I.R.E.M. de BORDEAUX

GÉOMÉTRIE EN QUATRIÈME

Second tirage 1984

1981

SOMMAIRE

INTRODUCTION GENERALE

Le présent fascicule est un document à l'usage des maîtres. Il est né d'une réaction à l'insuffisance du "je dessine et je constate" et donc de la nécessité de développer un fondement théorique solide sous-jacent au cours de 4ème même si les tenants et aboutissants ne sont pas à exposer devant les élèves.

Il doit permettre au maître de suivre une "ligne cohérente" à partir des acquis de l'élève de 5ème (distance-orthogonalité-parallélisme).

L'élève de 4ème, de nos jours, est sensible à un aspect dynamique et non contemplatif de la géométrie. C'est pour cette raison que nous avons abordé ce programme avec la symétrie orthogonale par rapport à une droite dont la connotation naturelle est le pliage d'une feuille de papier, ce qui lui confère l'aspect dynamique noté ci-dessus.

Ce document se veut conforme au programme actuel de 4ème. Toutefois, le chapitre droite graduée à été omis. Il se situerait naturellement à la suite du chapitre I "Distance", mais ne trouverait pas son utilisation dans la suite du document tel qu'il est conçu. Cependant, le professeur pourra le traiter pour permettre une certaine incursion des nombres en géométrie.

Il en est de même pour le chapitre "repérage dans le plan" qui ne peut être justifié que grâce à la forme complète du théorème de Thalès. Son étude pourra donc être reportée en 3ème.

Aucun chapitre ne comporte la description d'activités préparatoires relatives à la notion traitée. (Considérations pratiques ou physiques, manipulations liées à des problèmes concrets). Elles constituent la préparation de séquences pédagogiques réservées au maître. Cet exposé ne prétend induire aucun type de pédagogie et laisse au maître l'initiative pour l'organisation de son travail.

Les démonstrations sont le plus souvent complètes. Pour certaines un canevas a été seulement présenté. (En particulier lorsqu'il était fait appel à des axiomes non explicités). Seules les plus simples ou qui paraîtraient les plus formatrices pourront donner lieu à des activités déductives pour les élèves.

.../...

CHAPITRE 0

PLAN - DROITES

INTRODUCTION

Le but de ce chapitre est de mettre en place tous les éléments de base et de préciser le vocabulaire déjà acquis : plan, points, droites, parallélisme. Les élèves ont déjà rencontré des droites perpendiculaires à l'école primaire et en 6ème et 5ème. Il nous a paru préférable (??) de partir de l'acquis des élèves pour bien mettre en place la relation d'orthogonalité et ses propriétés dès le début de l'année plutôt que de faire une présentation (moins naturelle pour les élèves à notre avis !) à partir de la médiatrice et de la symétrie orthogonale.

PLAN - DROITES

I - INTRODUCTION

. *$\mathbb{P}$ un ensemble appelé* *plan* *dont les éléments sont appelés* *points*

. *$\mathcal{D}$ un ensemble de parties de $\mathbb{P}$ dont les éléments sont appelés* *droites* *(une droite est donc un ensemble de points)*

Le tout vérifiant :

(A1) *Une droite est une* *partie propre* *du plan*

(A2) *Par deux points distincts A et B du plan passe une droite et une seule que l'on notera (AB).*

Propriétés

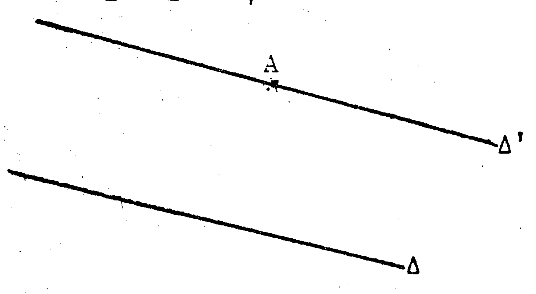
Si l'intersection de deux droites n'est pas vide, alors : soit elles sont confondues, soit leur intersection est un singleton.

Remarque :

Rien ne permet d'affirmer que l'intersection de deux droites peut être vide, cependant l'observation des "réalités" physiques nous conduit à imposer à P et à $\mathcal{D}$ de vérifier en plus.

(A3) *Soient un point A et une droite Δ ne passant pas par A.*
Il existe une droite Δ' unique passant par A et telle que

$$\Delta \cap \Delta' = \phi$$



II - PARALLELISME

1) Définition

Etant donné deux droites Δ *et* Δ'

$\Delta \,//\, \Delta'$ SSI $(\Delta = \Delta'$ *ou* $\Delta \cap \Delta' = \phi)$

$\Delta \,//\, \Delta$ *se lit* "Δ *parallèle à* Δ'"

2) Conséquences immédiates

C1 *Etant donné une droite* Δ : $\Delta \,//\, \Delta$

C2 *Etant donné deux droites* Δ *et* Δ'

Si $\Delta \,//\, \Delta'$ *alors* $\Delta' \,//\, \Delta$

Remarque :

Pour cette raison (C2) on dira plus simplement que "Δ et Δ' sont parallèles".

C3 *Si deux droites sont parallèles et ont au moins un point commun alors elles sont confondues.*

C4 *Etant donné une droite* Δ *et un point* A.
Il existe une droite Δ' *et une seule passant par* A *et parallèle à* Δ

Démonstration

1er cas : $A \notin \Delta$ Voir I - A3

2me cas : $A \in \Delta$

. La droite Δ elle-même convient car $A \in \Delta$ et $\Delta \,//\, \Delta$

. l'unicité découle de II - 2 - C3

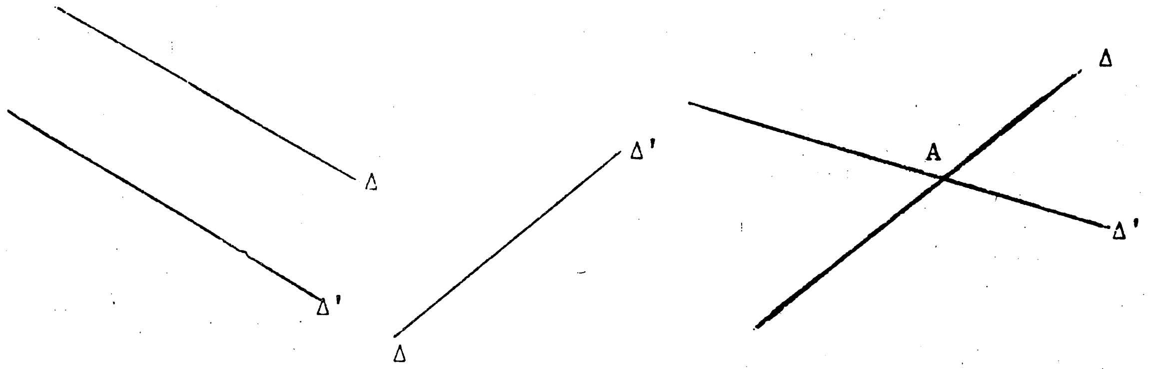
3) Positions relatives de deux droites

Lorsque deux droites ne sont pas parallèles elles sont **sécantes**.

Remarque :

L'intersection de deux droites sécantes est un singleton. Cependant par abus de langage, on dira fréquemment :"soit A l'intersection des droites Δ et Δ' "

<u>En résumé</u> : Etant donné deux droites Δ et Δ' on ne peut se trouver que dans l'un des trois cas de figures suivantes :



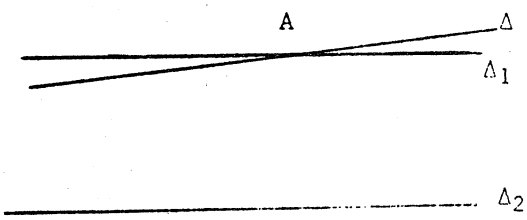
$\Delta \cap \Delta' = \phi$ $\quad$ $\Delta = \Delta'$ $\quad$ $\Delta \cap \Delta' = \{A\}$

Δ et Δ' sont parallèles $\quad$ Δ et Δ' sont sécantes

4 - <u>Théorème</u>

<u>Si</u> deux droites sont parallèles <u>alors</u> toute sécante pour l'une est sécante pour l'autre.

<u>Démonstration</u> :



$\Delta_1 // \Delta_2$

Δ et Δ_1 sécantes en A.

Δ et Δ_1 sont sécantes en A donc Δ et Δ_1 sont distinctes.

<u>Si</u> Δ et Δ_2 n'étaient pas sécantes (c'est-à-dire, si elles étaient parallèles <u>alors</u> par le point A il passerait deux droites Δ et Δ_1 parallèles à la droite Δ_2, ce qui contredirait II - 2 - C4

5) <u>Etude de $(\mathcal{D}\,;\ //)$</u> (Relation de parallélisme)

a) // *est réflexive*

cf. II - 2 - C1

b) // *est symétrique*

cf II - 2 - C2

.../...

c) // *est transitive*

c'est-à-dire $\begin{cases} \text{Etant donné trois droites } \Delta, \Delta' \text{ et } \Delta'' \\ \underline{\text{Si}} \ (\Delta \mathbin{//} \Delta' \text{ et } \Delta' \mathbin{//} \Delta'') \ \underline{\text{alors}} \ \Delta \mathbin{//} \Delta'' \end{cases}$

Démonstration

Si Δ et Δ'' n'étaient pas parallèles (c'est-à-dire si Δ et Δ'' étaient sécantes), comme Δ et Δ' sont parallèles, alors (d'après II - 4), Δ' et Δ'' seraient sécantes d'où la contradiction.

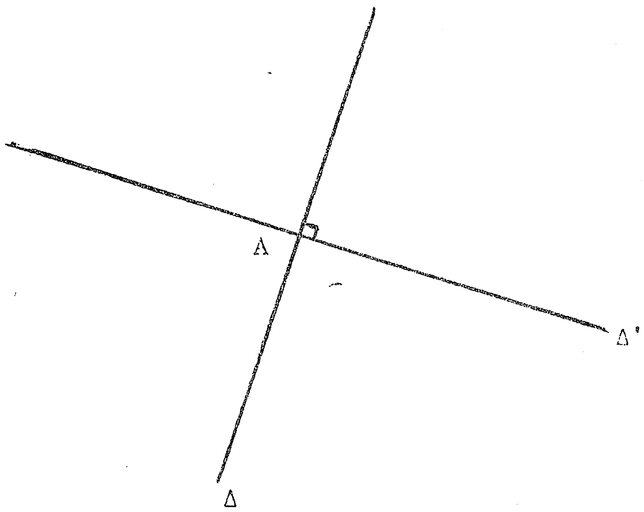
Ainsi // *est une relation d'équivalence dans* $\mathscr{D}$
Les classes d'équivalence sont appelées directions.

III - ORTHOGONALITE

Après des manipulations physiques avec l'équerre, on dégage dans l'ensemble $\mathscr{D}$ des droites du plan la relation, notée $\perp$

$\Delta \perp \Delta'$ se lit $\begin{cases} \text{"}\Delta \text{ est orthogonale à } \Delta'\text{"} \\ \text{ou} \\ \text{"}\Delta \text{ est perpendiculaire à } \Delta'\text{"} \end{cases}$

On notera sur le dessin



Cette relation $\perp$ dans l'ensemble $\mathscr{D}$ vérifie la règle suivante:

.../...

(A4) *Etant donné deux droites* Δ *et* Δ'

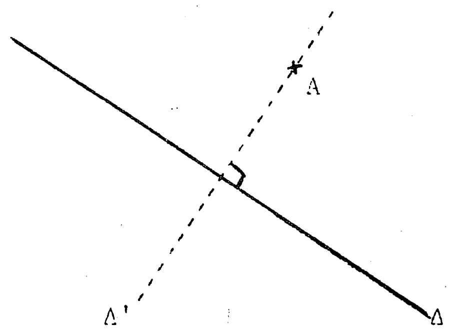
1) *Si* $\Delta \perp \Delta'$ *alors* $\Delta' \perp \Delta$

   Pour cette raison, on dira plus simplement que "Δ *et* Δ' *sont orthogonales" ou que "*Δ *et* Δ' *sont perpendiculaires".*

2) *Si deux droites sont orthogonales, alors elles sont sécantes.*

3) *Etant donné une droite* Δ *et un point* A, *il existe une droite* Δ' *unique telle que :*

$$A \in \Delta' \quad \text{et} \quad \Delta \perp \Delta'$$

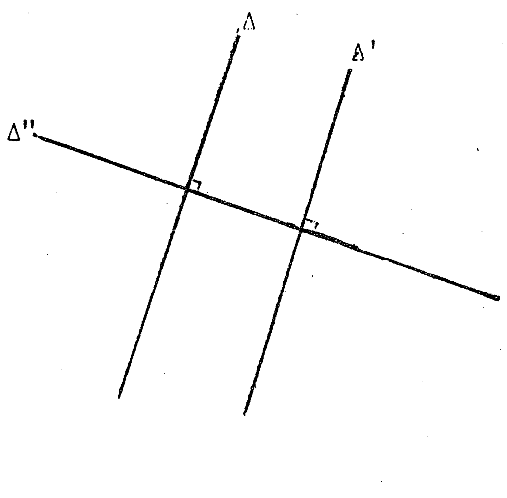


Théorème 1

Deux droites orthogonales à une même troisième sont parallèles.

Théorème 2

Etant donné deux droites parallèles, toute droite orthogonale à l'une est orthogonale à l'autre.



CHAPITRE I

DISTANCE

⁂

INTRODUCTION

Dans ce chapitre, intervient l'aspect métrique du plan. L'expression "nombre positif" qui revient souvent dans la suite du cours semblera bien insuffisante mais il ne faut pas oublier que les élèves de 4ème n'ont, en début d'année, que l'ensemble $\mathbb{D}$ des décimaux à leur disposition. Il conviendra donc de préciser au fur et à mesure de l'introduction des autres ensembles de nombres $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$, l'ensemble d'arrivée de l'application distance.

Le système d'axiomes adopté pour la géométrie du plan est insuffisant (il manque l'axiome de Pasch). Nous renvoyons le lecteur à une annexe et à la bibliographie pour des développements complets.

Dans la pratique, c'est la notion de segment qui intervient le plus souvent (ce qui correspond à la vision limitée de la droite qu'ont les élèves !). Il nous a paru préférable de remplacer la notion de relation d'ordre sur la droite par la relation ternaire :

"M est entre A et B si et seulement si $M \in [AB]$"

La demi-droite est définie à partir de la notion de segment. Les démonstrations des résultats énoncés ont été volontairement omises. Encore une fois, nous renvoyons le lecteur à une annexe.

DISTANCE

I - DISTANCE

A la suite de manipulations, on fera dégager aux élèves les caractéristiques suivantes :

(A5) *Une unité de longueur étant choisie, on admet qu'il existe une application (appelée distance) qui à chaque couple de points du plan associe un nombre positif noté AB (AB est la distance du point A au point B).*

Cette application est caractérisée par :

1) *Etant donné un couple (A,B) de points du plan :*
   $AB = 0$ SSI $A = B$

2) *Etant donné un couple (A,B) de points du plan :*
   $AB = BA$

3) *Etant donné un triplet (A,B,C) de points du plan :*
   $AC \leq AB + BC$

II - SEGMENT

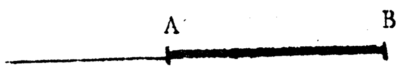
Propriétés :

(A6) *Etant donné deux points A,B distincts du plan l'ensemble des points M, du plan, vérifiant $AM + MB = AB$ est une partie de la droite (AB).*

Définition :

Pour deux points quelconques A et B on appelle "segment AB" et on note [AB] l'ensemble des points M tels que $AM + MB = AB$

Lecture : "segment A,B"



A et B sont les extrémités du segment [AB]

Remarques [AB] = [BA]
[AA] = {A}

Conséquence de la définition : $M \notin AB$ ssi $AM + MB > AB$

.../...

II - DEMI-DROITES

Propriétés :

A7 *Si A,B et C sont trois points d'une droite Δ.*
alors : $A \in [BC]$ *ou* $B \in [CA]$ *ou* $C \in [AB]$

Théorème :

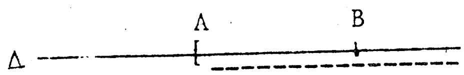
Si A,B,C sont distincts, une seule des propositions précédentes est vraie.

Définition :

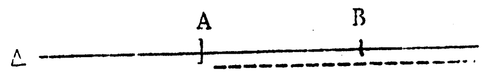
Etant donnés deux points distincts A et B, la demi-droite d'origine A contenant B est l'ensemble noté [AB) des points M tels que :

$$M \in [AB] \text{ ou } B \in [AM]$$

On appelle demi-droite ouverte d'origine A contenant B, la demi-droite [AB) privée du point A ; on la note]AB)



demi-droite fermée [AB)



demi-droite ouverte]AB)

Propriété :

A8 *Etant donné une demi-droite [AB) et un nombre positif d, il existe un point M unique de [AB) tels que :*

$$AM = d$$

Propriété 1 : Etant donné un point A d'une droite Δ, il existe alors deux demi-droites ouvertes et deux seulement, notées [Ax) et [Ay) d'origine A telles que {]Ax) ; {A};]Ay)} est une partition de Δ.

Propriété 2 : Si $C \in]AB)$ alors $[AC) = [AB)$

Propriété 3 : Si $M \in [AB]$ alors $[AM] \subset [AB]$

Propriété 4 : $A \neq B$ $[AB) \cap [BA) = [AB]$

.../...

Remarque : Etant donnés une droite Δ et un point A de Δ, un nombre strictement positif d, il existe alors deux points M et M' de Δ tels que :

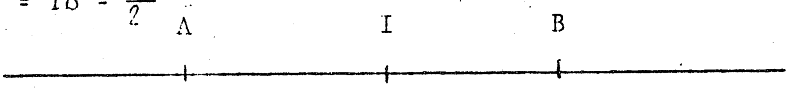
$$AM = AM' = d, \; M \in [Ax) \quad \text{et} \quad M' \in [Ax')$$

IV - MILIEU

– *Théorème :*

Etant donnés deux points A et B, il existe un point I unique du plan tel que :

$$AI = IB = \frac{AB}{2}$$



Démonstration :

1er cas : A = B alors A = B = I

2me cas : $A \neq B$

Si I existe alors I est sur le segment [AB] car AI + IB = AB

Sur la demi-droite [AB), il existe un point I unique tel que :

$$AI = \frac{AB}{2}$$

AI < AB donc $I \in [AB]$ et AB = AI + IB

donc $IB = \frac{AB}{2}$

Remarque :

Si $I \in [AB]$ et si AI = IB alors $AI = IB = \frac{AB}{2}$

Définition :

Le milieu du segment [A,B] est l'unique point I vérifiant

$$I \in [AB] \; \text{et} \; AI = IB$$

Remarques :

- [A B] et [BA] ont même milieu
- Le milieu de [AA] est A.
- Si $A \neq B$ le milieu de [AB] est l'unique point I vérifiant $I \in (AB)$ et AI = IB

CHAPITRE II

SYMETRIE ORTHOGONALE PAR RAPPORT A UNE DROITE

⁂

INTRODUCTION

La symétrie orthogonale est la transformation fondamentale dans la suite de ces chapitres. Elle est présentée ici à partir de la médiatrice d'un segment.

La notion de demi-plan qui intervient dans le régionnement du plan est une conséquence de l'axiome de Pasch.

⁂

SYMETRIE ORTHOGONALE PAR RAPPORT A UNE DROITE

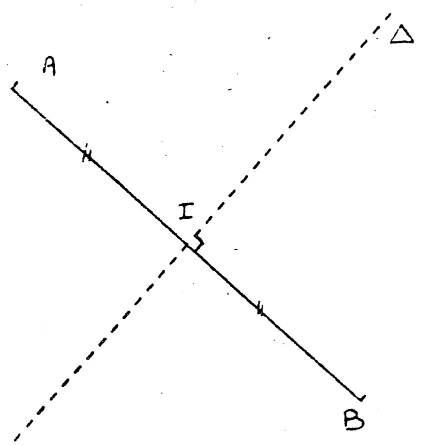
I - PRELIMINAIRE

Cette leçon sera précédée de manipulations consistant en pliages de feuilles de papier.

II - MEDIATRICE

1) Définition :

Etant donné deux points distincts A et B
La médiatrice de [AB] est la droite orthogonale à (AB) qui passe par le milieu de [AB]



Remarque :

Médiatrice de [A B] = Médiatrice de [B A]

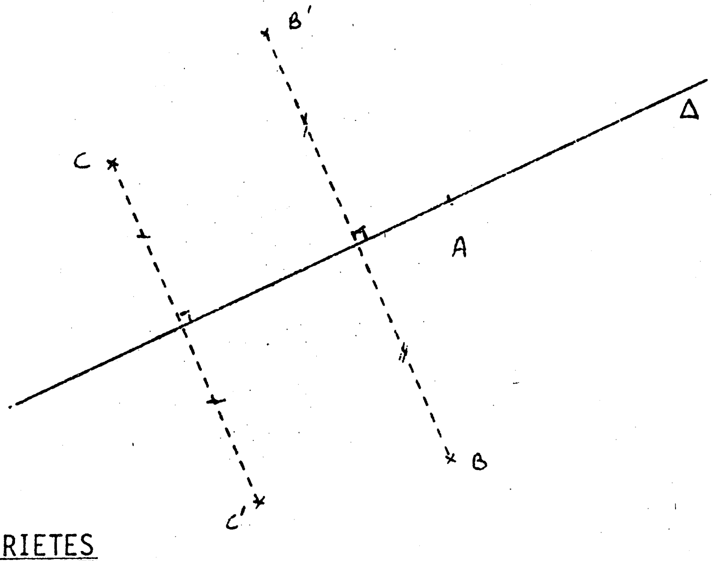
III - DEFINITION de la symétrie orthogonale par rapport à une droite.

Etant donné une droite Δ *du plan, on considère la correspondance* S_Δ *définie par*

$$S_\Delta : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{P}$$
$$M \longmapsto M' \text{ tel que } \begin{cases} \text{si } M \in \Delta : M = M' \\ \text{si } M \notin \Delta : \Delta \text{ est la médiatrice de } [M,M'] \end{cases}$$

S_Δ *est appelée* : *symétrie orthogonale par rapport à la droite* **Δ** .

