I.R.E.M. DE BORDEAUX

CINQ PROBLEMES DE GEOMETRIE PLANE

Groupe de Géométrie

1988

INTRODUCTION

Certains de ces problèmes sont classiques (Tourniquette, trapèze complet par exemple), notre but est pour chacun d'eux d'essayer de les résoudre en faisant intervenir différents outils de la géométrie plane sans chercher systématiquement à utiliser un outil prédéterminé. Par exemple, il ne figure pas de solution utilisant l'homothétie dans la tourniquette.

L'intervention des différents outils se réfère à la classification de Jean MARION et Jean-Louis OVAERT ([1]) : ainsi les solutions utilisent les configurations, les transformations, le numérique, le calcul vectoriel, le barycentre, l'analytique et les angles.

***
*

PLAN

1. Parallélogramme inscrit dans un cercle ;
2. Le trapèze complet ;
3. Une propriété particulière du triangle rectangle ;
4. Optimisation sur un arc de cercle ;
5. La Tourniquette.

*****
**
*

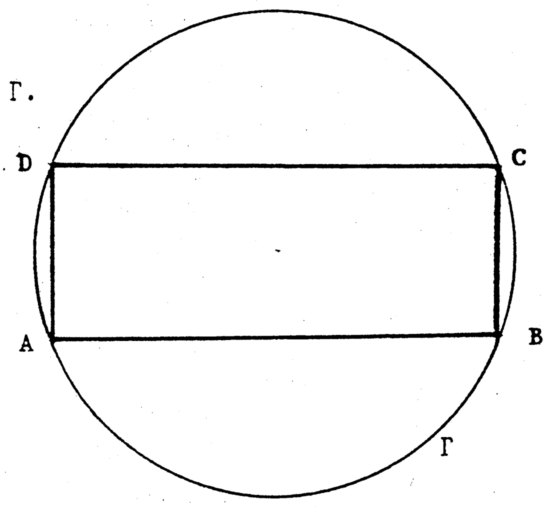
I - PARALLELOGRAMME INSCRIT DANS UN CERCLE

LE PROBLÈME ABORDÉ

Il s'agit de montrer que tout parallélogramme (non aplati) inscrit dans un cercle est un rectangle.

LA CONFIGURATION

ABCD est un parallélogramme inscrit dans un cercle Γ.



PROPRIÉTÉ À DÉMONTRER

ABCD est un rectangle

POINTS DE MÉTHODE

On désignera par I le centre du parallélogramme ABCD et par O le centre du cercle Γ.

Pour démontrer que ABCD est un rectangle, on établira:

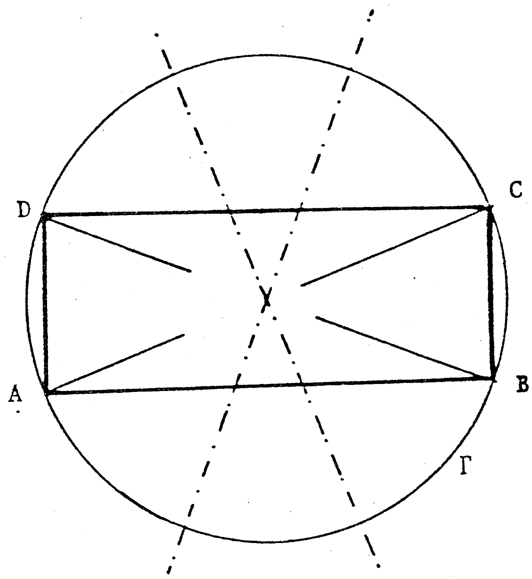
- soit que ses diagonales sont de même longueur. (solutions 1 2 3 5)
- soit que deux de ses côtés consécutifs sont orthogonaux. (solutions 4 5 6)

DIRECTIONS DE RECHERCHE

Les points de méthode invoqués précédemment suggèrent l'utilisation:

- des configurations. 1
- des transformations: symétrie orthogonale, symétrie centrale, translation. 2 3 4
- de l'outil vectoriel. 5
- des angles. 6

① UTILISATION DES CONFIGURATIONS



La médiatrice de [A,C] passe par I, car IA = IC, et par O, car OA = OC.

La médiatrice de [B,D] passe par I, car IB = ID, et par O, car OB = OD.

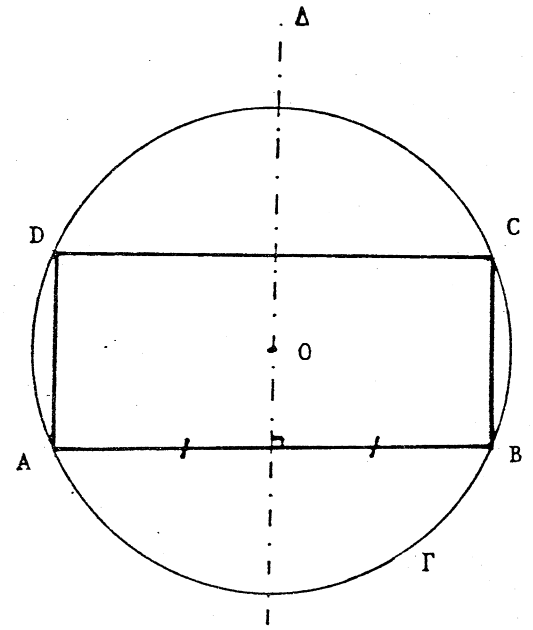
Il est clair que ces médiatrices sont sécantes puisque le parallélogramme ABCD est non aplati.

Les points I et O communs à ces deux droites sont donc confondus.

Par suite les diagonales [A,C] et [B,D] du parallélogramme ABCD sont des diagonales du cercle Γ et on a: AC = BD.

<u>ABCD est donc un rectangle</u>.

② UTILISATION DE LA SYMÉTRIE ORTHOGONALE



Soit Δ la médiatrice de [A,B] et s la symétrie orthogonale d'axe Δ.

<u>1ère solution</u>: on utilise le fait que la symétrie orthogonale conserve la distance.

La médiatrice Δ de [A,B] passe par O car OA = OB, et est orthogonale à (CD) car les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

Ainsi Δ est la médiatrice [C,D] puisqu'elle est orthogonale à (CD) et passe par le point O équidistant de C et D.

Donc, $s(A) = B$ et $s(C) = D$, ce qui entraîne AC = BD.

<u>ABCD est donc un rectangle.</u>

<u>2ème solution</u>: on utilise le fait que par une symétrie orthogonale, une droite, son image et l'axe de symétrie sont:

- soit parallèles,
- soit concourants.

On montre comme précédemment que la droite Δ est aussi la médiatrice de [C,D].

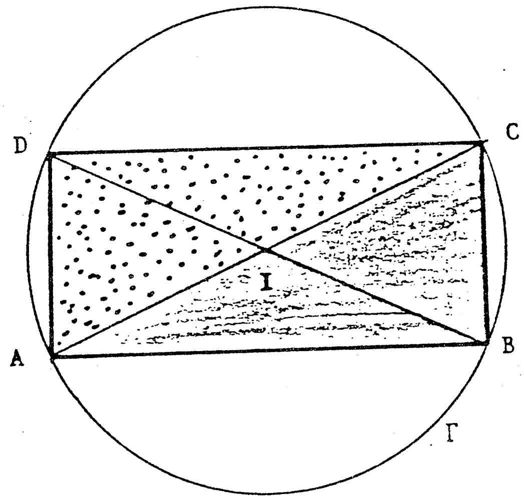
L'image par s de la droite (AD) est la droite (BC) qui lui est parallèle.

On en déduit que la droite (AD) est parallèle à Δ.

Par suite la droite (AB) qui est orthogonale à Δ est aussi orthogonale à (AD).

<u>ABCD est donc un rectangle.</u>

(3) UTILISATION DE LA SYMÉTRIE CENTRALE



Soit s la symétrie de centre I .

La symétrie s transforme le triangle ABC en le triangle CDA.

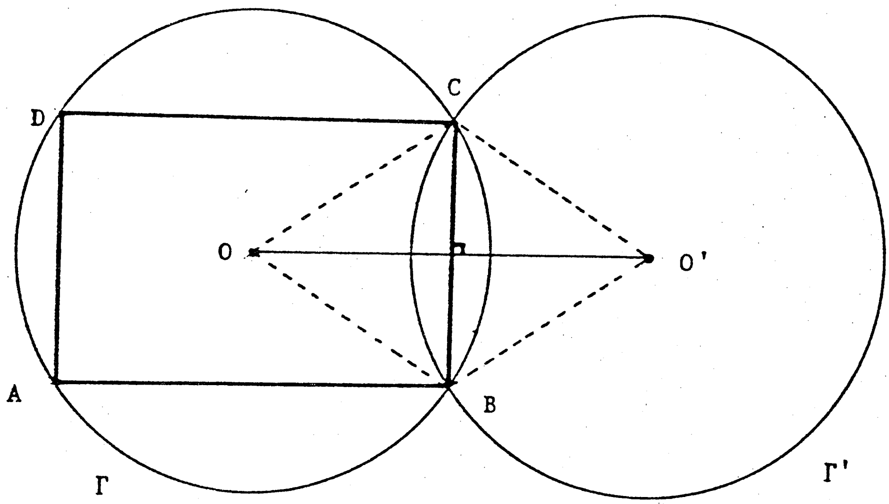
Le cercle circonscrit au triangle ABC est donc transformé en le cercle circonscrit au triangle CDA; autrement dit: $s(\Gamma) = \Gamma$.

Le centre O du cercle Γ étant invariant par s, les points O et I sont confondus.

Ainsi les diagonales [A,C] et [B,D] du parallélogramme ABCD sont des diamètres du cercle Γ, par suite AC = BD.

<u>ABCD est donc un rectangle.</u>

④ UTILISATION DE LA TRANSLATION



Soit t la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

L'image par t du cercle Γ est le cercle Γ' de centre $O' = t(O)$ qui passe par $B = t(A)$ et $C = t(D)$.

La droite (OO') est alors:

- médiatrice de $[B,C]$ car $OB = OC$ et $O'B = O'C$.
- parallèle à (AB) car $\overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{AB}$

Ainsi la droite (BC) est orthogonale à (AB) car elle est orthogonale à (OO').

<u>ABCD est donc un rectangle</u>.

⑤ UTILISATION DU VECTORIEL

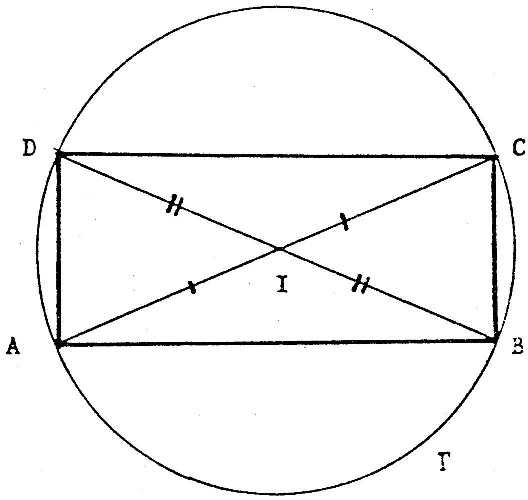


figure 1

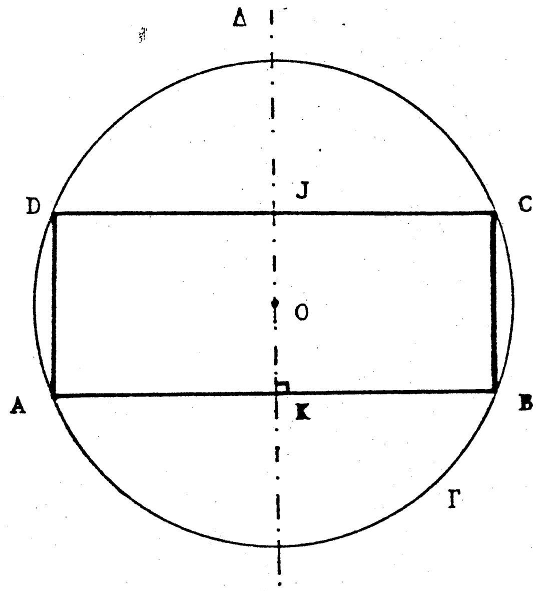


figure 2

1ère solution: figure 1

Nous avons: $\vec{IA}\cdot\vec{IC} = \vec{IB}\cdot\vec{ID}$ car les points A, B, C et D sont cocycliques.

Les vecteurs $\vec{IA}$ et $\vec{IC}$ d'une part, et $\vec{IB}$ et $\vec{ID}$ d'autre part sont opposés.

On a donc: $IA^2 = IB^2 = IC^2 = ID^2$, c'est à dire: $IA = IB = IC = ID$.

Par conséquent: $IA + IC = IB + ID$, c'est à dire $AC = BD$.

ABCD est donc un rectangle.

2ème solution: figure 2

Comme nous l'avons déjà montré (voir 2), la médiatrice Δ de $[A,B]$ est aussi la médiatrice de $[C,D]$.

On a alors les trois égalités vectorielles:

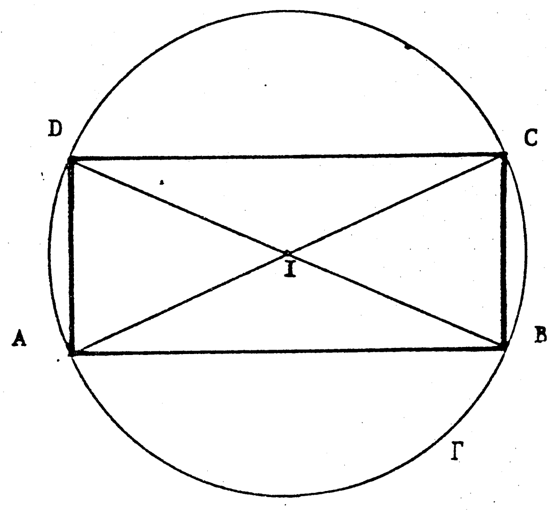
- $\vec{AK} = \frac{1}{2}\vec{AB}$ car K est le milieu de $[A,B]$.
- $\vec{AK} = \frac{1}{2}\vec{DC}$ car ABCD est un parallélogramme.
- $\vec{AK} = \vec{DJ}$ car J est le milieu de $[C,D]$.

Ainsi AKJD est un parallélogramme qui a deux côtés consécutifs (AK) et (KJ) orthogonaux, il s'ensuit que c'est un rectangle.

Les droites (AB) et (AD) sont orthogonales.

ABCD est donc un rectangle.

(6) UTILISATION DES ANGLES



1ère solution: on utilise la convexité du demi-plan.

Nous avons • d'une part: $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}) = (\widehat{\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CB}})$ (effet de la symétrie de centre I).

• d'autre part: $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}) = (\widehat{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD}}) + \hat{\pi}$

car
- A, B, C et D sont cocycliques.
- A et C ne sont pas dans le même demi-plan de frontière (BD), sinon [A,C] serait contenu dans ce demi-plan et le point I de (BD) ne serait pas le milieu de [A,C].

En additionnant membre à membre les deux égalités angulaires précédentes,

on obtient: $2(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}) = \hat{\pi}$, donc les droites (AB) et (AD) sont orthogonales,

donc ABCD est un rectangle.

Note: $\hat{\pi}$ désigne l'angle plat.

2ème solution: on n'utilise aucun critère de convexité.

Nous avons • d'une part: $2(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}) = 2(\widehat{\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CB}})$ (effet de la symétrie de centre I).

• d'autre part: $2(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}) = 2(\widehat{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD}})$ car [les points A, B, C et D sont cocycliques.

En additionnant membre à membre les deux égalités angulaires précédentes.

on obtient: $4(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}) = \hat{0}$ ($\hat{0}$ désigne l'angle nul)

donc $2(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}) = \hat{0}$ ou $2(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}) = \hat{\pi}$.

Or l'éventualité $2(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}) = \hat{0}$ qui traduit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont colinéaires ne peut se produire puisque le parallélogramme ABCD est supposé non aplati.

Finalement on a: $2(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}) = \hat{\pi}$ ce qui prouve que les droites (AB) et (AD) sont orthogonales, donc ABCD est un rectangle.

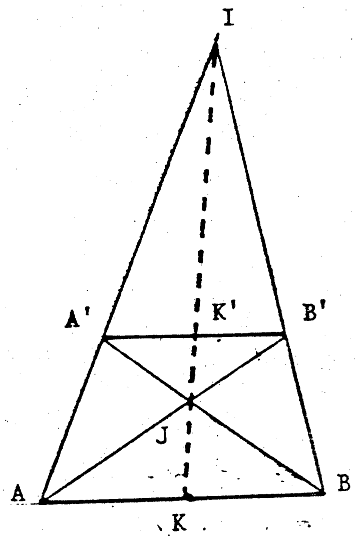
II - LE TRAPEZE COMPLET

LE PROBLÈME ABORDÉ

Il s'agit de démontrer que dans un trapèze, les milieux des bases, les points d'intersections des diagonales d'une part et des côtés non parallèles d'autre part, sont alignés.

LA CONFIGURATION

- Un trapèze ABB'A' de bases [A,B] et [A',B']
- (AB') et (BA') sont sécantes en J
- (AA') et (BB') sont sécantes en I
- K est le milieu de [A,B]
- K' est le milieu de [A',B']



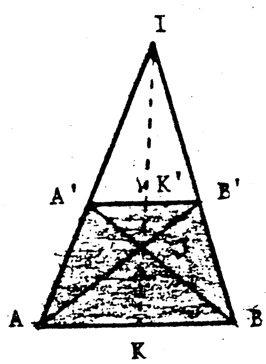
On donne à cette configuration le nom de trapèze complet.

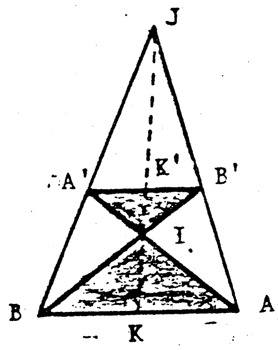
PROPRIÉTÉ À DÉMONTRER

Les points I, J, K et K' sont alignés.

POINTS DE MÉTHODE

Les points I et J jouent des rôles analogues par échange des points A et B (ou A' et B'). Il en est de même des points K et K' par échange de (A,B) et (A',B'). Ainsi pour prouver que les points I, J, K et K' sont alignés, il suffira de démontrer que trois d'entre eux le sont.





DIRECTIONS DE RECHERCHE

Il faut prouver un alignement.

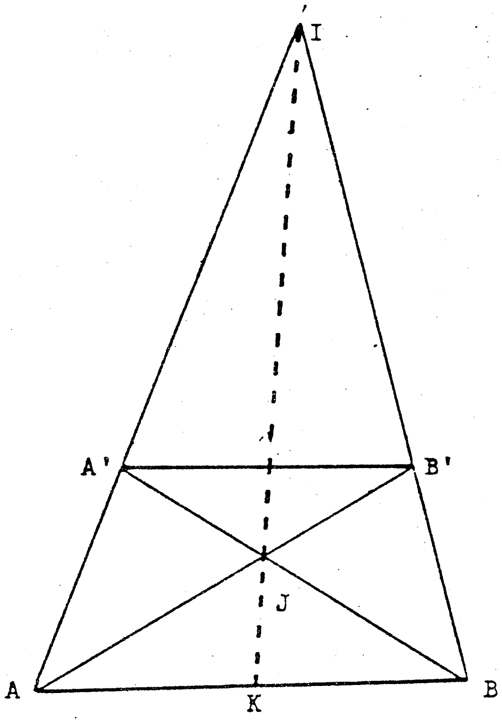
Les propriétés essentielles de la figure sont:

- (AB) et (A'B') sont parallèles
- K et K' sont des milieux

Ceci suggère l'utilisation:

- du barycentre. 1
- de transformations: homothétie, projection, symétrie axiale, affinité. 2 3 4
- du numérique: l'aire du "triangle" IKK' est nulle. 5
- de l'analytique. 6

1 UTILISATION DU BARYCENTRE



La configuration permet d'affirmer l'existence de deux coefficients α et t tels que:

$\alpha \neq 0$, $t \neq 0$, $\alpha + t \neq 0$ et A' barycentre de $\begin{array}{c|c} A & I \\ \hline \alpha & t \end{array}$

Le parallélisme des droites (AB) et (A'B') permet de déduire, le barycentre se conservant par projection, que:

B' est barycentre de $\begin{array}{c|c} B & I \\ \hline \alpha & t \end{array}$

Par conséquent, en utilisant ces deux barycentres partiels, le barycentre de $\begin{array}{c|c|c} A & B & I \\ \hline \alpha & \alpha & t \end{array}$ est situé sur les droites (AB') et (BA'), c'est donc le point J (L'existence de J entraîne $2\alpha + t \neq 0$).

