale.

4) La modélisation proposée est à la portée d'un élève de <u>Seconde.</u> Dans cette classe, un premier objectif peut être de donner une image mentale du barycentre en associant à chaque situation un schéma d'équilibre et la notation correspondante. la barycentre partiel peut être réservé à la détermination du barycentre de plus de deux points.

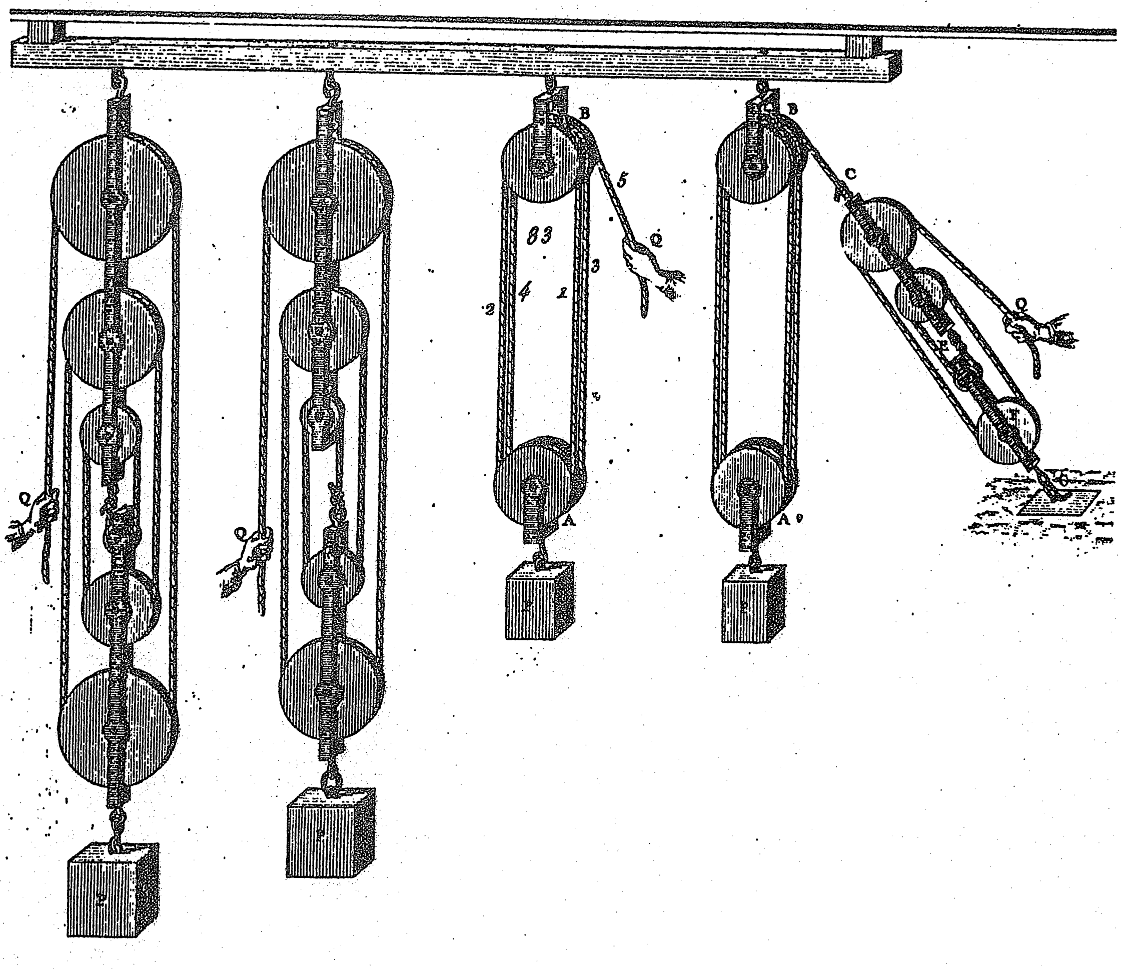
A partir de la classe de 1ère, la notion d'équilibre doit devenir un des outils de résolution de problèmes.

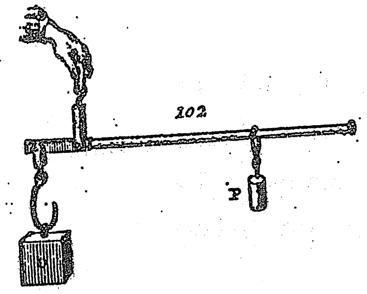
Il faut s'attacher à faire en sorte que l'image mentale reste disponible : chaque manipulation d'écritures correspond à une réalisation physique. Ceci doit éviter d'être conduit à un excès de formalisme dû à la commodité des notations.

> Intégré dans la notion d'Equilibre, le Barycentre est un outil spécifique, ayant un caractère sensible et facile à manipuler.



Partie C



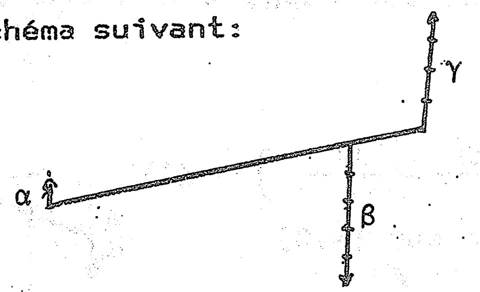


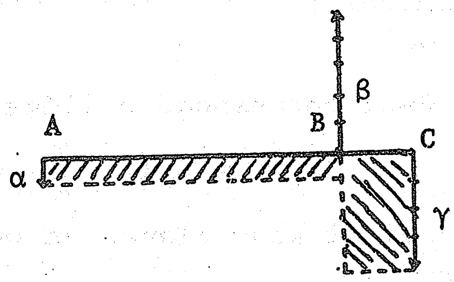
Annexe 1

E Q U I L I B R E S et B A R Y C E N T R E
Présentation indépendante du calcul vectoriel

I- INTRODUCTION

Diverses situations de statique (équilibres) se traduisent par le schéma suivant:





Les flèches représentent des forces parallèles appliquées en A, B, et C. Chacune de ces forces est définie par un point et un nombre. Constant, localement, le champ de la pesanteur donne un ensemble de forces parallèles.
Nous nous placerons le plus souvent dans ce cas, et pour des masses ponctuelles.

II- QUELQUES SITUATIONS PHYSIQUES D'EQUILIBRE

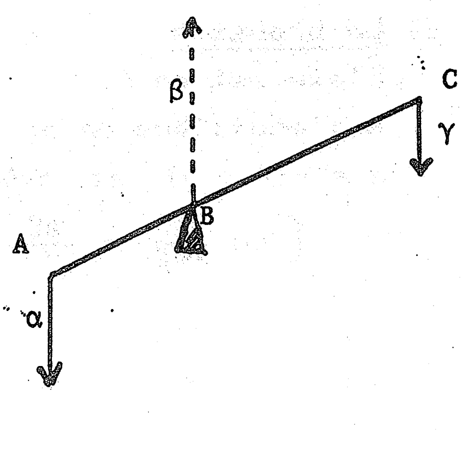
Nous considérons un solide en équilibre sous l'action de forces parallèles.

1°) Equilibres à trois points alignés

Le système sera souvent formé de deux masses ponctuelles placées en A et B.

a) La balançoire

Les points A, B, C sont alignés dans cet ordre. La tige AC est sans masse et peut tourner autour d'un axe passant par B.
Les forces et le mouvement sont dans le plan de la figure.



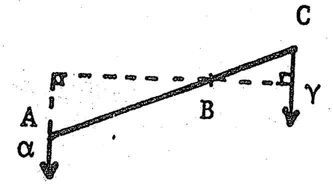
A l'état d'équilibre, les forces appliquées en A et C, et la réaction du support en B sont parallèles.
La situation physique est dans l'espace, mais la représentation plane schématise une projection sur un plan orthogonal à l'axe passant par B.
La présence de flèches n'est pas indispensable: on peut représenter les forces mises en jeu par des bâtons, des gros points, des plateaux de balance...

L'équilibre est réalisé lorsque:

- d'une part, $\beta = -(\alpha + \gamma)$,
- d'autre part, le moment résultant par rapport à l'axe (ou à B) est nul.