.../...



S_Δ (A) = A

S_Δ (B) = B'

S_Δ (C) = C'

IV - PROPRIETES

Dans toutes les propriétés suivantes on suppose que l'on s'est donné au préalable une droite Δ.

Propriété 1 (P1)

Etant donné un point M du plan $S_\Delta(M)$ existe et est unique

S_Δ est une application de $\mathbb{P}$ dans $\mathbb{P}$)

Propriété 2 (P2)

Etant donné un point M du plan $S_\Delta(S_\Delta(M)) = M$

Propriété 3 (P3)

Etant donné un point A du plan, il existe un point B unique du plan tel que :

$$S_\Delta(B) = A$$

Remarques :

1) D'après P1 et P3 on déduit que S_Δ est une bijection de $\mathbb{P}$ sur $\mathbb{P}$

2) Δ est l'ensemble des points M tels que : $S_\Delta(M) = M$.
on dit que Δ est l'ensemble des points invariants par S_Δ

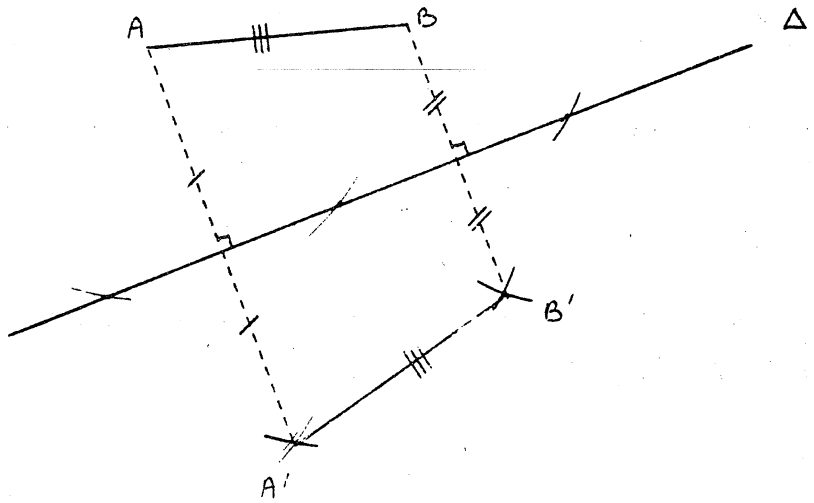
V - PROPRIETE FONDAMENTALE

1) On est amené à poser la règle suivante :

A9 *Etant donné la symétrie orthogonale S_Δ par rapport à la droite Δ*
Etant donné deux points A et B du plan :

Si $S_\Delta(A) = A'$ *et* $S_\Delta(B) = B'$

alors $AB = A'B'$



Remarque :

Une application f de $\mathbb{P}$ dans $\mathbb{P}$ vérifiant pour tout point A et tout point B : f(A) f(B) = AB est appelée isométrie.

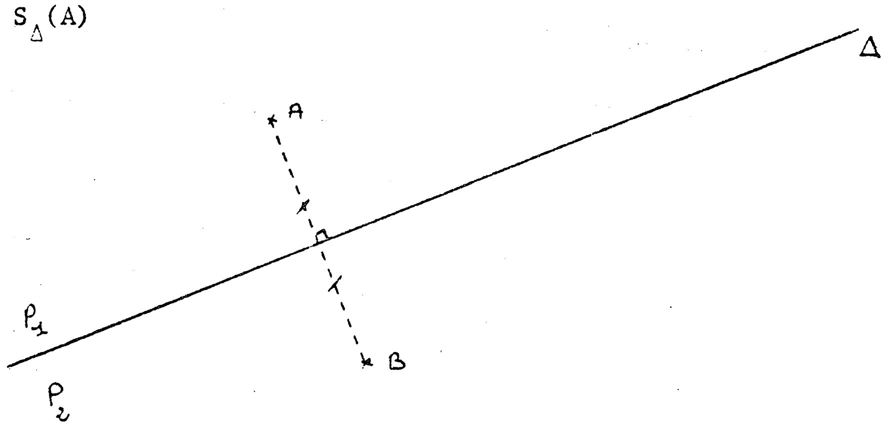
On dit que f "conserve" les distances.

Ainsi une symétrie orthogonale par rapport à une droite est une isométrie.

2) Régionnement du plan par la médiatrice :

Etant donné une droite Δ et un point A du plan non situé sur Δ.

Soit $B = S_\Delta(A)$

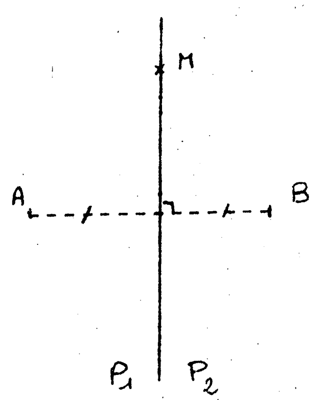


P_1 est le <u>demi-plan ouvert de bord Δ contenant A</u>

P_2 est le <u>demi-plan ouvert de bord Δ contenant B</u>

Soit un point M du plan, on va comparer MA et MB.

/1er cas/ : $M \in \Delta$



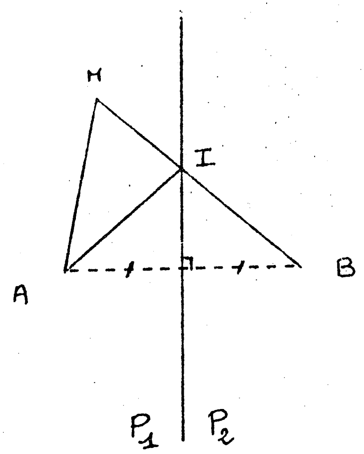
$S_\Delta(M) = M$

$S_\Delta(A) = B$

or S_Δ est une isométrie

donc MA = MB

/2me cas/ : $M \in P_1$



$M \in P_1$ donc le segment [M B] et Δ ont un point commun I

or IA = IB

donc MB = MI + IA .

or I n'est pas sur le segment [M A]

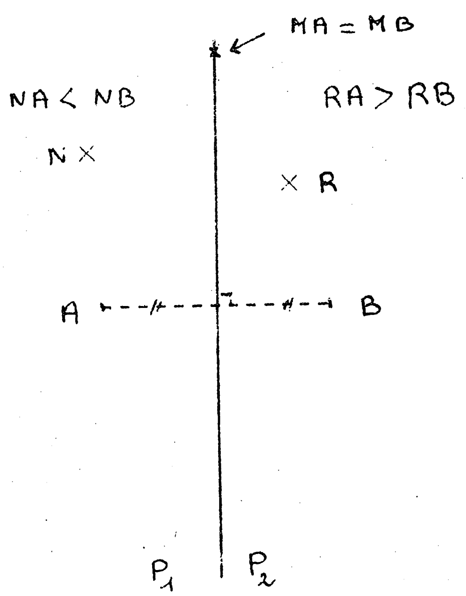
donc MA < MI + IA

donc MA < MB .

/3me cas/ : $M \in P_2$

Par une démonstration analogue : MB < MA

En résumé



Théorème :

La médiatrice de [AB] *est l'ensemble des points équidistants de* [AB]

La démonstration est une conséquence directe de l'étude des trois cas précédents.

3) Application du régionnement du plan :

Distance d'un point à une droite.

Théorème - Définition :

Etant donné une droite Δ *et un point* A *non situé sur* Δ.

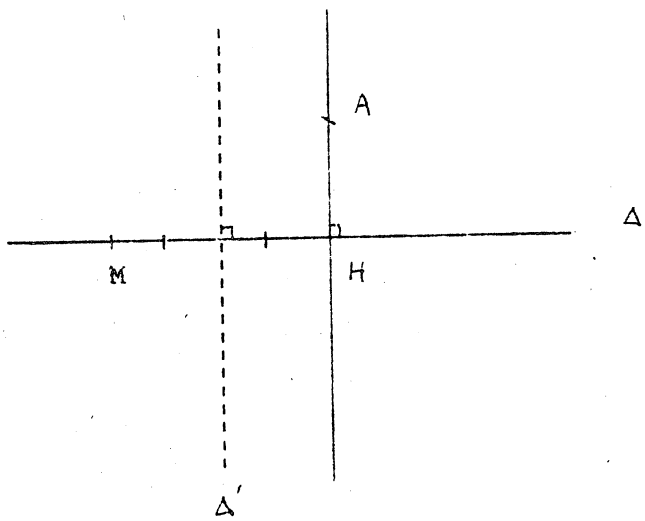
Soient : - H *le point de* Δ *tel que* : $(AH) \perp \Delta$

- *un point* M *de* Δ

Si $M \neq H$ *alors* $AH < AM$

AH *est appelée* : *distance du point* A *à la droite* Δ_1

Démonstration :



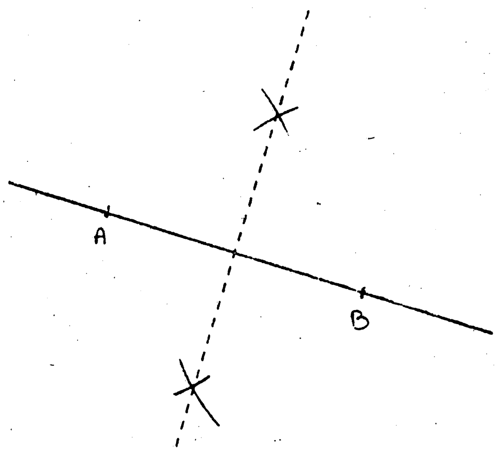
Traçons la médiatrice Δ' de $[MH]$

$(AH) \parallel \Delta'$ donc A est dans le demi-plan ouvert de bord Δ' contenant H.

donc d'après V-2 $AH < AM$

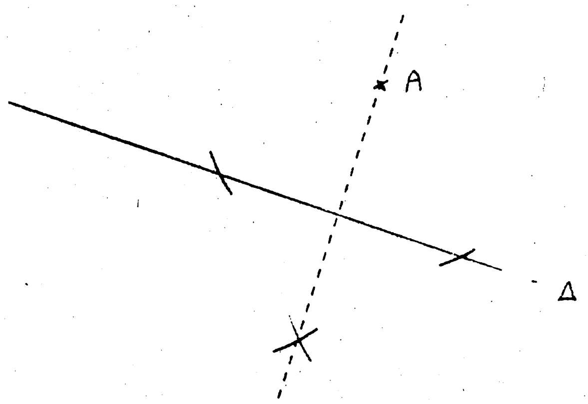
4) Constructions à la règle et au compas

a) Construction de la médiatrice d'un segment

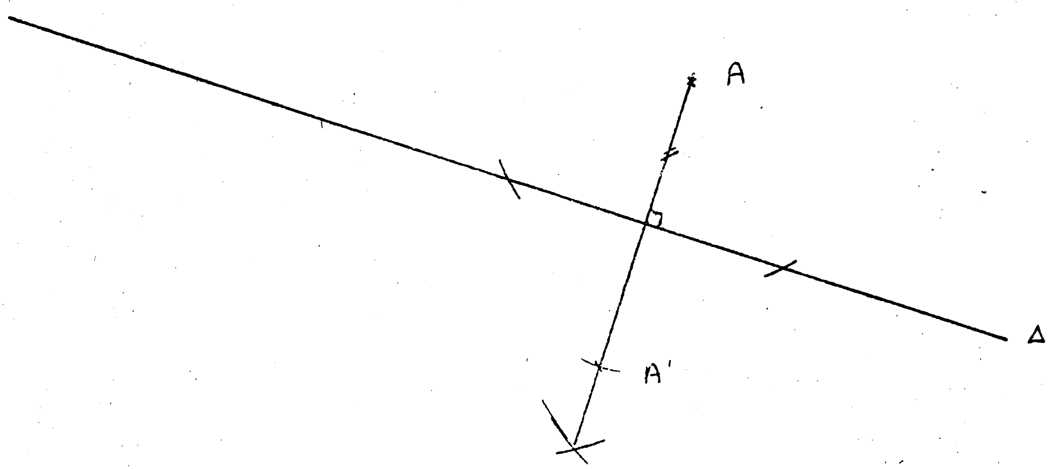


On peut ainsi déterminer à la règle et au compas le milieu d'un segment.

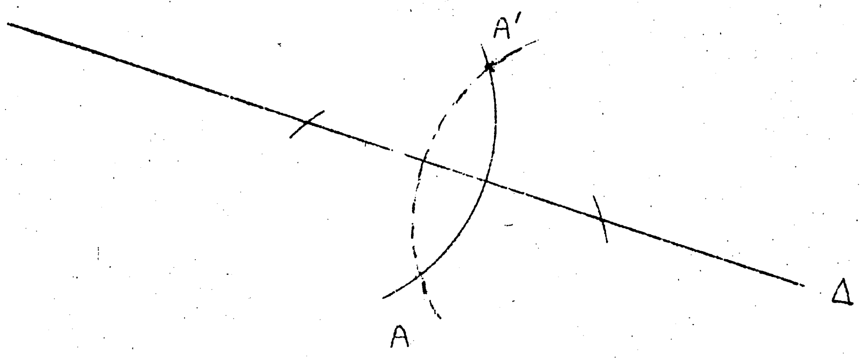
b) Construction de la droite Δ' orthogonale à Δ et passant par un point A



c) Construction du symétrique à la règle et au compas



d) Construction du symétrique au compas



CHAPITRE III

APPLICATIONS DE LA SYMETRIE ORTHOGONALE

⁂

INTRODUCTION

Il s'agit essentiellement ici de préciser l'effet d'une symétrie orthogonale sur l'alignement, l'incidence, le parallélisme et l'orthogonalité, qui, avec l'invariance des longueurs seront nécessaires pour faire fonctionner cette transformation.

Bien qu'à la limite du programme de 4ème, les bissectrices d'une paire de droites s'introduisent naturellement dans la recherche de symétries orthogonales échangeant deux droites sécantes. C'est aussi une notion déjà connue des élèves de 6ème. De plus, le fait que ces deux bissectrices soient perpendiculaires est un outil fréquemment utilisé. 'B'

⁂

APPLICATIONS
DE LA
SYMETRIE ORTHOGONALE

I - IMAGES DE FIGURES SIMPLES PAR UNE SYMETRIE ORTHOGONALE

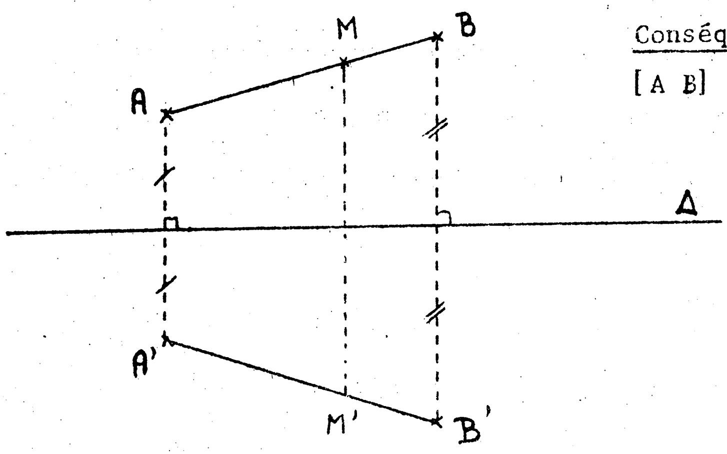
Rappel :

Etant donné un ensemble $\mathcal{E}$ du plan on appelle image de $\mathcal{E}$ par une application f de $\mathbb{P}$ dans $\mathbb{P}$, l'ensemble des images des points de $\mathcal{E}$.

Dans tout ce qui suit on considère la symétrie orthogonale S_Δ par rapport à la droite Δ.

1) Image d'un segment, Image d'une droite, Image d'une demi-droite.

L'image du segment $[A\ B]$ *est le segment* $[S_\Delta(A)\quad S_\Delta(B)]$



Conséquence : l'image du milieu de $[A\ B]$ est le milieu de $[S_\Delta(A)\quad S_\Delta(B)]$

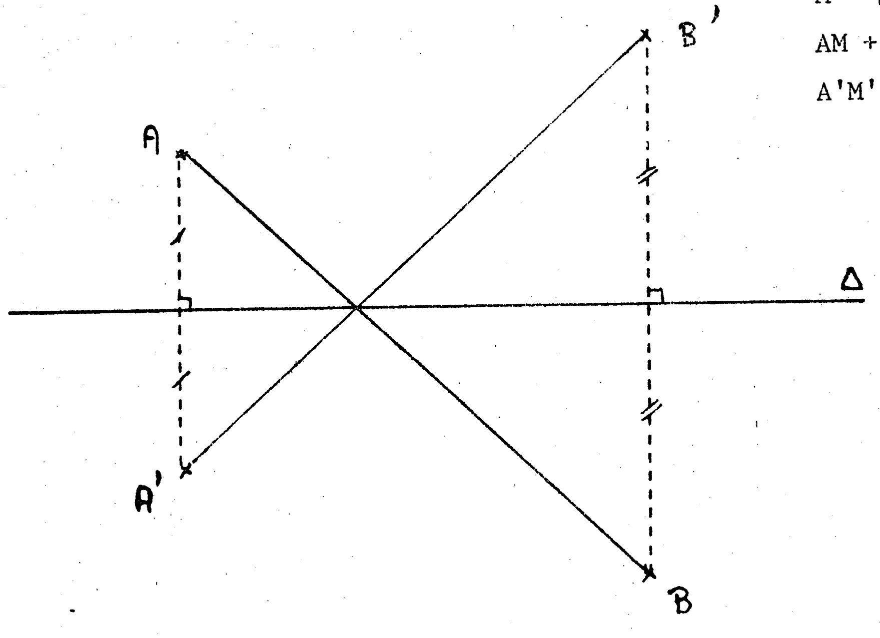
$$A \xmapsto{S_\Delta} A'$$
$$B \longmapsto B$$
$$M \longmapsto M'$$

$AM = A'M'$
$BM = B'M'$
$AB = A'B'$

$M \in [AB]$ ssi $AM + MB = AB$

$AM + MB = AB$ ssi $A'M' + M'B' = A'B'$

$A'M' + M'B' = A'B'$ ssi $M' \in [A'B']$



.../...

Corollaire 1

Les images de trois points alignés sont alignées.

Corollaire 2

L'image d'une droite est une droite.

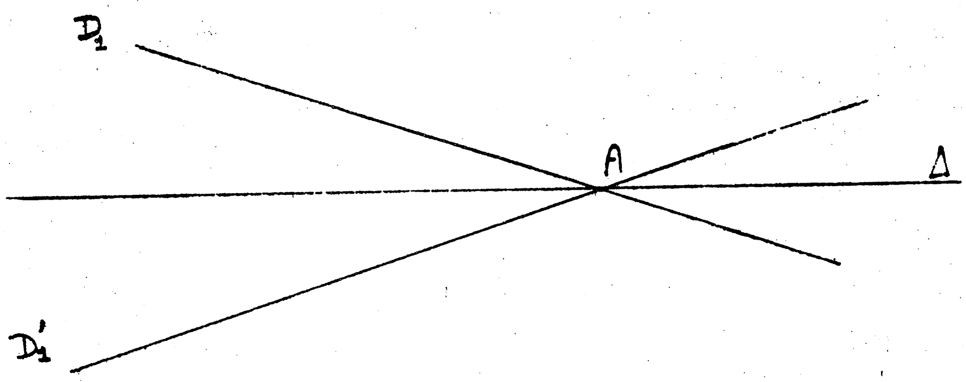
Remarques :

- L'image de Δ est Δ
- Etant donné une droite D_1 appelons D_1' son image.

1er cas :

Si D_1 et Δ sont sécantes en A

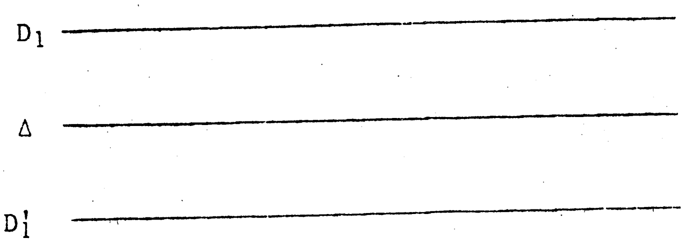
Alors D_1' et Δ sont sécantes en A .



2me cas :

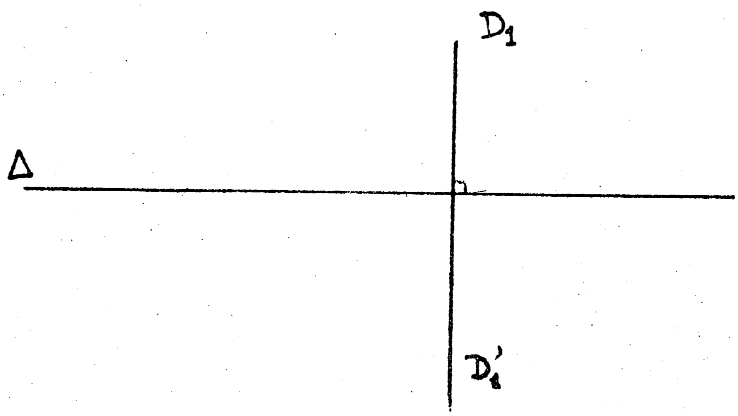
Si D_1 et Δ sont parallèles.

Alors D_1' et Δ sont parallèles.