Or K est barycentre de $\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline \alpha & \alpha \end{array}$; par associativité, J est alors le barycentre de $\begin{array}{c|c} K & I \\ \hline 2\alpha & t \end{array}$, ce qui prouve <u>l'alignement de I, J et K.</u>

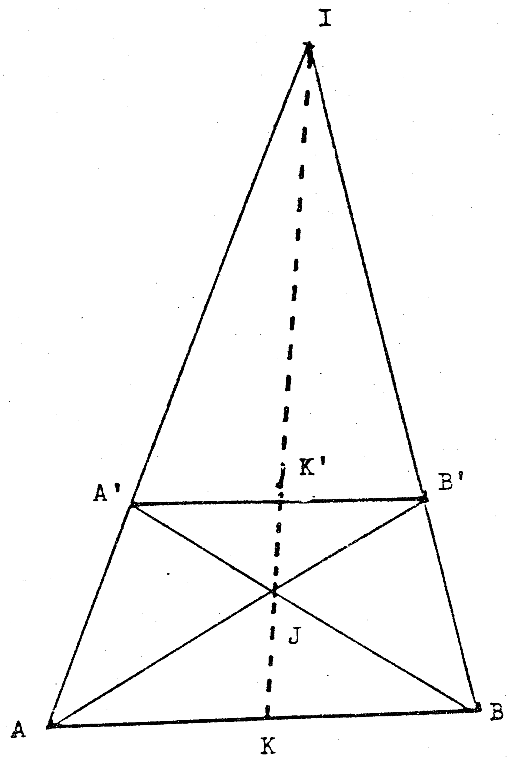
<u>Remarque</u>

On peut aussi utiliser la forme barycentrique du théorème de Céva dans le triangle ABI.

A' barycentre de $\begin{array}{c|c} A & I \\ \hline \alpha & t \end{array}$, B' barycentre de $\begin{array}{c|c} B & I \\ \hline \alpha & t \end{array}$,

B' barycentre de $\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline \alpha & \alpha \end{array}$, donc les droites (BA'), (AB') et (IK) sont concourantes en J, barycentre de $\begin{array}{c|c|c} A & B & I \\ \hline \alpha & \alpha & t \end{array}$.

2 UTILISATION DE L'HOMOTHÉTIE



1ère solution.

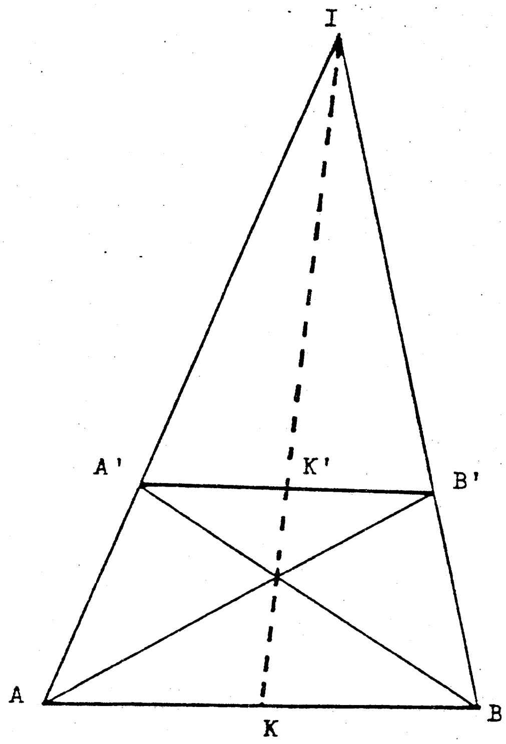
Il existe une homothétie de centre I qui transforme $[A,B]$ en $[A',B']$.

La conservation du milieu par l'homothétie permet d'affirmer l'alignement des points I, K et K'.

2ème solution.

Considérons l'homothétie h_1 de centre I telle que $h_1(A) = A'$ et l'homothétie h_2 de centre J telle que $h_2(A') = B$.
Etant donné que les droites (AB) et (A'B') sont paralléles on a: $h_1(B) = B'$ et $h_2(B') = A$. Par conséquent: $h_2 o h_1(A) = B$ et $h_2 o h_1(B) = A$.
Ainsi $h_2 o h_1$ est la symétrie de centre K, donc le point K est sur la droite (IJ)

③ UTILISATION DE LA PROJECTION



Les vecteurs $\overrightarrow{IA'}$ et $\overrightarrow{IA}$ étant colinéaires, il existe un réel k tel que: $\overrightarrow{IA'} = k\cdot\overrightarrow{IA}$

Considérons la projection p de (IA) sur (IB) de direction (AB). On a: $p(I) = I$, $p(A) = B$, $p(A') = B'$; donc d'après le théorème de Thalès:

$$\overrightarrow{IB'} = k\cdot\overrightarrow{IB}.$$

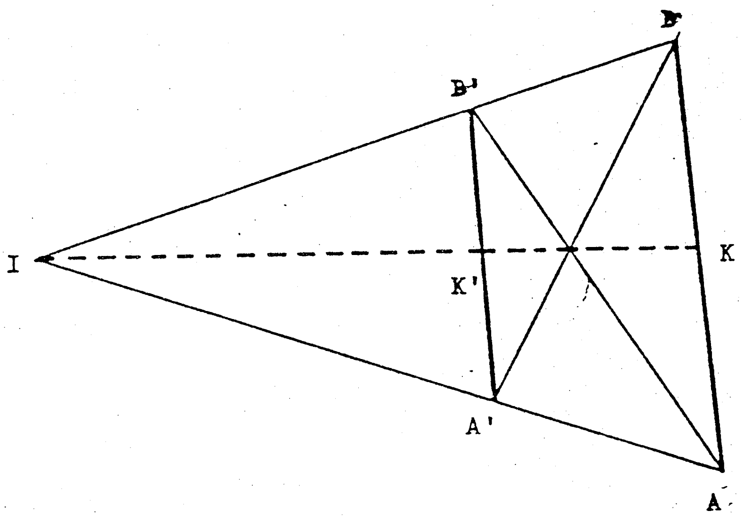
Ainsi $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{IB'} - \overrightarrow{IA'} = k\cdot\overrightarrow{IB} - k\cdot\overrightarrow{IA} = k\cdot(\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IA}) = k\cdot\overrightarrow{AB}$.

Or comme $\overrightarrow{A'K'} = \frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{A'B'}$ et $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AB}$, on en déduit que $\overrightarrow{A'K'} = k\cdot\overrightarrow{AK}$

D'autre part: $\overrightarrow{IK'} = \overrightarrow{IA'} + \overrightarrow{A'K'} = k\cdot\overrightarrow{IA} + k\cdot\overrightarrow{AK} = k\cdot(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AK}) = k\cdot\overrightarrow{IK}$,
donc les vecteurs $\overrightarrow{IK}$ et $\overrightarrow{IK'}$ sont colinéaires,
par suite les points I, K et K' sont alignés.

(4) UTILISATION DE LA SYMÉTRIE AXIALE

UTILISATION DE L'AFFINITÉ



lère solution.

Considérons la symétrie s par rapport à la droite (KK') et de direction (AB).

On a: $s(A) = B$ et $s(A') = B'$.

On en déduit successivement:

- les droites (AA') et (BB') sont symétriques
- les droites (AA') et (BB')se coupent sur l'axe (KK') de la symétrie*
- les points I, K et K' sont alignés.

* Dans une symétrie axiale, une droite, son image et l'axe de la symétrie sont concourants ou parallèles.

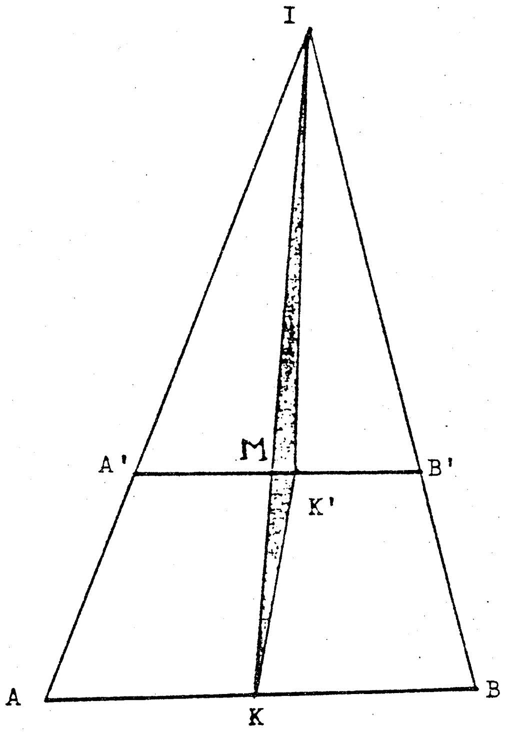
2ème solution.

Soit f l'affinité de droite (AI), de direction (AB) et de rapport $\frac{1}{2}$.

On a: $f(B) = K$, $f(B') = K'$ et $f(I) = I$.

Or, comme l'affinité conserve l'alignement, les points I, K et K' sont alignés.

(5) UTILISATION DU NUMÉRIQUE



On notera $\overline{MNPQR}$ l'aire de figure déterminée par la ligne polygonale fermée MNPQRM

La droite (IK) coupe le segment [A',K'] ou le segment [K',B'].

Du point de vue de la démonstration il est équivalent de considérer que que la droite (IK) coupe le segment [A',K'] ou le segemnt [K',B'].

Plaçons-nous dans la première éventualité: la droite (IK) coupe [A',K'] en M.

On a: $\overline{IKK'} = \overline{IKB} - \overline{IK'B'} - \overline{KK'B'B}$

Or: • $\overline{IKB} = \overline{IKA}$ car K est le milieu de [A,B],

• $\overline{IK'B'} = \overline{IK'A'}$ car K' est le milieu de [A',B'],

• $\overline{KK'B'B} = \overline{KK'A'A}$ car K et K' sont les milieux des bases du trapèze AA'B'B.

Ainsi: $\overline{IKK'} = \overline{IKA} - \overline{IK'A'} - \overline{KK'A'A}$

Or, $\overline{IKA} = \overline{IMA'} + \overline{KMA'A}$

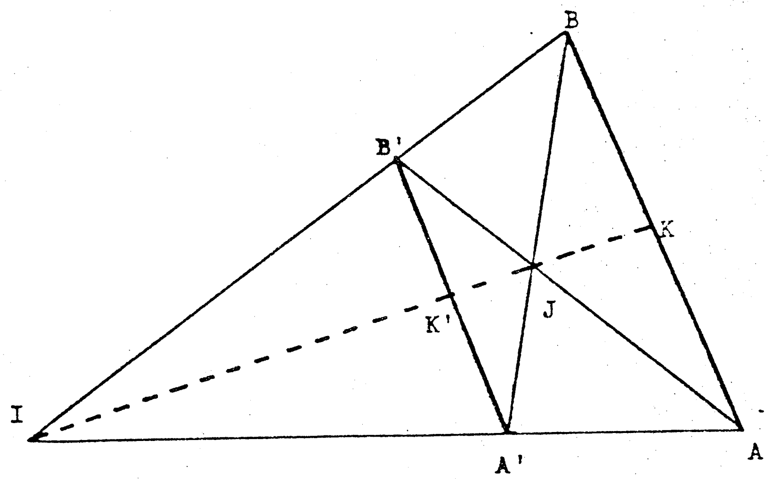
D'où $\overline{IKK'} = (\overline{IMA'} - \overline{IK'A'}) + (\overline{KMA'A} - \overline{KK'A'A})$

Donc $\overline{IKK'}$ est la somme de deux nombres négatifs

Nous savons tous qu'une aire est positive ou nulle, donc $\overline{IKK'} = 0$.

<u>Les points I, K et K' sont donc alignés.</u>

⑥ UTILISATION DE L'ANALYTIQUE



Prenons (I,A,B) comme repère.

En désignant par a ($a \neq 0$ et $a \neq 1$) l'abscisse du point A',

on a: A'(a , 0), B'(0 , a) et K($\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$)

1ère solution.

L'équation de la droite (AB') est: $x + \frac{y}{a} = 1$ (1)

L'équation de la droite (A'B) est: $\frac{x}{a} + y = 1$ (2)

L'équation de la droite (IK) est : $x - y = 0$

Les coordonnées du point J, intersection des droites (AB') et (A'B), vérifient les équations (1) et (2). Par différence membre à membre de (1) et (2) on obtient: $x = y$.

Les coordonnées du point J vérifient l'équation de la droite (IK).

Les points I, K et J sont donc alignés.

2ème solution.

Les coordonnées du point K' sont ($\frac{a}{2}$, $\frac{a}{2}$).

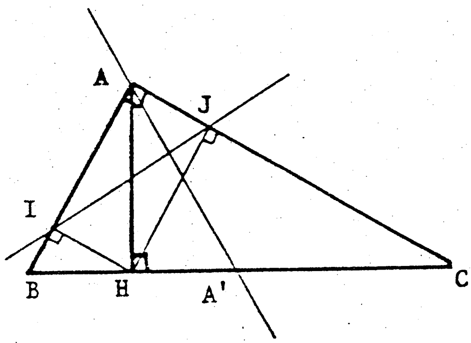
L'équation de la droite (IK) est $y = x$, donc les points I, K et K' sont alignés.

III - UNE PROPRIETE PARTICULIERE DU TRIANGLE RECTANGLE

LE PROBLÈME ABORDÉ

Il s'agit de montrer que, dans un triangle rectangle, la droite joignant les projètés orthogonaux du pied de la hauteur relative à l'hypoténuse sur les deux autres côtés, et la médiane relative à l'hypoténuse, sont perpendiculaires.

LA CONFIGURATION



- Un triangle ABC rectangle en A
- H le pied de la hauteur relative à l'hypoténuse
- I et J les projetés orthogonaux de H sur (AB) et (AC)
- A' le milieu de [B,C]

PROPRIÉTÉ À DÉMONTRER

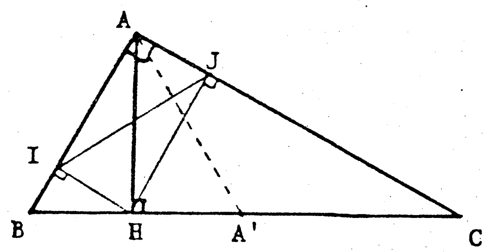
Les droites (IJ) et (AA') sont perpendiculaires.

POINTS DE MÉTHODE

On établit l'orthogonalité des droites (IJ) et (AA'):

- soit directemnt (solutions 1 2 3 4 5)
- soit par parallélisme interposé: on remplace (IJ) et (AA') par des droites qui leurs sont parallèles (solutions 6 7 8 9)

① UTILISATION DU PRODUIT SCALAIRE



Nous avons successivement:

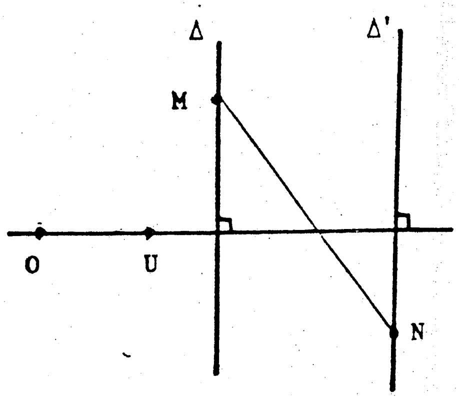
$$\begin{aligned}
2(\overrightarrow{AA'}\cdot\overrightarrow{IJ}) &= (2\overrightarrow{AA'})\cdot\overrightarrow{IJ}\\
&= (\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{IJ}\\
&= \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{IJ}\\
&= \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AH} \qquad (*)\\
&= \overrightarrow{AH}\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})\\
&= \overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}\\
&= 0 \qquad \text{(Les vecteurs } \overrightarrow{AH} \text{ et } \overrightarrow{BC} \text{ sont orthogonaux)}
\end{aligned}$$

On en déduit: $\overrightarrow{AA'}\cdot\overrightarrow{IJ} = 0$,

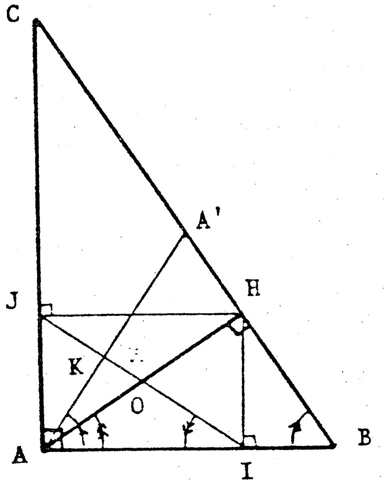
ce qui prouve que les <u>droites (AA') et (IJ) sont perpendiculaires</u>

(*) On utilise ici la propriéte suivante:

Lorsque les points M et N décrivent les perpendiculaires Δ et Δ' à la droite (OU) le réel $\overrightarrow{OU}\cdot\overrightarrow{MN}$ reste invariant.



2 UTILISATION DES ANGLES



On utilise la notion de double d'angle d'un couple de vecteurs non nuls.

Désignons par O le centre du rectangle AIHJ et par K le point d'intersection des droites (AA') et (IJ).

Nous avons d'une part: $2(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AA'}}) = 2(\widehat{\overrightarrow{BA'},\overrightarrow{BA}})$ car le triangle AA'B est isocèle en A'

① c'est à dire $2(\widehat{\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AK}}) = 2(\widehat{\overrightarrow{BH},\overrightarrow{BA}})$ car les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AI}$, ainsi que $\overrightarrow{BA'}$ et $\overrightarrow{BH}$ sont colinéaires.

Nous avons d'autre part: $2(\widehat{\overrightarrow{IO},\overrightarrow{IA}}) = 2(\widehat{\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AO}})$ car le triangle AOI est isocèle en O.

② c'est à dire $2(\widehat{\overrightarrow{IK},\overrightarrow{IA}}) = 2(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AH}})$ car les vecteurs $\overrightarrow{IO}$ et $\overrightarrow{IK}$ ainsi que $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AB}$, ainsi que $\overrightarrow{AO}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont colinéaires.

Or le triangle AHB étant rectangle en H, il s'ensuit que:

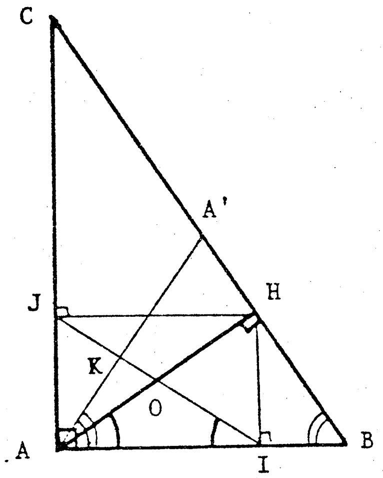
$$2(\widehat{\overrightarrow{BH},\overrightarrow{BA}}) + 2(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AH}}) = \widehat{\Pi} \text{ ,} \quad (\widehat{\Pi} \text{ désignant l'angle plat})$$

c'est à dire, compte tenu des égalités ① et ②, $2(\widehat{\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AK}}) + 2(\widehat{\overrightarrow{IK},\overrightarrow{IA}}) = \widehat{\Pi}$,

ce qui montre que le triangle AKI est rectangle en K.

