IREM - Des pistes pour travailler sur les nombres

Groupe REMSup

2022-2024

Table des matières

1 Quelques points de repère

1.1 Les nombres dans les programmes en vigueur en 2023-24

Nous nous sommes focalisés sur la place des fractions et racines carrées dans les programmes car ce sont deux écritures de nombres qui causent des difficultés au lycée, difficultés persistantes au début du supérieur. Pour plus de détails sur la place des nombres en général, nous renvoyons aux repères annuels de progression des cycles 3 [1] et cycle 4 [2].

Dès le début du cycle 3, des fractions simples (comme $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{5}{2}$) sont utilisées dans le cadre de partage de grandeurs. Puis les fractions décimales sont régulièrement mobilisées et acquièrent le statut de nombre et sont positionnées sur une droite graduée. Au début de la 6^e les fractions sont réactivées comme opérateurs de partage, puis les fractions décimales en relation avec les nombres décimaux. C'est en fin de 6^e, qui est aussi la fin du cycle 3, que les élèves apprennent que $\frac{a}{b}$ est le nombre qui multiplié par b donne a.

En ce qui concerne les techniques opératoires, la division d'un nombre décimal par un nombre entier est vue en CM2. On pourra trouver le lien entre l'algorithme de division avec « la potence » et l'écriture décimale pages 112 et 113 de la ressource pour faire la classe « Le nombre au cycle 3 apprentissages numériques » [3]. Le quotient de deux nombres décimaux (relatifs) est abordée en 4^e.

Au cycle 4, la conception d'une fraction en tant que nombre est consolidée. La comparaison et les opérations sont vues en 5^e, la définition de nombre rationnel est vue en 4^e et la notion de fraction irréductible en 3^e. Il est aussi vu en 4^e que le quotient de deux nombres décimaux, peut ne pas être un nombre décimal.

Dans le document ressource de cycle 4 « Utiliser les nombres pour comparer, calculer et résoudre des problèmes : les fractions » [4], on peut lire que

L'articulation entre nombres décimaux et fractions est renforcée afin d'assurer la maîtrise de l'écriture de position et des différentes désignations d'un nombre. Progressivement, l'élève est amené à mobiliser la « vision-nombre » de la fraction pour résoudre des problèmes, en lien notamment avec la proportionnalité, pour effectuer des calculs et des comparaisons sur les fractions et les quotients, pour exprimer une fréquence ou une probabilité, pour donner un ordre de grandeur d'un résultat.

Il est aussi indiqué que la définition du quotient $\frac{a}{b}$ *n'est pas d'accès facile*.

La racine carrée est introduite, en 4^e, en lien avec des situations géométriques (théorème de Pythagore, agrandissement des aires) et à l'appui de la connaissance des carrés parfaits de 1 à 144 et de l'utilisation de la calculatrice. Elle est utilisée en 3^e dans le cadre de la résolution de problèmes et aucune connaissance n'est attendue sur les propriétés algébriques des racines carrées, elles seront vues en seconde.

En seconde [5] les élèves rencontrent les nombres réels comme abscisses des points d'une droite graduée, et plus largement comme nombres permettant de mesurer des grandeurs et ils apprennent qu'il existe des nombres irrationnels. On trouve dans

- les capacités attendues : « associer à chaque point de la droite graduée un unique nombre réel et réciproquement » ;
- les démonstrations : « Le nombre rationnel $\frac{1}{3}$ n'est pas décimal » et « le nombre réel $\sqrt{2}$ est irrationnel » ;
- les approfondissements possibles : « développement décimal illimité d'un nombre réel » et « observation, sur des exemples, de la périodicité du développement décimal de nombres

1. https://eduscol.education.fr/document/14026/download?attachment
2. https://eduscol.education.fr/document/14080/download?attachment
3. http://cache.media.eduscol.education.fr/file/Mathematiques/44/9/NombreCycle3_web_VD_227449.pdf
4. https://eduscol.education.fr/document/17239/download
5. https://eduscol.education.fr/document/24553/download

rationnels, du fait qu'un développement décimal périodique correspond à un rationnel » .
La droite des réels est à nouveau présente en 1^e spécialité avec l'enroulement de la droite sur le cercle trigonométrique et l'image d'un nombre réel.

Au niveau post-bac la construction des nombres réels, lorsqu'elle est faite, l'est souvent à l'aide des développements décimaux illimités. On pourra par exemple consulter « Mathématiques Tout-en-un pour la Licence 1 » de Ramis, Warusfel et Buff, édition Dunod.
La construction de $\mathbb{R}$ est explicitement hors programme en classe préparatoire 1^e année MPSI.

Les nombres complexes ne sont vus en terminale que dans l'option mathématiques expertes de terminale générale et la spécialité de STI2D. Il est attendu des élèves de l'option mathématiques expertes, qu'ils sachent passer de la forme algébrique d'un nombre complexe à sa forme trigonométrique ou exponentielle et inversement ; qu'ils sachent effectuer des calculs sur des nombres complexes en choisissant une forme adaptée.

1.2 Quelques articles

On trouve de nombreux articles sur les nombres, nous présentons ici des textes s'intéressant plus spécifiquement à

- **la conception des réels par des élèves et étudiants :**
  Le concept de nombre réel au lycée et en début d'université : un objet problématique. Vergnac Martine ; Durand-Guerrier Viviane. Petit x. N° 96. p. 7-28 (2014).
  https://publimath.fr/numerisation/IPX/IGR14022/IGR14022.pdf
  Dans cet article des constats concernant l'identification de la nature d'un nombre avec son écriture, la non perception du « continu », qui sont toujours d'actualité bien que datant de plus de dix ans.
- **le repérage sur la droite numérique :**
  Le repérage au collège et au lycée : des enjeux d'apprentissage au croisement des cadres numérique, géométrique, algébrique et fonctionnel (deuxième partie). Cerclé Véronique ; Chesnais Aurélie ; Destribats Aurélien ; Dutaut Sophie ; Gosselin Emeric ; Leberre Jérôme ; Nyssen Louise. Petit x. N° 115. p. 29-63 (2021).
  https://publimath.fr/numerisation/IPX/IGR21015/IGR21015.pdf
  A l'occasion d'un travail autour du thème de la notion d'équation le groupe, de l'IRES de Montpellier, a mené une réflexion sur la notion de repérage dont la droite graduée. Il y est en particulier montré que la construction de la droite graduée ne peut être considérée comme évidente et que la mise en bijection entre des ensembles de nombres et de points est un important enjeu d'apprentissage.
- **de nouvelles pratiques pour l'introduction des irrationnels dans l'enseignement belge :**
  L'introduction des nombres irrationnels dans l'enseignement secondaire belge francophone - une étude du discours des enseignants. Bridoux Stéphanie ; Derobertmasure Antoine ; De Val Simon. Petit x. N° 113. p. 4-30 (2020).
  https://publimath.fr/numerisation/IPX/IGR20014/IGR20014.pdf
  On pourra y lire, en particulier, un point sur la pratique française concernant l'introduction des irrationnels et des constats sur la conception de nombre.

2 Problèmes identifiés

2.1 Fractions et racines au lycée et en début de post-bac

La compréhension de l'écriture fractionnaire est un problème généralisé au lycée qui continue en L1 : $\frac{u}{3}$ n'est pas vu comme $\frac{1}{3} \times u$, dès que c'est possible les élèves et étudiants se ramènent à l'écriture décimale d'un nombre (un décimal est « plus un nombre » qu'une fraction).
La racine carrée est une boite noire, elle est considérée comme une opération et non comme un nombre et beaucoup d'étudiants en début d'université ne savent pas en donner une définition. La définition de la fonction de référence racine ainsi que les propriétés algébriques sont survolées en seconde. En terminale il y a peu de calculs de limites avec une racine, en revanche, on peut profiter des simplifications par la calculatrice lors du calcul du discriminent ou de transformations du type $\frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ pour la retravailler un peu.

2.2 Confusions entre nombres et divers objets mathématiques

On donne ci-dessous quelques affirmations fausses (certifiées réelles) résultant possiblement de confusions entre nombres et divers objets mathématiques.
Elles ont été le point de départ des tests présentés dans le paragraphe 8

Confusions entre entiers et rationnels

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![1, n-1]\!]$. Alors $\binom{n}{k} = n \times \frac{(n-1)!}{k!(n-k)!}$ donc n divise $\binom{n}{k}$.
  Note : l'affirmation est souvent faite lorsque n est un nombre premier, le résultat est alors juste...
- La fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ n \mapsto 2n$ est bijective.

Confusions entre entiers et réels

- Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La fonction $t \mapsto t^\alpha$ est polynomiale.
- Pour tout $\delta \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\delta = \frac{1}{n}$.
- Soit une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+1) = f(x)$. Alors f est constante.
- Soit une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+1) \geqslant f(x)$. Alors f est croissante.

Confusions entre réels et complexes

- Soit $(x, y) \in \mathbb{C}^2$. Si $x^2 + y^2 = 0$ alors $x = y = 0$.

Confusions entre réels et matrices

- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 + A = I_n$. Alors $A^{-1} = A + 1$.
- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tels que $AX = 0$. Alors A est nulle ou X est nul.
- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour trouver une matrice B telle que $B^2 = A$, on prend $B = A^{1/2}$.
- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. La série $\sum_{k \geqslant 0} (-1)^k A^k$ converge d'après le critère spécial des séries alternées.

Confusions entre réels et ensembles

- Pour deux évènements A et B incompatibles, $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) \cup \mathrm{P}(B)$.

3 Différentes écritures des nombres

3.1 Au lycée : niveau seconde

Exercice 1. Combien y a t-il de nombres différents dans le cadre ci-dessous ?

$A = 1 + \frac{1}{2}$	$B = 2 \times 3,9 - 9 \times 0,7$	$C = \frac{17}{6} - \frac{4}{3}$
$D = (-5-7) \div (1 - 3 \times 3)$	$E = \dfrac{25 \times 10^8 \times 3 \times 10^{-5}}{5 \times 10^4}$	$F = \frac{72}{48}$

Note : a pour objectifs de préciser ce qu'est un nombre, de distinguer nombre et chiffre, d'arriver au fait qu'un nombre peut avoir plusieurs écritures, de revoir les règles de calcul.

Exercice 2. Comment regrouperiez-vous ces différents nombres ?

$A = \frac{17}{6} - \frac{1}{2} \times 3$	$B = \dfrac{13 \times 10^7 \times 2 \times 10^2}{2 \times 10^{10}}$	$C = 2 \times \frac{2}{3}$
$D = (1,7 + 2,4) - (3 \times 0,8 + 0,4)$	$E = (11 - 3 \times 5) \div (9 - 3 \times 4)$	$F = \dfrac{2 + \frac{1}{3}}{2 - \frac{1}{4}}$

Note : a pour objectifs de travailler le fait qu'un nombre peut avoir plusieurs écritures, les règles de calcul, la notion de nombre rationnel et $\frac{4}{3} \neq 1,3$.

Exercice 3. (extrait de : Racine carrée de 5 existe t-elle ?, Bodin Nathalie ; Garnier Etienne ; Jegourel Catherine ; Masmoudi Mohamed ; Robert Guy ; Ruamps Françoise. IREM de Rennes (2001))
https://publimath.fr/biblio/IRN02008.htm
Les nombres $A = \frac{6406}{85555}$, $B = \frac{104561}{1396459}$ et $C = 0.0748758109$ sont-ils égaux ?
Note : a pour objectifs de travailler sur rationnels et décimaux, de revoir le cas de fractions égales.

Exercice 4. On considère les équations suivantes :
(a) $3x + 2 = 14$; (b) $7x - 3 = 5$; (c) $x + 7 = 2$; (d) $x^2 = 9$; (e) $x^2 = 2$.

1. Résoudre ces équations dans $\mathbb{N}$.
2. Résoudre ces équations dans $\mathbb{Z}$.
3. Résoudre ces équations dans $\mathbb{Q}$.
4. Résoudre ces équations dans $\mathbb{R}$.

Note : niveau seconde, a pour objectifs de travailler les ensembles de nombres et de résoudre des équations élémentaires.

Exercice 5. Droite graduée en seconde pour placer des rationnels et des racines carrées d'entiers.
Note : c'est l'occasion de revoir les théorèmes de Pythagore et Thalès.

3.2 A la liaison lycée-post bac

Exercice 6.

Travail à faire sans calculatrice

Un même nombre peut avoir plusieurs écritures, par exemple $2 = 3 - 1 = \frac{14}{7} = \sqrt{4}$.
Dans l'exercice qui suit on va demander d'identifier toutes les écritures d'un même nombre.
Par exemple pour

☐ $\frac{14}{7}$ ☐ $3 - 1$ ☐ $\sqrt{2} + \sqrt{2}$
☐ $-3 + 1$ ☐ $\sqrt{4}$

on répondra

☒ $\frac{14}{7}$ ☒ $3 - 1$ ☐ $\sqrt{2} + \sqrt{2}$
☐ $-3 + 1$ ☒ $\sqrt{4}$

De la même manière, identifier toutes les écritures qui représentent un même nombre, il n'y a à chaque fois qu'un seul nombre pour lequel a été donné différentes écritures.