Ceci correspond à l'égalité:

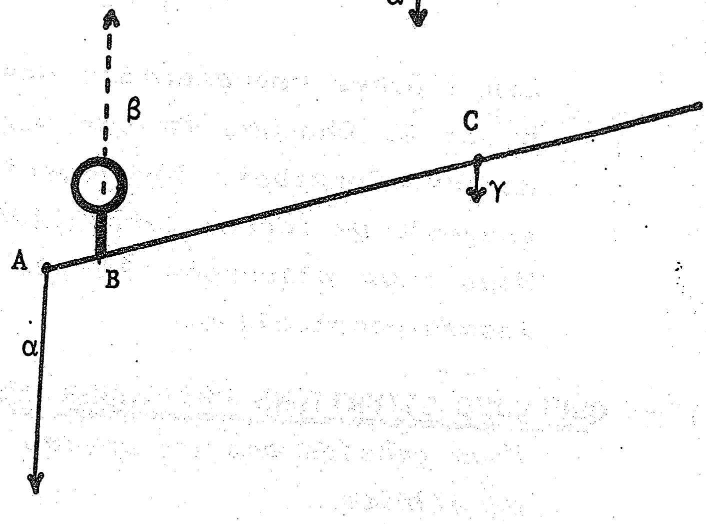
$$\alpha \times AB = \gamma \times BC \quad \left(\text{ou} \quad \frac{AB}{\gamma} = \frac{BC}{\alpha} \right) \qquad (1)$$



Ceci suffit pour placer le point B sur [A,C].

b) La balance romaine

Le principe est le même mais c'est la position du point C qui est recherchée. La masse correspondant à α est lue en regard de C.
On équilibre en C avec une force d'intensité γ, la force appliquée en A et la réaction appliquée en B.



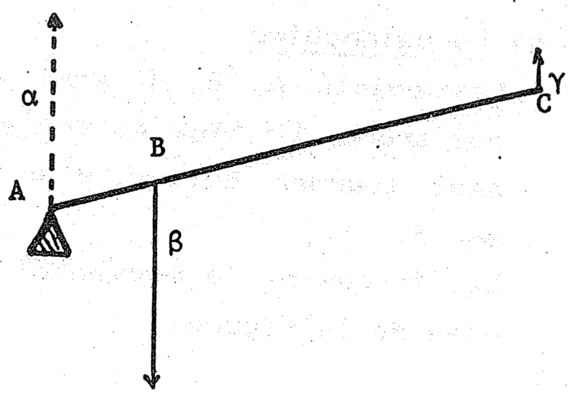
A l'équilibre la situation est la même qu'en a)
On doit avoir: $\alpha \times CA = (\alpha + \gamma) \times CB$ et $\gamma = -(\alpha + \beta)$

on a : $\dfrac{CB}{\alpha} = \dfrac{CA}{-\beta}$ (2)

c) La brouette

L'axe est en A.
A l'équilibre on a:
$\alpha = -(\beta + \gamma)$ et $\gamma \times AC = -\beta \times AB$

$$\left(\text{ou} \quad \frac{AC}{-\beta} = \frac{AB}{\gamma} \right) \qquad (3)$$



A_1

d) <u>Les trois exemples a) b) et c) sont trois exemples de leviers.</u>

Ils se traduisent par le même schéma d'équilibre.

A, B, C sont alignés dans cet ordre

avec $\alpha + \beta + \gamma = 0$ et $\frac{AB}{\gamma} = \frac{BC}{\alpha} = \frac{AC}{-\beta}$ (4)

(On doit écrire $-\beta$ car α et γ sont de même signe et β est de signe contraire)

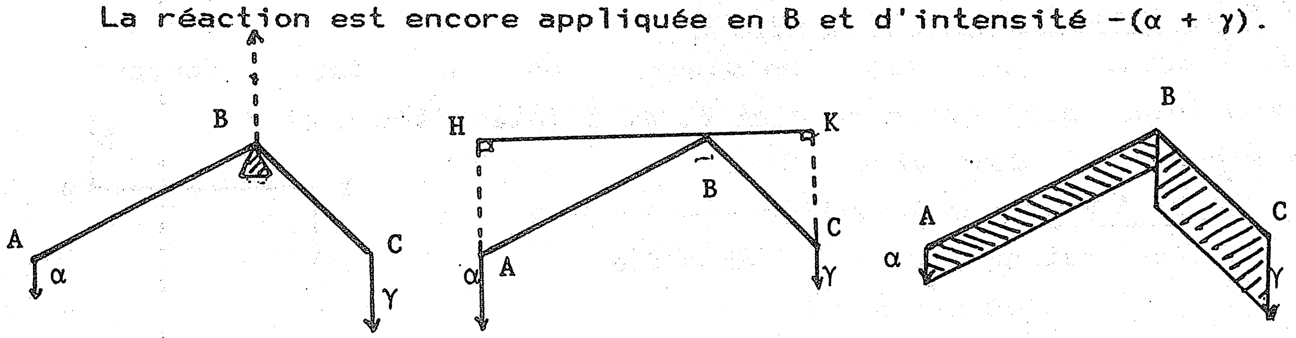
On peut montrer que (4) équivaut à l'une quelconque des égalités (1), (2) ou (3).

Chacun des points A, B ou C est le point d'équilibre pour les forces correspondantes appliquées aux deux autres.

2°) <u>Autres équilibres à trois points</u>

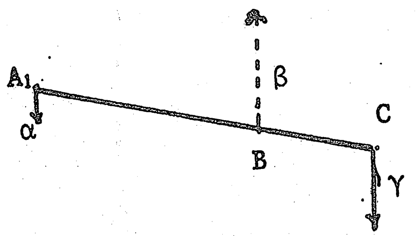
Il s'agit de réaliser un équilibre autour d'un axe passant par B pour un solide constitué de deux masses de valeurs α et γ placées en A et C.

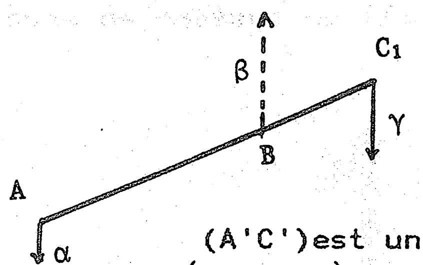
La réaction est encore appliquée en B et d'intensité $-(\alpha + \gamma)$.

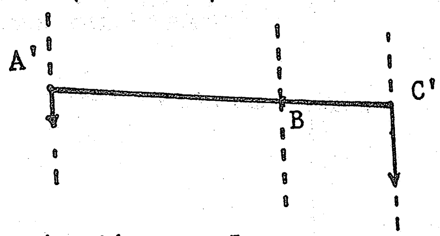


On doit avoir: $\alpha + \beta + \gamma = 0$ mais aussi $\alpha \times HB = \gamma \times KB$ ce qui équivaut à l'aire des deux parallélogrammes hachurés est la même.

On peut alors remplacer le schéma par l'un quelconque des schémas suivants:



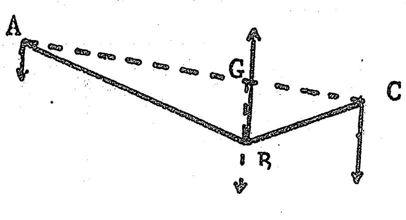


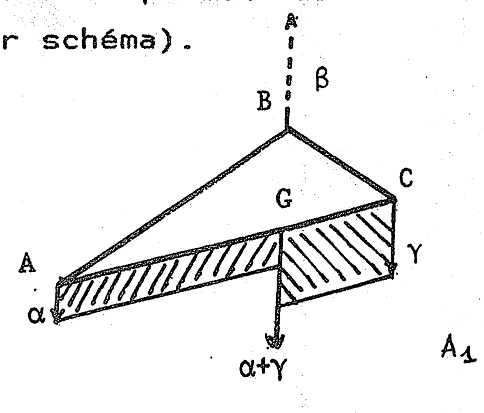


(A'C')est une droite quelconque (presque), passant par B.

On se ramène ainsi au schéma du 1°)d). On peut aussi dire que l'on a obtenu l'équilibre lorsque le point G permet de réaliser l'équilibre de A, B, G alignés (voir schéma).

On peut aussi avoir un équilibre instable.