Par suite les droites (AA') et (IJ) sont perpendiculaires

3 UTILISATION DES ANGLES



On utilise la notion d'angle géométrique.

On désigne par O le centre du rectangle AIHJ et par K le point d'intersection des droites (AA') et (IJ).

Nous avons d'une part:

$\widehat{IAK} = \widehat{ABH}$ ① car le triangle AA'B est isocèle en A'

Nous avons d'autre part:

$\widehat{AIK} = \widehat{BAH}$ ② car le triangle AOI est isocèle en O.

Or le triangle AHB est rectangle en H, les angles $\widehat{ABH}$ et $\widehat{BAH}$ sont supplémentaires.

Compte tenu des égalités ① et ② les angles $\widehat{IAK}$ et $\widehat{AIK}$ sont supplémentaires, le triangle AKI est donc rectangle en K.

Par suite les droites (AA') et (IJ) sont orthogonales.

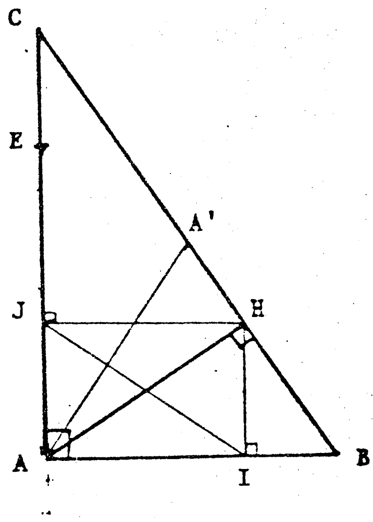
Commentaires:

Comparée à la méthode précédente cette solution paraît beaucoup plus simple, plus expéditive. Cela provient du fait qu'ici, nous avons admis de façon implicite les appartenances:

$I \in [AB)$, $K \in [BA')$, $K \in [IO)$, $H \in [AO)$.

La solution précédente s'appuie de façon explicite et rigoureuse, sur la seule notion de colinéarité.

4 UTILISATION DE L'ANALYTIQUE



Soit E le point de la demi-droite [AC) tel que AE = AB.

Dans le repère orthonormal (A,B,E), on désigne par c l'ordonnée du point C et par (x_H , y_H) les coordonnées du point H.

1ère solution: utilisation du produit scalaire (forme analytique).

La propriété: $\overrightarrow{AH}$ (x_H , y_H) est orthogonal à $\overrightarrow{BC}$ $(-1 , c)$

se traduit analytiquement par $-x_H + cy_H = 0$,

qui traduit également que $\overrightarrow{IJ}$ $(-x_H , y_H)$ et $2\overrightarrow{AA'}$ $(1 , c)$ sont orthogonaux.

Les droites (AA') et (IJ) sont donc perpendiculaires.

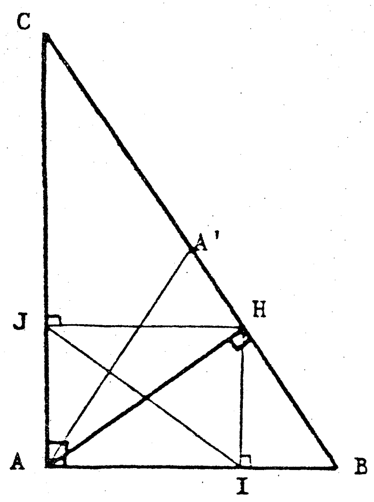
2ème solution: utilisation des coefficients directeurs.

Le coefficient directeur de (BC) est $-c$, celui de (AH) qui est orthogonale à (BC) est donc $\frac{1}{c}$.

Ainsi $y_J = y_H = \frac{x_H}{c} = \frac{x_I}{c}$.

Le coefficient de (IJ) est alors $-\frac{y_J}{x_I} = -\frac{1}{c}$, ce qui prouve que la droite (IJ) est perpendiculaire à la droite (AA') dont le coefficient directeur est $\frac{c/2}{1/2} = c$.

5 UTILISATION DES NOMBRES COMPLEXES



Dans le plan complexe les points A, B et C ont pour affixes respectives 0, 1 et ic .

A chaque vecteur $\vec{u}$ on peut associer un nombre complexe (affixe de $\vec{u}$).

- $2\overrightarrow{AA'}$ a pour affixe $1 + ic = z_1$
- $\overrightarrow{CB}$ a pour affixe $1 - ic$
- $\overrightarrow{AH}$ a pour affixe $k(1 - ic)\times i = k(c + i)$ avec k réel et $k \neq 0$ (car $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC}$)

Donc : $\begin{cases} \text{I a pour affixe } kc \\ \text{J a pour affixe } ki \end{cases}$

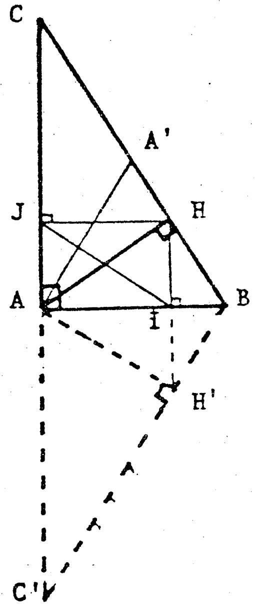
- $\overrightarrow{IJ}$ a donc pour affixe $k(i - c) = z_2$

  or $k(i - c) = ki(1 + ic)$

z_1 et z_2 ont donc des arguments différant de $\frac{\pi}{2}$

et par conséquent: <u>les droites (AA') et (IJ) sont perpendiculaires</u>.

(6) UTILISATION DE LA SYMÉTRIE ORTHOGONALE.



On utilise la symétrie orthogonale de droite (AB), notée s.

Posons : $C' = s(C)$ et $H' = s(H)$.

Nous avons alors de manière évidente : $\overrightarrow{IH'} = \overrightarrow{HI}$ et $\overrightarrow{HI} = \overrightarrow{JA}$.

On en déduit : $\overrightarrow{AH'} = \overrightarrow{JI}$, ce qui prouve que les droites (IJ) et (AH') sont parallèles.

Par ailleurs les droites (AA') et (C'B) sont parallèles car la droite (AA') joint les milieux des côtés [C,C'] et [C,B] du triangle CC'B.

Or il est clair que les droites (AH') et (C'B) sont orthogonales car elles sont les images par s de deux droites (AH) et (CB) elles-mêmes orthogonales.

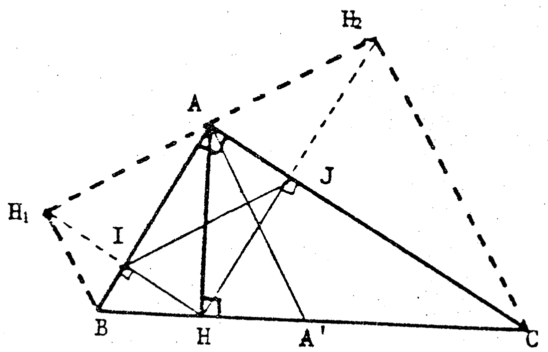
Les droites (IJ) et (AA') respectivement parallèles à deux droites orthogonales sont donc orthogonales.

Commentaire

L'idée de cette démonstration provient de la remarque suivante :

Lorsqu'on "double" un triangle rectangle, on obtient un triangle isocèle dont un côté est parallèle à la médiane relative à l'hypoténuse.

7 UTILISATION DES SYMÉTRIES CENTRALE ET ORTHOGONALE



On utilise les symétries orthogonales de droites (AB) et (AC) et la symétrie de centre A respectivement notées s_1, s_2 et s_A.

Posons: $H_1 = s_1(H)$ et $H_2 = s_2(H)$.

Nous avons d'une part:

$H_2 = s_2 o s_1 (H_1) = s_A(H_1)$, [ce qui montre que A est le milieu du segment $[H_1, H_2]$.

Nous avons d'autre part:

les droites (BH_1) et (CH_2) sont orthogonales à la droite (H_1H_2) du fait que les symétries s_1 et s_2 conservent l'orthogonalité.

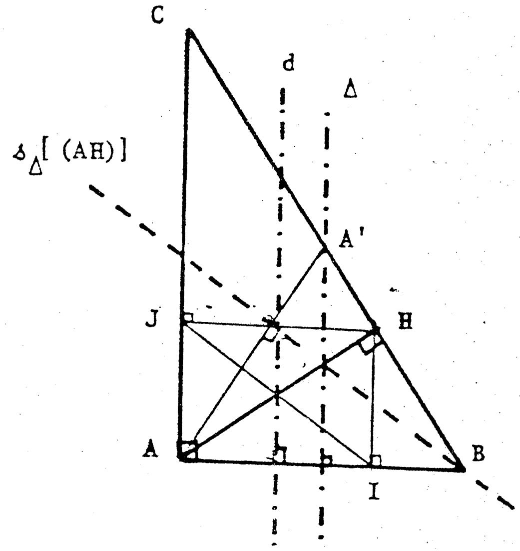
Le quadrilatère BH_1H_2C est alors un trapèze rectangle en H_1 et H_2, et la droite (AA') qui joint les milieux des côtés $[H_1, H_2]$ et $[B,C]$ est parallèle aux bases, donc orthogonale à (H_1H_2).

Il s'ensuit que la droite (AA') orthogonale (H_1H_2) est aussi orthogonale à la droite (IJ) qui lui est parallèle.

Commentaire:

On peut au niveau d'une classe de Seconde, voire de Première, amorcer le coup en faisant préalablement établir que le point A est le milieu du segment $[H_1, H_2]$

8 UTILISATION DE LA SYMÉTRIE ORTHOGONALE



On utilise les symétries orthogonales s_Δ et s_d où Δ et d sont respectivement les médiatrices des segments [A,B] et [A,I].

Notons tout d'abord que:

- La droite Δ passe par A' du fait que ce point est équidistant de A et B.
- La droite d est un axe de symétrie du rectangle AIHJ.

Cela dit désignons par t la translation $s_d \circ s_\Delta$.

Nous avons:

- $(BA') \perp (AH)$, ①
- $(IJ) = s_d[(AH)] = t(s_\Delta[(AH)])$ ② car $s_d = t \circ s_\Delta$

On en déduit:

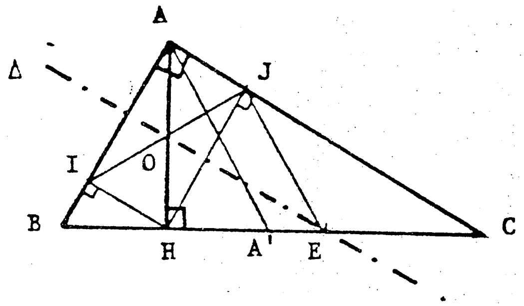
- $(AA') \perp s_\Delta[(AH)]$ (1 bis) car s_Δ conserve l'orthogonalité
- $(IJ) // s_\Delta[(AH)]$ (2 bis) car la translation t transforme une droite en une droite parallèle.

Par suite, les droites (AA') et (IJ) sont perpendiculaires.

Commentaires

Cette solution assez sophistiquée est l'oeuvre d'un élève de Seconde - excellent bien sûr- au cours de l'année scolaire 1982-1983

9 UTILISATION DE [LA SYMÉTRIE ORTHOGONALE & L'HOMOTHÉTIE



On utilise la symétrie orthogonale s_Δ où Δ désigne la médiatrice de $[H,J]$ puis l'homothétie h de centre C qui transforme B en H.

La médiatrice Δ du segment $[H,J]$ passe par le centre O du rectangle AIHJ et le milieu E de $[H,C]$ puisque, de manière évidente, les points O et E sont équidistants de H et J.

Les droites (IJ) et (JE), images par s_Δ des droites orthogonales (AH) et (BC) sont elles-mêmes orthogonales.

Cela dit, nous avons:

- $h(A) = J$
- $h([B,C]) = [H,C]$ puis $h(A') = E$ car h conserve les milieux.

Par suite $(JE) = h[(AA')]$ ce qui montre que les droites (JE) et (AA') sont parallèles.

Concluons: la droite (IJ) étant orthogonale à la droite (JE) l'est aussi à sa parallèle (AA').

Commentaire:
La symétrie s_Δ transformant "l'orthogonalité" des droites (AH) et (BC) en celle des droites (IJ) et (JE), reste à prouver que les droites (JE) et (AA') sont parallèles ... ce que fait l'homothétie h.

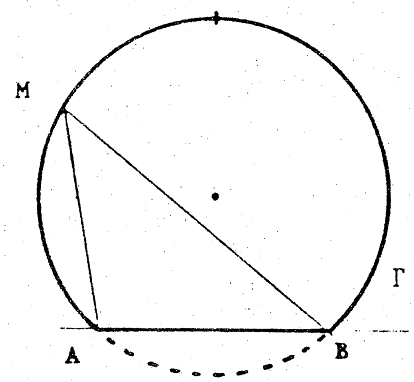
IV - OPTIMISATION SUR UN ARC DE CERCLE

LE PROBLÈME ABORDÉ

Il s'agit de maximiser la somme des distances d'un point d'un arc de cercle aux extrémités de cet arc.

LA CONFIGURATION

M est un point de l'arc $\widehat{AB}$ porté par un cercle Γ



CE QU'IL FAUT FAIRE

On doit déterminer pour quelle(s) position(s) de M sur l'arc $\widehat{AB}$ la somme MA + MB est maximum.

POINT DE MÉTHODE

Le fait que l'angle $\widehat{(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB})}$ reste constant lorsque M décrit l'arc AB nous incite à utiliser pour ce problème les notions d'angle, de rotation, de similitude... ou encore le calcul trigonométrique.

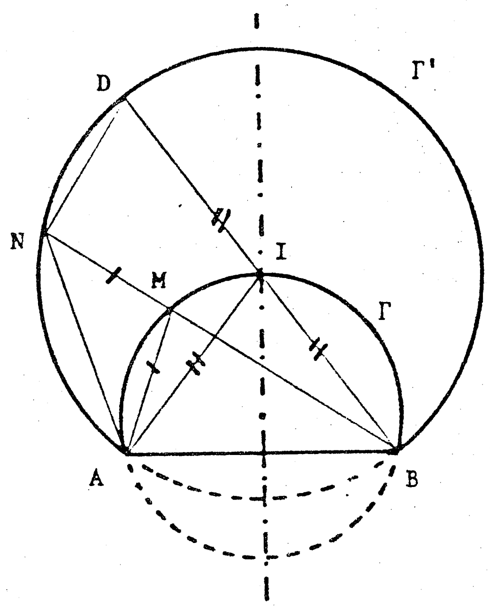
DIRECTIONS DE RECHERCHE

Pour aborder géométriquement ce problème on peut, a priori, avoir deux idées;

1° "Régionaliser" le plan à l'aide d'ellipses de foyers A et B.

2° Remplacer l'un des segments [M,A] ou [M,B] par exemple [M,A] par un segment de longueur égale porté par la droite (MB) et ayant pour extrémité soit M, soit B.

1 UTILISATION DES ANGLES 1



Ecartons d'abord les cas M = A et M = B pour lesquels le maximum de MA + MB n'est visiblement pas réalisé.

M étant maintenant un point de l'arc $\widehat{AB}$ autre que A et B, on remplace le segment [M,A] par le segment [M,N] où le point N est tel que M ∈ [B,N] et MN = MA.

On a alors:

$2(\widehat{\overrightarrow{NA},\overrightarrow{NB}}) = 2(\widehat{\overrightarrow{NA},\overrightarrow{NM}})$ ....car $\overrightarrow{NB}$ et $\overrightarrow{NM}$ sont colinéaires.

$= \widehat{\pi} - (\widehat{\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MA}})$ ....car le triangle AMN est isocèle en M.

$= (\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MN}}) + \widehat{\pi}$

$= (\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MN}}) + (\widehat{\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MB}})$ ....car M ∈ [B,N]

$= (\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}})$

$= (\widehat{\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IB}})$ ....en désignant par I le point de l'arc $\widehat{AB}$ équidistant de A et B.

Cette dernière égalité prouve que le point N est élément du cercle Γ' de centre I passant par A (et par B).

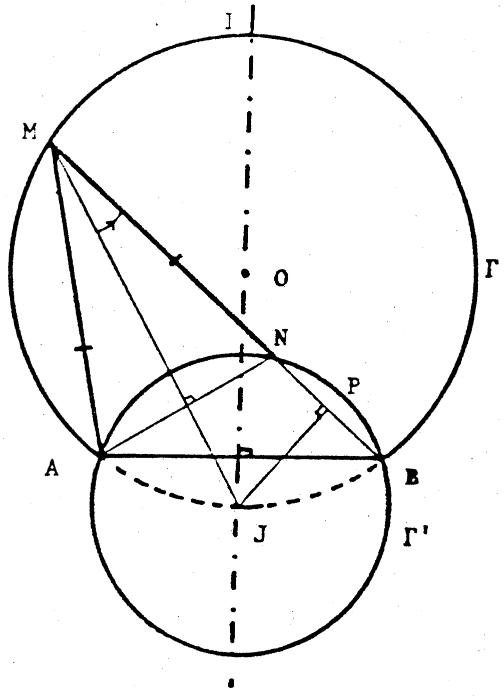
Cela dit, soit D le point de Γ' diamétralement opposé à B.

Alors:

- Pour tout point M de $\widehat{AB}$ autre que A, B et I le triangle BND est rectangle en N et on a BN < BD, c'est à dire MA + MB < IA + IB
- Pour M = I, on a trivialement MA + MB = IA + IB

Ainsi lorsque M décrit l'arc $\widehat{AB}$ le réel MA + MB est maximum pour M = I et uniquement dans ce cas.

1 UTILISATION DES ANGLES 9



On écarte, pour des raisons déjà évoquées, les cas où M = A et M = B.

Soit M un point de l'arc $\widehat{AB}$ autre que A et B. On remplace ici le segment [M,A] par le segment [M,N] où N est le point de la demi-droite [MB) tel que MN = MA.

En considérant le milieu P du segment [N,B], on a: MA + MB = MN + MB = 2MP.

On est alors ramené à maximiser la longueur du segment [M,P]. Disons que, à priori, le choix de ce montage n'est guère judicieux puisque le segment [M,P] a ses deux extrémités variables. Toutefois en désignant par I le point de $\widehat{AB}$ équidistant de A et B, on peut observer, que pour M $\neq$ I, on a:

$2(\widehat{\overrightarrow{NA},\overrightarrow{NB}}) = 2(\widehat{\overrightarrow{NA},\overrightarrow{NM}})$ ....car les vecteurs $\overrightarrow{NB}$ et $\overrightarrow{NM}$ sont colinéaires.

$= \widehat{\pi} - (\widehat{\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MA}})$ ....car le triangle NAM est isocèle en M.

$= (\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MN}}) + \widehat{\pi}$

$= (\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}) + \widehat{\pi}$........car N $\in$ [MB)

$= (\widehat{\overrightarrow{JA},\overrightarrow{JB}})$ ....en désignant par J le point de $\Gamma - \widehat{AB}$ équidistant des points A et B.

Cette dernière égalité prouve que le point N appartient au cercle Γ' de centre J passant par A (et par B).