1.
☐ $\sqrt{5} + \sqrt{5}$ ☐ $\sqrt{10} + \sqrt{10}$ ☐ $2\sqrt{5}$ ☐ $\dfrac{1}{\frac{1}{\sqrt{20}}}$
☐ $\sqrt{2} \times \sqrt{10}$ ☐ $\sqrt{20}$ ☐ $\frac{\sqrt{20}}{20}$ ☐ $\frac{20}{\sqrt{20}}$

2.
☐ $\frac{8}{6}$ ☐ $1,333$ ☐ $\frac{4}{3} + \frac{4}{3}$ ☐ $\dfrac{1}{\frac{3}{4}}$
☐ $\dfrac{1 + \frac{2}{3}}{\frac{7-2}{4}}$ ☐ $-3 \times (-\frac{4}{9})$ ☐ $\frac{2^2}{3}$ ☐ $\left(\frac{2}{3}\right)^2$

3.
☐ $\ln(5) - \ln(4)$ ☐ $\ln\left(\frac{5}{4}\right)$ ☐ $\ln(1,25)$ ☐ $\frac{1}{2}\ln(5)$
☐ $\sqrt{\ln\left(\frac{25}{16}\right)}$ ☐ $\ln(20)$ ☐ $\ln(5) - 2\ln(2)$ ☐ $\frac{\ln(5)}{\ln(4)}$

4.
☐ $1 - 2 \times 3^2$ ☐ $(1 - 2) \times 3^2$ ☐ $1 - (2 \times 3)^2$ ☐ $-\frac{6}{5} \times \frac{15}{2}$
☐ $\sqrt{(-9)^2}$ ☐ $\dfrac{(-14)^5 \times (-3)^8}{4^2 \times 21^5} \times \frac{1}{6}$ ☐ $-\sqrt{5^2 + 4^2}$ ☐ $-\sqrt{81}$

Note : des difficultés de calcul telles que reconnaitre $25 = 5^2$, $16 = 4^2$, $21 = 3 \times 7$ peuvent avoir un impact sur la réussite de ce type d'exercices. Il pourrait être intéressant de proposer un même exercice en version numérique et en version avec variables afin de voir s'il y a une différence de réussite.

3.3 En post-bac

Exercice 7.

1. $\sqrt{1,21}$ est-il décimal, rationnel, irrationnel, autre ?
   Note : la calculatrice donne $1,1$, on peut questionner sur valeur exacte ou approchée ce qui oblige à revenir à la définition de racine.
2. $\dfrac{2^{64} - 1}{2^{32} + 1}$ est-il entier, décimal, rationnel, irrationnel, autre ?
   Note : ici aussi le résultat est donné par la calculatrice mais il ne faut pas s'arrêter à l'écriture du nombre.

3. Donner une autre écriture de $A = 1,\overline{2}$; $B = 2,\overline{8}$; $C = 1,\overline{2} + 2,\overline{8}$.
   `Réponses` : $A = \dfrac{11}{9}$; $B = \dfrac{26}{9}$; $C = \dfrac{37}{9} = 4,\overline{1}$
   Voici deux exemples de méthodes de calcul possibles pour A.
   - *Sans se préoccuper de l'existence de A : $10A = 12,\overline{2} = 11 + A$ donc $A = \dfrac{11}{9}$.*
   - *En utilisant la définition de A et la somme d'une série géométrique :*
     $A = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{10^k} = 1 + \dfrac{2}{10}\dfrac{1}{1-\frac{1}{10}} = 1 + \dfrac{2}{9} = \dfrac{11}{9}$.

   Note : on peut faire le calcul « avec les mains » pour la somme C « la retenue se reporte depuis l'infini »
4. Que valent $2,\overline{8} \times 2$; $2,\overline{78} \times 2$; $2,\overline{8}/3$?
   `Réponses` : $5,\overline{7} = \dfrac{52}{9}$; $5,\overline{57} = \dfrac{552}{99}$; $0,\overline{962} = \dfrac{962}{999}$.
   Note : on peut à nouveau faire le calcul « avec les mains » pour les deux premiers « la retenue se reporte depuis l'infini » ; plus dur pour le dernier, les premières divisions permettent de voir la périodicité.

4 La racine carrée

4.1 Des activités et exercices numériques

4.1.1 Activité - Doubler l'aire du carré de côté 1 : introduire la notion de racine carrée

On considère un carré de côté 1 dm. Trouver le côté du carré dont l'aire est le double de celle du carré de départ.

Note : proposé en seconde
Cette situation historique et classique est utilisée pour introduire la notion de racine carrée ; elle peut prendre différentes formes : narration de recherche, travail de groupe ...
En seconde elle est l'occasion de revoir rapidement les différents types de nombres déjà rencontrés au collège et de montrer en quoi les équations sont des grandes pourvoyeuses de nombres. Le déroulement en classe est très proche de ce que Platon décrit dans son dialogue « Le Ménon » dans lequel Socrate pose la même question à un esclave, pour prouver que tous les hommes, même les esclaves, ont un savoir en eux, et qu'ils peuvent s'en souvenir.
Comme l'esclave, les élèves commencent par doubler le côté du carré de départ. Ils appliquent le modèle implicite de la proportionnalité entre la longueur du côté et l'aire du carré. Après avoir calculé l'aire de ce nouveau carré, ils se rendent compte de leur erreur.
En seconde les élèves arrivent rapidement à la résolution de l'équation $x^2 = 2$ et proposent donc comme réponse $x = \sqrt{2}$. La discussion s'amorce donc sur la nature de ce nombre.
Pour certains élèves est égal à $1,41$. Le professeur rappelle alors la définition de $\sqrt{a}$ avec $a \geq 0$:

A retenir : $a \geq 0$, $\sqrt{a}$ est le nombre positif tel que $(\sqrt{a})^2 = a$.

Par définition $(\sqrt{a})^2 = a$. On peut montrer de façon similaire à ce qui est fait dans le tableau ci-dessous que si $\sqrt{a}$ est un nombre décimal le carré du dernier chiffre de sa partie décimale est donc un multiple de 10. Ce qui n'est vrai que pour 0 donc $\sqrt{a}$ n'a pas d'écriture décimale.
Le professeur demande alors aux élèves si $\sqrt{a}$ a une écriture fractionnaire. Les avis sont partagés et le professeur se lance dans la démonstration :

On suppose que ce nombre est une fraction donc il existe une écriture de la forme $\frac{a}{b}$ *où* a *et* b *sont des nombres entiers (*$b \neq 0$*) qui n'ont pas de diviseur commun. On s'intéresse alors au chiffre des unités de ces nombres . Si* $\frac{a}{b}$ *est le nombre cherché alors* $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2$ *donc* $a^2 = 2b^2$.

Chiffre des unités de a	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*
Chiffre des unités de b	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*
Chiffre des unités de a^2	*0*	*1*	*4*	*9*	*6*	*5*	*6*	*9*	*4*	*1*
Chiffre des unités de b^2	*0*	*1*	*4*	*9*	*6*	*5*	*6*	*9*	*4*	*1*
Chiffre des unités de $2b^2$	*0*	*2*	*8*	*8*	*2*	*0*	*2*	*8*	*8*	*2*

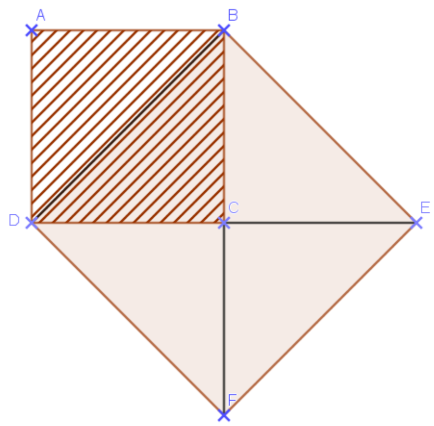
Les seules possibilités pour que $a^2 = 2b^2$ *sont donc que* a *se termine par 0 et* b *se termine par 0 ou 5 mais alors* a *et* b *seraient divisibles par 5 ce qui est en contradiction avec ce qu'on avait supposé pour la fraction* $\frac{a}{b}$.

Le professeur rappelle aux élèves que puisque $\sqrt{2}$ n'a ni une écriture décimale ni une écriture fractionnaire, les mathématiciens ont été amenés à créer des « nouveaux nombres » : les racines carrées.

Note : Ne nous étonnons pas cependant que ces nombres mettent du temps à acquérir leur statut dans la tête de nos élèves. En effet la première représentation connue de ce nombre date du II-ème millénaires avant JC sur une tablette babylonienne. Les pythagoriciens (V° siècle av JC) ont démontré qu'il n'existe aucun nombre rationnel dont le carré est 2. Pour eux c'était une véritable remise en cause et ils refusèrent de les nommer « nombres » et travaillèrent sur les seules grandeurs géométriques. Il fallut attendre Diophante (env 200-214 ; env 284-298) pour que $\sqrt{2}$ *prenne le statut de nombre.*

Remarque : Une autre variante de cette activité est de faire travailler les élèves en binôme après leur avoir distribué deux carrés de côté 1dm. Ils ont alors une approche plus géométrique et essaient assez vite de faire un seul carré avec les deux carrés.

Ils découpent les deux carrés selon une diagonale et obtiennent le résultat suivant.



Il s'agit alors de déterminer la longueur du côté de ce carré.

On trouvera dans le paragraphe 7 une approche géométrique pour montrer l'irrationnalité de $\sqrt{2}$.

4.1.2 Activité - Irrationalité de $\sqrt{2}$

(extrait de : Racine carrée de 5 existe t-elle ?, Bodin Nathalie ; Garnier Etienne ; Jegourel Catherine ; Masmoudi Mohamed ; Robert Guy ; Ruamps Françoise. IREM de Rennes (2001))

https://publimath.fr/biblio/IRN02008.htm
Note : proposé en seconde
Objectif : attention aux valeurs approchées, irrationalité de $\sqrt{2}$.

1. Les nombres $\frac{665857}{470832}$ et $\sqrt{2}$ sont-ils égaux ?
   Remarque : avec 11 chiffres significatifs on trouve avec la calculatrice que ces nombres sont égaux.
   On peut prouver le contraire en utilisant : $\frac{p}{q} = \sqrt{2}$ si et seulement si $\frac{p^2}{q^2} = 2$ et $p^2 = 2q^2$.
   $665857^2 = 443365544449$, se termine par 9 ne peut donc pas être un nombre pair.
2. Existe-t-il une fraction irréductible $\frac{a}{b}$ tel que $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$?

Chiffre des unités de a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Chiffre des unités de b	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Chiffre des unités de a^2										
Chiffre des unités de b^2										
Chiffre des unités de $2b^2$										

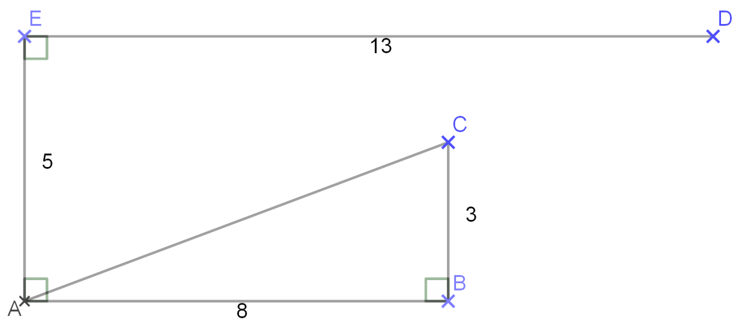
4.1.3 Activité - Valeurs exactes

1. On se place dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère les points $A(0,5;1,5)$, $B(-3;3)$ et $C(-0,5;0,5)$. Le triangle ABC est-il rectangle ? Justifier.
2. On se place dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère les points $A(9;8)$, $B(12;4,5)$ et $C(15;7)$. Le triangle ABC est-il rectangle ? Justifier.

Notes : Bien que l'on puisse travailler uniquement avec les carrés, beaucoup d'élèves passent par l'intermédiaire d'une racine carrée pour le calcul de la distance.
Dans le 1er cas, ABC est rectangle et dans le 2ème cas, il n'est pas rectangle.
Dans les deux cas, la conservation de la valeur exacte est indispensable pour conclure.

4.1.4 Activité - Des points alignés ?

Les points A, C et D sont-ils alignés ?



Notes : Selon la méthode utilisée pour résoudre cet exercice (calcul de longueurs, proportionnalité, angles, géométrie repérée) l'élève peut être tenté de ne pas travailler avec les valeurs exactes, ce qui est indispensable pour conclure.

4.1.5 Exercices de calcul avec les racines carrées

Exercice 8.

