I.R.E.M. DE BORDEAUX
1983

UNIVERSITÉ DE BORDEAUX I

ATELIERS MATHÉMATIQUES

LIVRET du MAITRE

SOLUTIONS ET COMMENTAIRES
POUR LES CAHIERS A et B

DOCUMENT POUR L'ÉCOLE ÉLÉMENTAIRE

Gérard DERAMECOURT
Francette MARTIN

SOMMAIRE

PRÉAMBULE

Les documents que nous proposons comprennent :

1. Un ensemble d'énoncés pour les élèves (document élève A et B)

Pour ces énoncés nous avons porté des indications relatives au niveau de difficulté :
- énoncé sans étoile : exploration relativement facile.
- énoncé avec étoile : exploration plus difficile.

Par ailleurs, est donné à titre indicatif, le ou les niveaux (CP, CE, CM) correspondant à chacun des énoncés.

2. Des indications pour le maître (le présent document) avec

- Des objectifs des activités proposées
- Des exemples d'utilisation
- Des réponses à propos des énoncés élèves, accompagnées éventuellement de quelques commentaires quant à un développement possible, ou à des liaisons possibles
- Une bibliographie.

.../...

OBJECTIFS :

Les activités considérées ont pour but de donner aux élèves des occasions de rechercher parmi leurs acquisitions, celles qui sont appropriées et de les faire évoluer. Plus particulièrement, elles visent à permettre aux élèves qui ont des difficultés dans l'apprentissage des mathématiques, de trouver des propositions de recherches différentes de celles rencontrées en classe, susceptibles d'améliorer leurs conceptions, leurs attitudes, éventuellement leur goût pour les mathématiques.

Les propositions d'activités considérées sont liées aux connaissances de l'enseignement élémentaire, mais ne sont pas nécessairement des illustrations, voire des applications du programme élémentaire. Elles sont conçues pour que l'élève puisse vivre un type de rapport différent avec le raisonnement, l'écriture mathématique, le calcul, les représentations géométriques... de celui qu'il peut vivre en classe... Ce qui est proposé, c'est un écart par rapport à une pratique habituelle, une forme non conventionnelle d'interrogations sur des éléments attrayants a priori. En classe, il peut y avoir :

- des apprentissages "imposés", précis, structurés... liés à une progression
- des contraintes de réalisations : durée, rédaction, explication...
- des appréciations (voire des notes au C.M_2)...

Nous ne portons pas de critiques sur ces pratiques, mais ici dans ce qui est proposé, si l'élève peut tirer profit des apprentissages déjà réalisés, peut-être les repenser, il a essentiellement affaire à des recherches. Des encouragements peuvent être prodigués de la part du maître, mais il n'y a pas de contraintes au niveau des résultats à produire et les sanctions sont naturelles (réussite, échec indépendamment de l'avis du maître).

.../...

Les recherches proposées sont une autre façon d'offrir à l'élève la possibilité de développer un ensemble de savoirs et de savoir-faire, indispensables en mathématique. Nous proposons un parcours rapide de ceux qui nous paraissent les plus importants. Nous les avons regroupés autour de deux points :

1. Concevoir des démarches et des stratégies
2. Eprouver des modèles mathématiques fondamentaux et les améliorer.

Il est entendu qu'il est difficile de dissocier ces points dans chacune des situations proposées, mais en cas de difficulté de la part des élèves, on peut présumer que l'aide à apporter devra privilégier soit l'un soit l'autre de ces points.

1. <u>Concevoir des démarches, des stratégies</u>.

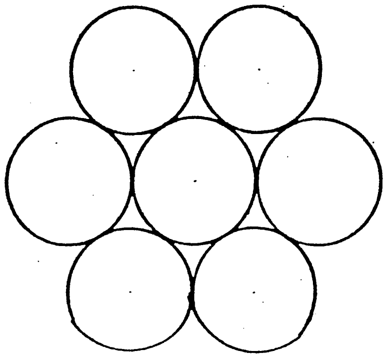
Une situation de recherche peut se définir d'une part :
- par un ensemble de contraintes clairement définies (les règles d'un jeu, les règles de calcul, les conditions du problème...), des contraintes éventuellement à préciser.
- d'autre part, par les données respectivement d'un état initial (l'état du jeu avant la partie, ou au cours d'une partie ; les nombres fournis par l'énoncé...) et d'un état final (ce que l'on veut obtenir).

● Il s'agit essentiellement alors d'imaginer une ou des démarches pour passer de l'état initial à l'état final en respectant les contraintes déterminées.

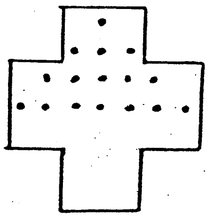
<u>Exemple</u> : 1. Dans la grille suivante, comment placer les nombres de 1 à 9 de manière que le produit des 3 nombres pris sur chaque ligne donne le nombre écrit en bout de ligne, et de manière qu'il en soit de même à propos des colonnes.

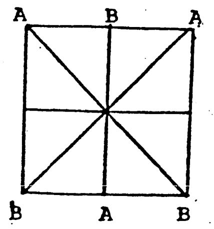
			42
			32
			270
42	80	108	

2. Six pièces de 1 F. entourent une pièce de 1 F.
Comment réaliser au compas le dessin des 7 cercles ?



3. Au jeu de solitaire, comment réduire à un jeton la configuration ci-contre.

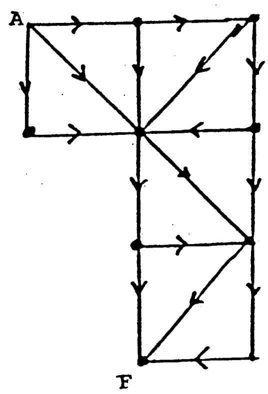




4. "Le carré à six pions" (2 joueurs).
Le joueur A place ses 3 jetons mais aux positions marquées A, B place ses 3 jetons blancs aux positions marquées B. On ne déplace qu'un pion à la fois en lui faisant franchir un intervalle d'une intersection à l'autre

- les joueurs jouent à tour de rôle chacun essayant d'aligner ses 3 pions avant que son partenaire n'ait aligné les siens.
Le joueur qui joue le premier peut-il gagner ?
Si oui, comment ?

5. Dénombrement de chemins.
Dans la figure ci-contre, dénombrer le nombre de chemins qui mènent de A à F.



Dans ce contexte un algorithme de résolution ou une stratégie gagnante est alors une démarche qui permet - en un nombre fini de "coups" - à propos de problèmes de même structure ou à propos d'un jeu, d'obtenir un état final attendu, et ceci quelle que soit la réponse de l'adversaire à chacun des coups prévus et joués.

• Dans certains problèmes ou certains jeux, il n'est pas possible de dégager une stratégie, exemples :

- Comment compléter une suite numérique ?

a - 2 5 7 8 11 13 14 . . .
b - 3 4 8 9 18 . . . . .
c - 1 1 2 6 6 12 36 . . .

Il n'y a pas de démarche systématique qui assure la découverte.

- En début de partie au jeu d'échecs, il est impossible pour chacun des joueurs d'expliciter une démarche qui assure la victoire.

Cependant pour de tels cas, il est possible d'appliquer des tactiques, c'est-à-dire des démarches locales permettant de passer de certains états à certains autres états. Ainsi à propos des deux exemples ci-dessus :

- En calculant, dans les suites numériques, les différences entre les termes successifs (ou les quotients, ou...) on essaie de trouver des constantes. Pour a) ci-dessus, on a de cette façon :

2 5 7 8 11 13 14 . . .
3 2 1 3 2 1

- Au jeu d'échecs, des procédures locales permettent de gagner telle ou telle pièce.

• Nous concevons que pour la mise en place de tous ces types de démarches, l'élève est amené à mobiliser et à développer des compétences spécifiques :

.../...

- Il analyse une situation : ce qui est permis, ce qui ne l'est pas, ce qui est connu, ce qu'il faut chercher.

- Il conçoit un projet, une suite organisée d'actions respectant les règles données.
- Il réalise effectivement un projet et recherche les erreurs éventuelles (commises lors de la conception) qu'il détecte ici au cours de ce type de validation.
- Il explore un champ de possibilités soit mentalement (à propos du "compte est bon" par exemple) soit concrètement en recherchant une procédure économique (pour une construction par exemple).
- Il agit sur la situation de façon relativement aléatoire (réalisation de calculs, d'une suite de coups dans un jeu) dans le but de découvrir des relations pertinentes qui permettront de régler l'action ultérieure et d'atteindre le but attendu.
- Il est capable d'exploiter une preuve antérieure pour construire une nouvelle preuve, ce qui est une économie dans la résolution de certains problèmes.

Il est clair que ces compétences ne sont pas mobilisées successivement dans un certain ordre, par exemple : analyse puis projet,... mais plutôt de façon dialectique : la réalisation d'un premier projet entraîne une analyse plus approfondie qui entraîne...

De façon plus générale, les points explicités nécessitent de la part de l'élève : attention, observation, mémorisation, prévision, imagination, déduction... qui sont des qualités auxquelles il est fait appel dans de nombreuses activités en classe, mais non nécessairement sous la forme que nous considérons ici.

2. Eprouver les modèles fondamentaux et les améliorer.

Les activités retenues font essentiellement appel :

.../...

1 - Aux modèles numériques élémentaires :

a) les nombres, les opérations, les comparaisons ; exemples :

- Voici un tableau des nombres de 1 à 99. La somme des nombres de la première ligne est 45. Pour la ligne suivante, tu pourrais calculer : 10 + 11 + 12 +... + 19, trouve un procédé plus rapide.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

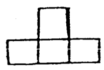
. Calcule de cette façon la somme des nombres de chaque ligne.

. Quelle est la somme de tous les nombres du tableau.

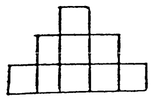
b) Les fonctions numériques, exemple : à l'aide de cubes, on réalise des escaliers à deux parties de différentes hauteurs :

hauteur 1 :

hauteur 2 :



hauteur 3 :



Complète le tableau :

hauteur	Nombre de cubes	Ecriture usuelle du nombre de cubes
1	1	1
2	1 + 3	4
3	1 + 3 + 5	9
4		
5		
6		
10		
n		

c) Les modèles relatifs aux dénombrements et aux probabilités, exemples :

. on dispose de cubes de 3 couleurs différentes. Quelles sont toutes les tours de trois couleurs que l'on peut fabriquer ?

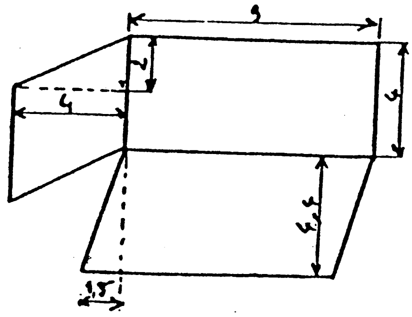
. on lance simultanément deux dés, on fait la somme des points obtenus. Quelles sont les différentes sommes que l'on peut obtenir ?

.../...

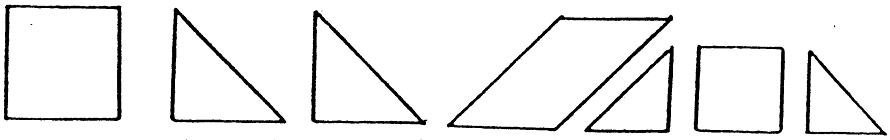
2 - Aux modèles liés à la géométrie, à l'espace : Les activités concernent certains solides géométriques, certaines figures planes, les transformations telles que : rotations, symétries, translations, homothéties...

Exemples :

a) "voici le début" du patron d'une boîte. Le fond et le couvercle sont des rectangles, les autres faces sont des parallélogrammes.
Essaie de réaliser cette boîte. Dessine le patron".



b) "Réalise les pièces ci-dessous dans de la cartonnette après avoir doublé leurs dimensions, puis assemble ces pièces pour obtenir un carré."



3. A des modèles plus étroitement liés à la logique, exemple :

jeux d'ordre :
"cinq enfants A, B, C, D, E ont fait une course. Après la course, voici ce qu'ils ont dit :
A - les deux qui sont arrivés juste avant moi sont ex-aequo
B - je suis encore dernier
D à C - je t'avais bien dit que j'arriverais avant toi !
Peux-tu dire dans quel ordre les enfants sont arrivés ?

.../...

• Lors de l'emploi des modèles numériques, l'élève dispose d'une écriture spécifique pour ses démarches. Dans le cas de la géométrie, il ne dispose que des représentations, et ces représentations peuvent ne rendre compte que d'une partie de la réalité (cas de situations relatives aux trois dimensions : le patron du cube par exemple ne rend pas compte de toutes les relations). Dans le cas de modèles plus étroitement liés à la logique, l'élève doit selon les situations, rechercher une représentation spécifique susceptible de favoriser sa démarche. Ainsi, comme pour les situations mathématiques étudiées en classe, les problèmes considérés requièrent l'usage des modèles sous différentes formes, mais ici les modèles à investir n'ont aucune raison d'être reliés aux activités de classe en cours et ils doivent éventuellement être retrouvés, voire construits, découverts s'ils n'ont pas déjà fait l'objet d'une approche.

Si les situations proposées sont moins "scolaires" plus proches du jeu, si elles ne se situent pas dans un mouvement de pensée qui considère ou sous-entend comme nécessaire l'existence d'un "fossé entre le jeu et l'étude" (Alain), elles ne sont cependant pas dépourvues d'objectifs éducatifs.

Chez l'adulte, le jeu peut se situer à côté d'activités obligatoires, du travail, pour exercer librement des activités habituellement peu mobilisées, pour réaliser une évasion... Chez l'enfant, le jeu de nature intellectuelle est une occasion d'exercer relativement librement des aptitudes nouvelles liées à son développement cognitif.

De ce point de vue, les activités ludiques de l'enfant qui ressemblent extérieurement à celles de l'adulte, doivent être l'objet d'une autre définition que celle du Robert(*).

.../...

(*) Le Robert propose : "Activité physique ou mentale, purement gratuite, généralement fondée sur la convention ou la fiction, qui n'a dans la conscience de celui qui s'y livre d'autre fin qu'elle même, d'autre but que le plaisir qu'elle procure."

Elles sont plus proches des conceptions de Lee* ou de Chateau**. Ici, le jeu de l'enfant nécessaire au développement des fonctions psychiques, physiologiques (vers la marche, vers la parole par exemple), intellectuelles (la symbolisation, les jeux à règles, ...) ne présente pas le caractère de gratuité de celui de l'adulte. L'enfant, par exemple réalise des jeux de "fabrication" dans lesquels il cherche la maîtrise des règles implicites de construction (cubes, mécano...). Il cherche à réaliser un objet susceptible de représenter un élément de l'environnement (maison, camion...)

. La tendance qu'a l'adulte à projeter dans le jeu de l'enfant le même aspect dérivatif souvent présent dans le sien, est certainement pour beaucoup dans l'origine de remarques du type :

"tu ne penses qu'à jouer !"

"tu ferais mieux de faire ton travail plutôt que de t'amuser"

ou même quelquefois du type :

"vous vous êtes encore amusés en classe !"

Nous concevons aussi qu'une activité peut être perçue comme un jeu par certains élèves et non par d'autres. L'aspect ludique d'une situation dépend de la personne qui vit cette situation,de ce qu'elle est prête à engager : connaissances, désir, temps, image d'elle-même... ainsi : chercher une procédure rapide pour calculer la somme des nombres de 1 à 100 être perçue soit comme un divertissement, soit comme un tourment selon les personnes.

.../...

---

* Lee dans "Play in education" écrit : "la croissance de chaque enfant est l'histoire de la Belle au Bois Dormant, dans laquelle le jeu tient le rôle du Prince. Un corps virtuel existe, mais son existence en acte dépend de son usage, et son usage est prescrit dans l'instinct de jeu"

** Château : "se demander pourquoi l'enfant joue, c'est se demander pourquoi il est enfant".

Il nous semble que l'adhésion des élèves aux situations proposées est favorisée si ces situations sont présentées avec un caractère simultané de jeu et de défi, en ce sens que d'une part, elles ne sont pas l'objet d'une évaluation de la part du maître et que par ailleurs, leur niveau de difficulté est choisi par les élèves.

UTILISATION :

a) Exemples généraux d'utilisations :

Différentes utilisations nous semblent possibles :

1. Le maître accorde systématiquement dans la semaine une ou des plages de l'emploi du temps pour les "ateliers" tournants. Tous les ateliers peuvent être des ateliers de mathématiques, mais il peut aussi exister simultanément un atelier de français, un atelier d'éveil, un atelier de mathématiques...

2. Les élèves réalisent, en classe, dans les moments de temps libre des recherches sur les situations, de la même façon qu'ils peuvent prendre un livre qui les intéresse.

3. Le recueil d'ateliers est remis aux élèves individuellement. Ces derniers peuvent résoudre les situations quand ils le désirent, chez eux, en classe pendant le temps libre, le temps de loisir.

L'expérience montre que si les élèves rejettent dès le début les exercices qu'ils jugent trop difficiles, ils ne rechercheront pas toujours les exercices faciles. Ces derniers qui sont d'abord choisis permettent une première "prise de possession", une mise en confiance, l'occasion de manifester avec succès des savoir-faire, ils procurent en cela une satisfaction à l'élève. Mais d'autres propositions sont là, elles présentent plus d'incertitude quant à la réussite. Après une première "conquête" du terrain, elles

.../...

offrent un caractère à la fois de défi et d'inconnu susceptible de provoquer le choix de l'élève : si tous les résultats s'obtiennent aisément, à coup sûr, il n'y a aucun risque à s'engager dans leur recherche, la situation est totalement contrôlée, par contre essayer de maîtriser un système non familier de contraintes comporte une part d'inattendu et conduit à d'autres rapports avec le plaisir de la réalisation que ceux que l'on peut considérer par ailleurs tels que : capacité d'accomplir les tâches demandées par le maître en classe, possession de savoir-faire...

. Si nous concevons qu'ici le maître ne formule pas d'éléments d'appréciation traditionnelle, nous pensons cependant qu'il lui appartient d'encourager les élèves et de fournir le cas échéant l'aide requise au niveau conceptuel. Selon sa disponibilité, cette aide peut consister en :

- l'organisation de débats entre les élèves qui ont conduit des recherches à propos de la même situation
- une discussion avec l'élève ou un groupe d'élèves
- un apport d'informations supplémentaires en liaison avec les acquisitions scolaires en cours ou non
- une étude de la situation avec l'élève ou un groupe d'élèves
- un exposé de la solution
- une remise de la rédaction de la solution (fiche correction)

Cet exposé ou remise de la solution ne prend cependant de sens que s'il y a eu investissement préalable de l'élève.

b) <u>Un exemple d'utilisation en ateliers tournants en classe : C.M</u>

Les séances prennent place une fois par semaine pour une durée d'une heure quinze environ.

.../...

ORGANISATION :

Le maître a réparti les élèves en quatre équipes (par exemple). Cette répartition sera modifiée au cours de séances ultérieures.

Chaque semaine, les élèves changent de type d'activités.

. Première séquence. :

- Distribution des fiches : (2 fiches par élève)
Equipe 1 : devinettes - nombres
Equipe 2 : le compte est bon
Equipe 3 : jeux d'ordre
Equipe 4 : nombres croisés.

- Consigne : "Chaque élève travaille seul pendant 10 minutes, on ne pose aucune question, on essaie de comprendre. Vous cherchez sur le cahier de brouillon"

- Les élèves rédigent sur le cahier de brouillon les questions qu'ils désirent poser, et qui sont relatives à certains éléments de la fiche qu'ils n'ont pas compris.

- Les élèves discutent de leurs problèmes en commun dans chacun des groupes - le maître répond aux questions posées qui n'ont pas reçu de réponse.

- Les élèves collent leurs fiches sur le cachier "Ateliers de mathématiques". Aux élèves qui ont répondu correctement, le maître remet une fiche relativement facile - ex. :" jeu à points". Aux élèves qui peuvent s'auto-corriger sans explications supplémentaires, le maître remet la fiche-réponse.
Le maître organise une discussion avec les élèves qui ont éprouvé davantage de difficultés.

. Séquences suivantes.

Un déroulement similaire est adopté après permutation circulaire des types de fiches, les fiches remises pouvant être des fiches déjà traitées par d'autres groupes ou de nouvelles fiches.

SOLUTIONS DES CAHIERS A ET B

CARRÉS MAGIQUES - SOLUTIONS A

1

15	10	8	1
6	3	13	12
9	16	2	7
4	5	11	14

2

7	0	5
2	4	6
3	8	1

CARRÉS MAGIQUES - SOLUTIONS B

1

8	1	6
3	5	7
4	9	2

2

10	4	13	7
15	5	12	2
8	14	3	9
1	11	6	16

3 & 4

8	7	25	23	2
6	16	9	14	20
5	11	13	15	21
22	12	17	10	4
24	19	1	3	18

NOMBRES EN U — SOLUTIONS A

1

4		1
5		7
2	6	3

2

3		2
7		5
1	6	4

3

3		1
7		5
2	4	6

4

2		1
7		6
3	4	5

5

3		1
4		7
6	2	5

6

1		6
5		3
7	2	4

7

2		5
3		6
7	4	1

Bien sûr, les nombres peuvent être intervertis dans une même barre verticale.