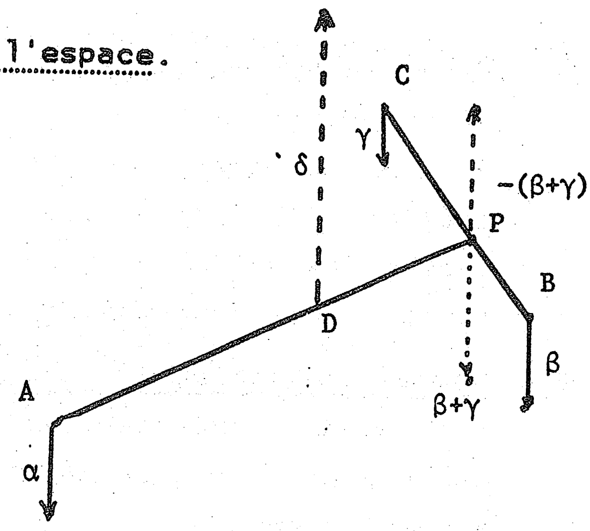




3°) Equilibres à n points

Ces équilibres correspondent à des superpositions d'équilibres à trois points (équilibres partiels) auxquels on peut se ramener de proche en proche.

Exemple : Equilibre d'un mobile dans l'espace.



On équilibre en P, puis en D.

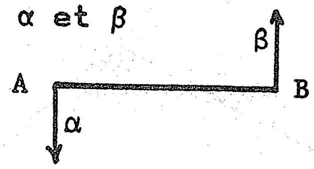
P est point d'équilibre pour les forces appliquées en B et C.
D est point d'équilibre pour la force appliquée en A et la résultante des forces appliquées en B et C.

On a $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0$.

4°) Equilibres à moins de 3 points

Du point de vue physique, on a deux forces parallèles, appliquées en A et B, et d'intensités α et β
La somme $\alpha + \beta$ doit être nulle.

a) Si $A \neq B$ on a le schéma ⟶

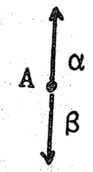


Si l'axe est en A on a $\beta\, AB = 0\, \alpha$

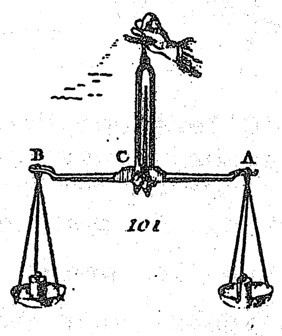
d'où $\beta = \alpha = 0$

et l'équilibre avec α et β nuls.

b) Si $A = B$ on a le schéma ⟶



c) On peut aussi considérer que si A est affecté de 0: il constitue (seul) un système en équilibre.



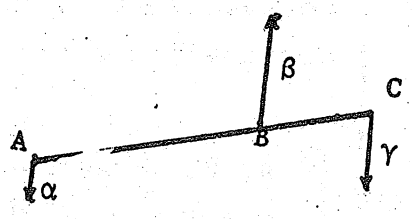
A_1

III- EQUILIBRES A TROIS POINTS

(Définition sans vecteurs) (Plan ou Espace)

1°) Le schéma d'équilibre

Les situations physiques du II ont conduit au schéma simplifié formé de trois points A, B, C alignés, affectés de nombres α, β, γ représentés par des flèches de longueurs proportionnelles à ces nombres, et dont le sens est lié à leurs signes.



Le choix de l'orientation positive est libre.

L'orientation : $\downarrow +$ est suggérée par le champ de la pesanteur.

Du point de vue physique, en chaque point, on équilibre l'effet des deux autres forces.

En particulier, les réels α, β, γ vérifient $\alpha + \beta + \gamma = 0$

Deux de ces nombres sont de même signe, et l'autre est de signe contraire: celui-ci est affecté au point situé entre les deux autres. On le notera β (affecté à B) pour les démonstrations. On pourrait même supposer α et γ positifs et β négatif.

Une autre condition d'équilibre est $\alpha \times AB = \gamma \times BC$.

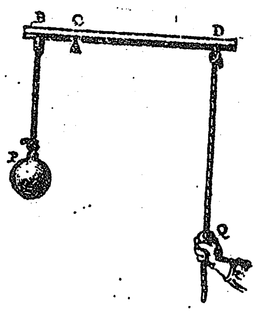
ou $\dfrac{AB}{\gamma} = \dfrac{BC}{\alpha}$ qui entraîne $\dfrac{AB}{\gamma} = \dfrac{BC}{\alpha} = \dfrac{AB + BC}{\alpha + \gamma} = \dfrac{AC}{-\beta}$

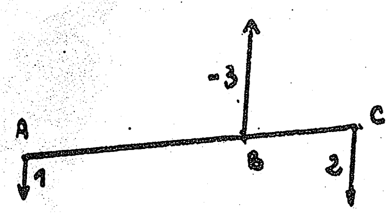
: $B = C \Leftrightarrow \alpha = 0 \Leftrightarrow \gamma = -\beta$

Si l'on pose $AB = c$, $BC = a$ et $CA = b$,les diverses conditions vues lors des exemples de physique se ramènent aussi à:

α, $-\beta$, γ sont proportionnels à a, b, c.

Exemple: $\dfrac{AB}{2} = \dfrac{BC}{1} = \dfrac{AC}{3}$





2°) <u>Point de vue mathématique</u>: Définition d'un èquilibre.

Pour modéliser les divers équilibres physiques correspondants (sans préciser l'axe), il suffit de formaliser le schéma d'équilibre associé.

a)

> Le système de 3 points A, B, C, affectés (respectivement) des coefficients α, β, γ est un équilibre
>
> <u>si et seulement si</u>
>
> A, B, C sont alignés
>
> $\alpha + \beta + \gamma = 0$
>
> Les points affectés de coefficients de même signe encadrent le troisième
>
> AB, BC, CA sont proportionnels aux valeurs absolues de γ, α, β

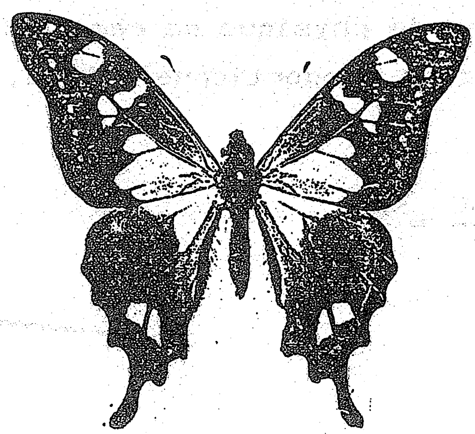
b) <u>Notation</u>: $\left\{ \begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline \alpha & \beta & \gamma \end{array} \right\}$

<u>Remarque</u>: il est clair, d'après la définition, que l'ordre des couples $\begin{array}{|c|} A \\ \hline \alpha \end{array}$, $\begin{array}{|c|} B \\ \hline \beta \end{array}$, $\begin{array}{|c|} C \\ \hline \gamma \end{array}$ n'intervient pas.

c) <u>Exemples</u> $\left\{ \begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline 1 & -3 & 2 \end{array} \right\}$, $\left\{ \begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline -5 & 4 & 1 \end{array} \right\}$

d) <u>Le schéma</u> : A$\updownarrow$ correspond à $\left\{ \begin{array}{c|c} A & A \\ \hline \alpha & -\alpha \end{array} \right\}$ ou à $\left\{ \begin{array}{c} A \\ \hline 0 \end{array} \right\}$

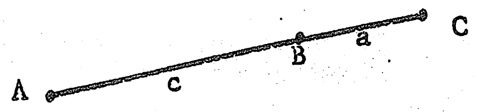
Si β=0, on a l'équilibre $\left\{ \begin{array}{c|c} A & C \\ \hline \alpha & -\alpha \end{array} \right\}$ qui entraîne A = C ou α = 0.



A_1

3°) Equilibre associé à trois points alignés

Soient A, B, C, alignés dans cet ordre:



a) On a $AB \times a = BC \times c$ et $\frac{a}{BC} = \frac{c}{AB} = \frac{a+c}{AB+BC} = \frac{a+c}{AC}$

Il suffit de choisir $\alpha = BC$, $\gamma = AB$ et $-\beta = AC$.