1. Vérifier que $\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}} = \sqrt{7}+\sqrt{6}$.
2. Ecrire $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ avec un entier au dénominateur.
3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, écrire $\frac{1}{\sqrt{n}}$ avec un entier au dénominateur.

Exercice 9. (extrait de Terracher seconde) :
Montrer que

1. $\left((\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-5\right)^2 = 24$.
2. Vérifier chacune des égalités suivantes
   (a) $\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}} = \sqrt{10}$;
   (b) $\sqrt{4+\sqrt{7}}+\sqrt{4-\sqrt{7}} = \sqrt{14}$;
   (c) $\sqrt{5+\sqrt{21}}+\sqrt{5-\sqrt{21}} = \sqrt{14}$.
3. Calculer (lorsqu'il existe) le carré de
$$\sqrt{a+\sqrt{a^2-b^2}}+\sqrt{a-\sqrt{a^2-b^2}}.$$
   En déduire comment a été conçue la question précédente.

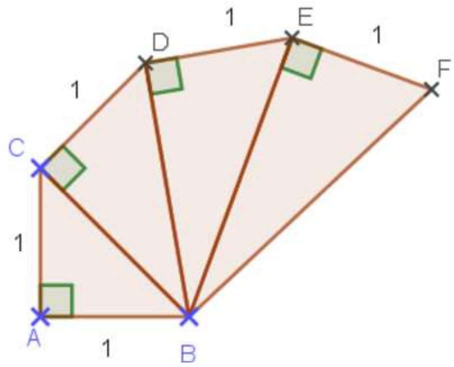
Note : au niveau post bac on peut demander de déterminer les conditions sur a et b pour que les expressions ci-dessus soient bien définies.

4.2 Des activités ayant un support géométrique

4.2.1 Activité - $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a}+\sqrt{b}$

Note : proposé en seconde

1. On considère la figure ci-contre. Calculer BC, BD, BE et BF.



2. Tracer à l'aide d'une règle et d'un compas un rectangle $MATH$ tel que $MA = \sqrt{3}+\sqrt{2}$ et $MH = \sqrt{3}-\sqrt{2}$.
   Notes :
   - *Il est nécessaire de rappeler que l'unité utilisée est la longueur AB.*
   - *Certains élèves construisent un rectangle de dimension $\sqrt{5}$ et 1. C'est tout l'intérêt de l'activité pour arriver à $\sqrt{3}+\sqrt{2} \neq \sqrt{5}$ et $\sqrt{3}-\sqrt{2} \neq 1$. On le démontre en utilisant $(a+b)^2$.*

4.2.2 Activité - Des aires et des longueurs

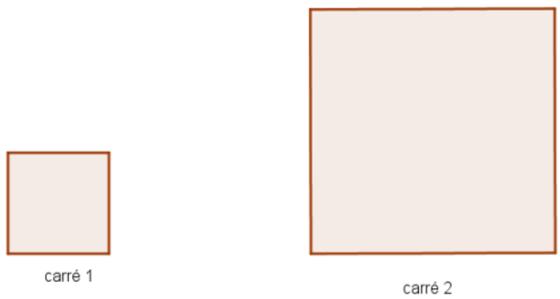
(d'après : La racine carrée en troisième - Etude d'une activité, Eric Roditi. IREM de Paris (1996))
https://publimath.fr/IPS96012

Note : proposé en seconde

Objectifs :

- travailler et introduire les propriétés algébriques des racines carrées : $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$ et $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$;
- rendre utile l'écriture de la racine carrée au détriment de sa valeur approchée ;
- donner aux racines carrées le statut de nombres.

Dans les questions qui suivent on s'intéresse au carré 1 et au carré 2.



1. Le carré 1 a pour aire 9 et le carré 2 a pour aire 144. Déterminer le rapport des longueurs des côtés des deux carrés.
   Note : Cette question permet de rappeler que si les longueurs sont multipliées par k, les aires sont multipliées par k^2. Les élèves peuvent procéder de différentes façons :
   - *calculer les longueurs des côtés : 3 et 12 puis calculer le rapport ;*
   - *calculer le rapport des aires et en déduire celui des longueurs.*

   On arrive à l'écriture : $\frac{\sqrt{144}}{\sqrt{9}} = \sqrt{\frac{144}{9}}$.
2. Compléter le tableau suivant

	Rapport des longueurs	Rapport des aires
Exemple 1	4	16
Exemple 2	5	
Exemple 3		49
Exemple 4		2

   Objectif : si les aires sont multipliées par A, les longueurs sont multipliées par $\sqrt{A}$.
3. Le carré 1 a pour aire 5. Son aire est multipliée par 3 pour obtenir le carré 2. Quelle est la longueur du côté du carré 2 ?
   Les élèves peuvent procéder de différentes façons :
   - *calculer les aires : 5 et 15 donc la longueur du côté du carré 2 est $\sqrt{15}$;*
   - *les longueurs sont multipliées par $\sqrt{3}$ donc la longueur du côté du carré est $\sqrt{5} \times \sqrt{3}$;*
   - *utiliser les valeurs approchées : 2,24 pour le côté du carré 1 , 1,73 pour $\sqrt{3}$ et donc 3,8752 pour le côté du carré 2.*

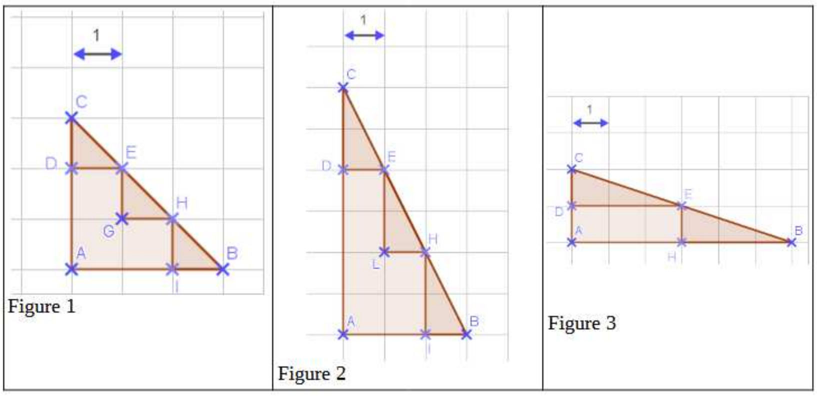
   On arrive à l'écriture $\sqrt{5} \times \sqrt{3} = \sqrt{15}$.
   Question : est-ce que $\sqrt{15} = 3,8752$?
4. Le carré 1 a pour côté 3 et les aires sont multipliées par 2. Quelle est la longueur du côté du carré 2 ?
   Les élèves peuvent procéder de différentes façons :
   - *calculer les aires : 9 et 18 donc la longueur du côté du carré 2 est $\sqrt{18}$;*
   - *les longueurs sont multipliées par $\sqrt{2}$ donc la longueur du côté du carré est $\sqrt{2} \times 3$;*

   On arrive à l'écriture $\sqrt{18} = \sqrt{2} \times 3$ que l'on peut justifier.
5. Cette fois-ci le carré 1 a pour aire 7 et le carré 2 a pour aire 35. Déterminer le rapport des longueurs des côtés des deux carrés .

On arrive à $\sqrt{5} = \frac{\sqrt{35}}{\sqrt{7}}$ *soit* $\frac{\sqrt{35}}{\sqrt{7}} = \sqrt{\frac{35}{7}}$.
Des élèves vont passer par les valeurs approchées et écrire $\sqrt{35} \simeq 5,9$ *et* $\sqrt{7} \simeq 2,6$. *On a alors* $\frac{5,9}{2,6} \simeq 2,3$. *Si on revient aux aires, elles seraient multipliées par* $2,3^2 = 5,29 \neq 5$.

4.2.3 Activité - Des hypoténuses

D'après : Les racines carrées au collège, Gimmillaro Martine ; Maurel Catherine ; Régnard Annick ; Sempere Fabienne ; Tiha Claude ; André Bernard. IREM de Lorraine (1998)
https://publimath.fr/IL098003
Note : proposé en seconde
Dans chaque cas, déterminer de deux façons différentes la longueur du segment $[BC]$.



Objectif : travailler $\sqrt{a^2 b} = a\sqrt{b}$ *avec* a *et* b *deux réels positifs.*

4.3 Approches historiques pour l'irrationalité de $\sqrt{2}$

4.3.1 L'irrationnalité de $\sqrt{2}$ en classe de seconde : du doute à la démonstration

C'est le chapitre 3 de l'ouvrage « Vivre les mathématiques par des approches historiques » coordonné par Frédéric Laurent et la Commission Inter-IREM Epistémologie et histoire des mathématiques, éditions Adapt-SNES.
Des compléments numériques sont disponibles sur le site compagnon
https://www.univ-irem.fr/chapitre-3-l-irrationnalite-de-%E2%88%9A2-en-classe-de-seconde-du-dc

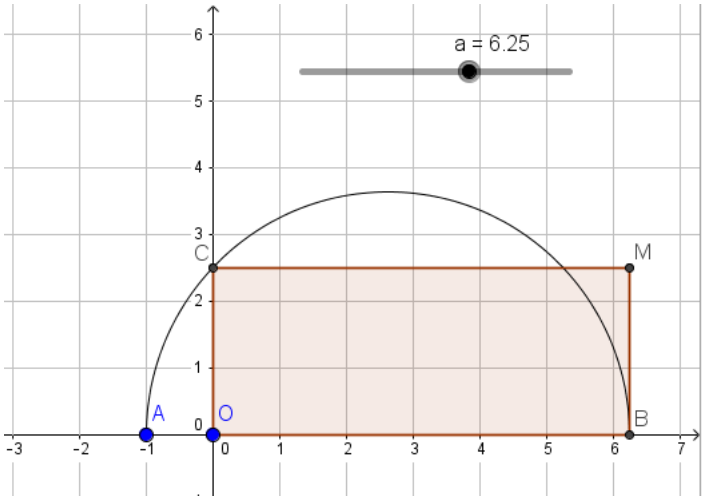
4.3.2 Suite de Héron et plus largement la méthode de Newton

On peut par exemple en trouver une exploitation dans le chapitre 11 de l'ouvrage « Vivre les mathématiques par des approches historiques » coordonné par Frédéric Laurent et la Commission Inter-IREM Epistémologie et histoire des mathématiques, éditions Adapt-SNES.

4.4 Approches historiques pour la courbe représentative de la fonction racine

Exercice 10. Introduire la fonction racine carrée : distances dans un demi-cercle (D'après Descartes dans son livre « la géométrie » en 1637).
Dans un repère orthonormé (O, I, J) on considère les points $A(-1; 0)$ et $B(a; 0)$ où a est un réel variant de 0 à 10. On trace dans le demi-plan des ordonnées positives le demi-cercle de diamètre $[AB]$ et on appelle C le point d'intersection de ce demi-cercle avec l'axe des ordonnées. On construit

le point M tel que $OBMC$ soit un rectangle.
Sélectionner la trace du point M. De quelle fonction le point M décrit-il la courbe représentative ?



