IREM de Bordeaux

Exercices de Géométrie pour la classe de quatrième

suivis de :

ELEMENTS DE SOLUTIONS

Rédaction
C. ARTIGUES
C. DENUX
B. PINET

- 1982 -

SOMMAIRE

INTRODUCTION

- Ce fascicule d'exercices fait suite au fascicule de cours : "Géométrie en 4ème"

- Un classement a été fait par chapitre en fonction des connaissances minima nécessaires à la résolution demandée.

Dans chaque chapitre un rangement approximatif par ordre de difficulté croissante a été fait.

On pourra trouver en X des problèmes plus complets portant sur divers chapitres ou établissant des résultats plus généraux.

- Le vocabulaire et les notations employés sont en accord avec ceux du fascicule de cours "Géométrie en 4ème".

Les termes : "montrer, démontrer, prouver, établir" sont utilisés indifféremment, "p ssi q" a été remplacé par

| si p alors q
| et
| si q alors p

- Il n'y a pas nécessairement unité dans la présentation des données qui sont à considérer, soit dans l'ordre de présentation, soit globalement. Il y a toujours au moins une figure à faire vérifiant ces données. Elle peut donc s'élaborer au fur et à mesure de la lecture du texte, ou au contraire, nécessiter la lecture entière préalable de celui-ci.

L'un des objectifs de l'enseignement de la géométrie en 4ème est l'apprentissage des démonstrations. La plupart des exercices de ce fascicule ont été choisis de façon à provoquer l'utilisation des transformations élémentaires et de leurs composées, sous leur aspect dynamique qui semble le plus propice à dégager le concept de preuve.

- Des indications pour les exercices les plus difficiles et des éléments de résolution utilisant diverses méthodes seront donnés en complément du fascicule d'exercices.

I.R.E.M. de BORDEAUX

GÉOMÉTRIE EN QUATRIÈME

LES RÈGLES DU JEU

- $\mathbb{P}$ un ensemble appelé <u>plan</u> dont les éléments sont appelés <u>points</u>
- $\mathcal{D}$ un ensemble de parties de $\mathbb{P}$ dont les éléments sont appelés <u>droites</u> (une droite est donc un ensemble de points)

Le tout vérifiant

(A1) Une droite est une <u>partie propre</u> du plan

(A2) Par deux points distincts A et B du plan passe une droite et une seule que l'on notera (AB).

(A3) Soient un point A et une droite Δ ne passant pas par A.
Il existe une droite Δ' unique passant par A et telle que

$$\Delta \cap \Delta' = \emptyset$$

(A4) Etant donné deux droites Δ et Δ'

1) <u>Si</u> $\Delta \perp \Delta'$ <u>alors</u> $\Delta' \perp \Delta$

Pour cette raison, on dira plus simplement que "Δ et Δ' sont orthogonales" ou que "Δ et Δ' sont perpendiculaires".

2) <u>Si</u> deux droites sont orthogonales, <u>alors</u> elles sont sécantes.

3) Etant donné une droite Δ et un point A, il existe une droite Δ' <u>unique</u> telle que :

$$A \in \Delta' \text{ et } \Delta \perp \Delta'$$

A5 Une unité de longueur étant choisie, on admet qu'il existe une application (appelée distance) qui a chaque couple de points du plan associe un nombre positif noté AB (AB est la distance du point A au point B).

Cette application est caractérisée par :

1) Etant donné un couple (A,B) de points du plan :
$AB = 0$ SSI $A = B$

2) Etant donné un couple (A,B) de points du plan :
$AB = BA$

3) Etant donné un triplet (A,B,C) de points du plan :
$AC \leq AB + BC$

A6 Etant donné deux points A,B distincts du plan l'ensemble des points M, du plan, vérifiant $AM + MB = AB$ est une partie de la droite (AB).

<u>Définition</u> :

Pour deux points quelconques A et B on appelle "segment AB" et on note [AB] l'ensemble des points M tels que $AM + MB = AB$

A7 Si A,B et C sont trois points distincts d'une droite Δ alors : $A \in [BC]$ ou $B \in [CA]$ ou $C \in [AB]$

A8 Etant donné une demi-droite [AB) et un nombre positif d, il existe un point M unique de [AB) tels que :

$AM = d$

A9 Etant donné la symétrie orthogonale S_Δ par rapport à la droite Δ
Etant donné deux points A et B du plan :

Si $S_\Delta(A) = A'$ et $S_\Delta(B) = B'$

alors $AB = A'B'$

A10

Soit A,B,C les sommets d'un triangle, toute droite ne contenant pas l'un des sommets rencontre zéro ou deux côtés du triangle.

CHAPITRE I

DISTANCE

I - 1

A et B sont deux points du plan tels que AB = 5

1) Quel est l'ensemble des points M de la droite (AB) tels que MA - MB = 5 ?

2) Même question avec MB - MA = 5.

I - 2

A et B sont deux points du plan tels que AB = 6.

Déterminer l'ensemble E des points M de (AB) tels que AM = 2MB.

I - 3

A,B,C sont trois points non alignés.

D est un point de [BA) tel que D ∉ [AB] et AD = BC

Comparez BC et BD.

I - 4

Soit ABC un triangle et M un point de]AC].

Démontrer que CM + MB < CA + AB.

I - 5

I est un point "intérieur" à un triangle ABC

Démontrer que IB + IC < AB + AC.

(Utiliser l'exercice 4).

On admettra que pour "I intérieur au triangle ABC" la droite (IB) rencontre]AC[en un point H.

I - 6

I est un point "intérieur" à un triangle ABC.

Démontrer en utilisant l'exercice 5 que

$IA + IB + IC < AB + AC + BC$.

I - 7

ABC est un triangle et I un point "intérieur" à ABC.

Démontrer que $\frac{1}{2}[AB + AC + BC] < IA + IB + IC$,

I - 8

ABC est un triangle et M un point de $[AB]$ milieu de $[CD]$.

1) En utilisant le triangle MCA, démontrer que $MD \leqslant AC + AM$

2) Démontrer que $2MD \leqslant AB + AC + BC$.

I - 9

ABC est un triangle , $M \in [AB]$, $P \in [BC]$, $Q \in [AC]$.

Démontrer que $MP + PQ + QM \leqslant AB + BC + CA$.

I - 10

Données : A,B,C,D, M désignent cinq points du plan,

I est l'unique point commun à $]AC[$ et $]BD[$

1) Montrer que $IB + ID \leqslant MB + MD$

et que $IA + IC \leqslant MA + MC$

puisque $IA + IB + IC + ID \leqslant MA + MB + MC + MD$.

En déduire le point M du plan tel que $MA + MB + MC + MD$ soit minimum.

2) Prouver que $AB < AI + IB$,

et que $CD < CI + ID$.

En déduire que $AB + CD < AC + BD$ et que $BC + DA \leqslant AC + BD$,

puis que $\frac{1}{2}(AB + BC + CD + DA) < AC + BD$.

3) Prouver que $2AC < AB + BC + CD + DA$,

puis que $AC + BD < AB + BC + CD + DA$.

I - 11

1) A et B sont deux points situés d'un même côté d'une droite D

Pour quel point M de D, $|MA-MB|$ est-elle maximum?

On supposera (AB) non parallèle à D.

I - 12

A et B sont deux points d'un cercle de centre O et de rayon r.

Montrer que $AB \leqslant 2r$,

I - 13

ABCD est un trapèze tel que K soit le point commun à [AC]

et [BD].

Montrer que AKD et BKC ont la même aire.

I - 14

ABCD est un quadrilatère.

1) son périmètre est-il supérieur au double de chaque diagonale ?

2) Son périmètre est-il supérieur à la somme des diagonales ?

3) Son périmètre est-il inférieur au double de la somme des diagonales ?

(Différents cas de figures ; convexe, croisé, concave).

I - 15

On donne : . un triangle ABC .

. M un point de [AC] et I milieu de [AC].

. Δ une droite passant par M.

M est fixe .

Δ coupe [BC] ou [AB] en N.

On veut placer N de façon que Δ découpe ABC en deux parties d'aires égales.

1) Montrer que : aire (IAB) = aire (IBC).

On supposera que $M \in [IA]$

2) Montrer que : aire (AMB) $\leqslant$ aire (MBC).

En déduire que N est un point de [BC]

3) Soit K le point commun à [MN] et [IB]

Que peut-on dire de I et N par rapport à (MB) ?

Montrer que : aire (IKM) = aire (NKB) ,

et que : aire (IMB) = aire (NMB).

4) Montrer que I et N sont sur une même parallèle à (MB).

En déduire la position de N sur (BC)

(Le Petit Archimède).

⁘⁘

CHAPITRE II

SYMETRIE ORTHOGONALE PAR RAPPORT A UNE DROITE

II - 1

On se donne une droite D et deux points A et B.

Construire un point M de D équidistant de A et B.

II - 2

Δ_1 et Δ_2 sont deux droites sécantes en O.

Δ est un axe de symétrie de $\{\Delta_1, \Delta_2\}$.

S_Δ, S_{Δ_1}, S_{Δ_2} désignent les symétries de droites Δ, Δ_1, Δ_2.

Démontrer que $S_\Delta \circ S_{\Delta_1} = S_{\Delta_2} \circ S_\Delta$.

II - 3

ABC est isocèle en A et D symétrique de B par rapport à (AC).

ABCD a-t-il un axe de symétrie autre que (AC) ?

II - 4

Construire un triangle ABC isocèle (AB = AC) connaissant la droite (AB), la droite (BC) et un point P de l'axe de symétrie.

II - 5

ABC isocèle en A ; $D = S_{(AB)}(C)$; $E = S_{(AC)}(B)$.

1) Démontrer que ADE est isocèle d'axe de symétrie, l'axe de symétrie de ABC.

2) AD BCE est-il convexe ?

II - 6

[AH] est une hauteur d'un triangle ABC isocèle en A .

$D = S_{(AB)}(H)$ et $E = S_{(AC)}(H)$.

1) Démontrer que D et E sont symétriques par rapport à (AH) .

2) ADBCE est-il convexe ?

II - 7

Etant donné un triangle ABC, hachurer la portion de plan ensemble des points M vérifiant $MA < MB < MC$.

II - 8

1) Représenter l'ensemble des points M intérieurs à un carré ABCD tels que $MA < MB$ et $MA < MC$.

2) Représenter l'ensemble des points extérieurs vérifiant la même condition.

II - 9

Deux segments [AB] et [CD] sont tels que

tout point de [CD] est équidistant de A et B .

tout point de [AB] est équidistant de C et D

Faire la figure. Que peut-on dire ?

II - 10

On se donne une figure F et deux points A et B

Déterminer un point M de F tel que M soit équidistant de A et B et que AM soit minimum.

- F pourra être un cercle (ou un disque) un polygone, ou son intérieur.

II - 11

$\mathcal{C}$ est un cercle de centre O . A est un point de $\mathcal{C}$.

A, la médiatrice de [OA] coupe $\mathcal{C}$ en B et B'.

Démontrer que OAB et OAB' sont équilatéraux.