NOMBRES EN U.H — SOLUTIONS B

1

1	2		1	3
9	4		3	4
2	6		9	6
	8	5	7	

2

1	1		2	3
2	3		4	4
8	7		8	7
	9	5	6	

3

2		1
3		5
6		9
8	7	4

4

1		2
4		8
5		6
9	7	3

5

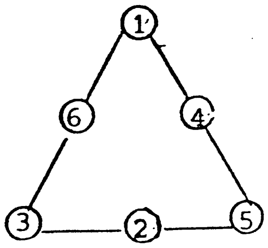
2		1
3		7
8		6
5	9	4

6

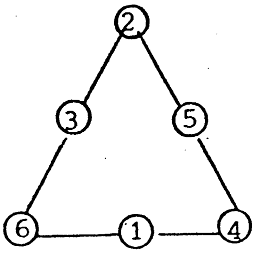
1		2
4		8
7		5
6	9	3

1 2	1		2	1 2
4 4	3		4	6 5
11 11	11	10	7	7 7
9 8	5		9	5 8
3 3	8		6	9 6

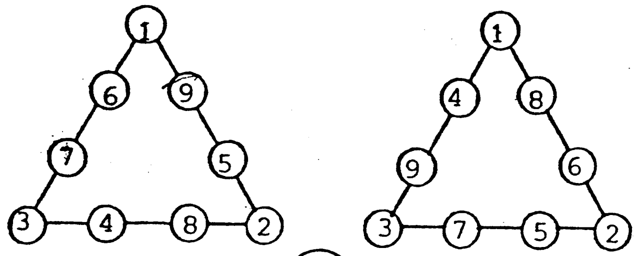
NOMBRES EN TRIANGLES - SOLUTIONS A



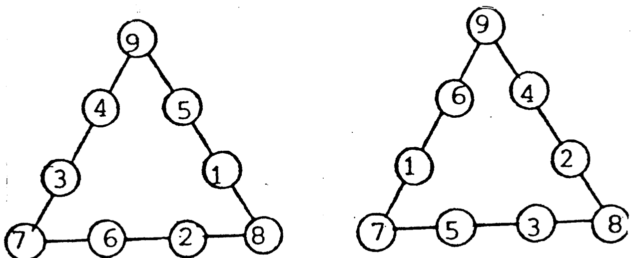
1



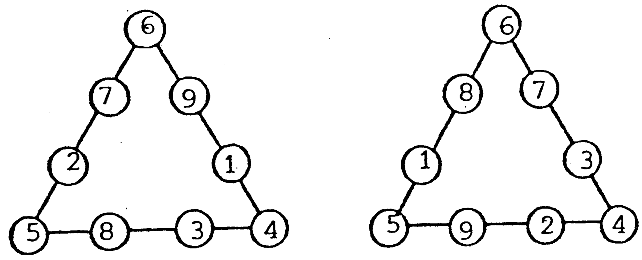
2



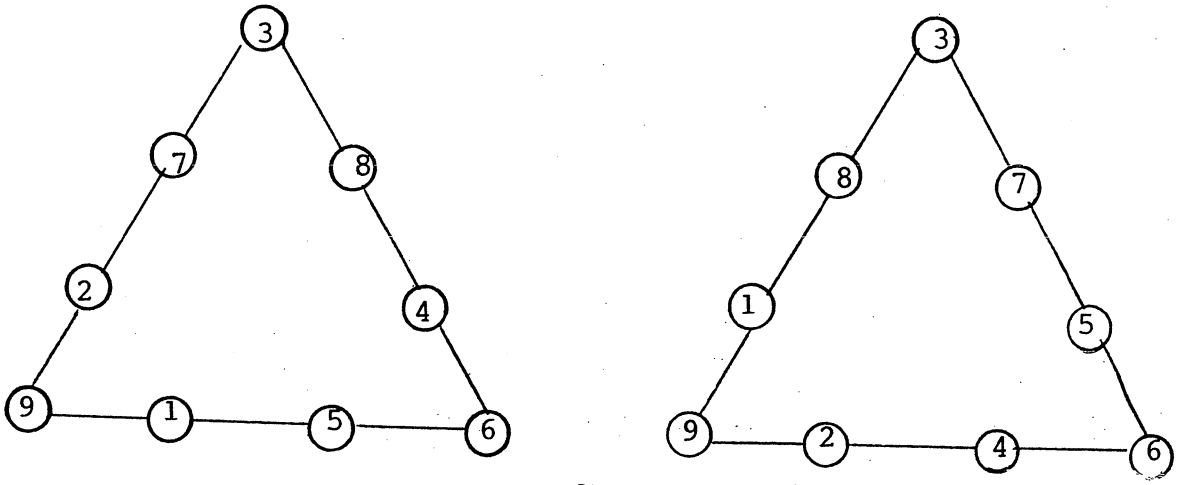
3



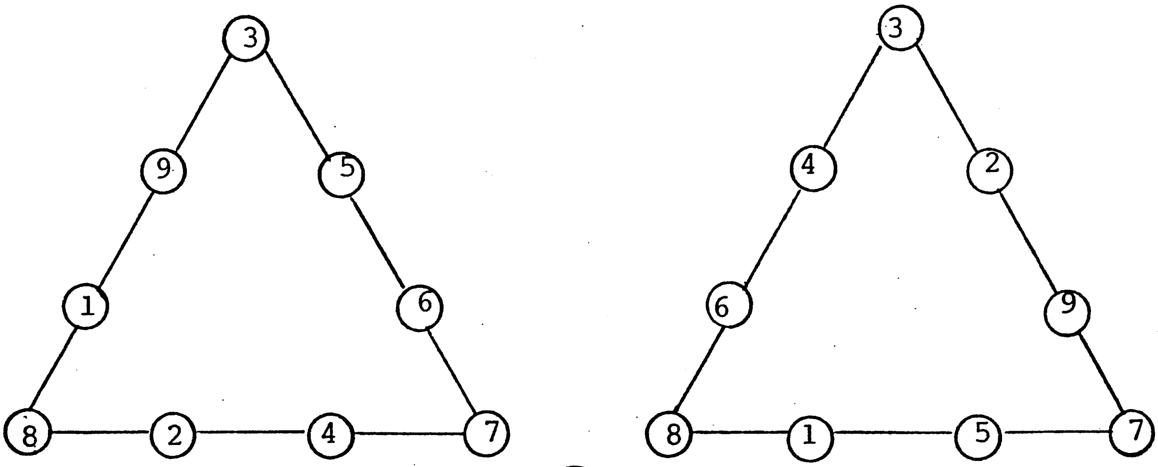
4



5

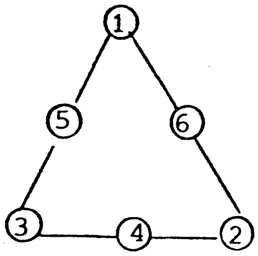


6

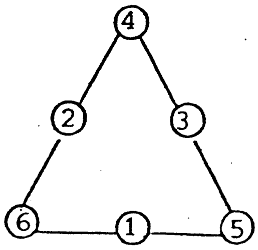


7

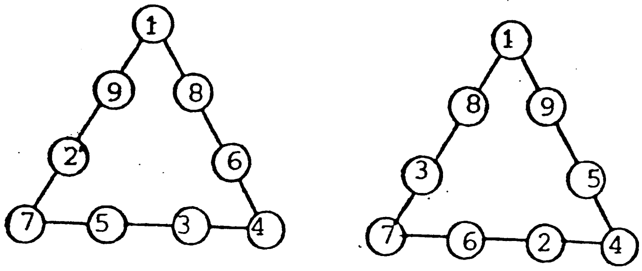
NOMBRES EN TRIANGLES- SOLUTIONS B



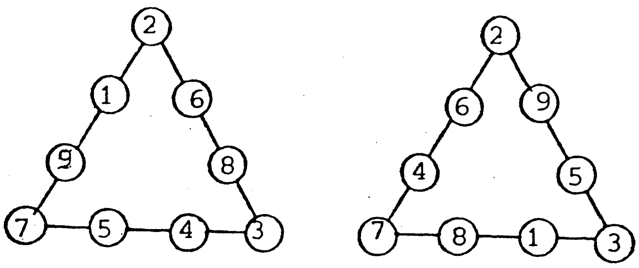
1



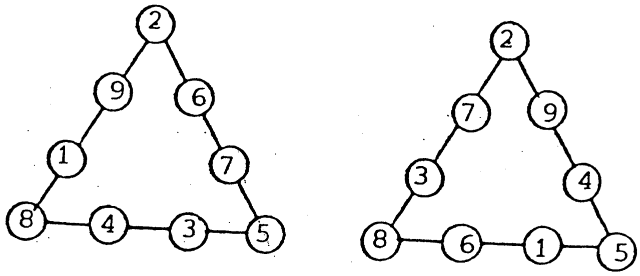
2



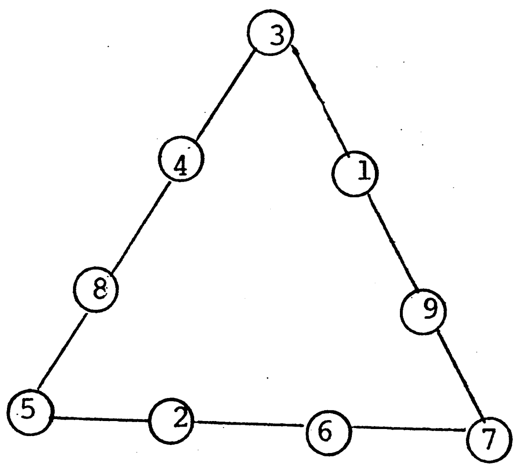
3



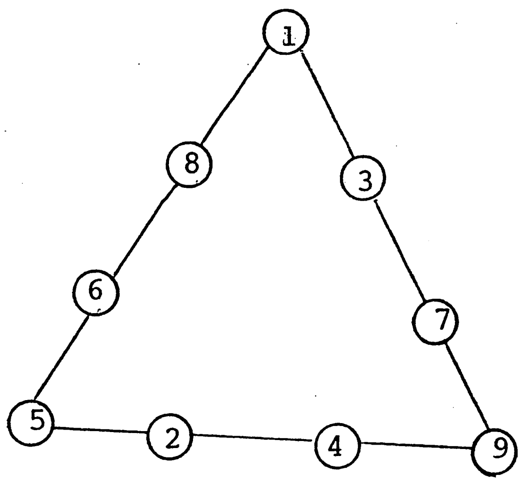
4



5



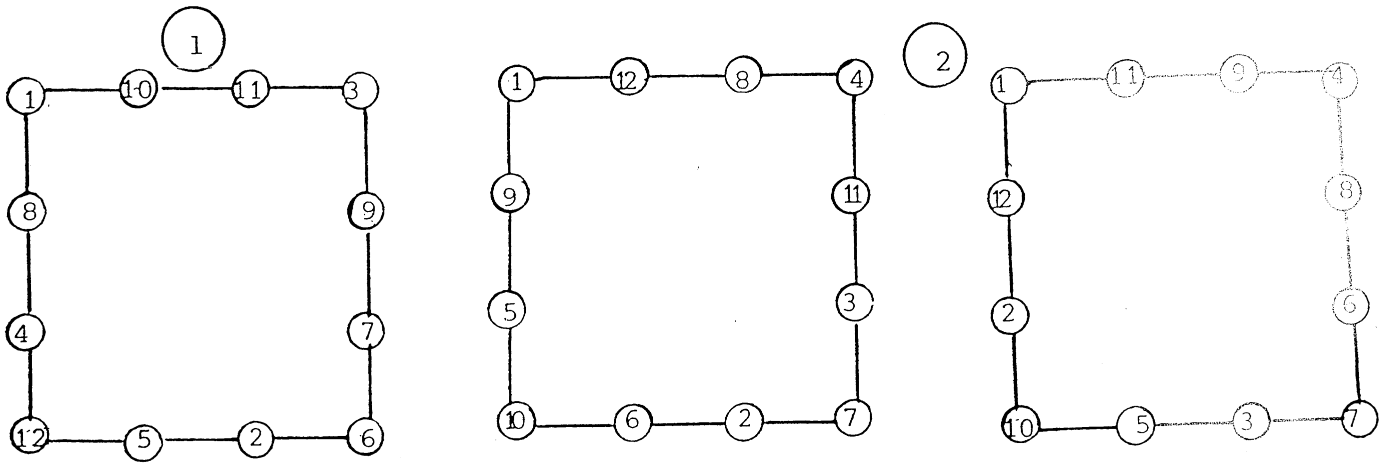
6



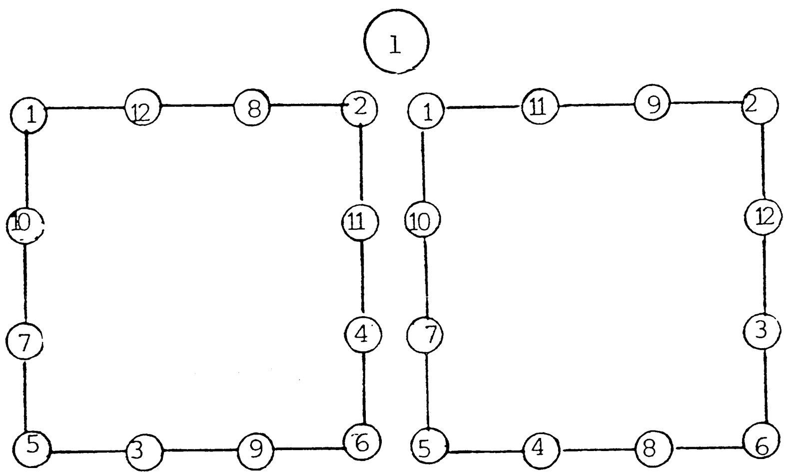
7

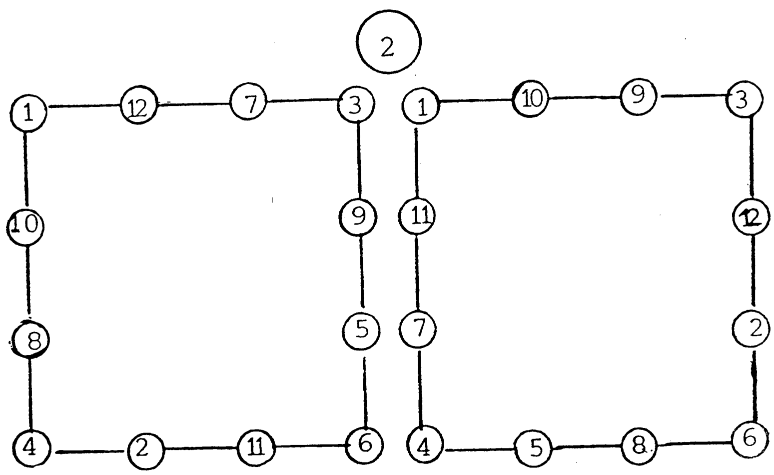
Les nombres réponses peuvent être intervertis sur un même côté du triangle.

NOMBRES EN CARRÉ - SOLUTIONS A



NOMBRES EN CARRÉ - SOLUTIONS B





TROUVE L'INTRUS - SOLUTIONS A

1 | 28, 124, 225, 1329, 26, 136 820, 6521, 728, 429 |

Tous les nombres, sauf 136, ont 2 comme chiffre des dizaines

2 | 505, 415, 271, 424, 343, 127, 208, 631, 231 712 |

Tous les nombres, sauf 231, ont 10 pour somme des "chiffres" (5+0+5 ; 4+1+5 ; ...)

3 | 345, 890, 567, 124 123, 456, 789, 901, 234, 678 |

Tous les nombres, sauf 124, ont leurs chiffres (centaine, dizaine, unité) qui se "suivent" dans l'ordre 1,2,3,4,5,6,7,8,9,0,1,2....

4 | 3, 7, 11, 15, 17 21, 25, 29, 33 |

Les nombres se suivent de quatre en quatre. De 15 à 17 il y a un écart de 2.

5 | 27, 35, 43, 70, 78, 86, 94, 102, 110 |

Les nombres se suivent de 8 en 8. De 43 à 70, il y a un écart de 7

6 | 48, 58, 68, 77, 87, 97, 107, 117, 127 |

Les nombres se suivent de dix en dix. De 68 à 77, il y a un écart de 9

7 | 28, 142, 30, 456, 62, 323 868, 96, 928, 402, 674 |

Tous les nombres sauf 323 sont pairs.

8 | 145, 48, 640, 843, 41, 1847, 751 449, 43, 6342 |

Tous les nombres, sauf 751, ont 4 pour chiffre des dizaines

9 | 544, 624, 974, 178 1234, 84, 674, 44, 804, 314 |

Tous les nombres, sauf 178, ont 4 pour chiffre des unités.

TROUVE L'INTRUS SOLUTIONS B

1

22	66	55	77	47	99	11	33	44	88

Pour chaque nombre, sauf 47, le chiffre des dizaines est le même que celui des unités.

2

14	54	32	64	84	34	24	84	44	94

Tous les nombres, sauf 32, ont 4 pour chiffre des unités

3

133	711	400	199	233	341	622	866	944	855	188	655	799

Pour chaque nombre, sauf 341, le chiffre des dizaines est le même que celui des unités.

4

18, 17	125, 124	41, 40	79, 78	85, 80	227, 226	21, 20	301, 300

Pour chaque groupe (a,b) sauf pour (85,80) nous avons b = a-1

5

25,27,30	8,10,13	38,35,30	42,44,47	9,11,14	38,40,43	50,52,55

Pour chaque groupe (a,b,c) sauf pour (38,35,30), nous avons :
b = a + 2, c = b + 3

6

18,21	15,18	89,92	28,31	21,25	110,113	126,129	14,17	20,23

Pour chaque groupe (a,b) sauf pour (21,25) nous avons b = a + 3.
Il est entendu qu'il y a plusieurs façons de compléter les bandes proposées.

DEVINETTES-NOMBRES   SOLUTIONS A

1 334

---

2 Nous sommes neuf :
151, 252, 353, 454, 555, 656, 757, 858, 959
151 est avant tous les autres
959 est après tous les autres

---

3 Le premier des nombres de trois chiffres : 100
Le dernier des nombres de trois chiffres : 999
le dernier des nombres de deux chiffres : 99

---

4 Nous voici :
300, 311, 322, 333, 344, 355, 366, 377, 388, 399

DEVINETTES-NOMBRES   SOLUTIONS B

1 Nous sommes deux : 466, 477.

---

2 Nous sommes trois : 48, 58, 68

---

3 Je suis seul : 135.

---

4 Nous sommes neuf :
115, 225, 335, 445, 555, 665, 775, 885, 995

DEVINE LE NOMBRE — SOLUTIONS A

1

17	34
51	

a	b
a+b	

2

240	189
51	

a	b
a−b	

3

142	300	139
581		

a	b	c
a+b+c		

4

2	69
138	

a	b:a
b	

5

8	6

100	98

a	a−2

6

50	25

74	37

a	a:2

7

30	34

66	70

a	a+4

DEVINE LE NOMBRE — SOLUTIONS B

1

44	16
30	14

a+b	a−b
a	b

2

225	9
45	5

a x b	a:b
a	b

DEVINE LES CHIFFRES — SOLUTIONS A

1 8 5 4 7 + 7 8 2 = 9 3 2 9

2 . Cas où il n'y a pas de retenue sur les unités :

1 4 6 1 + 7 8 9 1 = 9 3 5 2
1 4 6 0 + 7 8 9 2 = 9 3 5 2
1 4 6 2 + 7 8 9 0 = 9 3 5 2

. Cas où il y a une retenue sur les unités :

1 4 6 x + 7 8 8 y = 9 3 5 2
avec $x + y = 12$, $x \leqslant 9$, $y \leqslant 9$.
d'où 7 possibilités pour (x,y) : (9,3), (8,4), (7,5), (6,6), (5,7), (4,8), (3,9).

3 3 8 4 + 1 8 5 + 3 2 = 6 0 1

DEVINE LES CHIFFRES — SOLUTIONS B

1
4 x 1 0 = 4 0
4 x 1 1 = 4 4
4 x 1 2 = 4 8

2
1 7 x 6 = 1 0 2
3 2 5 x 7 = 2 2 7 5
3 2 5 x 9 = 2 9 2 5

FOGGLE

SOLUTIONS A

1 Niveau C.P

6 + 5 + 1 = 8 + 4
8 + 1 = 4 + 5
7 + 3 + 2 + 1 = 9 + 4

6	5	8	1
2	1	4	5
3	3	7	9
1	2	4	5

Niveau C.E

5 x 9 = (7 x 5) + 1 + 8 + 1

3 x 2 = 6

6	5	8	1
2	1	4	5
3	3	7	9
1	2	4	5

2 Niveau C.P

3 + 1 + 6 = 10
7 + 3 + 1 = 11
6 + 6 = 12 ; 9 + 3 = 12
6 + 7 = 13

3 Niveau C.P

2 + 8 = 10
1 + 1 + 8 = 10

FOGGLE

SOLUTIONS B

1 Niveau C.E-C.M

3 x (7+1) ; (7 x 3)+3
6x(1+2+1) ; -----

2 4 x 8 ; (5 x 7)-3
(6 x 5)+2 ; -----

3 (6 x 8)+4 ; (7x9)-(8+3)
(5 x 9)+7 ; -----

4 (7 x 9)+1+1 ; (5 x 8)+(4 x 6)+1 ;

NOMBRES CROISES SOLUTIONS A

1

2	8		8	0
3	3	3		
9			9	5
	2	5		1
1	5	0		7

2

1	5		2	7	9
1	0			4	9
		4	2	5	
2	6		1	0	7
4	4	8			8
6	0			6	9

3

4	1		4	2
1	6	2		9
0		6	6	
	2	0	5	
5	6		1	1

NOMBRES CROISÉS SOLUTIONS B

1

9	9	8		8	1
2	2	8		5	0
1	1		8		0
		1	9	8	0
2	2	9		9	
7	5		3	0	3

2

1	1	2	5		6
4	3	2		7	7
9	6		5	2	3
9	9	9		5	4
	6	5	3	2	
4	6	5	5	0	

3

	7	2	9	9	9
1		1	1	2	5
9	9		8	1	9
1	4	4		6	6
1	3	7	5		0
1	8	5	0	0	

JEU "LE COMPTE EST BON"

QUELQUES SOLUTIONS A

100	5	3	25	50	50	15	10	7	80	18

1	238	100+50+80+5+3	100+25+15+80+18	100+25+18+7+5+3+80
2	135	100+25+10	80+50+5	100+10+18+7
3	207	100+80+15+5+7	100+25+50+15+10+7	
4	196	100+50+10+15+18+3	100+50+25+18+3	

60	75	5	2	50	35	15	100	10	1

5	231	100+50+60+15+5+1	100+50+75+5+1	100+75+35+15+5+1
6	287	100+60+75+50+2	100+60+75+35+15+2	
7	322	100+50+75+35+60+2	seule solution	
8	141	60+75+5+1	75+50+15+1	100+35+5+1

1	2	3	3	4	5	6	7	8	9	10

9	27	8+2+10+7	5+6+7+9	10+9+8
10	40	10+9+1+8+2+6+4	10+9+8+7+6	
11	55	1+2+3+4+5+6+7+8+9+10	seule solution	
12	33	4+6+2+8+10+3	10+9+8+6	1+9+2+8+6+7
13	51	10+9+8+7+6+5+4+2	10+9+8+7+6+5+3+2+1	

115	1	2	6	20	70	9	21	40	84

14	111	70+40+1	70+20+21	84+6+20+1
15	156	70+84+2	115+1+40	
16	300	70+21+9+84+1+115		
17	181	115+20+40+6	20+70+84+6+1	
18	190	20+70+84+6+9+1	115+9+6+20+40	

JEU "LE COMPTE EST BON"

QUELQUES SOLUTIONS B

(1)

751

[7 X 10 X (6 + 3 + 1)] + (2 X 25) + 1

[(5 + 3) X 10 X (7 + 3)] -[(6 + 1)×(14 : 2)]

(3 X 25 X 10) + 1

[(7 X 10) + 5] X (12 - 2)] + 1 ....

---

(2)

581

[6 X 10 X (7 + 3)] - (14 + 5)

[5 X 10 X (7 + 3)] + [(14 - 5) X (6 + 2 + 1)]

([[(5 + 3) X 7] + 2] X 10) + 1

((5 + 3) X 7 X 10) + 1 + (25 - 5)

[([(6 + 3) X 7] - 5) X 10] + 1 *.....

---

(3)

664

(6 X 10 X (7 + 3)) + (2 X 25) + 14

(5 X 14 X 10) - 6 X (7 - 1)

((12 - 1) X 6 X 10) + (7 - 3)

((5 + 3) X (6 + 2) X 10) + (25 - 1).....

---

(4)

893

[10 X (12-2) X (6 + 3)] - 7

((6 + 3) X 5 X 10 X 2) - 7

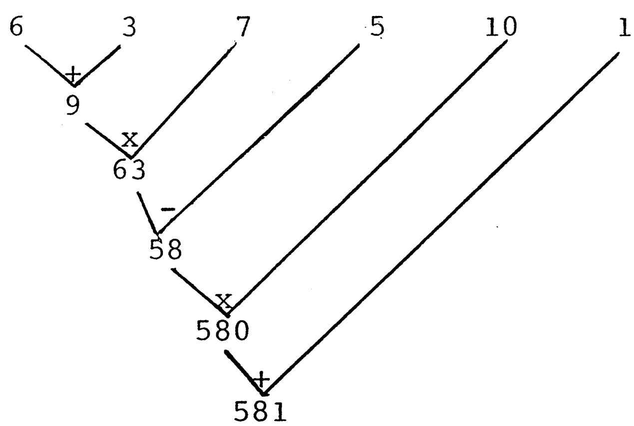
[[(6 X 14) + 5] X 10] + 3

([(3 X 25) + 14] X 10) + (2 + 1)....

---

* De telles écritures qui correspondent à des programmes de calculs, peuvent être remplacées par des arbres qui sont souvent plus clairs.

