Géométrie en 6$^e$

# Une progression
# à partir de restaurations de figures

Groupe didactique des mathématiques, cycle 3
Irem d’Aquitaine

IREM d'Aquitaine
Université de Bordeaux UF MI
Bât A33 – 1er étage – Bureau 113
351 cours de la Libération 33405 TALENCE
https://math-interactions.u-bordeaux.fr/IREM

Groupe didactique de l'Irem d'Aquitaine

Emmanuelle Bongiovanni Sontag

(professeure, collège J. Zay, Cenon)

Caroline Bulf

(didacticienne des mathématiques, Inspé de l'Académie de Bordeaux, Lab-ED3, Université de Bordeaux)

Valentina Celi

(didacticienne des mathématiques, Inspé de l'Académie de Bordeaux, Lab-ED3, Université de Bordeaux)

Catherine Desnavres

(professeure retraitée)

Jean-Marc Gachassin

(professeur, collège Canterane, Castelnau de Médoc)

Marie Gervais

(professeure, collège J. Cocteau, Lège)

Florence Sanchez

(professeure, collège Bourran, Mérignac)

Fabienne Sériné

(professeure, collège F. Mitterand, Créon)

SOMMAIRE

# Introduction

# INTRODUCTION

## Qu'est-ce que signifie *faire* de la géométrie au début de l'enseignement secondaire ?

Le cycle 3 est marqué par un changement important d'institution scolaire : le passage du CM2 à la 6^e.

Ce dernier s'accompagne d'une évolution du regard que les élèves peuvent porter sur les figures géométriques mais aussi d'une évolution des façons d'agir avec les instruments et des façons de parler « la géométrie ».

## Alors comment accompagner les élèves dans cette « révolution » géométrique ?

## Commençons par un exemple : le carré, une figure usuelle mais complexe

Connu depuis la maternelle, les diverses étapes d'apprentissage autour du carré mettent en exergue toute sa « complexité » dans le passage d'une vision globale vers une caractérisation en tant qu'objet géométrique, défini par ses propriétés. Le langage évolue en même temps que les manières de voir le carré.

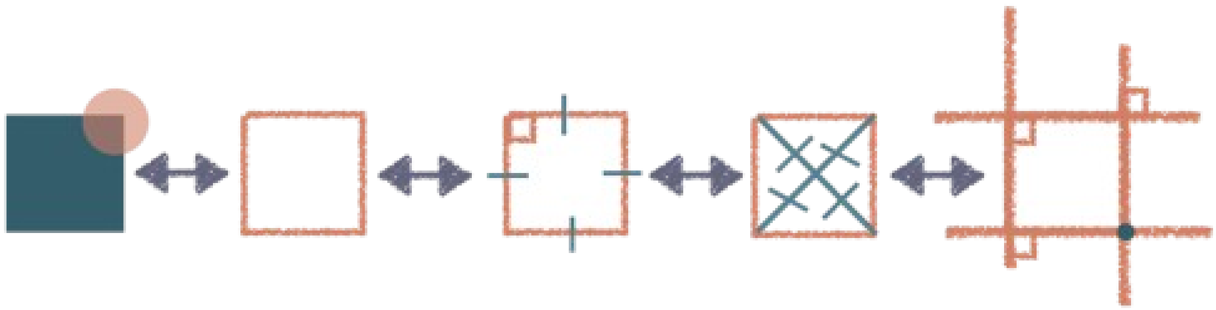


*Figure 1*. L'évolution du regard sur le carré : de la surface au réseau de lignes et de points.

Après une première reconnaissance globale en tant que surface, de son allure générale, le carré se décompose en unités figurales – figures élémentaires –, le changement de regard s'articulant avec ses propriétés, le lexique propre à la géométrie et les instruments dont on dispose pour le construire ou le reproduire.

Dans le cas où il faut restaurer le carré à l'aide d'une règle informable – sorte de règle non graduée sur laquelle on peut faire des marques effaçables pour reporter des longueurs – (Figure 2) ou d'une règle non graduée (Figure 3), les notions de « segment », puis de « droite » pourront émerger. En effet, la règle non graduée permet de tracer des « traits » rectilignes qui ont un début et une fin ou que l'on peut prolonger autant que l'on veut. Enfin, la notion de « point » émerge comme intersection de lignes.