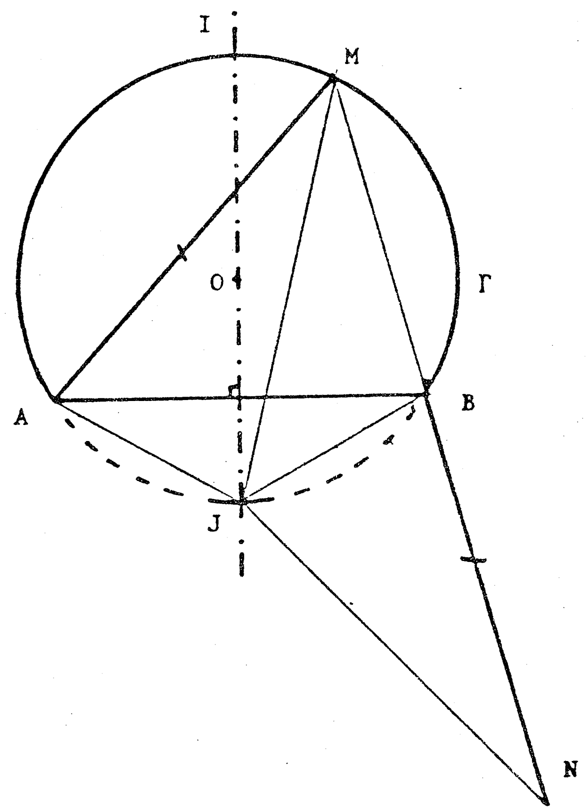
Pour M $\neq$ I, le triangle BJN est isocèle en J. La droite (JP) est donc une hauteur de ce triangle, de sorte que le triangle MPJ est rectangle en P.

Pour M = I, on a P = B et le triangle MPJ est encore rectangle en P.

Ainsi lorsque M décrit l'arc $\widehat{AB}$-{A,B} les triangles MPJ sont des triangles rectangles en P dont les angles sont constants puisque l'on a: $(\widehat{\overrightarrow{MJ},\overrightarrow{MP}}) = (\widehat{\overrightarrow{MJ},\overrightarrow{MB}})$.

Il s'ensuit que la longueur du côté [M,P] sera maximum lorsque celle du côté [J,M] sera également maximum, ce qui se produit lorsque M = I et uniquement dans ce cas.

Donc le réel MA + MB est maximum si et seulement si M est le point de l'arc $\widehat{AB}$ équidistant de A et B.



On écarte, pour des raisons déjà évoquées, les cas où M = A et M = B.

Soit M un point de l'arc $\widehat{AB}$ autre que A et B. On remplace ici le segment [M,A] par le segment [B,N] où le point N est tel que $B \in [M,N]$ et BN = AM.

On a alors conjointement :

$$\begin{cases} AM = BN \\ (\widehat{\overrightarrow{AM},\overrightarrow{BN}}) = (\widehat{\overrightarrow{AM},\overrightarrow{MB}}) = (\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}) + \widehat{\pi} \end{cases}$$

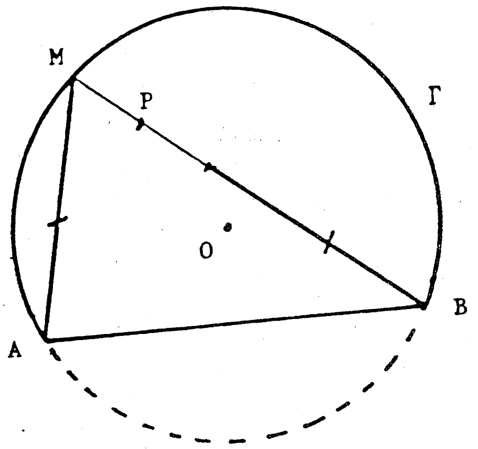
Posons: $(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}) = \widehat{\alpha}$...angle constant lorsque M décrit l'arc $\widehat{AB}$.

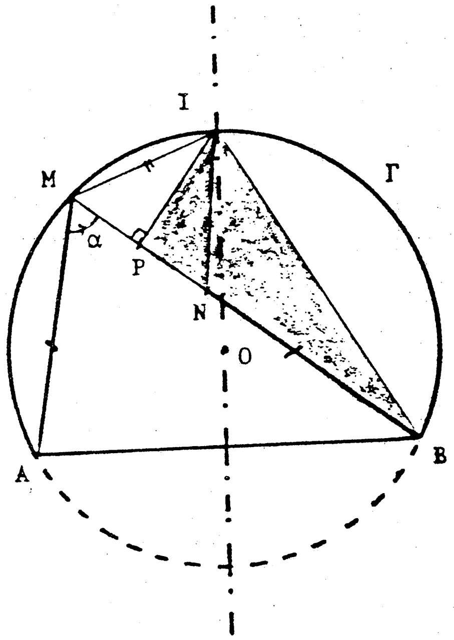
Alors la rotation $\mathcal{R}$ d'angle $\widehat{\alpha} + \widehat{\pi}$ qui transforme A en B transforme aussi M en N. Le centre de cette rotation n'est autre que le point d'intersection J de l'arc $\Gamma - \widehat{AB}$ et de la médiatrice du segment [A,B].

Lorsque M décrit l'arc $\widehat{AB} - \{A,B\}$ les triangles MJN sont des triangles isocèles en J dont les angles sont constants puisque l'on a: $N = \mathcal{R}(M)$ et donc $(\widehat{\overrightarrow{JM},\overrightarrow{JN}}) = \widehat{\alpha} + \widehat{\pi}$.

Il en résulte que la longueur du côté [M,N] sera maximum lorsque celle du côté [J,M] sera également maximum, ce qui se produit lorsque M est le point de l'arc $\widehat{AB}$ diamétralement opposé à J sur le cercle Γ et uniquement dans ce cas.

Ainsi le réel MA + MB est maximum si et seulement si M est le point de l'arc $\widehat{AB}$ équidistant de A et B.





On écarte encore les cas où $M = A$ et $M = B$ pour lesquels le maximum de $MA + MB$ n'est visiblement pas réalisé.

Soit M un point de l'arc $\widehat{AB}$ autre que A et B. On remplace ici le segment $[M,A]$ par le segment $[B,N]$ où N est le point de la demi-droite $[BM)$ tel que $BN = MA$.

En désignant par P le milieu du segment $[M,N]$, on a: $MA + MB = BN + BM = 2BP$.

On est alors ramené à maximiser le réel BP d'où l'idée de déterminer le lieu du point P lorsque M décrit l'arc $\widehat{AB}$.

Pour ce faire, observons que:

$$\begin{cases} MA = NB \\ (\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{NB}}) = (\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}) = \widehat{\alpha} \text{.....angle constant quand M décrit } \widehat{AB}-\{A,B\}. \end{cases}$$

Il s'ensuit que la rotation d'angle $\widehat{\alpha}$ qui transforme A en B transforme aussi M en N.

Le centre de cette rotation n'est autre que le point d'intersection I de l'arc $\widehat{AB}$ et de la médiatrice du segment $[A,B]$.

A ce stade de notre étude on s'aperçoit(*) qu'il n'est plus indispensable de déterminer le lieu de P. En effet, pour $M \neq I$, le triangle MIN est isocèle en I. La droite (IP) est donc la hauteur de ce triangle, de sorte que le triangle BIP est rectangle en P.

Pour tout point M de $\widehat{AB}$ autre que A, B et I, on a donc: $BP < BI$ et, pour $M = I$, on a $P = I$ et par conséquent $BP = BI$.

Ainsi le réel BP est maximum si et seulemnt si $M = I$.

Autrement dit <u>le réel $MA + MB$ est maximum si et seulement si le point M est équidistant de A et B.</u>

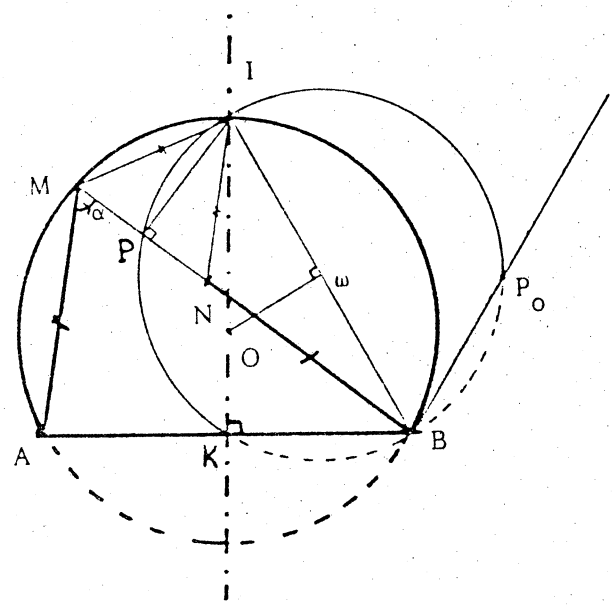
(*) Voir page suivante.

Si tel n'est pas le cas, le raisonnement peut se poursuivre de la façon suivante :

Le centre I de la rotation r qui transforme A en B et M en N est aussi le centre de la similitude σ qui transforme A en M et B en N. Cette similitude transforme donc le milieu K de [A, B] en le milieu P de [M, N].

On en déduit alors que I est encore le centre de la similitude Σ qui transforme A en K et M en P.

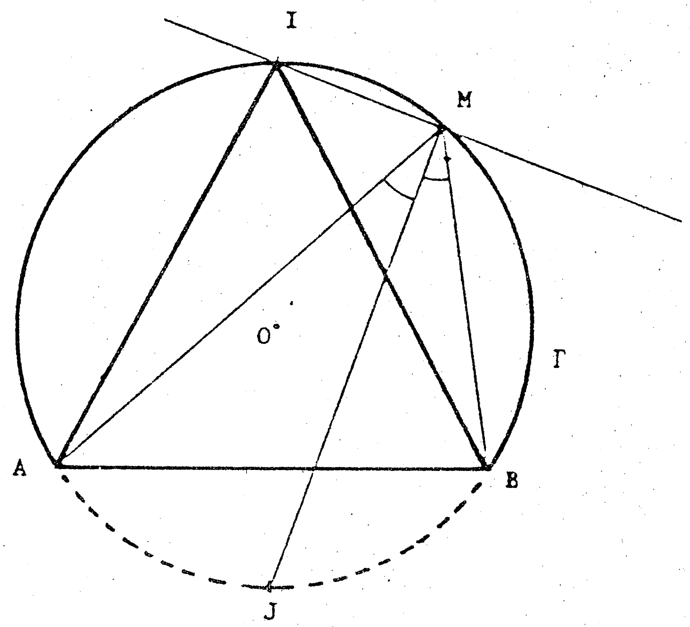
Le lieu de P est donc l'arc $\Sigma(\widehat{AB})$ porté par le cercle $\Sigma(\Gamma)$ de diamètre [B, I]. Sur la figure $\Sigma(\widehat{AB})$ est l'arc $\widehat{KP_o}$.



Dès lors, il est évident que $BP \leqslant BI$ l'égalité ayant lieu si et seulement si $P = I$ c'est-à-dire $M = I$.

<u>Commentaire</u> : Cette fin de démonstration demande plus de connaissance et de technicité que la précédente. Comme quoi les bonnes idées de départ ne sont pas toujours les meilleures.

③ UTILISATION DES CONFIGURATIONS 1

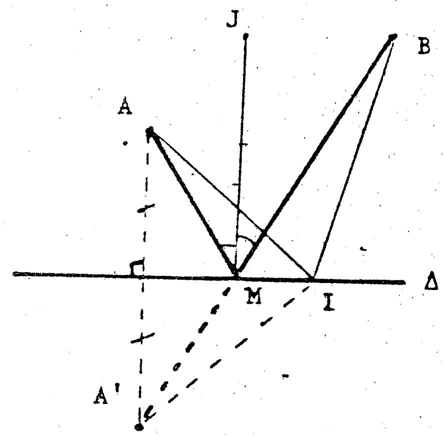


Pour démontrer que le point I, intersection de la médiatrice de [A,B] et de l'arc $\widehat{AB}$, maximise MA + MB, il suffit de montrer que pour tout point M de l'arc $\widehat{AB}$, distinct de I, on a: MA + MB < IA + IB.

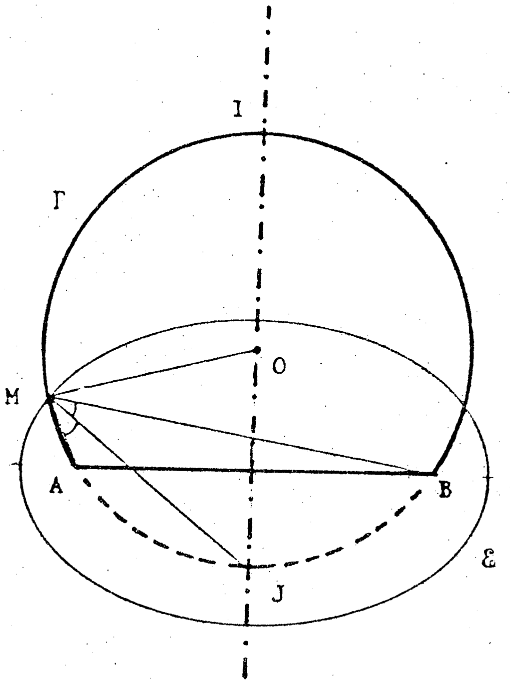
Considérons le point J diamétralement opposé au point I, la droite (MJ) est la bissectrice des demi-droites [MA) et [MB).

D'après la configuration ci-contre, on a:

MA + MB < IA + IB.



Ainsi, lorsque le point M décrit l'arc $\widehat{AB}$, le réel <u>MA + MB est maximum pour M = I,</u> et seulement dans ce cas.



La démonstration qui suit fait intervenir un régionnement du plan à l'aide des lignes de niveau de l'application $M \longmapsto MA + MB$.

Etant donné un réel k strictement supérieur à AB, la ligne de niveau k de cette application est l'ellipse ℰ de foyers A et B, ensemble des points M du plan tels que $MA + MB = k$.

Ceci étant rappelé, commençons par éliminer les cas M = A et M = B qui ne sont pas, de façon évidente, des solutions du problème.
Considérons maintenant un point M de $\widehat{AB}$ autre que A et B.
MA + MB est maximum si et seulement si aucun point de l'arc $\widehat{AB}$ n'est extérieur à l'ellipse ℰ de foyers A et B passant par M, ce qui équivaut à dire qu'au point M, l'arc $\widehat{AB}$ et l'ellipse ℰ ont même normale (ou même tangente).

On sait que:

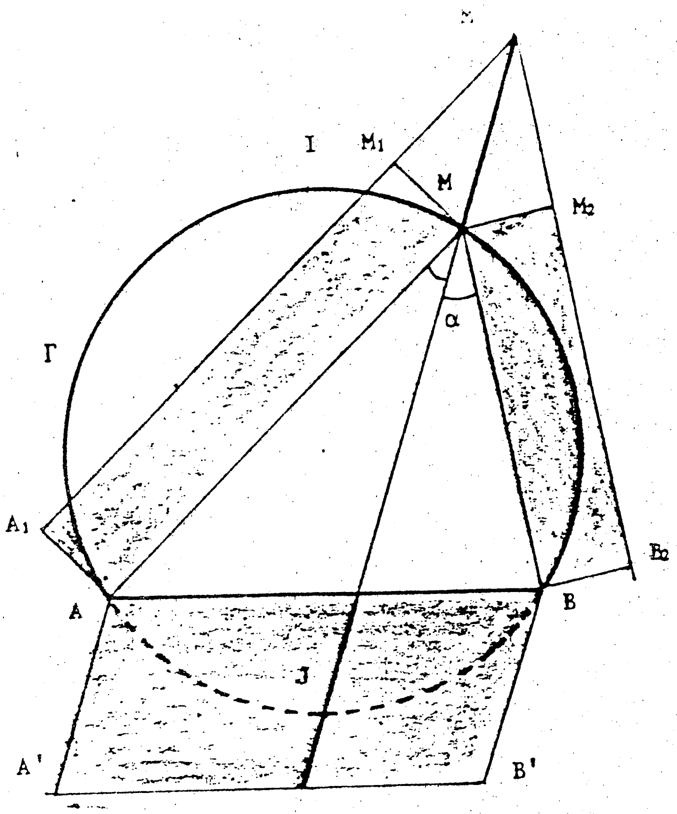
- la normale en M à l'arc $\widehat{AB}$ est la droite (MO).
- la normale en M à l'ellipse ℰ est la bissectrice (MJ) des demi-droites [MA) et [MB).

<u>Donc MA + MB est maximum</u> si et seulement si les droites (MO) et (MJ) sont confondues, autrement dit <u>si et seulement si M est le point de l'arc $\widehat{AB}$ équidistant de A et B.</u>

4

UTILISATION DES AIRES 1

UTILISATION DU NUMÉRIQUE



On notera $\overline{MNPQR}$ l'aire de la figure déterminée par la ligne polygonale fermée MNPQRM.

Traçons à l'extérieur du triangle AMB sur les côtés [A,M] et [B,M] des rectangles AMM_1A_1 et BMM_2B_2 tels que $AA_1 = BB_2 = 1$.
Les droites (A_1M_1) et (B_2M_2) se coupent en M' sur la bissectrice de l'angle $\widehat{AMB}$.
Celle-ci coupe l'arc $\widehat{AB}$ ne contenant pas I en son milieu J.
On construit alors A' et B' tels que $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{M'M}$.
Le vecteur $\overrightarrow{M'M}$ a une norme constante lorsque M varie sur l'arc $\widehat{AIB}$: $M'M = \frac{1}{\sin \alpha}$.

On a d'après le théorème "de Pythagore généralisé*": $MA \times 1 + MB \times 1 = \overline{AA'B'B}$
Puisque $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{M'M}$ l'aire du parallélogramme AA'B'B est maximum lorsque $\overrightarrow{AA'}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$, et donc lorsque (MJ) est orthogonale à (AB).

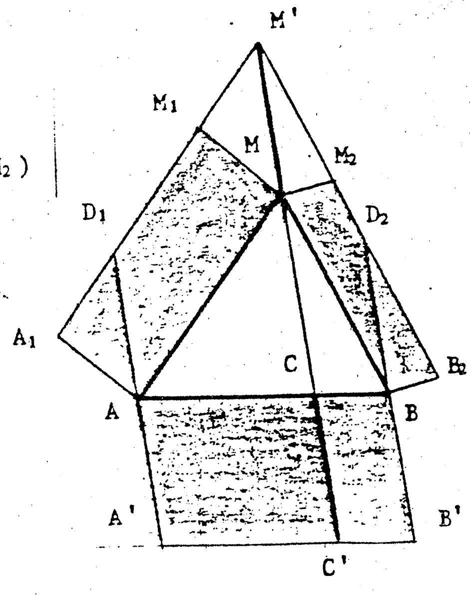
Ainsi MA + MB est maximum lorsque M = I et seulement dans ce cas.