3me cas :

Si $D_1 \perp \Delta$ alors $D_1 = D_1'$



2) Images de deux droites :

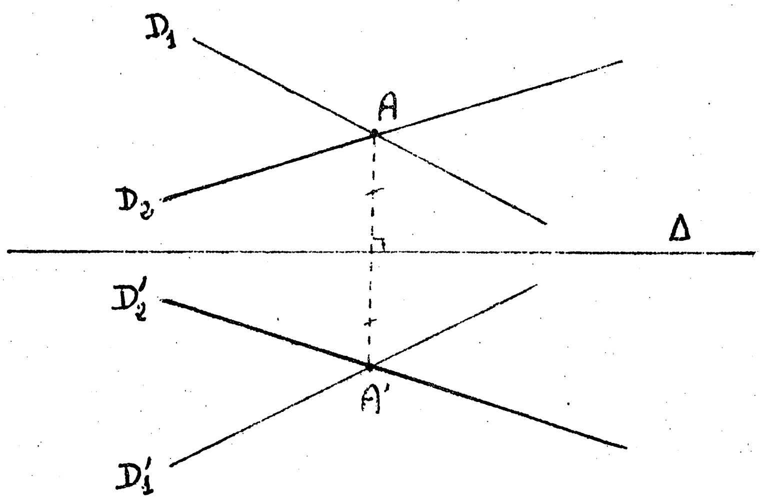
Etant donné deux droites D_1 et D_2

Appelons D_1' l'image de D_1 et D_2' l'image de D_2

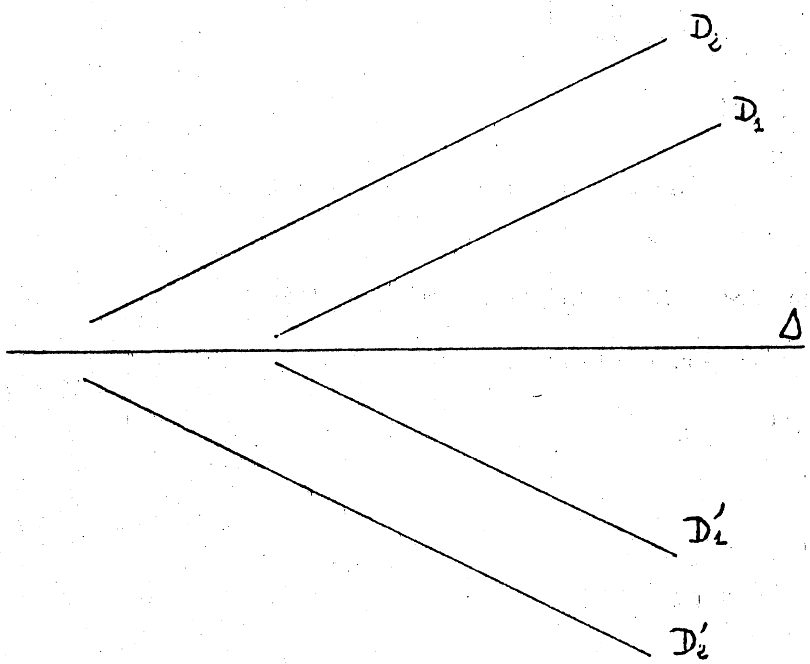
. Si D_1 et D_2 sont sécantes en A alors $\begin{cases} D_1' \text{ et } D_2' \text{ sont sécantes} \\ \text{en } A' \text{ image de } A. \end{cases}$

.. Si $D_1 // D_2$ alors $D_1' // D_2'$

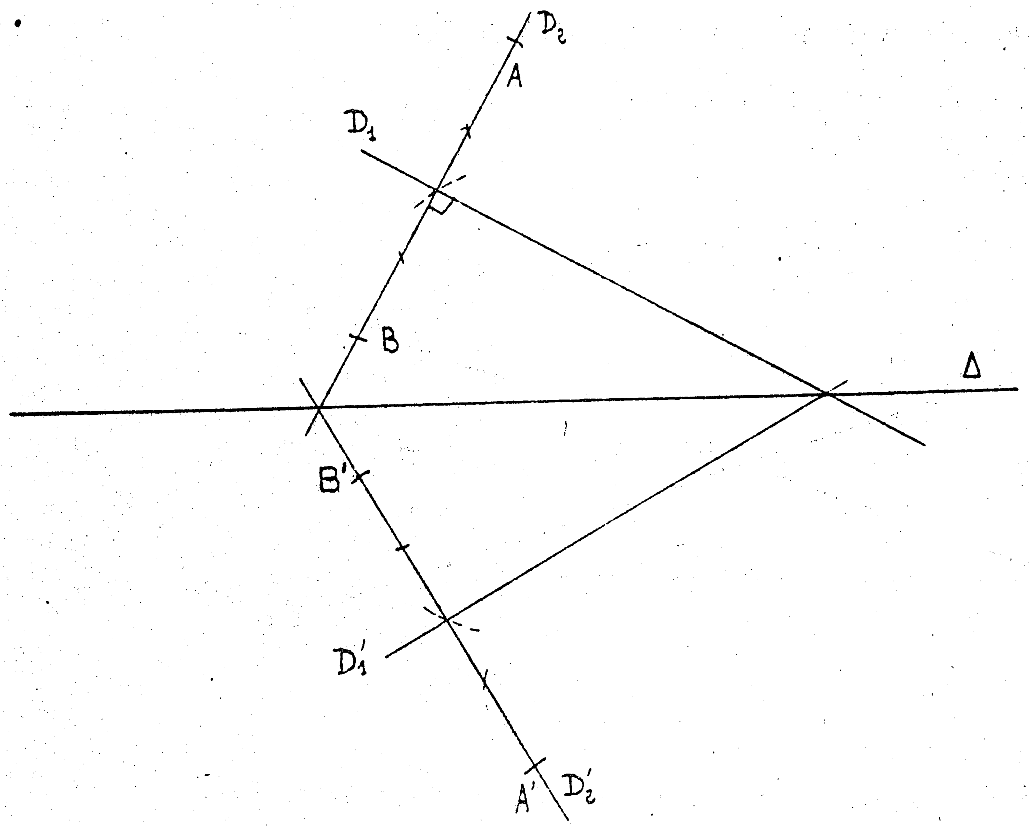
... Si $D_1 \perp D_2$ alors $D_1' \perp D_2'$



..



...



$D_2 \perp D_1$

Prenons A et B deux points de D_2 $(A \neq B)$ tels que D_1 soit la médiatrice de $[AB]$

Soient $A' = S_\Delta(A)$ et $B' = S_\Delta(B)$

Soit M' un point de D'_1

Il existe un point M unique de D_1 dont l'image est M'

S_Δ est une isométrie donc $MA = M'A'$ et $MB = M'B'$

D_1 est la médiatrice de $[AB]$ donc $MA = MB$ donc $M'A' = M'B'$

Donc tous les points de D'_1 sont équidistants de A' et B'

D'_1 est la médiatrice de $[A'B']$

D'_1 et D'_2 sont orthogonales.

II - Bissectrices (à la limite du programme)

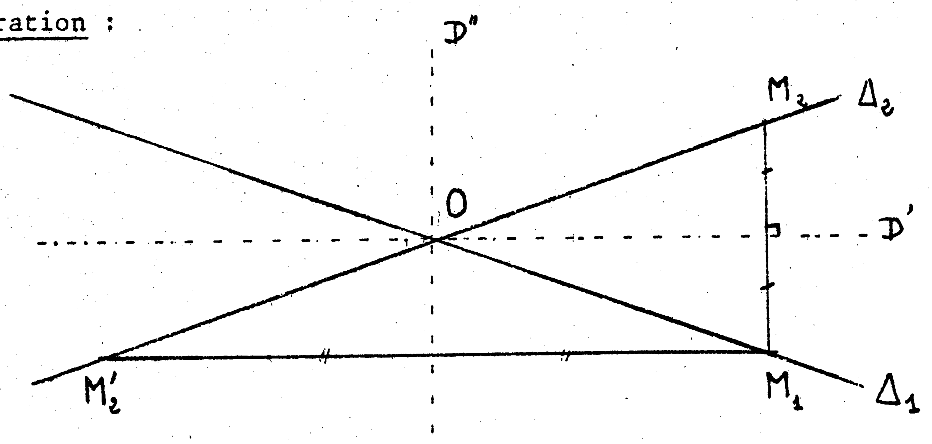
1) Problème :

Etant donné deux droites Δ_1 et Δ_2 sécantes en O;

Existe-t-il une droite D telle que :

$$S_D(\Delta_1) = \Delta_2 \ ?$$

Démonstration :



∴ Si une telle droite D existe alors elle doit vérifier les conditions suivantes :

1ère condition : $O \in D$ d'après I

2ème condition : Soit un point M_1 différent de O et situé sur Δ_1

Il existe deux points distincts M_2 et M'_2 de Δ_2 tels que

$$OM_2 = OM'_2 = OM_1$$

.../...

S_D étant une isométrie

$$\underline{S_D(M_1) = M_2} \quad \text{ou} \quad \underline{S_D(M_1) = M_2'}$$

Donc D est nécessairement la médiatrice de $[M_1 M_2]$ ou la médiatrice de $[M_1 M_2']$

Appelons D' la médiatrice de $[M_1 M_2]$

D'' la médiatrice de $[M_1 M_2']$

Ainsi les seules solutions possibles du problème sont D' et D''.

⁂ Montrons que D' et D'' sont effectivement solutions du problème.

$$S_{D'}(O) = O \quad \text{et} \quad S_{D'}(M_1) = M_2$$

Or l'image d'une droite est une droite donc $S_{D'}(\Delta_1) = \Delta_2$

De même $S_{D''}(\Delta_1) = \Delta_2$

Conclusion :

Le problème posé admet deux solutions : D' et D'' sont les bissectrices de $\{\Delta_1 ; \Delta_2\}$

Remarque :

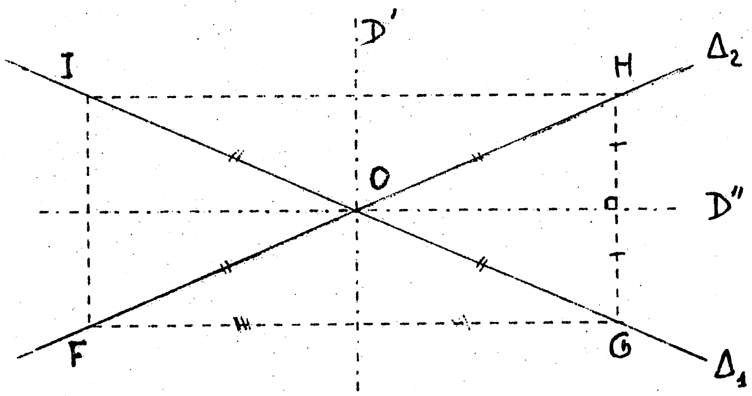
Si D est une bissectrice de $\{\Delta_1 ; \Delta_2\}$

Alors D est une bissectrice de $\{\Delta_2 ; \Delta_1\}$

2) *Théorème* :

Etant donné deux droites sécantes Δ_1 et Δ_2
Les bissectrices de $\{\Delta_1 ; \Delta_2\}$ sont orthogonales.

Démonstration :



Soit $F \in \Delta_2$ et $F \neq O$

$F \xmapsto{S_{D'}} G$ $\qquad\qquad$ $\underline{OF = OG}$

Soit H tel que O soit le milieu de [F H] : $\underline{OF = OH}$

$$G \xmapsto{S_{D''}} \begin{cases} H \\ \text{ou} \\ F \end{cases}$$

Comme $S_{D'}(G) = F$ et $D' \neq D''$ alors $S_{D''}(G) \neq F$

Soit I tel que O soit le milieu de [G I] $\qquad$ $\underline{OG = OI}$

De même

$H \xmapsto{S_{D'}} I$ $\qquad\qquad$ $\underline{OH = OI}$

$OF = OI$ donc de même $I \xmapsto{S_{D''}} F$

$$\left.\begin{array}{l} F \xmapsto{S_{D''}} I \quad \text{donc } (IF) \perp D'' \\ G \longmapsto H \quad \text{donc } (GH) \perp D'' \end{array}\right\} \text{donc } (IF) \,//\, (GH)$$

$H \xmapsto{S_{D'}} I$

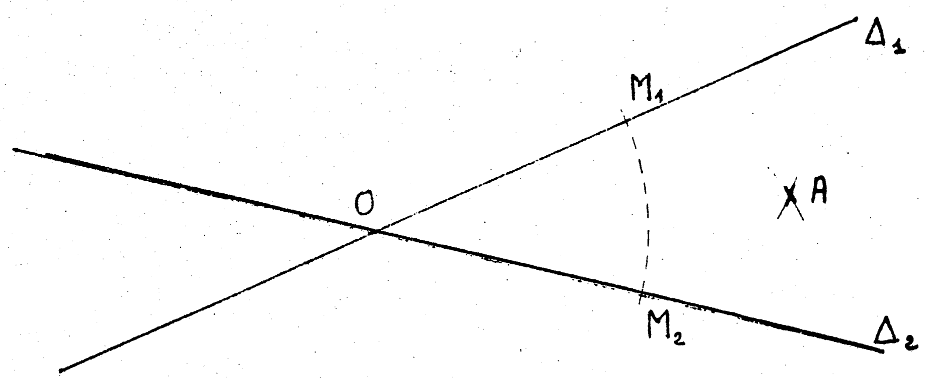
$G \longmapsto F$

Or (HG) // (IF) donc d'après (I-1) (IF) // D'

donc $\underline{\underline{D' \perp D''}}$.

3) <u>Construction</u>

Elle résulte de 1) M_1, M_2 étant des points de Δ_1 et Δ_2 tels que $OM_1 = OM_2$, D' est la médiatrice de $[M_1 \ M_2]$

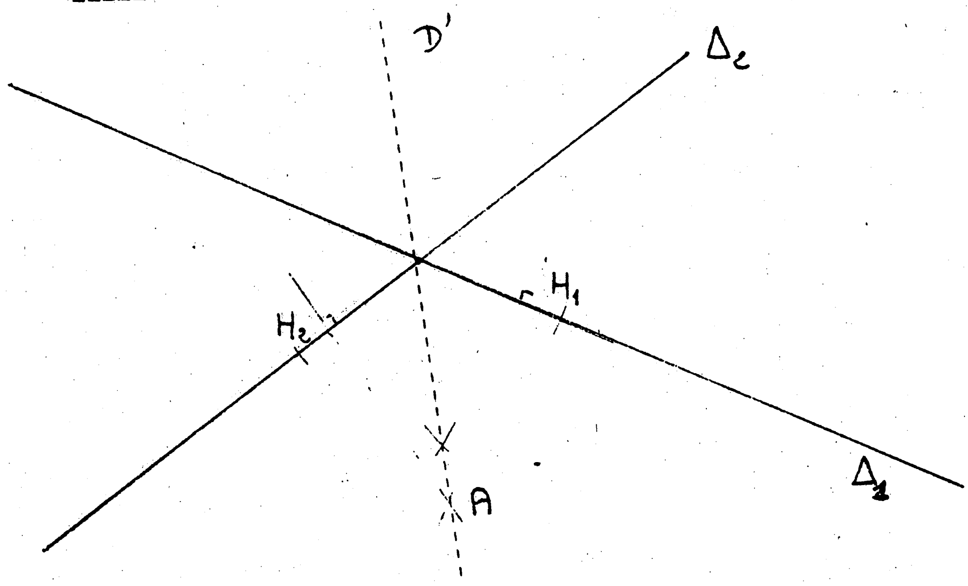


$O \in D'$

Il suffit d'en construire un second point A.

4) Une caractérisation des bissectrices

a) Tout point de D' est équidistant de Δ_1 et Δ_2



$$A \in D' \qquad \Delta_2 \xmapsto{S_{D'}} \Delta_1$$
$$A \xmapsto{S_{D'}} A$$

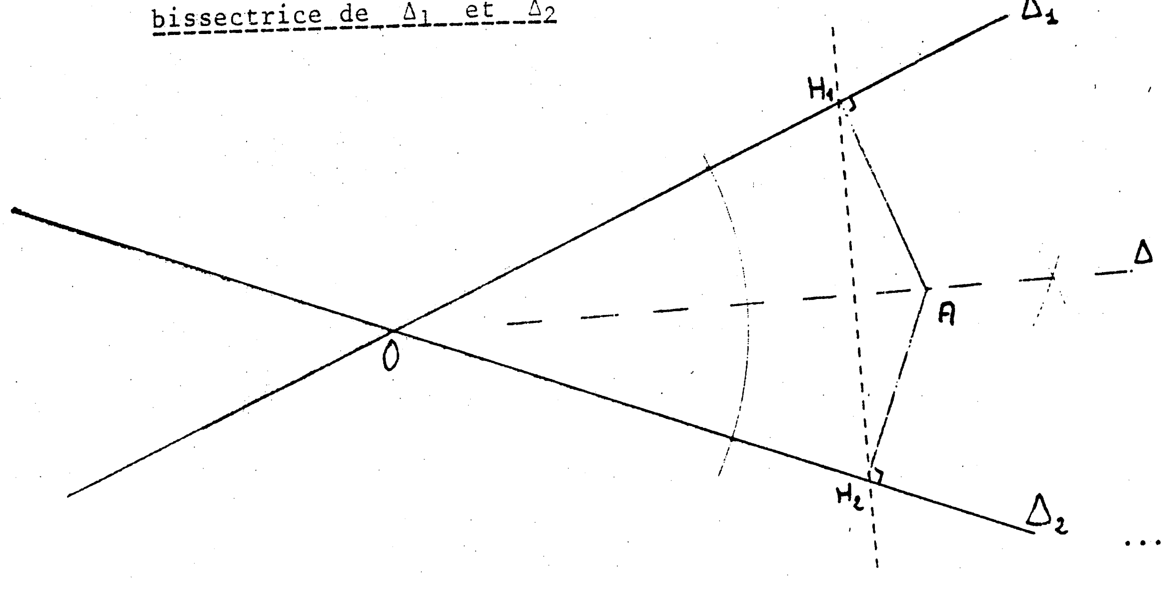
Le couple (A,Δ_1) est transformé par $S_{D'}$ en le couple (A,Δ_2)

Les perpendiculaires menées par A aux droites Δ_1 et Δ_2 rencontrent ces droites en H_1 et H_2

S_D' conserve l'orthogonalité, donne le segment $[A\ H_1]$ est transformé en $[A\ H_2]$ par $S_{D'}$. Comme $S_{D'}$ est une isométrie,

$$A\ H_1 = A\ H_2$$

b) Tout point équidistant de Δ_1 et Δ_2 est un point d'une bissectrice de Δ_1 et Δ_2



.../...

Si $H_1 \in \Delta_1$ et $(A\,H_1) \perp \Delta_1$

et $H_2 \in \Delta_2$ et $(A\,H_2) \perp \Delta_2$

Si Δ est la médiatrice de $[H_1\,H_2]$, $H_1 \xmapsto{S_\Delta} H_2$ et $A \xmapsto{S_\Delta} A$

Comme S_Δ conserve l'orthogonalité $\Delta_1 \xmapsto{S_\Delta} \Delta_2$

Δ est donc l'une des bissectrices.

Théorème :

Soient Δ_1 et Δ_2 deux droites sécantes.

L'ensemble des points équidistants de Δ_1 et Δ_2 est la réunion des deux bissectrices de $\{\Delta_1;\Delta_2\}$

CHAPITRE IV

CERCLE

⁂

INTRODUCTION

Après une révision de vocabulaire sur le cercle, on étudie dans ce chapitre les notions simples d'axes de symétrie d'un cercle et de cercle circonscrit à un triangle (avec application au triangle rectangle). Il nous a paru intéressant d'aborder (non nécessairement en cours !) au niveau de cette classe le problème de l'intersection d'une droite et d'un cercle et de celui de l'intersection de deux cercles. L'étude de ce problème permet d'aborder dès la 4ème la notion de droite tangente à un cercle.

Cependant il n'est pas question de démontrer que l'intersection n'est pas vide lorsque $OH < r$ ou $|r - r'| \leq OO' < r + r'$. Ceci pourra être fait en classe de 3ème lorsqu'on aura admis l'existence de la racine carrée pour tout nombre réel positif et démontré le théorème de Pythagore.

⁂

CERCLE

I - CERCLE : REVISION - VOCABULAIRE

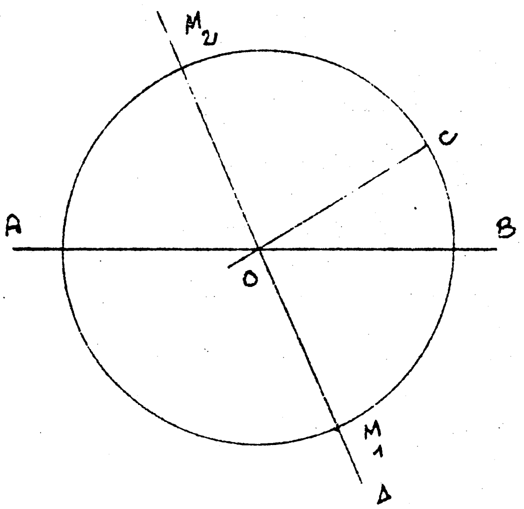
1) *Définition* :

Etant donné un nombre r strictement positif et un point O, on appelle cercle centre O et de rayon r l'ensemble des points M du plan tels que

$$OM = r$$

Ce cercle sera noté $\mathcal{C}(O, r)$

2) Vocabulaire



OC est le rayon du cercle

[O,C] est un rayon du cercle

AB est le diamètre, AB = 2 r

[A B] est un diamètre du cercle

[B C] est une corde

Δ est une droite diamètrale

Propriété :

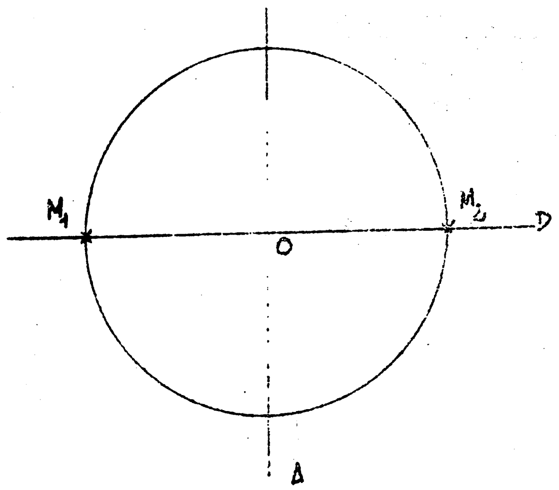
Toute droite diamètrale Δ rencontre le cercle en deux points M_1 et M_2. O est le milieu de $[M_1M_2]$

II - AXES DE SYMETRIE D'UN CERCLE

Recherchons les axes de symétrie d'un cercle de centre O.

a) *Toute droite passant par O est axe de symétrie*

b) Réciproquement : Soit Δ un axe de symétrie du cercle.