Ainsi pour la cible 581 ci-dessus, nous pouvons remplacer [([(6+3)x7] -5)x10] +1 par :



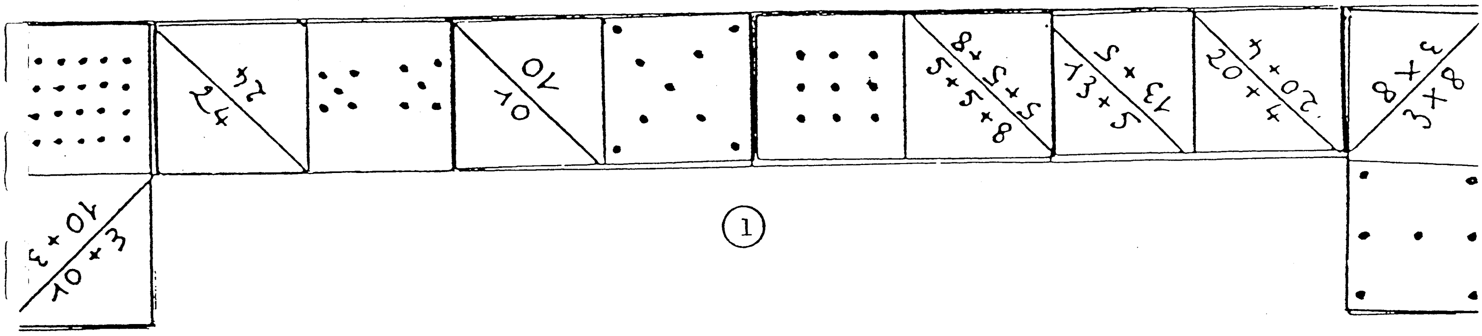
JEU "LE COMPTE EST BON"

QUELQUES SOLUTIONS B (SUITE)

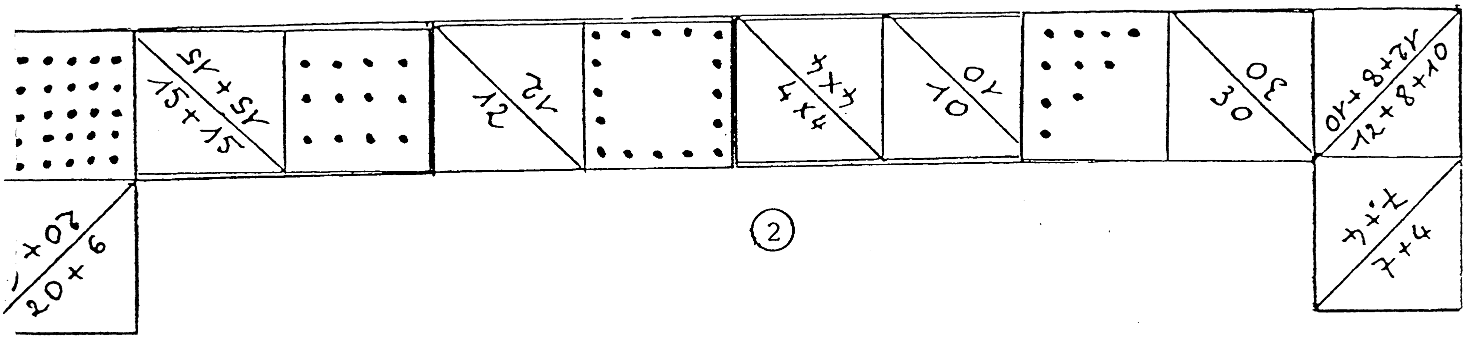
5	207	[(12 + 8) X 10] + (5 + 2)	(15 X 10) + 50 + 5 + 2
		[(5 - 1) X 50] + (5 + 2)	(15 + 8) X 9
		(15 10) +(8 X 5) +(12 + 5)	
6	819	(2 X 50 X 8) + (10 + 9)	(8 X 5 X 10 X 2)+(15+5)-1
		([50 + (2 X 15) + 1] X 10) + 9	9 X [(2 X 50)-(8 + 1)]
		[(50 - 5) X 2 X 10] - [9 X (8+1)]	
7	783	(8 X 9 X 10) + 50 + 12 + 1	(2 X 50 X 8) - (12 + 5)
		([50 + (2 X 15)] 10)- (8+9)	(5 X 8 X 10 X 2)-(12+5)
		9 X [(8X10) + (5+2)]	
8	2421	(50 X 10 X 5) - (9 X 8) + (5 + 2)	
		9 [(5 X 50) + (10 + 9)]	
		[(9 + 1) X 10 X 12 X 2] + (15 + 5 + 1)	

JEU DE DOMINOS

SOLUTIONS A



(1)



(2)

LABYRINTHE ARITHMÉTIQUE

SOLUTIONS A

Trouve le nombre à l'arrivée :

(1) Au départ le nombre est 5

5 x 2 = 10

10 + 8 = 18

18-9 = 9

9 x 3 = 27

27 x 5 = 32

Le nombre à l'arrivée est 32

(2) Au départ le nombre est 9

9 x 5 = 45

45 + 12 = 57

57 + 5 = 62

62 + 8 = 70

70 x 2 = 140

Le nombre à l'arrivée est 140

(3) Trouve un chemin jusqu'à 12

	+	4	-	6	12
	2	X	7	+	
	+	1	X	6	
D→	3	-	2	+	

ou

	+	4	-	6 →	12
	2	X	7	+	
	+	1	X	6	
D→	3	-	2	+	

GRILLES AVEC DES NOMBRES

SOLUTIONS B

1

7	2	3
1	8	4
6	5	9

2

6	7	2
3	4	8
1	5	9

3

8	2	3
1	6	7
9	5	4

4

5	1	7
3	6	2
8	4	9

ou

5	1	7
6	3	2
4	8	9

5

9	7	5
1	2	3
6	8	4

6

7	4	1
6	3	2
8	5	9

7

1	5	4
9	2	8
6	7	3

8

9	4	2
1	3	7
5	6	8

JEUX D'ORDRE

SOLUTIONS A : COURSES

1 Il y a deux ordres possibles pour l'arrivée de la course :
a) Olivier, Eric, Isabelle, Laurence, Jean (O,E,I,L,J)
b) Olivier, Isabelle, Eric, Laurence, Jean (O,I,E,L,J)

2 Il y a un seul ordre possible :
Isabelle, Olivier, Jean, Franck, Eric, Laurence (I,O,J,F,E,L)

3 Il y a deux ordres possibles :
a) Eric, Franck, Jean, Isabelle, Laurence (E,F,J,I,L)
b) Eric, Isabelle, Laurence, Jean, Franck (E,I,L,J,F)

4 Il y a deux ordres possibles :
a) E et D sont ex-aequo, puis A, puis C, puis B $\left({}^{D}_{E} > A-C-B \right)$
b) D est premier, puis C et E ex-aequo, puis C, puis B $\left(D < {}^{C}_{E} - A-B \right)$

SOLUTIONS B : PILES

1 On peut construire deux piles :

V	B
B	N
N	V
J	J
R	R

2 On peut construire trois piles :

J	J	J
V	N	R
B	R	B
R	B	V
N	V	N

FILES

3 Une seule file : B est le premier, derrière lui D, puis C, puis A, puis E (B, D, C, A, E)

4 Une seule file possible :
C est le premier, derrière lui D, puis E, puis A, puis B (C,D,E,A,B)

DÉNOMBREMENTS

SOLUTIONS A

CONSTRUCTION DE TOURS AVEC DES CUBES COLORÉS.

(1) Les tours de hauteur 1

R	B

.... (2 t)

Les tours de hauteur 2
(on construit un 2° étage avec R ou B)

R	B	R	B
R	R	B	B

.... (4 t)

Les tours de hauteur 3
(on construit un 3° étage avec R ou B)

R	B	R	B	R	B	R	B
R	R	B	B	R	R	B	B
R	R	R	R	B	B	B	B
1	2	3	4	5	6	7	8

.... (8 t)

(2) Les tours de hauteur 1

R	B	J

.... (3 t)

Les tours de hauteur 2

R	B	J	R	B	J	R	B	J
R	R	R	B	B	B	J	J	J

(9 t)

(3) Les tours de hauteur 4 à partir de la tour 1

R	B
R	R
R	R
R	R

Les tours de hauteur 4 à partir de la tour 2

R	B
B	B
R	R
R	R

Il y a 16 tours de hauteur 4, c'est-à-dire deux fois le nombre de tours de hauteur 3.

De la même façon, à partir d'une tour de hauteur 4, on peut construire 2 tours de hauteur 5. Il y a 32 tours de hauteur 5.

Toujours en recommençant la même procédure, à partir d'une tour de hauteur 5, il y a 2 tours de hauteur 6, exemple :

R	B
R	R
B	B
R	R
R	R

Il y a donc 64 tours de hauteur 6.

(4) Les tours de hauteur 3 ayant pour base

R
R

:

R	B	J
R	R	R
R	R	R

Il y en a trois

.../...

Les tours de hauteur 3 ayant pour base $\begin{array}{|c|}\hline B\\\hline R\\\hline\end{array}$:

$\begin{array}{|c|}\hline R\\\hline B\\\hline R\\\hline\end{array}$ $\begin{array}{|c|}\hline B\\\hline B\\\hline R\\\hline\end{array}$ $\begin{array}{|c|}\hline J\\\hline B\\\hline R\\\hline\end{array}$ Il y en a trois.

Les tours de hauteur 3 ayant pour base $\begin{array}{|c|}\hline J\\\hline B\\\hline\end{array}$:

$\begin{array}{|c|}\hline R\\\hline J\\\hline B\\\hline\end{array}$ $\begin{array}{|c|}\hline B\\\hline J\\\hline B\\\hline\end{array}$ $\begin{array}{|c|}\hline J\\\hline J\\\hline B\\\hline\end{array}$ Il y en a trois.

Nous pourrions continuer de la même façon. Cela nous donnerait 27 tours (9x3)

o En faisant comme ci-dessus, mais cette fois, à partir des tours de hauteur 4, nous trouverions 81 tours de hauteur 4 (27x3).

o En poursuivant encore pour construire des tours de hauteur 5, nous trouverions 243 possibilités (81x3)

<table>
<tr><th>5 Hauteur de la tour
Nombre de couleurs</th><th>1</th><th>2</th><th>3</th></tr>
<tr><td>2
R et B</td><td>$\boxed{R}$ $\boxed{B}$</td><td>$\begin{array}{|c|}\hline B\\\hline R\\\hline\end{array}$ $\begin{array}{|c|}\hline R\\\hline B\\\hline\end{array}$</td><td></td></tr>
<tr><td>3
R, B, J</td><td>$\boxed{R}$ $\boxed{B}$ $\boxed{J}$</td><td>$\begin{array}{|c|}\hline B\\\hline R\\\hline\end{array}$ $\begin{array}{|c|}\hline J\\\hline R\\\hline\end{array}$ $\begin{array}{|c|}\hline R\\\hline B\\\hline\end{array}$ $\begin{array}{|c|}\hline J\\\hline B\\\hline\end{array}$ $\begin{array}{|c|}\hline B\\\hline J\\\hline\end{array}$ $\begin{array}{|c|}\hline R\\\hline J\\\hline\end{array}$</td><td>$\begin{array}{|c|}\hline J\\\hline B\\\hline R\\\hline\end{array}$ $\begin{array}{|c|}\hline B\\\hline J\\\hline R\\\hline\end{array}$ $\begin{array}{|c|}\hline J\\\hline R\\\hline B\\\hline\end{array}$ $\begin{array}{|c|}\hline R\\\hline J\\\hline B\\\hline\end{array}$ $\begin{array}{|c|}\hline R\\\hline B\\\hline J\\\hline\end{array}$ $\begin{array}{|c|}\hline B\\\hline R\\\hline J\\\hline\end{array}$</td></tr>
<tr><td>4
R, B, J, V</td><td>$\boxed{R}$ $\boxed{B}$
$\boxed{J}$ $\boxed{V}$</td><td>$\begin{array}{|c|}\hline B\\\hline R\\\hline\end{array}$ $\begin{array}{|c|}\hline J\\\hline R\\\hline\end{array}$ $\begin{array}{|c|}\hline V\\\hline R\\\hline\end{array}$ $\begin{array}{|c|}\hline R\\\hline B\\\hline\end{array}$ $\begin{array}{|c|}\hline J\\\hline B\\\hline\end{array}$ $\begin{array}{|c|}\hline V\\\hline B\\\hline\end{array}$
$\begin{array}{|c|}\hline R\\\hline J\\\hline\end{array}$ $\begin{array}{|c|}\hline B\\\hline J\\\hline\end{array}$ $\begin{array}{|c|}\hline V\\\hline J\\\hline\end{array}$ $\begin{array}{|c|}\hline R\\\hline V\\\hline\end{array}$ $\begin{array}{|c|}\hline B\\\hline V\\\hline\end{array}$ $\begin{array}{|c|}\hline J\\\hline V\\\hline\end{array}$</td><td></td></tr>
</table>

On peut construire 24 tours de hauteur 3. Le nombre de tours de hauteur 4 est exactement le même.

.../...

6 Si la base est $\begin{array}{|c|}\hline B\\\hline R\\\hline\end{array}$, les tours de hauteur 3 sont : $\begin{array}{|c|}\hline J\\\hline B\\\hline R\\\hline\end{array}$ $\begin{array}{|c|}\hline V\\\hline B\\\hline R\\\hline\end{array}$

Si la base est $\begin{array}{|c|}\hline R\\\hline J\\\hline\end{array}$, les tours de hauteur 3 sont : $\begin{array}{|c|}\hline V\\\hline R\\\hline J\\\hline\end{array}$ $\begin{array}{|c|}\hline B\\\hline R\\\hline J\\\hline\end{array}$

Si la base est $\begin{array}{|c|}\hline V\\\hline R\\\hline\end{array}$, les tours de hauteur 3 sont : $\begin{array}{|c|}\hline J\\\hline V\\\hline R\\\hline\end{array}$ $\begin{array}{|c|}\hline B\\\hline V\\\hline R\\\hline\end{array}$

Pour une tour de hauteur 2, il y a 2 tours de hauteur 3. En tout on peut donc construire 24 tours de hauteur 3.

Pour construire une tour de hauteur 4, on peut prendre une tour de hauteur 3 et placer un cube au-dessus. Il n'y a qu'une couleur possible dès que la tour de hauteur 3 est choisie. On ne peut donc construire que 24 tours de hauteur 4.

o Avec cinq couleurs.

Pour construire une tour de hauteur 2, on peut prendre l'un des cubes, R par exemple et placer l'un des quatre autres cubes au-dessus. On peut construire ainsi 4 tours de base R. De même on a 4 tours de base B, 4 tours de base J, 4 tours de base V d'où en tout 20 tours de hauteur 2. (5x4)

On peut reprendre un raisonnement du même genre et trouver qu'on peut construire 3 tours de hauteur 3 en prenant une tour de hauteur 2. On trouve alors qu'il est possible de construire 60 tours de hauteur 3. (20x3)

Toujours de la même façon, on trouve qu'il est possible de construire 120 tours de hauteur 4. Le nombre de tours de hauteur 5 est le même. (60x2)

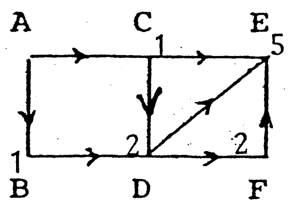
7 Avec 10 couleurs de cubes, on peut construire bien sûr 10 tours de hauteur 1. Pour construire une tour de hauteur 2, on prend un cube (jaune par exemple) et on place dessus un des 9 autres cubes. On peut donc construire 9 tours, de hauteur 2, dont la base est jaune. De même, on peut construire 9 tours, de hauteur 2, dont la base est rouge, et ainsi de suite. Nous avons donc 9 x 10, c'est-à-dire 90 tours de hauteur 2.

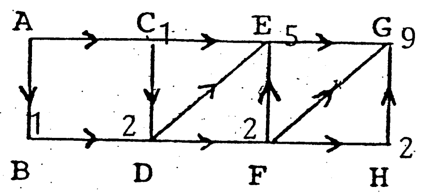
Pour trouver le nombre de tours de hauteur 3, nous pouvons suivre un raisonnement semblable. Dès qu'une tour de hauteur 2 est choisie, il y a 8 possibilités de couleurs différentes pour le cube à placer au sommet. Nous allons donc obtenir 90 x 8, c'est-à-dire 720 tours de hauteur 3.

DÉNOMBREMENTS - SOLUTIONS A

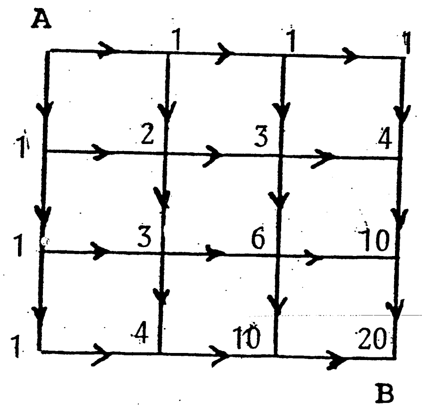
CHEMINS

1





2



DÉNOMBREMENTS SOLUTIONS B

ÉCRITURE DE NOMBRES AVEC DES CHIFFRES DONNÉS

1. Les nombres de 1 chiffre : 1 ; 2 ; 2 nombres
Les nombres de 2 chiffres : 11 ; 12 ; 21 ; 22 ; 4 nombres
Les nombres de 3 chiffres : 111; 112; 121; 122;
211; 212; 221; 222; 8 nombres
Les nombres de 4 chiffres : 1111; 1112; 1121; 1122;
1211; 1212; 1221; 1222;
2111; 2112; 2121; 2122;
2211 ; 2212; 2221; 2222; 16 nombres

2. Les nombres ayant 1 chiffre : 1 ; 2 ; 3 ; 3 nombres
Les nombres de 2 chiffres : 11 ; 12 ; 13 ; 21 ;
22 ; 23 ; 31 ; 32 ; 33; 9 nombres
Les nombres de 3 chiffres : 111; 112; 113; 121; 122;
123; 131; 132; 133;
211; 212; 213; 221; 222;
223; 231; 232; 233;
311; 312; 313; 321 ; 322;
323; 331; 332; 333; 27 nombres

3. Les nombres de 4 chiffres obtenus en écrivant un chiffre à droite de 111 sont 1111 et 1112, de même les nombres de 4 chiffres obtenus en écrivant un chiffre à droite de 121 par exemple sont 1211 et 1212. Il y a 16 nombres de 4 chiffres, c'est à dire le double du nombre d'écritures à 3 chiffres.
De la même façon, à partir d'une écriture à 4 chiffres, on peut obtenir 2 écritures à 5 chiffres donc il y a 32 écritures à 5 chiffres (2 x 16).
Toujours en procédant de la même façon, à partir d'une écriture à 5 chiffres telle que 12211, on peut obtenir 2 écritures à 6 chiffres, avec 12211, on a : 122111 et 122112.
Donc il y a 64 écritures à 6 chiffres (2 x 32).

4. • Les nombres de 3 chiffres commençant par 11 sont 111, 112 et 113, il y en a trois.
De même il y a 3 écritures de 3 chiffres commençant par 12 : 121, 122, 123. Nous pourrions continuer de la même façon pour chacun des autres cas. Cela donnerait 27 écritures (9 x 3).

.../...

- Par la même méthode, mais cette fois, à partir des écritures de 3 chiffres, nous trouverons 81 écritures de 4 chiffres (27 x 3)
- En continuant, c'est-à-dire en utilisant les écritures de 4 chiffres, et en adjoignant à chacune d'elles, soit 1, soit 2, soit 3, nous obtiendrons 243 écritures de 5 chiffres. (81 x 3)

ÉCRITURE DE "MOTS" AVEC DES LETTRES DONNÉES

Avec 2 lettres :

1

Les "mots" de 1 lettre : R, B — 2 mots

Les "mots" de 2 lettres : RR, RB, BR, BB — 4 mots

Les "mots" de 3 lettres : RRR, RRB, RBR, RBB,
BRR, BRB, BBR, BBB — 8 mots

Les "mots" de 4 lettres : Il y a 16 mots de 4 lettres.

Avec chaque "mot" de 3 lettres, trouvé précédemment, on peut obtenir deux mots de 4 lettres, exemple :

BRR → BRRR et BRRB

On place une lettre à droite du mot de 3 lettres (R ou B)

Avec 3 lettres :

2

Les mots de 1 lettre : R, B, J — 3 mots

Les mots de 2 lettres : RR, RB, RJ,
BR, BB, BJ,
JR, JB, JJ, — 9 mots

Il y a 27 mots de 3 lettres, bien sûr en n'utilisant que R, B, J.

Avec chaque mot de 3 lettres trouvé précédemment, on peut obtenir 3 mots de 3 lettres, exemple BR → BRR, BRB, BRJ.

On place une lettre à droite du mot de 2 lettres.

.../...

NOMBRES ET REPRÉSENTATIONS — SOLUTIONS B

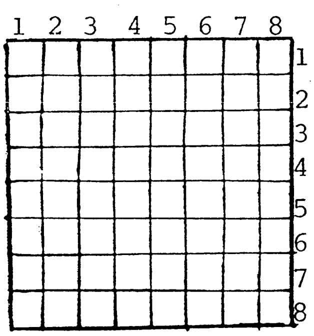
NOMBRES ET CARRÉS

1. D : D contient 16 carreaux. On peut trouver ce nombre, soit en comptant les carreaux un par un, soit en comptant les carreaux rangées par rangées : il y a 4 rangées de 4 soit 16 carreaux (4x4)

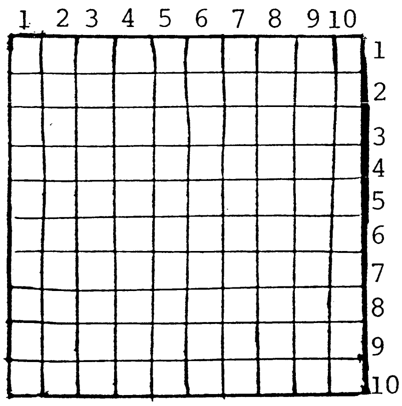
E : E contient 25 carreaux ; on peut les compter un par un, on peut les compter rangées par rangées : 5 rangées de 5 soit 25 carreaux (5 x 5)

F : On peut compter 8 carreaux dans une rangée, et 8 rangées. (On peut compter sur les bords visibles). Il y a donc 64 carreaux (64 = 8 x 8)

G : On peut compter 10 carreaux dans une rangée. Comme G est un carré, il y a autant de carreaux sur chaque bord, il y a donc dans G 10 rangées de 10, c'est-à-dire 100 carreaux (10x10)



F



G

carré	n° 1	n° 2	n° 3	n° 4	n° 5	n° 6	n° 7	n° 8	n° 9	n°10	n°11
nombre de carreaux	1	4 2x2	9 3x3	16 4x4	25 5x5	36 6x6	49 7x7	64 8x8	81 9x9	100 10x10	121 11x11

2. Les nombres suivants sont-ils des "nombres carrés" ?

50 ? 64 ? 100 ? 169 ? 400 ? 421 ? 900 ? 961 ? 1000 ? 10000 ?

Les nombres carrés : 64 = 8 x 8   100 = 10 x 10   169 = 13 x 13
400 =20 x 20   900 = 30 x 30   961 = 31 x 31
10000 = 100 x 100

.../...

Les nombres qui ne sont pas des carrés : 421 et 100, en effet

20 x 20 = 400
21 x 21 = 441 et <u>421</u> compris entre 400 et 441,

donc 421 n'est pas le carré d'un nombre naturel

31 x 31 = 961
32 x 32 = 1024 et <u>1000</u> compris entre 961 et 1024,

donc 1000 n'est pas le carré d'un nombre naturel.

NOMBRES ET RECTANGLES

1 Rectangle A : 21 points (3 rangées de 7, ou 7 colonnes de 3, soit 3 x 7)
Rectangle B : 28 points (4 rangées de 7, soit 4 x 7)
Rectangle C : 36 points (4 rangées de 9, soit 4 x 9)
Rectangle D : 28 points (4 rangées de 7, soit 4 x 7)
Rectangle E : 60 points (12 rangées de 5, soit 12 x 5)

2

29	72	63	120	61	46	73
non	oui	oui	oui	non	oui	non

72 = 3 x 36 (ou 72 = 8 x 9 etc...)
63 = 9 x 7
120 = 12 x 10 (ou 120 = 30 x 4 etc...)
46 = 23 x 2

.../...