II - 12

A quelle condition peut-on construire un triangle rectangle en A ABC connaissant B et A ainsi que la longueur $BC = \ell$?

II - 13

A quelle condition peut-on construire un losange ABCD connaissant A et C ainsi que la longueur d'un côté : a ?

II - 14

[AM] est une hauteur d'un triangle ABC

. Peut-on avoir un côté de longueur AM ?

. Peut-on avoir $AM = AB$?

II - 15

ABC et DBC sont deux triangles isocèles.

D est intérieur à ABC .

Montrer que $DB + DC < AB + AC$.

II - 16

Montrer que les 3 médianes d'un triangle rectangle ont des longueurs inférieures à celle de l'hypoténuse.

II - 17

Soit A un point non situé sur une droite D, la perpendiculaire à D par A coupe D en H, M est un point de D et N un point de [HM] .

Démontrer que $AN < AM$.

⁂

CHAPITRE III

APPLICATIONS DE LA SYMETRIE ORTHOGONALE

III - 1

A et B sont deux points de part et d'autre d'une droite Δ.

Trouver M sur Δ tel que MA = MB.

III - 2

ABC est isocèle en A et une parallèle à (BC) Δ coupe [AC] en D et [AC en F. Montrer que ADF est isocèle.

III - 3

Construire la bissectrice d'une paire de demi-droites {[OA), [OB)}.

III - 4

ABC est un triangle isocèle.

A'B'C' sont les milieux des côtés.

Montrer que A'B'C' est isocèle et admet le même axe de symétrie que ABC.

III - 5

ABC est un triangle et (AA') est la bissectrice intérieure issue de A .

Soit D sur [AA') tel que AD = AB.

Soit E sur [AA') tel que AE = AC.

Comparer BE et DC.

III - 6

Soient une droite Δ, un point A non situé sur Δ,

A' le symétrique de A par rapport à Δ.

Construire le symétrique B' d'un point B

en utilisant uniquement la règle.

(Ne pas oublier le cas où (AB) et Δ sont parallèles, ni celui où (AB) est orthogonale à Δ).

III - 7

ABC est un triangle isocèle en A.

D est le symétrique de B par rapport à (AC).

ABCD peut-il avoir un autre axe de symétrie que (AC) ?

III - 8

Construire ABC isocèle en A connaissant B, C et un point P de (AB). Examiner les cas particuliers.

III - 9

Construire ABC isocèle en A connaissant A, B et un point Q de (BC). Examiner les cas particuliers.

III - 10

Construire ABC isocèle en A connaissant (AB), (BC) et un point de l'axe de symétrie.

III - 11

Soit un point P d'une droite D et un point Q non situé sur D.

Construire PQR isocèle de façon que R soit un point de D.

III - 12

Construire ABC isocèle en A à l'aide de [AH] et de la longueur h de la hauteur [BH].

III - 13

Construire ABC isocèle en A à l'aide de [AH], [HC], H étant le pied de la hauteur issue de B.

III - 14

Construire un triangle ABC connaissant A, B et I, point de rencontre des 3 bissectrices intérieures.

III - 15

Soit ABC un triangle isocèle (AB = AC)

D le symétrique de C par rapport à (AB).

E le symétrique de B par rapport à (AC).

Démontrer que D et E sont symétriques par rapport à l'axe de symétrie de ABC.

III - 16

M est un point plus près de A que de B.

Soit Δ la médiatrice de [AB], B n'étant pas un point accessible sur la feuille, déterminer la distance MB.

III - 17

Soient deux points O et A distincts.

Quel est l'ensemble des symétriques du point A par rapport à chacune des droites passant par O.

III - 18

Prouver que si un triangle admet deux axes de symétrie D_1 et D_2, il est équilatéral.

(Montrer que D_1 et D_2 sont sécantes).

III - 19

Deux droites parallèles Δ et Δ' coupent un cercle $\mathcal{C}$ en A et B pour Δ et A', B' pour Δ'.

Démontrer que AB B'A' admet un axe de symétrie.

III - 20

Construire une figure dans laquelle : $F \in (EA)$, $(OF) \perp (ED)$, O est milieu de [AB] et [ED].

(EA) et (BD) sont perpendiculaires à (AB).

O se projette en K sur (FD).

Montrer que OA = OK = OB.

III - 21

ABC est isocèle en A.

(BD) est bissectrice de {[BA), [BC)} et $D \in [AC]$.

E est un point de [AB] tel que AD = AE.

Démontrer que (CE) est bissectrice de {[CB), [CA)}.

III - 22

ABCD est un parallélogramme

On prolonge [AB] d'une longueur BM = AD.

On prolonge [AD] d'une longueur DN = DC.

1) Montrer que AMN, DNC, BCM sont isocèles.

2) Montrer que M, C, N sont alignés.

III - 23

ABC est un triangle de hauteur [AM] avec A' milieu de [BC].

Montrer que ABC est isocèle :

1) si [AA'] est hauteur .

2) si (AM) est bissectrice intérieure .

3) si (AA') est bissectrice .

III - 24

Dans un triangle ABC les hauteurs [BH] et [CK] ont même longueur.

Démontrer que ABC est isocèle.

III - 25

Deux hauteurs d'un triangle, issues de B et C se coupent en H

et BHC est isocèle en H.

Démontrer que le triangle est isocèle.

III - 26

Deux bissectrices intérieures d'un triangle, se coupent en I

et BIC est isocèle.

Démontrer que le triangle est isocèle.

⁂

CHAPITRE IV

CERCLE

IV - 1

Quels sont les axes de symétrie de la figure formée par une droite et un cercle ?

IV - 2

Construire un cercle de rayon R choisi, passant par un point donné A et centré sur une droite D donnée.

IV - 3

Soit un cercle $\mathcal{C}$ de centre O.

Si M est un point de $\mathcal{C}$, on désigne par P le milieu de [OM].

Quel est l'ensemble des points P associés à l'ensemble des points M de $\mathcal{C}$?

IV - 4

Construire un triangle ABC connaissant les points B, C et les longueurs AB et AH ([AH]) hauteur.

IV - 5

Construire un triangle ABC connaissant les longueurs de deux côtés : AB et BC et celle d'une hauteur : AH..

IV - 6

Construire un triangle ABC connaissant les points B, C et les longueurs BM et AH ([BM] médiane, [AH] hauteur).

IV - 7

Construire un cercle $\mathcal{C}$ de rayon R passant par un point A et tangent à un cercle $\mathcal{C}_o$ donné.

IV - 8

Quels sont les axes de symétries de la figure formée par un cercle $\mathcal{C}$ et un point A?

Montrer que si A est extérieur à $\mathcal{C}$ on peut construire deux points de $\mathcal{C}$: B et C tels que (AB) et (AC) soient tangentes à $\mathcal{C}$ et que AB = AC.

IV - 9

Construire un cercle de rayon R donné tangent à deux demi-droites données [AB) et [AC).

IV - 10

On se donne

- une droite Δ,
- un point A non situé sur Δ,
- un point B sur Δ.

Construire le cercle $\mathcal{C}$ passant par A et tangent à Δ en B.

IV - 11

E désigne l'ensemble des cercles passant par deux points distincts A et B.

1) Construire un cercle de E ayant son centre sur une droite D donnée. Discuter la possibilité de cette construction.

2) Construire un cercle de E passant par un point P donné. Discuter.

IV - 12

On donne un cercle $\mathcal{C}$ et une droite D .

Trouver M de $\mathcal{C}$ et N de D tels que MN soit minimum.

IV - 13

On donne deux cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.

Trouver M_1 de $\mathcal{C}_1$ et M_2 de $\mathcal{C}_2$ tels que M_1M_2 soit minimum.

IV - 14

On considère l'ensemble des cercles $\mathcal{C}$ qui passent par un point A donné et de rayon donné R.

1) Démontrer que l'ensemble des centres O des cercles $\mathcal{C}$ est un cercle. Préciser son centre et son rayon.

2) Soit une droite D. Construire, si cela est possible, les cercles $\mathcal{C}$ dont le centre est un point de D.

IV - 15

On se donne ABCD sur un cercle $\mathcal{C}$ tels que AB = CD

Trouver un axe de symétrie de la figure.

IV - 16

1) Montrer que les cordes de même longueur d'un cercle $\mathcal{C}$ sont tangentes à un cercle $\mathcal{C}'$ de même centre que $\mathcal{C}$.

2) Application. Construire la tangente issue de A à un cercle $\mathcal{C}$.

IV - 17

C_1 et C_2 sont deux cercles de même centre .

C_1 est intérieur à C_2 .

A est un point de C_1 .

La tangente en A à C_1 coupe C_2 en P et Q.

Prouver que AP = AQ et que PQ est indépendant de A.

IV - 18

On donne deux droites D_1 et D_2 sécantes et un nombre R.

Construire les cercles de rayon R tangents à D_1 et D_2.

Préciser la figure formée par les centres des cercles obtenus.

IV - 19

D_1 et D_2 sont deux droites parallèles, Δ est une droite sécante à D_1 et D_2.

Construire un cercle $\mathcal{C}$ tangent à D_1, D_2 et Δ.

Définition :

Le quadrilatère ABCD est circonscrit au cercle $\mathcal{C}$ si et seulement si $\mathcal{C}$ est tangent à chaque côté [AB], [BC] [CD], [DA].

$\mathcal{C}$ est dit inscrit dans le quadrilatère ABCD.

IV - 20

1) Inscrire un cercle dans un carré.

2) Montrer que s'il existe un cercle inscrit dans un rectangle, celui-ci est un carré.

IV - 21

1) Inscrire un cercle dans un losange.

2) Montrer que s'il existe un cercle inscrit dans un parallélogramme, celui-ci est un losange.

IV - 22

Un cercle $\mathcal{C}$ est inscrit dans un quadrilatère ABCD.

Montrer que $AB + DC = AD + BC$.

IV - 23

Montrer qu'il n'existe pas en général de cercle inscrit dans un trapèze isocèle.

IV - 24

Montrer que si le cercle circonscrit à un triangle équilatéral ABC a pour rayon R, le rayon du cercle inscrit est $r = \frac{R}{2}$.

IV - 25

<u>Cercle exinscrit</u>

ABC est un triangle donné.

Construire un cercle $\mathcal{C}$ tangent aux trois droites (AB), (BC) (CA) en P, Q et R de façon que $P \in [AB)$ et $P \notin [AB]$

$Q \in [BC]$

$R \in [AC)$ et $R \notin [AC]$

Montrer que $AP = AR = AB + BQ = \frac{1}{2}(AB + BC + CA)$

IV - 26

Construire l'ensemble des symétriques A' d'un point A par rapport à chacune des droites passant par un point O

IV - 27

Construire l'ensemble des projetés H d'un point A sur chacune des droites passant par un point O

IV - 28

Données :

. un cercle $\mathcal{C}$ de diamètre [AB],

. un point D de $\mathcal{C}$,

. le point C tel que D soit le milieu de [BC];

1) Prouver que ABC est un triangle isocèle.