On aura bien: $\alpha + \beta + \gamma = 0$ et toutes les conditions de la définition sont vérifiées.

On a l'équilibre $\left\{\begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline BC & -AC & AB \end{array}\right\}$

b) Si $\left\{\begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline \alpha & \beta & \gamma \end{array}\right\}$ et $\left\{\begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline \alpha' & \beta' & \gamma' \end{array}\right\}$ sont deux équilibres associés à A, B et C, il résulte de la définition que

α, β, γ et α', β', γ', sont deux suites proportionnelles.

La notation adoptée permet de traduire facilement cette propriété: $\left\{\begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline 1 & 4 & -5 \\ \hline 0{,}2 & 0{,}8 & -1 \end{array}\right\}$

4°) Détermination du 3ème point d'un équilibre

Supposons $\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline \alpha & \beta \end{array}$ donnés. Montrons que C est unique si $\alpha + \beta \neq 0$

On détermine γ par: $\gamma = -\alpha - \beta$

* $\gamma = 0 \Leftrightarrow AB = 0 \Leftrightarrow A = B$ ce qui correspond à l'équilibre $\left\{\begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline \alpha & -\alpha & 0 \end{array}\right\}$ (quel que soit le point C)

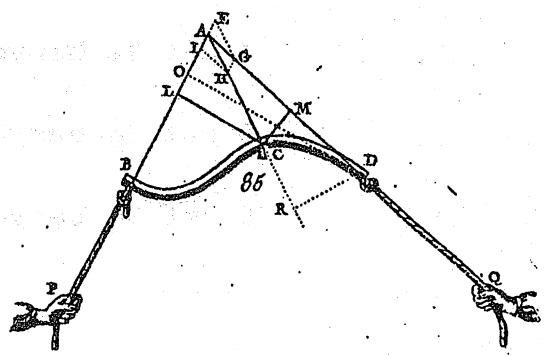
* $\gamma \neq 0 \Leftrightarrow A \neq B$

AB, BC, CA sont proportionnels aux valeurs absolues de γ, α, β.

Si α et β sont de même signe, C est entre A et B et $\frac{BC}{\alpha} = \frac{CA}{\beta}$, ce qui détermine un point C unique.

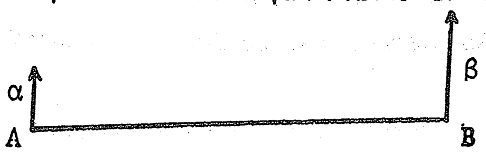
Il en est de même si α et γ, ou β et γ, sont de même signe.

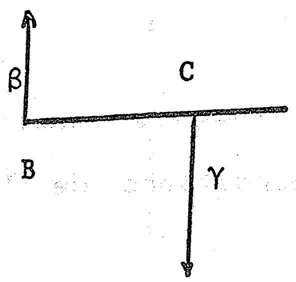
Pour placer le troisième point on peut s'aider du schéma d'équilibre.



A_1

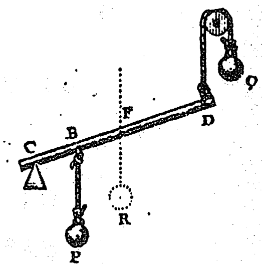
On peut aussi complèter un équilibre en se référant à un équilibre physique.





C sera entre A et B et tel que: $\frac{CA}{\beta} = \frac{CB}{\alpha}$

α $(=-\gamma-\beta)$ sera du signe de β.
C sera entre B et A (A à droite)
il faudra aussi $\frac{AB}{\gamma} = \frac{AC}{\beta}$.



IV- BARYCENTRE DE DEUX POINTS AFFECTES DE COEFFICIENTS REELS

1°) Point d'équilibre

Les situations physiques d'équilibre à trois points alignés du II indiquent que chaque point est point d'équilibre des deux autres affectés des coefficients corespondants.

2°) Définition

a) Etant donné un équilibre $\left\{\begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline \alpha & \beta & \gamma \end{array}\right\}$

Si $\beta \neq 0$ on dira que B est barycentre de $\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline \alpha & \gamma \end{array}$

$(\beta \neq 0 \ ) \Leftrightarrow \alpha + \gamma \neq 0 \ )$

Si $\beta = 0$ l'équilibre s'écrit : $\left\{\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline \alpha & -\alpha \end{array}\right\}$ et on a: $\left[\begin{array}{l} \text{soit } \alpha = 0 (\text{et } \gamma=0) \\ \text{soit } A = C. \end{array}\right.$

b)

$$\boxed{B \text{ est barycentre de } \begin{array}{c|c} A & C \\ \hline \alpha & \gamma \end{array} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline \alpha & -\alpha-\gamma & \gamma \end{array}\right\} \text{ est un équilibre}}$$

3°) Propriété fondamentale

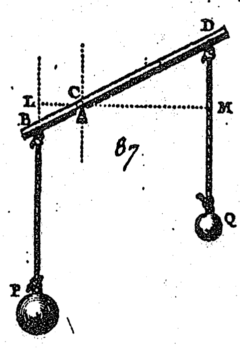
Si α, β, γ sont non nuls, chaque point est point d'équilibre des deux autres affectés des coefficients de l'équilibre.

$\left\{\begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline \alpha & \beta & \gamma \end{array}\right\}$ est un équilibre est alors équivalent à l'une quelconque des propriétés suivantes:

A est le barycentre de $\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline \beta & \gamma \end{array}$

B est le barycentre de $\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline \alpha & \gamma \end{array}$

C est le barycentre de $\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline \alpha & \beta \end{array}$



4°) <u>Les propriétés du barycentre découlent de celles des équilibres:</u>

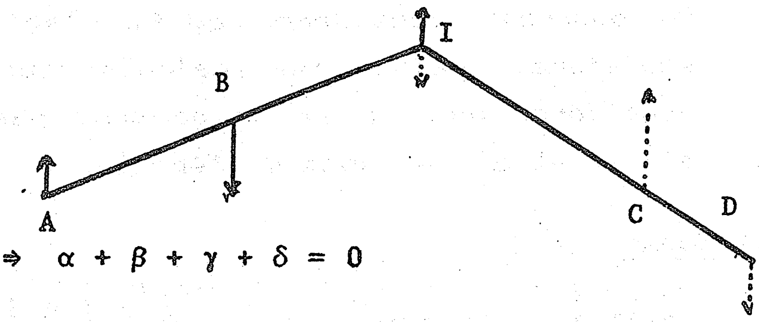
- l'ordre n'intervient pas
- les coefficients sont définis à un facteur multiplicatif près.

V- EQUILIBRES A n POINTS

1°) Superposition physique d'équilibres

a) Exemple: dans la juxtaposition des deux équilibres

$\left\{\begin{array}{c|c|c} A & B & I \\ \hline \alpha & \beta & j \end{array}\right\}$ et $\left\{\begin{array}{c|c|c} C & D & I \\ \hline \gamma & \delta & -j \end{array}\right\}$ le point I ne jouie aucun rôle, il est affecté du coefficient 0



$$\left\{\begin{array}{l} \alpha + \beta + j = 0 \\ \gamma + \delta - j = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \alpha + \beta + \gamma + \delta = 0$$

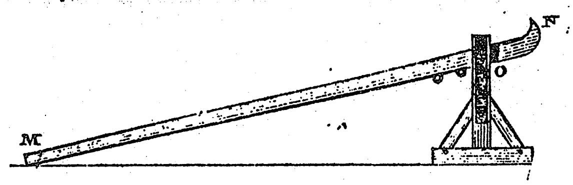
b) Physiquement, si des équilibres à trois points sont réalisés, leur juxtaposition (ou superposition) est un moyen d'obtenir d'autres équilibres :toute superposition d'équilibres est un équilibre.

c) Remarque: il est possible, en regroupant par deux, successivement, les forces en présence[1], de ramener tout équilibre physique de n forces parallèles, à une superpositon (ou juxtaposition) d'équilibres à trois points, mais, il faudrait comme au II-2°) projeter sur un plan (ou une droite).