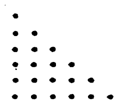
NOMBRES ET TRIANGLES

1

figures	1	2	3	4	5
nombre de points	1	3	6	10	15

La figure 6 s'obtient à partir de la figure 5, en dessinant une ligne supplémentaire de 6 points.

Il y a donc dans cette figure 21 points :



$15 + 6 = 21$

La figure 7 s'obtient à partir de la figure 6 en dessinant une ligne supplémentaire de 7 points. Il y a donc 28 points dans la figure : $21 + 7 = 28$.

2

Figure A : Il y a 8 lignes visibles sur un bord, donc 36 points, en effet :

$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 9 \times 4 = 36$ (on compte ligne par ligne)

Figure B : Il y a 10 colonnes (visibles sur un bord), donc 55 points, en effet :

$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 11 \times 5 = 55$

(on compte colonne par colonne)

3

Figure A : 15 points (1 + 2 + 3 + 4 + 5) et 15 carrés (1 + 2 + 3 + 4 + 5)
Il y a autant de points que de carrés, en effet, on peut faire une correspondance ligne par ligne par exemple : une ligne de 1, une ligne de 2... une ligne de 5 pour chaque figure.

Figure B : 28 points et 28 carrés (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7)
le rectangle A contient 6 lignes de 5, soit 30 objets
le rectangle B contient 8 lignes de 7, soit 56 objets

Rectangle A : 30 objets ; triangle de points de A : 15 points (30:2)
Rectangle B : 56 objets ; triangle de points de B : 28 points (56:2)

4

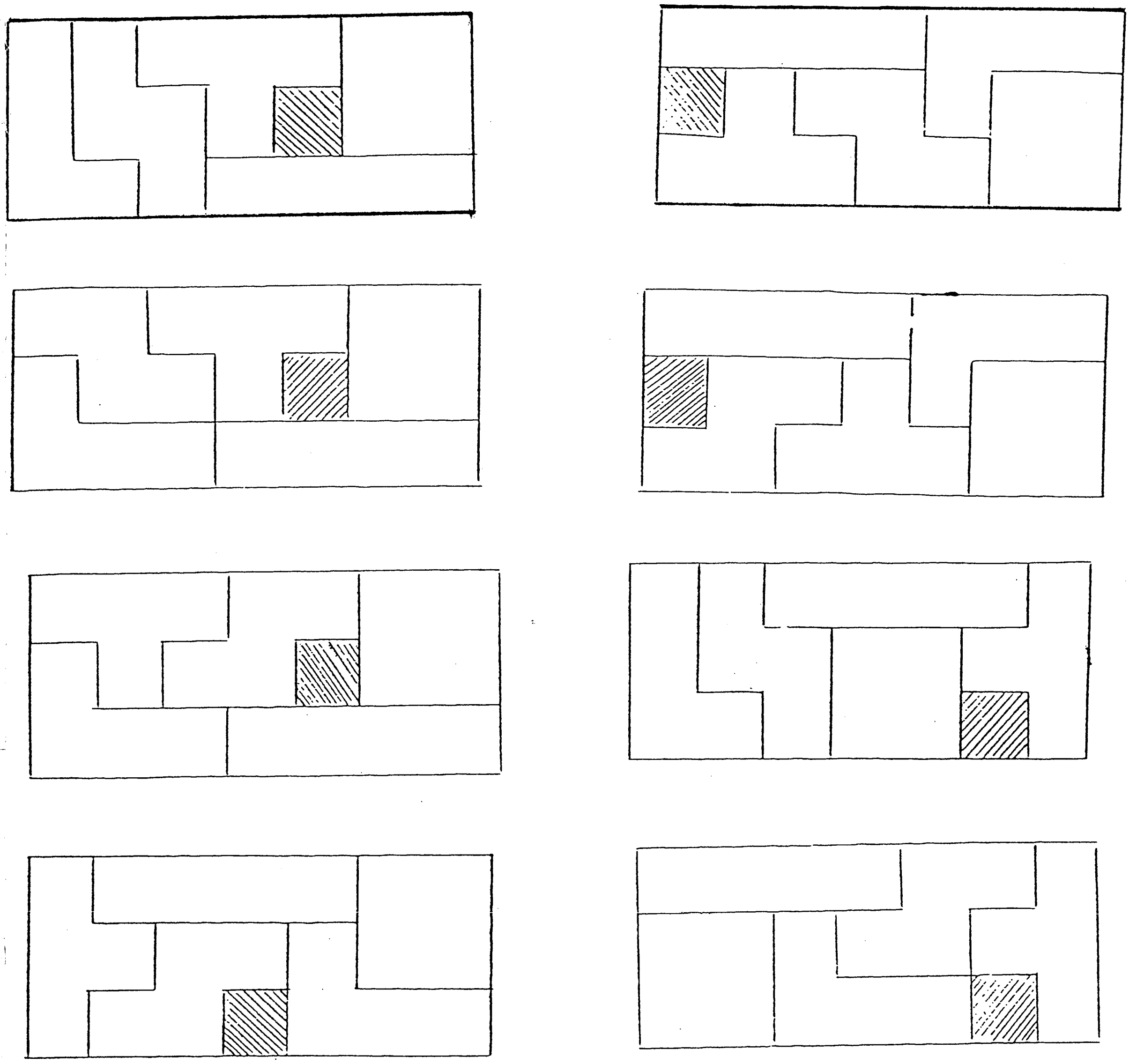
$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 = 15 \times 7 = 105$

ou bien $14 \times 15 = 210$ dans le rectangle
$210 : 2 = 105$ dans le triangle

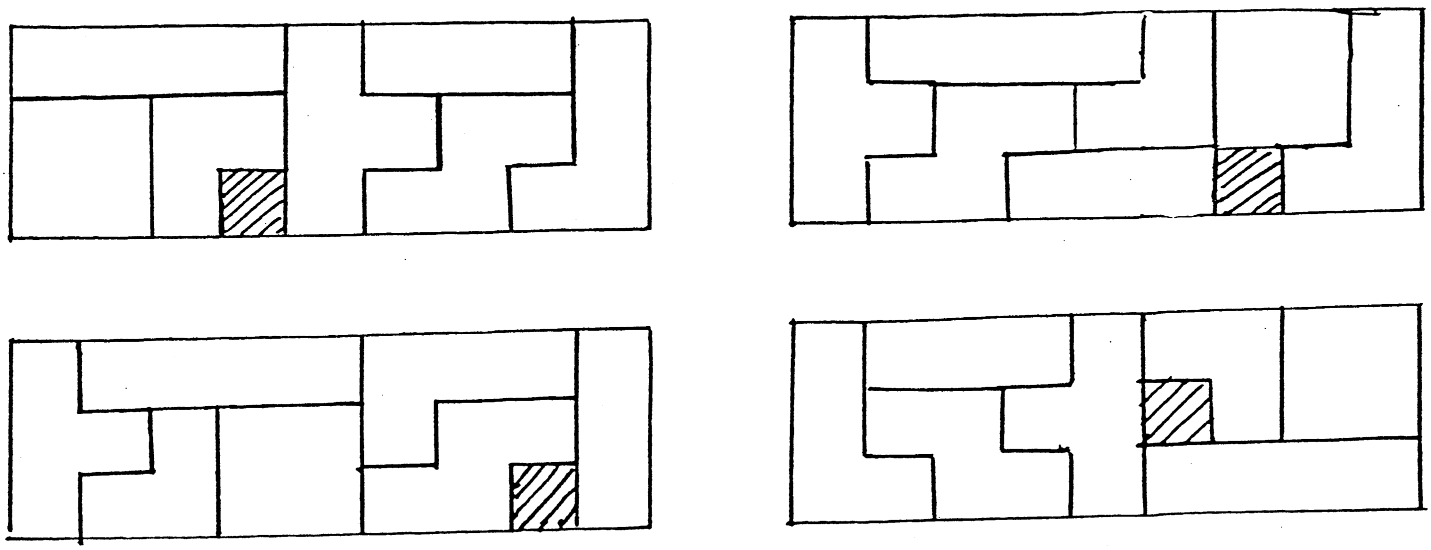
PUZZLES

QUELQUES SOLUTIONS A

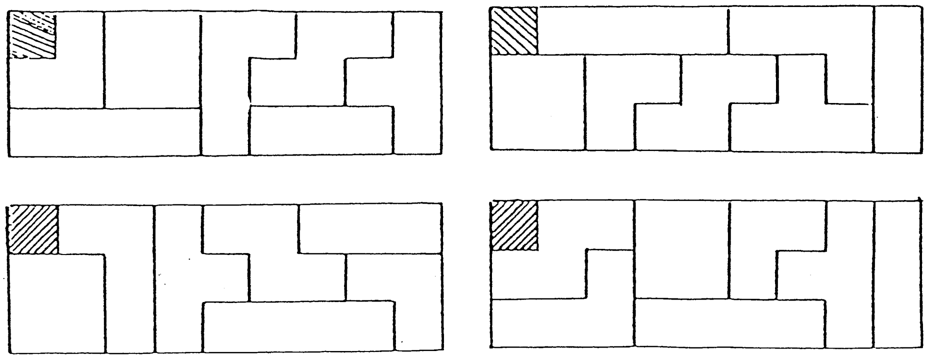
1



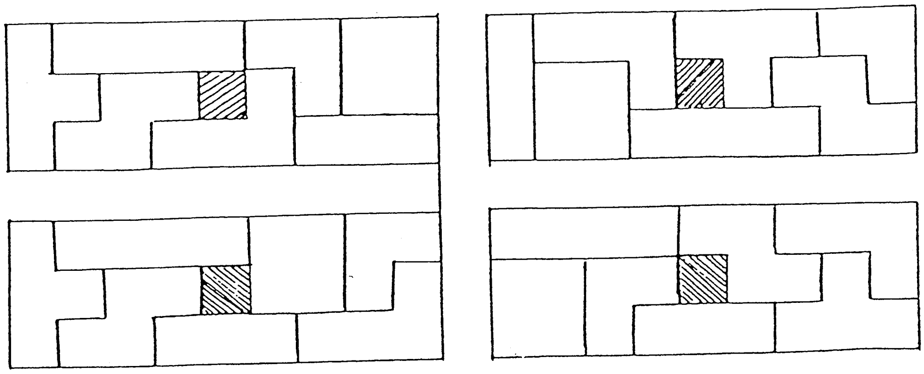
2



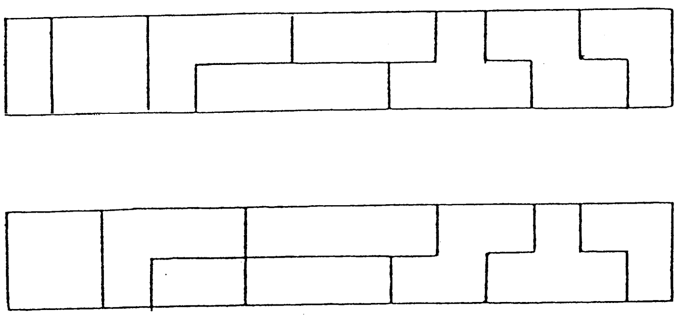
(3)



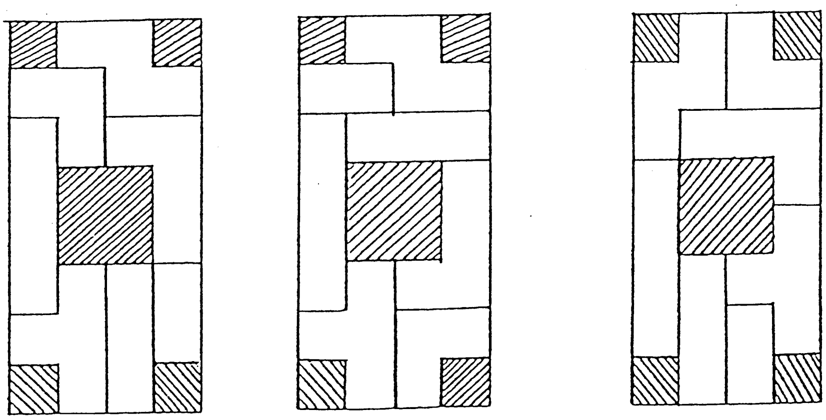
(4)



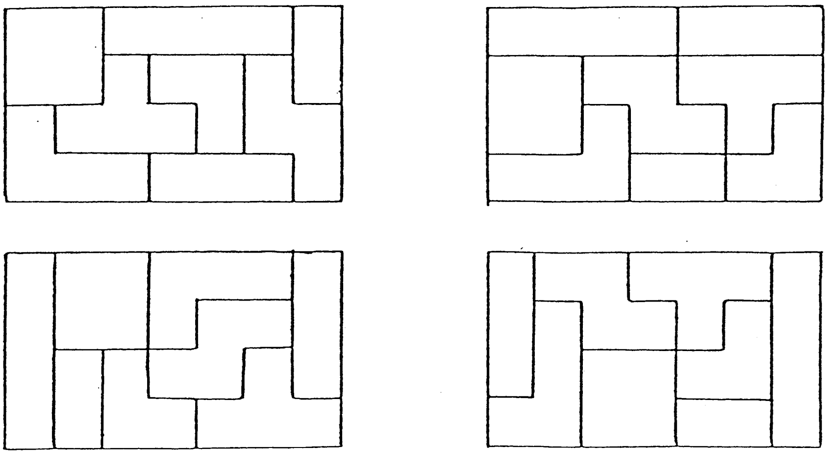
(5)



(6)

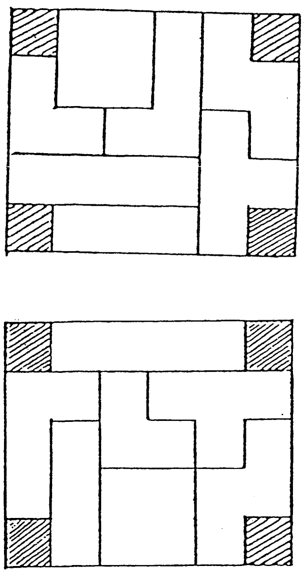


7

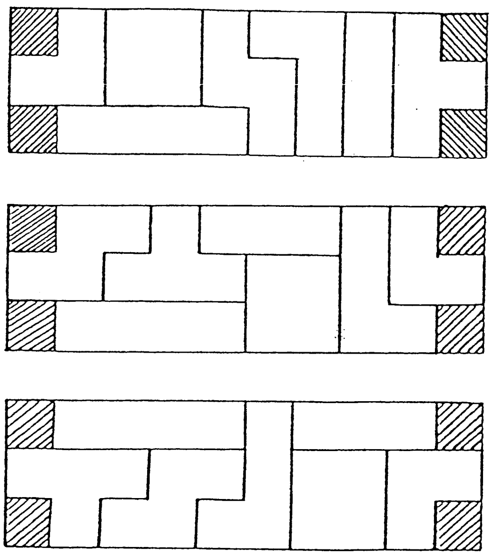


QUELQUES SOLUTIONS B

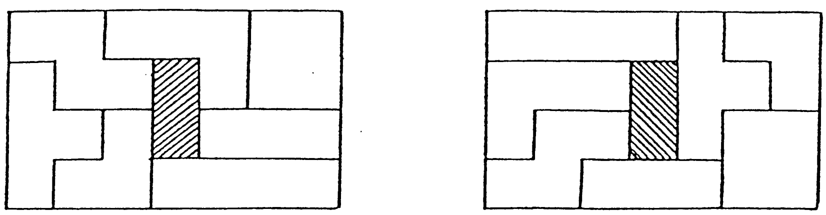
1



2



3



COMMENTAIRES POUR LES CAHIERS A ET B

CARRÉS MAGIQUES

I $\boxed{\text{GENERALITES}}$:

Voici un carré magique d'ordre 3 : c'est une grille carrée de 3 sur 3, comprenant 9 nombres disposés de telle manière que la somme des nombres sur chaque ligne, chaque colonne, chaque diagonale, soit toujours égale à 30.

30			
30 ←	12	11	7
30 ←	5	10	15
30 ←	13	9	8
30	↓ 30	↓ 30	↓ 30

D'une manière générale, un carré magique d'ordre n contient n x n nombres disposés de telle sorte que la somme des n nombres figurant sur chaque ligne, chaque colonne, chaque diagonale, soit toujours égale à un même nombre S.

a) Première propriété :

12	11	7
5	10	15
13	9	8

C_1

$S_1 = 30$

12	28	5
8	15	22
25	2	18

C_2

$S_2 = 45$

Voici deux carrés magiques d'ordre 3, le premier C_1 de somme $S_1 = 30$, le second C_2 de somme $S_2 = 45$.
Construisons un troisième carré C par "addition" :
Chaque nombre de C est la somme des deux nombres correspondants : dans C_1 et C_2.
Démontrons que ce troisième carré C est magique, et de somme $S = S_1 + S_2$, c'est-à dire dans l'exemple ci-contre 75.

12+12	11+28	7+5
5+8	10+15	15+22
13+25	9+2	8+18

24	39	12
13	25	37
38	11	26

C

S = 75

Soit une somme des nombres dans une rangée quelconque de C, par exemple a + b + c.
Dans cette somme, on a

$a = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{nombre} \\ \text{de } c_1}}{a_1} + \underset{\substack{\downarrow \\ \text{nombre} \\ \text{de } c_2}}{a_2}$ $\quad b = b_1 + b_2 \quad c = c_1 + c_2$

$$\text{donc } a + b + c = a_1+a_2+b_1+b_2+c_1+c_2$$
$$= \underbrace{a_1+b_1+c_1}_{S_1} + \underbrace{a_2+b_2+c_2}_{S_2}$$

Cette propriété concerne aussi les carrés d'ordre n.

.../...

b) Deuxième propriété.

C_1
$= 30$

12	11	7
5	10	15
13	9	8

Voici un carré magique C_1, d'ordre 3, de somme 30. Multiplions chaque nombre de ce carré par un nombre quelconque, par exemple par 5. Nous obtenons un nouveau carré magique C, d'ordre 3, et de somme magique 150 (30x5)

$C_1 \times 5$
$S = 30 \times 5$

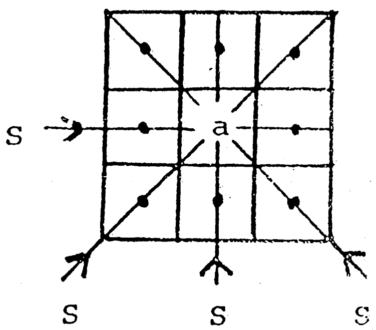
60	55	35
25	50	75
65	45	40

D'une façon générale, en multipliant par n chaque nombre d'un carré magique de somme S_1, on obtient un nouveau carré magique de somme nS_1 (démonstration de même type que celle de a)) :

$$S = nS_1$$

II CARRES MAGIQUES D'ORDRE 3

1. Dans un carré magique d'ordre 3, de somme S, de terme central a, on a : S = 3a.



En effet, calculons la somme des éléments dans les lignes, colonnes et diagonales désignées par des flèches. Nous obtenons 4 S.
Calculons la somme des mêmes éléments ligne par ligne. Nous obtenons 3 S + 3a donc

$$4\ S = 3S + 3\ a, \quad \underline{S = 3a}$$

2. Il n'existe qu'un seul carré magique d'ordre 3, dans lequel figurent les nombres 1,2,3,4,5,6,7,8,9.

* Dans un tel carré, calculons la somme de tous les éléments : $1+2+3+4+5+6+7+8+9 = \frac{9 \times 10}{2} = 45$.

Calculons cette somme ligne par ligne : si nous appelons S la somme magique, nous obtenons S + S + S soit 3S.
Donc $3S = 45$, $\underline{S = 15.}$

* Cherchons tous les ensembles de 3 éléments de somme 15 :

avec 1 : $\boxed{\begin{matrix}1+5+9\\1+6+8\end{matrix}}$ avec 2 : $\boxed{\begin{matrix}2+4+9\\2+5+8\\2+6+7\end{matrix}}$ avec 3 : $\boxed{\begin{matrix}3+4+8\\3+5+7\end{matrix}}$

.../...

Enfin, avec 4, en dehors de 4+9+2 et 4+8+3, déjà trouvés, nous trouvons : $\boxed{4 + 5 + 6}$.

Nous obtenons 8 sommes possibles. Donc, chacune d'elles correspond à une somme de 3 éléments alignés dans le carré, puisqu'il y a 3 lignes, 3 colonnes et 2 diagonales, soit 8 sommes dans le carré magique.

Dans ces sommes 1,3,7 et 9 figurent 2 fois chacun
2,4,5 et 8 figurent 3 fois chacun
5 figure 4 fois.

* Il n'y a donc qu'une seule façon de disposer les neuf nombres dans le carré :

5 dans la case centrale parce qu'il figure dans 4 sommes

1,3,7,9 dans les cases de milieu (1 et 9, 3 et 7 alignés avec 5) parce qu'ils figurent chacun dans 2 sommes

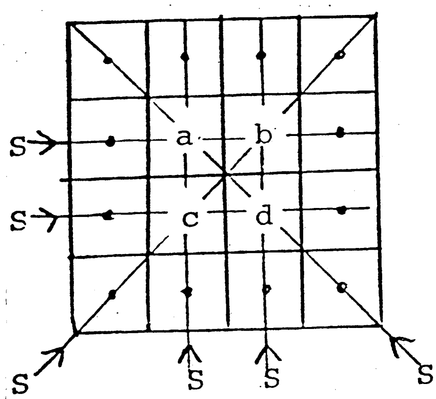
2,4,6,8 dans les cases de coins, parce qu'ils figurent chacun dans 3 sommes

A partir d'une disposition, on en obtient 7 autres, en transformant le carré construit par isométries:

618	276	492	834	816	672	294	438
753	951	357	159	357	159	753	951
294	438	816	672	492	834	618	276

III CARRES MAGIQUES D'ORDRE 4.

1. Propriétés : a) Dans un carré magique d'ordre 4, de somme S, la somme des 4 termes au centre est égal à S :

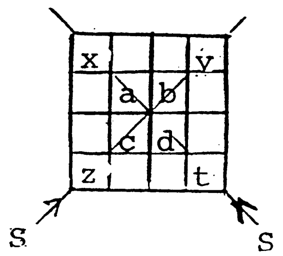


Il suffit de calculer la somme des éléments dans les lignes, colonnes et diagonales désignées par des flèches. Nous obtenons 6S. Calculons la somme de ces mêmes éléments ligne par ligne, nous obtenons 4S+2(a+b+c+d) donc

$$6S = 4S+2(a+b+c+d)$$

$$\underline{a+b+c+d = S}$$

.../...



b) Dans un carré magique d'ordre 4, de somme S, la somme des 4 termes aux coins est égale à S.

Calculons la somme des éléments des 2 diagonales :

$$\begin{aligned} 2\,S &= (x+a+d+t)+(y+b+c+z) \\ &= (x+y+z+t)+(a+b+c+d) \\ &= (s+y+z+t)+S \end{aligned}$$

$$\underline{x+y+z+t = S}$$

2. Carrés magiques d'ordre 4 avec les nombres 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10, 11,12,13,13,15,16.

a) Calculons la somme magique S dans de tels carrés. La somme de tous les éléments est :

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 = 8x17 = 136$$

tous les éléments étant disposés sur 4 lignes, de somme chacune S, on a : 136 = 4 S soit S = 34.

b) Parmi tous ces carrés d'ordre 4, que l'on peut construire (il y en a 880 distincts), il en existe des super magiques, tels que tout carré de 4 cases extrait du carré magique contient 4 éléments de somme 34 (on peut extraire 9 carrés de 4 cases). Exemple :

1	8	10	15
12	13	3	6
7	2	16	9
14	11	5	4

1	8	10	15
14	11	5	4
7	2	16	9
12	13	3	6

1	8	11	14
12	13	2	7
6	3	16	9
15	10	5	4

1	8	11	14
15	10	5	4
6	3	16	9
12	13	2	7

IV CONSTRUCTIONS DE CARRES MAGIQUES

1ère méthode générale

On connaît déjà un ou deux carrés ; on peut alors en construire d'autres en utilisant la première et/ou la deuxième propriété de 1. Exemple :

.../...