2) Placer le point D de façon que ABC soit équilatéral.

3) Placer D de façon que ABC soit rectangle.

IV - 29

A est le milieu de [BC]

(BC) est tangente en A à un cercle $\mathcal{C}$ de centre O.

Le cercle C_1 de centre B et de rayon AB coupe $\mathcal{C}$ en M,

Le cercle C_2 de centre C et de rayon AC coupe $\mathcal{C}$ en N.

1) Prouver que C_1 et C_2 sont tangents en A.

2) Prouver que (BM) et (CN) sont tangentes en M et N à $\mathcal{C}$.

3) Prouver que (BM), (CN) et (AO) sont concourantes ou parallèles.

IV - 30

On se donne deux demi-droites [Ax) et [Ay).

Soit $\mathcal{C}$ un cercle tangent en D à [Ax) et en E à [Ay).

Soit O son centre.

Soit M un point de $\mathcal{C}$ situé dans le demi-plan défini par (DE) et contenant A.

La tangente en M à $\mathcal{C}$ recoupe [Ax) et [Ay) en B et C.

Démontrer que le périmètre de ABC est indépendant de la position de M

IV - 31

A est un point d'un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et P est un point de la tangente en A vérifiant AP = R avec R rayon de $\mathcal{C}$

Soit B le point de contact avec $\mathcal{C}$ de la deuxième tangente issue de P à $\mathcal{C}$

Préciser la nature de OAPB .

IV - 32

Soit un demi-cercle $\mathcal{C}$ de diamètre [AB] et O le milieu de [AB]

[Ax), [By) sont deux demi-tangentes en A et B à $\mathcal{C}$.

Soit M un point de $\mathcal{C}$, la tangente en M à $\mathcal{C}$ recoupe

[Ax) en C et [Ay) en D .

Démontrer que COD est rectangle en O.

IV - 33

A,B,C,D sont alignés dans cet ordre

$\mathcal{C}$ est le cercle de diamètres [AB] de centre I

$\mathcal{C}'$ est le cercle de diamètre [CD] de centre I'

M est un point de $\mathcal{C}$ et M' un point de $\mathcal{C}'$

Démontrer, en utilisant les projetés H et H' de I et I' sur (MM'), que $AD \geqslant MM' \geqslant BC$

a) on montrera que $MH \leqslant AI$ et que $M'H' \leqslant I'D$.

d) montrer que $MM' \leqslant MH + HH' + H'M'$.

c) prouver que $HH' \leqslant II'$.

En déduire la propriété.

IV - 34

<u>Construction d'une tangente issue d'un point P à un cercle C de centre O, de rayon R (EUCLIDE)</u>

Faire la construction suivante ;

C_2 est le cercle de centre O et de rayon 2R,

Construire C_1 de centre P et de rayon OP.

On appelle A un point commun à C_1 et C_2

(OA) coupe C en I.

Démontrer que (PI) est tangente à C en I.

IV - 35

[BH] et [CK] sont deux hauteurs de même longueur d'un triangle ABC

Démontrer que ABC est isocèle de sommet A.

(Utiliser un cercle de diamètre [CB]).

⁂

CHAPITRE V

PROJECTION

V - 1

Deux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ de centres O et O' se coupent en A et B

[AE] est un diamètre de $\mathcal{C}$ et [AF] un diamètre de $\mathcal{C}'$.

Prouver a) $B \in (EF)$.

b) $(EF) \perp (AB)$.

c) $EF = 2OO'$.

V - 2

$\mathcal{C}$ est un cercle de centre O et de diamètre [AB].

$\mathcal{C}'$ est le cercle de centre B, de rayon AB.

Une droite Δ passant par A coupe $\mathcal{C}$ en C et $\mathcal{C}'$ en C'.

1) Démontrer que C est le milieu de [AC'].

2) Démontrer que les droites (OC) et (BC') sont parallèles.

V - 3

Soit D une droite, δ une direction de droites,

A' et B' deux points de D distincts.

Trouver l'ensemble des points B vérifiant :

$$\begin{cases} B \text{ se projette en } B' \text{ sur } D \text{ selon la direction } \delta \\ A'B = A'B'. \end{cases}$$

V - 4

On considère une projection du plan sur une droite D, suivant une direction δ.

Soit A un point et A' sa projection.

B' est un point de D distinct de A'.

Déterminer l'ensemble des points B ayant pour projection B' et tel que AB = A'B'.

(On envisagera d'abord le cas où $A \in D$).

V - 5

ABCD est un parallélogramme.

I est le milieu de [AB] .

(DI) coupe (AC) en E .

Déterminer $\frac{AE}{AC}$.

V - 6

Données : | E milieu de [BP]
| N milieu de [EA]

(AB) coupe (PN) en C

Déterminer $\frac{BC}{BA}$.

V - 7

Δ est la bissectrice de {[BA), [BC)} .

Par M milieu de [AB] on trace la parallèle à (BC). Elle coupe Δ en I.

Démontrer que ABI est rectangle en I.

V - 8

Soit un triangle isocèle ABC et M un point de [BC],

H et K sont les projections orthogonales de M sur (AB) et (AC).

Démontrer que la somme MK + MH est constante lorsque M se déplace sur [BC].

Voir aussi les exercices 27 et 28, chapitre VI.

V - 9

Soit un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon R.

Soit A un point non situé sur $\mathcal{C}$ et un point M de $\mathcal{C}$.

I est le milieu de [OA], P le milieu de [AM].

1) Démontrer que $IP = \frac{R}{2}$.

2) Quel est l'ensemble des points P lorsque M décrit $\mathcal{C}$.

CHAPITRE VI

LA SYMETRIE CENTRALE
LE PARALLELOGRAMME

VI - 1

Quelle est l'ensemble E des points qui sont centres de symétrie

1°) d'une droite,

2°) d'une paire de droites sécantes,

3°) d'une paire de droites parallèles.

VI - 2 Démontrer que l'image d'un cercle par une symétrie centrale est un cercle.

VI - 3

Soit une droite D et un point A.

Construire l'ensemble des symétriques A' du point A par rapport à chacun des points de D.

VI - 4

D et D' sont deux droites orthogonales, sécantes en O.

Démontrer que : $S_O \circ S_D = S_D \circ S_O = S_{D'}$

VI - 5

Déterminer le centre de symétrie de la figure formée par deux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ de même rayon.

VI - 6

Construire une droite parallèle à une droite (BC) menée par un point A en utilisant la symétrie par rapport à un point.

VI - 7

[AB] est une diagonale commune à deux parallélogrammes A E B F et A G B H .

Montrer que F H E G est un parallélogramme .

VI - 8

A,B,C,D sont quatre points tels que (AB)//(CD),

$E = S_C (B)$ $F = S_D (A)$,

Prouver que (EF)//(AB).

VI - 9

1) Construire un parallélogramme connaissant les milieux de trois côtés.

2) Construire un parallélogramme ABCD connaissant A, P milieu de [CB] et Q milieu de [CD] .

VI - 10

Soit un quadrilatère MNPQ tel que (MP) soit orthogonale à (QN) Construire un rectangle ABCD tel que A,B,C et D appartiennent respectivement aux côtés [MN], [NP], [PQ] et [QM].

VI - 11

Démontrer que les symétriques d'une même droite par rapport à deux axes parallèles sont parallèles.

VI - 12

A' B' C' désignent les milieux des côtés d'un triangle ABC Montrer que trois des quatre triangles obtenus se déduisent de A' B' C' par une symétrie centrale .

VI - 13

Démontrer que dans un triangle ABC, B et C sont équidistants de la médiane issue de A.

VI - 14

Soient deux droites perpendiculaires Δ et Δ' et sécantes en O. Soient P un point, Q son symétrique par rapport à Δ et R son symétrique par rapport à O; démontrer que R est le symétrique de Q par rapport à Δ'.

VI - 15

[AB] étant un diamètre d'un cercle $\mathcal{C}$,
[AC] et [BD] en sont deux cordes parallèles.
Démontrer que [CD] est un diamètre de $\mathcal{C}$.

VI - 16

Démontrer que si ABCD est un parallélogramme inscrit dans un cercle alors ABCD est un rectangle.

VI - 17

ABC est un triangle A', B', C' sont les milieux des côtés, D est le symétrique de C' par rapport à B'.

1) Montrer que CDAC' et BC' DC sont des parallélogrammes.
2) Montrer que (AA') coupe [C'B'] en son milieu .

VI - 18

Soit un triangle ABC isocèle en A, $B' = S_A(B)$ et $C' = S_A(C)$ démontrer que la droite parallèle à (BC) et passant par A est axe de symétrie de la figure ainsi formée.

VI - 19

Soit un triangle ABD ; C est le symétrique de A par rapport à B et E le symétrique de A par rapport à D, F est le milieu de [BE].
Démontrer que les droites (FC) et (BD) se coupent en G tel que : (GE) est parallèle à (AB).

VI - 20

Soit un parallélogramme ABCD, N le milieu de [AB] et M le milieu de [CD]. La droite (CN) coupe (BD) en I et (AM) coupe (BD) en J.

Démontrer que DJ = JI = IB.

Dans quel cas ANCM est-il un rectangle ?

VI - 21

ABC est un triangle isocèle de sommet A. Soit M un point de [BC]. La droite parallèle à (AC) passant par M coupe (AB) en D et la droite parallèle à (AB) passant par M coupe (AC) en E.

Démontrer que MD + ME = AB.

VI - 22

Soient deux droites Δ et Δ' strictement parallèles. Soit ℓ leur distance.

A est un point de Δ, C un point de Δ', B et D deux points de la bande (Δ, Δ') tels que ABCD soit un parallélogramme.

E, F et H sont les projections orthogonales de D, B et A sur Δ'.

Montrer que $BF + DE + AH = 2\ell$

VI - 23

Soient Δ_A, Δ_I et Δ_B trois droites parallèles passant par les points A, I, B tels que I est le milieu de [AB].

Soit I' un point de Δ_I.

(AI') coupe Δ_B en Q et (BI') coupe Δ_A en P.

Démontrer que ABQP est un parallélogramme.

VI - 24

Soit un triangle ABC ; I est le milieu de [AB] et J le milieu de [AC]. Soit K le symétrique de I par rapport à J.

1) Démontrer que les droites (CK) et (AB) sont parallèles.

2) Quelle est la nature des quadrilatères AICK et IBCK.

VI - 25

Etant données deux droites sécantes D_1 et D_2 et O un point du plan. Construire les points A_1 et A_2 situés respectivement sur D_1 et D_2 tels que O soit le milieu de $[A_1A_2]$.

VI - 26

Etant données deux droites D_1 et D_2 sécantes et A et B deux points distincts.

Construire deux points M_1 et M_2 situés respectivement sur D_1 et D_2 et tels que AM_2BM_1 soit un parallélogramme.

VI - 27

Soit un triangle ABC, I et J les milieux de [AB] et [AC].

Démontrer que BC = 2 IJ.