---

*

Données:
- MAA_1M_1 est un parallélogramme
- MBB_2M_2 est un parallélogramme
- M' intersection des droites (A_1M_1) et (B_2M_2)
- $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{M'M}$
- AA'B'B est un parallélogramme

Conclusion: $\overline{MAA_1M_1} + \overline{MBB_2M_2} = \overline{AA'B'B}$



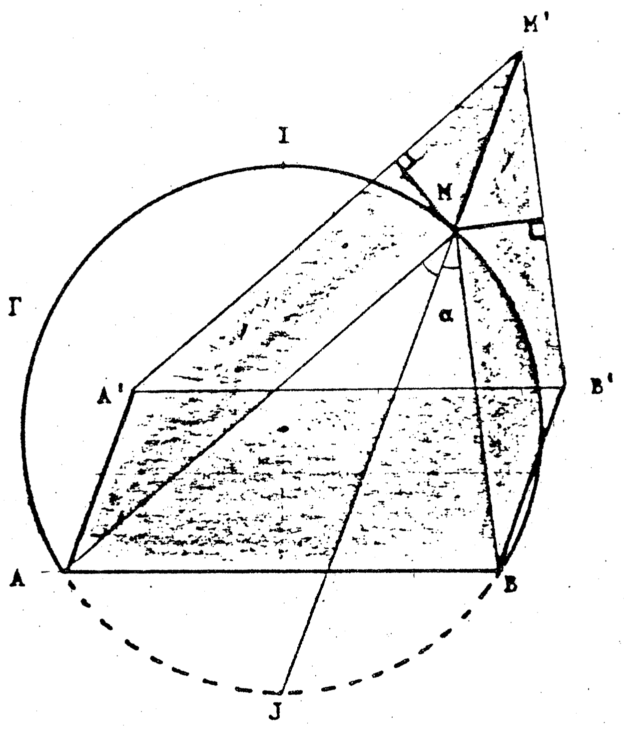
Démonstration: $\overline{ACC'A'} = \overline{AD_1M'M} = \overline{MAA_1M_1}$
$\overline{BCC'B'} = \overline{BD_2M'M} = \overline{MBB_2M_2}$

En ajoutant membre à membre: $\overline{AA'B'B} = \overline{MAA_1M_1} + \overline{MBB_2M_2}$

4

UTILISATION DU NUMÉRIQUE

UTILISATION D'AIRES 2



Comme dans la solution précédente on utilise une aire associée à la longueur MA + MB, la configuration des trois parallélogrammes*, la bissectrice de l'angle $\widehat{AMB}$.

Traçons à l'extérieur du triangle AMB et à une distance égale à 1, deux parallèles aux côtés (AM) et (BM). Elles se coupent en M' sur la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{AMB}$. Celle-ci coupe l'arc $\widehat{AB}$ ne contenant pas I en son milieu J.

On construit encore A' et B' de façon à avoir $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{MM'}$.

Le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a une norme constante lorsque M varie sur l'arc $\widehat{AIB}$: $MM' = \dfrac{1}{\sin\alpha}$

On a $MA + MB = \overline{AA'M'M} + \overline{MM'B'B}$,

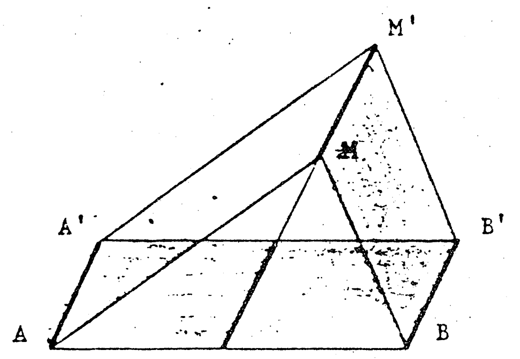
et par conséquent: $MA + MB = \overline{AA'B'B}$

Puisque $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{MM'}$, l'aire du parallélogramme AA'B'B est maximum lorsque $\overrightarrow{AA'}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et donc lorsque (MJ) est orthogonal à (AB).

Ainsi MA + MB est maximum lorsque M = I et seulement dans ce cas.

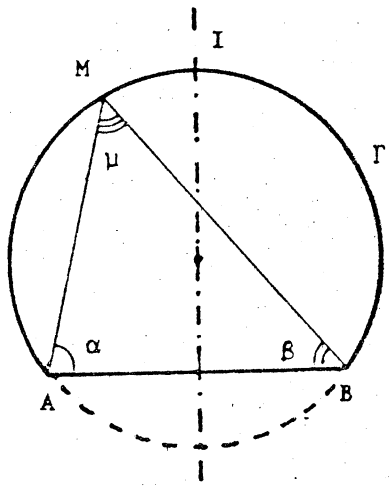
---

*



$\overline{AA'M'M} + \overline{MM'B'B} = \overline{AA'B'B}$

5 UTILISATION DU CALCUL TRIGONOMÉTRIQUE



M étant un point de l'arc $\widehat{AIB}$ autre que A et B désignons par α, β et μ les réels de l'intervalle $]0,\pi[$, mesures respectives en radians des angles géométriques $\widehat{MAB}$, $\widehat{ABM}$ et $\widehat{AMB}$, et par R le rayon du cercle Γ support de l'arc $\widehat{AIB}$.

Nous avons alors:

$$\frac{MA}{\sin\alpha} = \frac{MB}{\sin\beta} = \frac{MA + MB}{\sin\alpha + \sin\beta} = 2R$$

On en déduit:

$$\begin{aligned} MA + MB &= 2R(\sin\alpha + \sin\beta) \\ &= 4R\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \\ &= 4R\sin\frac{\pi-\mu}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}. \end{aligned}$$

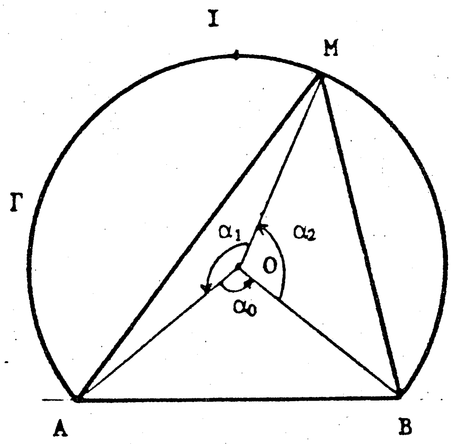
où $\left[\begin{array}{l} 4R\sin\frac{\pi-\mu}{2} \text{ est un réel constant puisque } \mu \text{ est constant lorsque M décrit l'arc } \widehat{AB}-\{A,B\} \\ \frac{\alpha-\beta}{2} \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\text{ du fait que } 0 < \alpha < \pi \text{ et } 0 < \beta < \pi. \end{array}\right.$

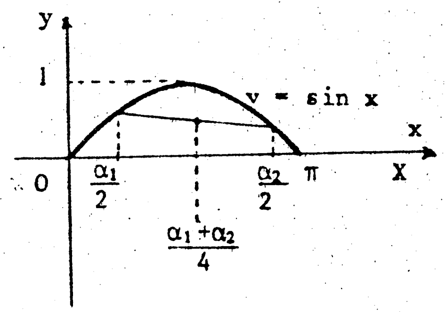
Par suite MA + MB est maximum lorsque $\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ est maximum ce qui se produit lorsque $\alpha = \beta$ et uniquement dans ce cas.

Le triangle AMB est alors isocèle en M.

Ainsi lorsque M décrit l'arc $\widehat{AB}$, le réel <u>MA + MB est maximum si et seulement si M est équidistant de A et B.</u>

6 UTILISATION DE LA CONVEXITÉ D'UNE FONCTION





On choisit $M \neq I$. Les nombres α_0, α_1 et α_2 désignent les mesures des angles $(\widehat{\vec{OA},\vec{OB}})$, $(\widehat{\vec{OM},\vec{OA}})$ et $(\widehat{\vec{OB},\vec{OM}})$ de façon que $\frac{\alpha_0}{2}$, $\frac{\alpha_1}{2}$ et $\frac{\alpha_2}{2}$ soient éléments de $[0,\pi]$,

On obtient (voir solution):

$$MA + MB = 2R(\sin\frac{\alpha_1}{2} + \sin\frac{\alpha_2}{2})$$

Or la fonction (-sin) est une fonction strictement convexe sur $[0,\pi]$ / sin, y est concave.

Ainsi $\frac{1}{2}(\sin\frac{\alpha_1}{2} + \sin\frac{\alpha_2}{2}) < \sin(\frac{1}{2}\times\frac{\alpha_1}{2} + \frac{1}{2}\times\frac{\alpha_2}{2})$ (voir figure)

Ce qui s'écrit $\frac{1}{2}(\frac{MA + MB}{2R}) < \sin\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{4}$

Or $IA = IB = 2R\times\sin\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{4}$ entraîne $MA + MB < IA + IB$ et la conclusion

<u>MA + MB est maximum pour M = I et seulement dans ce cas.</u>

<u>Généralisation</u>: (Cf Bulletin APMEP n° 361 page 631 - Décembre 1987, J.M. Didry)

$MA + MB + AB = 2R(\sin\frac{\alpha_0}{2} + \sin\frac{\alpha_1}{2} + \sin\frac{\alpha_2}{2})$ avec $\frac{\alpha_0}{2} + \frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{2} = \pi$.

On a $\frac{1}{3}\times(\sin\frac{\alpha_0}{2} + \sin\frac{\alpha_1}{2} + \sin\frac{\alpha_2}{2}) \leqslant \sin(\frac{1}{3}\times\frac{\alpha_0}{2} + \frac{1}{3}\times\frac{\alpha_1}{2} + \frac{1}{3}\times\frac{\alpha_2}{2})$

d'où l'on déduit $MA + MB + AB \leqslant 3\times2R\sin\frac{\pi}{3}$ et la propriété : le maximum du périmètre d'un triangle inscrit dans un cercle est celui du triangle équilatéral.

COMMENTAIRES

Les outils utilisés dans les précédentes solutions de ce problème d'optimisation sont ordinairement utilisés dans une classe de Terminale C.

Il n'est cependant pas nécessaire d'atteindre cette classe pour aborder un tel problème. On peut par exemple l'insérer dans un problème plus vaste de façon que le résultat visé se présente comme un corollaire d'une propriété dont la démonstration est à la portée de la classe concernée.

L'énoncé suivant illustre ce point de vue:

> L'objet de ce problème est de maximiser la somme des distances d'un point d'un arc de cercle aux extrémités de cet arc.
>
> Soit un arc de cercle $\overset{\frown}{AB}$, I le point de cet arc équidistant de A et B.
>
> 1° Montrer que, pour tout point M de $\overset{\frown}{AB}$ autre que A, B et I on a:
> $$MA + MB < IA + IB$$
> Indication: on pourra faire intervenir le symétrique B' de B par rapport à la droite (MI).
>
> 2° En déduire qu'il existe un point M et un seul de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ tel que MA + MB soit maximum. Quel est ce point?

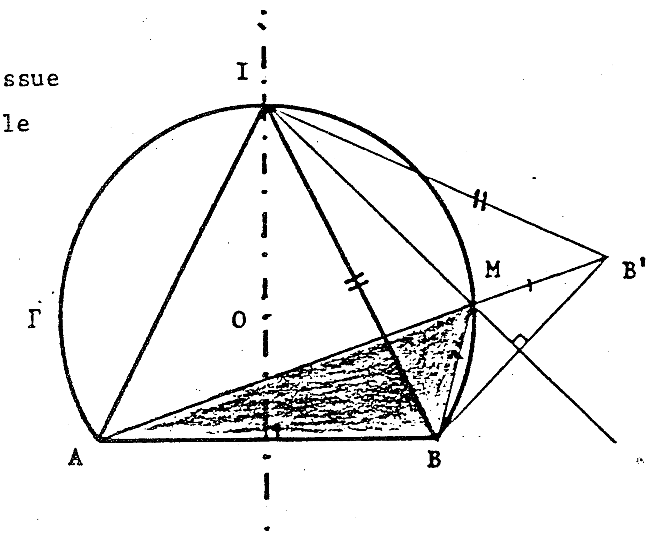
Solution:

La droite (MI) est la bissectrice extérieure issue de M du triangle AMB. On est alors assuré que le point M appartient au segment [A,B'].

Il s'ensuit que:

- d'une part $MA + MB = MA + MB' = AB'$
- d'autre part $IA + IB = IA + IB' > AB'$

(Inégalité triangulaire)



Ainsi pour tout point M de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ autre que A, B et I on a:

$$IA + IB > MA + MB$$

Comme par ailleurs $IA + IB > AB$ (Inégalité triangulaire)

l'inégalité précédente est encore vérifiée pour M = A et M = B.

Finalement, pour tout point M de $\overset{\frown}{AB}$ autre que I, on a:

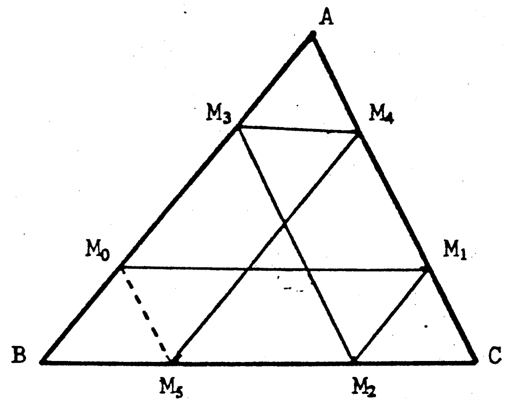
$$IA + IB > MA + MB.$$

Donc MA + MB est maximum lorsque M = I et seulement dans ce cas

V - LA "TOURNIQUETTE"

LE PROBLÈME ABORDÉ

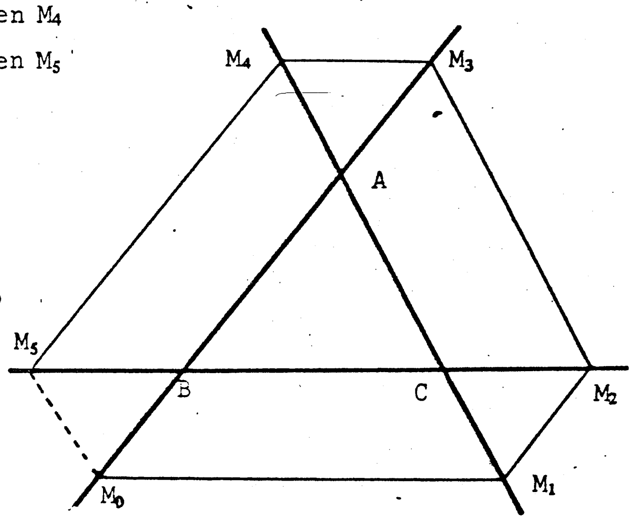
Il s'agit de montrer qu'étant donné un triangle, si on prend un point sur l'un de ses côtés et si on "tourne" parallèlement aux côtés du triangle, on "boucle en deux tours", ou, si l'on préfère, on "boucle au sixième coup".



LA CONFIGURATION

Soit un triangle ABC. On choisit un point M_0 sur (AB).

- la parallèle à (BC) passant par M_0 coupe (CA) en M_1
- la parallèle à (AB) passant par M_1 coupe (BC) en M_2
- la parallèle à (CA) passant par M_2 coupe (AB) en M_3
- la parallèle à (BC) passant par M_3 coupe (CA) en M_4
- la parallèle à (AB) passant par M_4 coupe (BC) en M_5



PROPRIÉTÉ À DÉMONTRER

La parallèle à (CA) passant par M_5 coupe (AB) en M_0

POINTS DE MÉTHODE

Il suffit de montrer:

- soit que $(M_0M_5)//(AC)$,
- soit, si on appelle M_6 l'intersection de (AB) et de la parallèle à (CA) passant par M_5, que $M_6 = M_0$.

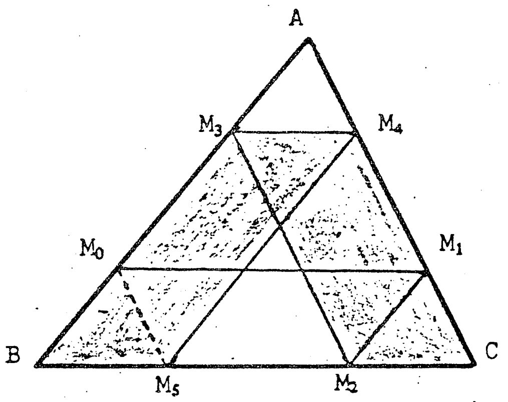
DIRECTIONS DE RECHERCHE

La figure étant constituée de parallélogrammes (aplatis ou non), elle suggère l'utilisation:

- des configurations ①
- de l'outil vectoriel. ②
- de transformations: projections et symétries axiales ③ ④
- du barycentre. ⑤
- du calcul analytique: ⑥

Remarque : Les démonstrations ne sont pas simplifiées si l'on cherche à démontrer que $[M_0, M_3]$ et [A, B] ont le même milieu.

① UTILISATION DES CONFIGURATIONS



$BM_3M_4M_5$ est un parallélogramme car ses côtés opposés sont parallèles;
$M_2M_3M_4C$ est un parallélogramme car ses côtés opposés sont parallèles;
donc d'après le théorème des trois parallélogrammes,

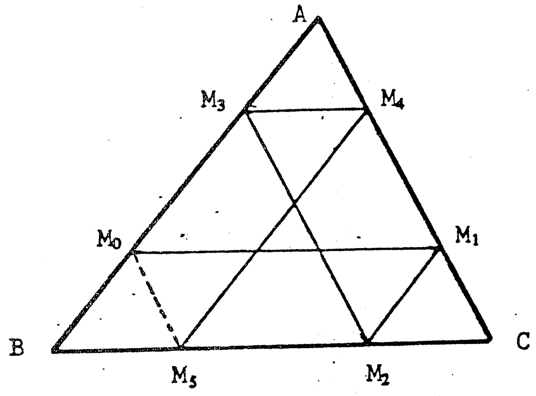
M_5BM_2C est un parallélogramme.

D'autre part,
$M_0BM_2M_1$ est un parallélogramme car ses côtés opposés sont parallèles.

Ainsi d'après le théorème des trois parallélogrammes appliqué aux parallélogrammes M_5BM_2C et $M_0BM_2M_1$, $CM_5M_0M_1$ est un parallélogramme.

Donc les droites (M_0M_5) et (AC) sont parallèles.

② UTILISATION DE L'OUTIL VECTORIEL



1ère solution: Caractérisation vectorielle du parallélogramme

$BM_3M_4M_5$ est un parallélogramme car ses côtés opposés sont parallèles, donc $\overrightarrow{BM_5} = \overrightarrow{M_3M_4}$, ①

$M_2M_3M_4C$ est un parallélogramme car ses côtés opposés sont parallèles, donc $\overrightarrow{M_3M_4} = \overrightarrow{M_2C}$, ②

donc d'après ① et ② : $\overrightarrow{BM_5} = \overrightarrow{M_2C}$. ③

$BM_0M_1M_2$ est un parallélogramme car ses côtés opposés sont parallèles, donc $\overrightarrow{M_0B} = \overrightarrow{M_1M_2}$. ④

En ajoutant membre à membre les égalités ③ et ④, on obtient:

$$\overrightarrow{M_0B} + \overrightarrow{BM_5} = \overrightarrow{M_1M_2} + \overrightarrow{M_2C}$$

donc $\overrightarrow{M_0M_5} = \overrightarrow{M_1C}$

donc $(M_0M_5) \parallel (AC)$.

2ème solution: Colinéarité de vecteurs

Les quadrilatères $BM_0M_1M_2$ et $BM_3M_4M_5$ ayant leurs côtés opposés parallèles sont des parallélogrammes,

donc $\overrightarrow{BM_1} = \overrightarrow{BM_0} + \overrightarrow{BM_2}$ et $\overrightarrow{BM_4} = \overrightarrow{BM_3} + \overrightarrow{BM_5}$

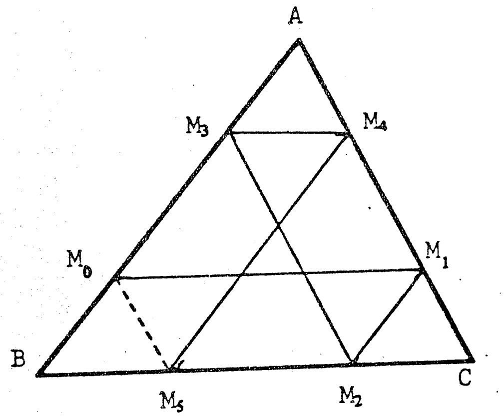
En soustrayant membre à membre ces deux égalités, on obtient:

$\overrightarrow{BM_4} - \overrightarrow{BM_1} = \overrightarrow{BM_3} + \overrightarrow{BM_5} - \overrightarrow{BM_0} - \overrightarrow{BM_2}$,

donc $\overrightarrow{M_1M_4} = \overrightarrow{M_2M_3} + \overrightarrow{M_0M_5}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{M_2M_3}$ et $\overrightarrow{M_1M_4}$ sont colinéaires à $\overrightarrow{AC}$; par conséquent il en est de même de $\overrightarrow{M_0M_5}$, ainsi on a: $(M_0M_5) \parallel (AC)$.