A partir de C_1

12	11	7
5	10	15
13	9	8

$S_1 = 30$

et de C_2

24	56	10
16	30	44
50	4	36

$S_2 = 90$

on peut obtenir $C_1 + C_2$:

36	67	17
21	40	59
73	13	44

$S = 30 + 90$

Cette méthode permet de construire des carrés d'ordre n assez facilement, en effet à partir d'un premier carré connu, on peut prendre pour deuxième carré, des carrés magiques de type :

1

1	1	1
1	1	1
1	1	1

S = 3

2

a	a	a	a
a	a	a	a
a	a	a	a
a	a	a	a

S = 4 a

3

1	3	4	2
4	2	1	3
2	4	3	1
3	1	2	4

S = 10

4

1	0	0	0
0	0	1	0
0	0	0	1
0	1	0	0

S = 1

5

1	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	1	0	0	0
0	0	0	0	1
0	0	1	0	0

S = 1

Ainsi, on peut passer en "ajoutant 1", ou en "ajoutant" le carré 1

de

12	11	7
5	10	15
13	9	8

à

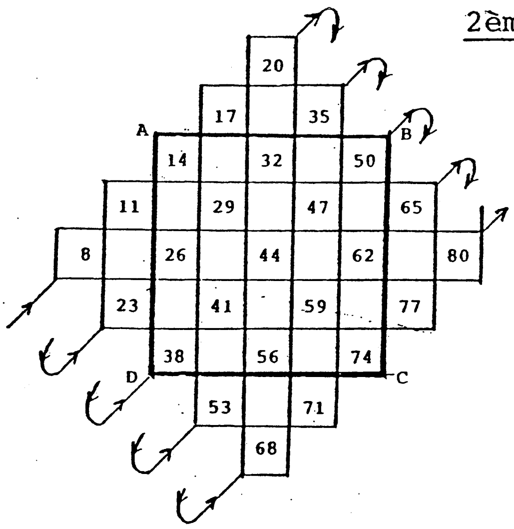
13	12	8
6	11	16
14	10	9

à

14	13	9
7	12	17
15	11	10

...

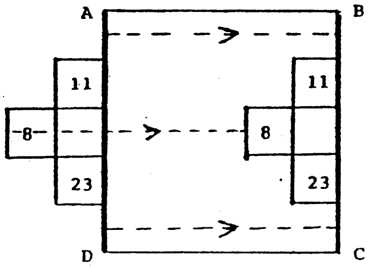
<u>Remarque</u> : Il peut arriver dans ces constructions de carrés magiques qu'on obtienne parmi les n x n éléments du carré, 2 fois le même nombre. Ceci n'est pas gênant pour des exercices à proposer à l'école élémentaire.



<u>2ème méthode : pour les carrés d'ordre impair</u>

On complète chaque bord du carré à construire par un "double escalier" (voir ci-contre) on place dans chaque diagonale, dans l'ordre indiqué par les flèches une suite quelconque de nombres en progression arithmétique (n, n+a, n+2a, n+3a, etc...)

.../...

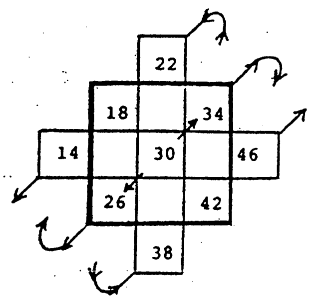


Les nombres situés à l'intérieur du carré sont bien placés.
Pour remplir les cases vides, il suffit de faire glisser (par translation) les nombres situés sur un bord (AD par exemple) à l'extérieur du carré, dans le double escalier, jusqu'à ce que ce bord coïncide avec le bord opposé (AC par exemple) (voir ci-contre, le carré magique obtenu, de somme magique 220).

14	53	32	71	50
65	29	68	47	11
26	80	44	8	62
77	41	20	59	23
38	17	56	35	74

On peut en particulier <u>inventer un carré magique ayant une somme magique fixée à l'avance</u> :

On utilise la propriété générale pour un carré d'ordre n impair quelconque (démontrée dans II pour l'ordre 3) :



18	38	34
46	30	14
26	22	42

Dans un carré magique d'ordre impair n, la somme magique S est égale à n fois le terme central a

$$S = n \times a$$

On se fixe donc l'ordre du carré, par exemple 3, la somme magique, par exemple 90. On calcule le terme central $a = \frac{90}{3} = 30$. On le place au centre du carré et on écrit une suite croissante arithmétique croissante et décroissante à partir de 30.

<u>3ème méthode : pour les carrés d'ordre 4 (ou 4n)</u>

~~7~~	11	15	~~19~~
23	~~27~~	~~31~~	35
39	~~43~~	~~47~~	51
~~55~~	59	63	~~67~~

7	63	59	19
51	27	31	39
35	43	47	23
55	15	11	67

On écrit dans l'ordre une suite de nombres en progression arithmétique quelconque.

On dessine les deux diagonales, les nombres barrés sont en place.

On remplace chaque nombre barré par son symétrique par rapport au centre du carré.

.../...

V QUELQUES CARRES A RESOUDRE

		15
	10	2
5		

	10	
	50	
40	90	

24	20	

S = 54

10		13	11
22			
	18		3
14			

S = 50

10		25	
43			42
		44	
	20		35

S = 90

* Pour résoudre un carré magique d'ordre 3, il suffit de connaître la somme magique S et 2 nombres sur les bords du carré : On place au centre le nombre (S:3) et les autres nombres se calculent en résolvant des équations de type a + x = S.

* Pour résoudre un carré magique d'ordre 4, il suffit de connaître la somme magique s et 7 nombres convenablement placés tous les autres nombres se calculent en résolvant des équations de type a + x = s.

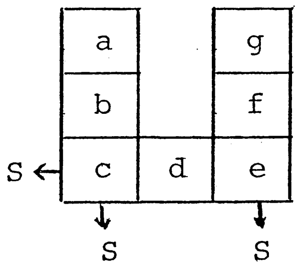
FIGURES MAGIQUES, PROPRIÉTÉS ET CONSTRUCTIONS

I U MAGIQUES, CONSTRUCTIONS

Comment construire un U magique de somme magique S ?

* Soit un U à 7 cases, nous convenons d'utiliser les nombres de 1 à 7 : Il s'agit de placer les nombres de 1 à 7 en a, b, c, ... g, de telle sorte que :

$$a + b + c = S$$
$$c + d + e = S$$
$$e + f + g = S$$



En additionnant membre à membre ces 3 égalités, nous obtenons :

$$(a + b + c) + (c + d + e) + (e + f + g) = 3S$$

ou encore

$$(a + b + c + d + e + f + g) + (c + e) = 3S$$

$a + b + c + d + e + f + g$ est la somme de tous les nombres inscrits, c'est-à-dire : $\underbrace{1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7}$ ou 28

On obtient donc : $28 + (c + e) = 3S$

Le nombre $28 + (c + e)$ doit donc être divisible par 3. Il peut être 30, 33, 36,... S vaut alors respectivement 10, 11, 12...

Etudions chaque cas :

$28 + (c + e) = 30$	$c + e = 2$	c'est impossible
$28 + (c + e) = 33$	$c + e = 5$	(S = 11) Il y a 2 possibilités : - $c + e = 2 + 3$ (cahier A, page 1 (1)) - $c + e = 1 + 4$ (cahier A, page 1 (2))
$28 + (c + e) = 36$	$c + e = 8$	(S = 12) Il y a 3 possibilités : - $c + e = 5 + 3$ (cahier A, page 1 (4)) - $c + e = 6 + 2$ (cahier A, page 1 (3)) - $c + e = 7 + 1$ (cahier A, page 2 (7))
$28 + (c + e) = 39$	$c + e = 11$	(S=13) Il y a deux possibilités - $c + e = 7 + 4$ (cahier A, page 2 (6)) - $c + e = 6 + 5$ (cahier A, page 2 (5))
$28 + (c + e) = 42$	$c + e = 14$	c'est impossible.

.../...

* <u>Soit un U à 8 cases</u>, nous convenons d'utiliser les nombres de 1 à 8.

En faisant le même raisonnement que précédemment, nous obtenons $36 + (c + f) = 3S$. Nous pouvons encore étudier chaque cas :

a			g
b			g
c	d	e	f

- $36 + (e+f) = 39$ $e + f = 3$ avec $S = 13$

Il y a une seule possibilité : $e + f = 1 + 2$, ce qui conduit à 2 U magiques de somme 13 :

7			8
5			3
1	6	4	2

8			6
4			5
1	3	7	2

- $36 + (e+f) = 42$ $e + f = 6$ avec $S = 14$

Il y a deux possibilités $e + f = 4 + 2$ et $e + f = 5 + 1$, mais aucun U magique ne peut se construire à partir de ces valeurs de $e + f$. On peut facilement le vérifier.

- $36 + (e+f) = 45$ $e + f = 9$ avec $S = 15$

Il y a 4 possibilités pour $e + f$: $5 + 4$, $6 + 3$, $7 + 2$ et $8 + 1$.

On peut vérifier que : il ne correspond aucun U au cas $e + f = 5 + 4$

il correspond 2 U au cas $e + f = 6 + 3$:

7			8
2			4
6	5	1	3

8			7
1			5
6	2	4	3

il ne correspond aucun U au cas $e + f = 7 + 2$

il ne correspond aucun U au cas $e + f = 8 + 1$

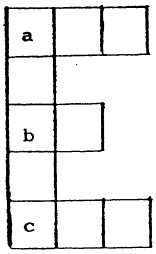
* <u>Soit un U à 9 cases</u>.

Un raisonnement analogue conduit aux U magiques proposés dans le cahier B pages 1 et 2.

.../...

II E MAGIQUES, CONSTRUCTIONS

Soit un E magique à 10 cases (nombres de 1 à 10) de somme magique S



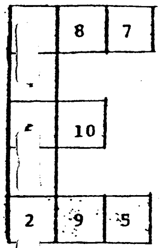
En faisant la somme dans chaque barre du E, on obtient

$(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10) + (a + b + c) = 4S$ ou

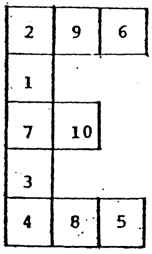
$$55 + (a + b + c) = 4S$$

- La première valeur possible pour $4S$ est 64 ($a+b+c > 6$) soit $a + b + c = 9$ avec $S = 16$, ce qui donne un seul E magique possible (voir ci-contre (1))
- La deuxième valeur possible pour $4S$ est 68, soit $a + b + c = 13$ avec $S = 17$ ce qui donne un seul E magique possible (voir ci-contre (2))

(1)



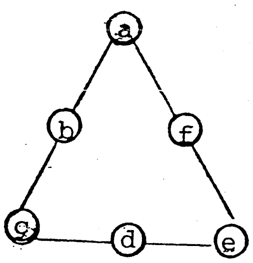
(2)



III NOMBRES EN TRIANGLES, CONSTRUCTIONS

La méthode de construction est la même que celle des U magiques :

* Triangles à 6 nombres (nombres de 1 à 6, somme magique S)



$$S = a + b + c$$
$$S = c + d + e$$
$$S = e + f + a$$

$$3S = (a + b + c + d + e + f) + (a + c + e)$$
$$3S = (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) + (a + c + e)$$

soit : $3S = 21 + a + c + e$

Pour que S soit un entier naturel, il faut que $a + c + e$ soit un multiple de 3.

1er cas : $a + c + e = 6$, $3S = 27$, $S = 9$ (triangle cahier B, p. 3 (1))

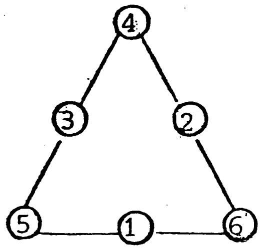
2ème cas : $a + c + e = 9$, $3S = 30$, $S = 10$

- $1 + 2 + 6$: aucun triangle magique
- $1 + 3 + 5$: c'est le triangle du cahier A, p. 3 (1)
- $2 + 3 + 4$: aucun triangle magique

3ème cas : $a + c + e = 12$, $3S = 33$, $S = 11$

- $1 + 5 + 6$ et $3 + 4 + 5$ ne correspondent à aucun triangle magique
- $2 + 4 + 6$, c'est le triangle du cahier A, page 3 (2)

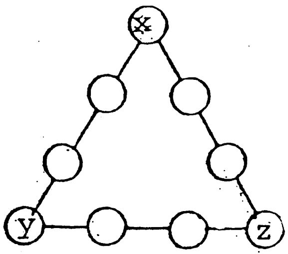
.../...



4ème cas : $a + c + e = 15$, $3S = 36$, $S = 12$, c'est le triangle ci-contre dans lequel $a + c + e = 4 + 5 + 6$

5ème cas : $a + c + e = 18$, qui ne peut être obtenu à partir de 3 nombres choisis parmi 1, 2, 3, 4, 5, et 6.

* Triangles à 9 nombres (nombres de 1 à 9, somme magique S)



Par un même raisonnement que précédemment, on obtient $45 + x + y + z = 3\ S$

1er cas : $x + y + z = 6$, $S = 17$, triangles cahier A p. 4

2ème cas : $x + y + z = 9$, $S = 18$, On ne trouve aucun triangle, ni avec $1+2+6$, ni avec $1+3+5$, ni avec $2 + 3 + 4$.

3ème cas : $x + y + z = 12$, $S = 19$, triangles cahier B p. 4

4ème cas : etc...

IV NOMBRES EN CARRES

La méthode de construction est toujours la même :

* Carrés à 8 nombres, nombres de 1 à 8, somme magique S :

a	h	g
b		f
c	d	e

$S = a + b + c$
$S = c + d + e$
$S = e + f + g$
$S = g + h + a$

$4\ S = (a + b + c + d + e + f + g + h)+(a + c + e + g)$
$4\ S = (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8)+(a + c + e + g)$ soit $4S = 36 + (a + c + e + g)$, $36+(a + c + e + g)$ doit être un multiple de 4 et comme $a + c + e + g \geqslant 1 + 2 + 3 + 4$, on obtient 48 comme première valeur possible pour 4 S d'où :

1er cas : $a + c + e + g = 12$, $S = 12$, on obtient le carré :

1 8 3
5   7
6 4 2

2ème cas : $a + c + e + g = 16$, $S = 13$, on obtient les carrés :

1 7 5   et   5 7 1
4   6   2   8
8 3 2   6 3 4

.../...

3ème cas : $a + c + e + g = 20$, $S = 14$, on obtient les carrés :

1	6	7
5		3
8	2	4

3	7	4
6		2
5	1	8

1	5	8
6		2
7	3	4

etc...

* Carrés à 12 nombres, nombres de 1 à 12, somme magique S :

x		y
t		z

On obtient facilement $78 + x + y + z + t = 4\ S$ avec

$$x + y + z + t \geqslant 1 + 2 + 3 + 4$$

1er cas : $x + y + z + t = 10$, $S = \frac{88}{4} = 22$, on obtient les carrés :

1	10	9	2
5			6
12			11
4	7	8	3

ou

1	11	8	2
7			5
10			12
4	9	6	3

ou

1	12	7	2
8			5
10			11
3	6	9	4

ou

1	11	8	2
6			9
12			7
3	5	10	4

2ème cas : $x + y + z + t = 14$, $S = \frac{92}{4} = 23$, on obtient les carrés du cahier B page 6.

etc...

V PROPRIETES DE CES FIGURES MAGIQUES, AUTRES CONSTRUCTIONS

* Propriétés : On peut facilement démontrer que ces figures magiques ont les mêmes propriétés que les carrés magiques (voir chapitre "carrés magiques" p. 45 et 46) :

(a) la "somme" de deux figures magiques de somme magique respectivement s_1 et s_2 est une figure magique de somme $s = s_1+s_2$.

Exemple :

1)

1		6
5		3
7	2	4

$s_1=13$

$\oplus$

2		5
3		6
7	4	1

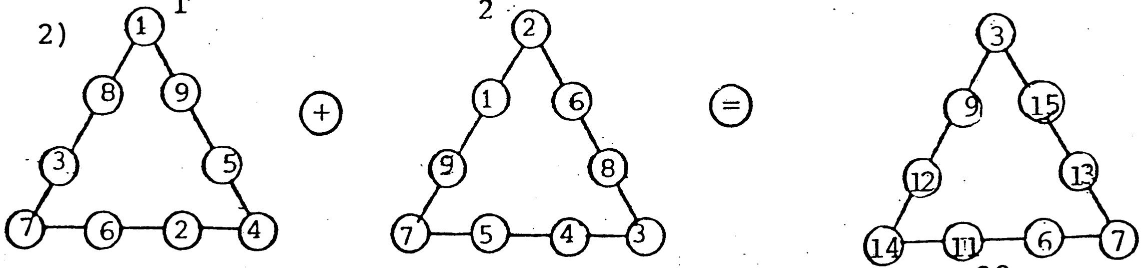
$s_2=12$

=

3		11
8		9
14	6	5

$s=25$

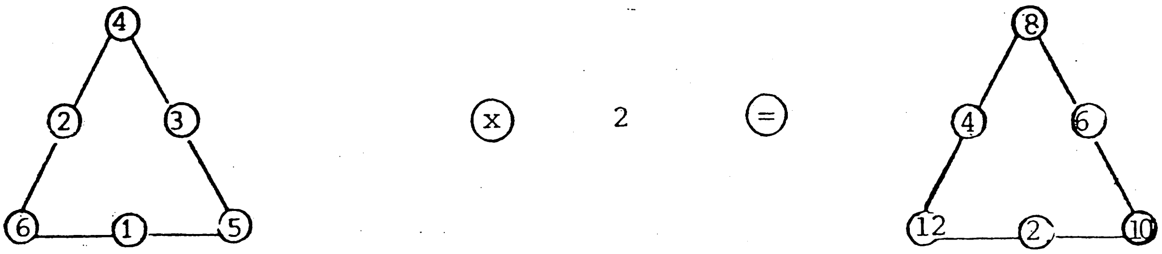
2)



$s_1=19$ $s_2=19$ $s=38$

.../...

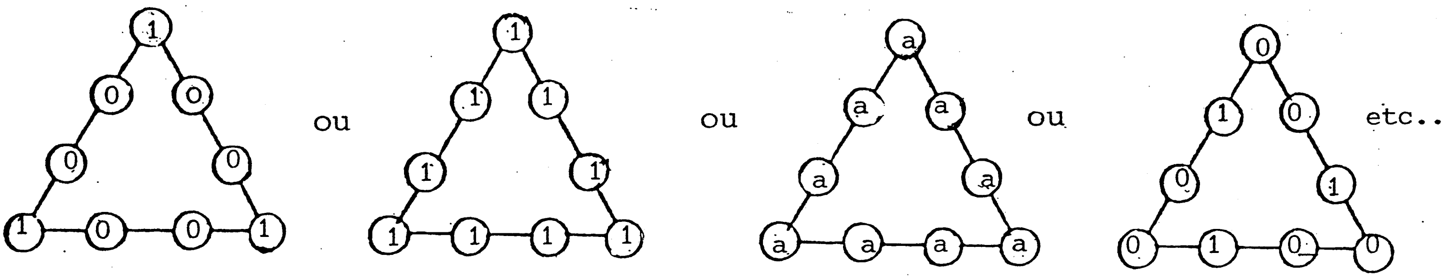
(b) Le "produit" d'une figure magique de somme s par un nombre entier n est une figure magique de somme n x s. Exemples :



s = 12 S = 24 (2x12)

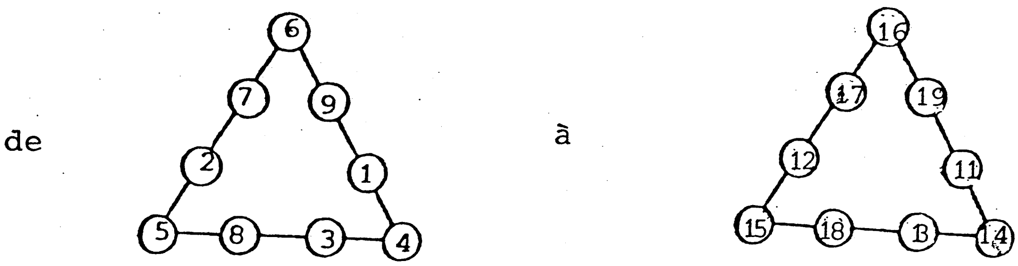
Autres constructions :

Comme figures de base pour les opérations (a) et (b), on peut choisir une figure connue et une des figures de type :



s = 2 s = 4 s = 4a s = 1

Ainsi, en "ajoutant 10", on peut passer



Les nouvelles figures obtenues ne comportent pas forcément une série de nombres qui se suivent, elles peuvent aussi contenir deux (ou plusieurs fois) le même nombre.

GRILLES AVEC DES NOMBRES

I - Recherche d'une solution pour 1 cahier B p. 20 :

			42
			32
			270
42	80	108	

On nous demande de placer le nombre 5. Le nombre 5 se trouve à l'intersection d'une ligne et d'une colonne. Il ne peut être dans la ligne de 42 car 42 n'est pas un multiple de 5, (les multiples de 5 se terminent par 0 ou par 5). Pour les mêmes raisons, il ne peut être ni dans la ligne de 32, ni dans la colonne de 42, ni dans la colonne de 108. Seule la case qui se trouve à l'intersection de la ligne 270 et de la colonne 80 convient pour le nombre 5. On trouve (par division par exemple) 270 = 5 x 54 et 80 = 5 x 16.

Une même étude à propos du nombre 7 nous conduit à chercher parmi 42, 32, 270, 80, 108, quels sont les multiples de 7. Cette recherche peut se faire en "posant" les divisions par 7, et nous permet de placer 7 à l'intersection de la ligne de 42 (7x6) et de la colonne de 42.

Peut-on placer à coup sûr d'autres nombres, sans tenir compte de ces deux nombres déjà placés ?

Le nombre 2 ne peut être placé immédiatement car il peut convenir dans n'importe quelle ligne ou colonne (tous les nombres proposés sont pairs).

Le nombre 3 ne peut être placé immédiatement car il peut convenir dans les rangées de 42 (3x14), de 108 (3 x 36).

Le nombre 4 peut être placé immédiatement car il peut convenir dans les rangées de 32 (4x8), 80 (4x20) et 108 (4x27) mais on constate que 80 en fait ne convient pas, car 80 = 4x20 et 20 ne peut être le produit de 2 autres nombres de la grille (2x10 ou 4x5). 4 se place donc à l'intersection de la ligne de 32 et de la colonne de 108.

Le nombre 6 ne peut être placé immédiatement : 42 = 6x7, 270 = 6x45 108 = 6x18

Le nombre 8 peut être placé de façon unique : 32 et 80 sont les deux seuls multiples de 8 proposés : 32 = 4x8 et 80 = 8x10. Donc 8 est à l'intersection de la ligne de 32 et de la colonne de 108.

Le nombre 9 peut être placé : 270 = 9x30, 108 = 9 x 12
270 et 108 sont les deux seuls multiples de 9.

.../...

5, 7, 4, 9, 8 étant placés, la grille se termine rapidement :

7	c	d	42
a	8	4	32
b	5	9	270
42	80	108	

a x 8 x 4 = 32 donc a = 1
b x 5 x 9 = 270 donc b = 6 (270 : 45)
c x 8 x 5 = 80 donc c = 2 (80 : 40)
d x 4 x 9 = 108 donc d = 3 (108 : 36)

II- Recherche d'une solution dans le cas général

1ère méthode : Placer 5 et 7 en premier

1°) Placer les nombres 5 et 7

Les nombres 5 et 7 peuvent toujours être placés en premier. En effet, parmi les nombres donnés à propos des lignes, un seul est multiple de 5, nous avons un résultat analogue à propos des colonnes, tandis que pour placer 2, par exemple, il nous faut chercher un nombre pair, et celui-ci n'est ni unique pour les colonnes, ni pour les lignes (cf. exemple précédent), de sorte que la détermination de la place de 2 nécessite d'autres renseignements.