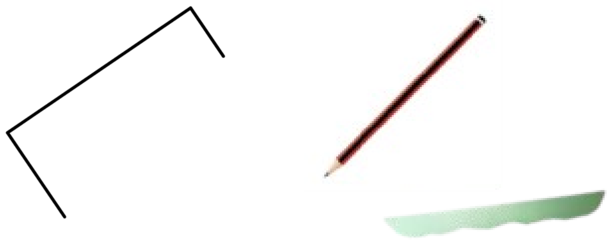


*Figure 2*. Le carré a quatre côtés de même longueur.

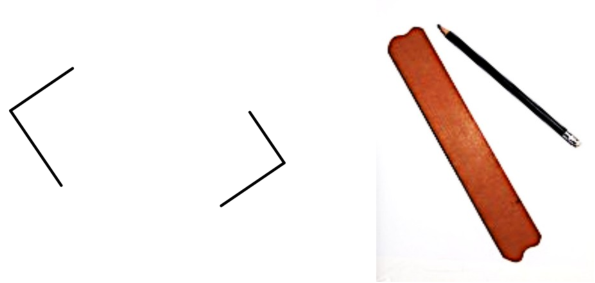


*Figure 3*. Dans un carré, les côtés sont portés par des droites et les sommets sont obtenus par intersection de droites.

De nombreux travaux font état de différentes « géométries » qui se retrouvent en tension dans un rapport ambivalent et porteur de potentielles contradictions et difficultés pour les élèves, à savoir le rapport au dessin (Parzysz, 1989 ; Chaachoua, 1997 ; Celi & Perrin-Glorian, 2014 ; Mathé & Mithalal, 2019).

Très récemment, Perrin-Glorian & Godin (2018) ainsi que Mathé et *al*. (2020) parlent de tension entre une « géométrie physique » et une « géométrie théorique », qui recouvrent deux types de pratiques dont les fondements épistémologiques sont profondément différents :

- la « géométrie physique », pratiquée à l'école primaire, concerne des problèmes à résoudre portant sur des objets matériels, qui peuvent être graphiques, à l'aide d'instruments matériels ;
- la « géométrie théorique », à laquelle se réfère essentiellement l'enseignement secondaire, concerne plutôt des problèmes mettant en jeu des figures théoriques, la validation de leurs propriétés s'appuie sur un raisonnement hypothético-déductif[1].

La rupture entre ces deux manières de « penser » la géométrie se manifeste donc dans la nature des problèmes posés[2] et dans les modes de validation. Mais ces deux manières de faire la géométrie entretiennent des liens étroits à exploiter dans l'enseignement, à travers celle que Perrin-Glorian & Godin (2018) nomment la « géométrie des tracés » : selon cette approche, la reproduction instrumentée de figures contribue à la conceptualisation des objets de la géométrie théorique, dans un développement mutuel entre techniques de construction avec les instruments et concepts géométriques.

1 Houdement & Kuzniak (2006) désignent par « géométrie axiomatique naturelle », GII, ce nouveau paradigme (par opposition au paradigme GI, dit de « géométrie naturelle »).

2 Originellement, nous renvoyons à Berthelot et Salin (1992) dont les travaux ont mis en évidence les différentes problématiques attachés aux problèmes géométriques scolaires : problématique « pratique », de modélisation « spatio-géométrique », ou « géométrique » (déductive).

C'est cette approche que nous avons choisie de développer pour cette brochure consacrée à l'enseignement et l'apprentissage de la géométrie en classe de 6e, approche qui s'inscrit d'ailleurs dans les prescriptions officielles actuellement en vigueur au cycle 3, où nous pouvons lire entre autres :

*« Prolongeant le travail amorcé au cycle 2, les activités permettent aux élèves de passer progressivement d'une géométrie où les objets (le carré, la droite, le cube, etc.) et leurs propriétés sont contrôlés par la perception à une géométrie où ils le sont par le recours à des instruments, par l'explicitation de propriétés pour aller ensuite vers une géométrie dont la validation ne s'appuie que sur le raisonnement et l'argumentation.*