La perpendiculaire D à Δ passant par O coupe le cercle en 2 points M_1 et M_2

S_Δ : $\mathcal{C} \longmapsto \mathcal{C}$ par hypothèse

$D \longmapsto D$ car $D \perp \Delta$

$\{M_1, M_2\} \longmapsto \{M_1, M_2\}$

M_1 ou M_2 n'appartenant pas à Δ, $(\Delta \neq D)$

M_1 et M_2 sont symétriques par rapport à Δ donc $O \in \Delta$.

Théorème :

Tout axe de symétrie d'un cercle passe par son centre.

III - INTERSECTION D'UN CERCLE ET D'UNE DROITE

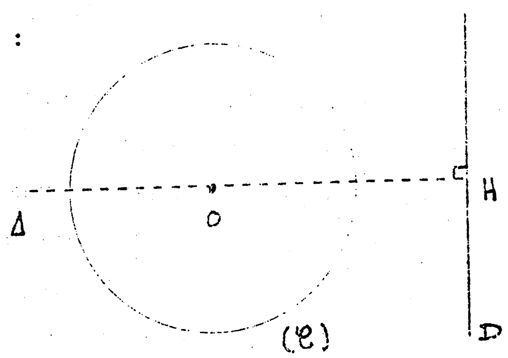
Soit D une droite et $\mathcal{C}$ le cercle de centre O et de rayon r. On se propose d'étudier $D \cap \mathcal{C}$

a) La médiatrice d'une corde passe par le centre du cercle. Soit A, B et C trois points distincts alignés : les médiatrices de $[AB]$ et de $[BC]$ sont distinctes et parallèles par suite *il n'existe pas de cercle passant par trois points alignés*. De ce fait $D \cap \mathcal{C}$ *contient au plus deux points*.

b) La droite Δ perpendiculaire à D passant par O coupe D en H alors *pour tout* M *de* D : $OH \leqslant OM$

Posons $d = OH$

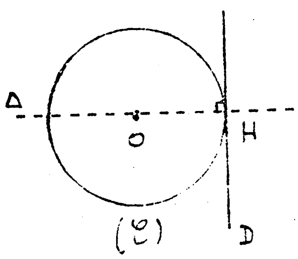
∗ Si $d > r$:



$\mathcal{C} \cap D = \emptyset$

∗∗ Si $d = r$: Alors $H \in \mathcal{C}$ et pour tout M de $D - \{H\}$: $OM > OH$

d'où $D \cap \mathcal{C} = \{H\}$

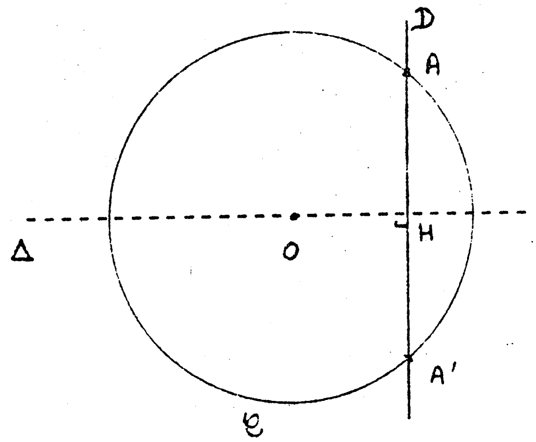


On dit que D et $\mathcal{C}$ sont tangents en H

:::: Si $d < r$: On admet que l'intersection $\mathcal{C} \cap D$ n'est pas vide

Soit $A \in \mathcal{C} \cap D$ alors $OA > OH$ donc $A \neq H$ et par suite $A \notin \Delta$.
Δ passe par O et $D \perp \Delta$ donc Δ est axe de symétrie de $\mathcal{C} \cap D$
d'où $S_\Delta(A) = A'$ est un point de $\mathcal{C} \cap D$ et $A' \neq A$.

Par suite $\mathcal{C} \cap D = \{A, A'\}$ et Δ est la médiatrice de $[AA']$



c) Droite tangente à un cercle

D'après l'étude précédente il résulte :

Théorème et définition :

Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et D une droite. H un point de $D \cap \mathcal{C}$ alors :

$$D \cap \mathcal{C} = \{H\} \text{ si et seulement si } D \perp (OH)$$

D s'appelle la tangente à $\mathcal{C}$ au point H.

IV - CERCLE CIRCONSCRIT A UN TRIANGLE

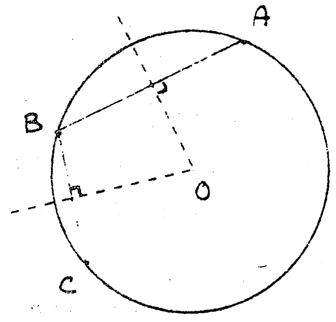
1°) a) Etant donné deux points A et B distincts l'ensemble des centres des cercles passant par A et B est la médiatrice de $[AB]$.

Si trois points A, B et C distincts sont alignés il n'existe pas de cercle passant par A, B et C. Cherchons alors s'il existe des cercles passant par A, B et C, points distincts non alignés : le centre d'un tel cercle doit appartenir aux médiatrices de $[AB]$ et de $[BC]$.

Comme A, B et C sont non alignés, ces médiatrices sont sécantes en un point O

$$OA = OB \text{ et } OB = OC \text{ donc } OA = OB = OC$$

Alors le cercle de centre O et de rayon OA passe par A, B et C et c'est le seul.



Théorème :

Par trois points non alignés il passe un cercle et un seul.

b) Remarquons que $OA = OC$ d'où O appartient aussi à la médiatrice de $[AC]$.

Donc les médiatrices des côtés d'un triangle sont concourantes en un point qui est le centre du cercle passant par les sommets du triangle : *ce cercle est appelé cercle circonscrit au triangle.*

2°) Cercle circonscrit à un triangle rectangle

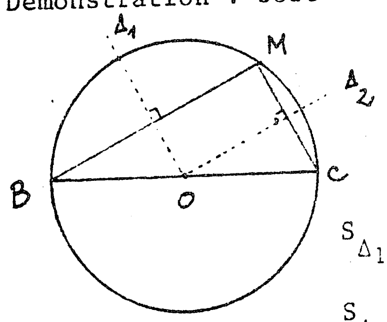
Théorème 1 :

Etant donné un cercle de diamètre $[BC]$, *si* M *est un point du cercle distinct de* A *et* B *alors le triangle* B C M *est rectangle en* M.

Démonstration : Soit O le milieu de $[BC]$

Δ_1 la médiatrice de $[MB]$

Δ_2 la médiatrice de $[MC]$



$OB = OM$ donc $O \in \Delta_1$

$OC = OM$ donc $O \in \Delta_2$

$O \in \Delta_1 \cap \Delta_2$

S_{Δ_1} : $(OM) \mapsto (OB)$ donc Δ_1 est bissectrice de $\{(OM);(OB)\}$

S_{Δ_2} : $(OM) \mapsto (OC)$ donc Δ_2 est bissectrice de $\{(OM);(OC)\}$

Comme $(OB) = (OC)$ alors Δ_1 et Δ_2 sont les bissectrices de $\{(OM);(BC)\}$;

alors $\Delta_1 \perp \Delta_2$ car $\Delta_1 \neq \Delta_2$

$(MB) \perp \Delta_1$ et $\Delta_1 \perp \Delta_2$ donc $(MB) // \Delta_2$

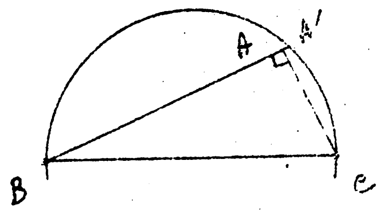
Or $(MC) \perp \Delta_2$ donc $(MB) \perp (MC)$

.../...

Théorème 2 :

Etant donné un triangle ABC rectangle en A, le centre du cercle circonscrit à ce triangle est le milieu de l'hypoténuse.

Démonstration : Soit $\mathcal{C}$ le cercle de diamètre $[BC]$. La droite (AB) n'est pas perpendiculaire à (BC) donc (AB) n'est pas tangente au cercle : (AB) recoupe le cercle $\mathcal{C}$ en un point A' distinct de B et C puisque A, B, C sont non alignés. Alors d'après le théorème 1 $(A'B) \perp (A'C)$



Or par un point il passe une seule droite orthogonale à une droite donnée et $(AB) \perp (AC)$ donc $A = A'$

Corollaire :

Un triangle ABC est rectangle en A si et seulement si la longueur de la médiane issue de A est égale à la moitié de la longueur du côté $[BC]$.

Démonstration :

Soit O le milieu de $[BC]$. Dire que $AO = \frac{1}{2} BC$ revient à dire que O est centre du cercle circonscrit à ABC. Par suite le résultat est immédiat à partir des 2 théorèmes précédents.

V - INTERSECTION DE DEUX CERCLES

Soit $\mathcal{C}(O, r)$ et $\mathcal{C}'(O', r')$ avec $O \neq O'$ et $r' \leqslant r$

L'intersection $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}'$ contient au plus deux points (voir III et IV).

La droite (OO') est axe de symétrie de $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}'$

D'autre part pour tout point M du plan

$$|OM - O'M| \leqslant OO' \leqslant OM + O'M$$

Par suite si $M \in \mathcal{C} \cap \mathcal{C}'$ alors $|r - r'| \leqslant OO' \leqslant r + r'$

soit $r - r' \leqslant OO' \leqslant r + r'$

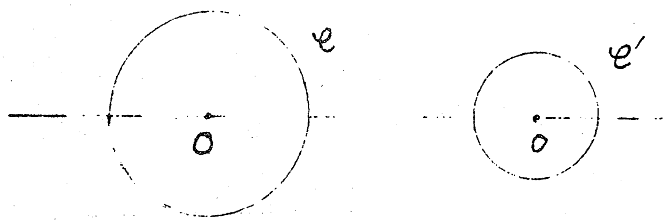
d'où :

a) Si $OO' > r + r'$: $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}' = \emptyset$

alors pour tout M de $\mathcal{C}$: $O'M > |OO' - OM| = OO' - OM > r'$

et pour tout M' de $\mathcal{C}'$: $OM' > |O'O - O'M'| = O'O - O'M' > r$

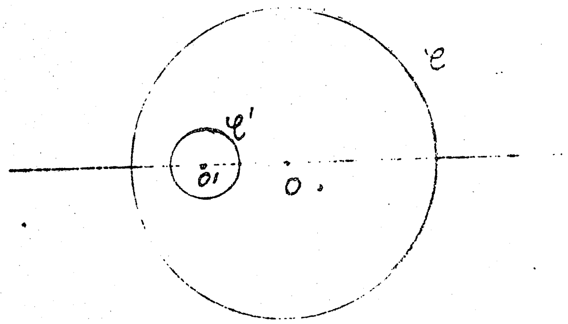
Les deux cercles sont dits extérieurs



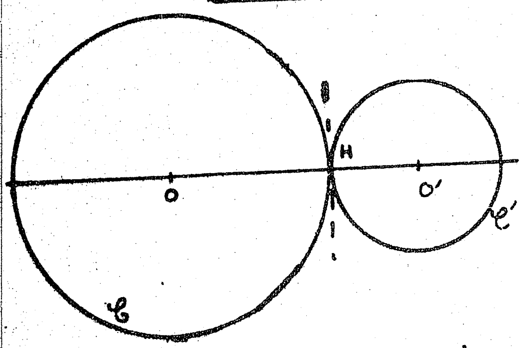
b) Si $OO' < r - r'$: $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}' = \emptyset$

alors pour tout M' de $\mathcal{C}'$ $OM' < OO' + O'M' < r$

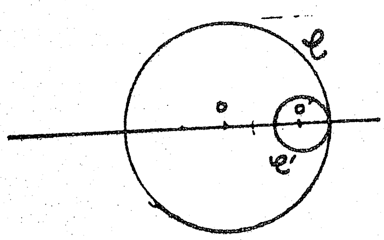
Le cercle $\mathcal{C}'$ est intérieur au cercle $\mathcal{C}$



c) Si $OO' = r + r'$: alors tout point de l'intersection appartient à $[OO']$ soit donc H le point de $[OO']$ tel que $OH = r$ $O'H = OO' - r = r'$ d'où $H \in \mathcal{C} \cap \mathcal{C}'$ et c'est le seul.

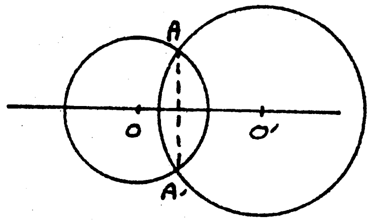


d) Si $OO' = r - r'$: si $H \in \mathcal{C} \cap \mathcal{C}'$ alors $OO' = OH - O'H$ d'où $OH = OO' + O'H$; par suite $H \in [OO')$ Soit donc H le point de $[OO')$ tel que $OH = r$ Alors $O'H = r'$ et $H \in \mathcal{C} \cap \mathcal{C}'$ et c'est le seul.



Dans c) et d) la perpendiculaire en H à (OO') est la tangente en H aux deux cercles. Les deux cercles ont une tangente commune. On dira que les deux cercles sont tangents (extérieurement en c), intérieurement en d)).

e) <u>Si $r - r' < OO' < r + r'$:</u>



On admettra que $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}'$ n'est pas vide. Soit $A \in \mathcal{C} \cap \mathcal{C}'$ alors $A \notin (OO')$ sinon on aurait $OO' = r + r'$ ou $OO' = r - r'$ d'où $S_{OO'}(A) = A'$ est un autre point de $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}'$

<u>$\mathcal{C} \cap \mathcal{C}' = \{A, A'\}$ et (OO') est la médiatrice de $[AA']$</u>

CHAPITRE V

PROJECTION

⁂

INTRODUCTION

Présentation d'une relation non bijective du plan dans lui-même et de sa restriction à une droite.

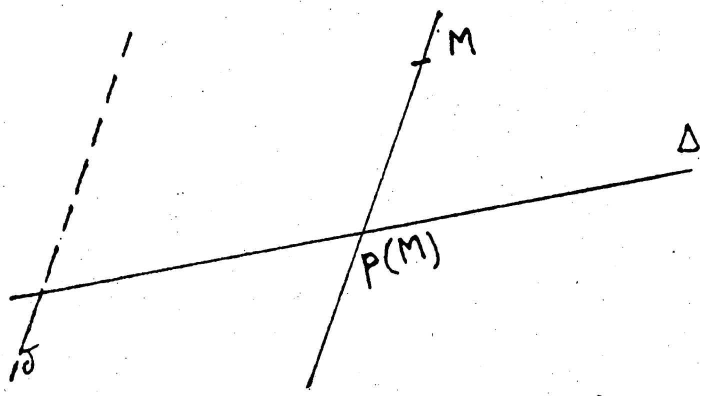
Le résultat principal est ici la forme faible de la propriété de Thalès, déduite de sa restriction au triangle.

⁂

PROJECTION

I - PROJECTION DU PLAN SUR UNE DROITE

$\mathbb{P}$ désigne le plan ; δ une direction de droites ; Δ une droite du plan telle que $\Delta \notin \delta$



1) *Définition* :

La droite passant par M de direction δ coupe Δ en un point $p(M)$. $p(M)$ est appelé projection de M sur Δ suivant la direction δ.

Remarque : La relation $p : \mathbb{P} \longmapsto \Delta$ est une application
$M \longmapsto p(M)$

On appelle projection orthogonale la projection suivant une direction orthogonale à Δ

2) Points invariants :

Tout point M invariant appartient nécessairement à Δ. Or tout point de Δ est invariant. Donc : Δ *est l'ensemble des points invariants de* $\mathbb{P}$.

3) Antécédents d'un point M' de Δ :

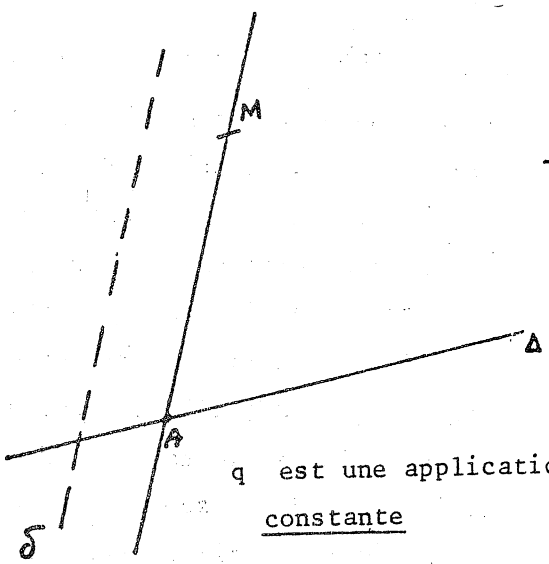
L'ensemble des antécédents d'un point M' de Δ est la droite de direction δ passant par M'.

4) Projection d'une droite sur une droite :

Soit D une droite du plan. Etudions la restriction de p à l'ensemble D :

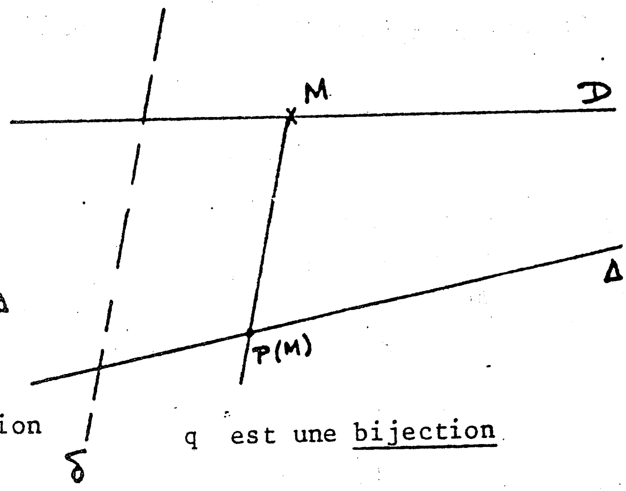
$$q : D \longmapsto \Delta$$
$$M \longmapsto p(M)$$

1er cas : $D \in \delta$



q est une application constante

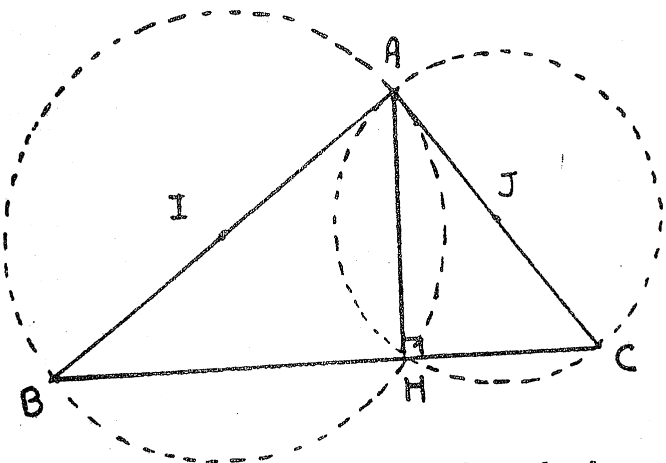
2me cas : $D \notin \delta$



q est une bijection

II - PROJECTION DU MILIEU D'UN SEGMENT

(1) Une propriété du triangle



A B C est un triangle

I est le milieu de [AB]

J est le milieu de [AC]

H est la projection orthogonale de A sur (BC)

([A H] est une hauteur)

Les cercles de diamètre [AB] et [AC] se coupent en A et H car les triangles A H C et A H B sont rectangles en H.

Leurs centres I et J sont équidistants de A et H, (IJ) est donc la médiatrice de [AH].

.../...

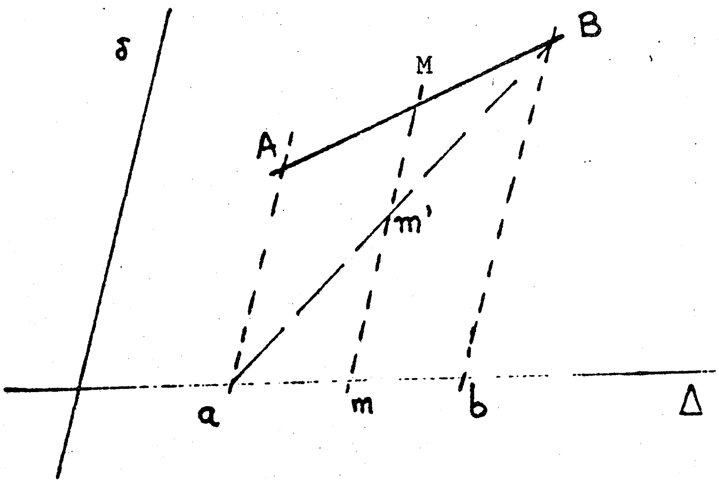
Théorème 1 :

La droite qui joint les milieux de deux côtés d'un triangle est parallèle au 3ème côté.

Théorème 2 :

La droite qui passe par le milieu d'un côté et qui est parallèle à un deuxième côté rencontre le 3ème côté en son milieu.

(2) Projection du milieu d'un segment sur une droite



Etant donné un segment [A B], $A \neq B$. Soit une projection p du plan sur une droite Δ suivant une direction δ. On pose $p(A) = a$ et $p(B) = b$. Soit M le milieu de [AB] ; $m = p(M)$. Soit Δ_M la droite de direction Δ passant par M ; elle rencontre [aB] en m'. D'après le théorème 2 ; Δ_M rencontre [aB] en son milieu m'. et [a b] en son milieu m.

Théorème :

La projection du milieu d'un segment est le milieu de la projection de ce segment.

CHAPITRE VI

SYMETRIE CENTRALE

LE PARALLELOGRAMME

*
* *

INTRODUCTION

La composée de deux symétries orthogonales par rapport à deux droites perpendiculaires introduit la symétrie centrale.