VI - 28

Soient
- un cercle $\mathcal{C}$ de centre O.
- deux points A et C de $\mathcal{C}$.
- l'intersection B du cercle $\mathcal{C}'$ de diamètre [AO] et de la droite (AC).

Démontrer que B est le milieu de [AC].

VI - 29

Retrouver par une construction le centre inconnu d'un cercle (tracé à l'aide d'une boîte ronde par exemple)

a) en utilisant la règle et le compas ;

b) en utilisant la règle et l'équerre .

VI - 30

1) Construire la figure suivante :

O milieu de $[AB]$, $(BD) \perp (AB)$, O milieu de $[ED]$,

$F \in (AE)$ et $(OF) \perp (ED)$, $K \in (FD)$ et $(OK) \perp (FD)$.

2) Montrer que $OK = OA = OB$.

VI - 31

D_1 et D_2 sont deux droites parallèles et Δ une sécante à D_1.

Montrer que les bissectrices de $\{D_1, \Delta\}$ et $\{D_2, \Delta\}$ déterminent un rectangle .

VI - 32

$A\ B\ C$ est un triangle et les bissectrices de $\{[BA), [BC)\}$ et $\{[CA)\ [CB)\}$ se coupent en I.

Par I on trace la parallèle à (BC) qui coupe (AB) en B' et (AC) en C'.

Montrer que $BB' + CC' = B'C'$.

VI - 33

$[AB]$ est un diamètre d'un cercle $\mathcal{C}$ de centre O.

M est un point de $\mathcal{C}$ qui se projette en H sur (AB).

La bissectrice de $\{[MH), [MO)\}$ coupe $\mathcal{C}$ en D .

(MO) recoupe $\mathcal{C}$ en F .

(MH) recoupe $\mathcal{C}$ en E.

I est le milieu de $[MD]$.

1) Montrer que $(OD)//(MH)$.

2) Montrer que $DE = DF$.

VI - 34

P désigne un point d'une droite D perpendiculaire en un point H fixé d'un segment [AB].

. P' est le point diamétralement opposé à P sur le cercle passant par P, A et B.

(On suppose $H \neq P$)

1) Prouver que P' est un point de la droite D' symétrique de la droite D par rapport à la médiatrice de [AB].

2) Préciser l'ensemble des points P' associé à l'ensemble D des points P.

VI - 35

Justifier la construction suivante :

Pour mener la perpendiculaire à une droite D par un point A de D, on choisit un point O non situé sur D et on trace le cercle de centre O passant par A. Ce cercle coupe D en B, [BC] est un diamètre. Montrer que (AC) est la perpendiculaire cherchée.

VI - 36

Soit un triangle ABC <u>non</u> isocèle. [AH] est une hauteur et [AM] une médiane.

D est le point tel que H est le milieu de [AD]

E est le point tel que M est le milieu de [AE]

On appelle F le point d'intersection des droites (BD) et (CE).

Démontrer que les triangles FBC et FDE sont isocèles.

VI - 37

ABC est un triangle rectangle, [AH] une hauteur , $H \neq B$, $H \neq C$;

$E = S_{(AB)}(H)$, $F = S_{(AC)}(H)$, M milieu de [BC].

Montrer que (EB), (AM) (FC) sont parallèles.

VI - 38

Soient deux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sécants en A et A'.

Le centre O de $\mathcal{C}$ se projette en H sur la tangente à $\mathcal{C}'$ en A et le centre O' de $\mathcal{C}'$ se projette en H' sur la tangente à $\mathcal{C}$ en A.

Démontrer que les points A, A', H et H' sont sur un même cercle.

VI - 39

Soient deux droites Δ et Δ' parallèles, Γ une sécante à Δ et Δ' en A et B. Une bissectrice $\mathcal{D}$ de $\{\Delta;\Gamma\}$ recoupe Δ' en C.

Démontrer que le triangle ABC est isocèle.

VI - 40

Soit un parallélogramme ABCD et Δ_1 et Δ_2 les bissectrices respectives de $\{[AB) ; [AD)\}$ et de $\{[CD) ; [CB)\}$.

Démontrer que Δ_1 et Δ_2 sont parallèles.

VI - 41

Soit ABCD un parallélogramme, Δ_1 la bissectrice de $\{[AB) ; [AD)\}$ et Δ_2 la bissectrice de $\{[DA) ; [DC)\}$.

Démontrer que Δ_1 est orthogonale à Δ_2.

VI - 42

Soient deux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ concentriques, $\mathcal{C}$ à l'intérieur de $\mathcal{C}'$. M est un point de $\mathcal{C}$.

Une droite Δ passant par M recoupe $\mathcal{C}$ en A et coupe $\mathcal{C}'$ en B et C de telle sorte que M soit entre A et C.

Construire Δ de façon que AB = AM = CM ,

VI - 43

Contre-parallélogramme

Soit un quadrilatère ABCD vérifient AD = BC et AB = CD et qui ne soit pas un parallélogramme

1) Montrer que ABCD admet un axe de symétrie.

2) On suppose que AB et CD se coupent en I montrer que IBD et IAC sont isocèles.

VI - 44

Parallèles équidistantes

Six droites parallèles de direction δ déterminent sur une droite D_1 ($D_1 \notin \delta$) cinq segments de même longueur.

1) Montrer que ces six droites déterminent sur toute droite D_2 ($D_2 \notin \delta$) cinq segments de même longueur,
En particulier, sur une perpendiculaire aux six droites,

2) partager en 5 un segment en utilisant 6 droites parallèles équidistantes (papier quadrillé par exemple).

VI - 45

ADN est un triangle
A, B, C, D sont quatre points alignés tels que AB = BC = CD
B et C se projettent en E et F sur (AN) parallèlement à (DN)
E et F se projettent en I et J sur (DN) parallèlement à (AN)

1) Montrer que A E = E F puis, que A E = E F = F N.

2) Montrer que N J = J I = I D.

3) Montrer que (CI)//(BJ) puis, que (BJ)//(AN).
Montrer que $BJ = 2\ CI = \frac{2}{3}\ AN$.

4) G désigne le milieu de [BJ],
Montrer que G est aussi milieu de [CF] et de [EI].

5) Montrer que [DG] est médiane de BDJ.
Montrer que (DG) coupe [AN] en son milieu.

6) Montrer que G est centre de gravité de ADN.

VI - 46

D_1 et D_2 sont deux droites sécantes en O;

Δ est une bissectrice de $\{D_1, D_2\}$;

A et B sont deux points symétriques par rapport à Δ;

C est l'image de B par la symétrie de droite D_1;

D est l'image de A par la symétrie de droite D_2.

Montrer que Δ est perpendiculaire à (CD).

VI - 47

Δ et D_1 sont deux droites sécantes en O;

D_2 est l'image de D_1 par la symétrie de droite Δ;

Montrer que $S_{D_2} \circ S_\Delta = S_\Delta \circ S_{D_1}$.

VI - 48

D_1 et D_2 sont deux droites perpendiculaires et O leur point commun.

Δ désigne un axe d'une symétrie échangeant D_1 et D_2.

Soit $R = S_{D_1} \circ S_\Delta$.

D est une droite quelconque passant par O et $D' = R(D)$.

Soient $A \in D$ $A' = R(A)$ $A'' = R(A')$.

1) Montrer que $R \circ R$ est une symétrie de centre O.

2) Montrer que $R(D') = D$.

3) Montrer que A' est un point de la médiatrice de $[AA'']$.

4) Montrer que $D' \perp D$.

$\therefore$

CHAPITRE VII

TRIANGLE

VII - 1

1) Construire un triangle ABC connaissant les sommets A et B et son orthocentre H.

2) Construire un triangle ABC connaissant les sommets A et B et le centre I de son cercle inscrit.

VII - 2

A'B'C' est un triangle.

Construire un triangle ABC tel que A',B',C' soient les milieux respectifs de [BC], [CA], [AB] .

VII - 3

A,B,C sont trois points non alignés, non situés sur une droite Δ.

Construire trois droites parallèles passant par A,B et C et déterminant des segments de même longueur sur Δ.

Montrer qu'il y a au plus trois solutions.

VII - 4

Soit un triangle ABC, O le centre de son cercle circonscrit, A',B' et C' les milieux respectifs de [BC], [AC] et [AB] ; montrer que O est l'orthocentre de A'B'C'.

VII - 5

Données | . un cercle $\mathcal{C}$
. un diamètre [AB] de $\mathcal{C}$
. un point M non situé sur (AB), ni sur $\mathcal{C}$

Construire, en utilisant uniquement la règle, la droite orthogonale à (AB) passant par M.

VII - 6

Données | . un cercle $\mathcal{C}$
. un diamètre [AB] de $\mathcal{C}$
. un point M situé sur $\mathcal{C}$, mais non sur (AB)

Construire uniquement à la règle, la droite orthogonale à (AB) passant par M.

On pourra utiliser l'exercice II.

Après avoir déterminer grâce à l'exercice 5 deux points de $\mathcal{C}$: N et N' symétriques par rapport à (AB).

VII - 7

Données | . un cercle $\mathcal{C}$ de centre O
. une droite Δ ne passant pas par O

Construire, uniquement à la règle, la droite passant par O orthogonale à Δ.

(On peut choisir deux points A et B sur Δ et utiliser l'exercice 5)

VII - 8

ABC et A B C' sont deux triangles tels que les médianes [BP] et [B P'] ont même longueur et que les médianes [AL] et [A L'] ont même longueur.

Montrer que si C $\neq$ C', C et C' sont symétriques par rapport à (AB).

VII - 9

Soit un cercle $\mathcal{C}$ de rayon R et les points P et A tels que OP = 2R et (PA) est tangente en A au cercle $\mathcal{C}$. Soit I le milieu de [OP] et B tel que (PB) est tangente en B à $\mathcal{C}$.

1) Démontrer que O,A,P,B sont sur un même cercle de centre I.

2) Démontrer que OAIB est un losange .

3) Démontrer que le triangle PAB est équilatéral.

VII - 10

Données : 3 droites Δ_A, Δ_B, Δ_C concourantes en G.

Construire un triangle ABC tel que :

- $A \in \Delta_A$, $B \in \Delta_B$, $C \in \Delta_C$
- G est le centre de gravité du triangle ABC.

VII - 11

Données : trois droites Δ_A, Δ_B, Δ_C concourantes en H.

Construire un triangle ABC tel que :

- $A \in \Delta_A$, $B \in \Delta_B$, $C \in \Delta_C$.
- H est l'orthocentre du triangle ABC.

VII - 12

ABC est un triangle tel que la distance de C et B à la bissectrice de {[AB) [AC)} est la même.

Montrer que ABC est isocèle.

VII - 13

ABC est isocèle (AB = AC).

M est un point de [BC], P ∈ [BA], Q ∈ [AC] et (MP)//(AC), (MQ)//(AB) .

Démontrer que le périmètre du quadrilatère ABCD ne dépend pas de la position du point M sur [BC] .

VII - 14

ABC est un triangle isocèle en A
D est un point de [BC] qui se projette en E et F
sur chacun des côtés parallèlement à l'autre.