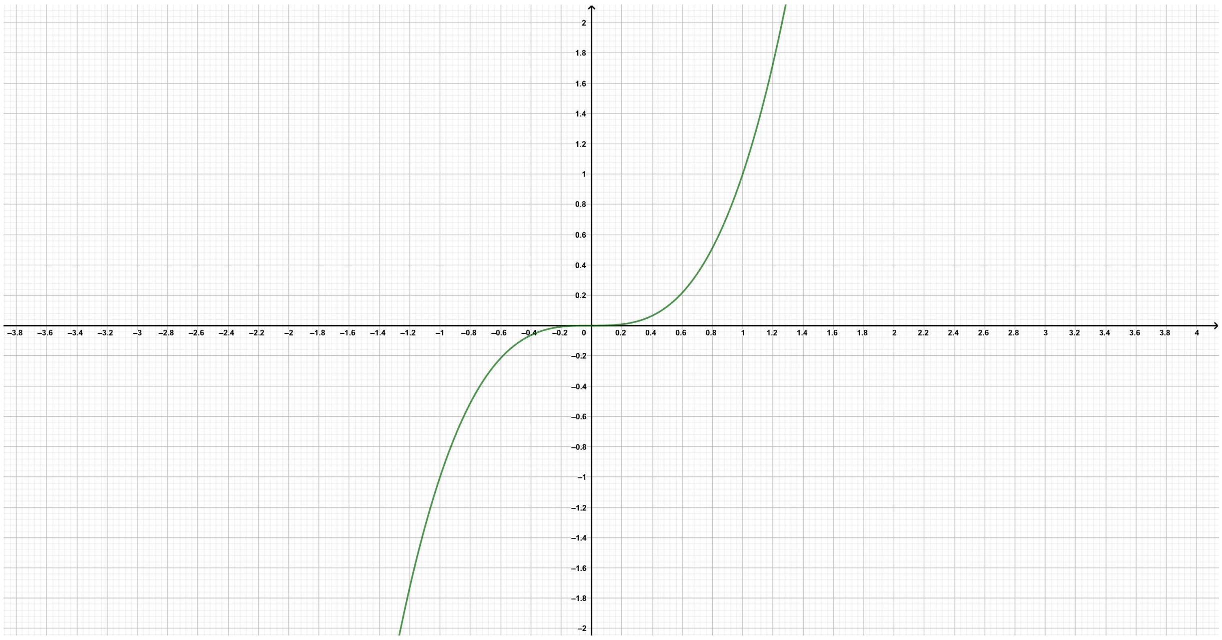
- 1ère solution :
  On note y l'ordonnée du point C, dans le triangle OBC on a $BC^2 = a^2 + y^2$, dans le triangle AOC on a $AC^2 = y^2 + 1$.
  C est un point du cercle de diamètre $[AB]$ donc ABC rectangle en C.
  Dans le triangle ABC, on a $AB^2 = AC^2 + BC^2$ donc
  $$(a+1)^2 = a^2 + 1 + 2y^2 \Leftrightarrow 2a = 2y^2 \Leftrightarrow y = \sqrt{a}$$
  donc $M(a; \sqrt{a})$, M décrit donc la courbe représentative de la fonction racine carrée.
- 2ème solution :
  Dans le triangle OBC, $\widehat{OCB} + \widehat{OBC} = 90°$ or $\widehat{OBC} = \widehat{ABC}$ donc $\widehat{OCB} + \widehat{ABC} = 90°$.
  C est un point du cercle de diamètre $[AB]$ donc ABC rectangle en C.
  D'où $\widehat{BAC} + \widehat{ABC} = 90°$ or $\widehat{BAC} = \widehat{OAC}$ et donc $\widehat{OAC} + \widehat{ABC} = 90°$.
  Donc $\widehat{OAC} = \widehat{OCB}$.
  Dans le triangle AOC, $\tan \widehat{OAC} = \frac{OC}{OA} = OC$.
  Dans le triangle $0BC$, $\tan \widehat{OCB} = \frac{OB}{OC}$.
  On en déduit que
  $$OC = \frac{OB}{OC} \Leftrightarrow OB = OC^2 \Leftrightarrow OC = \sqrt{OB}.$$
  On a donc $M(a, \sqrt{a})$.

Des compléments sur l'allure de la courbe représentative de la fonction racine en partant de la méthode d'extraction de la racine de Descartes seront disponibles dans un document (à venir) du groupe Histoire et maths de l'IREM d'Aquitaine.

5 Des exercices d'approfondissement

5.1 Une nouvelle fonction

Exercice 11.
On a tracé la représentation graphique de la fonction cube dans un repère orthonormé.



1. Déterminer graphiquement une solution approchée de $x^3 = a$ pour a prenant les valeurs suivantes

$a =$	0,1	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2	1,4	1,8
$x \simeq$									

La valeur exacte de la solution de $x^3 = a$ est appelée *racine cubique* de a et est notée $\sqrt[3]{a}$.
2. Sur le graphique, placer les points de coordonnées $(a, \sqrt[3]{a})$ pour a prenant les valeurs de la question précédente.
3. Compléter pour d'autres valeurs de a et en déduire l'allure de la représentation graphique de la fonction racine cubique.
4. Soient a et b deux réels positifs,
   (a) démontrer que $\sqrt[3]{a \times b} = \sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{b}$;
   (b) a t-on $\sqrt[3]{a+b} = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$?
5. Vérifier que pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$, $e^{\frac{1}{3}\ln(a)}$ est solution de $x^3 = a$. On définit ainsi $a^{\frac{1}{3}}$ pour $a > 0$.
6. En calculant $((-1)^2)^{\frac{1}{6}}$ expliquer pourquoi on ne peut pas adopter la notation $(-1)^{\frac{1}{3}}$ pour $\sqrt[3]{-1}$.
7. On fixe deux réels, $0 < a < b$. Justifier que $\frac{1}{\sqrt{b}-\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{b}+\sqrt{a}}{b-a}$. A t-on $\frac{1}{\sqrt[3]{b}-\sqrt[3]{a}} = \frac{\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{a}}{b-a}$?

5.2 Nature des nombres et calcul

Exercice 12. Montrer qu'il n'existe pas de rationnel dont le cube est égal à 4.

Exercice 13. Soit $E = \{p + q\sqrt{2}\ ,\ (p,q) \in \mathbb{Q}^2\}$

1. Montrer que pour tout $(x,y) \in E^2$, $x - y$ et $x \times y$ sont des éléments de E.
2. Montrer que pour tout $(p,q) \in \mathbb{Q}^2$, $p + q\sqrt{2} = 0$ équivaut à $p = q = 0$.
3. Montrer que pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, $\dfrac{1}{x} \in E$.
4. Quels sont les résultats des questions précédentes qui sont encore vrais si on remplace $\mathbb{Q}$ par
   (a) $\mathbb{Z}$?

(b) $\mathbb{R}$?

Note : L'ensemble E est l'extention de corps $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ et les démarches calculatoires pour montrer la stabilité de l'addition et de la multiplication ainsi que la recherche d'inverse sont analogues à celles pratiquées dans $\mathbb{C}$.

Exercice 14. Irrationnalité de $\sqrt{3}$

On suppose qu'il existe deux entiers positifs p et q tels que $\sqrt{3} = \dfrac{p}{q}$.

1. Montrer qu'alors $3\dfrac{q}{p} = \dfrac{p}{q}$ puis que $\dfrac{3q-p}{p-q} = \dfrac{p}{q}$.
2. Montrer que $0 < 3q - p < p$ et $0 < p - q < q$ (on pourra remarquer que $\frac{9}{4} < 3 < 4$).
3. En déduire qu'il ne peut pas exister deux entiers positifs p et q tels que $\sqrt{3} = \dfrac{p}{q}$.

5.3 Curiosité sur un développement décimal illimité

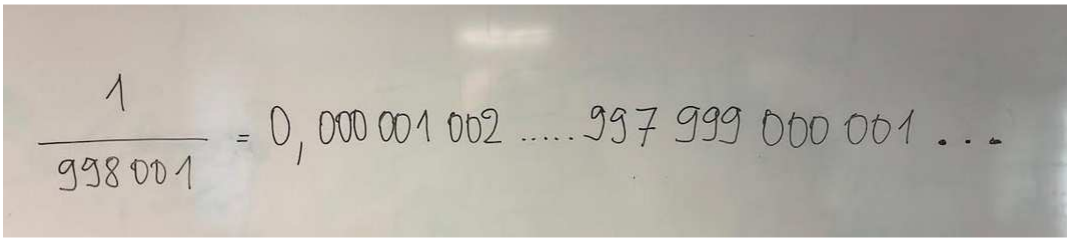


FIGURE 1 – Dans une salle de classe d'un lycée de Nouvelle-Aquitaine

`Constat :` Absence du nombre 998 dans l'écriture décimale de $\dfrac{1}{998001}$.

`Certitude :` L'écriture décimale d'un nombre rationnel est périodique (au moins à partir d'un certain rang dans l'écriture décimale).

`Pistes pour une explication :` $\dfrac{1}{998001} = \dfrac{1}{999^2} = \dfrac{1}{(1000-1)^2} = \dfrac{10^{-6}}{(1-10^{-3})^2} = 10^{-6} \times \dfrac{1}{(1-10^{-3})^2}$.

On devine la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{(1-x)^2}$, développable en série entière (avec un rayon de convergence de 1) et son développement est

$$\forall x \in]-1;1[, \quad \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} k x^{k-1}$$

Avec, pour tout x vérifiant $|x| < 1$, $f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k$ et le théorème de dérivation « terme à terme » de la série pour exprimer la dérivée de la fonction somme, on obtient le résultat précédent. Mais là n'est pas le sujet.

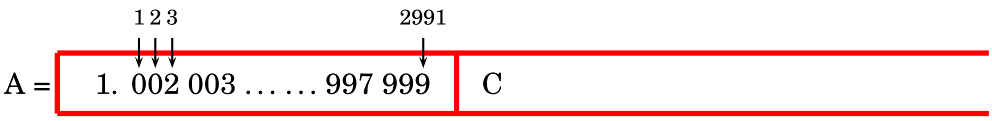
Avec $x = 10^{-3}$, on peut écrire que :

$$A = \frac{1}{(1-10^{-3})^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} k(10^{-3})^{k-1} = \sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)10^{-3k}$$
$$= \sum_{k=0}^{996}(k+1)10^{-3k} + \underbrace{998 \times 10^{-2991} + 999 \times 10^{-2994} + 1000 \times 10^{-2997}}_{=B} + \underbrace{\sum_{k=1000}^{+\infty}(k+1)10^{-3k}}_{=C}$$

$$\begin{aligned}
B &= 998 \times 10^{-2991} + 999 \times 10^{-2994} + 1000 \times 10^{-2997} \\
&= 998 \times 10^{-2991} + 999 \times 10^{-2994} + 10^3 \times 10^{-2997} \\
&= 998 \times 10^{-2991} + 999 \times 10^{-2994} + 10^{-2994} \\
&= 998 \times 10^{-2991} + 1000 \times 10^{-2994} \\
&= (998+1) \times 10^{-2991} \\
&= 999 \times 10^{-2991}
\end{aligned}$$

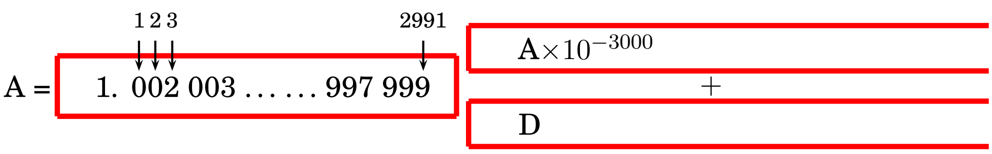
ce qui fournit l'explication de la « disparition » du nombre 998 dans l'écriture décimale de la période.

À ce stade,

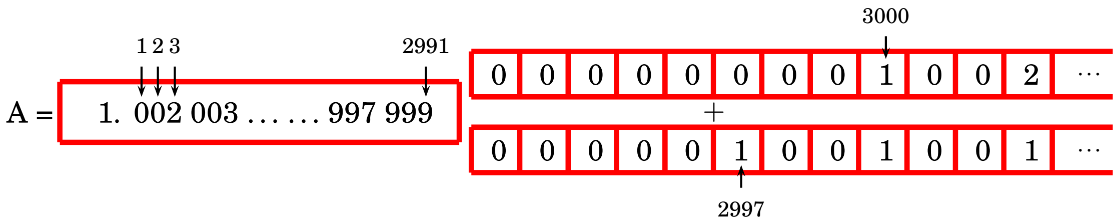


$$\begin{aligned}
C &= \sum_{k=1000}^{+\infty}(k+1)10^{-3k} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty}(k+1000)10^{-3(k+999)} \\
&= \left(\sum_{k=1}^{+\infty} k(10^{-3})^{k-1}\right) \times 10^{-3000} + 10^3 \sum k = 1{+}\infty 10^{-3k-2997} \\
&= A \times 10^{-3000} + \underbrace{\sum_{k=1}^{+\infty} 10^{-3k-2994}}_{=D}
\end{aligned}$$

Présentation visuelle du calcul de C (une présentation formelle est donnée à la fin du paragraphe).



et plus précisément,



et maintenant, on note

$$\frac{1}{998001} = 10^{-6} \times A = F_3 = \frac{1}{\underbrace{999}_{trois\, 9}{}^2}$$

et finalement,

$$F_3 = 0,\underline{000\,001\,002\ \ldots\ldots\ 997\,999}\ \ldots$$

On peut se poser la question d'une généralisation de ce qui précède, et très vite :

$$F_1 = \frac{1}{9^2} = \frac{1}{81} = 0,\underline{012345679}\ \ldots$$
$$F_2 = \frac{1}{99^2} = \frac{1}{9801} = 0,\underline{00\,01\,02\ \ldots\ldots\ 97\,99}\ \ldots$$
$$F_4 = \frac{1}{9999^2} = \frac{1}{99980001} = 0,\underline{0000\,0001\,0002\ \ldots\ldots\ 9997\,9999}\ \ldots$$
$$\ldots$$

Présentation formelle du calcul de C

$$\begin{aligned}
C &= \sum_{k=1000}^{+\infty}(k+1)10^{-3k} = \sum_{j=1}^{+\infty}(j+1+999)10^{-3(j+999)}\\
&= 10^{-3\times 999}\left(\sum_{j=1}^{+\infty}(j+1)10^{-3j} + 999\sum_{j=1}^{+\infty}10^{-3j}\right)\\
&= 10^{-3\times 999}\left(\sum_{j=1}^{+\infty}(j+1)10^{-3j} + 999\frac{10^{-3}}{1-10^{-3}}\right)\\
&= 10^{-3\times 999}\left(\sum_{j=1}^{+\infty}(j+1)10^{-3j} + 1\right) = 10^{-3\times 999}A
\end{aligned}$$

6 Nombres complexes

Note : au niveau post-bac, on constate une difficulté à travailler dans $\mathbb{C}$ alors que les données sont dans $\mathbb{R}$. A ce niveau, il est devenu naturel de travailler dans $\mathbb{R}$ alors que les données sont dans $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Q}$.