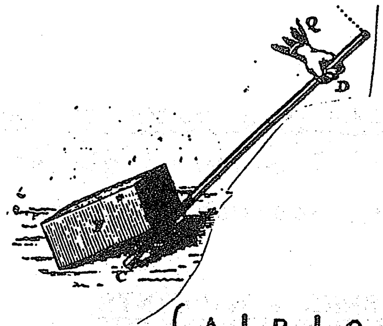
Plus précisément, on peut réaliser un équilibre à n points dans l'espace, en remplaçant, de proche en proche, deux des points par le point d'équilibre correspondant, affecté de la résultante des deux forces (lorsqu'elle est non nulle).

Il est clair que l'on pourra aussi faire d'autres regroupements et utiliser d'autres équilibres partiels que ceux à trois points.

(1) C'est aussi une question de rapport de force en présence.



A1



2°) Opérations sur les équilibres

a) Produit par un réel

Soit (e) : $\left\{\begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline -4 & 3 & 1 \end{array}\right\}$,on notera k(e) l'équilibre : $\left\{\begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline -4k & 3k & k \end{array}\right\}$

On allègera souvent les notations en e ,e_1, 3e , −2e ,...

En fait (e) et k(e) correspondent à la même configuration.

On pourrait considérer qu'il s'agit de deux écritures du même équilibre, mais, les calculs sur les équilibres amènent à considérer que e et −e ne sont pas le même equilibre. En effet e'+ e et e'− e sont différents.

b) Somme

Soit les équilibres (e1) : $\left\{\begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline -5 & 2 & 3 \end{array}\right\}$ et (e2) : $\left\{\begin{array}{c|c|c} C & D & E \\ \hline -2 & 1 & 1 \end{array}\right\}$

On notera (e1) + (e2) l'équilibre résultant de leur juxtaposition.

(e1) + (e2) : $\left\{\begin{array}{c|c|c|c|c} A & B & C & E & D \\ \hline -5 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right\}$

3°) Définition

On appelle équilibre toute combinaison linéaire d'équilibres.

Ceci revient à dire, pour l'instant, qu'un équilibre est une combinaison d'équilibres à trois points ou moins.

4°) Conséquence

Tout équilibre correspond à un équilibre physique.

5°) Quelques exemples particuliers

a) (e)−(e) : $\left\{\begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right\}$ est un équilibre.

b) par conséquent $\left\{\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right\}$ et $\left\{\begin{array}{c} A \\ \hline 0 \end{array}\right\}$ sont des équilibres,

puisqu'il s'agit de la même écriture.

(on avait d'ailleurs trouvé que $\left\{\begin{array}{c|c} A & A \\ \hline \alpha & -\alpha \end{array}\right\}$ était un équilibre)

VI- EQUILIBRES A 4 POINTS - BARYCENTRE DE 3 POINTS

1°) Obtention

Etant donné deux équilibres à 3 points il suffit, dans la somme, d'éliminer l'un des points, commun, pour qu'il en reste 4.

On a donc : $\left\{\begin{array}{c|c|c} A & B & I \\ \hline \alpha & \beta & i \end{array}\right\}$ et $\left\{\begin{array}{c|c|c} C & D & I \\ \hline \gamma & \delta & j \end{array}\right\}$. On peut choisir $j = -i$

la somme est alors l'équilibre $\left\{\begin{array}{c|c|c|c} A & B & C & D \\ \hline \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{array}\right\}$

2°) Conséquences:

a) Si $i \neq 0$, I est situé sur (AB) et sur (CD)
et : $\boxed{\text{A B C D sont coplanaires}}$ (Eventuellement alignés)

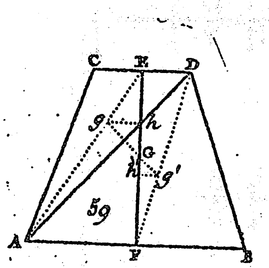
b) On a, bien sûr: $\boxed{\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0}$

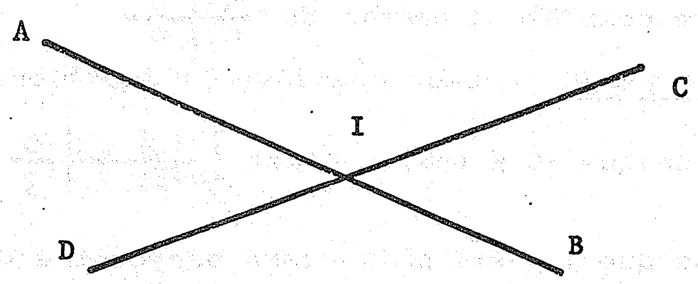
3°) Equilibre associé à un quadrilatère

Remarque: Il s'agit nécessairement d'un quadrilatère plan.

quadrilatère: configuration définie par 4 points dont 3 quelconques ne sont pas alignés.

a) Obtention





Sur les trois couples de droites définis par les quatre points donnés A, B, C, D, l'un au moins est formé de droites sécantes. Supposons que ce soit (AB) et (CD) qui se coupent en I.

A_1

On a les 2 équilibres: $\left\{\begin{array}{c|c|c} A & B & I \\ \hline \alpha & \beta & i \end{array}\right\}$ et $\left\{\begin{array}{c|c|c} C & D & I \\ \hline \gamma & \delta & -i \end{array}\right\}$

car on peut choisir $-i$ pour coefficient de I dans le second équilibre (homogénéïté des coefficients).

b) <u>Unicité</u>: α, β, γ et δ, sont définis à un coefficient multiplicatif près.

Si $\left\{\begin{array}{c|c|c|c} A & B & C & D \\ \hline \alpha' & \beta' & \gamma' & \delta' \end{array}\right\}$ est un équilibre associé au quadrilatère ABCD, en supposant que l'un des coefficients α, β, γ, δ n'est pas nul: α par exemple, on peut écrire: $\alpha' = k\alpha$ et obtenir par combinaison

l'équilibre $(e')-k(e)$: $\left\{\begin{array}{c|c|c} B & C & D \\ \hline \beta'-k\beta & \gamma'-k\gamma & \delta'-k\delta \end{array}\right\}$ qui, puisque

B, C et D ne sont pas alignés, entraîne $\beta'=k\beta$, $\gamma'=k\gamma$ et $\delta'=k\delta$.

4° <u>Détermination du 4ème point d'un équilibre</u>

On a $\left\{\begin{array}{c|c|c|c} A & B & C & \\ \hline \alpha & \beta & \gamma & \end{array}\right\}$, on détermine δ par: $\delta = -\alpha - \beta - \gamma$

<u>Si $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$</u> (ou si $\delta \neq 0$)

l'une au moins des sommes du type $\alpha + \beta$ est non nulle. (sinon $\alpha + \beta = \alpha + \gamma = \beta + \gamma = 0 \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$ puis $\delta = 0$)

D'après III-4° il existe I unique tel que : $\left\{\begin{array}{c|c|c} A & B & I \\ \hline \alpha & \beta & -\alpha-\beta \end{array}\right\}$ soit l'équilibre complété à partir de $\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline \alpha & \beta \end{array}$

<u>Si $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$</u>, on peut compléter l'équilibre $\left\{\begin{array}{c|c|c} I & C & \\ \hline \alpha+\beta & \gamma & \end{array}\right\}$

de façon unique ($C \notin (AB)$), c'est $\left\{\begin{array}{c|c|c} I & C & D \\ \hline \alpha+\beta & \gamma & \gamma \end{array}\right\}$

Remarquons que I a été pris comme barycentre de $\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline \alpha & \beta \end{array}$

puisque D est défini comme celui de $\begin{array}{c|c} I & C \\ \hline \alpha+\beta & \gamma \end{array}$

Ceci équivaut à dire que:

I est à la fois barycentre de $\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline \alpha & \beta \end{array}$ et de $\begin{array}{c|c} C & D \\ \hline \gamma & \delta \end{array}$

5°) Barycentre de trois points

a) Définition

Si $\delta \neq 0$ et si $\left\{\begin{array}{c|c|c|c} A & B & C & D \\ \hline \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{array}\right\}$ est un équilibre,

nous dirons que D est le barycentre de $\begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline \alpha & \beta & \gamma \end{array}$

b) Propriété fondamentale

$\left\{\begin{array}{c|c|c|c} A & B & C & D \\ \hline \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{array}\right\}$ est un équilibre $\Leftrightarrow$ A est barycentre de $\begin{array}{c|c|c} B & C & D \\ \hline \beta & \gamma & \delta \end{array}$