Considérons d'autres nombres :

3 se place dans une rangée où le nombre donné est un multiple de 3. Pour les lignes, comme pour les colonnes, il peut y avoir plusieurs nombres donnés qui sont multiples de 3, car il y a un multiple de 9, un multiple de 6 et un multiple de 3 et ces trois nombres peuvent être distincts. Donc la position de 3 n'est jamais immédiate, avec ces seuls renseignements.

4 se place de même dans une rangée où le nombre donné est multiple de 4, comme il peut y avoir simultanément un multiple de 12 (rangée qui comprend en fait 2 et 6), un multiple de 8 (rangée qui comprend effectivement 8) et un multiple de 4, tous distincts, la place de 4 n'est jamais immédiate avec ces seuls renseignements.

Pour les nombres 6, 8, 9, nous avons des résultats du même type.

Voici, pour les grilles proposées, les nombres qui peuvent être placés immédiatement, avec uniquement des recherches concernant la divisibilité par 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ou 9, des nombres proposés.

.../...

Grille 1 : 5, 7, 9, 8
Grille 2 : 5, 7, 8
Grille 3 : 5, 7, 9, 8
Grille 4 : 5, 7
Grille 5 : 5, 7, 9, 8
Grille 6 : 5, 7, 8
Grille 7 : 5, 7, 8
Grille 8 : 5, 7

2°) Compléter la grille

Complétons la grille 8 pour laquelle seuls les nombres 5 et 7 peuvent être trouvés en premier, comment continuer ?

9			72
1	3	7	21
5			240
45	72	112	

Dans la ligne de 21, on a déjà 7. C'est donc que les deux autres nombres de cette ligne sont 3 et 1.
Dans la colonne de 45, on a déjà 5. C'est donc que les deux autres nombres de cette colonne sont 9 et 1. Cela nous permet de placer le 1 sans ambiguité, puis le 9 et le 3. Dans la 1ère ligne 9 x .x. = 72 les deux nombres manquants sont donc 2 et 4 (1 et 8 ne conviennent pas, 1 étant déjà placé). Dans la colonne de 72, 3 x . x . = 72. Les deux nombres manquants sont donc 6 et 4 (3 et 8 ne conviennent pas) ce qui permet de placer le 4 dans la ligne et la colonne de 72, puis le 2, puis le 6 et enfin le 8 qui est le dernier nombre à placer.

2ème méthode : Décomposer certains nombres en produits de facteurs.

On peut essayer de résoudre une grille en essayant de mettre chaque nombre donné sous forme d'un produit de 3 nombres choisis parmi 1, 2, 3,..., 8, 9.

Exemple, résolution de 8

45 = 1 x 9 x 5 seule possibilité
21 = 1 x 3 x 7 seule possibilité, ce qui nous permet de placer le 1 sans ambiguïté à l'intersection de la ligne de 21 avec la colonne de 45

.../...

ligne 72 ; 72 = 3 x 6 x 4 est impossible (3 est dans la ligne de 21)

9	4	2	72
1	3	7	21
5	6		240
45	72	112	

72 = 9 x 8 x 1 est impossible (1 est dans la ligne de 21)
72 = 9 x 4 x 2 reste le seul produit possible, ce qui permet de placer le 9 à l'intersection de cette ligne et de la colonne de 45.

colonne 72 ; 72 = 3 x 6 x 4 reste le seul produit possible, ce qui permet de placer le 3 (ligne 21) et le 4 (ligne 72), puis le 2 (ligne 72).
Enfin le 8 est le dernier nombre à placer.

III - Compléments théoriques.

7	2	3	42
1	8	4	32
6	5	9	270
42	80	108	

1°) multiples et diviseurs

Etudions la solution 1

5 est à l'intersection de la ligne 270 et de la colonne 80.
270 = 5 x(6x9) ; 80 = 5 x(8x2)
270 et 80 qui sont des nombres de la forme 5 x n sont appelés multiples de 5 (270 = 5x54, 80 = 5x16). On dit encore que 5 divise 270 (que 5 divise 80) ou encore que 5 est un diviseur de 270 (5 est diviseur de 80). On reconnaît que 270 est un multiple de 5 :
- soit en utilisant un caractère de divisibilité par le nombre 5
- soit en construisant la liste des multiples de 5 inférieurs ou égaux à 270 et en vérifiant que 270 y est, ce qui est fastidieux et long dans le cas du nombre 270, mais qui est plus rapide dans le cas de nombres pas trop grands.
- soit en "posant" la division de 270 par 5, et en vérifiant que le reste dans cette division est nul :

$$\begin{array}{r|l} 270 & 5 \\ \cline{2-2} 20 & 54 \\ 0 & \end{array}$$

2°) Caractères de divisibilité

Cas du nombre 5.

On connaît un moyen simple qui permet de reconnaître rapidement si un nombre est divisible par 5 :

En construisant une liste de multiples de 5 (5x0, 5x1, 5x2,...) un enfant constate vite que tous les multiples qu'il écrit (0,5,10,15,20,...) se terminent par 0 ou 5, et qu'il en est

.../...

toujours ainsi. Inversement, si un nombre se termine par 5 ou par 0, l'enfant peut se convaincre qu'il est forcément multiple de 5 (310 c'est 31 paquets de 10, ou 62 paquets de 5 ; 75 c'est 7 paquets de 10 et un paquet de 5, ou encore 14 paquets de 5 et un paquet de 5, ou encore 15 paquets de 5). Cela caractérise les multiples de 5 et il s'agit du caractère de divisibilité par 5 : pour qu'un nombre soit divisible par 5, il faut et il suffit qu'il se termine par 0 ou par 5. Il existe des caractères de divisibilité qui permettent de dire rapidement si un nombre est divisible par 2, ou par 3, ou par 4, ou par 5, ou par 8, ou par 9, ou par 10, ou par 11, ou par 25...

Cas du nombre 9.

Voici, énoncé et démontré, un caractère de divisibilité par 9, qui peut parfois être utilisé pour placer 9 dans une des grilles du cahier B.

Pour qu'un nombre soit divisible par 9, il faut et il suffit que la somme de ses "chiffres" soit divisible par 9.

Prenons par exemple 3452. Nous avons

$$3452 = 3000 + 400 + 50 + 2$$
$$= (3 \times 1000) + (4 \times 100) + (5 \times 10) + 2$$
$$1000 = 999 + 1 \quad ; \quad 100 = 99 + 1 \quad ; \quad 10 = 9 + 1$$
$$\text{ou } 1000 = (9 \times 111) + 1 \; ; \; 100 = (9 \times 11) + 1$$
$$\text{donc } 3452 = 3\,[(9 \times 111) + 1] + 4\,[(9 \times 11) + 1] + 5\,(9+1) + 2$$
$$3452 = (3 \times 9 \times 111) + 3 + (4 \times 9 \times 11) + 4 + (5 \times 9) + 5 + 2$$
$$= (9 \times 3 \times 111) + (9 \times 4 \times 11) + (9 \times 5) + 3 + 4 + 5 + 2$$
$$= \underbrace{(9 \times (333 + 44 + 5)}_{\text{ce nombre est divisible par 9;}} + 3 + 4 + 5 + 2$$

donc 3452 est divisible par 9 en même temps que 3 + 4 + 5 + 2. Ce qui précède permet même d'observer que 3452 et 3 + 4 + 5 + 2 ont même reste dans la division par 9.

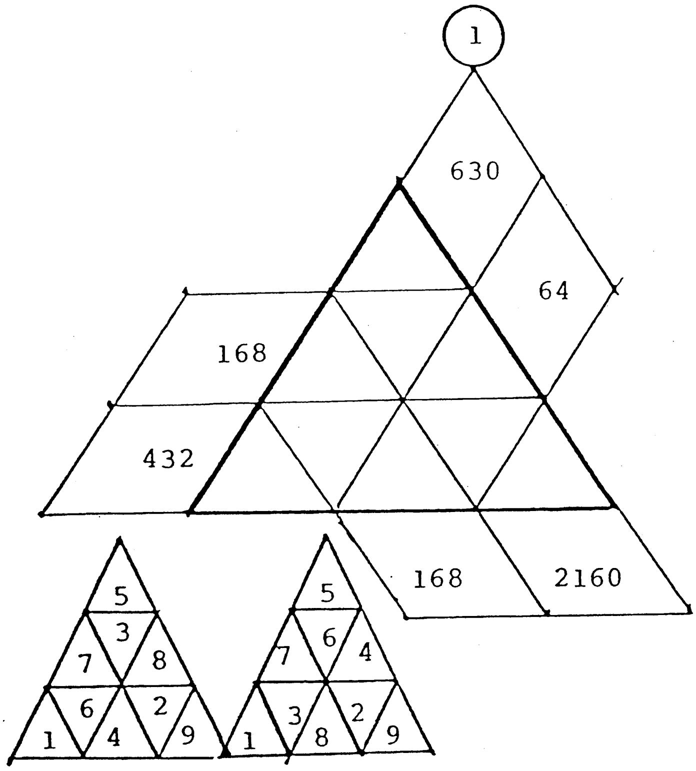
La démonstration qui précède peut être conduite pour n'importe quel nombre. Faisons une démonstration générale pour tout nombre de 4 chiffres.

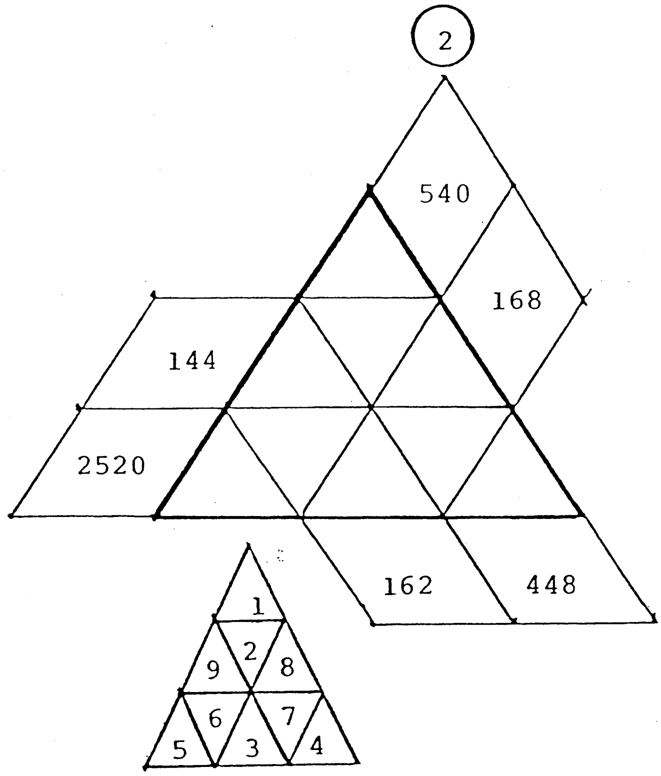
$$\overline{abcd} = (a \times 1000) + (b \times 100) + (c \times 10) + d$$
$$= (a \times 9 \times 111) + a + (b \times 9 \times 11) + b + (c \times 9) + c + d$$
$$= \underbrace{9 \times [(a \times 111) + (b \times 11) + c]}_{\text{Ce nombre est divisible par 9.}} + a + b + c + d$$

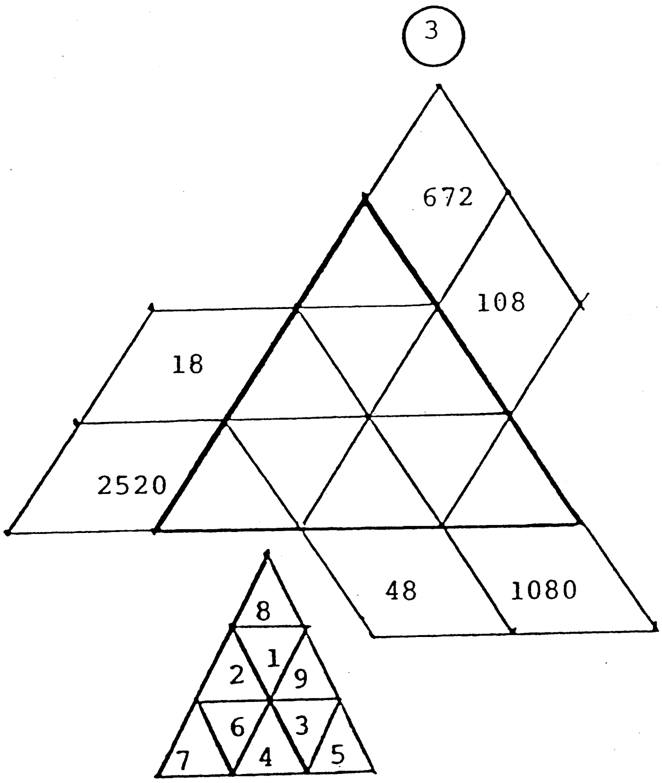
Donc $\overline{abcd}$ et $(a+b+c+d)$ ont même reste dans la division par 9.

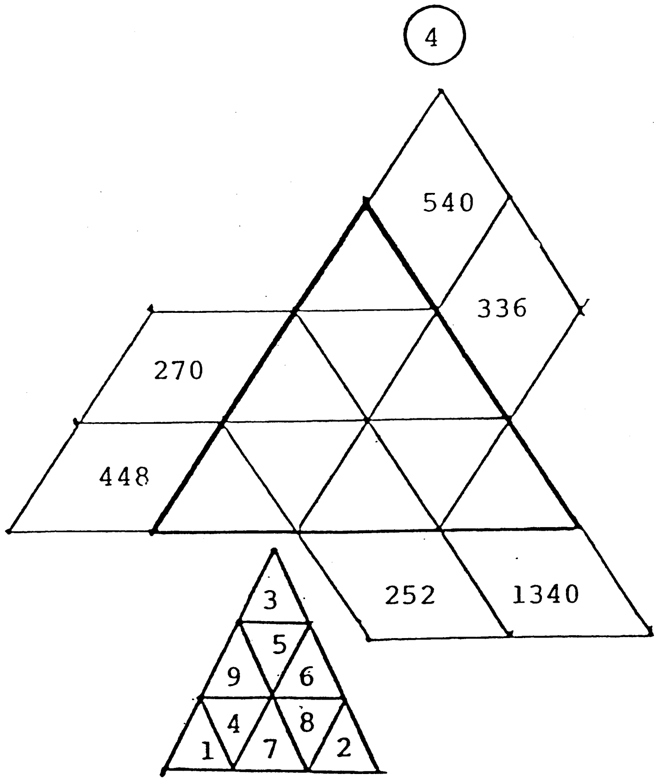
.../...

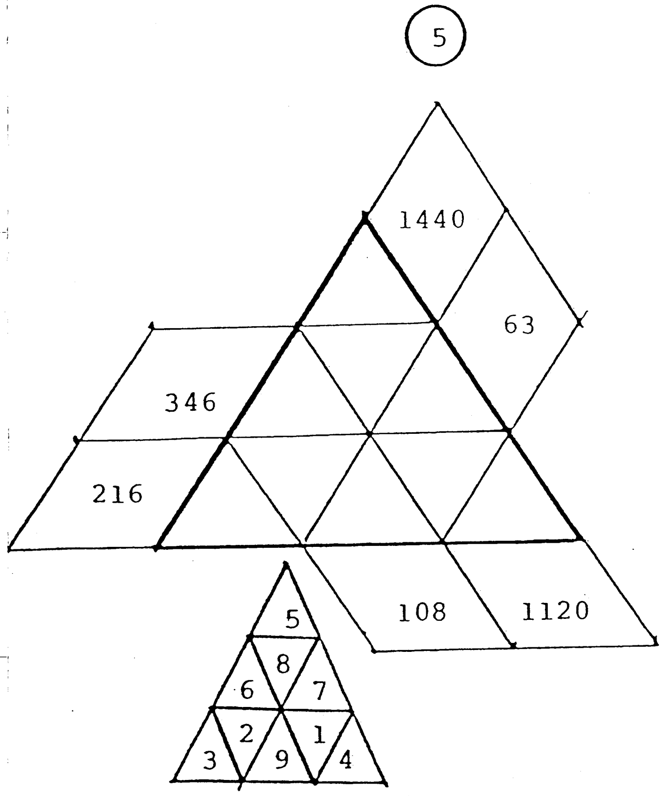
IV - Autres problèmes avec leurs solutions

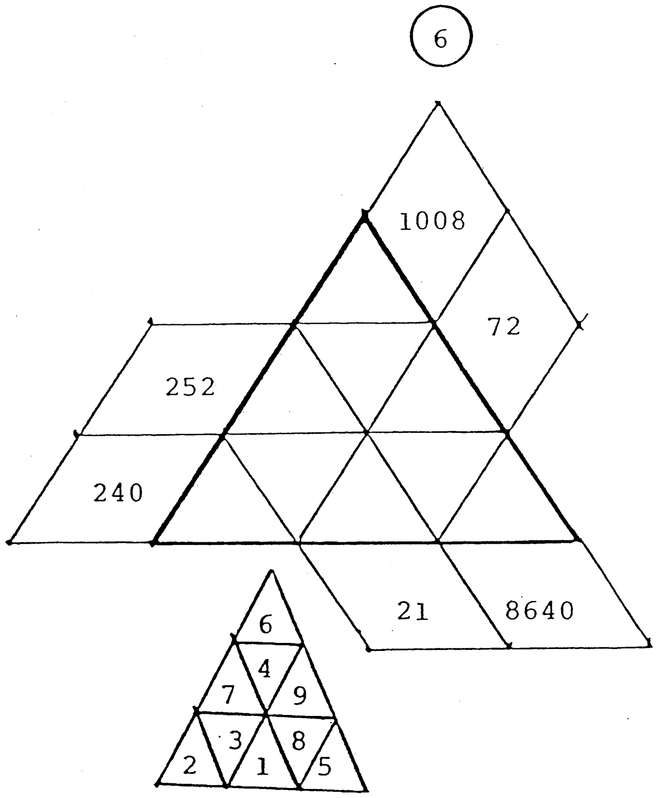









5
1440
63
346
216
108
1120
5
8
6
7
2
1
3
9
4


6
1008
72
252
240
21
8640
6
4
7
9
3
8
2
1
5

JEUX D'ORDRE

Si nous avons 5 éléments à aligner, sans ex-aequo, et si nous ne disposons d'aucune contrainte particulière à propos de l'alignement à obtenir, nous avons le choix entre 5 x 4 x 3 x 2 x 1 possibilités (cf. "Dénombrement").

Un alignement de cinq éléments A, B, C, D, E étant réalisé, par exemple C A E D B, nous pouvons constater qu'il lui correspond (4 + 3 + 2 + 1) énoncés de type "x est avant y"(*) (ex. "A est avant B", "C est avant D"), donnant la place de l'élément x par rapport à y. Nous pouvons noter que dix énoncés du type prédédent compatibles entre eux permettent d'obtenir un alignement unique. Cependant dans certains cas, 4 énoncés suiffisent,
exemple : B est avant A, A est avant E,
E est avant C, C est avant D
donnent l'alignement B A E C D. Par contre dans certains cas, 9 énoncés peuvent être insuffisants, exemple :

A est avant C, A est avant E,
A est avant B, A est avant D,
C est avant B, C est avant D.
C est avant E,
E est avant D, B est avant D.

Ici, on ne peut décider de la position de E par rapport à B.

Dans les situations proposées les données ne conduisent pas toujours à un alignement unique, par ailleurs elles ne sont pas formulées sous la forme évoquée ci-dessus. Certains énoncés concernent un seul élément, exemple : "C n'est pas premier", d'autres concernent 3 éléments, exemple : A est entre B et C. La réussite nécessite la coordination des différentes contraintes.

(*) Il y a 4 énoncés pour C (qui est avant A, E, D et B)
3 énoncés pour A (qui est avant E, D et B)
2 énoncés pour E (qui est avant D et B)
1 énoncé pour D (qui est avant B)

DÉNOMBREMENTS

CONSTRUCTION DE TOURS, ECRIRE DES MOTS, ECRIRE DES NOMBRES.

Les réalisations demandées sont de 2 types :

1°) Une couleur de cubes, ou une lettre, ou un chiffre, peut se répéter respectivement dans la tour, le mot ou l'écriture du nombre.

2°) Une couleur de cubes, une lettre ou un chiffre ne peut se répéter.

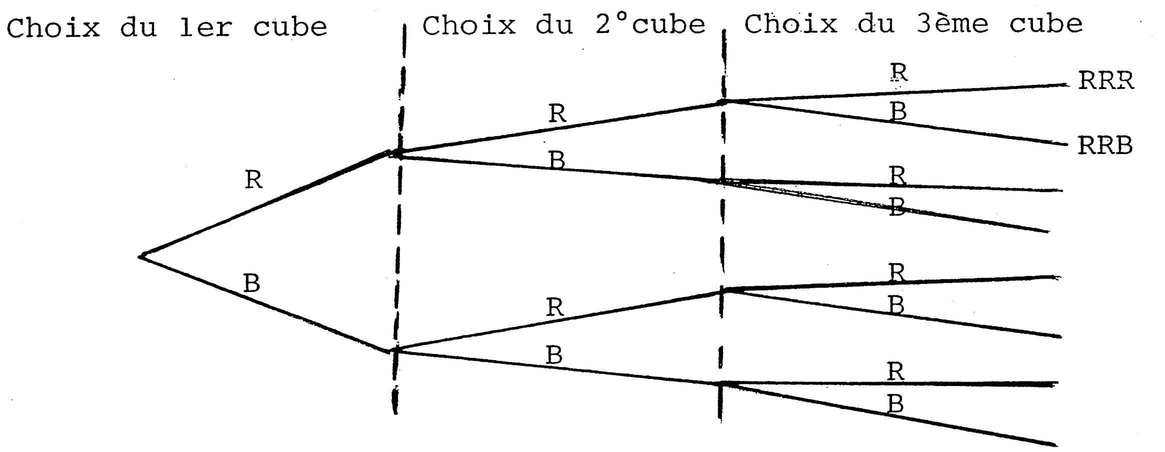
Examinons successivement chacun de ces cas.

1°) <u>Une couleur peut se répéter</u>.

. Voici des tours de hauteur 3 utilisant deux couleurs de cubes.

R	B	R	R
B	B	R	R
R	R	R	B

Pour le premier cube, celui du bas, nous avons le choix entre deux possibilités R, B. Ce choix étant réalisé nous avons maintenant pour le second cube (le premier étage) le choix entre deux possibilités. Pour le second étage, nous avons de même le choix entre deux possibilités. Nous pouvons représenter ces choix successifs par un arbre.