Exercice 15. Trouver plusieurs nombres x tels que

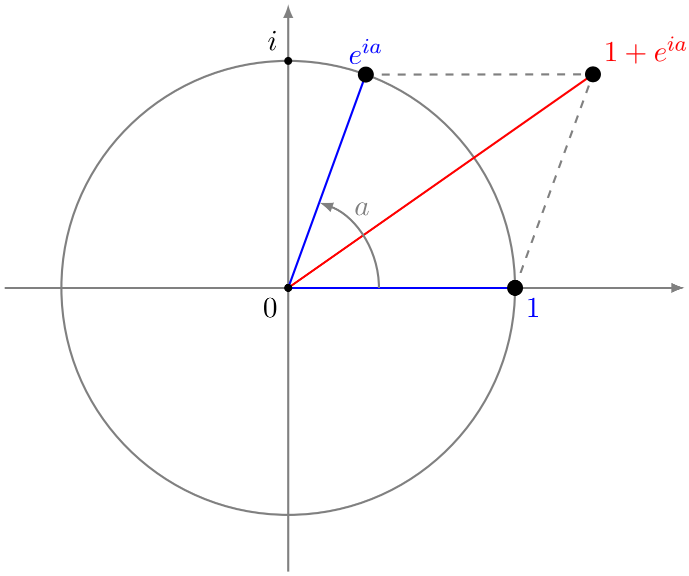
1. $|e^{ix}| \neq 1$,
2. $e^x < 0$.

Exercice 16.
Note : la méthode de l'angle moitié est travaillée en première année de classe préparatoire et reste ancrée en deuxième année, à condition de redonner le nom de la méthode. Elle n'est pas travaillée

en tant que telle en première année à l'Université de Bordeaux mais cela peut être un prétexte pour retrouver des formules trigonométriques.

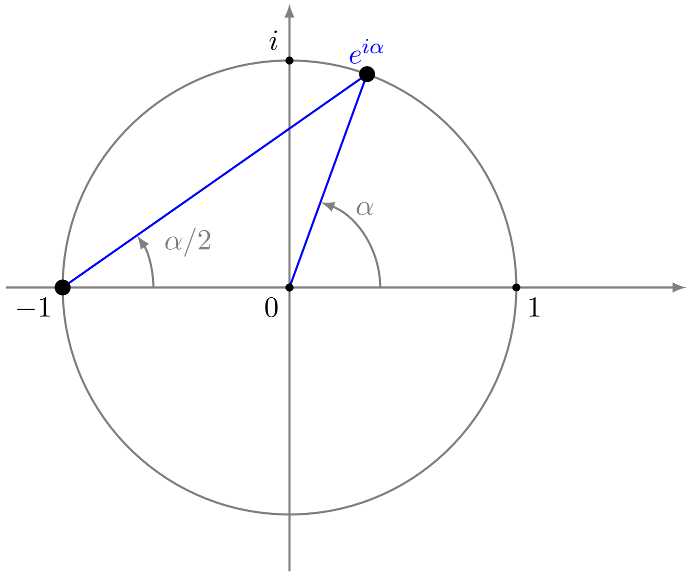
Différentes façons de montrer que pour tout $a \in]-\pi, \pi]$, $1 + e^{ia} = 2\cos(\frac{a}{2})e^{ia/2}$.

1. Préliminaire : on rappelle que $\sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$, $\sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$.
   Donner les valeurs de $\cos(\frac{\pi}{6})$, $\cos(\frac{\pi}{4})$, $\cos(\frac{\pi}{3})$ et $\cos(\frac{\pi}{2})$.
2. Calculer module et argument de
   (a) $1 + i$,
   (b) $1 + e^{i\pi/3}$.
3. Vérifier que ces deux cas particuliers satisfont bien l'égalité $1 + e^{ia} = 2\cos(\frac{a}{2})e^{ia/2}$.
4. Pour tout $a \in]-\pi, \pi]$, calculer $|1 + e^{ia}|^2$ (on rappelle que $\cos(a) = 2\cos^2(\frac{a}{2}) - 1$).
5. Déterminer un argument de $1 + e^{ia}$ (on rappelle que $\sin(a) = 2\cos(\frac{a}{2})\sin(\frac{a}{2})$).
6. En déduire que $1 + e^{ia} = 2\cos(\frac{a}{2})e^{ia/2}$.
7. Pour tout $a \in]-\pi, \pi]$, développer $e^{ia/2}(e^{-ia/2} + e^{ia/2})$ puis en déduire que l'on retrouve ainsi l'égalité précédente.
8. Coder le dessin ci-dessous afin de retrouver graphiquement l'égalité



Exercice 17. Paramétrisation des triplets pythagoriciens.
Note : exercice difficile en première année post-bac

1. Calculer le module de $\frac{3}{5} + i\frac{4}{5}$.
2. Soient a, b et c trois entiers naturels non nuls, vérifier que $|\frac{a}{c} + i\frac{b}{c}| = 1$ équivaut à $a^2 + b^2 = c^2$.
   On dit alors que le triplet (a, b, c) est pythagoricien.
3. On suppose que (a, b, c) est un triplet pythagoricien, justifier qu'il existe $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$ tel que $\frac{a}{c} + i\frac{b}{c} = e^{i\alpha}$.
4. En utilisant les relations trigonométriques de l'exercice précédent ou à l'aide du graphique ci-dessous, montrer que $\tan(\frac{\alpha}{2}) = \frac{\sin(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}$.



5. En déduire que lorsque (a, b, c) est un triplet pythagoricien alors $\tan(\frac{\alpha}{2})$ est rationnel et compris strictement entre 0 et 1.
6. En déduire qu'il existe deux entiers p et q tels que $0 < p < q$ et $\frac{q^2-p^2}{q^2+p^2} = \frac{a}{c}$ et $\frac{2pq}{q^2+p^2} = \frac{b}{c}$.
7. Réciproquement, soient a, b et c sont trois entiers naturels non nuls, tels que

$$\frac{a}{c} = \frac{q^2 - p^2}{q^2 + p^2} \quad \text{et} \quad \frac{b}{c} = \frac{2pq}{q^2 + p^2}$$

avec p et q entiers naturels. Montrer que le triplet (a, b, c) est pythagoricien.
8. Donner un triplet pythagoricien qui n'est pas de la forme $(3n, 4n, 5n)$ avec n entier.

Exercice 18. Existe t-il des points à coordonnées rationnelles sur le cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon $\sqrt{3}$?
Ou l'énoncé équivalent : Déterminer l'ensemble des solutions entières de $a^2 + b^2 = 3c^2$.

Exercice 19.
Note : exercice difficile en première année post-bac
On considère un triplet pythagoricien : $(a, b, c) \in (\mathbb{N}^*)^3$ tel que $a^2 + b^2 = c^2$. Dans cet exercice, on se propose de vérifier que le complexe associé :

$$z = \frac{a}{c} + \mathrm{i}\frac{b}{c}$$

n'est pas une racine n-ième de l'unité.

1. Vérifier que z est bien un nombre complexe de module 1.
2. Établir que l'on peut se contenter de considérer le cas où (a, b, c) est primitif, c'est-à-dire que $\text{pgcd}(a, b, c) = 1$. On fera cette hypothèse supplémentaire dans la suite de l'exercice.
3. Vérifier que c admet nécessairement un diviseur premier impair p. Et remarquer que l'on a alors $a^2 \equiv -b^2 \pmod{p}$ et $ab \not\equiv 0 \pmod{p}$.
4. Pour tout n entier, on note $c^n z^n = x_n + \mathrm{i}y_n$, où x_n, y_n sont des réels. Justifier que les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont à valeurs entières et vérifient la relation de récurrence :

$$\begin{cases} x_{n+1} = & ax_n - by_n \\ y_{n+1} = & bx_n + ay_n \end{cases}$$

5. Montrer par réccurrence que pour $n \geq 1$, on a :

$$\begin{cases} x_n \equiv & a(2a)^{n-1} \pmod p \\ y_n = & b(2a)^{n-1} \pmod p \end{cases}$$

6. En déduire que y_n ne s'annule jamais et conclure.
7. Y a-t-il d'autres points à coordonnées rationnelles sur le cercle unité et sont-ce des racines n-ième de l'unité ?

Correction :

1. *Le nombre complexe z est de module*

$$|z| = \sqrt{\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{c^2}} = 1.$$

2. *Deux triplets d'entiers proportionnels (a,b,c) et $(\lambda a, \lambda b, \lambda c)$ définissent le même nombre complexe z. À partir d'un triplet (a,b,c) quelconque pour lequel $d = pgcd(a,b,c)$, on peut considérer le triplet primitif $(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}, \frac{c}{d})$.*
3. *Supposons que c soit une puissance de 2, on aurait en particulier $c^2 \equiv 0 \pmod 4$. Comme (a,b,c) est primitif, on en déduit que a et b sont impairs, ce qui impose que $a^2 \equiv b^2 \equiv 1 \pmod 4$ et par conséquent*

$$a^2 + b^2 \equiv 2 \not\equiv 0 \equiv c^2 \pmod 4,$$

ce qui est une contradiction. On en conclut donc que c admet un diviseur premier impair.
Pour ce diviseur p, on a alors $a^2 + b^2 = c^2 \equiv 0 \pmod p$. De plus, si a ou b est nul modulo p, p diviserait deux des élément du triplet et nécessairement le troisième, cela contredirait la primitivité du triplet. Ainsi $ab \not\equiv 0 \pmod p$.

4. *On a $cz = a+ib$ et donc $c^n z^n = (a+ib)^n$, et le développement par la formule du binôme permet de conclure que ses parties réelle et imaginaire sont des entiers. On a alors la relation*

$$\begin{aligned} x_{n+1} + iy_{n+1} =& (a+ib)^{n+1} \\ =& (a+ib)^n(a+ib) \\ =& (x_n + iy_n)(a+ib) \\ =& (ax_n - by_n) + i(bx_n + ay_n). \end{aligned}$$

5. *Pour $n = 1$, on a bien $x_1 = a \equiv a \pmod p$ et $y_1 = b \equiv b \pmod p$. Si cette double congruence est vérifiée à un certain rang $n \geq 1$. On considère maintenant :*

$$x_{n+1} = ax_n - by_n \equiv a.a(2a)^{n-1} - b.b(2a)^{n-1} \equiv a^2(2a)^{n-1} + a^2(2a)^{n-1} \equiv a.(2a)^n \pmod p,$$

$$y_{n+1} = bx_n + ay_n \equiv b.a(2a)^{n-1} + a.b(2a)^{n-1} \equiv b.(2a)^n \pmod p.$$

6. *Si y_n s'annule pour un certain n, alors y_n s'annule modulo p, mais $y_n \equiv b(2a)^{n-1} \pmod p$ n'est nul que si a ou b l'est, ce qui est une contradiction avec la question (3).*
Si y_n ne s'annule pas, on en déduit que $\frac{y_n}{c^n}$ la partie imaginaire de z^n ne s'annule jamais non plus et donc qu'il est impossible que z^n soit égal à 1 (qui lui est de partie imaginaire nulle). Le complexe z n'est donc pas une racine n-ième de l'unité.

7. *Si on considère un point du cercle unité à coordonnées rationnelles $z = \frac{a}{c} + i\frac{b}{d}$, où $\frac{a}{c}$ et $\frac{b}{d}$ sont irréductibles. On a en particulier :*

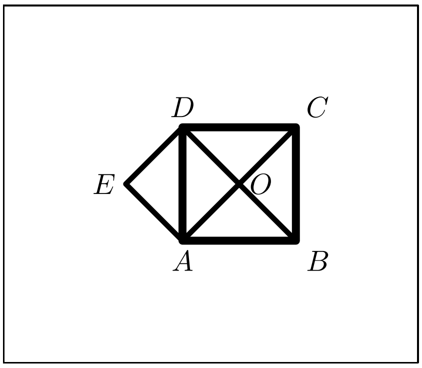
$$\frac{a^2}{c^2} = 1 - \frac{b^2}{d^2} = \frac{d^2 - b^2}{d^2}$$

et toutes ses fractions sont encore irréductibles. On a alors $c = d$ et $a^2 + b^2 = c^2$.
Par symétrie, on se ramène au cas où les coordonnées sont positives ou nulles. Si elles sont toutes positives strictement la question précédente a conclu qu'il ne s'agit pas d'une racine n-ième de l'unité.
Le seul cas non traité est donc celui où a ou b est nul. On obtient alors les 4 nombres complexes 1, -1, i et $-i$ qui sont des racines de l'unité d'ordre 1, 2 ou 4.

7 Approche géométrique

7.1 Racine de 2

Exercice 20.