$\Leftrightarrow$ B est barycentre de $\begin{array}{c|c|c} A & C & D \\ \hline \alpha & \gamma & \delta \end{array}$

$\Leftrightarrow$ C est barycentre de $\begin{array}{c|c|c} A & B & D \\ \hline \alpha & \beta & \delta \end{array}$

$\Leftrightarrow$ D est barycentre de $\begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline \alpha & \beta & \gamma \end{array}$

(Pour chaque coefficient α, β, γ ou δ non nul)

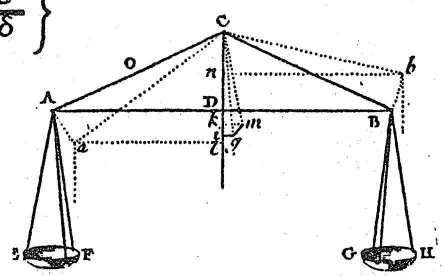
c) Propriétés

- L'ordre n'intervient pas.
- Les coefficients sont définis à un facteur multiplicatif près.
- Si $\left[\begin{array}{l} \alpha + \beta \neq 0 \\ \text{I est le barycentre de } \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline \alpha & \beta \end{array} \\ \left\{\begin{array}{c|c|c|c} A & B & C & D \\ \hline \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{array}\right\} \text{ est un équilibre,} \end{array}\right.$

alors I est le barycentre de $\begin{array}{c|c} C & D \\ \hline \gamma & \delta \end{array}$.

En effet l'équilibre $\left\{\begin{array}{c|c|c|c} A & B & C & D \\ \hline \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{array}\right\}$ est la somme des

équilibres $\left\{\begin{array}{c|c|c} A & B & I \\ \hline \alpha & \beta & -\alpha-\beta \end{array}\right\}$ et $\left\{\begin{array}{c|c|c} I & C & D \\ \hline \alpha+\beta & \gamma & \delta \end{array}\right\}$



A_1

Annexe 2

DEFINITION COMPLEXE DANS LE PLAN

I - EQUILIBRE

Etant donné des points A_i , $i \in \{ 1 , 2 , \ldots , n\}$ d'affixes a_i et des nombres réels α_i,

$$\left\{\begin{array}{c|c|c} \ldots & A_i & \ldots \\ \hline \ldots & \alpha_i & \ldots \end{array}\right\} \text{ est un équilibre } \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha_1.a_1 + \ldots + \alpha_n.a_n = 0 \\ \alpha_1 + \ldots + \alpha_n = 0 \end{array}\right.$$

II - BARYCENTRE

Etant donné des points A_i , $i \in \{ 1 , 2 , \ldots , n\}$ d'affixes a_i et des nombres réels α_i,

A_k est le barycentre de $\begin{array}{c|c|c} \ldots & A_i & \ldots \\ \hline \ldots & \alpha_i & \ldots \end{array}$ avec $i \neq k$

si et seulement si

$\left\{\begin{array}{c|c|c} \ldots & A_i & \ldots \\ \hline \ldots & \alpha_i & \ldots \end{array}\right\}$ est un équilibre et $\alpha_n \neq 0$

Annexe 3

Pour ceux qui souhaiteraient une justification plus générale du point de vue adopté ici, voici quelques extraits d'un article paru dans la Revue de Mathématiques Spéciales

(Vuibert Editeur)

Axiomatique barycentrique des espaces affines, application aux courbes de genre un

par Yves HELLEGOUARCH, Professeur à l'Université de Caen.

I. — INTRODUCTION.

Le but de cette étude est de formuler une axiomatique des espaces affines qui soit proche de l'intuition physique que nous en donne la Statique.

Par « espace affine » je ne veux pas parler « d'espace affine *attaché à un espace vectoriel* T » (notion très classique dont la définition sera rappelée dans le paragraphe 2) mais « d'espace affine *en soi* ».

Pour préciser cette distinction voici une description des définitions que nous allons donner de ces objets dans les paragraphes 2 et 4.

Un « espace affine E attaché à un espace vectoriel T » est la donnée d'un ensemble E, d'un corps K, d'un espace vectoriel T défini sur K et d'une action de T sur E : $T \times E \to E$ qui vérifie certains axiomes.

Un « espace affine E » est la donnée d'un ensemble E, d'un corps K et d'une application $\beta : \mathfrak{L}_1 \to E$ (le barycentre) où $\mathfrak{L}_1$ est une certaine partie de $K^{(E)}$ (l'espace des applications de E dans K à support fini). Bien entendu β doit aussi vérifier des axiomes.

Cette dernière définition se veut très proche de l'intuition « physique » : β est la fonction qui à un ensemble fini de « points massiques » associe son centre de gravité. Cependant nous en donnerons une illustration dans un domaine totalement différent (où le corps K est remplacé par l'anneau $\mathbb{Z}$) qui est celui de la théorie des courbes de genre 1.

Afin de pouvoir traiter simultanément les deux cas ci-dessus, nous supposerons que K est seulement un anneau unitaire (non nécessairement commutatif) et que T est un module sur K. Les lecteurs que cela gêne pourront penser que K est un corps commutatif ($\mathbb{R}$ par exemple) et que T est un espace vectoriel sur K.

IV. — AXIOMATIQUE BARYCENTRIQUE DES ESPACES AFFINES.

On se donne un ensemble E et un anneau K.

On désigne par $\mathfrak{L} = K^{(E)}$ le module à gauche sur K engendré par les points de E, c'est-à-dire le module des combinaisons linéaires formelles $\sum_{i \in I} \lambda_i x_i$, avec I fini, $\lambda_i \in K$, $x_i \in E$. Les éléments de $\mathfrak{L}$ qui sont réduits à un seul terme, c'est-à-dire qui sont du type λx, seront appelés des *points massiques* ; ils forment un ensemble que l'on notera $\mathscr{M}$.

Les éléments de E seront considérés comme des points massiques pour lesquels $\lambda = 1$ (de masse unité), on a donc

$$E \subset \mathscr{M} \subset \mathfrak{L} = \left\{\sum_{i \in I} \lambda_i x_i,\ x_i \in E,\ \lambda_i \in K\right\}.$$

Finalement, on dispose d'une forme canonique (la *masse*) sur $\mathfrak{L}$:

$$\gamma : \mathfrak{L} \longrightarrow K$$
$$\sum_{i \in I} \lambda_i x_i \mapsto \sum_{i \in I} \lambda_i .$$

On désignera par $\mathfrak{L}_1$ la partie de $\mathfrak{L}$ formé par les éléments de $\mathfrak{L}$ de masse unité, on a donc

$$E \subset \mathfrak{L}_1 = \left\{\sum_{i \in I} \lambda_i x_i ;\ \sum_{i \in I} \lambda_i = 1\right\}.$$

Définition 4. — *Soit une application* $\beta : \mathfrak{L}_1 \to E$ *vérifiant les axiomes suivants :*

Axiome 1 : $\beta(x) = x$ *pour* $x \in E$.

Axiome 2 : β *est associative sur* E *en ce sens que si* $\sum_{j \in J} \mu_j = 1$ *et si* $\sum_{i \in I_j} \lambda_i = 1$, *pour tout* $j \in J$, *alors on a*

$$\beta\left[\sum_{j \in J} \mu_j \beta\left(\sum_{i \in I_j} \lambda_i x_i\right)\right] = \beta\left(\sum_{i \in \Sigma I_j} \mu_j \lambda_i x_i\right)$$

Nous dirons dans ce cas que (E, β) *est un espace affine sur* K *et nous nous proposons de montrer que ces deux axiomes sont suffisants pour munir* E *d'une structure d'espace affine attaché à un certain espace vectoriel* T.

A3

D'abord nous devons construire T, mais auparavant nous définirons l'ensemble $\mathscr{B}$ des bipoints de E.

Définition 5. — *$\mathscr{B}$ est la partie de $\mathfrak{L}$ formé par les combinaisons linéaires du type $x_2 - x_1$, avec x_1 et $x_2 \in E$.*

Remarque : $\mathscr{B} \subset \operatorname{Ker} \gamma$ donc $\mathscr{B} \cap \mathfrak{L}_1 = \varnothing$.