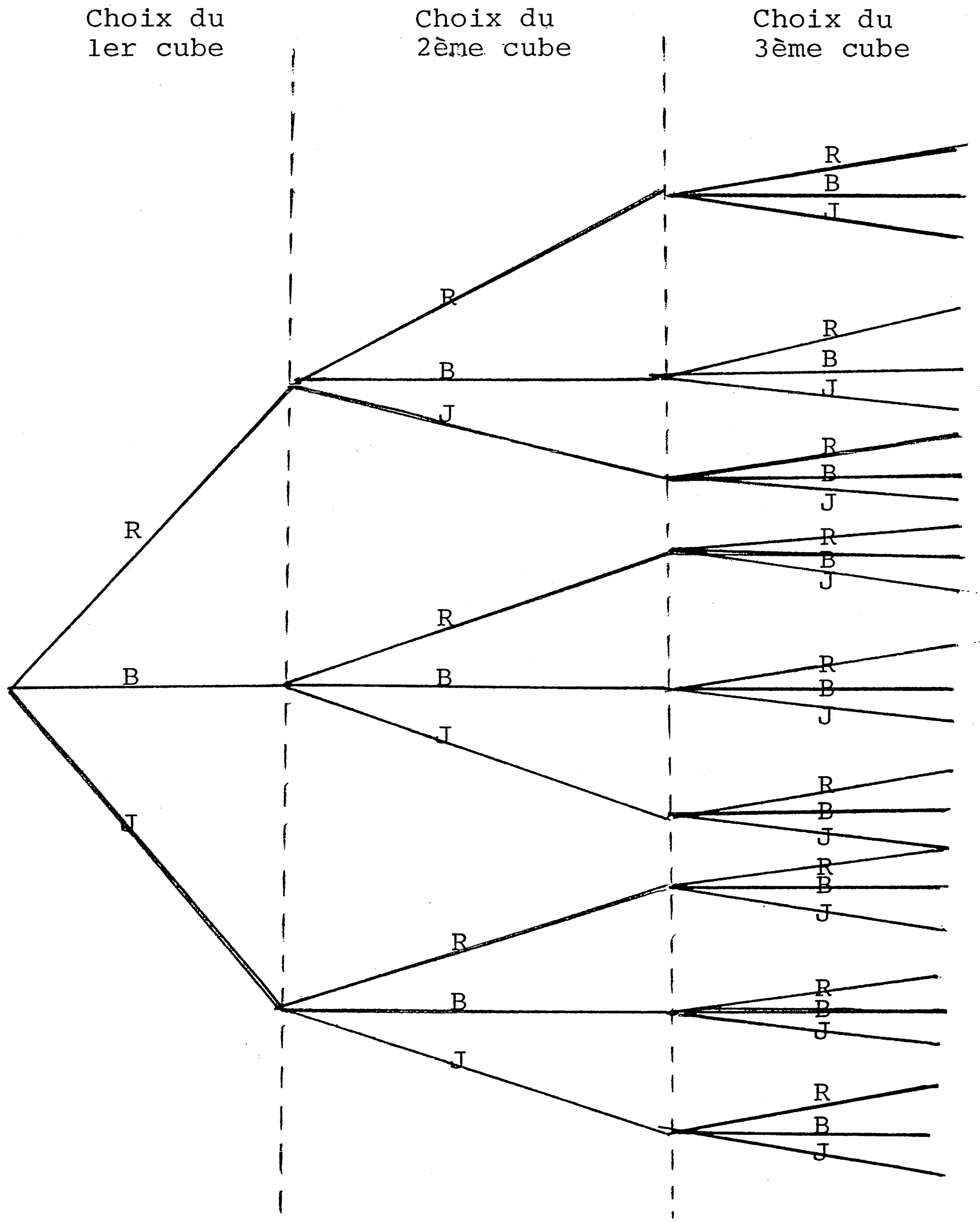


.../...

Chaque extrémité correspond à une tour possible. Comme il part toujours deux branches de chacune des 3 branches précédentes, nous avons (2x2x2) tours possibles.

Nous voyons que nous pouvons "prolonger" ces arbres vers la droite pour considérer le cas des tours de hauteur 4, de hauteur 5... de hauteur n, d'où les nombres respectifs de possibilités : $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5, \ldots, \underbrace{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times \ldots\ldots \times 2}_{\text{n fois}} = 2^n$, pour une tour de hauteur n.

. Si au lieu d'utiliser 2 couleurs de cubes, nous en utilisons 3, alors, à chaque étape, nous avons 3 possibilités de choix.



Donc pour des tours de hauteur 3 nous avons 3 x 3 x 3 possibilités. Nous pouvons imaginer des prolongements de l'arbre vers la droite et ainsi concevoir les résultats du tableau suivant :

Hauteur des tours	4	5	6	n
Nombre de possibilités	2x2x2x2 24	2^5	2^6	2^n

. A chaque tour de hauteur 3 est associé un mot de longueur 3 écrit avec les lettres B, R (ex : RBB, RRR, BBR), et à chaque tour de hauteur n se trouve associé un mot de longueur n écrit avec les lettres BR. En définitive, les problèmes posés avec les lettres sont donc analogues à ceux posés avec les cubes et ils sont analogues aussi à ceux posés avec les chiffres. Il suffit par exemple de remplacer B par 1, R par 2, J par 3.

. Voici des problèmes qui ont même structure que le problème des tours de hauteur 4 construites à l'aide de cubes de 3 couleurs.

a) Dans un sondage on pose 4 questions a, b, c, d. A chacune d'elles on peut répondre soit par "oui", soit par "non", soit par "sans opinion". Combien de types différents de réponses peut-on avoir ?

b) On dispose de 4 jetons numérotés respectivement 1, 2, 3, 4, et de deux boîtes marquées respectivement R, B. De combien de façons peut-on placer les jetons dans les boîtes ?

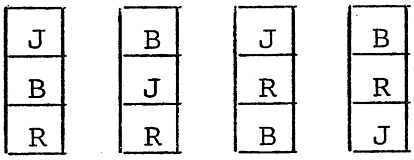
c) Dans un aquarium se trouvent 4 poissons que nous appellerons A, B, C, D. On réalise une pêche avec une épuisette, on note ce qui est obtenu, on remet les poissons dans l'aquarium. On recommence. Combien de pêches différentes peut-on réaliser ?

C'est bien le "même" problème. Il suffit de penser qu'à chacune des pêches correspond un nombre de longueur 4 écrit avec 0 et 1 (ex. à la pêche de B et C correspond 0110).

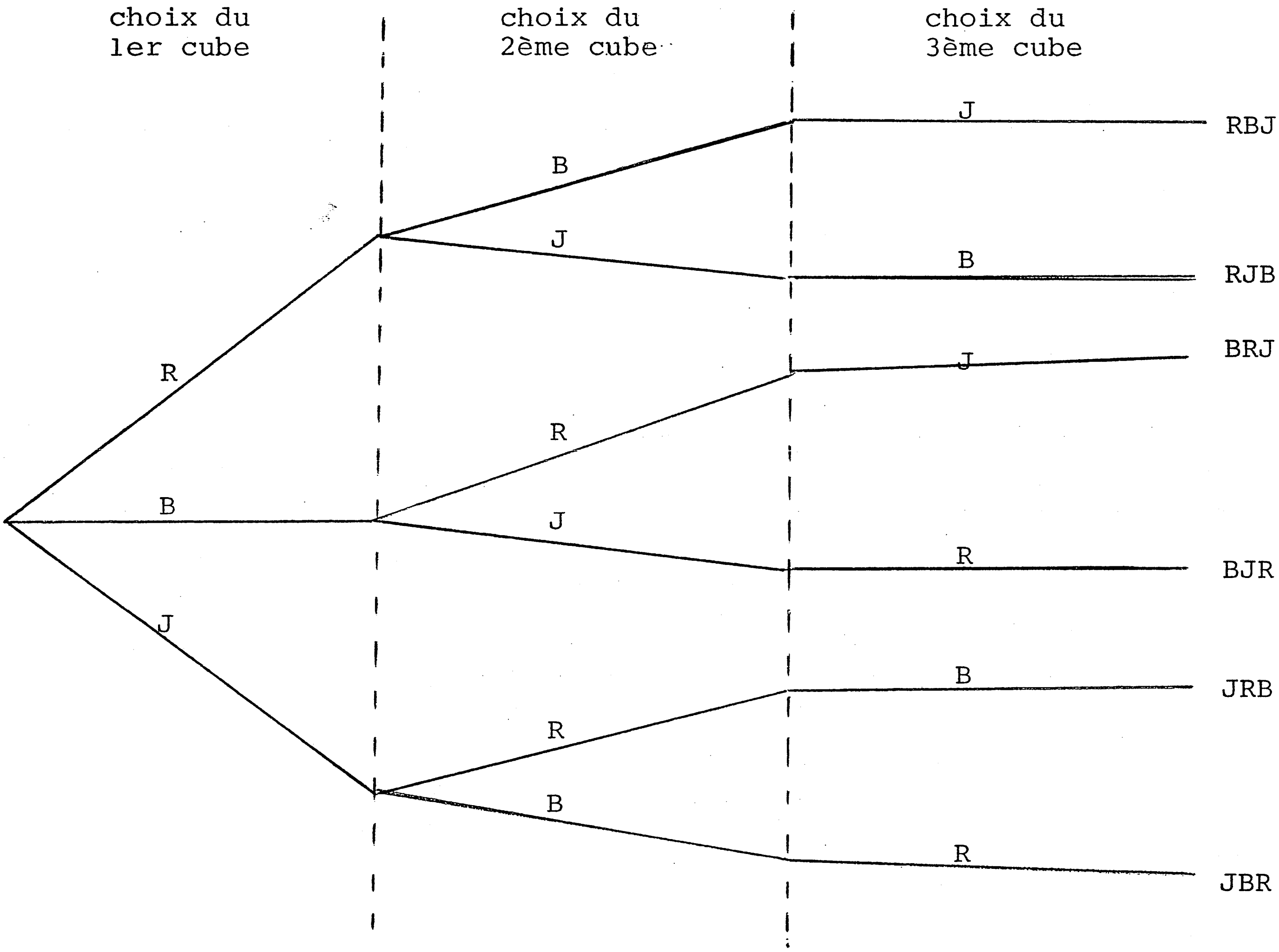
2°) Une couleur ne peut se répéter.

. Voici des tours de hauteur 3, utilisant 3 couleurs de cubes.

.../...



Pour le premier cube, celui du bas, nous avons le choix entre 3 possibilités : R, B, J. Un cube étant choisi, il nous reste pour le cube du 1er étage, le choix entre 2 possibilités. Ainsi, si R est en bas, au 1er étage on peut avoir : soit J, soit B. Le 2ème étage est nécessairement le cube restant. Là aussi les choix successifs peuvent se représenter par un arbre.

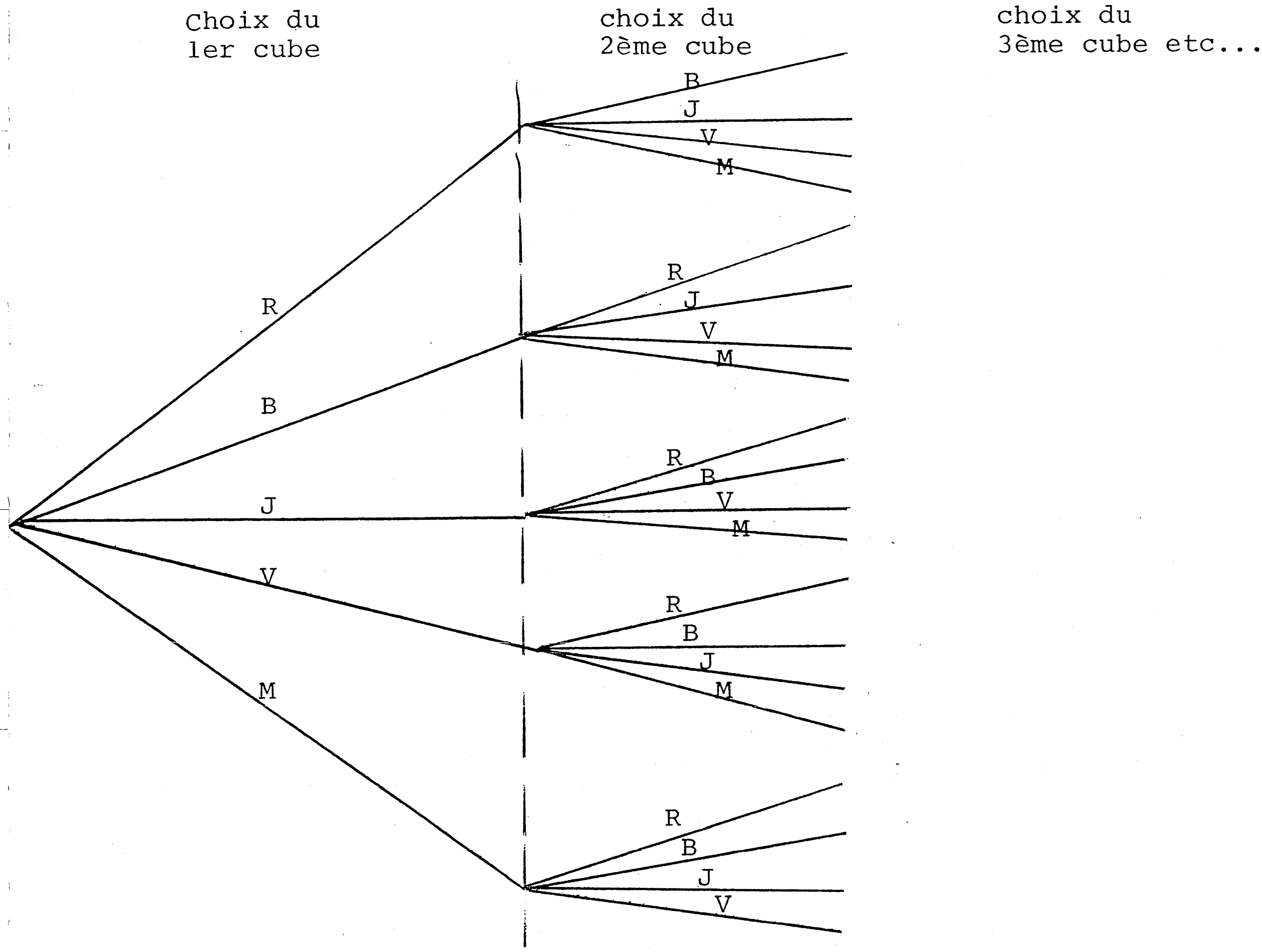


En définitive, nous avons donc 6 possibilités. Ici, à chaque étape le nombre de branches issues de la branche précédente diminue d'une unité. 6 = 3 x 2 x 1.

La construction de tours de hauteur 2 correspond simplement aux deux premières étapes de ce qui précède.

.../...

Nous voyons comment ce qui précède se généralise. Pour cinq couleurs par exemple, nous avons cinq possibilités pour choisir le premier cube. Le cube étant choisi, il reste 4 possibilités pour choisir un second cube de manière à obtenir une tour de hauteur 2. Les possibilités de choix peuvent se représenter par :



Au choix d'un troisième cube correspondrait une troisième étape dans la représentation qui précède. De chaque branche partiraient cette fois 3 branches. Ainsi, le nombre de tours de hauteur 3 serait : 5 x 4 x 3. En poursuivant la construction nous aurions des tours de hauteur 4 au nombre de 5 x 4 x 3 x 2. Le nombre de tours de hauteur 5 est nécessairement le même.

. Ici aussi, nous pouvons transposer les problèmes de cubes en problèmes d'écritures de mots ou de nombres, mais bien sûr en s'imposant de ne pas répéter les lettres ou les chiffres.

Avec les dix chiffres, il faut cependant noter que le premier chiffre ne peut être 0, de sorte que nous aurons par exemple non pas 10 x 9 x 8 écritures de nombres de 3 chiffres, mais 9 x 9 x 8 écritures de nombres de 3 chiffres.

. Des problèmes de même structure peuvent être imaginés. Exemple :

On dispose de 3 jetons marqués respectivement A, B, C, et de cinq boîtes marquées respectivement 1, 2, 3, 4, 5. De combien de façons peut-on placer les jetons dans les boîtes ? - on ne met qu'un jeton au plus par boîte -

C'est bien un problème analogue, la correspondance A $\rightarrow$ 2 ; B $\rightarrow$ 4 ; C $\rightarrow$ 3 ; par exemple peut en effet se coder 2 4 3. Il y a alors autant de correspondances possibles que d'écritures de longueur 3 à l'aide des chiffres 1, 2, 3, 4, 5.

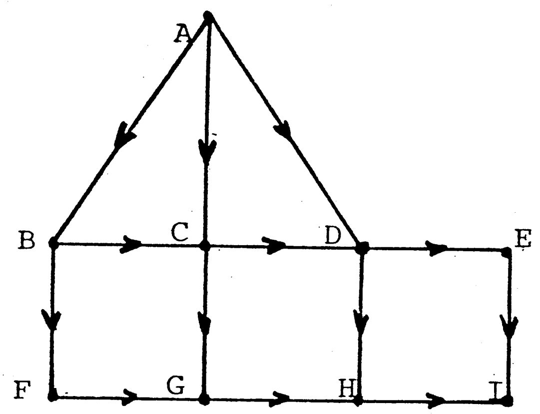
Il existe d'autres problèmes élémentaires, de types différents pour lesquels la conduite du raisonnement peut aussi se décrire par un arbre, par exemple le problème classique du menu :

Un restaurateur propose le menu ci-dessous :

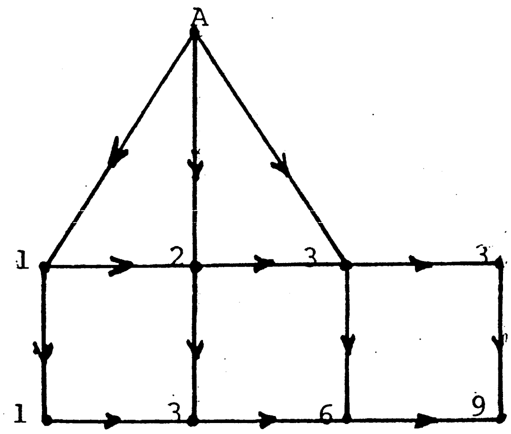
- une entrée au choix : potage, crudités
- un plat garni au choix : canard, dorade, émincé
- un dessert au choix : fromage, gâteaux, glace.

Combien de repas différents peut-on considérer ?

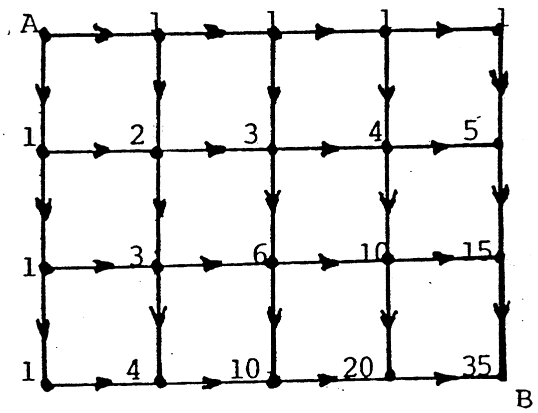
Les chemins

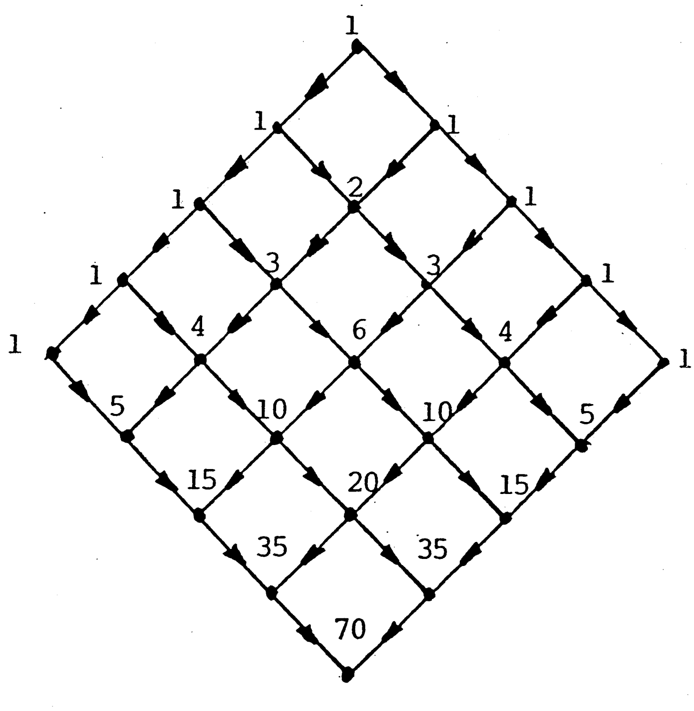


Considérons un des points, G par exemple, les chemins menant à G viennent de C ou de F. Donc le nombre de chemins passant par G sera la somme des nombres de chemins menant respectivement à C et F. Un seul chemin passe par B, un seul passe par F aussi, mais deux passent par C, trois passent par G, et ainsi de suite...



On peut imaginer de nombreux réseaux, par exemple :





NOMBRES ET REPRÉSENTATIONS

Les activités de recherche sur "nombres et carrés" et sur "nombres et triangles" mettent en oeuvre des raisonnements sur des suites de nombres. Les résolutions de telles situations-problèmes peuvent se faire soit à partir des représentations de chacun des nombres (par des carrés, des triangles), soit par la découverte d'une règle qui permet de passer d'un nombre au suivant.

I - NOMBRES ET CARRES.

Dans la suite 1, 4, 9, 16, 25, on peut remarquer que :

a) $1^2 = 1$

$2^2 = (1) + 3$

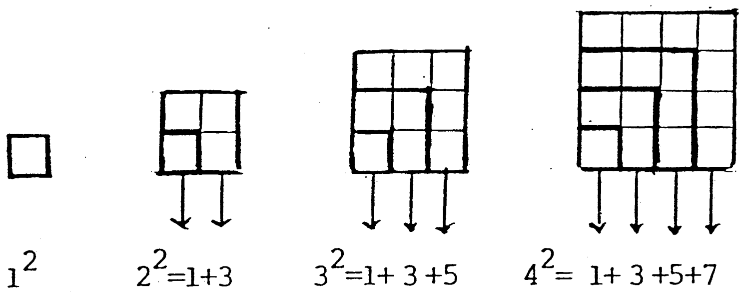
$3^2 = (1+3) + 5$ (3 termes)

$4^2 = (1+3+5) + 7$ (4 termes)

$\vdots$

$\underline{n^2 = \overbrace{(1+3+5+\ldots) + 2n-1}^{\text{n termes}}}$, formule citée page 76 (qui peut se démontrer par récurrence) : le carré d'un nombre n est égal à la somme des n premiers nombres impairs.

Cette formule se montre aussi facilement :



b) Dans la suite 1, 4, 9, 16, 25, on peut remarquer que :

.../...

$$1 \xrightarrow[+3]{} 4 \xrightarrow[+5]{} 9 \xrightarrow[+7]{} 16 \xrightarrow[+9]{} 25$$ ou encore

$$1^2 \xrightarrow[+3]{} 2^2 \xrightarrow[+5]{} 3^2 \xrightarrow[+7]{} 4^2 \xrightarrow[+9]{} 5^2$$ ou encore

$$2^2 = 1^2 + \boxed{3}$$
$$3^2 = 2^2 + \boxed{5}$$
$$4^2 = 3^2 + \boxed{7}$$

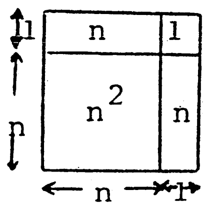
Pour passer du carré de n au suivant le carré de (n+1) il suffit d'ajouter le nombre impair (2n+1)

$$(n + 1)^2 = n^2 + \boxed{2n + 1}$$

Cette formule classique se démontre facilement :

$$\begin{aligned}(n+1)^2 &= (n+1)(n+1)\\ &= n(n+1) + (n+1)\\ &= n^2 + n + n + 1\\ &= n^2 + 2n + 1\end{aligned}$$

Elle se montre aussi facilement :



ainsi $30^2 = 900$

$31^2 = (30+1)^2 = 900+60+1$

$= 961$

II - NOMBRES ET TRIANGLES

A Des procédures de calcul relativement rapides peuvent être établies pour certaines sommes de façon élémentaire, à partir d'un support géométrique. Ainsi :

1 Somme des premiers nombres naturels

A chacune des égalités : $1 + 2 + 3$

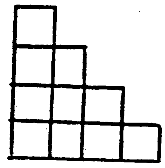
$1 + 2 + 3 = 6$

$1 + 2 + 3 + 4 = 10$

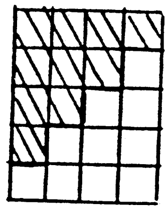
$1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + n$

.../...

peut être associé un "escalier", pour $1 + 2 + 3 + 4$ nous avons la figure ci-contre.



Deux "escaliers" permettent de construire un rectangle de 4×5, donc un escalier comprend bien 10 cases : $1 + 2 + 3 + 4 = \frac{4 \times 5}{2}$.