*Différentes caractérisations d'un même objet ou d'une même notion s'enrichissant mutuellement permettent aux élèves de passer du regard ordinaire porté sur un dessin au regard géométrique porté sur une figure. »*

Les difficultés attachées à l'enseignement de la géométrie trouvent leur origine dans de nombreux malentendus venant de l'écart entre les façons de voir, d'agir et de parler attachées à une pratique « experte » de la géométrie, tenues par l'enseignant (géométrie théorique), et celles des élèves forgées par leurs connaissances anciennes de l'école primaire et leurs expériences de la vie quotidienne (géométrie physique).

Comme déjà évoqué avec l'exemple du carré, un même mot (« carré »), voire une même représentation graphique (Figure 1), peut recouvrir des significations bien différentes.

Une autre façon de parler de ces difficultés et obstacles potentiels (Brousseau, 1983) revient à considérer ce que Duval (2005) appelle le « hiatus dimensionnel » pour décrire les sauts entre visualisation et discours dans une activité géométrique[3], ces deux registres ne mobilisant par les mêmes procédés et traitements d'unités figurales, à savoir la surface (2D), la ligne (1D) et le point (0D).

Duval (*ib.*) décrit en particulier le processus de « déconstruction dimensionnelle » comme étant contraire au processus normal de visualisation, ce qui est source de grandes difficultés ou de malentendus pour les élèves.

En effet, selon Duval (1994, 2005), dans une démarche géométrique, la première façon de voir une figure pour un enfant privilégie la forme globale de la figure (2D) : la vision de surfaces lui apparaît plus directement au premier coup d'œil. Duval (*ib.*) parle alors de « visualisation iconique » pour désigner ce mode d'appréhension qui cherche à discriminer des formes d'un objet réel, de formes déjà connues.

3 Vergnaud (2001) met plutôt en lumière les ruptures entre les formes « opératoires » ou « prédicatives » de la connaissance. http://recherches.philippeclauzard.com/vergnaud_forme_connaissance.pdf

Duval et Godin (2005) distinguent en outre le processus de visualisation par juxtaposition (comme l'agencement des pièces de puzzle par exemple) ou par superposition (qui autorise, lui, le chevauchement des formes).

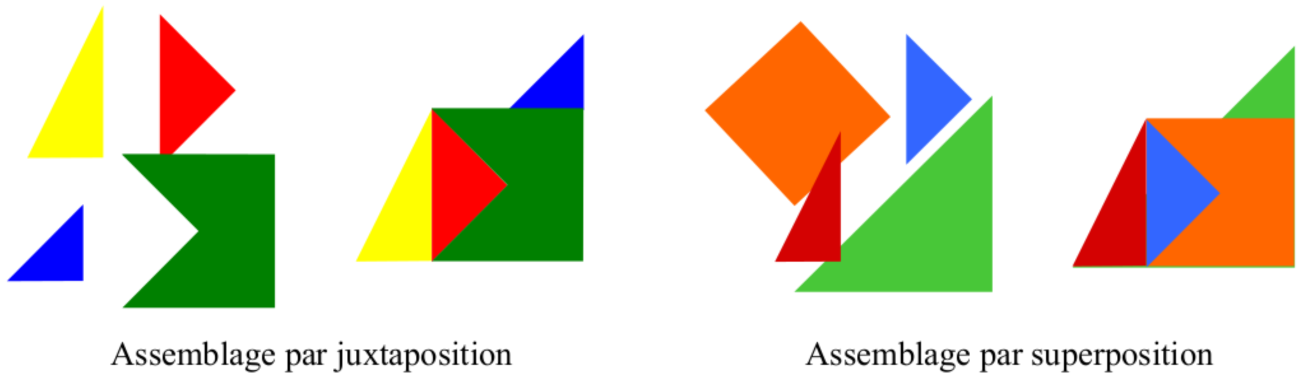



*Figure 4*. Distinction entre assemblage par juxtaposition ou par superposition (extrait de Bulf & Celi 2015b, p. 21).