Les "invariants" pour la symétrie orthogonale seront donc des "invariants" pour la symétrie centrale. Cependant le fait que l'on compose deux symétries par rapport à deux droites perpendiculaires amène une nouvelle propriété non vérifiée par la symétrie orthogonale par rapport à une droite : l'image d'une droite est une droite parallèle.

Les propriétés du parallélogramme se déduisent de celles de la symétrie centrale.

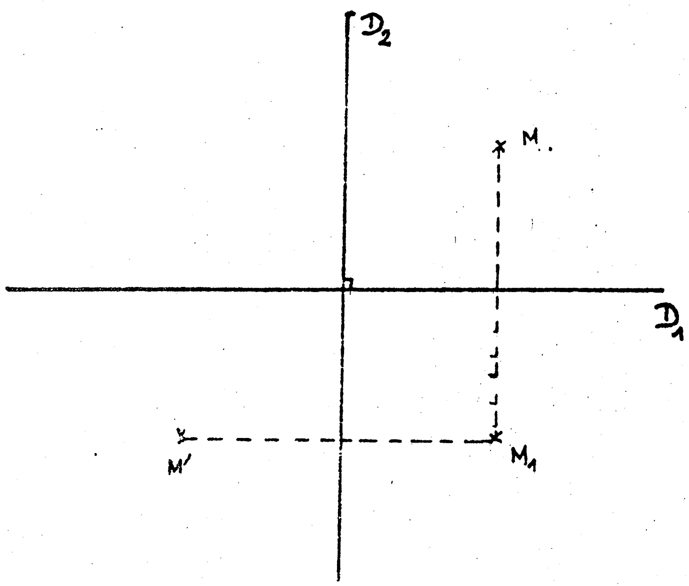
Nous avons rajouté des caractérisations utilisées fréquemment par les élèves pour construire des parallélogrammes, mais trop souvent évacuées des manuels actuels (ceci est peut être dû à la nécessité de faire intervenir la convexité du demi-plan à ce niveau) ; elles pourront faire l'objet d'activités dirigées par le maître.

*
* *

SYMETRIE CENTRALE

LE PARALLELOGRAMME

I - COMPOSITION DE DEUX SYMETRIES ORTHOGONALES PAR RAPPORT A DEUX DROITES PERPENDICULAIRES.



$$M \xrightarrow{S_{D_1}} M_1 \xrightarrow{S_{D_2}} M'$$

ler cas : $M \notin D_1 \cup D_2$ $\qquad M \xrightarrow{S_{D_2} o S_{D_1}} M'$

$\qquad\qquad\qquad\qquad I \longrightarrow I$

La droite (IM) se transforme en (IM_1) par S_{D_1}

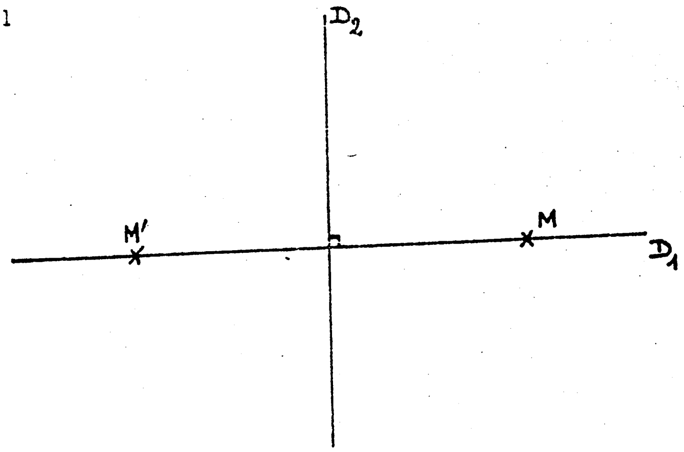
D_1 est bissectrice de $\{(IM) ; (IM_1)\}$

$D_2 \perp D_1$ donc D_2 est l'autre bissectrice ; S_{D_2} transforme alors (IM_1) en (IM). Or $\quad (IM_1) \xmapsto{S_{D_2}} (IM')$

Donc $\qquad (IM) = (IM')$

De plus S_{D_1} et S_{D_2} étant des isométries. $IM = IM_1 = IM'$
et $M \notin D_1 \cup D_2$ donc $M \neq M'$. I est donc le milieu de $[MM']$

2me cas : $M \in D_1$



$$M \xmapsto{S_{D_1}} M \xmapsto{S_{D_2}} M'$$

$D_2 \perp D_1$ alors D_1 est invariante globalement par S_{D_2}, donc $M' \in D_1$;
alors I est le milieu de $[MM']$.

3me cas : $M \in D_2$

La démonstration se calque sur celle du 2me cas.

Conclusion :

Si D_1 et D_2 sont des droites perpendiculaires en I et si M' est l'image de M par $S_{D_2} o S_{D_1}$ alors I est milieu de $[MM']$

$S_{D_2} o S_{D_1}$ est l'application $M \longmapsto M'$ tel que I est milieu de $[MM']$
$S_{D_1} o S_{D_2}$, donc $S_{D_2} o S_{D_1} = S_{D_1} o S_{D_2}$

II - SYMETRIE CENTRALE

1 - Définition : Soit un point I

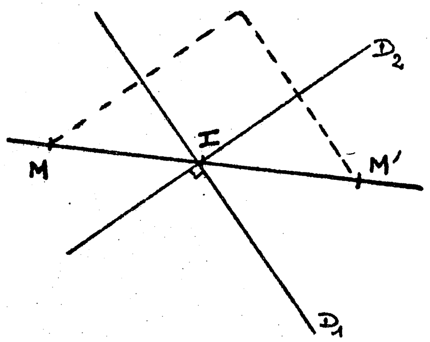
On appelle *symétrie de centre* I, l'application

$$S_I : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{P}$$

qui à tout point M associe le point M' tel que I est le milieu de $[MM']$

<u>Remarque</u> :

Une symétrie de centre I est la composée de deux **symétries orthogonales** par rapport à deux droites perpendiculaires en I.



2 - Propriétés

/A) 1er type/

Propriétés dues au fait que la symétrie orthogonale est une isométrie.

a) La symétrie centrale est une *isométrie* (comme la composée de deux symétries orthogonales).

b) I un point : $I \xmapsto{S_I} I$ I est le seul point invariant.
En effet si $A \neq I$ alors $AA' = 2\,AI \neq 0$ donc $A \neq A'$.

c) Toute symétrie de centre I est une *bijection*. (Composée de deux bijections).

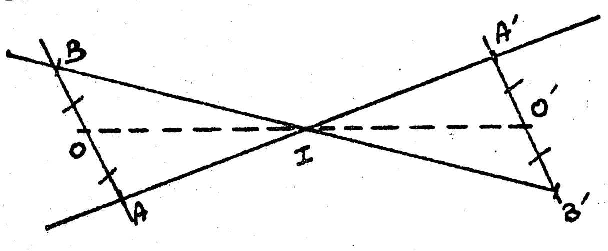
d) $M \xmapsto{S_I} M' \xmapsto{S_I} M$ On dit que S_I *échange* M et M' ou que M et M' sont symétriques par rapport à I.
On appelle *identité du plan* l'application : $M \xrightarrow{Id_{\mathbb{P}}} M$
alors

$$S_I \circ S_I = Id_{\mathbb{P}}$$

e) <u>Transformées de figures usuelles</u> :

. L'image d'un segment [AB] est un segment [A'B'] de même longueur où A' et B' sont les images de A et B respectivement.

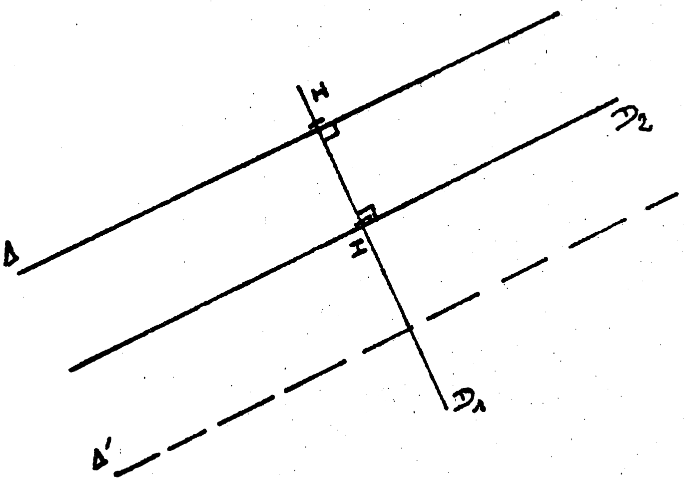
. L'image du milieu de [AB] est le milieu de [A'B']



- L'image d'une paire de droites perpendiculaires est une paire de droites perpendiculaires
- L'image d'une paire de droites parallèles est une paire de droites parallèles.

/B) 2me type/

L'image d'une droite est une droite parallèle.



Soit D_1 la perpendiculaire à Δ passant par I, et D_2 la perpendiculaire à D_1 passant par I.

Alors $\Delta \, // \, D_2$

$S_I = S_{D_2} \circ S_{D_1}$

$\Delta \xmapsto{S_{D_1}} \Delta \xmapsto{S_{D_2}} \Delta'$

avec $\Delta' // \Delta$

Remarque :

Une droite est globalement invariante si et seulement si elle passe par le centre de symétrie.

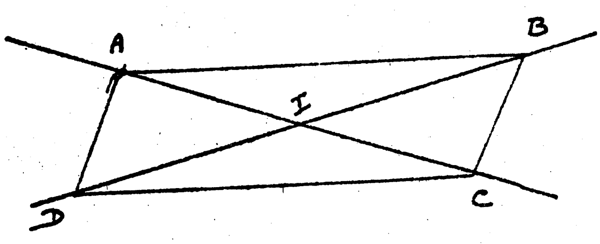
III - PARALLELOGRAMME

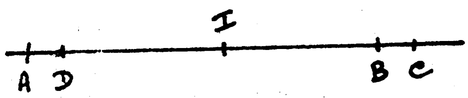
1) Notion de quadrilatère :

A quatre points A, B, C et D distincts pris dans cet ordre on associe les segments [AB] ; [BC] ; [CD] et [DA]. La figure ainsi formée est appelée le *quadrilatère* *A B C D*. Les points A, B, C et D en sont les *sommets*, les segments [AB] ; [BC] ; [CD] ; [DA] les *côtés*, [AC] et [BD] les *diagonales*. Il y a *huit façons* de noter un quadrilatère.

2) *Définition* :

Un quadrilatère A B C D *est un parallélogramme si et seulement si* [AC] et [BD] ont même milieu.





le parallélogramme est aplati

.../...

3) Propriétés :

Il découle de la définition que I, le point d'intersection des diagonales, est *centre de symétrie*.

$$S_I : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{P}$$
$$A \longmapsto C$$
$$B \longmapsto D$$
$$C \longmapsto A$$
$$D \longmapsto B$$

a) Propriétés découlant de celles de la symétrie centrale.

P1 : *Etant donnés trois points A, B, C il existe un point D unique tel que A B C D soit un parallélogramme.*

Démonstration :

Soit I le milieu de [AC], D est le point défini par : $D = S_I(B)$

Remarque :

Si A, B, C sont alignés, A B C D est un parallélogramme aplati.

P2 : *Les supports des côtés opposés d'un parallélogramme sont parallèles.*

En effet la symétrie centrale S_I transforme (AB) en (DC) et (AD) en (BC) donc (AB)//(BC) et (AD)//(BC) d'après II e B

P3 : *Les côtés opposés d'un parallélogramme ont même longueur.*

car S_I est une isométrie.

b) Propriétés caractéristiques

1°) Soit A B C D un quadrilatère non aplati tel que (AB)//(DC) et (AD)//(BC). Les points A B C ne sont pas alignés. Soit I le milieu de [AC]. L'image par S_I de la droite (AB) est la parallèle à (AB) passant par C, soit (DC). De même S_I transforme (BC) en (AD)

or $B \in (AB) \cap (BC)$ d'où $S_I(B) \in (DC) \cap (AD)$

or $(DC) \cap (AD) = \{D\}$ car A B C D n'est pas aplati.

d'où $S_I(B) = D$

A B C D est donc un parallélogramme.

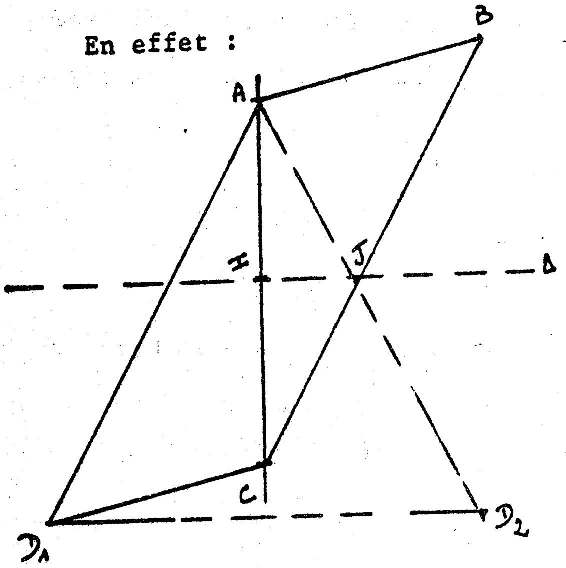
.../...

Théorème :

Un quadrilatère non aplati est un parallélogramme si et seulement si les supports des côtés opposés sont parallèles.

2°) **Problème** : Soient A, B et C trois points non alignés, *déterminer l'ensemble des points* D, *tels que* : $AB = CD$ *et* $AD = BC$

En effet :



Soit D_1 tel que $A\ B\ C\ D_1$ est un parallélogramme. Si D_2 est un autre point tel que :

$$AB = CD_2 \quad \text{et} \quad AD_2 = BC$$

alors $AD_2 = AD_1$ $CD_2 = CD_1$

d'où $D_2 = S_{(AC)}(D_1)$

donc $D_2 \in \mathcal{P}_{(AC)}(B)$

alors $A\ B\ C\ D_2$ n'est pas un parallélogramme car $(AC) \cap [BD_2] = \phi$

Remarque :

Soit (Δ) la médiatrice de $[AC]$

alors : $S_{(AC)} \circ S_I = S_\Delta$

car $A \longmapsto C$ et $B \longmapsto D_2$

Donc $(BD_2) // (AC)$

$A\ B\ D_2\ C$ *est un trapèze isocèle* :

Si $(AB) \cap (CD_2) = \{K\}$ alors $K \in (\Delta)$

Si $(AD_2) \cap (BC) = \{J\}$ alors $J \in (\Delta)$

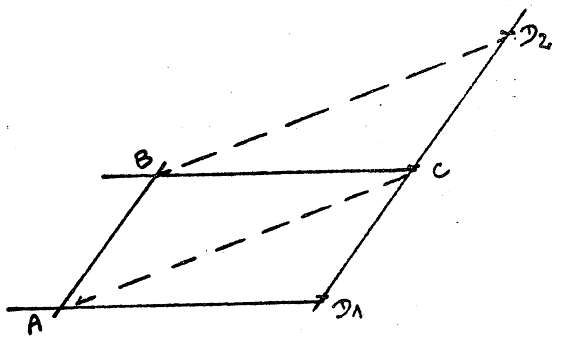
Théorème :

Soit $A\ B\ C\ D$ *un quadrilatère non aplati tel que* $AB = CD$ *et* $AD = BC$ *si* D *n'est pas dans le demi-plan* $\mathcal{P}_{(AC)}(B)$, *de bord* (AC) *contenant* B. *Alors* $A\ B\ C\ D$ *est un parallélogramme.*

.../...

3°) <u>Problème</u> : Soient A, B et C des points non alignés, déterminer *l'ensemble des points* D *du plan tels que :* $(AB)//(CD)$ *et* $AB = CD$.

Soit D_1 le point tel que $A\,B\,C\,D_1$ est un parallélogramme il existe un autre point D_2 tel que $CD_2 = AB$ alors $D_2 \in \mathcal{P}_{(AC)}(B)$ donc $A\,B\,C\,D_2$ n'est pas un parallélogramme.



<u>Remarque</u> : $B \notin \mathcal{P}_{(AC)}(D_1)$ alors $A\,B\,D_2\,C$ est un parallélogramme par application du résultat précédent.

<u>Théorème</u> :

Soit $A\,B\,C\,D$ *un quadrilatère non aplati tel que deux côtés opposés* $[AB]$ *et* $[CD]$ *ont des supports parallèles et de même longueur, si* D *n'est pas dans le demi-plan* $\mathcal{P}_{(AC)}(B)$ *de bord* (AC) *contenant* B, *alors* $A\,B\,C\,D$ *est un parallélogramme.*

CHAPITRE VII

TRIANGLE

∴∴

INTRODUCTION

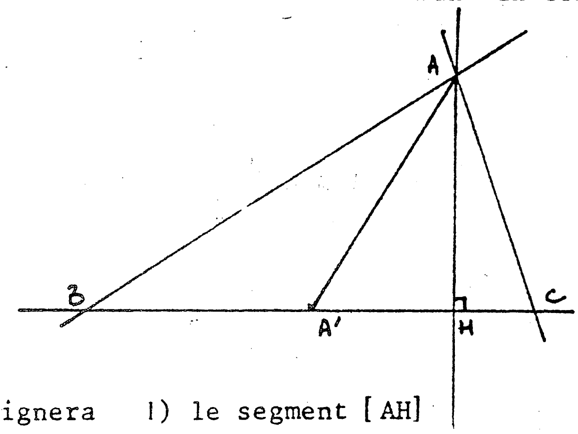
On présente ici quelques résultats classiques sur le triangle quelconque et quelques remarques sur les triangles admettant des axes de symétries.

Les justifications sont volontairement réduites. Les exercices permettront de compléter les différentes propriétés abordées ici, en particulier certaines caractérisations.

∴∴

T R I A N G L E

Dans un triangle ABC :



Selon le contexte

le mot hauteur désignera 1) le segment [AH]

2) la droite (AH)

le mot médiane désignera 1) le segment [AA']

2) la droite (AA')

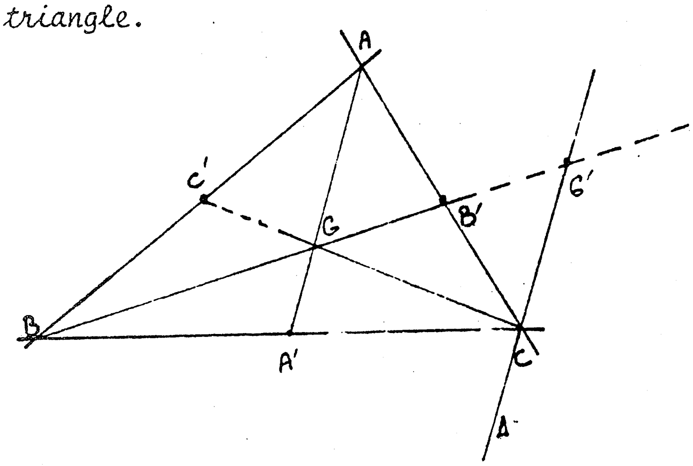
I - CERCLE CIRCONSCRIT A UN TRIANGLE ABC

Voir chapitre 4 IV b)

Théorème :

Les médiatrices des trois côtés d'un triangle ont un point commun qui est le centre du cercle passant par les sommets du triangle : ce cercle est appelé cercle circonscrit au triangle.

II - CENTRE DE GRAVITE



A' est le milieu de [BC]

B' est le milieu de [AC]

C' est le milieu de [AB]

(AA') et (BB') se coupent en G

Soit Δ passant par C, Δ//(AA')

Δ et (BB') se coupent en G'

. B' est milieu de [AC] donc aussi de [GG'] : $GB' = \frac{1}{2}\ GG'$

. A' est milieu de [BC] donc G est milieu de [BG'] : GG' = BG

. AG' CG est un parallélogramme de centre B'

puisque G est milieu de [BG], (CG) coupe [AB] en son milieu C'

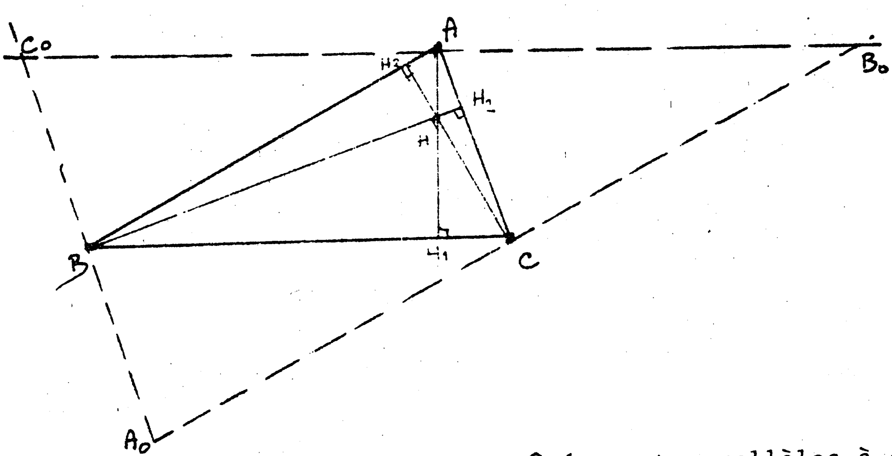
.../...

De plus G est situé au $\frac{2}{3}$ sur $[BB']$ à partir de B (de même sur $[AA']$)

Théorème :

Les médianes d'un triangle ont un point commun nommé : centre de gravité du triangle.