De façon analogue : $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + (n-1) + n = \frac{n \times (n+1)}{2}$

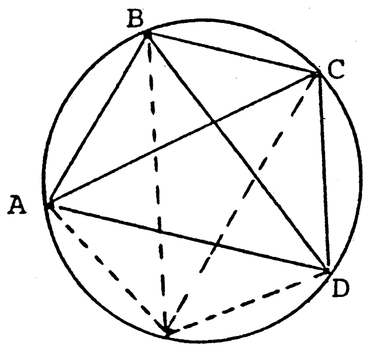
Ce résultat peut aussi être obtenu en considérant le problème suivant : "Etant donné cinq points sur un cercle, combien pouvons-nous dessiner de cordes au plus ?"

Pour 2 points, nous avons 1 corde

Pour 3 points, nous avons 3 cordes : $(1+2)$

Pour 4 points, nous avons 6 cordes : $(1+2+3)$

Pour 5 points, nous avons les six cordes précédentes auxquelles il faut adjoindre 4 nouvelles cordes obtenues en joignant le cinquième point à chacun des quatre autres, nous avons donc $1 + 2 + 3 + 4$ cordes.



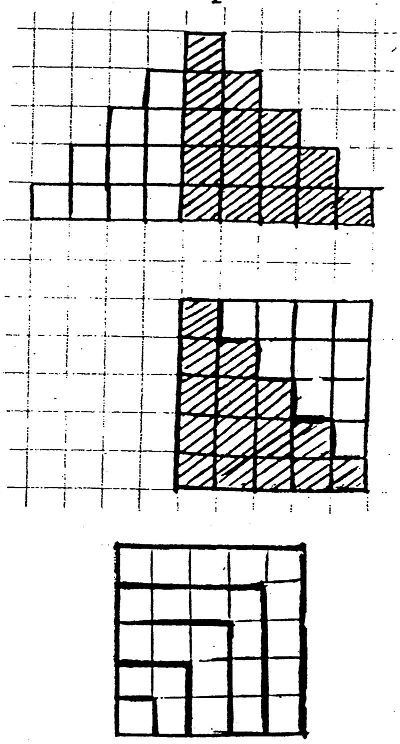
Par ailleurs chaque point peut être considéré comme extrémité de 4 cordes. Pour les cinq points, nous avons ainsi 4×5 extrémités. Or une corde nécessite 2 extrémités, d'où le nombre de cordes : $\frac{4 \times 5}{2}$ et l'égalité $1+2+3+4 = \frac{4 \times 5}{2}$.

Plus généralement pour $n + 1$ points sur un cercle, le nombre de cordes est $1 + 2 + \ldots + n$ (premier dénombrement) ou $\frac{n(n+1)}{2}$ (deuxième dénombrement) nous retrouvons la formule écrite précédemment.

.../...

② Somme des premiers nombres impairs

De façon analogue, à la somme des cinq premiers nombres impairs (par exemple) peut être associé un double escalier : $1 + 3 + 5 + 7 + 9$.



La figure peut être partagée en deux de manière à obtenir les parties complémentaires d'un carré de 3 x 5.

On peut noter aussi que les termes successifs 1, 3, 5, 7, 9 sont les nombres de carreaux de chacune des équerres du carré 3 x 5.

De façon générale, nous avons ici pour la somme des p premiers nombres impairs :

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2p-1) = p^2.$$

B Des méthodes de calculs numériques simples peuvent être établies pour toutes les sommes de nombres dans une "suite arithmétique". Une suite de nombres est dite "suite arithmétique" si l'écart entre deux nombres consécutifs est toujours le même :

exemples : suite 1 : (1,2,3,4,5,6),écart 1
suite 2 : (10,20,30,40,50,60,70,80,90), écart 10
suite 3 : (1,3,5,7,9,11,13,15), écart 2.

Pour calculer la somme des nombres de telles suites, il suffit de remarquer que la somme de deux termes "équidistants des extrêmes" est toujours la même :

suite 1 : $\underbrace{1 + \underbrace{2 + \overbrace{3 + 4}^{7} + 5}_{7} + 6} = 3 \times 7 = 21$

ou encore

$$\begin{array}{rcccccccccccc} S & = & \boxed{1} & + & \boxed{2} & + & 3 & + & 4 & + & 5 & + & 6 \\ S & = & \boxed{6} & + & \boxed{5} & + & 4 & + & 3 & + & 2 & + & 1 \\ \hline 2S & = & 7 & + & 7 & + & 7 & + & 7 & + & 7 & + & 7 \end{array} \qquad 2S = 6.7 \qquad S : \frac{6 \times 7}{2} = 21$$

.../...

On peut retrouver à propos de cette suite de nombres entiers, les résultats obtenus dans I :

$$
\begin{array}{rcl}
S_n & = & \boxed{1} + \boxed{2} + 3 + \ldots + (n-1) + n \\
S_n & = & \boxed{n} + \boxed{n-1} + \ldots\ldots\ldots + 2 + 1 \\
\hline
2S_n & = & (n+1) + (n+1) + \ldots\ldots + (n+1) + (n+1)
\end{array}
$$

$$\longleftarrow \text{ n termes } \longrightarrow$$

$$2S_n = n(n+1) \qquad S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

<u>Suite 2</u> : $10 + 20 + 30 + 40 + 50 + 60 + 70 + 80 + 90 = (4 \times 100) + 50 = 450$

$$100 \qquad 100$$

ou encore

$$
\begin{array}{rcl}
S & = & \boxed{10} + 20 + 30 + 40 + 50 + 60 + 70 + 80 + 90 \\
S & = & \boxed{90} + 80 + 70 + 60 + 50 + 40 + 30 + 20 + 10 \\
\hline
2S & = & 100 + 100 + 100 + 100 + 100 + 100 + 100 + 100 + 100 = 900 \ ; \ S = 450
\end{array}
$$

<u>Suite 3</u> : $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 = 4 \times 16 = 64$

$$16 \qquad 16$$

ou encore

$$
\begin{array}{rcl}
S & = & 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 \\
S & = & 15 + 13 + 11 + 9 + 7 + 5 + 3 + 1 \\
\hline
2S & = & 16 + 16 + 16 + 16 + 16 + 16 + 16 + 16 = 8 \times 16 \ ; \ S = 64
\end{array}
$$

On peut retrouver à propos de la suite des nombres impairs les résultats obtenus en I, en calculant la somme des p premiers nombres impairs :

$$
\begin{array}{rcl}
S_p & = & 1 + 3 + 5 + \ldots + (2p-3) + (2p-1) \\
S_p & = & (2p-1) + (2p-3) + \ldots\ldots\ldots\ldots + 3 + 1 \\
\hline
2S_p & = & 2p + 2p + \ldots\ldots\ldots\ldots + 2p + 2p
\end{array}
$$

$$\longleftarrow \text{ p termes } \longrightarrow$$

$$2S_p = (2p) \times p = 2p^2 \qquad S_p = p^2$$

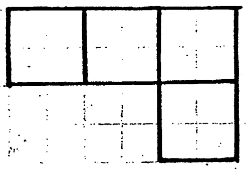
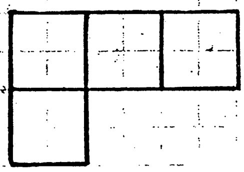
Ce qui démontre la formule

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2p-3) + (2p-1) = p^2$$

POLYMINOS

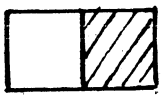
I - CONSTRUCTION DES POLYMINOS.

Les polyminos sont des figures formées à partir d'assemblages de carrés identiques. Ces assemblages sont réalisés sans trous, ni superposition, de façon que deux carrés qui se touchent se touchent par tout un côté. Une figure d'ordre n (comprenant n carrés élémentaires) s'obtient à partir d'une figure d'ordre (n-1) en lui adjoignant un carré. On distingue deux assemblages s'ils ne sont pas superposables par glissement ou retournement. Par exemple :

 et 

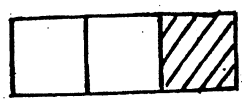
qui sont superposables par retournement correspondent au même tétramino.

Domino : A partir d'un carré élémentaire, on obtient une figure

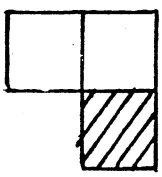
D : 

Triminos : A partir de D, on obtient deux triminos :

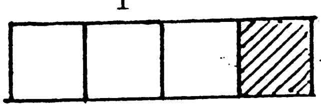
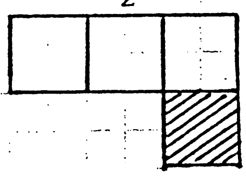
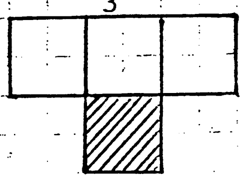
t_1 en adjoignant un carré à l'un des deux bouts du domino :

t_1 

t_2 en adjoignant un carré non "aligné" avec les 2 carrés du domino :

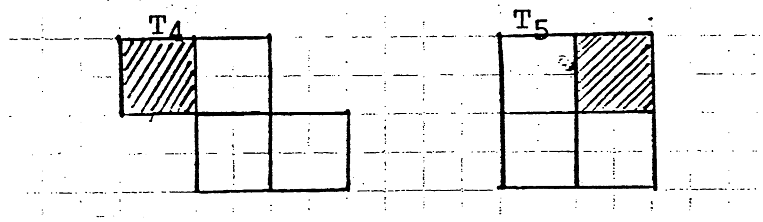
t_2 

Tetraminos : A partir de t_1, on obtient trois tétraminos :

T_1  T_2  T_3 

.../...

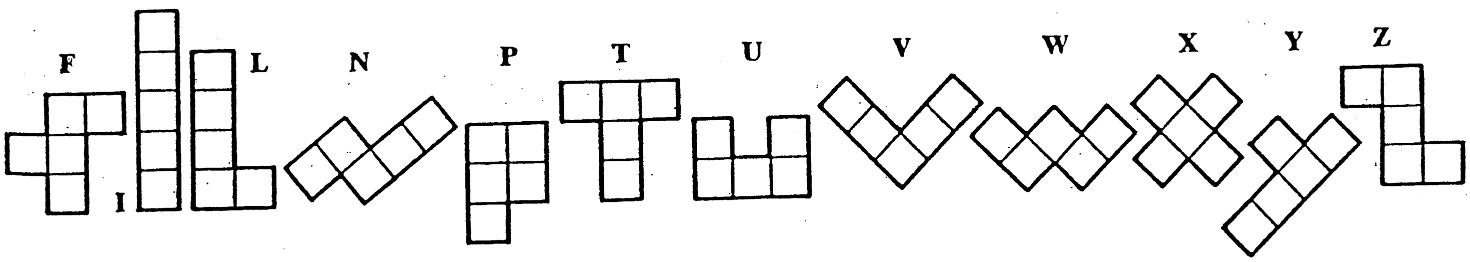
A partir de t_2, on obtient deux nouveaux tétraminos :



Soit finalement 5 tétraminos.

Pentaminos et autres polyminos :

En procédant de même, avec un carré de plus, on obtient 12 pentaminos. On convient de donner à chaque pentamino le nom d'une lettre de l'alphabet de forme voisine :



Il existe 35 hexaminos, 107 heptaminos, mais aucune formule générale donnant le nombre de polyminos avec n carrés n'a encore été découverte.

II - PUZZLES AVEC POLYMINOS

A. Puzzles du commerce.

Plusieurs problèmes classiques sont proposés sous différentes présentations (bois, plastique,...) avec les 12 pentaminos ;

12 pentaminos recouvrent une surface qui contient 12 x 5 ou 60 carrés, ce qui donne :

* quatre "mises en boîtes" rectangulaires :

- une boîte de 6 sur 10 (2339 solutions différentes)
- une boîte de 5 sur 12 (1010 solutions différentes)
- une boîte de 4 sur 15 (368 solutions différentes)
- une boîte de 3 sur 20 (2 solutions différentes)

.../...

★ une mise en boîte carrée :

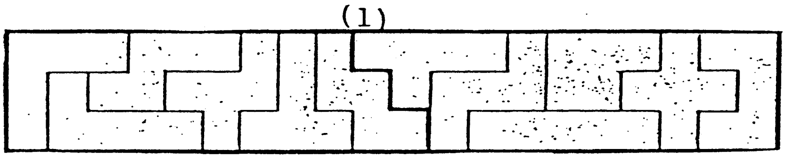
Les 60 carrés des 12 pentaminos sont placés dans une boîte carrée de 8 sur 8 (64 cases) dans lesquelles 4 cases sont laissées vides (15703 solutions avec un vide de 2 sur 2, et un beaucoup plus grand nombre de solutions si les 4 cases laissées vides n'ont pas de disposition fixée à l'avance. (Jeu "pentacubes" p. 86)

Il existe aussi des puzzles de "triplication" des pièces : il s'agit de construire un pentamino géant, de côtés triples, c'est-à-dire d'aire 9 fois plus grande, en utilisant 9 pièces d'un même jeu.

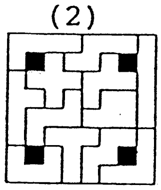
Tous ces problèmes sont des "casse-têtes" de niveau assez élevé.

Voici quelques réalisations :

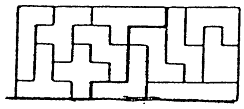
(1)



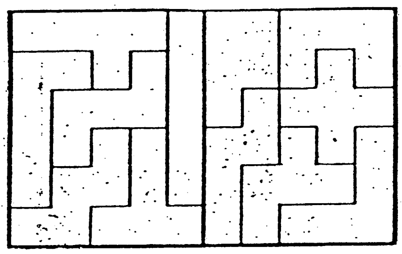
(2)



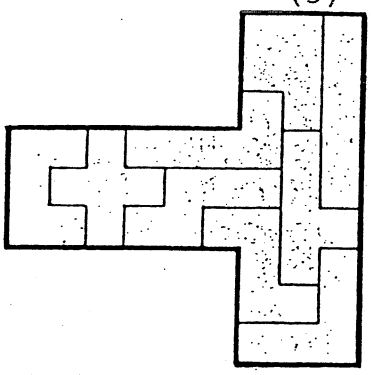
(3)



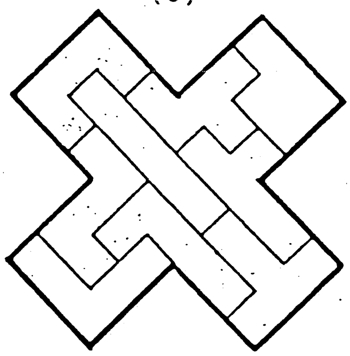
(4)



(5)



(6)



(1) un rectangle 3x20 avec les 12 pentaminos

(2) un carré 8x8 avec les 12 pentaminos et 4 vides

(3) un rectangle 5x12 avec les 12 pentaminos

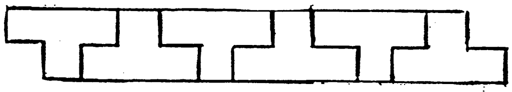
(4) un rectangle 6x10 avec les 12 pentaminos

(5) et (6) triplication d'un T et d'un X avec neuf pentaminos

B. Puzzles à l'école.

1 - Les puzzles rectangulaires.

Les puzzles proposés dans les cahiers A et B peuvent être réalisés à partir de pièces découpées dans un carton fort sur lequel on a préalablement tracé un quadrillage. Il est intéressant de découper plusieurs jeux à la fois, de façon à avoir des bandes de pièces à découper :



Ces puzzles ont été créés en essayant de remplir des boîtes rectangulaires avec toutes les pièces de deux, trois jeux...

[un jeu de tétraminos .... 20 carrés
un jeu de triminos........... 6 carrés
le domino............ 2 carrés
le carré élémentaire......... 1 carré]

Exemples : 20+6+1 = 27, avec 27 carrés, on peut recouvrir un rectangle de 3 sur 9 (A 2, 3, 4)

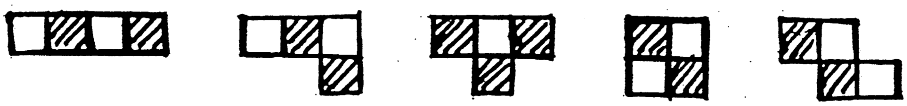
20+1 = 21 avec 21 carrés, on peut recouvrir un rectangle de 3 sur 7 (A 1)

20+6+2 = 28 avec 28 carrés, on peut recouvrir un rectangle de 7 sur 4 (A 7, B 3)

etc..... Ces puzzles peuvent s'imaginer avec ou sans case vide.

Les "mises en boîte" proposées sont toujours réalisables. Mais certaines "mises en boîte" sont impossibles.

● Par exemple, il est impossible de caser les cinq tétraminos dans un rectangle de 4 sur 5. En effet, colorions les tétraminos comme pour les placer sur un damier :

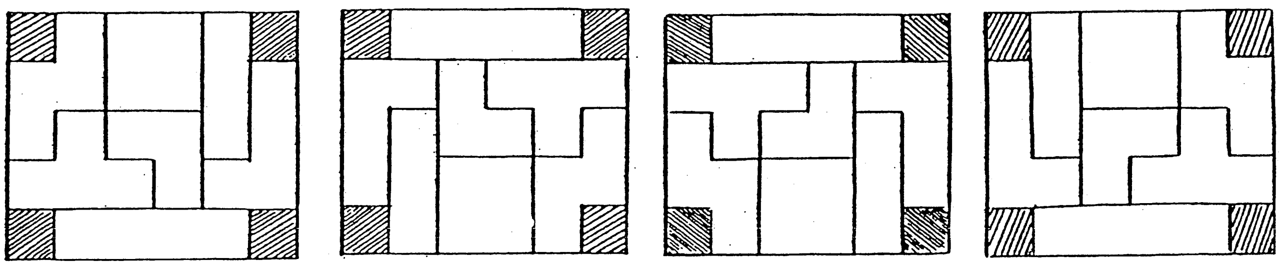


(1) (2) (3) (4) (5)

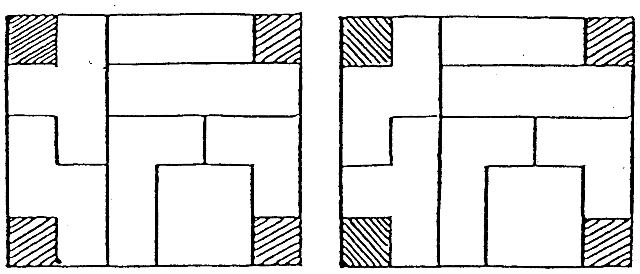
.../...

il y a plusieurs possibilités de coloriages pour (2) et (3), mais nous voyons à cause de (3), que quelque soit le mode utilisé, il y aura 9 cases blanches et 11 noires ou l'inverse. Or une mise en boîte réussie entraîne la possibilité de réaliser un damier, donc entraîne qu'il y ait autant de cases noires que de blanches. Donc la "mise en boîte" est impossible ici.

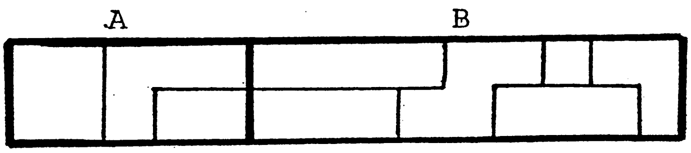
• A chaque solution S trouvée correspond une famille de solutions obtenues par glissements de S et par retournements de S. Dans le dénombrement des solutions, il s'agit d'une seule solution à laquelle correspondent généralement 4 dispositions différentes associées aux 4 isométries du rectangle : par exemple à partir d'une solution B (1) (p. 43) :



A chaque solution S trouvée correspondent d'autres solutions qui s'obtiennent en transformant un morceau de S' par glissement ou retournement, ou en échangeant dans S' deux morceaux équivalents. Exemple 1, à partir d'une autre solution B (1) (p. 43) :



Exemple 2, à partir d'une solution B (5) (p. 42), composée de deux rectangles A et B, A à gauche et B à droite : le rectangle A a quatre dispositions possibles et le rectangle B aussi, d'où 16 dispositions, sans échanger les rectangles A et B.

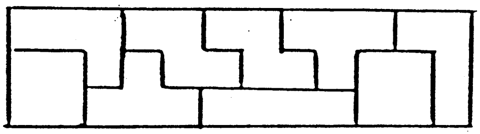


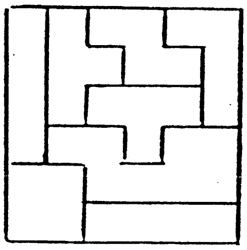
.../...

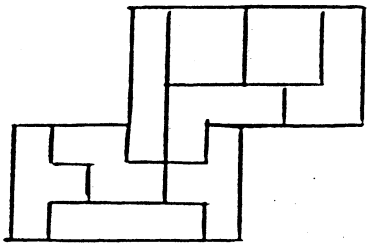
• Remarque : il est possible d'imaginer de nombreux autres puzzles rectangulaires que ceux proposés dans les cahiers A et B, toujours en prenant l'ensemble de toutes les pièces de deux, trois, ou plusieurs jeux. On peut par exemple remplir un carré de 7x7, un rectangle de 8x5, etc...

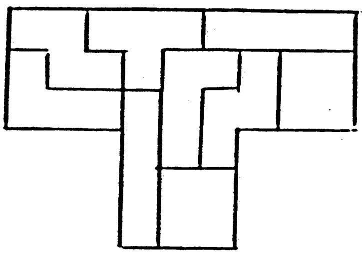
2. Autres puzzles :

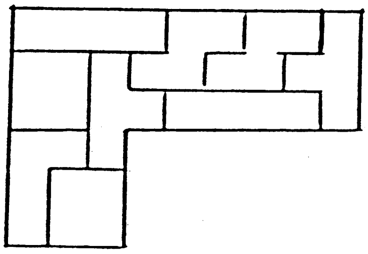
On peut construire des puzzles par triplication d'une pièce : il s'agit de construire un tétramino géant, de côtés triples, c'est-à-dire d'aire 9 fois plus grande, en utilisant 9 pièces quelconques prises dans 2 jeux. On peut décider d'exclure de l'ensemble des 10 pièces une des deux pièces qui est l'objet de la triplication. Voici une solution de ce type pour chaque "triplication".











BIBLIOGRAPHIE

Psychopédagogie

CHATEAU

- L'enfant et le jeu — Scarabée
- Le jeu de l'enfant après 3 ans. Sa nature, sa discipline — Vrin

Psychologie génétique

PIAGET - INHELDER

- La formation du symbole chez l'enfant — Delachaux-Niestlé

PIAGET

- Remarque sur le jeu de l'enfant et la pensée symbolique — Bulletin de Psychologie (T.VII)

Pédagogie des mathématiques

BANWELL

- Points de départs — Cedic

Projet NUFFIELD

- Fiches (Elèves) - Documents correspondants pour le maître — OCDL

WHEELER

- Mathématique dans l'enseignement élémentaire — OCDL

.../...

Recueils de situations "casse-tête", de jeux (comprenant des problèmes de niveau élémentaire).

A.P.M.E.P.

- Jeux 1. Les jeux et les mathématiques A.P.M.E.P. (1)

BLANCHET

- Mathématiques en liberté — OCDL

IREM

- Jeux mathématiques — IREM de Besançon (2)

KORDIEMSKI

- Sur le sentier des mathématiques — Dunod

BERLOQUIN

- Cent jeux géométriques — Livre de poche (3537 - 3568 - 3669)
- Cent jeux logiques
- Cent jeux numériques

Sur les jeux de société

AVELINE Claude

- Le code des jeux — Livre de poche 2645

CLIDIERE M.

- Le guide Marabout des jeux de société. — Marabout

ATELIERS MATHÉMATIQUES: 1983.

— POUR L'ÉLÈVE: CAHIER A, 38 pages
CAHIER B, 32 pages

— POUR LE MAITRE: SOLUTIONS ET COMMENTAIRES, 86 pages

I.R.E.M. de BORDEAUX, 351 cours de la Libération - 33405 TALENCE CEDEX.