1) Montrer que AEDF a un périmètre constant lorsque D varie sur [BC] ; le comparer à AB + AC.

2) Montrer que DE + DF est constante.

VII - 15

ABC est un triangle rectangle en A,
d est le diamètre du cercle inscrit dans ABC,
D est le diamètre du cercle circonscrit à ABC.
Démontrer que $d + D = AB + AC$.

VII - 16

[AM], [BN], [CP] sont les médianes d'un triangle ABC, elles se coupent en G. D désigne le symétrique de G par rapport à M.
Montrer que le périmètre de BGD s'exprime simplement à l'aide de la somme $AM + BN + CP$.

VII - 17

1) Montrer que deux médianes sont sécantes à l'intérieur du triangle.

2) Montrer que deux bissectrices intérieures sont sécantes à l'intérieur du triangle

3) Donner un contre-exemple pour deux hauteurs.

VII - 18

Soient deux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sécants en A et B, P et Q sont les points diamétralement opposés à A respectivement sur les cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$. La droite (PA) recoupe $\mathcal{C}'$ en S et la droite (QA) recoupe $\mathcal{C}$ en R.

1) Démontrer que P, B et Q sont alignés.

2) Démontrer que P,R,S,Q sont sur un même cercle dont on précisera le centre.

3) Démontrer que les trois droites (PR), (QS) et (AB) sont concourantes.

VII - 19

ABC est un triangle rectangle en A,

[AM] la médiane, [AH] la hauteur, issues de A.

H se projette en P et Q sur (AB) et (AC).

E et F sont les symétriques de H par rapport à Q et à P.

1) Démontrer que (PQ)//(FE) et que A est milieu de [EF].

2) Démontrer que (FB) $\perp$ (EF) et que (EC) $\perp$ (EF).

3) En déduire que (AM) $\perp$ (PQ).

VII - 20

Soient deux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ tangents en A et Δ une tangente commune à $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ en B et B'. T la tangente commune à $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ coupe Δ en M. Démontrer que :

1) MB = MB'

2) le triangle OMO' est rectangle.

3) le triangle BAB' est rectangle.

4) la droite (BB') est tangente en M au cercle de diamètre [OO'].

VII - 21

$\mathcal{C}$ est un cercle de centre O et de rayon r.

$\mathcal{C}'$ est un cercle de centre O et de rayon r/2 .

Une droite tangente en A à $\mathcal{C}'$ recoupe $\mathcal{C}$ en B et C.

1) [OA] recoupe $\mathcal{C}$ en D.

Démontrer que OBD est équilatéral .

Démontrer que OBDC est un losange.

2) [OB) et [OC) recoupent $\mathcal{C}'$ en E et F.

Démontrer que (DE) est tangente à $\mathcal{C}'$.

Démontrer que (DF) est tangente à $\mathcal{C}'$

3) (DE) et (DF) recoupent (BC) en H et K.

Démontrer que BK = KH = HC.

4) Indiquer la nature de DKOH et de. FAEO.

5) Soit R le milieu de [AO] et S le symétrique de D par rapport à R.

Démontrer que $S \in \mathcal{C}'$.

6) Soit P et Q les points ou (DE) et (DF) recoupe $\mathcal{C}$,

Montrer que PQS sont alignés.

VII- 22

Dans un triangle la somme des médianes est inférieure au périmètre du triangle.

CHAPITRE VIII

QUADRILATERES
AYANT AU MOINS UN AXE DE SYMETRIE

∴

VIII - 1

Construire un rectangle, connaissant le centre O, un sommet A et sachant que l'un des côtés passe par un point P donné.

VIII - 2

Construire un rectangle, connaissant la longueur d'une diagonale et celle d'un côté.

VIII - 3

Construire un losange connaissant les droites supports de deux côtés consécutifs et la longueur d'une diagonale (deux cas).

VIII - 4

Construire, en utilisant uniquement la règle et l'équerre la médiatrice d'un segment [AB].

VIII - 5

ABCD est un rectangle.

Montrer que les perpendiculaires à (AC) en A et C et les perpendiculaires à (BD) en B et D déterminent un losange.

VIII - 6

A B C D est un losange de centre O.

1) Montrer que les projections de O sur les côtés sont sommets d'un rectangle.

2) La propriété est-elle vraie si on projette O parallélement aux côtés?

VIII - 7

ABCD est un rectangle de centre O. On pose AB = a et BC = b (a > b)

Soient Δ_A la bissectrice de {[AD), [AB)}

Δ_B la bissectrice de {[BA), [BC)}

Δ_C la bissectrice de {[CB), [CD)}

Δ_D la bissectrice de {[DC), [DA)}

Montrer que Δ_A, Δ_B, Δ_C, Δ_D déterminent un carré dont la diagonale a pour longueur (a - b)

VIII - 8

Montrer que si un trapèze a deux diagonales de même longueur, il est isocèle.

VIII - 9

Dans un trapèze ABCD avec (BA)//(CD), m et N sont les milieux de [AB] et [CD] ; AB = a et CD = b et b > a .

C se projette en E sur (AB) parallélement à (AD) et en F sur (AB) parallélement à (BD).

Montrer que $MN = \frac{a+b}{2}$, BE = b-a, AF = a + b

VIII - 10

ABC est un triangle rectangle en A

M est un point de [BC] se projettant en P et Q sur (AB) et (AC)

Démontrer que :

1) Si (AM) est bissectrice de {[AC), [AB)} alors APMQ est un carré.

2) Si AMPQ est un carré alors (AM) est bissectrice de {[AC), [AB)}.

VIII - 11

Soient deux droites parallèles (x'x) et (y'y),

A un point de (x'x) et B un point de (y'y).

Les bissectrices de {[AB), [Ax)} et {[BA), [By')

se coupent en P.

Les bissectrices de {[Ax'), [AB)} et {[BA), [By)}

se coupent en Q.

- Quelle est la nature du quadrilatère APBQ ?

- Démontrer que la diagonale (PQ) est parallèle aux droites (xx') et (yy').

VIII - 12

ABCD sont quatre points distincts

E,F,I,J sont tels que $S_A(E) = I$, $S_B(F) = I$, $S_C(E) = J$, $S_C(F) = J$.

1) Démontrer que ABCD est un parallélogramme.

2) Trouver à quelle condition ABCD est un rectangle, un losange, un carré.

3) Comparer EF et IJ à AB et BC.

4) Comparer les aires de ABCD et EIFJ.

⁂

CHAPITRE IX

TRANSLATIONS - VECTEURS

⁂

IX - 1

On se donne : deux droites D_1 et D_2

: un vecteur $\vec{u}$.

Construire A sur D_1 et B sur D tels que

$\overrightarrow{AB} = \vec{u}$.

IX - 2

Construire un parallélogramme ABCD tel que :

A et B sont deux points fixés ,

C est situé sur une droite D_1 donnée ,

D est situé sur une droite D_2 donnée .

IX - 3

A,B,C,D,E,F sont six points tels que :

D est milieu de [AB], E est milieu de [AC], (DE)//(BC) .

E est milieu de [DF].

. Faire la figure .

. Démontrer que DFCB est un parallélogramme.

IX - 4

ABC est un triangle isocèle en A .

1) Montrer que si B' est un point de (AB) et C' un point de (AC) tels que (B'C') soit parallèle à (BC), le triangle ABC est isocèle.

2) Montrer que si on construit un triangle A'B'C' dont les côtés sont parallèles à ceux de ABC, A'B'C' est isocèle en A'.

3) Montrer que si A' est un point de (AC) et B' un point de (BC) tels que (A'B') soit parallèle à (AB), le triangle A'B'C est isocèle en A'.

IX - 5

Deux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ se coupent en D et C.
Deux droites parallèles passant par D et C recoupent $\mathcal{C}$ en A et B et $\mathcal{C}'$ en E et F.
Démontrer que ABFE est un parallèlogramme.

IX - 6

$\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont deux cercles de centre O et O' tangents en A.
Une droite passant par A coupe $\mathcal{C}$ en B et $\mathcal{C}'$ en B'

1) Prouver que (OB)//(O'B')

2) Démontrer que les tangentes en B à $\mathcal{C}$ et en B' à $\mathcal{C}'$ sont parallèles.

IX - 7

ABCD est un trapèze avec (AB)//(CD).
I, J, K, L désignent les milieux de [AD], [BC], [BD], [AC].

1) Montrer que I,J,K,L sont alignés.

2) Démontrer que [KJ] et [IL] ont même milieu .

IX - 8

ABCD est un parallélogramme

$\mathbb{D}_1$ est la bissectrice de la paire $\{[AB), [AD)\}$

$\mathbb{D}_2$ est la bissectrice de la paire $\{[DA), [DC)\}$

Démontrer que $\mathbb{D}_1 \perp \mathbb{D}_2$.

IX - 9

Soient deux droites paralléles Δ et Δ'

et deux droites perpendiculaires D_1 et D_2

$D_1' = S_\Delta(D_1)$ et $D_2' = S_{\Delta'}(D_2)$

Montrer que $D_1' \perp D_2'$

IX- 10

Etant donné quatre points non alignés A, B, C, D.

Démontrer que ABCD est un parallélogramme si et seulement si

$S_B \circ S_A = S_C \circ S_D$

IX- 11

Soit un triangle ABC et A',B',C' les milieux des côtés [BC], [CA] et [AB]. Etant donné un point D on appelle A", B" et C" les symétriques de D par rapport à A', B' et C'.

Démontrer que les segments [AA"], [BB"] et [CC"] ont même milieu I.

***

CHAPITRE X

R É V I S I O N S

X - 1

$\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont deux cercles de centre O et O' ayant pour point commun A le milieu de [OO'], M est un point de $\mathcal{C}$ et M' le point de $\mathcal{C}'$ tel que $(AM') \perp (AM)$, H est le milieu de [MM'].

Prouver que
- OA M'H est un parallélogramme
- OA HM est un losange
- OO'M'M est un parallélogramme
- $(OH) \perp (O'H)$
- AH = AO

Quel est l'ensemble des points H quand M décrit $\mathcal{C}$?

X - 2

AA' C est un triangle rectangle en A',

Δ est la perpendiculaire en A' à (AC),

$B' = S_\Delta(C)$.

La médiatrice de [B'A] coupe (AA') en P.

Démontrer que A'B'P est rectangle en B'.

X - 3

ABC est un triangle isocèle en A d'orthocentre N et de hauteurs [AA'], [BB'], [CC']

1) Démontrer que AC' NB' sont sur un même cercle de centre O que l'on précisera.

2) Quelles sont les tangentes à ce cercle, issues de A'?

X - 4

ABCD est un parallélogramme tel que AD < AB ,

La bissectrice de {[AB) [AD)} coupe (CD) en E ,

La bissectrice de {[BA),[BC)} coupe (CD) en F ,

(AE) et (BF) se coupent en G .

1) Montrer que les triangles ADE et BCF sont isocèles .

2) Trouver une condition sur AB et AD pour que G soit intérieur à AB CD

3) Montrer que GEF est rectangle et que sa médiane relative à [EF] est parallèle à (AD)

X - 5

$\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont deux cercles tangents en A.