III - ORTHOCENTRE



On construit le triangle $A_o B_o C_o$ donc les côtés sont parallèles à ceux de ABC et tel que :

$$A \in (C_oB_o)$$

$$B \in (C_oA_o)$$

$$C \in (A_oB_o)$$

. A, B, C sont les milieux des côtés du triangle $A_o B_o C_o$

En effet A est milieu de $[C_oB_o]$ car AB_oCB et C_oACB sont des parallélogrammes et $AB_o = BC = C_oA$ de même pour B et C

$(AH_1) \perp (BC)$ donc $(AH_1) \perp (B_oC_o)$ (AH_1) est médiatrice de $[B_oC_o]$

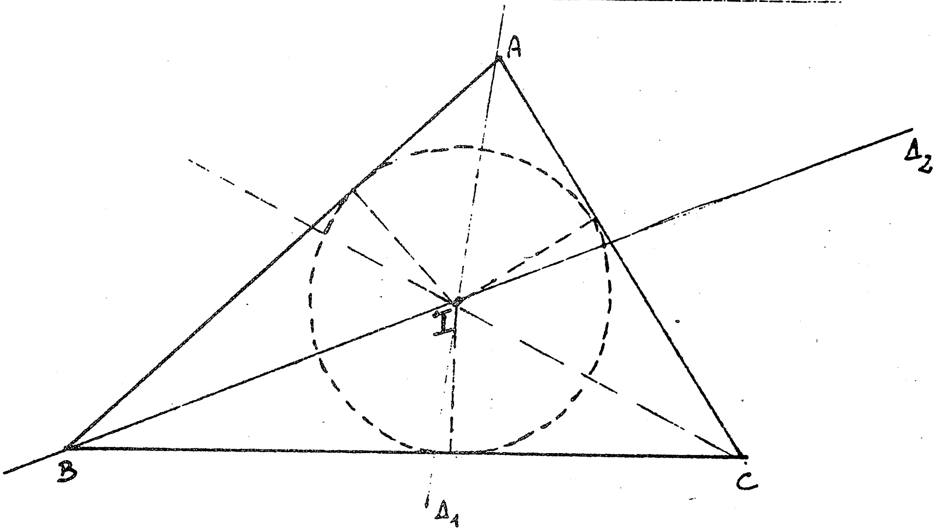
Les droites (AH_1), (BH_2) (CH_3) sont concourantes en H

Théorème :

Les trois hauteurs d'un triangle ont un point commun nommé orthocentre du triangle.

.../...

IV - POINT COMMUN AUX BISSECTRICES INTERIEURES D'UN TRIANGLE



La paire {(AB), (AC)} admet deux bissectrices passant par A.

On appellera bissectrice intérieure au triangle ABC, issue de A

la droite Δ_1 telle que $[AB) \xmapsto{S_{\Delta_1}} [AC)$

Soit Δ_2 la bissectrice intérieure passant par B

Δ_1 et Δ_2 se coupent en I

I est équidistant de (AB) et de (AC) et aussi de (AB) et (BC), donc de (AC) et (BC)

On admettra que I est intérieur au triangle ABC.

I appartient donc à Δ_3 bissectrice intérieure issue de C
I est équidistant des trois côtés.

Théorème :

Les trois bissectrices intérieures d'un triangle ont un point commun. Ce point est le centre d'un cercle tangent aux trois côtés dit cercle inscrit dans le triangle.

V - TRIANGLES AYANT UN AXE DE SYMETRIE Δ

Un tel triangle est dit isocèle

Un des sommets est sur l'axe

$A \in \Delta$

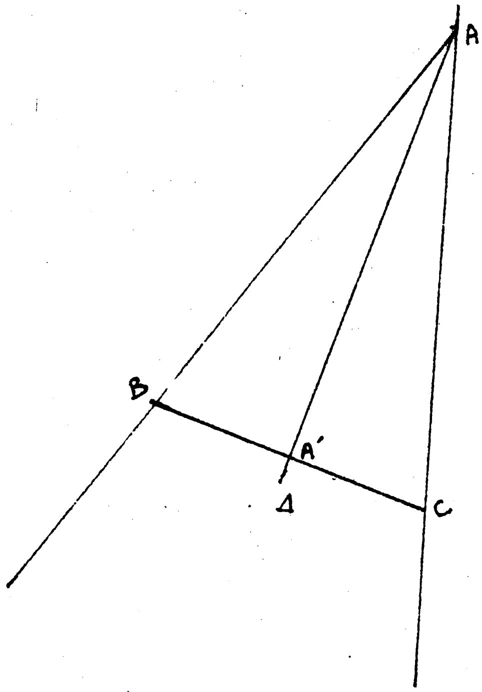
$AB = AC$

Δ est bissectrice intérieure issue de $\hat{A}$ dans le triangle ABC

Soit A' milieu de [BC] : $A' \in \Delta$

$\Delta = (AA')$

Δ est à la fois hauteur
médiatrice
médiane
bissectrice



VI - TRIANGLE ADMETTANT DEUX AXES DE SYMETRIE Δ ET Δ' DISTINCTS

$AB = AC$

$AB = BC$

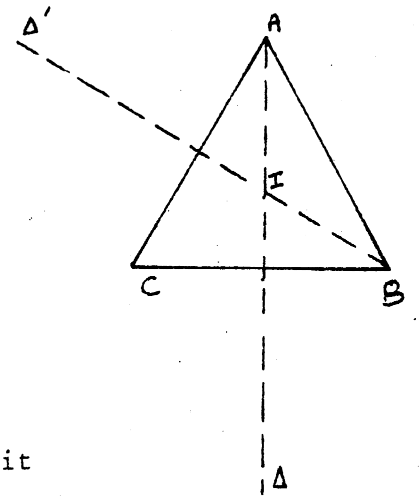
Donc $AB = AC = BC$

ABC est dit équilatéral

Il admet 3 axes de symétries car I est équidistant de (AC) et (AB)

$\Delta'' = (IC)$ est médiatrice de [AB]

I est à la fois orthocentre
centre de gravité
centre du cercle circonscrit
centre du cercle inscrit



CHAPITRE VIII

QUADRILATERES AYANT AU MOINS UN AXE DE SYMETRIE

∴

INTRODUCTION

L'étude des quadrilatères est ici conduite de façon systématique à partir de l'existence de symétries orthogonales. On y retrouve ainsi, à partir des trapèzes, les cas particuliers : rectangles, losanges et carrés, mais aussi quelques formes parfois négligées (I).

Pour alléger le chapitre, les éléments de preuve ont été volontairement réduits, ceux donnés ici doivent suffire à soutenir les justifications à donner aux élèves. Il appartiendra à l'enseignant de compléter pour lui-même, s'il le désire, les démonstrations ; il remarquera certainement qu'il devra faire intervenir des propriétés de convexité et l'axiome de Pasch (voir en annexe).

D'autre part, toutes les propriétés des quadrilatères obtenus se déduiront de l'existence d'axes de symétries ; on verra en exercice des caractérisations, omises ici, de ces quadrilatères.

∴

QUADRILATERES AYANT AU MOINS UN AXE DE SYMETRIE

I - QUADRILATERES AYANT UN AXE DE SYMETRIE Δ

Remarque préliminaire :

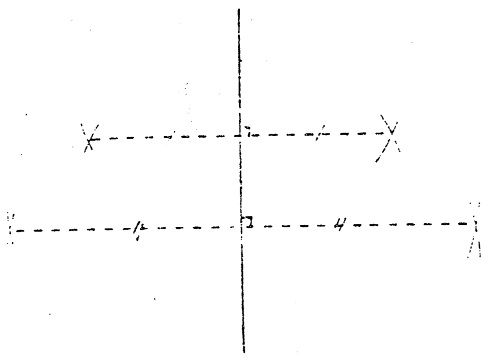
Un quadrilatère admet un axe de symétrie Δ :

SSI

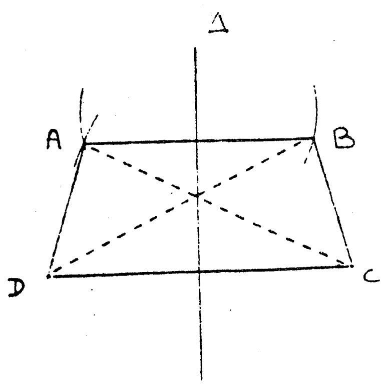
Un sommet a pour image un sommet
un côté a pour image un côté
une diagonale a pour image une diagonale

1°) Aucun sommet n'est situé sur Δ

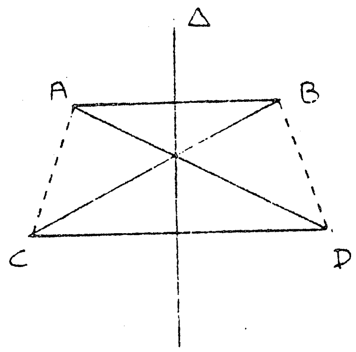
4 points vérifiant la condition ont nécessairement la disposition suivante :



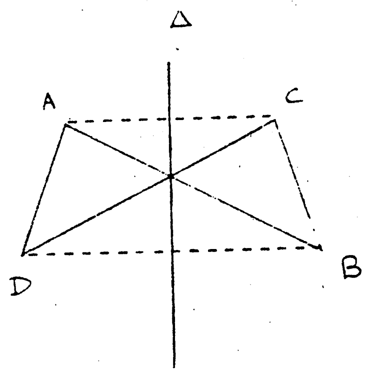
Cette disposition détermine alors 3 quadrilatères A B C D.



Trapèze isocèle convexe



Trapèze isocèle croisé



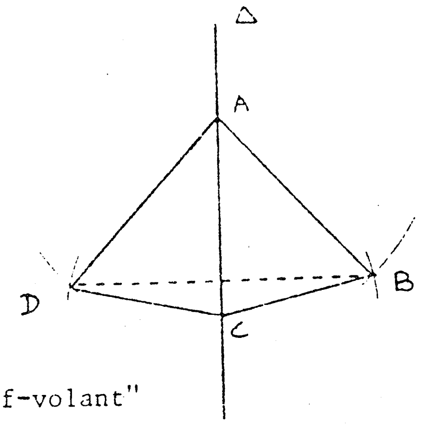
Propriétés des trapèzes isocèles ABCD

- Δ est médiatrice de [AB] et [CD] ; ces côtés sont donc parallèles.
- Δ est bissectrice des paires de droites {(AC) ; (BD)} et {(AD) ; (BC)} lorsque ces droites se coupent ; les diagonales d'une part et les côtés non parallèles d'autre part sont donc isométriques.

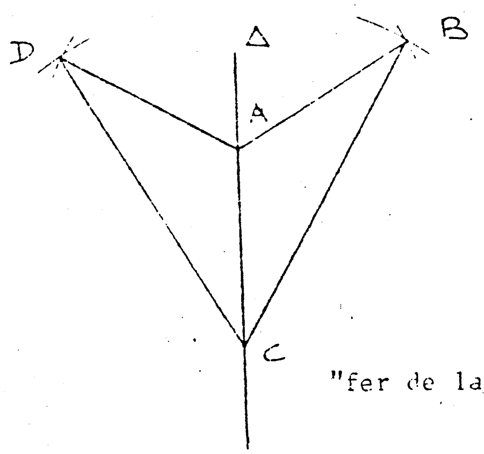
2°) Un sommet est sur l'axe de symétrie Δ

Soit A le sommet situé sur Δ ; alors C appartient aussi à Δ car [AC] a pour image une diagonale passant par A.

d'où les dispositions suivantes.

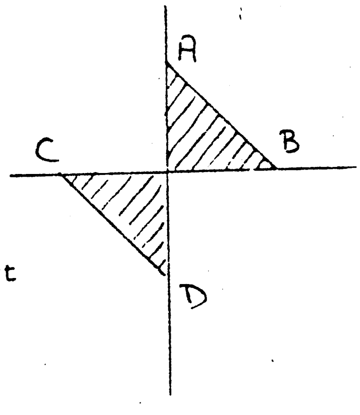


"cerf-volant"



"fer de lance"

B et D sont situés dans deux demi-plans différents par rapport à (AC) et les côtés opposés ne se coupent pas (voir ci-dessus)



Remarque : Les quatre points peuvent être disposés symétriquement sans que A B C D soit symétrique par rapport à Δ.

II - QUADRILATERES AYANT DEUX AXES DE SYMETRIE Δ_1 ET Δ_2

1°) Aucun sommet sur aucun axe

Δ_1 et Δ_2 sont médiatrices de deux côtés opposés parallèles ou de deux diagonales parallèles. (Conséquence de I 1°)

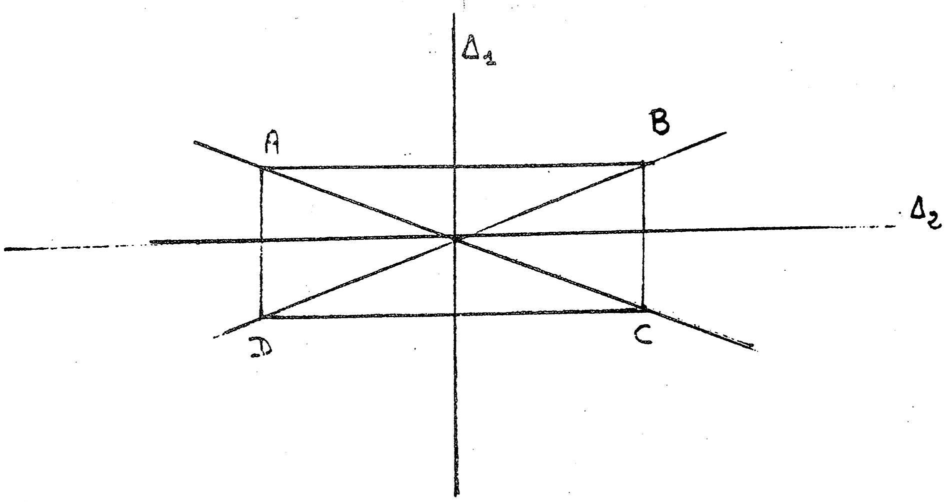
Puisqu'il n'y a qu'une paire de diagonales et deux paires de côtés opposés, il y a deux cas :

a) Δ_1 et Δ_2 sont médiatrices de deux paires de côtés

On a alors un parallèlogramme et Δ_1 et Δ_2 étant bissectrices des diagonales elles sont perpendiculaires ; ABCD est un rectangle.

b) Δ_1 médiatrice d'une paire de côtés parallèles et Δ_2 médiatrice des diagonales

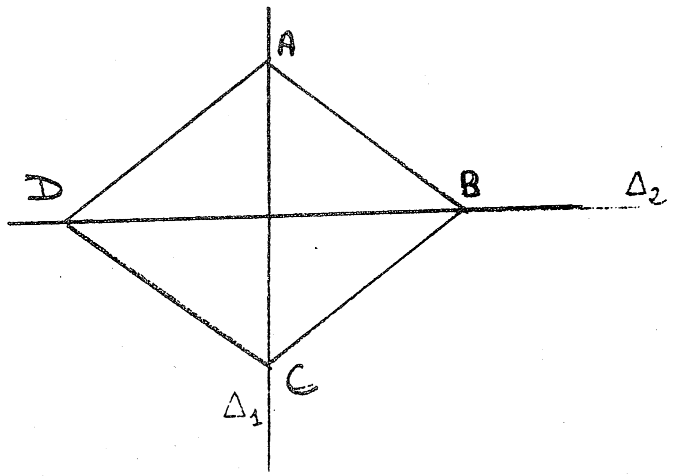
Δ_1 et Δ_2 sont alors perpendiculaires puisque bissectrices de la paire de côtés (AD) et (BC). Le quadrilatère ABDC est un rectangle.



2°) Un sommet sur chaque axe

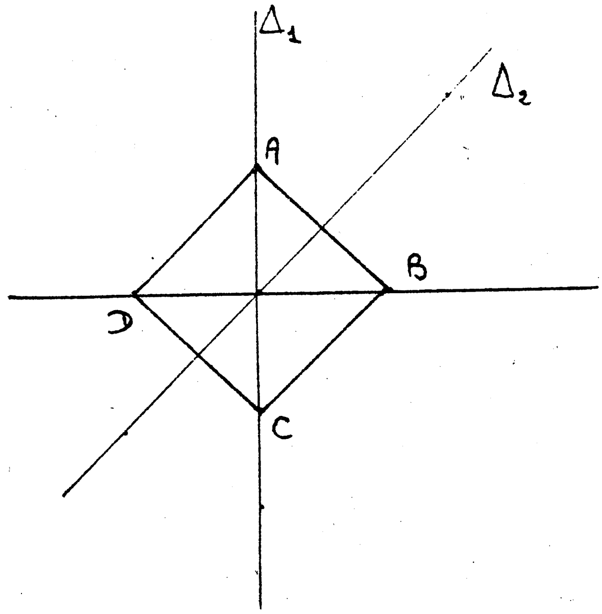
Les supports des diagonales [AC] et [BD] sont alors des axes de symétrie. (Conséquence de I 2°)

Donc (AC) est médiatrice de [BD] et (BD) de [AC] alors Δ_1 et Δ_2 sont encore perpendiculaires. ABCD est un losange.



Propriétés des losanges :

- Les côtés sont isométriques.
- Les diagonales sont orthogonales.



3°) <u>Un sommet sur un axe Δ_1</u>

<u>Aucun sommet sur l'axe Δ_2</u>

(AC) étant médiatrice de [BD]

AB = AD et CB = CD

Δ_2 est bissectrice des diagonales

donc AD = CB

Alors ABCD est un <u>losange</u>

et $(AD)//\Delta_2$; $(BC)//\Delta_2$; $(AB) \perp \Delta_2$

donc $(AB) \perp (BC)$

ABCD est un <u>rectangle</u> ; ABCD est un <u>CARRE</u>

CHAPITRE IX

TRANSLATION - VECTEURS

⁂

INTRODUCTION

L'introduction des translations se fait, dans ce chapitre, de manière naturelle à partir du parallélogramme. L'aspect dynamique de cette notion est donné par la composée de deux symétries centrales, ce qui permet de déduire les propriétés essentielles de cette transformation.

Les vecteurs sont alors présentés comme graphes de translations.

⁂

TRANSLATION - VECTEURS

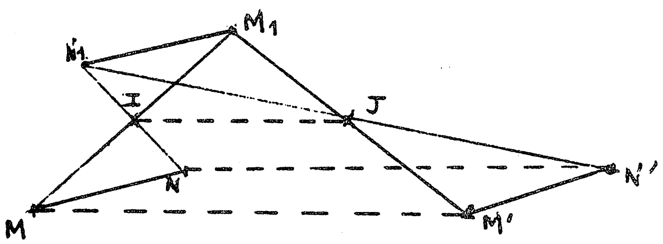
I - TRANSLATIONS

1) Introduction : Manipulations

Exercice : Etant donné deux points I et J distincts, on considère l'application composée $S_J \circ S_I$. Si M et N ont pour images respectives M' et N' alors M N N' M est un parallélogramme.

Résolution : Envisageons 3 cas.

/1er cas/ : (MN) n'est pas parallèle à (IJ)



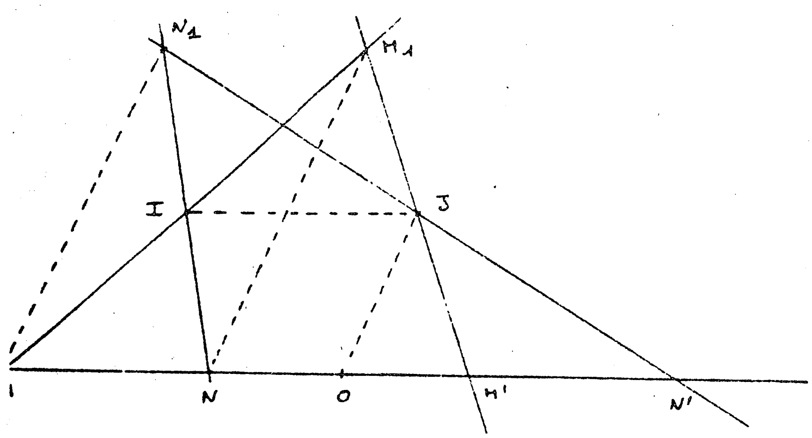
(M M')//(I J) ; (N N')//(I J)

alors M N N' M' n'est pas applati puisque (MN) $\not\parallel$ (IJ).

$(MN)//(M_1N_1)$ et $(M'N')//(M_1N_1)$

donc MNN'M' est un parallélogramme.

/2me cas/ : (M N)//(I J) et M $\notin$ (I J)



(MM')//(IJ) et (NN')//(IJ)

donc MNN'M' est aplati

J milieu de $[N_1N']$ }
Soit O milieu [MN'] } alors $(OJ)//(MN_1)$

De plus $(MN_1)//(M_1N)$.

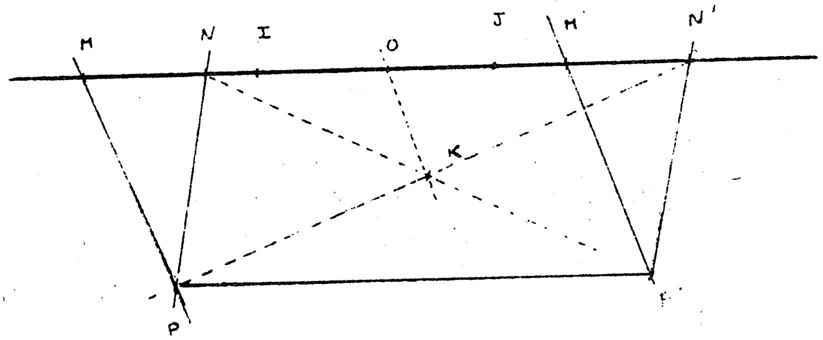
Alors $(OJ)//(M_1N)$ donc

O est le milieu de [NM']

et MNN'M' est un parallélogramme

.../...

/3me cas/ : I, J, M, N alignés



alors MNN'M' est aplati

Soit P, P $\notin$ (IJ)

$$P \xmapsto{S_J \circ S_I} P'$$

alors d'après le 1er cas :

MPP'M' et NPP'N'

sont des parallélogrammes.