Incommensurabilité du coté et de la diagonale du carré

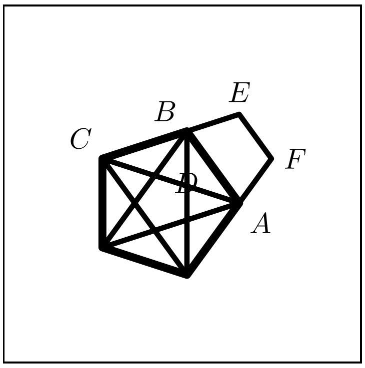
On considère un carré $ABCD$ comme ci-dessus de centre O. On suppose que le rapport $\frac{AB}{AC}$ est rationnel, soit qu'il existe une unité de longueur telle que $AB = c$ et $AC = d$ soient tous les deux entiers. On note O le centre de ce carré.

1. À l'aide du théorème de Pythagore dans le triangle ACD, montrer que d est pair.
2. Quelle est la nature du triangle AOD et quelles sont les longueurs de ses cotés ? En déduire que l'on peut compléter ce triangle en un carré $AODE$ dont les coté et diagonale sont encore de longueurs entières.
3. Conclure que $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.

7.2 Nombre d'or

Exercice 21.
On considère un pentagone régulier comme ci-dessus. On suppose que le rapport $\frac{AB}{AC}$ est rationnel, soit qu'il existe une unité de longueur telle que $AB = c$ et $AC = d$ soient tous les deux entiers.

1. Donner les mesures angulaires des angles $\widehat{CBA}$ et $\widehat{BAC}$, puis de l'angle $\widehat{ADB}$.
2. En déduire la nature du triangle CDB. Et donner la longueur AD en fonction de c et d.



Incommensurabilité du coté et de la diagonale du pentagone

3. En déduire que l'on peut compléter le triangle ABD en un pentagone régulier $ADBEF$ dont les cotés et diagonales sont encore de longueurs entières. Et que l'on a

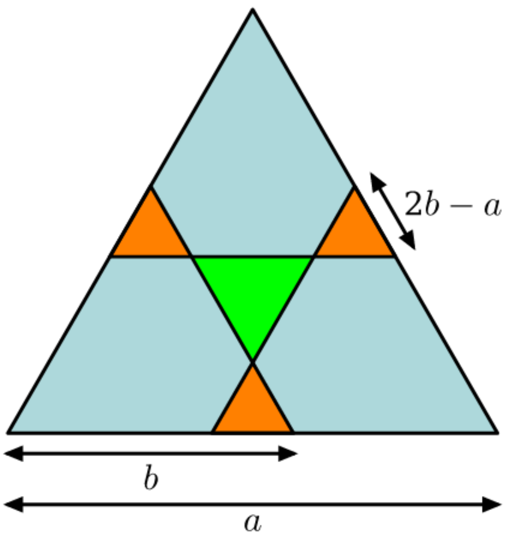
   $$\frac{d}{c} = \frac{c}{d-c}.$$

   (Autre définition du nombre d'or.)
4. Conclure que le nombre d'or Φ n'est pas rationnel.

7.3 Racine de 3

Exercice 22. Une preuve graphique de l'irrationnalité de $\sqrt{3}$, extrait de BOUCHER F., « Preuves visuelles II », in APMEP Au fil des maths. N° 547. 26 mars 2023, https://afdm.apmep.fr/rubriques/ouvertures/preuves-visuelles-ii/

Puisque nous sommes dans la beauté, la preuve visuelle suivante de l'irrationalité de $\sqrt{3}$ imaginée dans [2] force l'admiration mais demande un début de décodage :



Par l'absurde, supposons qu'il existe a et b entiers tels que $a^2 = 3\,b^2$ ($b < a < 2\,b$). L'aire d'un triangle équilatéral et celle d'un carré de même côté sont proportionnelles. Donc la surface d'un triangle équilatéral de côté (de longueur) a serait le triple de celle d'un triangle équilatéral de côté b.

Nos yeux — qui perçoivent bien les recouvrements — nous disent, sans calcul, que la surface de l'équilatéral vert égale trois fois celle de l'équilatéral orange[3]. Vert et orange ont des côtés de longueur entière et strictement inférieures à a et b : le processus ne se termine pas. Contradiction donc.

8 Tests

8.1 Première version lors de la rentrée 2023 en 2e année de classe préparatoire MP

Le test a été posé le jour de la rentrée et avait pour durée 20 minutes après explication préalable de l'exemple introductif où il a été précisé qu'il faut comprendre les propositions comme universellement quantifiées.

8.1.1 Motivation

Une affirmation sur des nombres peut changer de sens selon le domaine d'appartenance des nombres considérés. Ainsi, un manque d'attention portée à la nature d'un objet est une cause fréquente d'erreurs. Citons quelques exemples rencontrés : « si $x^2+y^2=0$ alors $x=y=0$ » ; « une fonction f telle que $f(x+1)=f(x)$ est constante » ; « la matrice $A^{1/3}$ est une racine cubique de la matrice A ».
La vocation des tests suivants est d'exercer la vigilance des étudiants sur ce point.

8.1.2 Une synthèse des résultats

On donne par thèmes les propositions pour lesquelles il y a eu une majorité de réponses fausses. La notation **Pn-i** désigne le i-ième item de la proposition Pn.

1. Nombres complexes : **P2-3** ; **P9-3**.
2. Rationnels et irrationnels : **P4-3** ; **P11-4**.
3. Carrés et racines carrées : **P12-3** ; **P12-4** ; **P15-1** ; **P16-3**.
4. Fonctions d'une variable réelle (ou pas) : **P17-1** ; **P17-4** ; **P18-3** ; **P18-4** ; **P19-2**.

8.1.3 Enoncé et résultats en MP

Consigne. La valeur d'un énoncé concernant des nombres dépend de la nature des nombres en jeu. Considérons par exemple l'affirmation :

$$« x^2 \geqslant 1 \implies x \geqslant 1 »$$

Celle-ci est vraie pour tout entier naturel x, fausse pour au moins un nombre rationnel ou un nombre réel x et n'a pas de sens usuel pour un nombre x complexe. On répondra :

$\forall x \in \mathbb{N}$	☑ vraie	☐ fausse	☐ pas de sens
$\forall x \in \mathbb{Q}$	☐ vraie	☑ fausse	☐ pas de sens
$\forall x \in \mathbb{R}$	☐ vraie	☑ fausse	☐ pas de sens
$\forall x \in \mathbb{C}$	☐ vraie	☐ fausse	☑ pas de sens

Partie 1. Indiquer si les propositions suivantes sont vraies, fausses ou n'ont pas de sens usuel pour chacun des ensembles de valeurs des variables proposés.

P1. « $x \times y = 1 \implies x = 1$ et $y = 1$ »

$\forall (x,y) \in \mathbb{N}^2$	☑ vraie	☐ fausse	☐ pas de sens
$\forall (x,y) \in \mathbb{Z}^2$	☐ vraie	☑ fausse	☐ pas de sens
$\forall (x,y) \in \mathbb{Q}^2$	☐ vraie	☑ fausse	☐ pas de sens
$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$	☐ vraie	☑ fausse	☐ pas de sens

100.0%	$\boxed{\text{v}}$	0.0%	f	0.0%	s	0.0%	a
7.1%	v	90.5%	$\boxed{\text{f}}$	0.0%	s	2.4%	a
4.8%	v	92.9%	$\boxed{\text{f}}$	2.4%	s	0.0%	a
4.8%	v	88.1%	$\boxed{\text{f}}$	4.8%	s	2.4%	a

P2. « $(x+y)^2 = x^2 + y^2 \implies x = 0$ ou $y = 0$ »

$\forall (x,y) \in \mathbb{N}^2$	☑ vraie	☐ fausse	☐ pas de sens
$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$	☑ vraie	☐ fausse	☐ pas de sens
$\forall (x,y) \in \mathbb{C}^2$	☑ vraie	☐ fausse	☐ pas de sens
$\forall (x,y) \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})^2$	☐ vraie	☑ fausse	☐ pas de sens

88.1%	$\boxed{\text{v}}$	7.1%	f	0.0%	s	4.8%	a
64.3%	$\boxed{\text{v}}$	31.0%	f	0.0%	s	4.8%	a
21.4%	v	52.4%	$\boxed{\text{f}}$	19.0%	s	7.1%	a
4.8%	v	26.2%	f	57.1%	$\boxed{\text{s}}$	11.9%	a

P3. « $2^x - 3^x$ est un nombre entier relatif »

$\forall x \in \mathbb{N}$	☑ vraie	☐ fausse	☐ pas de sens
$\forall x \in \mathbb{Z}$	☐ vraie	☑ fausse	☐ pas de sens
$\forall x \in \mathbb{Q}$	☐ vraie	☑ fausse	☐ pas de sens
$\forall x \in \mathbb{R}$	☐ vraie	☑ fausse	☐ pas de sens

95.2%	$\boxed{\text{v}}$	2.4%	f	0.0%	s	2.4%	a
31.0%	v	61.9%	$\boxed{\text{f}}$	0.0%	s	7.1%	a
11.9%	v	81.0%	$\boxed{\text{f}}$	2.4%	s	4.8%	a
7.1%	v	81.0%	$\boxed{\text{f}}$	7.1%	s	4.8%	a

P4. « $\exists n \in \mathbb{N}^*,\ nx \in \mathbb{Z}$ »

$\forall x \in \mathbb{N}$	☑ vraie	☐ fausse	☐ pas de sens
$\forall x \in \mathbb{Z}$	☑ vraie	☐ fausse	☐ pas de sens
$\forall x \in \mathbb{Q}$	☑ vraie	☐ fausse	☐ pas de sens
$\forall x \in \mathbb{R}$	☐ vraie	☑ fausse	☐ pas de sens

57.1%	$\boxed{\text{v}}$	38.1%	f	2.4%	s	2.4%	a
90.5%	$\boxed{\text{v}}$	4.8%	f	0.0%	s	4.8%	a
23.8%	v	61.9%	$\boxed{\text{f}}$	9.5%	s	4.8%	a
9.5%	v	83.3%	$\boxed{\text{f}}$	4.8%	s	2.4%	a

P5. « $y > x \implies y \geq x + 1$ »

$\forall (x,y) \in \mathbb{N}^2$	☑ vraie	☐ fausse	☐ pas de sens
$\forall (x,y) \in \mathbb{Z}^2$	☑ vraie	☐ fausse	☐ pas de sens
$\forall (x,y) \in \mathbb{Q}^2$	☐ vraie	☑ fausse	☐ pas de sens
$\forall (x,y) \in \mathbb{C}^2$	☐ vraie	☐ fausse	☑ pas de sens

83.3%	$\boxed{\text{v}}$	11.9%	f	2.4%	s	2.4%	a
71.4%	$\boxed{\text{v}}$	23.8%	f	2.4%	s	2.4%	a
11.9%	v	81.0%	$\boxed{\text{f}}$	4.8%	s	2.4%	a
0.0%	v	19.0%	f	76.2%	$\boxed{\text{s}}$	4.8%	a

P6. « $x^2 = |x|^2$ »

$\forall x \in \mathbb{N}$	☑ vraie	☐ fausse	☐ pas de sens
$\forall x \in \mathbb{R}$	☑ vraie	☐ fausse	☐ pas de sens
$\forall x \in \mathbb{C}$	☐ vraie	☑ fausse	☐ pas de sens
$\forall x \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})^2$	☐ vraie	☐ fausse	☑ pas de sens

100.0%	$\boxed{\text{v}}$	0.0%	f	0.0%	s	0.0%	a
85.7%	$\boxed{\text{v}}$	11.9%	f	0.0%	s	2.4%	a
7.1%	v	69.0%	$\boxed{\text{f}}$	21.4%	s	2.4%	a
0.0%	v	19.0%	f	78.6%	$\boxed{\text{s}}$	2.4%	a

P7. « $x^2 + y^2 = 0 \implies x = y = 0$ »

$\forall (x, y) \in \mathbb{Z}^2$	☑ vraie	☐ fausse	☐ pas de sens
$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$	☑ vraie	☐ fausse	☐ pas de sens
$\forall (x, y) \in \mathbb{C}^2$	☐ vraie	☑ fausse	☐ pas de sens
$\forall (x, y) \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})^2$	☐ vraie	☑ fausse	☐ pas de sens

90.5%	$\boxed{\text{v}}$	7.1%	f	0.0%	s	2.4%	a
90.5%	$\boxed{\text{v}}$	7.1%	f	0.0%	s	2.4%	a
4.8%	v	83.3%	$\boxed{\text{f}}$	9.5%	s	2.4%	a
11.9%	v	42.9%	$\boxed{\text{f}}$	40.5%	s	4.8%	a

P8. « $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi x} = 1$ »