Une droite Δ passe par A et recoupe $\mathcal{C}$ en P et $\mathcal{C}'$ en P'

1) Démontrer que les tangentes à $\mathcal{C}$ en P et à $\mathcal{C}'$ en P' sont parallèles

2) En déduire une construction d'un cercle tangent à $\mathcal{C}$ et à une droite extérieure au cercle :

. connaissant le point de contact sur $\mathcal{C}$.

.. connaissant le point de contact sur la droite .

X - 6

$\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont deux cercles extérieurs l'un à l'autre

$A \in \mathcal{C}$, $A' \in \mathcal{C}'$ et les tangentes en A et A' sont parallèles

(AA') recoupe $\mathcal{C}$ en B et $\mathcal{C}'$ en B' .

1) Montrer que les tangentes en B et B' sont parallèles .

2) Construire un cercle tangent en A à $\mathcal{C}$ et à $\mathcal{C}'$ en B' .

X - 7 Résolution par diverses méthodes d'un même problème :

ABC est rectangle en A et [AH] est une hauteur,

A' est le milieu de [BC] et H se projette en J sur (AC)

et en I sur (AB). Il s'agit de prouver (IJ) $\perp$ (AA')

1ère méthode :

1) construire $H_1 = S_{(AC)}$ (H) et $H_2 = S_{(AB)}$ (H)

Démontrer que H_1, A, H_2 sont alignés

2) Démontrer que $(BH_2)//(AA')//(H_1C)$

3) Démontrer que $(IJ)//(H_1H_2)$

En déduire que (IJ) $\perp$ (AA')

2ème méthode :

Utiliser la symétrie de droite (AB), M' = S_{AB} (M) et C' = S_{AB} (C)

1) Démontrer . (IJ)//(AH')

. (AA')//(BC')

. AH' $\perp$ (BC')

2) En déduire (AA') $\perp$ (A'H) et conclure.

3ème méthode :

Utiliser les symétries par rapport aux médiatrices de [AB]

et de [AI] : s_1 et s_2 .

Soit A" = s_2 (A')

Démontrer . (IA")//(A'B)

. (AH) $\perp$ (IA")

En déduire (IJ) $\perp$ (AA') .

4ème méthode : (IX - 9)

Utiliser l'exercice avec pour droites de symétries les

médiatrices de [AB] et de [AJ] .

5ème méthode : (IX - 9)

Utiliser l'exercice avec pour droites de symétries la médiatrice

de [A'Q], Q étant le projeté de A' sur (AC) et la médiatrice de [AJ].

X - 8

O est équidistant de A,B,C et A' est milieu de [BC]

Soit H tel que $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ et Δ la parallèle

à (BC) contenant O

1) Démontrer que $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{2OA'}$

En déduire que les hauteurs de ABC sont concourantes .

2) . Soit $H' = S_\Delta (H)$

En utilisant la translation $t_{\overrightarrow{AH}}$ comme composée de S_Δ et S_{BC}

Montrer que (BC) est médiatrice de [HH']

3) En utilisant la translation $t_{\overrightarrow{AH}}$ comme composée de S_O et $S_{A'}$

Montrer que (BC) est médiatrice de [HH']

X - 9

ABC est un triangle de cercle circonscrit $\mathcal{C}$ et d'orthocentre H

H n'est pas un sommet du triangle .

1) Montrer que les cercles définis par H,B,C, par H,B,A,

par H,C,A ont même rayon que $\mathcal{C}$.

2) Démontrer que les trois cercles symétriques du cercle $\mathcal{C}$

par rapport à chacun des côtés d'un triangle ABC, ont un

point commun : l'orthocentre de ABC.

X - 10

OAB est un triangle rectangle en O,

M est un point quelconque de (AB),

$\mathcal{C}$ est le cercle de centre I passant par A, O, M,

$\mathcal{C}'$ est le cercle de centre J passant par B, O, M.

1) Démontrer que : (IA) $\perp$ (JB).

2) Démontrer que les droites (IO) et (OJ) sont orthogonales

Quelles sont les tangentes en O à $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$?

On dit que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont "orthogonaux".

Droite et cercle d'Euler d'un triangle

A,B,C sont trois points d'un cercle $\mathcal{C}$ de centre O

(1) Soit D tel que O soit milieu de [AD] et H l'orthocentre de ABC.

Démontrer que (N ≠ A)
- . (DB)//(HC)
- . (CD)//(HB)
- . DBH est un parallèlogramme

(2) Soit H' le symétrique de H par rapport à (BC)

Démontrer que
- . (DH')//(BC)
- . DHH' est rectangle en H'

En déduire que $H' = S_{(BC)}(H)$

[Le symétrique de l'orthocentre par rapport à un côté d'un triangle est un point du cercle circonscrit à ce triangle].

(3) Traiter le cas où ABC est rectangle en A.

(4) Démontrer que G centre de gravité de ABC est aussi centre de gravité de AMD.

En déduire que
- . O,G,H sont alignés
- . $G \in [OH]$
- . $OG = \frac{1}{3} OH$

(5) Soit W le milieu de [OH]

Démontrer que
- . $W \in [GH]$
- . $GW = \frac{1}{3} OW$

Faire un schéma de la disposition des points O,G,W,H.
(Droite d'Euler)

(6) Soit K le projeté de H sur (BC) et H_1 le milieu de [AH]

Démontrer que $WA' = WK = WH_1$

(7) Soit $\mathcal{C}'$ le cercle de centre W et de rayon WA'

Trouver six autres points analogues à A',K,H_1 situés sur ce cercle (cercle d'Euler)

Déterminer le rayon R' de ce cercle à l'aide du rayon R du cercle $\mathcal{C}$

X - 12

A, B, M sont trois points d'un cercle $\mathcal{C}$ de centre O

Δ est la bissectrice de {[MA), [MB)} qui recoupe $\mathcal{C}$ en I

D est la médiatrice de [MI] et $B' = S_D(B)$

1) Montrer que : (AM) // (IB'), (voir ex. VI 11)

puis que : MB' = IA.

2) Démontrer que IA = IB.

En déduire que la médiatrice de [AB] et la bissectrice de {[MA), [MB)} se coupent sur $\mathcal{C}$, cercle circonscrit à ABC.

X - 13

[AT) est une demi-tangente à un cercle $\mathcal{C}$ de centre O , $A \in \mathcal{C}$, $B \in \mathcal{C}$

Δ est la bissectrice de {[AT), [AB)} qui recoupe $\mathcal{C}$ en I

D est la médiatrice de [AI] et $B' = S_D(B)$

1) Montrer que (AT) // (IB')

2) Montrer que AI = AB' puisque IB = AB'

En déduire que la bissectrice de {[AB), [AT)} et la médiatrice de [AB] se coupent sur le cercle $\mathcal{C}$ passant par A et B et tangent en A à [AT), et dans le demi plan de bord (AB) contenant [AT).

X - 14

On suppose que dans le triangle ABC : AB > AC

Montrer que le point D où la bissectrice de {[AB), [AC)} recoupe (BC) est un point de [BC] plus près de C que de B.

X - 15

[AB) et [DB) sont deux demi-tangentes à un cercle $\mathcal{C}$.

Montrer que le cercle inscrit à ABD est centré sur $\mathcal{C}$.

X - 16

A,B,C sont trois points d'un cercle $\mathcal{C}$

Les tangentes en A et B à $\mathcal{C}$ se coupent en E.

Les tangentes en B et C à $\mathcal{C}$ se coupent en D.

La parallèle menée par D à (AE) coupe (AB) en B' et (AC) en C'

Démontrer que BB'CC' sont sur un même cercle de centre D.

X - 17

ABCD est un carré et AFHE est un rectangle,

E $\in$ [AD), F se projette en G sur (DC),

J $\in$ [DC), J $\notin$ [DC].

1) Démontrer que :

a) Si (BE) $\perp$ (BJ) alors BE = BJ.

b) Si BE = BJ alors (BE) $\perp$ (BJ).

2) Démontrer que

a) Si AFHE est un carré alors (AG) $\perp$ (EB).

b) Si (AG) $\perp$ (EB) alors AFHE est un carré.

3) La perpendiculaire à (EB) en E coupe (FG) en I

Démontrer que :

Si AFHE est un carré alors EBJI est un carré.

ELÉMENTS DE SOLUTIONS

POUR LA RÉSOLUTION

DES EXERCICES DE GÉOMÉTRIE

- CLASSE DE 4ÈME -

- -

-

CHAPITRE I : Distance.

Dans tous les exercices ont utilisera l'inégalité triangulaire ou la caractérisation du segment.

(5) Utiliser I-(4) et le point H.

(7) Se servir des triangles tels que IBC,...

(8) MD = MC au 2) utiliser le triangle MCB

(9) Regarder des triangles tels que BPM.

(10) Pour ce quadrilatère "convexe" de périmètre 2p

$$P < AC + BD < 2p$$

au 3) on utilisera la même majoration ou de 2BD puis de 2(AC + BD)

(11) Montrer que $|MA - MB| < AB$

(Utiliser MA - MB et MB - MA et le triangle ABM).

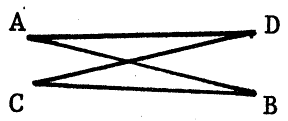
(13) Un seul cas de figure si (AB)//(CD).

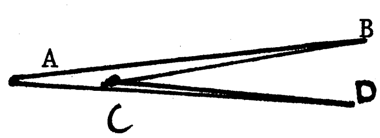
Remarquer que ABC et ABD ont même aire.

(14) Si ABCD est convexe voir I-10.

1) et 2) même si les segments diagonaux [AC] et [BD] n'ont pas de points communs on peut faire une démonstration analogue à celle du I-10

3) Si ABCD est concave ou croisé la "somme des diagonales" peut être "très petite" et le périmètre très "grand".





(15) au 3) et 4) on pourra faire un lien avec l'exercice I-13.
On peut construire N.

. . .
. .
.

CHAPITRE II : Symétrie orthogonale par rapport à une droite.

(1) Le problème a-t-il toujours une solution ?

(2) L'existence de Δ est admise. Son étude fera l'objet d'un paragraphe du chapitre III.

(4) Déterminer en premier lieu l'axe de symétrie du triangle.

(5) 2) On se contentera de justifier intuitivement la convexité de ADBCE.

(6) 2) Même remarque qu'au (5) 2).

(11) La définition de triangle équilatéral n'a pas été revue, ce sera l'occasion de la préciser.

(13) La notion de losange sera éventuellement précisée ici.

. . .
. .
.

CHAPITRE III : Applications de la symétrie orthogonale.

(1) Construire une médiatrice.

(2) Δ médiatrice de $[BC]$, $F = S_\Delta(D)$.

(3) On peut construire une médiatrice de $[AA']$ avec A et A' symétriques, ou deux droites symétriques se coupant sur Δ.