Soit K le milieu de [PN']

et O le milieu de [MN'] :

alors (OK)//(MP), or (MP)//(M'P')

donc (OK)//(M'P') et O est le milieu de [NM']

donc MNN'M' est un parallélogramme

2) Définition : *une translation est une application t de $\mathbb{P}$ vers $\mathbb{P}$ telle que : si $(M,N) \in \mathbb{P} \times \mathbb{P}$ et*

$$M \xmapsto{t} M'$$
$$N \longmapsto N'$$

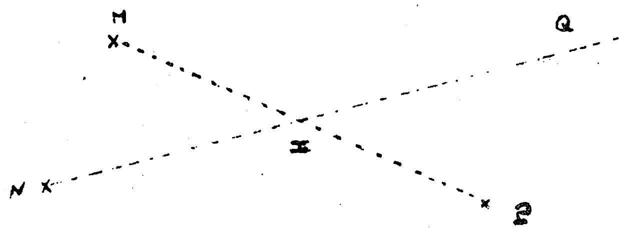
alors MNN'M' est un parallélogramme

Remarques :

- MNN'M' peuvent être alignés
- Si I et J sont deux points $S_J \circ S_I$ est une translation

3) Caractérisation d'une translation

Lemme : Etant donnés 3 points MNP il existe un unique point Q tel que MNPQ soit un parallélogramme.



I milieu de [MP]

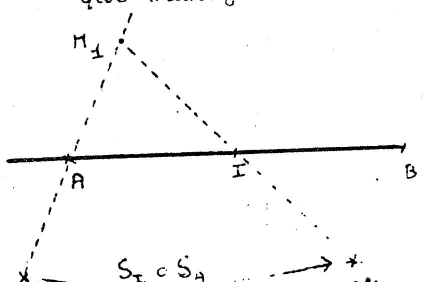
MNPQ est un parallélogramme

ssi

$Q = S_I(N)$

Théorème :

Etant donnés deux points A et B, il existe une translation unique qui transforme A en B,



Démonstration : Soit I le milieu de [AB] alors $S_I \circ S_A$ est une translation qui transforme A en B.

.../...

Unicité : Soit t une translation qui transforme A en B : Soit M un point quelconque : Si $M' = S_I \circ S_A(M)$ et $M'' = t(M)$ alors $AMM'B$ et $AMM''B$ sont des parallélogrammes et d'après le lemme : $M' = M''$, donc $S_I \circ S_A(M) = t_{(M)}$

$t = S_I \circ S_A$

Conséquences :

$S_I \circ S_A : A \longmapsto B$ alors Si I est le milieu de $[AB]$

$S_B \circ S_I : A \longmapsto B$ $\quad S_I \circ S_A = S_B \circ S_I$

Remarque :

Si $A = B$ alors $t = Id_{\mathbb{P}}$

Théorème :

Soient quatre points A, B, C, D et t_1 et t_2 deux translations telles que : $A \overset{t_1}{\longmapsto} B$ *et* $C \overset{t_2}{\longmapsto} D$

$t_1 = t_2$ *ssi* $ABDC$ *est un parallélogramme*

II - PROPRIETES DES TRANSLATIONS :

Soit t la translation telle que $A \overset{t}{\longmapsto} B$

1) t est une bijection et une isométrie comme composée de deux isométries.

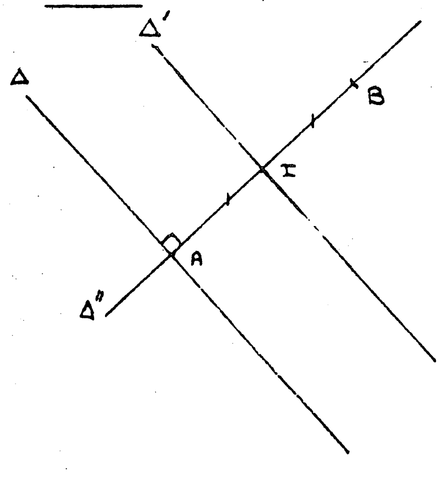
2) La bijection réciproque de la translation qui transforme A en B est la translation qui transforme B en A.

Preuve : $t : A \longmapsto B$ $\quad t' : B \longmapsto A$ $\quad t = S_I \circ S_A$ $\quad t' = S_I \circ S_B = S_A \circ S_I$

$t \circ t' = S_I \circ S_A \circ S_I \circ S_B = S_I \circ S_A \circ S_A \circ S_I = S_I \circ Id_{\mathbb{P}} \circ S_I = S_I \circ S_I = Id_{\mathbb{P}}$

(3) Soient Δ et Δ' deux droites parallèles, alors la composée des deux symétries orthogonales $s_{\Delta'} \circ s_{\Delta}$ est une translation

Preuve :



$S_I = S_{\Delta'} \circ S_{\Delta''}$ et $S_A = S_{\Delta''} \circ S_{\Delta}$

donc $S_I \circ S_A = S_{\Delta'} \circ S_{\Delta''} \circ S_{\Delta''} \circ S_{\Delta}$

$= S_{\Delta'} \circ Id_{\mathbb{P}} \circ S_{\Delta}$

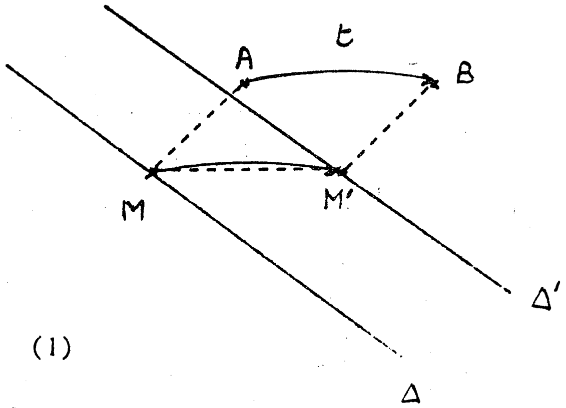
$= S_{\Delta'} \circ S_{\Delta}$

Par suite $S_{\Delta'} \circ S_{\Delta}$ est la translation qui transforme A en B.

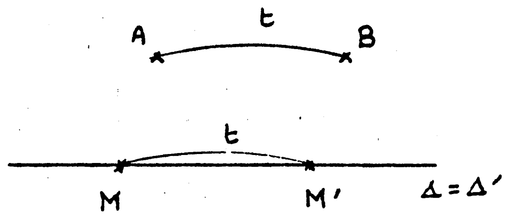
III - TRANSFORMEES DE FIGURES SIMPLES

Des propriétés de la symétrie centrale on déduit celles des translations :

1) L'image d'une droite est une droite parallèle:



(1)



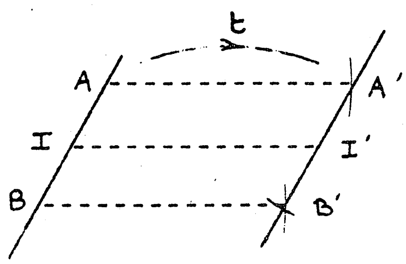
(2)

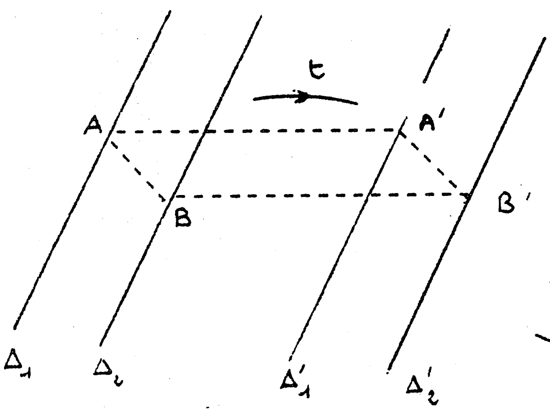
Δ $\not\parallel$ (AB)

Δ // (AB) alors Δ = Δ'

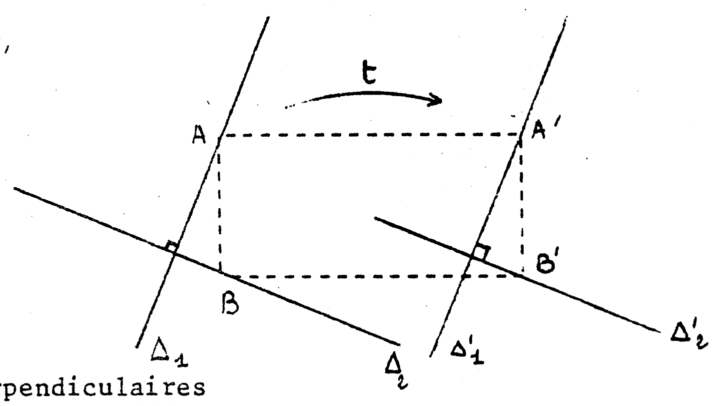
2) Si t est une translation telle que $A \xmapsto{t} A'$, $B \longmapsto B'$ alors l'image du segment [AB] est le segment [A'B']

3) L'image du milieu d'un segment est le milieu de l'image de ce segment





L'image d'une paire de droites parallèles est une paire de droites parallèles.



L'image d'une paire de droites perpendiculaires est une paire de droites perpendiculaires.

.../...

IV - VECTEURS

1) <u>Rappel</u> : Si f est une application d'un ensemble E vers un ensemble F le <u>graphe</u> de f est l'ensemble G des couples $(x \quad y)$ de $E \times F$ tels que y est l'image de x.

2) <u>Définition</u> :

Un vecteur est le graphe d'une translation.

3) <u>Notations</u> : On note $\vec{u}$ un vecteur et on lit "vecteur $\vec{u}$".

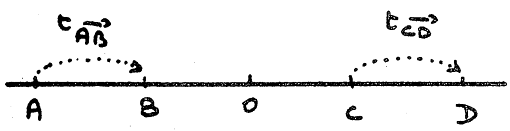
On note $t_{\vec{u}}$ la translation de graphe $\vec{u}$

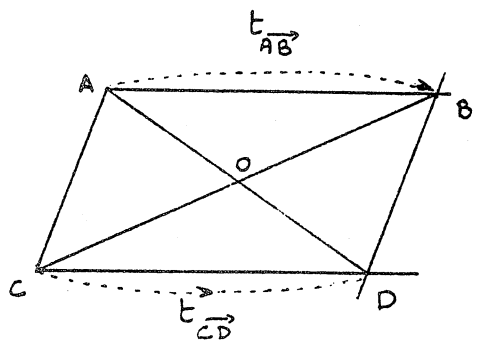
On note $\overrightarrow{AB}$ le graphe de la translation qui transforme A en B et on lit "vecteur $\overrightarrow{AB}$".

4) <u>Conséquences</u> :

a) Soient M et N des points : Les écritures suivantes sont équivalentes $N = t_{\overrightarrow{AB}}(M)$ $\quad t_{\overrightarrow{AB}} = t_{\overrightarrow{MN}}$ $\quad \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MN}$

b) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ *ssi* $ACDB$ *est un parallélogramme.*





c) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ *ssi* $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$

d) 

I *est le milieu de* $[AB]$ *ssi* $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$

e) Soit O un <u>point fixe</u>, pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe un unique point M tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$. Soit $\mathcal{V}$ l'ensemble des vecteurs, l'application φ

$$\varphi : \begin{array}{l} \mathbb{P} \longrightarrow \mathcal{V} \\ M \longmapsto \vec{u} \end{array}$$

φ est une bijection

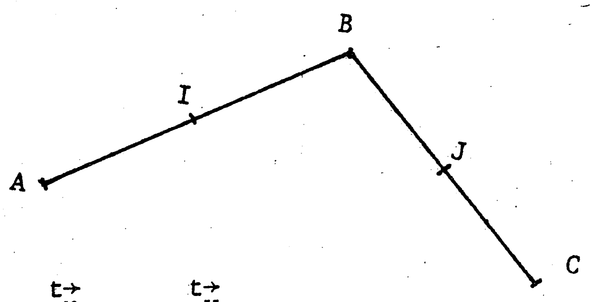
.../...

V - COMPOSITION DE TRANSLATIONS - SOMME DE VECTEURS

1°) Composée de deux translations :

Soit $t_{\vec{u}}$ et $t_{\vec{v}}$ deux translations

Soit $A \in \mathbb{P}$, il existe B unique tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et il existe C unique tel que $\overrightarrow{BC} = \vec{v}$



I milieu de $[AB]$

J milieu de $[BC]$

$$A \overset{t_{\vec{u}}}{\longmapsto} B \overset{t_{\vec{v}}}{\longmapsto} C$$

$t_{\vec{u}} = S_B \circ S_I$ et $t_{\vec{v}} = S_J \circ S_B$. Par suite $t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}} = S_J \circ S_B \circ S_B \circ S_I = S_J \circ S_I$

$t_v \circ t_u$ est donc une translation. Elle transforme A en C donc <u>$t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}}$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$</u>.

<u>*Théorème*</u> :

La composée de deux translations est une translation.

2) Addition des vecteurs

a) *<u>Définition</u> : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs on appelle somme de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$ et on note $\vec{u} + \vec{v}$ le vecteur, graphe de la translation $t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}}$*

$$t_{\vec{u}+\vec{v}} = t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}}$$

b) Formule de Chasles :

D'après la définition et le V 1° on peut écrire

Pour tous points A, B, C de $\mathbb{P}$

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

c) <u>Propriétés</u>

. *Pour tout $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de* $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
autrement dit l'addition dans $\mathcal{V}$ est commutative

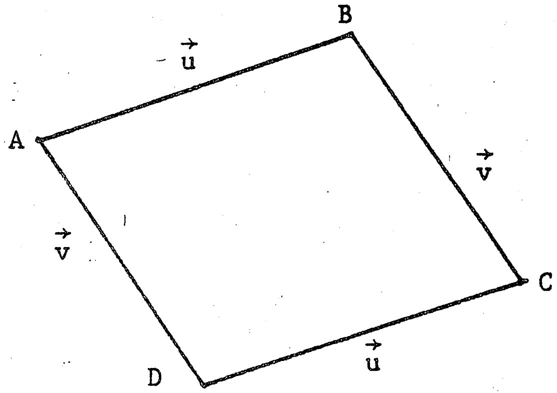
En effet soit $A \in \mathbb{P}$ il existe B unique tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$. Il existe C unique tel que $\overrightarrow{BC} = \vec{v}$ et il existe D unique tel que $\overrightarrow{AD} = \vec{v}$

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ donc $ABCD$ est un parallélogramme

Par suite $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \vec{u}$ d'après IV-4-b

$$A \xmapsto{t_{\vec{u}}} B \xmapsto{t_{\vec{u}}} C$$

$$A \xmapsto{t_{\vec{v}}} D \xmapsto{t_{\vec{u}}} C$$



$t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}}$ et $t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}}$ sont des translations et transforment A en C

donc $t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}}$

soit $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

.. $Id_{\mathbb{P}}$ est une translation, on notera $\vec{0}$ le vecteur graphe de $Id_{\mathbb{P}}$:

$Id_{\mathbb{P}} = t_{\vec{o}}$

Pour tout A de $\mathbb{P}$, $Id_{\mathbb{P}}$ est la translation qui transforme A en A d'où :

$$\underline{\overrightarrow{AA} = \vec{0}}$$

D'autre part pour tout $\vec{u}$ de $\mathcal{V}$, $t_{\vec{u}} \circ Id_{\mathbb{P}} = Id_{\mathbb{P}} \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}}$ donc

$$\underline{\vec{u} + \vec{o} = \vec{o} + \vec{u} = \vec{u}}$$

$\vec{0}$ est l'élément neutre pour l'addition des vecteurs.

... Soit $\vec{u} \in$ et A et B deux points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.
Posons $-\vec{u} = \overrightarrow{BA}$: on a vu que la translation $t_{\overrightarrow{BA}}$ est la bijection réciproque de la translation $t_{\overrightarrow{AB}}$

$$t_{\overrightarrow{BA}} \circ t_{\overrightarrow{AB}} = t_{\overrightarrow{AB}} \circ t_{\overrightarrow{BA}} = Id_{\mathbb{P}}$$

d'où $\vec{u} + (-\vec{u}) = \quad = (-\vec{u}) + \vec{u} = \vec{o}$

et $\underline{\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}}$

Tout vecteur admet un vecteur opposé.

.../...

.... La loi de composition des applications étant une opération associative, l'addition des vecteurs est associative.

$$t_{\vec{w}} \circ (t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}}) = (t_{\vec{w}} \circ t_{\vec{v}}) \circ t_{\vec{u}}$$

$$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$$

d) Conclusion :

Théorème :

$\mathcal{V}$ muni de l'addition des vecteurs a une structure de groupe abélien.

ANNEXE I

SUR LA DISTANCE

La présente note est destinée aux nostalgiques de l'axiomatique (il y en a ! Nous en avons rencontrés). Celle qui est présentée est une axiomatique à base métrique. Les axiomes A1 A2 A3 sont les traditionnels axiomes d'incidence formulés à partir de l'acquis des élèves. A4 introduit l'orthogonalité. Reste alors à présenter la notion de distance dans le plan. Nous avons évité d'introduire la distance sur la droite afin d'avoir immédiatement le support du plan euclidien. Alors le sacro-saint rapport de projection orthogonale qui reliait les distances de toutes les droites du plan est rejeté à la place subalterne qu'il n'aurait jamais dû quitter. L'axiome A5 confère à notre plan une structure d'espace métrique. Il est aussi coutume d'introduire les relations d'ordre sur la droite : "sur chaque droite il existe deux relations d'ordre opposées l'une de l'autre". Outre le fait que le mot relation d'ordre n'est pas au programme (ce qui d'ailleurs n'est pas un obstacle psychologique insurmontable !), on se demande qu'elle en est, dans la pratique, l'utilité pour les élèves d'une telle formulation. La notion de segment, par sa propriété caractéristique $[AB] = \{M \in \mathbb{P} \mid MA + MB = AB\}$ est souvent utilisée: c'est pour cela que les axiomes A6 A7 ont été préférées à celui introduisant les relations d'ordre. A8 complète le tableau : c'est d'ailleurs un axiome plus classique.

Dans ce qui suit, nous allons développer les démonstrations des propriétés énoncées page I.3.

I - RAPPEL DES AXIOMES INTRODUITS

A5 *Une unité de longueur étant choisie, on admet qu'il existe une application (appelée distance) qui a chaque couple de points du plan associe un nombre positif noté AB (AB est la distance du point A au point B).*

Cette application est caractérisée par :

1) *Etant donné un couple (A,B) de points du plan :*
   $AB = 0$ SSI $A = B$

2) *Etant donné un couple (A,B) de points du plan :*
   $AB = BA$

.../...

3) Etant donné un triplet (A,B,C) de points du plan :

$$AC \leqslant AB + BC$$

(A6) *Etant donné deux points A,B distincts du plan l'ensemble des points M, du plan, vérifiant $AM + MB = AB$ est une partie de la droite (AB)*

Définition :

Pour deux points quelconques A et B on appelle "segment AB" et on note [AB] l'ensemble des points M tels que $AM + MB = AB$

(A7) *Si A,B et C sont trois points d'une droite Δ alors :*

$$A \in [BC] \text{ ou } B \in [CA] \text{ ou } C \in [AB]$$

Théorème :

Si A,B,C sont distincts, une seule des propositions précédentes est vraie.

Démonstration :

Supposons par exemple $A \in [BC]$ et $B \in [CA]$

alors $BC = BA + AC$ et $AC = BC + BA$

d'où $BC = BA + BC + BA = BC + 2BA$ soit $AB = 0$ d'où $A = B$

Définition :

Etant donnés deux points distincts A et B, la demi-droite d'origine A contenant B est l'ensemble noté [AB) des points M tel que :

$$M \in [AB] \text{ ou } B \in [AM]$$

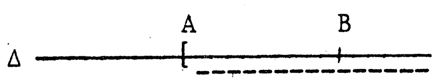
ou, ce qui est équivalent [AB) est l'ensemble des points M tels que $A \notin [BM]$

Propriété : Si $A \neq B$ $[AB) \cap [BA) = [AB]$

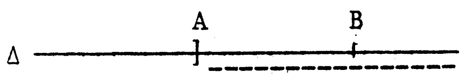
Démonstration :

C'est évident compte tenu de la définition.

On appelle demi-droite ouverte d'origine A contenant B, la demi-droite [AB) privée du point A ; on la note]AB)



demi-droite fermée [AB)



demi-droite ouverte]AB)

A8 *Etant donné une demi-droite* $[AB)$ *et un nombre positif* d, *il existe un point* M *unique de* $[AB)$ *tel que :*

$$AM = d$$

II - DEMONSTRATION DES PROPRIETES DU CHAPITRE I

Théorème :

Soit A *un point de la droite* $\mathcal{D}$ *; pour tout nombre strictement positif* d *il existe deux points* C_1 *et* C_2 *et deux seulement tels que*

$$AC_1 = AC_2 = d$$

Démonstration :

Soit $A \in \Delta$ et $B \in \Delta - \{A\}$ alors il existe un unique point $C_1 \in [AB)$ tel que $AC_1 = d$

Sur la demi-droite $[BA)$ il existe un unique point C_2 tel que $BC_2 = BA + d$

Comme $C_2 \in [BA)$ et comme $BC_2 > BA$ on ne peut avoir $C_2 \in [BA]$ donc

$A \in [BC_2]$ et par suite $BC_2 = BA + AC_2 = BA + d$ d'où $AC_2 = d$

$A \in [BC_2]$ et $A \neq C_2$ entraine que $C_2 \notin [AB)$ donc que $C_2 \neq C_1$

Soit alors $C' \in \Delta$ tel que $AC' = d$ et $C' \neq C_1$

Alors d'après A8 $C' \notin [AB)$ d'où $A \in [BC']$ d'après A7 ; donc $C' \in [BA)$

et $BC' = BA + AC' = BA + d$.

D'après (A8) $C' = C_2$

Remarque :

C_1 et C_2 n'appartiennent pas à une même demi-droite d'origine A (d'après A8)

Théorème :

Soit $A \in \Delta$, B *et* C *deux points tels que* $A \in]BC[$ *alors* $\{]AB),]AC), \{A\} \}$ *réalise une partition de* Δ

.../...

Démonstration :

Il existe des points B et C tels que $A \in]BC[$: il suffit de choisir $C \in [AB]$ avec $BC < BA$. On a alors $A \in [BC]$ et $BC = BA + AC$.