Proposition 4. — *La relation $\equiv$ sur $\mathscr{B}$ définie par*

$$(x_2 - x_1) \equiv (y_2 - y_1) \Leftrightarrow \beta(x_2 - x_1 + y_1) = y_2$$

est une relation d'équivalence sur $\mathscr{B}$.

Définition 6. — *on pose $T = \mathscr{B}/\equiv$ et on note $\overrightarrow{x_0x_1}$ la classe d'équivalence de $x_1 - x_0$.*

Notre but sera maintenant de définir une structure de module sur T et de définir une action de T sur E de telle sorte que les deux notions de barycentre coïncident.

Ceci conduit donc à poser

$$\lambda_1\overrightarrow{x_0x_1} + \cdots + \lambda_n\overrightarrow{x_0x_n} = \overrightarrow{x_0y},$$

avec

$$y = \beta\left[\left(1 - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)x_0 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right].$$

Remarque : On aura alors la relation de Chasles

$$\overrightarrow{a_0a_1} + \overrightarrow{a_1a_2} + \cdots + \overrightarrow{a_{n-1}a_n} = \overrightarrow{a_0a_n}.$$

Pour voir ceci on prend

$$x_0 = a_0 \quad \text{et} \quad x_i = \beta(a_i - a_{i-1} + a_0).$$

On a alors, d'après l'axiome 2 :

$$\overrightarrow{x_0x_1} + \cdots + \overrightarrow{x_0x_n} = \overrightarrow{x_0y},$$

avec

$$y = \beta\left[-(n-1)a_0 + \sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i-1} + a_0)\right] = a_n.$$

Proposition 5. — *Soit n vecteurs $\overrightarrow{x_0x_1}, \ldots, \overrightarrow{x_0x_n}$ de T. On pose comme ci-dessus :*

$$\lambda_1\overrightarrow{x_0x_1} + \cdots + \lambda_n\overrightarrow{x_0x_n} = \overrightarrow{x_0y},$$

avec

$$y = \beta\left[\left(1 - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)x_0 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right].$$

Alors $\overrightarrow{x_0y}$ ne dépend pas du choix de x_0. De plus, cette définition confère une structure de module à T.

Il nous faut maintenant définir l'action de T sur E.

Définition 7. — *Pour tout $x \in E$, nous poserons*

$$x + \overrightarrow{x_1x_2} = \beta(x + x_2 - x_1)$$

ce qui a un sens puisque $x + x_2 - x_1 \in \mathfrak{L}_1$ et cet élément ne dépend pas du choix de x_1.

En résumé, nous avons défini sur E une structure d'espace affine attaché à T et de plus les deux notions de barycentre coïncident.

V. — Remarque sur l'espace des translations T.

Dans le paragraphe 4 nous avons vu que la donnée de (E, β) permet de construire un module T. Mais un autre module apparaît en cours de route, c'est

$$\mathfrak{L}_0 = \operatorname{Ker} \mu = \left\{\sum_{i \in I} \lambda_i x_i ;\ \Sigma\lambda_i = 0\right\}.$$

Le résultat que nous voulons établir dans ce paragraphe est le suivant.

Théorème 1. — *T est isomorphe au quotient du module $\mathfrak{L}_0$ par le sous-module :*

$$\mathfrak{L}_{00} = \left\{\sum_{i \in I} \lambda_i x_i ;\ \exists x \in E \text{ tel que } \beta(x + \Sigma\lambda_i x_i) = x\right\}.$$

VI. — Variétés linéaires affines, applications linéaires affines.

Définition 8. — *Étant donné un espace affine E, on dit qu'une partie V de E est une variété linéaire affine (ou un sous-espace affine de E) si, et seulement si, pour toute famille $(x_i)_{i \in I}$ de points de V et toute famille $(\lambda_i)_{i \in I}$ d'éléments de K, de support fini et telle que $\Sigma\lambda_i = 1$, le barycentre $\sum_{i \in I} \lambda_i x_i \in V$.*

Exemples :

1° $\varnothing$ et E sont des sous-espaces affines de E ainsi que $\{a\}$ si $a \in E$.

2° Si x_1 et x_2 sont distincts dans E, la partie

$$V(x_1, x_2) = \{\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 ;\ \lambda \in K\}$$

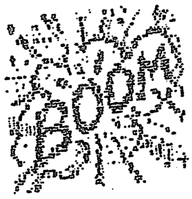
est appelée la droite affine engendrée par x_1 et x_2.

Proposition 6. — *Soit $V \neq \varnothing$.*

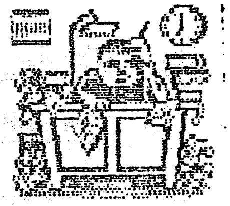
Pour que V soit un sous-espace affine de E, il faut, et il suffit, qu'il existe un sous K-module Θ de T tel que

1° pour $x \in V$ et $\vec{\theta} \in \Theta$, on ait $\vec{\theta} + x \in V$;

2° l'orbite de x, pour l'action de Θ, soit V tout entier.



Annexe 4



DEFINITION FORMELLE DES EQUILIBRES

I-Pourquoi une définition formelle?

Il nous semble essentiel de souligner que les personnes qui ont parlé d'équilibres, et qui les ont utilisés, ignoraient au début quelle était la nature des objets traités. Le statut des objets (outils) qu'ils utilisaient s'est peu à peu dégagé à partir de leur utilisation dans les résolutions de problèmes.

Il faut souligner qu'une telle démarche est constante dans l'histoire des mathématiques (ainsi on utlisait $\sqrt{-1}$ bien avant de savoir quel était le statut de ce "nombre"); comme est constant dans cette même histoire, la préoccupation ultérieure , de donner un statut aux objets.

Ni l'un ni l'autre de ces actes n'est neutre dans l'histoire de la science, mais il nous semble fondamental, pour cette introduction, d'attirer l'attention sur une perversion actuelle de l'enseignement qui consiste justement à donner le statut d'objet avant celui d'outil. Ceci ne peut donc être qu'une annexe et a pour but de donner un statut aux objets "équilibres" et de montrer que l'ensemble des objets ainsi définis est muni d'une structure d'espace vectoriel.

II-Equilibres vectoriels.

1° Ensemble étudié et notations associées.

a) L'ensemble étudié.

Il s'agit de l'ensemble $\mathbb{R}^{(\mathbb{R}^n)}$ c'est à dire l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ constitué des familles de nombres réels indicés sur $\mathbb{R}^n$ et à support fini. (C'est à dire qu'il s'agit, pour chaque élément de $\mathbb{R}^n$ de la donnée d'un nombre réel, un nombre fini de ces nombres étant non nuls).

b) Notation des éléments de $\mathbb{R}^{(\mathbb{R}^n)}$

Il existe deux images mentales associées aux éléments de $\mathbb{R}^{(\mathbb{R}^n)}$, chacune de ces images conduit à une notation; nous utiliserons selon le contexte l'une ou l'autre.

i) 1ère conception:

Les éléments de $\mathbb{R}^{(\mathbb{R}^n)}$ sont une famille indexée par $\mathbb{R}^n$

Notation: $\ell = (\alpha_x)_{x\in\mathbb{R}^n}$, étant entendu que $\alpha_x = 0$ sauf pour un nombre fini d'indices x.

Les éléments x de $\mathbb{R}^n$ tels que $\alpha_x \neq 0$ forment le support de la famille ℓ.

ii) 2ème conception:

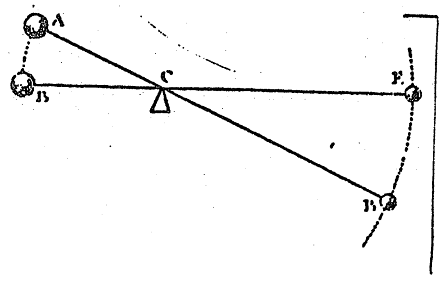
Un élément de $\mathbb{R}^{(\mathbb{R}^n)}$ est une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.