(4) Soit Δ l'axe de la symétrie, $A' \in \Delta$ et $B' = S_\Delta(C')$

(5) $B' = S_{(AA')}(B)$. Trouver une symétrie échangeant (C,D) et (E,B)

(6) Utiliser : Deux droites symétriques sécantes se coupent sur l'axe de symétrie.

(7) Le second axe ne peut être que la médiatrice de $[AC]$
ABC serait équilatéral.

(16) On peut utiliser une symétrie par rapport à la parallèle à Δ menée par M.

(19) La symétrie par rapport à la médiatrice de $[AB]$ laisse la figure invariante.

(22) 2) (CN) et (CM) sont orthogonales à deux parallèles.

(23) 1) (AA') est médiatrice de $[BC]$
2) (AM) est axe de symétrie de la figure.
3) $\Delta = (AA')$ $B' = S_\Delta(B)$, soit Δ' telle que $A' \in \Delta'$, $\Delta' \perp \Delta$
Δ' bissectrice de $\{[AB), [AC)\}$ est axe de symétrie du triangle isocèle en A' : $A'B'C'$ d'où, si $B' \neq C$
$(B'C) \perp \Delta'$ puis $(B'C) \parallel \Delta$ ce qui est contradictoire.

(24) Soit Δ la médiatrice de $[BC]$ et $H' = S_\Delta(K)$

Si $K \neq H'$ $BH = CH' = CK$

H' et K sont dans le même demi-plan P déterminé par (BC) et A.

(BH') coupe (AC) en A_1.

A_1CB est isocèle de sommet A_1, $A_1 \in \Delta$.

Soit P_1 le demi-plan défini par (BA_1) et C

$CK = CH' \Rightarrow K \in P_1$ et $]BK) \subset P_1 \cap P$.

C est équidistant de $[BA_1)$ et $[BA)$

(BC) est donc axe de symétrie de $\{[BA_1), [BA)\}$

Or $[BA_1)$ et $[BA)$ sont dans P donc $[BA_1) = [BA)$ et $A_1 = A$.

(25) (BA) et (CA) perpendiculaires à (CH) et (BH) sont symétriques par rapport à la médiatrice de $[BC]$.

(26) Comme au (25) utiliser l'axe de symétrie de $[BC]$.

. . .
. .
.

CHAPITRE IV : $\boxed{\text{Le cercle}}$

(6) A est sur une parallèle à (BC) : Δ.

C se projette en H sur Δ.

M est sur la médiatrice de [CH] car AHC est rectangle et MH = MC.

(7) Rechercher l'ensemble des centres des cercles de rayon R et tangent à $\mathcal{C}_o$ en pensant au cas où A est intérieur à $\mathcal{C}_o$, et au cas où A est extérieur à $\mathcal{C}$.

(12) Le seul cas à envisager est celui où D est extérieure à $\mathcal{C}$.

On tracera la tangente (T) à $\mathcal{C}$ parallèle à D telle que D et P ne soient pas dans le même demi plan de frontière (T).

(13) On tracera cette fois deux tangentes.

(15) Δ_1 bissectrice de {[OA), [OB)} coupe [AB] en I.

Δ_2 bissectrice de {[OC), [OD)} coupe [CD] en J.

Δ bissectrice de {[OM), [ON)} est l'axe cherché.

(16) Utiliser l'exercice précédent.

(17) Considérer la symétrie d'axe (OA).

Pour prouver que PQ ne dépend pas de A, choisir un autre point A' et étudier la symétrie échangeant A et A'.

(18) Utiliser le fait que si un cercle est tangent à deux droites sécantes,
(19) son centre est situé sur l'une des bissectrices de ces droites.

.../...

(20) (21) Utiliser des symétries.

(voir aussi chapitre VIII)

(23) Le cercle est inscrit dans le triangle isocèle qui "prolonge" le trapèze. Pour un triangle isocèle donné il n'y a qu'un trapèze qui convient.

(24) O est le centre des deux cercles.

O est milieu de [CC'] et [BB'] et se projette en H sur (BC).

Δ sera la médiatrice de [B'C] et I le milieu de [B'C].

Prouver que (AO)//(B'C) et (OC)//(AB').

Puis, que AB'CO est un losange,

que OB'C est équilatéral,

que OICH est un rectangle.

En déduire : R = B'C = 2IC = 2OH = 2r.

(28) 1) ABC est isocèle en B.

2) C doit être un point de la médiatrice de [BA]

3) (BC) est alors orthogonale à (BA).

(29) 2) Utiliser $S_{(OB)}$ et $S_{(OC)}$

3) $S_{(OA)}$

(32) (OD) et (OC) sont parallèles à (MA) et (MB)

(33) 1) MP < AB

3) Compléter par une parallèle passant par H ou H'.

(34) OPA est isocèle et (PI) est médiatrice de [OA].

(35) [BN] et [CK] sont deux cordes de même longueur. Utiliser la symétrie qui les échange (voir exercice 15).

. . .

. .

.

CHAPITRE V : Projection

(1) a) b) ABE et ABF sont rectangles.

c) On peut projeter O et O' sur (EF).

(5) En utilisant J milieu de [BC] ont peut se servir de parallèles équidistantes.

(6) On utilisera 2 projections sur (BA).

(7) Utiliser A' symétrique de A par rapport à I.

(BI) est médiane de BAA'

. . .

. .

.

CHAPITRE VI : Symétrie centrale, le parallélogramme.

(2) Utiliser la conservation des distances et le caractère bijectif de S.

(4) On sait que $S_o = S_{D'} \circ S_D = S_D \circ S_{D'}$

(5) Dans la symétrie les deux centres sont échangés.

(6) Si $B = S_I(A)$, $S_I(BC)$ est la droite cherchée.

(7) I milieu de [AB], utiliser S_I.

(8) C'est une réciproque de la forme faible du théorème de Thalès :
F se projette en E' sur (BC) parallèlement à (AB) et puisque
$F = S_D(A)$, $E' = S_C(B) = E$.

(9) 1) On peut construire $S_Q(A)$ et $S_P(A)$ et obtenir C,
ensuite $D = S_Q(C)$ et $B = S_P(C)$.

(10) Les milieux conviennent.

(11) La figure admet un centre de symétrie (au moins).

(12) Utiliser les milieux des côtés de A'B'C'.

(13) M milieu de [BC], utiliser S_M.

(14) Voir cours : $S_o = S_{\Delta'} \circ S_\Delta$ d'où $S_{\Delta'}$.

(15) S_O donne directement C symétrique de D.

(16) Le centre de symétrie de ABCD est le centre du cercle,
[AC] en étant un diamètre : (AB) $\perp$ (BC).

(17) 2) A'B'AC' est un parallélogramme.

.../...

(18) Δ médiatrice de [BC] et [B'C']. On peut composer S_A et S_Δ.

(19) On peut se servir de S_F.

(20) On peut utiliser la symétrie par rapport au centre puis des projections de milieux.

(21) O centre de ADME, utiliser S_0 puis les symétries par rapport aux médiatrices de [BM] et [MC].

(22) On peut considérer la symétrie S_0 par rapport au centre de ABCD : $S_0(F)$ est aligné avec D et E.

(23) On obtient la solution avec $S_{I'}$.

(24) S_J permet de conclure.

(25) A_2 est sur D_2 et sur $S_0(D_1)$.

(26) I milieu de [AB], M_2 est sur D_2 et sur $S_I(D_1)$.

(27) K milieu de [BC]: BC = BK + KC.
IJKB et IJCK sont des parallélogrammes.

(28) B est projection du milieu O d'un diamètre [AA'].
ou B est projection selon (OC) de O' milieu de [AO]
ou AOC est isocèle de sommet O.
(Le cas de [AC] diamètre est immédiat).

(29) Construire deux diamètres :
a) par les médiatrices de deux cordes;
b) par des triangles rectangles.

(30) EFD est isocèle et $S_{(OF)}(A) = K$
$K = S_{(OD)}(B)$, ABK est donc rectangle.

(31) La figure admet un centre de symétrie.

(32) On pourra prouver que IB'B et JC'C sont isocèles en utilisant l'exercice (39).

(33) 1) Utiliser S_I comme composée de $S_{(MD)}$ et $S_{(OI)}$.

2) (OD) est médiatrice de [EF].

(34) 1) Montrer que [PP'] se projette sur (AB) en un segment [HH'] de même milieu que [AB].

2) Tout point de D' est-il un point P' permettant de retrouver P . Cas de H' ?

(36) Δ médiatrice de [BC], considérer $S_M \circ S_{(BC)} = S_\Delta$.

On a alors $S_\Delta(D) = E$ et $S_\Delta(BD) = (CE)$.

(37) $E = S_A(F)$ entraine : A milieu de [EF] et M milieu de [BC].

(38) (OH) // (HO')

La médiatrice de [AH] coupe (OO') en I milieu de [OO'].

La médiatrice de [AH'] coupe (OO') en I milieu de [OO'].

I est le centre du cercle cherché.

(39) On peut soit utiliser $B_1 = S_D(B)$ et prouver que AB_1CB est un parallélogramme.

Soit I étant le milieu de [AC] utiliser $S_{(AC)} \circ S_I$

$$\Delta' \xmapsto{S_I} \Delta \xmapsto{S_{(AC)}} \Gamma$$

(40) Se servir du centre de symétrie de la figure.

(41) Voir (39) avec Δ_2 médiatrice de [AC].

(Autre solution chapitre Translation).

.../...

(42) On peut dire que $C = S_M(A)$ et construire $S_M(\mathcal{C}) = \mathcal{C}_1$.

Si $\mathcal{C}_1$ coupe $\mathcal{C}'$, soit C l'un des points obtenus $A = S_M(C)$.

Soit Δ la médiatrice de $[AM]$ $B = S_D(C)$ donc $AB = CM$.

(43) Construire le symétrique de B par rapport à la médiatrice de [AC] : c'est D.

(44) Utiliser des projections de milieux.

(45) 1) Projections de milieux ;

2) idem ;

3) C milieu de [BD], I milieu de [DJ], puisque (CI)//(BJ) projeter A en M sur (DN) et prouver que $M = N$.

Voir exercices (27) et utiliser $CI = AE$;

4) (BJ) coupe [IE] et [CE] en leurs milieux (projections) ;

5) CGID et CEFI sont des parallélogrammes.

(DG) est une diagonale de chacun d'eux (voir exercice (7))

6) G est situé au tiers sur une médiane de ADN.

(46) $D = S_\Delta(C)$.

(47) Rechercher l'image d'un point M. On retrouve la figure de l'exercice (46).

(48) 1) Utiliser $R = S_\Delta \circ S_{D2}$ (voir exercice (47))

2) $D' = R(D)$.

3) R conserve les distances.

4) $A'' \in D$ et (OA') est médiatrice de $[AA'']$.

• • •

• •

•

CHAPITRE VII : Le triangle.

(1) 1) On obtient C facilement. On supposera $H \notin (AB)$

2) On peut construire le cercle inscrit puis C.

On supposera I intérieur au cercle de diamètre [AB].

(2) Les côtés de ABC sont parallèles à ceux de A'B'C'.

On peut aussi utiliser le centre de gravité commun.