:: Soit $M \in \Delta$ et $M \notin [AB)$: alors $A \in [BM]$ et $MB = MA + AB$ avec $AM > 0$

Supposons que $M \notin [AC)$ alors $A \in [MC]$ donc $MC = MA + AC$

Dans cette hypothèse $BM + MC = (BA + AM) + (MA + AC) = BA + AC + 2AM$
$= BC + 2AM > BC$

$CB + BM = (CA + AB) + (BA + AM) = CA + AM + 2AB = CM + 2AB > CM$

$BC + CM = (BA + AC) + (CA + AM) = BA = AN + 2AC = BN + 2AC > BM$

De ce fait $M \notin [BC]$ et $B \notin [CM]$ et $C \notin [BN]$

ce qui contredit (A7)

Par suite $A \notin [MC]$ soit $M \in [AC)$

alors $\Delta =]AB) \cup]AC)$

donc $\Delta = \{A\} \cup]AB) \cup]AC)$

::: Soit $M \in \Delta - \{A\}$: $AM = d > 0$. Il existe un point M_1 unique de $[AB)$ tel que $AM_1 = d$. Sur Δ il existe un deuxième point M_2 distinct de M_1 tel que $AM_2 = d$. M_2 n'appartient pas à $[AB)$ car $M_1 \neq M_2$ donc $M_2 \in]AC)$ car $\Delta = \{A\} \cup]AB) \cup]AC)$.

Comme $\{M \mid AM = d\} = \{M_1, M_2\}$ on a soit $M = M_1$ soit $M = M_2$

En conséquence : soit $M \in]AB)$, soit $M \in]AC)$

Par suite $]AB) \cap]AC) = \phi$

Corollaire :

Si $C' \in]AC)$ *alors* $[AC') = [AC)$

Démonstration :

Avec les notations du théorème précédent

$C' \in]AC)$ donc $C' \notin [AB)$

D'après le théorème précédent $\{]AB) ; [AC')\}$ est une partition de Δ.

$[AC') = [AC)$ comme complémentaire de $[AB)$ dans Δ.

Corollaire 2 :

Il n'y a que deux demi-droites ouvertes d'origine A.

Démonstration :

Soit $]AB)$ et $]AC)$ les deux demi-droites introduites précédemment.
Soit $M \in \Delta - \{A\}$

Si $M \in]AB)$ $[AM) = [AB)$
Si $M \in AC)$ $[AM) = [AC)$ d'après le corollaire précédent

cela permet alors de légitimer les notations des demi-droites $[Ax)$ et $[Ay)$ de la page I.3.

Théorème :

Toute demi-droite (ouverte ou fermée) est convexe.

Démonstration :

Soit deux points distincts M_1 et M_2 d'une demi-droite $[Ax)$

- Si $M_1 = A$ ou $M_2 = A$: supposons par exemple $M_1 = A$ alors $[Ax) = [AM_2)$ donc $[M_1M_2] = [AM_2] \subset [AM_2)$
- Si $M_1 \neq A$ et $M_2 \neq A$: alors $[Ax) = [AM_2) = [AM_1)$

  $M_1 \in [Ax)$ donc $M_1 \in [AM_2]$ ou $M_2 \in [AM_1]$

quitte à changer la numérotation, on peut toujours supposer $M_1 \in [AM_2]$

Soit $P \in [M_1M_2]$ $AM_2 = AM_1 + M_1M_2 = AM_1 + M_1P + PM_2$

$$\geqslant AP + PM_2 \geqslant AM_2$$

donc $AM_2 = AP + PM_2$ d'où $P \in [AM_2]$ et par suite $P \in [Ax)$

$[M_1M_2] \subset [Ax)$ d'où le résultat.

Corollaire :

Tout segment est convexe.

En effet $[AB] = [AB) \cap [BA)$.

III - INTERSECTION DE DEUX DEMI-DROITES D'UNE DROITE :

A) *Lemme* :

Soit $[AB)$ *une demi-droite et* $[Bx)$ *une demi-droite d'origine* B.

Si $[Bx) \neq [BA)$ *alors* $\{[AB],]Bx)\}$ *est une partition de* $[AB)$

.../...

<u>Démonstration</u> :

Soit $M \in [AB)$

Si $M \notin \,]Bx)$ alors $M \in [BA)$ d'où $M \in [AB) \cap [BA) = [AB)$

donc $[AB) = [AB] \cup \,]Bx)$

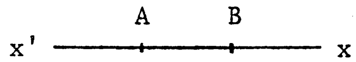
$[AB] \cap \,]Bx) \subset [BA) \cap \,]Bx) = \phi$ d'où le résultat

B) <u>Etude de l'intersection</u> : A et B sont distincts

on considère deux demi-droites $[Ax)$ et $[Bx')$

1°) Si $[Ax) = [AB)$:

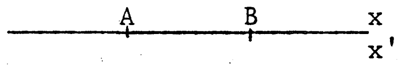
a) $[BA) = [Bx')$



alors $\underline{[Ax) \cap [Bx') = [AB) \cap [BA) = [AB]}$

b) $[BA) \neq [Bx')$ alors $\{[AB], \,]Bx')\}$ est une partition

de $[AB) = [Ax)$



donc $\underline{[Ax) \supset [Bx')}$

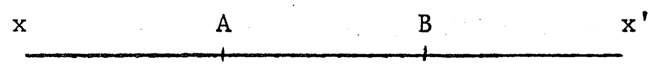
2°) Si $[Ax) \neq [AB)$ alors $\{[AB], \,]Ax)\}$ est une partition de $[BA)$.

a) $[BA) = [Bx')$

Alors $\underline{[Ax) \subset [Bx')}$

b) $[BA) \neq [Bx')$ alors $\{[AB], \,]Bx')\}$ est une partition

de $[AB)$



$[Ax) \cap [Bx') \subset [BA) \cap [AB) = [AB]$

$[Ax) \cap [Bx') \subset [AB] \cap [Ax) \cap [Bx') = \phi$

d'où $\underline{[Ax) \cap [Bx') = \phi}$

Il serait intéressant de développer l'orientation de la droite. Soit $\mathcal{D}_\Delta$ l'ensemble des demi-droites ouvertes de la droite Δ.

On définit une relation dans $\mathcal{D}_\Delta$ par :

$]Ax) \,\mathcal{R}\,]Bx') \Leftrightarrow \,]Ax) \cap \,]Bx')$ est une demi-droite, alors $\mathcal{R}$

est une relation d'équivalence n'ayant que deux classes d'équivalence: chacune est une orientation de la droite.

.../...

ANNEXE II

GEOMETRIE DE DISPOSITION

L'axiomatique ne serait pas complète sans l'axiome de Pasch qui permet de résoudre la plupart des problèmes de géométrie de disposition. (Convexité du demi-plan, classification des quadrilatères du plan, position du point d'intersection des bissectrices d'un triangle,Projection d'un segment...). En ce qui concerne des problèmes qui se posent (?) au niveau de cette classe.

Seuls les points : convexité du demi-plan et classification des quadrilatères du plan seront abordés dans cette étude.

I - AXIOME DE PASCH ; DEMI-PLAN :

1) On dit qu'une droite D rencontre le segment $[AB]$ lorsque les droites D et (AB) sont sécantes en $I \in [AB]$

A10 *Soit A,B, C les sommets d'un triangle, toute droite ne contenant pas un des sommets rencontre zéro ou deux côtés du triangle.*

Ceci restant valable même si le triangle est aplati.

2) Demi-plan : Soit D une droite de $\mathbb{P}$. On définit une relation $\mathcal{R}$ dans $\mathbb{P}-D$ de la façon suivante :

$$A \mathcal{R} B \Leftrightarrow D \cap [AB] = \phi \quad \text{(autrement dit } D \text{ ne rencontre pas } [AB])$$

Il est facile de vérifier que cette relation est réflexive et symétrique. Montrons qu'elle est transitive :
Supposons $A \mathcal{R} B$ et $B \mathcal{R} C$. Si deux des points A,B, C sont confondus alors on a trivialement $A \mathcal{R} C$. Si les trois points sont distincts A10 permet de conclure:

$$\left.\begin{array}{l} D \cap [AB] = \phi \\ D \cap [BC] = \phi \end{array}\right. \quad \text{donc d'après (A10)} \quad D \cap [AC] = \phi$$

$\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence dans $\mathbb{P}-D$ cherchons les classes d'équivalence.

.../...

Soit $A \in \mathbb{P}-D$ et $I \in D$, il existe un point $B \in [AI)$ tel que $AB > AI$. Par suite $I \in [AB]$. B n'appartient pas à D sinon A, I et B seraient alignés sur D. $D \cap [AB] = \{I\}$ les points A et B ne sont pas en relation. $Cl(A) \neq Cl(B)$ il y a donc au moins deux classes.

Soit C un point de $\mathbb{P}-D$ distinct de A et B : D rencontre le côté $[AB]$ du triangle A B C donc D rencontre $[BC]$ ou $[AC]$ d'après l'axiome de Pasch. Par suite on a $B \mathcal{R} C$ ou $A \mathcal{R} C$ soit $Cl(C) = Cl(B)$ ou $Cl(C) = Cl(A)$.

Il n'y a que deux classes d'équivalence, d'où

<u>*Théorème et définition*</u> :

Dans $\mathbb{P}-\mathcal{D}$ la relation $\mathcal{R}$ définie par

$A \mathcal{R} B \Leftrightarrow \mathcal{D} \cap [AB] = \phi$ *est une relation d'équivalence et il y a deux classes d'équivalence.*

Chaque classe d'équivalence est appelée demi-plan ouvert de frontière $\mathcal{D}$

Si A est un point de $\mathbb{P}-D$ on notera P_A le demi-plan ouvert de frontière D contenant A.
$\overline{P}_A$ désignera l'ensemble $P_A \cup D$; $\overline{P}_A$ est appelé demi-plan fermé de frontière D contenant A.

<u>*Théorème*</u> :

Tout demi-plan (ouvert ou fermé) est convexe.

<u>Démonstration</u> :

a) Soit P_A le demi-plan ouvert de frontière D contenant A, B et $C \in P_A$ alors $[BC] \cap D = \phi$

$$\forall M \in [BC],\ [BM] \cap D \subset [BC] \cap D = \phi \quad \text{d'où} \quad B \mathcal{R} M$$

et par suite $M \in P_A \cap [BC] \subset P_A$ d'où P_A est convexe.

b) Soit B et C deux points de $\overline{P}_A = P_A \cup D$

Si $(B,C) \in P_A \times P_A$ alors $[BC] \subset P_A \subset \overline{P}_A$

Si $(B,C) \in D \times D$ alors $[BC] \subset D \subset \overline{P}_A$

Si $B \in P_A$ et $C \in D$ alors $[BC] \cap D = \{C\}$. Dans ce cas

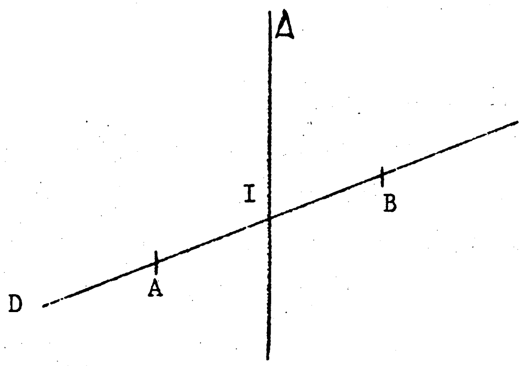
$\forall M \in [BC[,\ [BM] \cap D = \phi$ d'où $M \in P_A$. Donc $[BC] \subset P_A \cup D = \overline{P}_A$

d'où $\overline{P}_A$ est convexe.

3°) Intersection d'un demi-plan et d'une droite :

Soit Δ et D deux droites. Si $D // \Delta$ alors D est incluse dans un demi-plan ouvert de frontière Δ.

Etudions le cas ou D et Δ sont sécantes en I.



Soit A et B de D tels que $I \in [AB]$

$\forall\ M \in\,]IA)\ [AM] \subset\,]IA)$ car $]IA)$ est convexe

d'où $[AM] \cap \Delta = \phi$ et par suite

$M \in D \cap P_A$

donc $]IA) \subset D \cap P_A$

De même $]IB) \subset D \cap P_B$

Comme $\{D \cap P_A, D \cap P_B, D \cap \Delta\}$

et $\{]IA), \{I\},]IB)\}$ sont des partitions de D on a

$$]IA) = D \cap P_A ; \quad]IB) = D \cap P_B$$

$$[IA) = D \cap \overline{P}_A ; \quad [IB) = D \cap \overline{P}_B$$

Théorème :

L'intersection d'un demi-plan (ouvert ou fermé) avec une droite non parallèle à la frontière est une demi-droite (ouverte ou fermée).

II - CLASSIFICATION DES QUADRILATERES

Dans tout ce qui suit A, B, C et D désigneront quatre points dont trois d'entre eux sont non alignés.

Définition :

On appellera quadrilatère ABCD la réunion des segments [AB], [BC], [CD], [DA]

Les segments [AC] et [AD] sont les diagonales du quadrilatère {[AB], [CD]} {[BC], [DA]}; sont les paires de côtés opposés.

Les quatre points A,B,C,D définissent trois quadrilatères correspondant aux trois choix de paires de diagonales. Il y a huit façons de noter chaque quadrilatère.

.../...

A tout quadrilatère on peut associer trois paires de segments : les deux paires de segments opposés et la paire de diagonales.

Théorème :

Sur les trois paires de segments, il y a au plus une paire de segments sécants.

Démonstration :

Supposons que dans la quadrilatère ABCD il y ait une paire de segments sécants. On peut toujours supposer que ce sont les diagonales [AC] et [BD]. Trois des points n'étant pas alignés, $B \notin (AC)$ et $D \notin (AC)$

Les points B et D n'appartiennent pas au même demi-plan de frontière (AC)

Par suite $[BA[\subset P_B$ $\quad [DA[\subset P_B$

$[BC[\subset P_B$ $\quad [DC[\subset P_D$

d'où $[AB] \cap [DC] = \phi$ et $[AD] \cap [BC] = \phi$

On peut obtenir un quadrilatère où aucune paire est n'est formée de segments sécants.

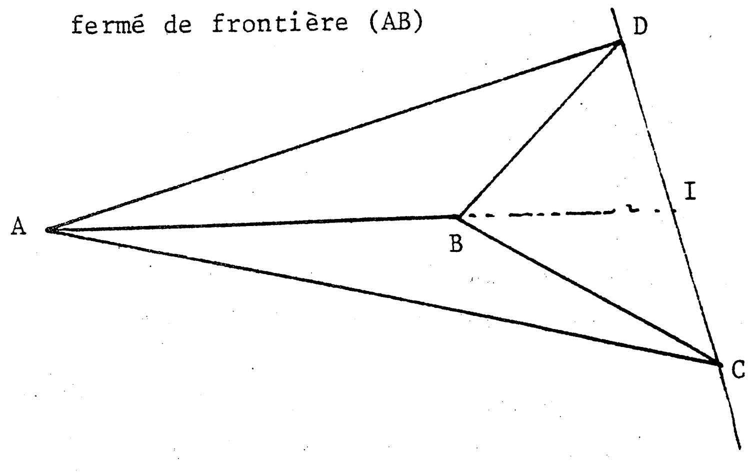
Soit A et B, et I un point de $(AB) - [AB]$

Soit Δ une droite passant par I distincte de (AB) et deux points C et D non situés dans le même demi-plan fermé de frontière (AB).

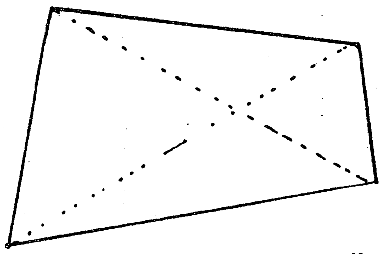
Alors $[AB] \cap (CD) = \phi$ sinon ABCD seraient alignés

$[AC] \cap [BD] = \phi$ car C et D sont non situés dans le même demi-plan fermé de frontière (AB)

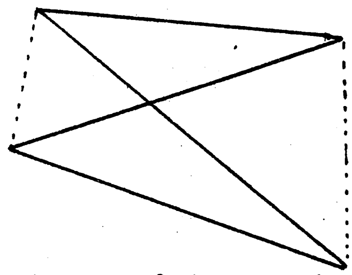
$[AD] \cap [BC] = \phi$



Si dans un quadrilatère il existe une des trois paires formée de segments sécants, cette paire peut être la paire de diagonales ou une paire de côtés opposés, ce qui donne deux autres types de quadrilatères



"Diagonales sécantes"



"Une paire de côtés opposés sécants"

On obtient donc trois types de quadrilatères. Cependant on a une caractérisation intéressante du quadrilatère "type diagonales sécantes"

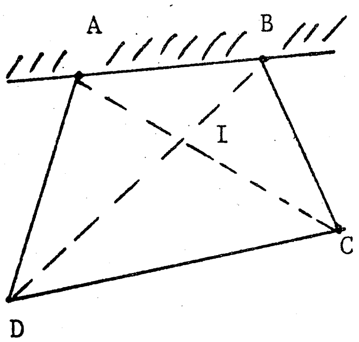
Théorème :

Soit ABCD un quadrilatère, les propositions suivantes sont équivalentes :

:: *Les diagonales [AC] et [BD] sont sécantes.*

::: *Quelque soit le support d'un côté, le côté opposé est dans le même demi-plan de frontière de ce support*
ou bien quelque soit le support d'un côté, ce support ne rencontre pas le côté opposé.

:: $\Rightarrow$ ::: $[AC] \cap [BD] = \{I\}$



Soit $\overline{P}_I$ le demi-plan fermé de frontière (AB) contenant I

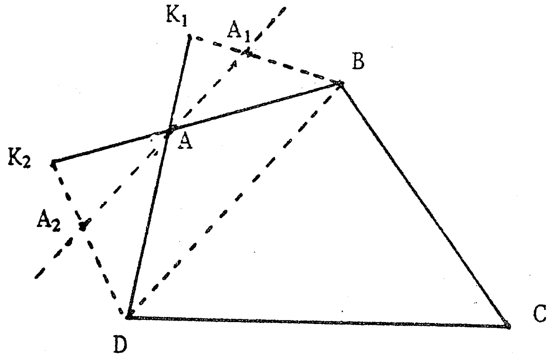
Alors $[IC] \cap (AB) = \phi$ sinon on aurait $A \in [IC]$

$[ID] \cap (AB) = \phi$ sinon on aurait $B \in [ID]$

Par suite C et D sont dans le demi-plan $\overline{P}_I$ et $[CD] \subset \overline{P}_I$

On ferait le même raisonnement pour les demi-plans fermés de frontière (BC), (CD), (DA) contenant I.

:::: ⇒ :: Soit ABCD vérifiant la proposition ::::



Soit K_1 tel que $A \in]K_1D[$ et K_2 tel que $A \in]K_2, B[$

D'après (A_9) (AC) rencontre $]BD[$ ou $]BK_1[$ et (AC) rencontre $]BD[$ ou $]K_2D[$

Si (AC) ne rencontre pas $]BD[$, (AC) rencontre $]BK_1[$ en A_1 et $]DK_2[$ en A_2

d'où $]BK_1[$ est dans le demi-plan de frontière (AB) contenant K_1, donc la demi-droite $]AA_1)$ est dans ce demi-plan d'après I 3°)

$]DK_2[$ est dans le demi-plan de frontière (AB) contenant D donc la demi-droite $]AA_2)$ est dans ce demi-plan ; $(AC) = (A_1A_2)$ et $(AC) = [AA_1) \cup [AA_2)$

Comme C et D sont dans le même demi-plan de frontière (AB) ne contenant pas $[AA_1)$ et par suite $C \in [AA_2)$

Mais comme $]DK_2[$ est dans le demi-plan de frontière (AD) contenant K_2 la demi-droite $]AA_2)$ est dans ce demi-plan et par suite C et B ne sont pas dans le même demi-plan de frontière (AD).

Donc (AC) rencontre $]BD[$

Le même raisonnement montrerait que (BD) rencontre $]AC[$ d'où les diagonales sont sécantes.

Le quadrilatère ABCD délimite un ensemble qui est intersection de demi-plans : cet ensemble est donc convexe.

d'où "le type diagonales sécantes" correspondra à l'appellation "quadrilatère convexe".

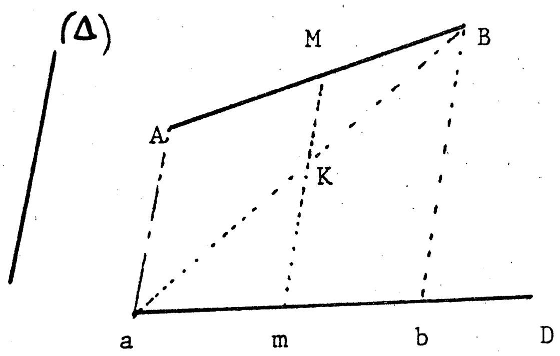
IV - PROJECTION D'UN SEGMENT

Théorème :

Soit p une projection du plan sur une droite D suivant la direction (Δ) a et b les images de deux points A et B, l'image du segment [AB] est le segment [AB] est le segment [a b]

Démonstration :

Si $(AB)//\Delta$ alors $[a\ b] = \{a\}$ et pour tout M de $[AB]$ $p(M) = A$



Si $(AB)//\Delta$ la droite Δ_M parallèle à Δ et passant par M de $]AB[$ rencontre $]aB[$ en K d'après A10 et elle rencontre $]ab[$ en m d'après A10 encore donc

$$p([A\ B]) \subset [a\ b]$$

Réciproquement: Soit $m \in]a\ b[$ la droite parallèle à Δ passant par m rencontre $]AB[$ en M pour les mêmes raisons que ci-dessus.

Alors $p(M) = m$ donc $[a\ b] \subset p([AB])$.

B I B L I O G R A P H I E

- CHOQUET : L'enseignement de la géométrie (Hermann).

- COXETER : The real projective plane (Cambridge University Press).

- I.R.E.M. de Strasbourg : Le livre du Problème (CEDIC)

- KEREKJARTO : Les fondements de la géométrie. Tome premier (Gauthier-Villars)

- Tous les manuels de 4ème.

- Et surtout : "La Pensée Irémique bordelaise".