$\forall x \in \mathbb{N}$	☑ vraie	☐ fausse	☐ pas de sens
$\forall x \in \mathbb{Z}$	☑ vraie	☐ fausse	☐ pas de sens
$\forall x \in \mathbb{Q}$	☐ vraie	☑ fausse	☐ pas de sens
$\forall x \in \mathbb{R}$	☐ vraie	☑ fausse	☐ pas de sens

81.0%	$\boxed{\text{v}}$	7.1%	f	7.1%	s	4.8%	a
71.4%	$\boxed{\text{v}}$	14.3%	f	7.1%	s	7.1%	a
2.4%	v	83.3%	$\boxed{\text{f}}$	7.1%	s	7.1%	a
2.4%	v	81.0%	$\boxed{\text{f}}$	7.1%	s	9.5%	a

P9. « $|\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}| = 1$ »

$\forall x \in \mathbb{N}$	☑ vraie	☐ fausse	☐ pas de sens
$\forall x \in \mathbb{Z}$	☑ vraie	☐ fausse	☐ pas de sens
$\forall x \in \mathbb{R}$	☑ vraie	☐ fausse	☐ pas de sens
$\forall x \in \mathbb{C}$	☐ vraie	☑ fausse	☐ pas de sens

54.8%	$\boxed{\text{v}}$	21.4%	f	9.5%	s	14.3%	a
45.2%	$\boxed{\text{v}}$	28.6%	f	9.5%	s	16.7%	a
33.3%	v	40.5%	$\boxed{\text{f}}$	9.5%	s	16.7%	a
19.0%	v	47.6%	$\boxed{\text{f}}$	16.7%	s	16.7%	a

P10. « L'application $\begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & t^x \end{array}$ est polynomiale »

$\forall x \in \mathbb{N}$	☑ vraie	☐ fausse	☐ pas de sens
$\forall x \in \mathbb{Z}$	☐ vraie	☑ fausse	☐ pas de sens
$\forall x \in \mathbb{Q}$	☐ vraie	☑ fausse	☐ pas de sens
$\forall x \in \mathbb{R}$	☐ vraie	☑ fausse	☐ pas de sens

88.1%	$\boxed{\text{v}}$	7.1%	f	0.0%	s	4.8%	a
35.7%	v	52.4%	$\boxed{\text{f}}$	7.1%	s	4.8%	a
11.9%	v	73.8%	$\boxed{\text{f}}$	9.5%	s	4.8%	a
14.3%	v	76.2%	$\boxed{\text{f}}$	4.8%	s	4.8%	a

Partie 2. De la même manière, dans les questions qui suivent, indiquer pour chaque E donné la nature de la proposition énoncée.

P11. « $(x,y) \in E^2 \implies x+y \in E$ »

$E = \{-1,0,1\}$	☐ vraie	☑ fausse	☐ pas de sens
$E = \mathbb{Q}$	☑ vraie	☐ fausse	☐ pas de sens
$E = \mathbb{R}$	☑ vraie	☐ fausse	☐ pas de sens
$E = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$	☐ vraie	☑ fausse	☐ pas de sens

31.0%	v	61.9%	$\boxed{\text{f}}$	7.1%	s	0.0%	a
66.7%	$\boxed{\text{v}}$	28.6%	f	2.4%	s	2.4%	a
85.7%	$\boxed{\text{v}}$	14.3%	f	0.0%	s	0.0%	a
47.6%	$\boxed{\text{v}}$	42.9%	f	4.8%	s	4.8%	a

P12. « $x \in E \implies \sqrt{x} \in E$ »

$E = \{0,1\}$	☑ vraie	☐ fausse	☐ pas de sens
$E = \mathbb{N}$	☐ vraie	☑ fausse	☐ pas de sens
$E = \mathbb{R}$	☐ vraie	☐ fausse	☑ pas de sens
$E = \mathbb{C}$	☐ vraie	☐ fausse	☑ pas de sens

81.0%	$\boxed{\text{v}}$	9.5%	f	9.5%	s	0.0%	a
16.7%	v	83.3%	$\boxed{\text{f}}$	0.0%	s	0.0%	a
59.5%	$\boxed{\text{v}}$	38.1%	f	2.4%	s	0.0%	a
33.3%	v	14.3%	f	52.4%	$\boxed{\text{s}}$	0.0%	a

P13. « $(x,y) \in E \times E \implies \dfrac{x}{y^2+1} \in E$ »

$E = \mathbb{Z}$	☐ vraie	☑ fausse	☐ pas de sens
$E = \mathbb{Q}$	☑ vraie	☐ fausse	☐ pas de sens
$E = \mathbb{R}$	☑ vraie	☐ fausse	☐ pas de sens
$E = \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$	☐ vraie	☐ fausse	☑ pas de sens

19.0%	v	81.0%	$\boxed{\text{f}}$	0.0%	s	0.0%	a
69.0%	$\boxed{\text{v}}$	28.6%	f	0.0%	s	2.4%	a
90.5%	$\boxed{\text{v}}$	9.5%	f	0.0%	s	0.0%	a
2.4%	v	2.4%	f	92.9%	$\boxed{\text{s}}$	2.4%	a

P14. « Soit $(x, y) \in E^2$ tel que $x < y$. Il existe $z \in E$ tel que $x < z < y$ »

$E = \mathbb{Z}$	☐ vraie	☑ fausse	☐ pas de sens
$E = \mathbb{Q}$	☑ vraie	☐ fausse	☐ pas de sens
$E = \mathbb{R}$	☑ vraie	☐ fausse	☐ pas de sens
$E = \mathbb{C}$	☐ vraie	☐ fausse	☑ pas de sens

26.2%	v	69.0%	$\boxed{\text{f}}$	0.0%	s	4.8%	a
90.5%	$\boxed{\text{v}}$	4.8%	f	0.0%	s	4.8%	a
88.1%	$\boxed{\text{v}}$	7.1%	f	0.0%	s	4.8%	a
21.4%	v	11.9%	f	61.9%	$\boxed{\text{s}}$	4.8%	a

P15. « Soit $x \in \mathbb{N}$. Il existe $y \in E$ tel que $x = y^2$ »

$E = \mathbb{Z}$	☐ vraie	☑ fausse	☐ pas de sens
$E = \mathbb{Q}$	☐ vraie	☑ fausse	☐ pas de sens
$E = \mathbb{R}$	☑ vraie	☐ fausse	☐ pas de sens
$E = \mathbb{C}$	☑ vraie	☐ fausse	☐ pas de sens

73.8%	$\boxed{\text{v}}$	21.4%	f	0.0%	s	4.8%	a
42.9%	v	50.0%	$\boxed{\text{f}}$	2.4%	s	4.8%	a
71.4%	$\boxed{\text{v}}$	23.8%	f	2.4%	s	2.4%	a
35.7%	$\boxed{\text{v}}$	31.0%	f	21.4%	s	11.9%	a

P16. « Soit $x \in E$. Il existe $y \in E$ tel que $x = y^2$ »

$E = \mathbb{Z}$	☐ vraie	☑ fausse	☐ pas de sens
$E = \mathbb{Q}$	☐ vraie	☑ fausse	☐ pas de sens
$E = \mathbb{R}$	☐ vraie	☑ fausse	☐ pas de sens
$E = \mathbb{C}$	☑ vraie	☐ fausse	☐ pas de sens

40.5%	v	57.1%	$\boxed{\text{f}}$	0.0%	s	2.4%	a
42.9%	v	50.0%	$\boxed{\text{f}}$	2.4%	s	4.8%	a
69.0%	$\boxed{\text{v}}$	26.2%	f	0.0%	s	4.8%	a
45.2%	$\boxed{\text{v}}$	31.0%	f	16.7%	s	7.1%	a

P17. « L'application $\left\{\begin{array}{ccc} E & \to & E \\ t & \mapsto & 2t \end{array}\right.$ est bijective »

$E = \mathbb{N}$	☐ vraie	☑ fausse	☐ pas de sens
$E = \mathbb{Q}$	☑ vraie	☐ fausse	☐ pas de sens
$E = \mathbb{R}$	☑ vraie	☐ fausse	☐ pas de sens
$E = \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$	☑ vraie	☐ fausse	☐ pas de sens

57.1%	$\boxed{\text{v}}$	35.7%	f	0.0%	s	7.1%	a
54.8%	$\boxed{\text{v}}$	31.0%	f	2.4%	s	11.9%	a
59.5%	$\boxed{\text{v}}$	31.0%	f	0.0%	s	9.5%	a
31.0%	v	14.3%	f	42.9%	$\boxed{\text{s}}$	11.9%	a

P18. « Soit $f : E \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in E$, $f(x+1) = f(x)$. Alors f est constante »

$E = \mathbb{N}$	☑ vraie	☐ fausse	☐ pas de sens
$E = \mathbb{Z}$	☑ vraie	☐ fausse	☐ pas de sens
$E = \mathbb{R}$	☐ vraie	☑ fausse	☐ pas de sens
$E = \mathbb{C}$	☐ vraie	☑ fausse	☐ pas de sens

85.7%	$\boxed{\text{v}}$	11.9%	f	0.0%	s	2.4%	a
73.8%	$\boxed{\text{v}}$	21.4%	f	0.0%	s	4.8%	a
52.4%	$\boxed{\text{v}}$	42.9%	f	0.0%	s	4.8%	a
9.5%	v	33.3%	f	50.0%	$\boxed{\text{s}}$	7.1%	a

P19. « Soit $f : E \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in E$, $f(x+1) > f(x)$. Alors f est strictement croissante »

$E = \mathbb{N}$	☑ vraie	☐ fausse	☐ pas de sens
$E = \mathbb{R}$	☐ vraie	☑ fausse	☐ pas de sens
$E = \mathbb{C}$	☐ vraie	☐ fausse	☑ pas de sens
$E = \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$	☐ vraie	☐ fausse	☑ pas de sens

90.5%	$\boxed{\text{v}}$	7.1%	f	0.0%	s	2.4%	a
50.0%	$\boxed{\text{v}}$	47.6%	f	0.0%	s	2.4%	a
7.1%	v	42.9%	$\boxed{\text{f}}$	42.9%	$\boxed{\text{s}}$	7.1%	a
0.0%	v	11.9%	f	81.0%	$\boxed{\text{s}}$	7.1%	a

P20. « Toute suite d'éléments de E décroissante est convergente »

$E = \mathbb{N}$	☑ vraie	☐ fausse	☐ pas de sens
$E = \mathbb{R}$	☐ vraie	☑ fausse	☐ pas de sens
$E = \mathbb{C}$	☐ vraie	☐ fausse	☑ pas de sens
$E = \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$	☐ vraie	☐ fausse	☑ pas de sens

71.4%	$\boxed{\text{v}}$	28.6%	f	0.0%	s	0.0%	a
11.9%	v	88.1%	$\boxed{\text{f}}$	0.0%	s	0.0%	a
0.0%	v	42.9%	f	54.8%	$\boxed{\text{s}}$	2.4%	a
0.0%	v	9.5%	f	85.7%	$\boxed{\text{s}}$	4.8%	a

8.2 Seconde version en décembre 2013 en L2 et L3 option enseignement

Le test a été posé en ligne pour les étudiants volontaires, un seul essai était possible et la durée était limitée à 45 minutes.
En L2, les 17 étudiant·es qui ont terminé le test, y ont consacré de 8 à 35 minutes.
En L3, les 6 étudiant·es qui ont terminé le test, y ont consacré de 10 à 35 minutes.

8.2.1 Modifications par rapport à la première version

Des modifications ont été faites par rapport à la première version avec les motivations suivantes :

- mention de
  « Dans les questions où il y aura 0, il sera à comprendre comme le 0 de l'ensemble dans lequel on se place. »
  car dans la première version du test il est possible que des réponses « pas de sens » éronnées soient dues au fait que le 0 n'était pas pris dans le bon ensemble ;

- limiter les parasitages liés au calcul : « $(x+y)^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow x = 0$ ou $y = 0$ » est remplacé par « $x \times y = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $y = 0$ » ;
- clarté avec quelques évolutions de rédaction.

8.2.2 Une synthèse des résultats

En L2, la seule question où il y a des réponses majoritairement fausses est celle concernant la racine carrée : **P9-3** ; **P9-4**. La question **P12-3** portant sur le carré cause plus d'erreurs que d'autres questions faisant aussi intervenir les ensembles $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Bien que toutes les autres réponses soient majoritairement justes, on constate un peu moins d'aisance lorsque l'ensemble auquel appartient la variable est l'ensemble

- des matrices : **P2-4** ; **P5-4**
- des complexes : **P7-4**
- des irrationnels : **P8-3**

Nous ne détaillerons pas les résultats de L3 compte-tenu du faible effectif, le constat est similaire à celui fait en L2.

8.2.3 Énoncé et résultats détaillés en L2 mathématiques

Texte mis en préambule du test effectué sur moodle

Ce test facultatif est fait dans le cadre d'une enquête de l'IREM (Institut de Recherche sur l'Enseignement des mathématiques) sur les connaissances des élèves et des étudiants de différents niveaux. Il est facultatif et sera exploité de façon anonyme. Il ne porte pas particulièrement sur l'UE Séries, suites de fonctions et intégrales généralisées.