(3) Chaque médiane de ABC conduit à une solution.

(5) En traçant (MA) et (MB) on peut construire l'orthocentre de AMB : H, (HM) est la droite cherchée.

(8) Il s'agit de construire l'orthocentre de OAB.

(9) 1) OAP et OBP sont rectangles.

2) IA = IB = R

3) (IA) est médiatrice de [PB] et (IB) celle de [PA].

(10) On peut choisir A. On a alors A' milieu de [BC].

$B \in S_{A'}(\Delta_C) \cap \Delta_B$.

(11) A étant choisi, on utilisera le cercle de diamètre [OA].

(12) Utiliser B' symétrique de B par rapport à la bissectrice.

Projeter C et B' en H et K sur cette bissectrice.

Montrer que HCKB' est, si $H \neq K$, un parallélogramme.

(13) Utiliser des symétries ou des triangles isocèles.

(14) En traçant par D une parallèle à (AB) on se ramène à l'exercice (13).

(15) Remarquer la présence d'un carré de côté $\frac{d}{2}$ dans la figure.

(17) ABC est convexe.

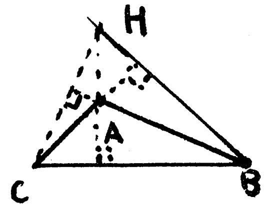
1) A',B',C' désignent les milieux de ABC.

- A'B'AB est convexe.

- ses diagonales sont sécantes.

2) D et E étant les points [BC] et [AC] situés sur les bissectrices issues de A et de B EDBA est convexe.

3)



(18) 1) (AB) $\perp$ (BP) et (AB) $\perp$ (BQ)

2) PQS et PSR sont rectangles

3) A est un orthocentre.

(19) 1)

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, mapsto, "S_{(AC)}"] \arrow[rr, bend right, "S_A"'] & H \arrow[r, mapsto, "S_{(AB)}"] & F \end{tikzcd}$$

P et Q sont deux milieux de côtés dans FHE

2) Propriété de $S_{(AB)}$ et $S_{(AC)}$

3) Projection de milieu .

(20) 1) A l'aide de $S_{(OM)}$: BM = AM, à l'aide de $S_{(O'M)}$: B'M = AM.

2) M est centre d'un cercle passant par B, A et B'

3) (OM)//(AB') et (O'M)//(AB)

4) I milieu de [OO'], (IM)//(ΔB)

C'est en fait la même figure qu'au (19).

(21) 1) D = $S_{(BC)}$ (O) : BDO est donc isocèle de deux façons,

BCO l'est également.

2) (DF) $\perp$ (OB)

3) [BA] est une médiane de BOD $\quad$ BK = $\frac{2}{3}$ BA...

4) DKH est équilatéral comme OKH (se servir de 3))

5) DA = OS = r/2

6) AF = $\frac{BD}{2}$ = r/2, AOF est équilatéral, (FR) $\perp$ (AO),

R milieu de [EF], (EF) $\perp$ (PQ), (PQ) coupe (DR) en un point J

tel que R soit le milieu de [DJ], J = S.

• • •

• •

•

CHAPITRE VIII : Quadrilatères

(1) $P \in (AB)$ ou $P \in (BC)$

(2) Comme au (1) on peut utiliser le cercle circonscrit.

(4) Construire un rectangle dans lequel A et B soient deux sommets opposés.

(5) Utiliser les droites de symétries de la figure.

(6) La figure admet un centre de symétrie.

Les diagonales du parallélogramme obtenu ont même longueur (Symétrie d'axe (AC) ou (BD)).

(7) Rechercher les éléments de symétrie de la figure.

(8) On suppose (AB)//(CD)

Soit Δ la médiatrice de [AB] : $S_\Delta(C) = D_1$, $B D_1 = AC$.

Donc D_1 convient (l'autre point D_2 situé sur (CD_1) et tel que $BD_2 = BD_1 = AC$ conduit à un parallélogramme ABD_2C qui ne vérifie pas l'hypothèse.

(9) Utiliser des parallélogrammes.

(10) Utiliser les symétries du carré et les perpendiculaires.

(11) - Le milieu de [AB] est centre de symétrie et $(AP) \perp (AQ)$

- P et Q sont des milieux.

(12) Utiliser des milieux de côtés de triangle.

Les conditions portent sur E,F,I,J.

• • •

• •

•

CHAPITRE IX : Translations.

(1) $B \in D_2$ et $B \in t_{\vec{u}}(D_1) = D'_1$

Discussion . D'_1 et D_2 sécantes

. $D'_1 = D_2$

. $D'_1 \cap D_2 = \phi$

(2) Voir (1) avec $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$

(3) $B \xmapsto{S_D} A \xmapsto{S_E} C$ et $S_E \circ S_D = t$

$D \longmapsto D \longmapsto F$

(4) 1) Les médiatrices de [BC] et [B'C'] sont les mêmes.

2) La translation $t_{\overrightarrow{A'A}}$ ramène au cas précédent.

3) C'est un cas particulier du précédent.

(5) La figure formée par un cercle $\mathcal{C}$ et deux cordes parallèles [AD] et [BC] admet un axe de symétrie Δ...de même Δ'...

On obtient deux axes Δ et Δ' parallèles .

$S_\Delta \circ S_{\Delta'}$ est une translation qui transforme (E,F) en (A,B) .

(6) Δ (et Δ') médiatrices de [AB] (et [A'B'])

$S_{\Delta'} \circ S_\Delta$ est une translation transformant (OB) en (O'B') et associant les perpendiculaires correspondantes.

(7) Utiliser des projections de milieux.

(8) Soit $E \in [DA)$ et $E \notin [DA]$

$\Delta_3 = t_{\overrightarrow{DA}}(\Delta_2)$ est bissectrice de {[AB), [AE)}

Δ_1 et Δ_3 sont les deux bissectrices de {(AB), (AD)}

$\Delta_1 \perp \Delta_3$ donc $\Delta_1 \perp \Delta_2$.

(9) Soit $D_1'' = S_{\Delta'}(D_1') = S_{\Delta'} \circ S_{\Delta}(D_1)$

$S_{\Delta'} \circ S_{\Delta} = t$ donc $D_1'' // D_1$ donc $D_1'' \perp D_2$,

donc $S_{\Delta'}(D_1'') \perp S_{\Delta'}(D_2)$

Soit $D_1' \perp D_2'$

(10) $t_{2\overrightarrow{AB}} = t_{2\overrightarrow{DC}}$ ssi $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

A,B,C,D sont les milieux des côtés d'un quadrilatère.

(11) Utiliser $S_{C'} \circ S_{B'}$ $\quad B'' \longmapsto C''$

$C \longmapsto B$

BC B"C" est alors un parallélogramme.

. . .
. .
.

CHAPITRE X : $\boxed{\text{Révisions.}}$

(1) OO'H est rectangle en H, H $\in \mathcal{C}_1(A,R)$; la figure peut être reconstruite à partir d'un point H' quelconque de $\mathcal{C}_1$ distinct de O et de O'.

(2) Utiliser les symétriques de deux droites orthogonales par rapport à des axes parallèles (IX - (9)).

(3) 1) [AH] est un diamètre de ce cerle ,

2) AOB' et B'AC sont isocèles,

(OB') et (AB') sont symétriques de (AA') et (A'C) par rapport aux médiatrices de [AB'] et [B'C] qui sont parallèles (IX - (9)).

(4) 1) Voir VI - (39)

2) ABG est rectangle en G (voir VI - (41)).

On trouve AB < 2AD

3) GEF est rectangle (comme ABG) et si I est milieu de [FE], GIF est isocèle de sommet I. Soit Δ la médiatrice de [GE].

On a Δ // (AG) et $\begin{cases} S_\Delta(DE) = (GI) \\ S_{(AG)}(DE) = (AD) \end{cases}$

Donc (GI)//(AD), ($S_\Delta \circ S_{(AG)}$ est une translation).

(5) 1) Ces tangentes sont les symétriques de la tangente en A par rapport à deux droites parallèles (VI - (11)).

2) Dans les deux cas il est facile de déterminer P puis P'.

(6) 1) Les symétriques de deux droites parallèles par rapport à des axes parallèles sont parallèles.(On se ramène par une translation au VI - (11))

2) Le centre du cercle est facile à déterminer.

(7) Problème résolu par diverses méthodes.

(8) 1) $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OA'}$. (OA') ⊥ (BC) donc (AH) ⊥ (BC).

(Traiter à part le cas A' en O : ABC rectangle en A).

De même pour les deux autres droites (BH) et (CH).

2) $t_{\overrightarrow{AH}} = t_{2\overrightarrow{OA'}} = S_{(BC)} \circ S_{\Delta}$ $\qquad A \xrightarrow{S_{\Delta}} H' \xrightarrow{S_{(BC)}} H$

3) $t_{\overrightarrow{AH}} = S_{A'} \circ S_{O}$ $\qquad A \xrightarrow{S_{O}} A_1 \xrightarrow{S_{\Delta'}} H$

A_1 est un point du cercle (A,B,C)

A' est milieu de $[A_1H]$ donc (BC) est perpendiculaire à [HH'] en son milieu.

(9) Utiliser l'exercice prédédent.

(10) 1) Montrer que A est orthocentre de $\alpha\ \beta\ B$,

α étant le point commun à (OB) et (IA),

β étant le point commun à (OA) et (JB)

2) (IO) et (OJ) sont les symétriques de (IA) et (JB) (IX - (9)).

(11) Cercle d'Euler. Droite d'Euler.

Les étapes suggérées, très détaillées permettent de traiter ce problème classique au niveau 4ème.

(12) 1) $S_D \circ S_{\Delta}$ est une symétrie centrale.

[AM] et [IB'] sont deux cordes parallèles.

2) IB = MB' = AI

(13) 1) $[AT) \xmapsto{S_\Delta} [AB) \xmapsto{S_D} [IB')$

donc (AT) // (IB') car $S_D \circ S_\Delta$ est une symétrie centrale.

2) (AO) est axe de symétrie de $\{\mathcal{C}, A, (IB')\}$ (IB') étant orthogonale à (AO).

[AI) est incluse dans le secteur saillant ([AB), [AT)) inclus dans le demi plan de bord (AB) contenant [AT).

(14) En 3ème grâce à Thalès on prouvera que $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$

On peut utiliser l'exercice (12). M est en A et (MD) coupe la médiatrice Δ de [BC] en I sur le cercle (A,B,C)

(AD) coupe [BC] en D à l'intérieur du disque (A,B,C)

(AD) coupe le cercle en A et I : $D \in [AI]$.

$I \in \Delta$ et M et C sont dans un demi-plan P_1 défini par Δ.

Donc $[AI] \subset P_1$ et par conséquent $D \in P_1$ ($P_1 = \{M, MB > MC\}$).

(Axiome de Pasch).

(15) Utiliser l'exercice (13)

(16) Utiliser l'exercice IX - (4)).

(17) Utiliser l'exercice IX - (9) et des symétries bien choisies.

. . .
. .
.