(3) UTILISATION DES PROJECTIONS



Propriété utilisée: la projection conserve le coefficient de colinéarité de deux vecteurs.

Les points A, B et M_0 étant alignés, il existe un réel α tel que: $\overrightarrow{AM_0} = \alpha \cdot \overrightarrow{AB}$.

En projetant sur (AC) parallélement à (BC) on obtient: -------- $\overrightarrow{AM_1} = \alpha \cdot \overrightarrow{AC}$.

En projetant sur (CB) parallélement à (AB) on obtient: ------- $\overrightarrow{BM_2} = \alpha \cdot \overrightarrow{BC}$.

En projetant sur (BA) parallélement à (CA) on obtient: ------- $\overrightarrow{BM_3} = \alpha \cdot \overrightarrow{BA}$.

En projetant sur (AC) parallélement à (BC) on obtient: ------- $\overrightarrow{CM_4} = \alpha \cdot \overrightarrow{CA}$.

En projetant sur (CB) parallélement à (AB) on obtient: ------- $\overrightarrow{CM_5} = \alpha \cdot \overrightarrow{CB}$.

En projetant sur (BA) parallélement à (CA) on obtient: -------- $\overrightarrow{AM_6} = \alpha \cdot \overrightarrow{AB}$.

Ainsi $\overrightarrow{AM_6} = \overrightarrow{AM_0}$, donc $M_6 = M_0$.

(4) UTILISATION DE LA SYMÉTRIE AXIALE

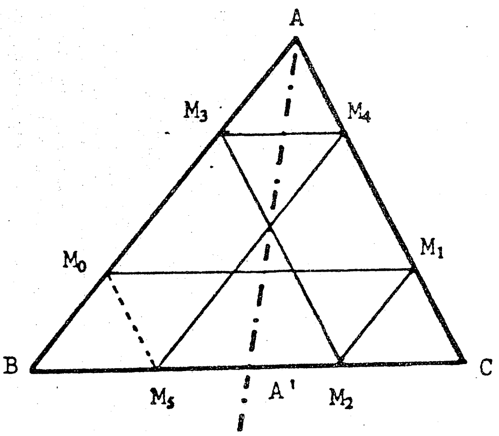


figure 1

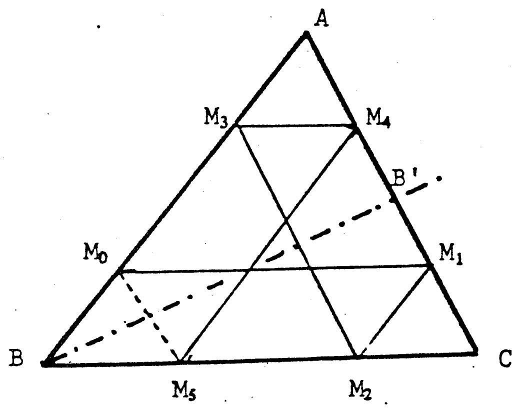


figure 2

__1ère solution__: figure 1.

A' désigne le milieu de [B,C].

Considérons la symétrie par rapport à la droite (AA') et de direction (BC).

Cette symétrie échange les droites (AB) et (AC).

Les droites (M_0M_1) et (M_3M_4) étant parallèles à (BC), les points M_0 et M_1 d'une part, et les points M_3 et M_4 d'autre part, sont symétriques.

La symétrie oblique conservant le parallélisme, le symétrique de la droite (M_2M_3) qui est parallèle à (AC) est la droite passant par M_4 symétrique de M_3 et parallèle à la droite (AB) symétrique de la droite (AC), c'est donc la droite (M_4M_5) ; en conséquence M_5 et M_2 sont symétriques

Les droites (M_0M_5) et (M_1M_2) sont donc symétriques; or les droites (M_1M_2) et (AB) étant parallèles, leurs symétriques le sont également, donc

__les droites (M_0M_5) et (AC) sont parallèles__.

__2ème solution__: figure 2.

B' désigne le milieu de [A,C].

Considérons la symétrie par rapport à la droite (BB') de direction (AC).

Cette symétrie échange les droites (BA) et (BC).

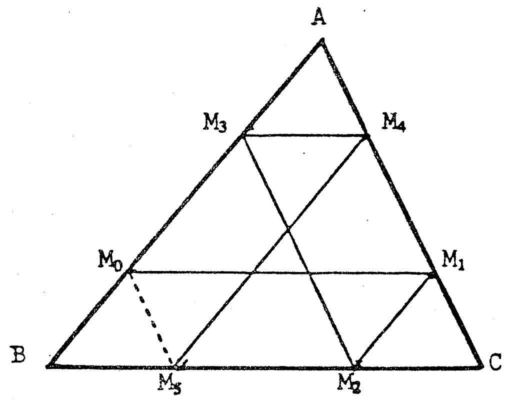
La droite (M_2M_3) étant parallèle à (AC), les points M_2 et M_3 sont symétriques.

La symétrie oblique conservant le parallélisme, les droites (M_3M_4) et (M_1M_2) sont donc symétriques, donc les points M_1 et M_4 sont symétriques.

La symétrie oblique conservant le parallélisme, les droites (M_0M_1) et (M_4M_5) sont symétriques, donc les points M_0 et M_5 sont symétriques.

__Les droites (M_0M_5) et (AC) sont donc parallèles.__

⑤ UTILISATION DU BARYCENTRE



<u>Propriété utilisée</u>: le barycentre se conserve par projection

Les points A, B et M_0 étant alignés, il existe deux réels α et β tels que

M_0 soit le barycentre de $\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline \alpha & \beta \end{array}$.

M_1 barycentre de $\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline \alpha & \beta \end{array}$, projection de (AB) sur (AC) parallèlement à (BC)

M_2 barycentre de $\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline \alpha & \beta \end{array}$, projection de (CA) sur (CB) parallèlement à (AB)

M_3 barycentre de $\begin{array}{c|c} B & A \\ \hline \alpha & \beta \end{array}$, projection de (BC) sur (BA) parallèlement à (CA)

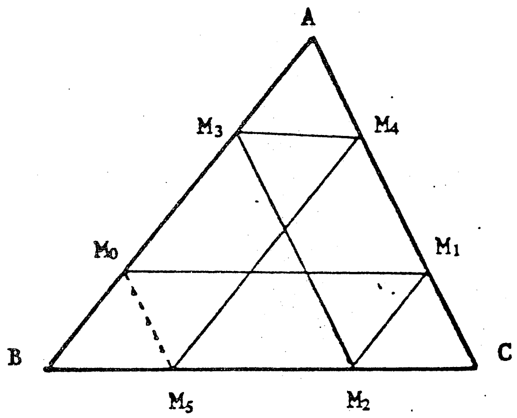
M_4 barycentre de $\begin{array}{c|c} C & A \\ \hline \alpha & \beta \end{array}$, projection de (AB) sur (AC) parallèlement à (BC)

M_5 barycentre de $\begin{array}{c|c} C & B \\ \hline \alpha & \beta \end{array}$, projection de (CA) sur (CB) parallèlement à (AB)

M_6 barycentre de $\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline \alpha & \beta \end{array}$. projection de (BC) sur (BA) parallèlement à (CA)

Ainsi <u>$M_6 = M_0$</u> .

⑥ UTILISATION DU CALCUL ANALYTIQUE



Considérons le repère (B,C,A).

L'équation de la droite (AC) est $x + y = 1$.

On pose $M_0 \left| \begin{array}{l} 0 \\ a \end{array} \right.$, on obtient successivement pour les coordonnées des points M_i :

$M_1 \left| \begin{array}{l} 1 - a \\ a \end{array} \right.$	Les points M_0 et M_1 ont même ordonnée et M_1 est sur la droite (AC)
$M_2 \left| \begin{array}{l} 1 - a \\ 0 \end{array} \right.$	Les points M_2 et M_1 ont même abscisse.
$M_3 \left| \begin{array}{l} 0 \\ 1 - a \end{array} \right.$	L'ordonnée de M_3 est égale à l'abscisse de M_2.
$M_4 \left| \begin{array}{l} a \\ 1 - a \end{array} \right.$	Les points M_4 et M_3 ont même ordonnée et M_4 est sur la droite (AC).
$M_5 \left| \begin{array}{l} a \\ 0 \end{array} \right.$	Les points M_5 et M_4 ont même abscisse.
$M_6 \left| \begin{array}{l} 0 \\ a \end{array} \right.$	L'ordonnée de M_6 est égale à l'abscisse de M_5.

Donc $\underline{M_6 = M_0}$.

PROLONGEMENTS.

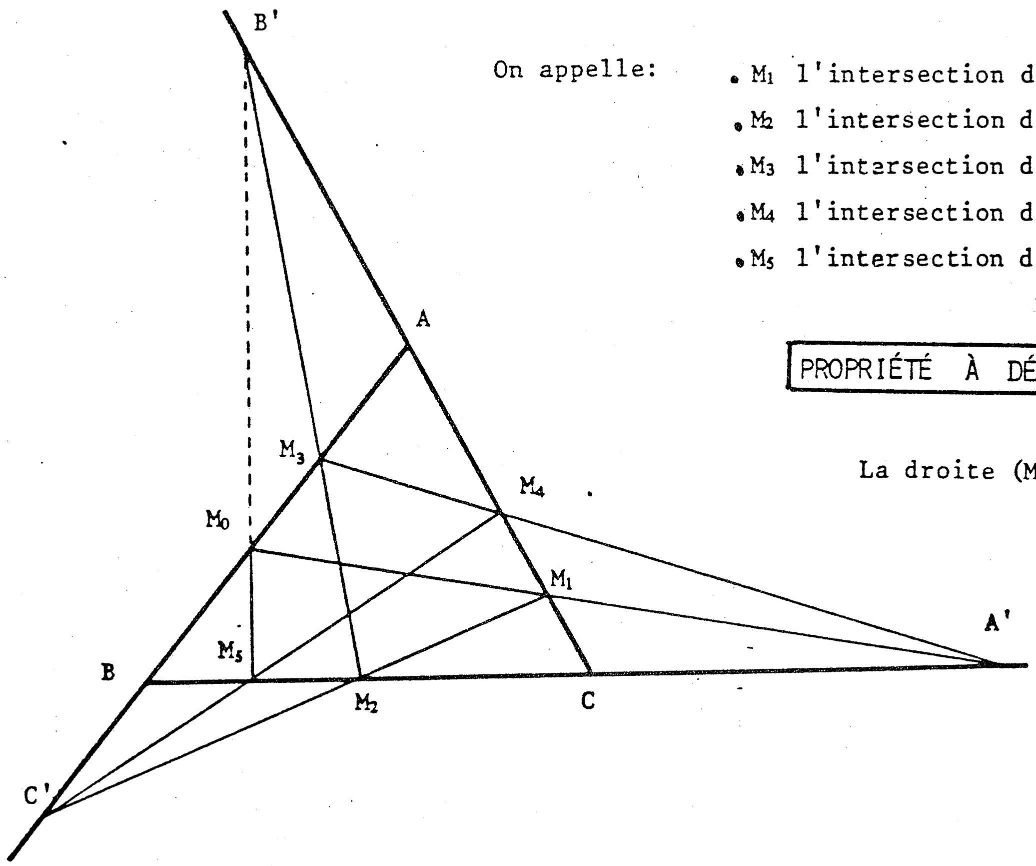
Nous avons eu l'idée de généraliser le problème de la "tourniquette" dans le le triangle.

LE PROBLÈME ABORDÉ

Il s'agit de montrer que, étant donné un triangle dans un plan projectif, si on prend un point sur l'un de ses côtés et si on tourne comme cela est précisé dans la configuration suivante, on boucle.

CONFIGURATION

Soit un triangle ABC et trois points A', B' et C' situés sur (BC), (CA) et (AB). On considère un point M_0 sur (AB).



On appelle:

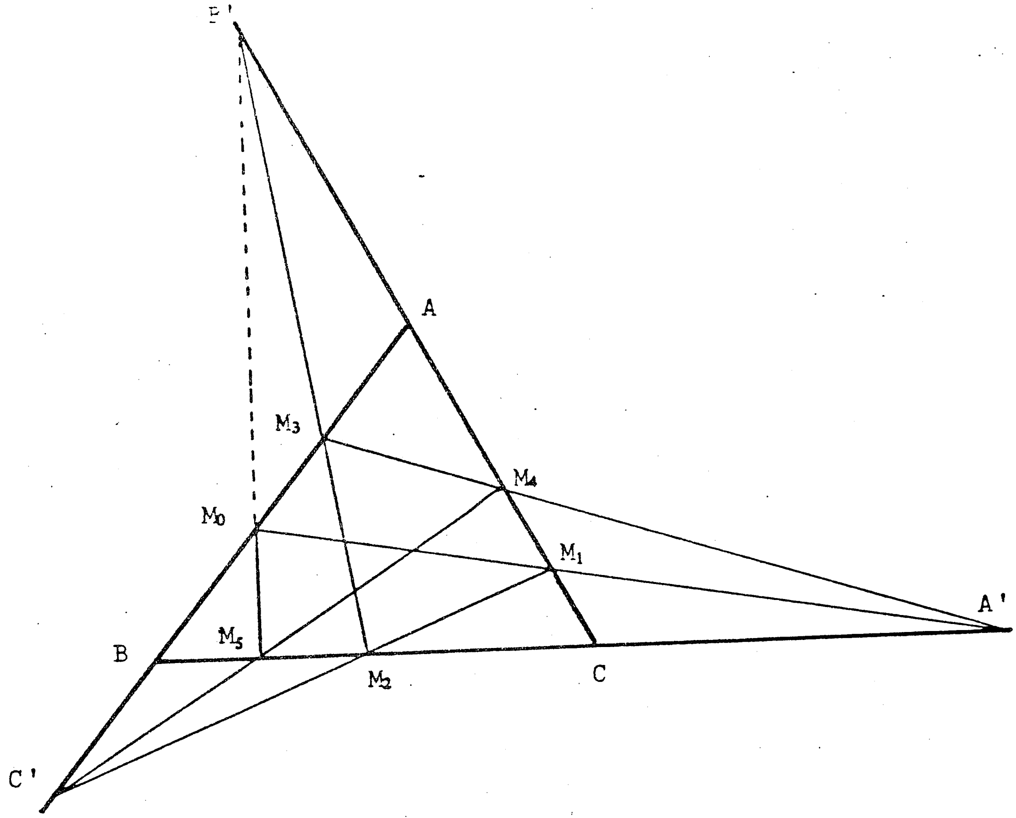
- M_1 l'intersection de (M_0A') et (AC)
- M_2 l'intersection de (M_1C') et (BC)
- M_3 l'intersection de (M_2B') et (AB)
- M_4 l'intersection de (M_3A') et (AC)
- M_5 l'intersection de (M_4C') et (BC)

PROPRIÉTÉ À DÉMONTRER

La droite (M_5B') passe par M_0.

COMMENTAIRES

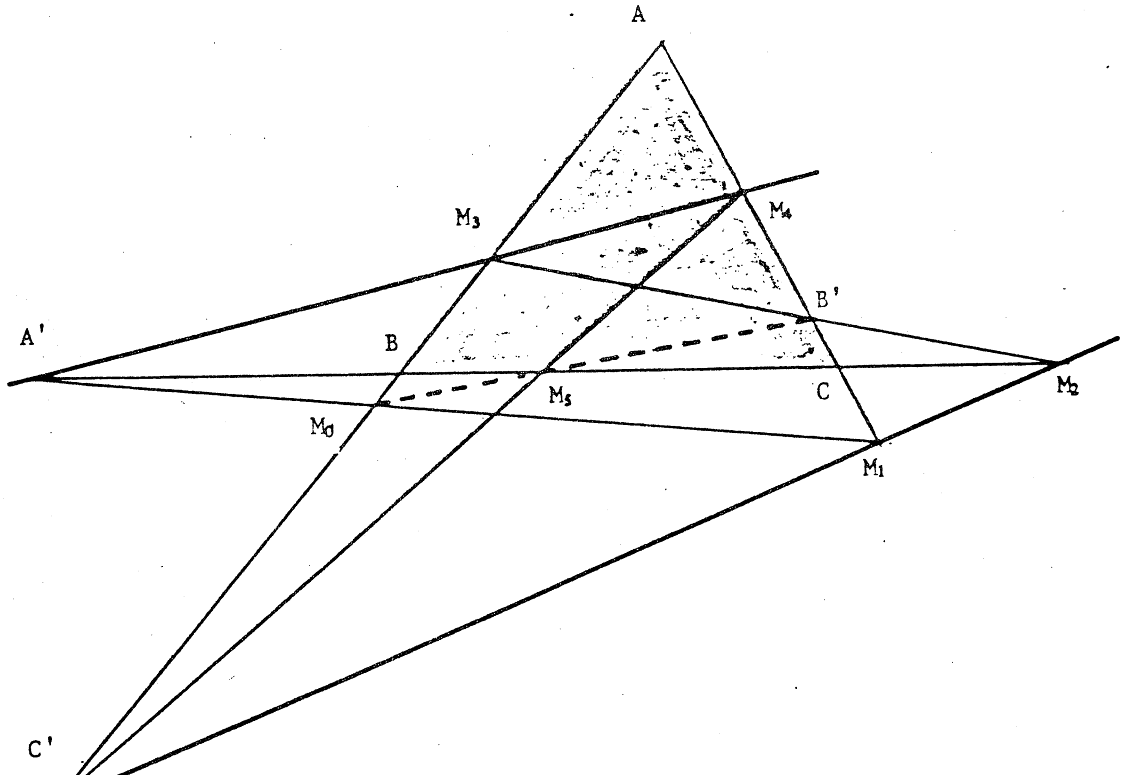
Les solutions 2 3 4 proposent l'utilisation du théorème de Ménélaüs sous des formulations différentes: traditionnelles 2, barycentrique 3, et en termes d'homothéties 4. Elles ont pour cadre un plan affine issu du plan projectif précédent en enlevant un droite ne passant par aucun des points de la figure. Ainsi, l'existence des points M_0, M_1, M_2, M_3, M_4 et M_5 n'est pas à mettre en cause.

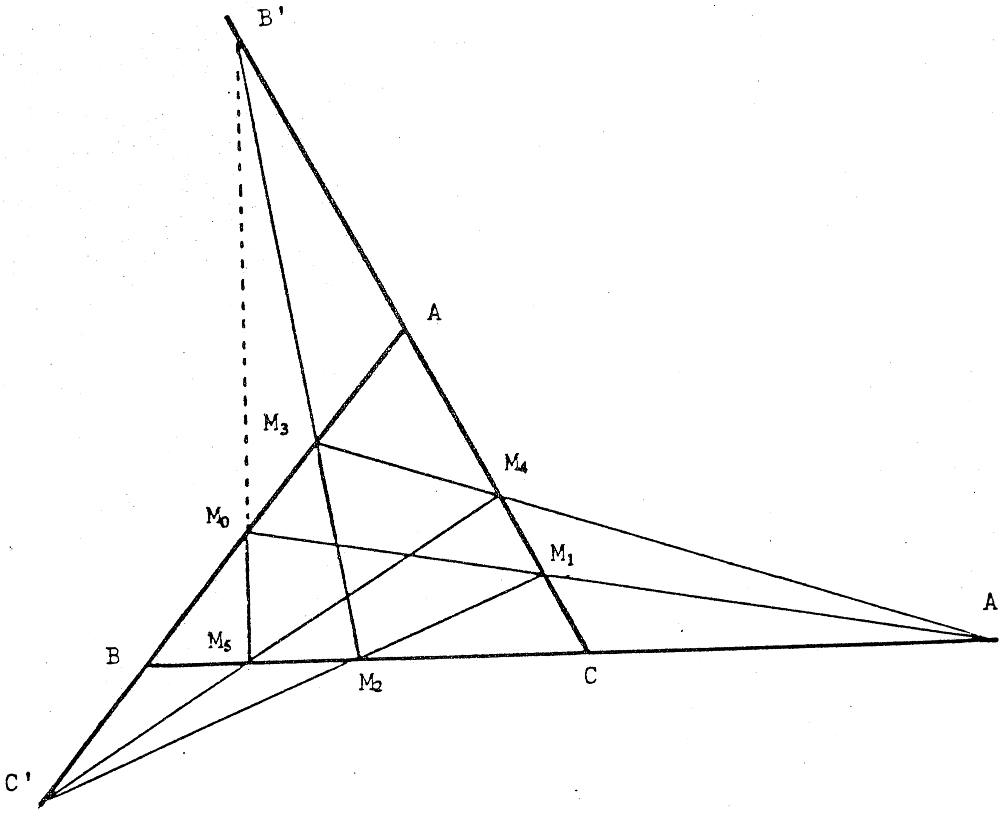


1ère solution: montrons que M_0, M_5 et B' sont alignés.