Le test comporte 15 questions, les deux dernières questions sont sur un modèle un peu différent. Vous n'avez qu'un seul essai possible et la durée est limitée à 45 minutes.

Dans les questions où il y aura 0, il sera à comprendre comme le 0 de l'ensemble dans lequel on se place.

Dans les 13 premières questions, vous devrez indiquer la valeur de vérité d'un énoncé en fonction de la nature des nombres ou de l'ensemble en jeu.

Considérons par exemple l'affirmation :

$$x^2 \geqslant 1 \implies x \geqslant 1$$

Celle-ci est vraie pour tout entier naturel x, fausse pour au moins un nombre rationnel ou un nombre réel x et n'a pas de sens usuel pour un nombre x complexe.

On répondra :

$\forall x \in N$: vraie

$\forall x \in Q$: fausse

$\forall x \in R$: fausse

$\forall x \in C$: n'a pas de sens

Énoncé du test

Partie 1. Indiquer si les propositions suivantes sont vraies, fausses ou n'ont pas de sens usuel pour chacun des ensembles de valeurs des variables proposés.

P1. « $x \times y = 1 \implies x = 1$ et $y = 1$ »

$\forall (x,y) \in \mathbb{N}^2$	☑ vraie	☐ fausse	☐ pas de sens
$\forall (x,y) \in \mathbb{Z}^2$	☐ vraie	☑ fausse	☐ pas de sens
$\forall (x,y) \in \mathbb{Q}^2$	☐ vraie	☑ fausse	☐ pas de sens
$\forall (x,y) \in \mathbb{C}^2$	☐ vraie	☑ fausse	☐ pas de sens

19	$\boxed{\text{v}}$	1	f	0	s	0	a
1	v	18	$\boxed{\text{f}}$	1	s	0	a
1	v	17	$\boxed{\text{f}}$	2	s	0	a
0	v	17	$\boxed{\text{f}}$	3	s	0	a

P2. « $x \times y = 0 \Longrightarrow x = 0$ ou $y = 0$ »

$\forall (x, y) \in \mathbb{N}^2$	☑ vraie	☐ fausse	☐ pas de sens
$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$	☑ vraie	☐ fausse	☐ pas de sens
$\forall (x, y) \in \mathbb{C}^2$	☑ vraie	☐ fausse	☐ pas de sens
$\forall (x, y) \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})^2$	☐ vraie	☑ fausse	☐ pas de sens

20	$\boxed{\text{v}}$	0	f	0	s	0	a
20	$\boxed{\text{v}}$	0	f	0	s	0	a
20	$\boxed{\text{v}}$	0	f	0	s	0	a
5	v	12	$\boxed{\text{f}}$	3	s	0	a

P3. « $2^x - 3^x$ est un nombre entier relatif »

$\forall x \in \mathbb{N}$	☑ vraie	☐ fausse	☐ pas de sens
$\forall x \in \mathbb{Z}$	☐ vraie	☑ fausse	☐ pas de sens
$\forall x \in \mathbb{Q}$	☐ vraie	☑ fausse	☐ pas de sens
$\forall x \in \mathbb{R}$	☐ vraie	☑ fausse	☐ pas de sens

17	$\boxed{\text{v}}$	2	f	0	s	1	a
2	v	17	$\boxed{\text{f}}$	0	s	1	a
0	v	18	$\boxed{\text{f}}$	1	s	1	a
1	v	17	$\boxed{\text{f}}$	1	s	1	a

P4. « $y > x \implies y \geq x + 1$ »

$\forall (x, y) \in \mathbb{N}^2$	☑ vraie	☐ fausse	☐ pas de sens
$\forall (x, y) \in \mathbb{Z}^2$	☑ vraie	☐ fausse	☐ pas de sens
$\forall (x, y) \in \mathbb{Q}^2$	☐ vraie	☑ fausse	☐ pas de sens
$\forall (x, y) \in \mathbb{C}^2$	☐ vraie	☐ fausse	☑ pas de sens

18	$\boxed{\text{v}}$	0	f	0	s	2	a
17	$\boxed{\text{v}}$	0	f	0	s	3	a
1	v	16	$\boxed{\text{f}}$	0	s	3	a
1	v	2	f	14	$\boxed{\text{s}}$	3	a

P5. « $x^2 = |x|^2$ »

$\forall x \in \mathbb{N}$	☑ vraie	☐ fausse	☐ pas de sens
$\forall x \in \mathbb{R}$	☑ vraie	☐ fausse	☐ pas de sens
$\forall x \in \mathbb{C}$	☐ vraie	☑ fausse	☐ pas de sens
$\forall x \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$	☐ vraie	☐ fausse	☑ pas de sens

17	$\boxed{\text{v}}$	0	f	0	s	3	a
17	$\boxed{\text{v}}$	0	f	0	s	3	a
1	v	15	$\boxed{\text{f}}$	1	s	3	a
1	v	7	f	9	$\boxed{\text{s}}$	3	a

P6. « $x^2 + y^2 = 0 \implies x = y = 0$ »

$\forall (x,y) \in \mathbb{Z}^2$	☑ vraie	☐ fausse	☐ pas de sens
$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$	☑ vraie	☐ fausse	☐ pas de sens
$\forall (x,y) \in \mathbb{C}^2$	☐ vraie	☑ fausse	☐ pas de sens
$\forall (x,y) \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})^2$	☐ vraie	☑ fausse	☐ pas de sens

16	$\boxed{\text{v}}$	1	f	0	s	3	a
16	$\boxed{\text{v}}$	1	f	0	s	3	a
1	v	16	$\boxed{\text{f}}$	0	s	3	a
0	v	17	$\boxed{\text{f}}$	0	s	3	a

P7. « $|e^{ix}| = 1$ »

$\forall x \in \mathbb{N}$	☑ vraie	☐ fausse	☐ pas de sens
$\forall x \in \mathbb{Z}$	☑ vraie	☐ fausse	☐ pas de sens
$\forall x \in \mathbb{R}$	☑ vraie	☐ fausse	☐ pas de sens
$\forall x \in \mathbb{C}$	☐ vraie	☑ fausse	☐ pas de sens

15	$\boxed{\text{v}}$	1	f	1	s	3	a
15	$\boxed{\text{v}}$	1	f	1	s	3	a
13	$\boxed{\text{v}}$	3	f	1	s	3	a
7	v	9	$\boxed{\text{f}}$	1	s	3	a

Partie 2. De la même manière, dans les questions qui suivent, indiquer pour chaque E donné la nature de la proposition énoncée.

P8. « $(x,y) \in E^2 \implies x + y \in E$ »

$E = \mathbb{Q}$	☑ vraie	☐ fausse	☐ pas de sens
$E = \mathbb{R}$	☑ vraie	☐ fausse	☐ pas de sens
$E = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$	☐ vraie	☑ fausse	☐ pas de sens

16	$\boxed{\text{v}}$	1	f	0	s	3	a
17	$\boxed{\text{v}}$	0	f	0	s	3	a
5	v	12	$\boxed{\text{f}}$	0	s	3	a

P9. « $x \in E \implies \sqrt{x} \in E$ »

$E = \{0,1\}$	☑ vraie	☐ fausse	☐ pas de sens
$E = \mathbb{N}$	☐ vraie	☑ fausse	☐ pas de sens
$E = \mathbb{R}$	☐ vraie	☐ fausse	☑ pas de sens
$E = \mathbb{C}$	☐ vraie	☐ fausse	☑ pas de sens

16	$\boxed{\text{v}}$	1	f	0	s	3	a
1	v	16	$\boxed{\text{f}}$	0	s	3	a
10	$\boxed{\text{v}}$	4	f	3	s	3	a
11	$\boxed{\text{v}}$	1	f	5	s	3	a

P10. « $(x,y) \in E \times E$ et $y \neq 0$ alors $\dfrac{x}{y} \in E$ »

$E = \mathbb{Z}$	☐ vraie	☑ fausse	☐ pas de sens
$E = \mathbb{Q}$	☑ vraie	☐ fausse	☐ pas de sens
$E = \mathbb{R}$	☑ vraie	☐ fausse	☐ pas de sens
$E = \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$	☐ vraie	☐ fausse	☑ pas de sens

2	v	15	$\boxed{\text{f}}$	0	s	3	a
15	$\boxed{\text{v}}$	2	f	0	s	3	a
17	$\boxed{\text{v}}$	0	f	0	s	3	a
2	v	0	f	15	$\boxed{\text{s}}$	3	a

P11. « Soit $(x, y) \in E^2$ tel que $x < y$. Il existe $z \in E$ tel que $x < z < y$ »

$E = \mathbb{Z}$	☐ vraie	☑ fausse	☐ pas de sens
$E = \mathbb{Q}$	☑ vraie	☐ fausse	☐ pas de sens
$E = \mathbb{R}$	☑ vraie	☐ fausse	☐ pas de sens
$E = \mathbb{C}$	☐ vraie	☐ fausse	☑ pas de sens

2	v	15	$\boxed{\text{f}}$	0	s	3	a
15	$\boxed{\text{v}}$	2	f	0	s	3	a
17	$\boxed{\text{v}}$	0	f	0	s	3	a
2	v	0	f	15	$\boxed{\text{s}}$	3	a

P12. « Soit $y \in E$. Il existe $x \in E$ tel que $x^2 = y$ »

$E = \mathbb{Z}$	☐ vraie	☑ fausse	☐ pas de sens
$E = \mathbb{Q}$	☐ vraie	☑ fausse	☐ pas de sens
$E = \mathbb{R}$	☐ vraie	☑ fausse	☐ pas de sens
$E = \mathbb{C}$	☑ vraie	☐ fausse	☐ pas de sens

3	v	13	$\boxed{\text{f}}$	1	s	3	a
3	v	13	$\boxed{\text{f}}$	1	s	3	a
6	v	10	$\boxed{\text{f}}$	1	s	3	a
15	$\boxed{\text{v}}$	1	f	1	s	3	a

P13. « Soit $f : E \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in E$, $f(x+1) > f(x)$. Alors f est strictement croissante sur E »

$E = \mathbb{N}$	☑ vraie	☐ fausse	☐ pas de sens
$E = \mathbb{Z}$	☑ vraie	☐ fausse	☐ pas de sens
$E = \mathbb{R}$	☐ vraie	☑ fausse	☐ pas de sens
$E = \mathbb{C}$	☐ vraie	☐ fausse	☑ pas de sens

17	$\boxed{\text{v}}$	0	f	0	s	3	a
17	$\boxed{\text{v}}$	0	f	0	s	3	a
6	v	11	$\boxed{\text{f}}$	0	s	3	a
0	v	6	f	11	$\boxed{\text{s}}$	3	a

P14. « Combien y a t-il de nombres différents écrits ci-dessous ?
$\frac{1}{4}$; 0,1 ; $\frac{25}{100}$; $\frac{9}{90} \times 100$; 1-$\frac{3}{4}$; $\frac{1}{10}$; $5 \times \frac{1}{20}$ »

16 réponses : $\boxed{3}$; 1 réponse : 4 ; 3 absence de réponse

P15. « $0,33333333333333 \in]\frac{1}{3}; 1[$ »

☐ vraie ☑ fausse

0 v 17 $\boxed{\text{f}}$ 3 a

9 Documents à exploiter

Grandeurs et mesures au collège, Ressources pour les classes de 6e, 5e, 4e, et 3e du collège, ÉduSCOL 2007
https://media.eduscol.education.fr/file/Programmes/16/9/doc_acc_clg_grandeurs_109169.pdf
Algèbre quatrième : un enchainement de situations d'enseignement. Brochure du groupe collège de l'IREM d'Aquitaine, 2009
https://publimath.fr/numerisation/BO/IBO07001/IBO07001.pdf
Racine carrée de 5 existe t-elle ?, Bodin Nathalie ; Garnier Etienne ; Jegourel Catherine ; Masmoudi Mohamed ; Robert Guy ; Ruamps Françoise. IREM de Rennes (2001))
https://publimath.fr/biblio/IRN02008.htm
Les racines carrées au collège, Gimmillaro Martine ; Maurel Catherine ; Régnard Annick ; Sempere Fabienne ; Tiha Claude ; André Bernard. IREM de Lorraine (1998)
https://publimath.fr/ILO98003
La racine carrée en troisième - Etude d'une activité, Eric Roditi. IREM de Paris (1996))
https://publimath.fr/IPS96012
Histoire des nombres, Grégory Chambon, Que sais-je ? PUF 2024
https://www.cairn.info/histoire-des-nombres--9782715424197.htm
Voyages au pays des maths : Les nombres irrationnels
https://www.arte.tv/fr/videos/097454-009-A/voyages-au-pays-des-maths/
Voyages au pays des maths : Pique-nique sur le plan complexe
https://www.arte.tv/fr/videos/097454-010-A/voyages-au-pays-des-maths/