Notation: Tableau de valeurs :

$$\ell = \left\{\begin{array}{c|c|c|c} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \hline \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{array}\right\} \begin{array}{l} \longleftarrow \mathbb{R}^n \\ \longleftarrow \mathbb{R} \end{array}$$

Tableau dans lequel figurent les éléments x_i de $\mathbb{R}^n$ pour lesquels α_i est non nul (on sait qu'ils sont en nombre fini). Ce tableau sera dit simplifié si, d'autre part, $\alpha_i \neq 0$, pour tout x_i.

On a alors : *Support* $\ell = \{x_1, \dots, x_n\}$



c) <u>Structure d'espace vectoriel et notations dans $\mathbb{R}^{(\mathbb{R}^n)}$</u>

On sait que $\mathbb{R}^{(\mathbb{R}^n)}$ est canoniquement muni d'une structure d'espace vectoriel. Les lois de cet espace avec les notations ci-dessus s'expriment par:

i) $(\alpha_x)_{x\in\mathbb{R}^n} + (\beta_x)_{x\in\mathbb{R}^n} = (\alpha_x + \beta_x)_{x\in\mathbb{R}^n}$

$\lambda.(\alpha_x)_{x\in\mathbb{R}^n} = (\lambda\alpha_x)_{x\in\mathbb{R}^n}$.

ii) $f = \left\{\begin{array}{c|c|c|c} x1 & x2 & \dots & xn \\ \hline \alpha 1 & \alpha 2 & \dots & \alpha n \end{array}\right\}$ $\quad g = \left\{\begin{array}{c|c|c|c} y1 & y2 & \dots & yn \\ \hline \beta 1 & \beta 2 & \dots & \beta n \end{array}\right\}$

- *Support* $(f + g) \subset$ *Support* $f \cup$ *Support* g

  ▸Si un des éléments appartient à *Support* f − *Support* g (ou *Support* g − *Support* f), son coefficient est celui qu'il avait dans f (ou dans g).

  ▸Si un élément appartient à *Support* $f \cap$ *Support* g, son coefficient est la somme des coefficients qu'il avait dans f et g.

- $\lambda.f = \left\{\begin{array}{c|c|c|c} x1 & x2 & \dots & xn \\ \hline \lambda\alpha 1 & \lambda\alpha 2 & \dots & \lambda\alpha n \end{array}\right\}$

2° <u>Equilibre vectoriel</u>

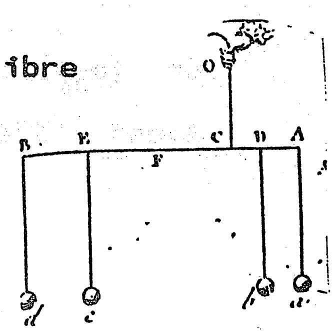
a) <u>Définition</u>

On appelle équilibre vectoriel tout élément e de $\mathbb{R}^{(\mathbb{R}^n)}$ tel que, en posant $e = (\alpha_x)_{x\in\mathbb{R}^n}$, on ait:

$$\sum_{x\in\mathbb{R}^n} \alpha_x . x = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{x\in\mathbb{R}^n} \alpha_x = 0$$

b) <u>Remarque</u>: Sil'on traduit cette définition dans le cas plus habituel de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ où l'on a plus l'habitude de noter les vecteurs $\vec{u}$, et si l'on ne s'interesse qu'aux vecteurs associés à un coefficient non nul (ils sont en nombre fini), la définition ci-dessus signifie que:

la famille $(\vec{u}_i)$ de vecteurs est un équilibre
si et seulement si
$\Sigma\, \alpha_i.\vec{u}_i = \vec{0}$ et $\Sigma\alpha_i = 0$



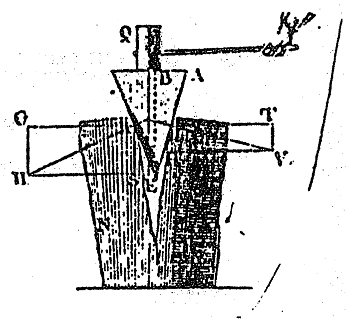
IV-Barycentres et équilibres

1° Barycentres (Rappel)

Soit $(\alpha_A)_{A\in\mathcal{A}}$ un élément de $\mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$

Le point B est appelé barycentre de la famille $(\alpha_A)_{A\in\mathcal{A}}$

si $\sum_A \alpha_A.\overrightarrow{AB} = \vec{0}$



2° Propriété caractéristique

Soit $(\alpha_A)_{A\in\mathcal{A}}$ un élément de $\mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$

Les propriétés suivantes sont équivalentes:

i) B est barycentre de $(\alpha_A)_{A\in\mathcal{A}}$

ii) $\left[(\alpha_A)_{A\in\mathcal{A}} + (\beta_A)_{A\in\mathcal{A}} \right]$ est un équilibre

avec $\begin{cases} \beta_A = 0 & \text{si } A \neq B \\ \beta_A = -\sum_A \alpha_A & \text{si } A = B \end{cases}$

Compte tenu de la définition des objets en question, la démonstration est évidente.

3° "Associativité" du barycentre (Barycentre partiel)

Nous nous proposons de traduire en terme d'équilibre le théorème du barycentre partiel (dit aussi: "associativité" du barycentre).

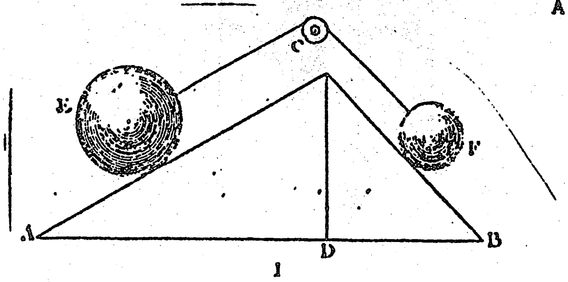
Rappelons le théorème en question:

Soit $(\alpha_A)_{A\in\mathcal{A}}$, $(\alpha'_A)_{A\in\mathcal{A}}$ et $(\alpha''_A)_{A\in\mathcal{A}}$ des éléments de $\mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$

tels que $(\alpha_A)_{A\in\mathcal{A}} = (\alpha'_A)_{A\in\mathcal{A}} + (\alpha''_A)_{A\in\mathcal{A}}$

Soit G, G' et G" les barycentres de $(\alpha_A)_{A\in\mathcal{A}}$, $(\alpha'_A)_{A\in\mathcal{A}}$ et $(\alpha''_A)_{A\in\mathcal{A}}$

alors G est barycentre de $\begin{array}{c|c} G' & G'' \\ \hline \Sigma\alpha'_A & \Sigma\alpha''_A \end{array}$



Cela revient à dire en utilisant une notation par tableaux, plus légère, mais abusive en raison de l'ignorance dans laquelle on est des supports:

$$
\text{Si}\ \left[\begin{array}{l}
\left\{\begin{array}{c|c|c|c|c} A_1 & A_2 & \dots & A_n & G \\ \hline \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n & -\Sigma\alpha_i \end{array}\right\} \text{ est un équilibre } e \\
\text{et} \\
\left\{\begin{array}{c|c|c|c|c} A_1 & A_2 & \dots & A_p & G' \\ \hline \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_p & -\Sigma\beta_i \end{array}\right\} \text{ est un équilibre } e'\ (\beta_i = \alpha_i) \\
\text{et} \\
\left\{\begin{array}{c|c|c|c|c} A_{p+1} & A_2 & \dots & A_n & G'' \\ \hline \gamma_{p+1} & \gamma_2 & \dots & \gamma_n & -\Sigma\gamma_i \end{array}\right\} \text{ est un équilibre } e''\ (\gamma_i = \alpha_i)
\end{array}\right.
$$

$$
\text{alors}\ \left\{\begin{array}{c|c|c} G' & G'' & G \\ \hline \Sigma\beta_i & \Sigma\gamma_i & -\Sigma\alpha_i \end{array}\right\} \text{ est un équilibre}
$$

Ceci est totalement évident puisque ce dernier équilibre n'est rien d'autre que $e - e' - e''$.

Autrement dit l'associativité du barycentre n'est autre que la loi de composition interne des équilibres. Tout problème faisant intervenir ce théorème peut être résolu par combinaison linéaire d'équilibres.

Clarence Schmidt (1898-?): Construction exécutée pendant trente ans, puis détruite et recommencée.

BORDEAUX

IREM

Groupe de Géométrie

La NOTION d'EQUILIBRE