Si vous avez beaucoup d'imagination et êtes très perspicace vous pouvez constater que ceci n'est rien d'autre que le théorème de Pappus appliqué aux points M_1, M_2 et C' d'une part et M_3, M_4 et A' d'autre part.

Afin de vous convaincre, voici un autre dessin qui rend plus explicite une telle affirmation.



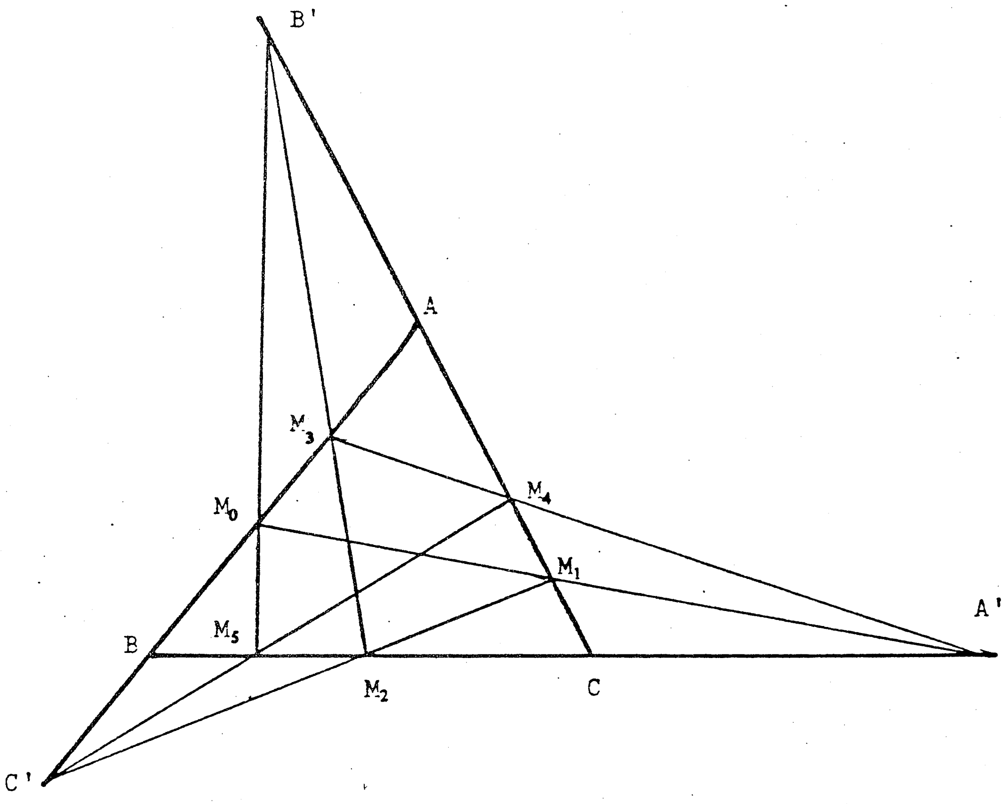


<u>2ème solution</u>: on utilise la forme barycentrique du théorème de Ménélaüs.
(Document à paraître, I REM de Bordeaux, Groupe de Géométrie) .

Barycentre de	A	B	C	
M_0	α	β		
M_1	α		γ	
M_2		β'	γ	
M_3	α'	β'		
A'		$-\beta\dfrac{\beta'}{\beta}$	$\gamma\dfrac{\beta'}{\beta}$	En utilisant M_0 et M_1
C'	$\alpha\dfrac{\alpha'}{\alpha}$	$-\beta'\dfrac{\alpha'}{\alpha}$		En utilisant M_1 et M_2
M_4	α'		$\gamma\dfrac{\beta'}{\beta}$	En utilisant A' et M_3
M_5		$\beta'\dfrac{\alpha'}{\alpha}$	$\gamma\dfrac{\beta'}{\beta}$	En utilisant C' et M_4
B'	$-\alpha'\dfrac{\beta'}{\beta}$		$\gamma\dfrac{\beta'}{\beta}$	En utilisant M_2 et M_3

En utilisant M_0, M_5 et B' il reste à montrer que $\beta'\dfrac{\alpha'}{\alpha}$ et $\alpha'\dfrac{\beta'}{\beta}$ sont proportionnels à β et α, ce qui est évident en multipliant chacun de ces deux nombres par $\dfrac{\alpha\beta}{\alpha'\beta'}$.

Ainsi, <u>M_0, M_5 et B' sont alignés.</u>



3ème solution:

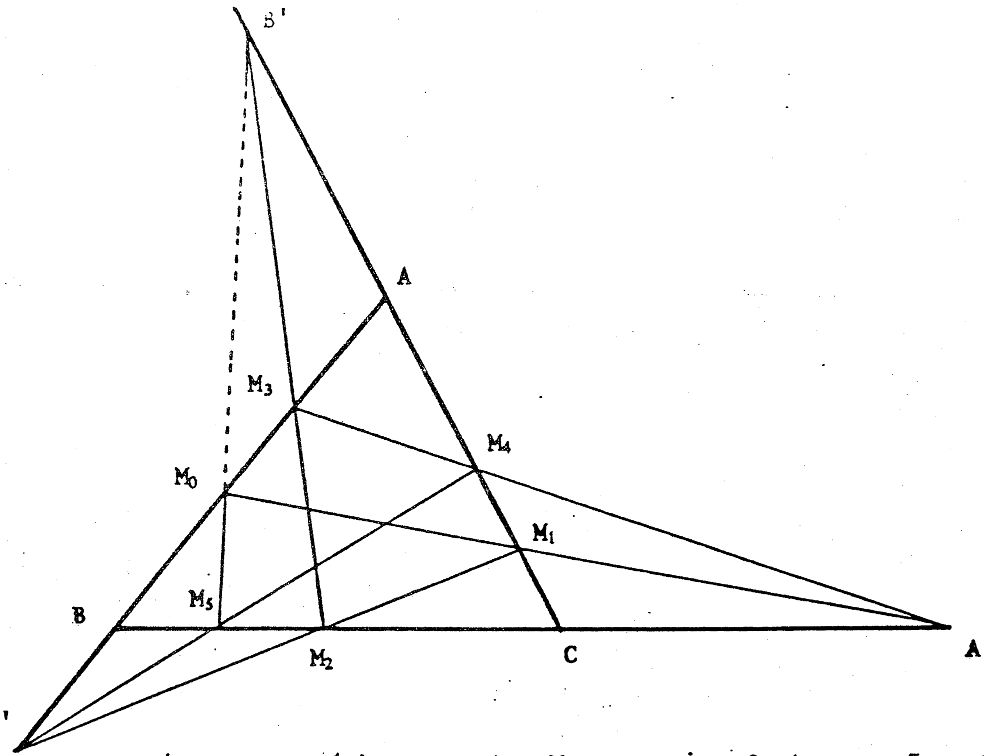
Nous allons appliquer cinq fois le théorème de Ménélaüs dans le triangle ABC.

Transversale	Relation de Ménélaüs
$(M_0 M_1 A')$	$\frac{\overline{M_0B}}{\overline{M_0A}} \times \frac{\overline{M_1A}}{\overline{M_1C}} \times \frac{\overline{A'C}}{\overline{A'B}} = 1$
$(M_3 M_4 A')$	$\frac{\overline{M_3A}}{\overline{M_3B}} \times \frac{\overline{M_4C}}{\overline{M_4A}} \times \frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} = 1$
$(M_1 M_2 C')$	$\frac{\overline{M_1C}}{\overline{M_1A}} \times \frac{\overline{M_2B}}{\overline{M_2C}} \times \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = 1$
$(M_4 M_5 C')$	$\frac{\overline{M_4A}}{\overline{M_4C}} \times \frac{\overline{M_5C}}{\overline{M_5B}} \times \frac{\overline{C'B}}{\overline{C'A}} = 1$
$(M_2 M_3 B')$	$\frac{\overline{M_2C}}{\overline{M_2B}} \times \frac{\overline{M_3B}}{\overline{M_3A}} \times \frac{\overline{B'A}}{\overline{B'C}} = 1$

En multipliant membre à membre ces cinq égalités on obtient après simplifications:

$$\frac{\overline{M_0B}}{\overline{M_0A}} \times \frac{\overline{M_5C}}{\overline{M_5B}} \times \frac{\overline{B'A}}{\overline{B'C}} = 1 ,$$

ce qui prouve, toujours d'après le théorème de Ménélaüs, que les points M_0, M_5 et B' sont alignés.



4ème solution: on notera h_i l'homothétie de centre M_i pour $i = 0, 1, \ldots, 5$

Ainsi :

$B \xmapsto{h_0} A \xmapsto{h_1} C$

$B \xmapsto{h_3} A \xmapsto{h_4} C$

On a: $h_1 \circ h_0 = h_4 \circ h_3$ ①

. En effet chacune de ces composées d'homothéties est l'homothétie de centre A'qui transforme B en C

$A \xmapsto{h_1} C \xmapsto{h_2} B$

$A \xmapsto{h_4} C \xmapsto{h_5} B$

On a: $h_2 \circ h_1 = h_5 \circ h_4$ ②

En effet chacune de ces composées d'homothéties est l'homothétie de centre C' qui transforme A en C

$C \xmapsto{h_2} B \xmapsto{h_3} A$

$C \xmapsto{h_5} B \xmapsto{h_0} A$

Nous allons démontrer que $h_3 \circ h_2 = h_0 \circ h_5$

Remarquons tout d'abord que $h_3 \circ h_2$ est l'homothétie de centre B' qui transforme C en A.

D'après ① : $h_0 = h_1^{-1} \circ h_4 \circ h_3$ ③ , d'après ② : $h_5 = h_2 \circ h_1 \circ h_4^{-1}$ ④

On pose : $h = h_1^{-1} \circ h_4 \circ h_3 \circ h_2 \circ h_1 \circ h_4^{-1}$

D'après ③ et ④ on a: $h_0 \circ h_5 = h$

On a: $C \xmapsto{h_4^{-1}} A \xmapsto{h_1} C \xmapsto{h_2} B \xmapsto{h_3} A \xmapsto{h_4} C \xmapsto{h_1^{-1}} A$, ainsi h transforme C en A.

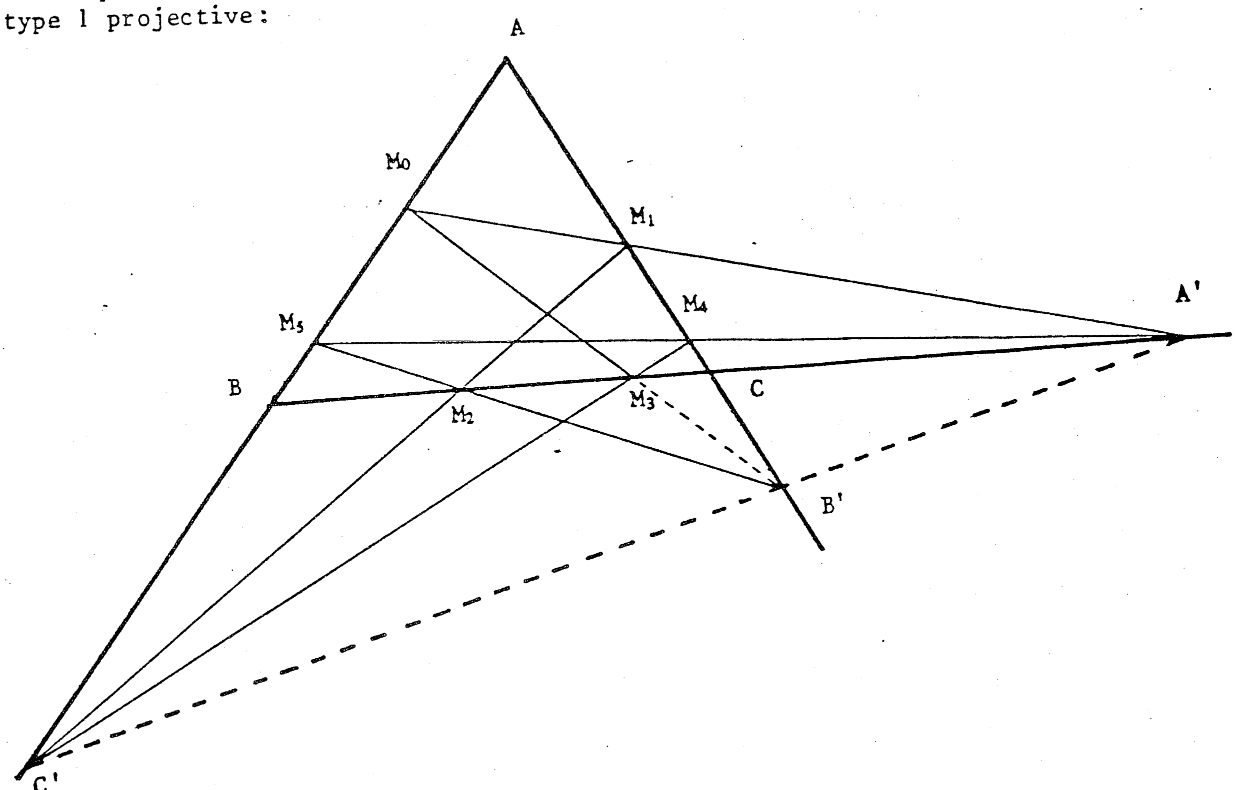
Le rapport d'homothétie de h est celui de $h_3 \circ h_2$, ainsi $h_0 \circ h_5$ est l'homothétie de centre B' qui transforme C en A donc M_0, M_5 et B' sont alignés.

AUTRES ASPECTS DE LA TOURNIQUETTE

I - PRÉAMBULE

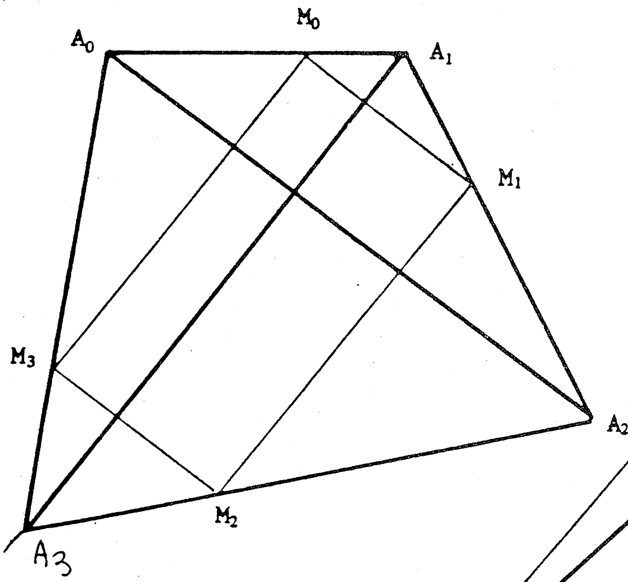
Nous allons montrer uniquement à travers des figures les différents aspects de la tourniquette.

Nous avons considéré deux types de tourniquettes: celle du début (Type 1) et celle des prolongements (Type 2). Il faut noter que la tourniquette de type 2 n'est pas la tourniquette de type 1 (projective). Voici la figure correspondant à la tourniquette de type 1 projective:

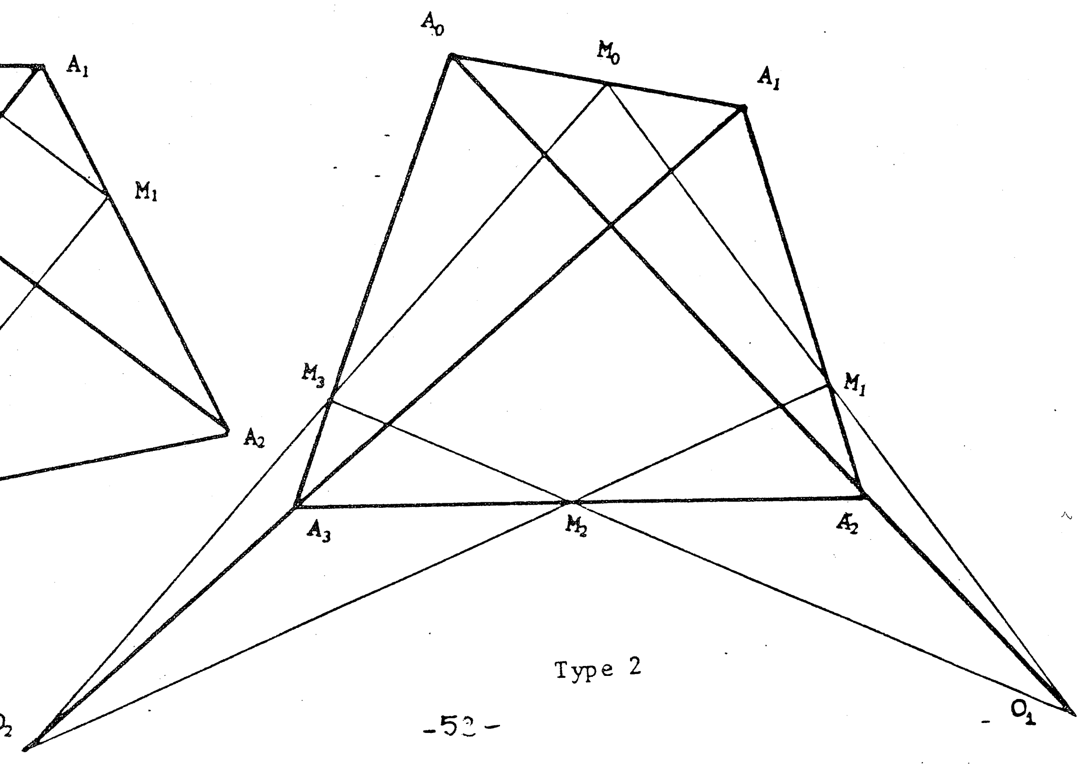


II - TOURNIQUETTE SUR UN POLYGONE

1-Quadrilatère



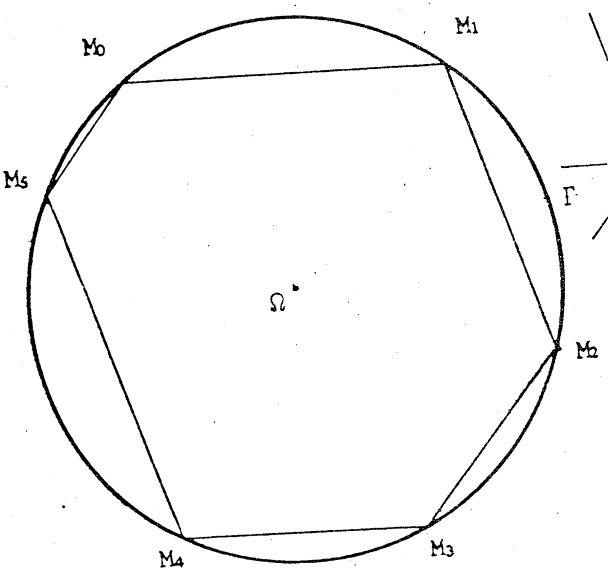
Type 1



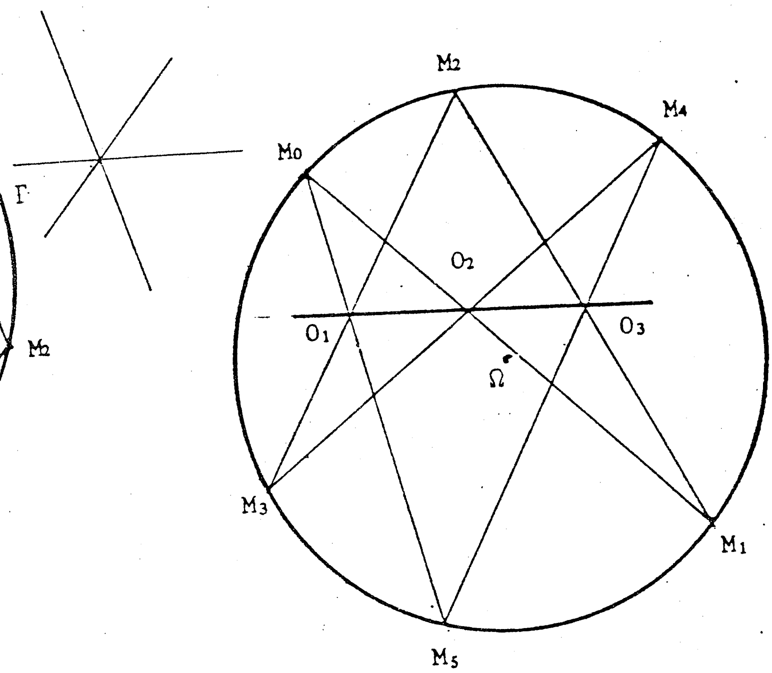
Type 2

III - TOURNIQUETTE SUR UNE CONIQUE

1-Cercle

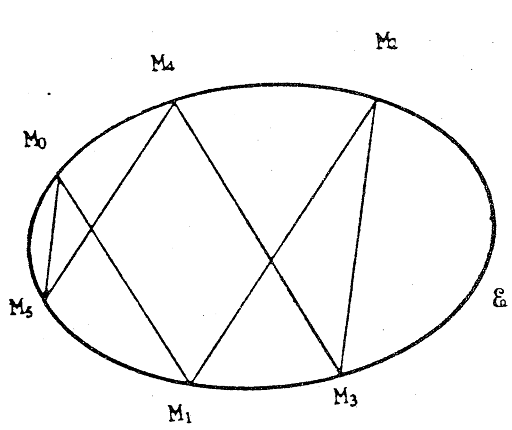


Type 1

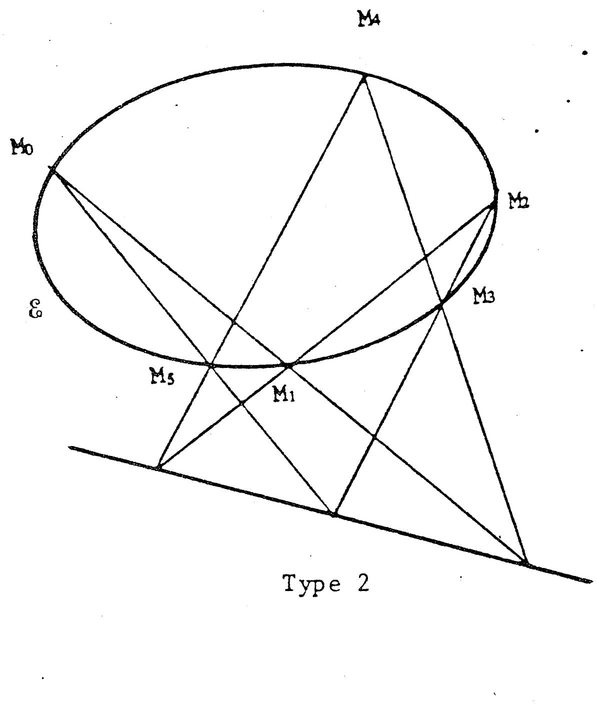


Type 2

2-Ellipse

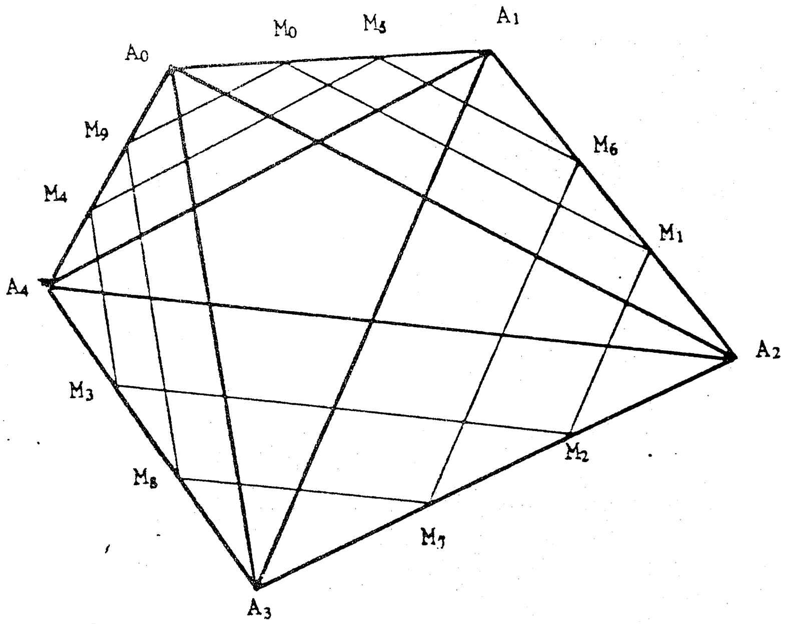


Type 1

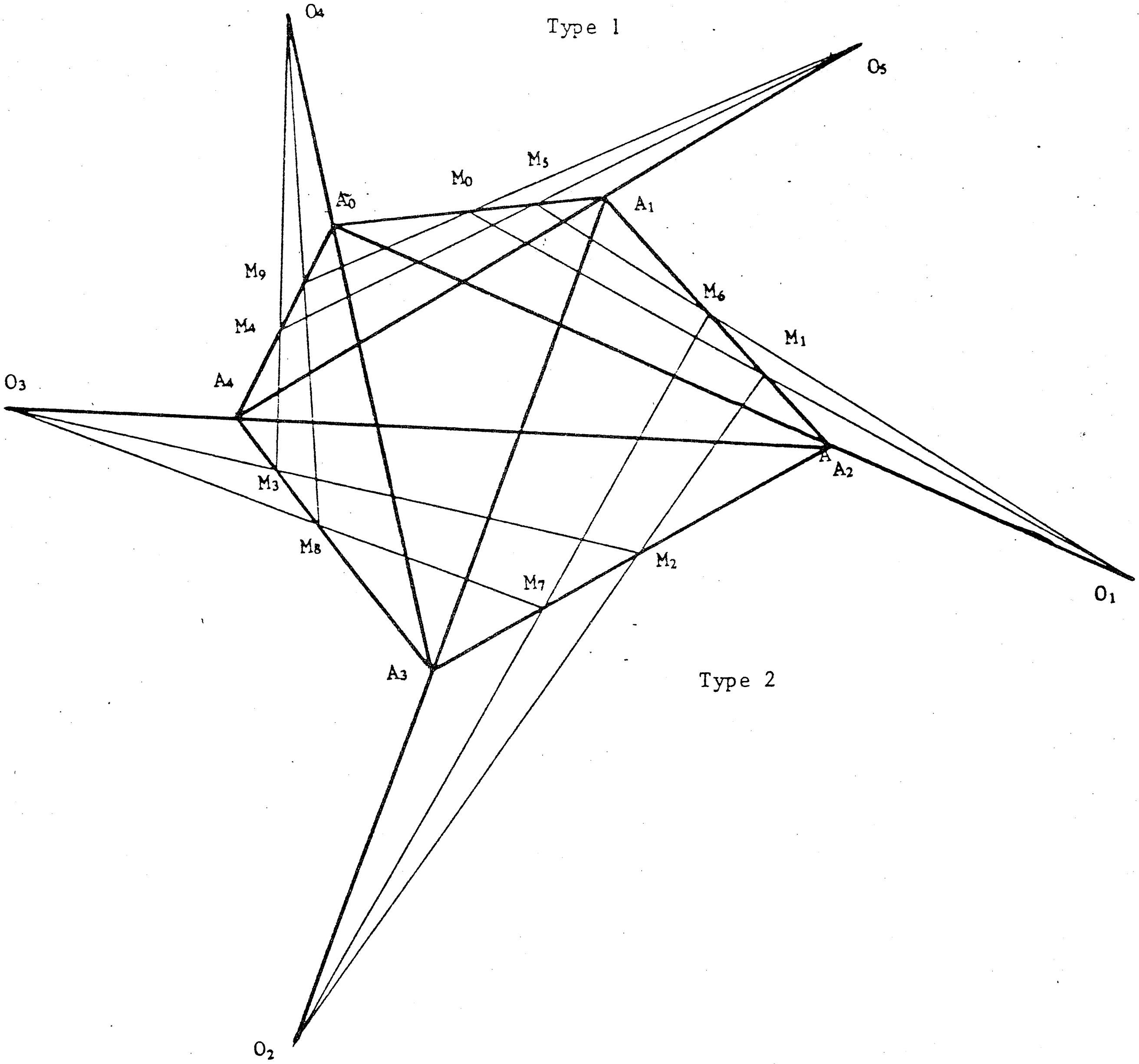


Type 2

2. Pentagone



Type 1

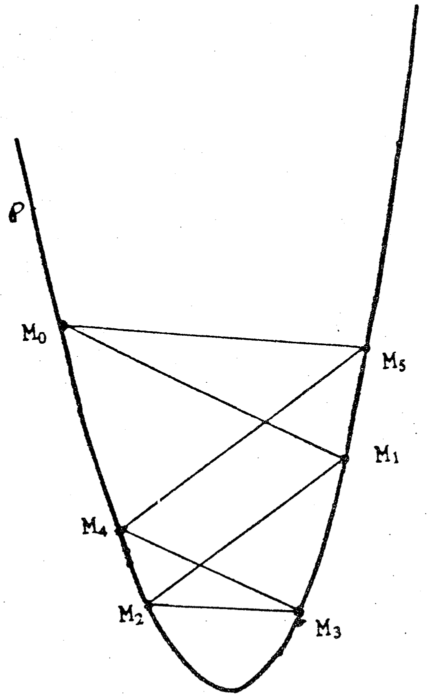


Type 2

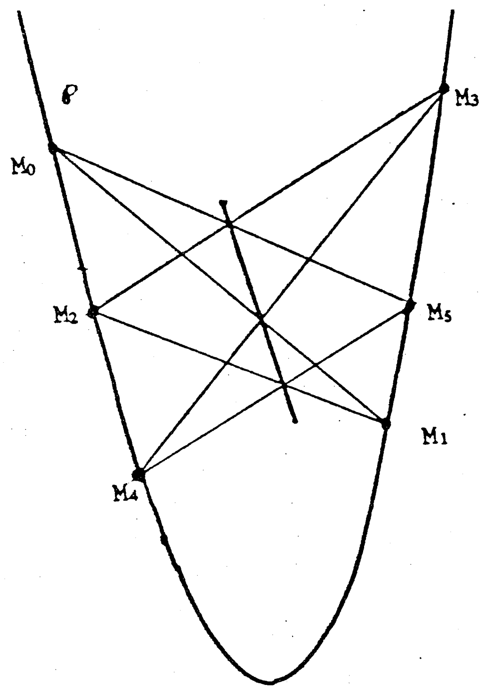
3-Polygone ayant n côtés:

Nous laissons le soin au lecteur de faire des figures et d'imaginer ce qui se passe selon que n est pair ou impair.

3-Parabole

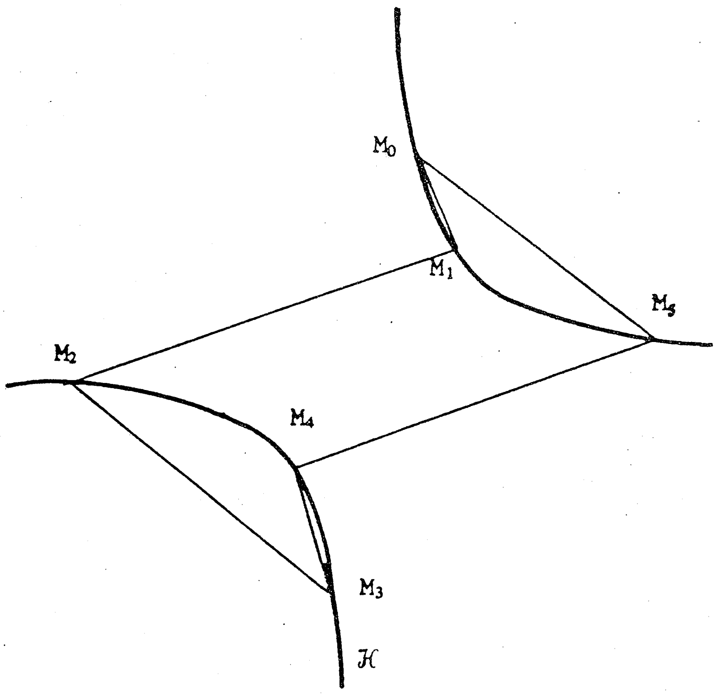


Type 2

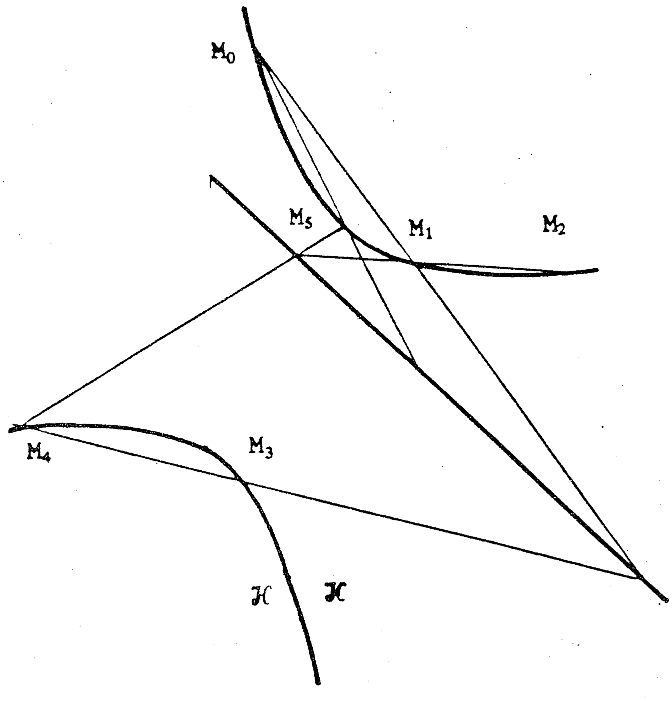


Type 1

4-Hyperbole

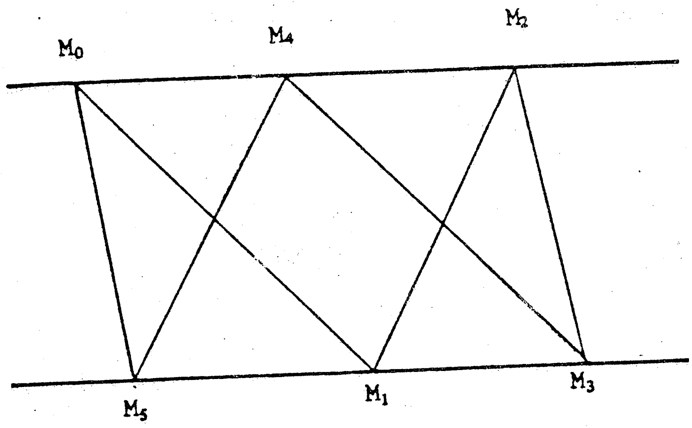


Type 1

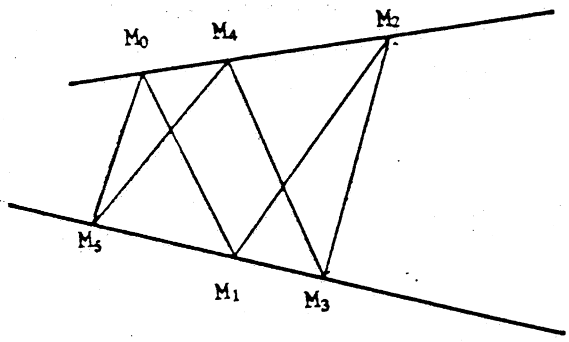


Type 2

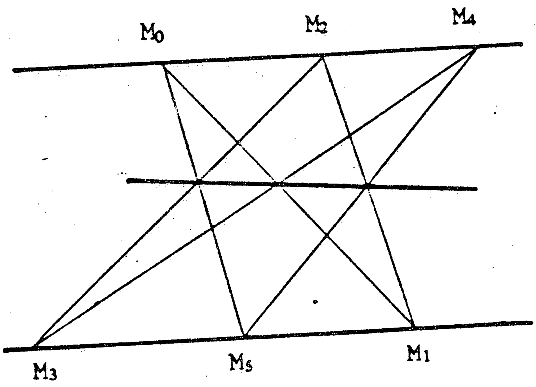
5-Deux droites



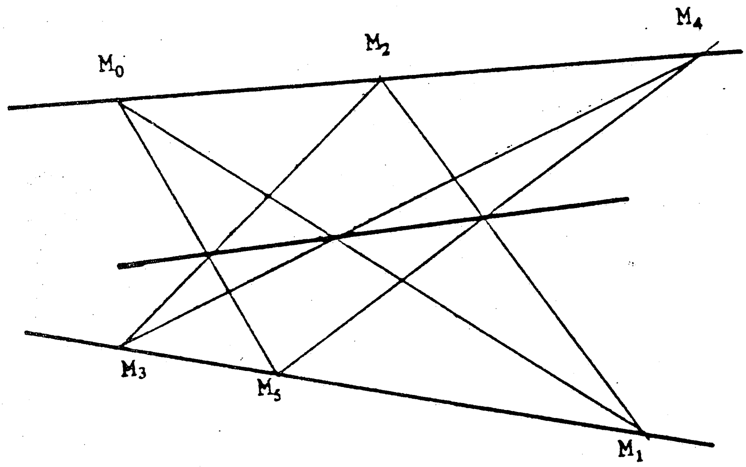
Type 1



Type 1



Type 2



Type 2

BIBLIOGRAPHIE

[1] Objectifs de l'Enseignement de la Géométrie au Lycée,
Jean MARION, Jean-Louis OVAERT, IREM de Marseille, mars 1984.

[2] Groupe de Géométrie IV
IREM de Lille 1986.

[3] Géométrie en quatrième, groupe de Géométrie,
IREM de Bordeaux, 1981.

[4] Activités Géométriques en Classe de Seconde,
Groupe de Géométrie, IREM de Bordeaux, 1981.

[5] Exercices de Géométrie pour la classe de Quatrième,
Groupe de Géométrie, IREM de Bordeaux, 1982.

[6] Des problèmes de Géométrie Plane issus d'un tétraèdre,
Groupe de Géométrie, IREM de Bordeaux, 1987.

***
*