Ces différentes manières de voir la figure sont importantes à signaler en introduction de cette brochure, car elles peuvent être à l'origine d'obstacles et donc des procédures différentes chez les élèves dans une tâche de reproduction.

Par exemple, la vision par juxtaposition n'est pas opératoire, dans le cas de la *rosace* (Figure 5) : elle ne permet pas de repérer les cercles.

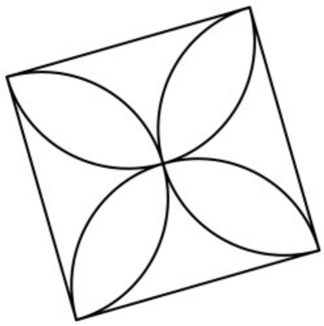


*Figure 5.* La *rosace* (extrait de Bulf & Celi, 2016).

En particulier, un assemblage par superposition (ou chevauchement) nécessite la prise en compte d'éléments 1D (lignes) à travers des prolongements possibles ou des alignements qu'une vision par juxtaposition ne permet pas.

En outre, un jeu sur certaines valeurs de variables didactiques bien choisies permet de faire basculer une vision d'un assemblage par juxtaposition à celle d'un assemblage par superposition (et réciproquement) : voir l'exemple de restauration proposé page 6, la restauration de la *rosace* (elle est décrite en détail – consigne, déroulement… – dans la partie 3).

Suivant l'*empreinte euclidienne*[4], certaines ressources des cycles 3 et 4 continuent de proposer, en première leçon de géométrie, une définition d'abord du point (0D), puis de la droite et le segment (1D) et enfin les figures (2D) comme si cette pratique ostensive suffisait pour faire passer les élèves d'une vision iconique à une vision non iconique (comme si les processus de déconstruction-reconstruction dimensionnelle allaient de soi).

Un postulat important du travail exposé dans cette brochure est de considérer que le processus de « déconstruction dimensionnelle » n'est ni immédiat ni spontané chez les élèves et qu'il est pourtant nécessaire pour entrer dans une géométrie théorique et développer une appréhension discursive (Duval, 1994) pour énoncer et articuler des propriétés géométriques dans une démarche de démonstration notamment.

Cette brochure a pour ambition de proposer une progression qui prend en charge les conditions nécessaires pour accompagner les élèves dans cette démarche en favorisant des jeux de déconstruction-reconstruction dimensionnelle (2D ↔ 1D ↔ 0D).

**Comment analyser une figure pour être capable de voir ce qu'il faut géométriquement y voir ?**

**Quels types de tâche et quelles figures pour faire changer la manière de voir des élèves ?**

**Comment organiser des activités centrées sur l'analyse des figures ?**

Ces questions sont au cœur des travaux initiés en 2000 dans un groupe de recherche du Nord de La France – depuis baptisé « le groupe de Lille » (en bibliographie : Duval, Godin, Mangiante, Mathé, Perrin-Glorian…) – et poursuivis dans plusieurs équipes françaises, notamment à Clermont-Ferrand et à Bordeaux.

Ces questions ont conduit le groupe de Lille à introduire des problèmes de reproduction de figures planes particuliers, baptisés des « problèmes de restauration » car ils consistent à reproduire une figure modèle – sans aucune indication sur les longueurs – à partir d'une amorce – le début de la figure à reproduire – et à l'aide d'instruments conventionnels ou non conventionnels.

Dans ce type de problèmes, le modèle à reproduire est une figure demandant un véritable travail d'exploration pour repérer des éléments qui ne figurent pas explicitement.

Le choix de l'amorce, de sa différence avec la figure modèle et leurs positions relatives sont aussi des éléments importants.

4 En parlant d'*empreinte euclidienne*, Celi (2005) veut signifier que nous avons emprunté à Euclide non seulement un savoir mais aussi une organisation de présentation pour le transmettre : dans son célèbre ouvrage – *Les éléments* – le géomètre grec définit en effet dans l'ordre d'abord le point, puis le segment et ensuite la droite.

Les instruments disponibles – gabarits, gabarits déchirés, règle informable, bande de papier que l'on peut plier…, règle non graduée, compas – varient selon la reproduction à effectuer et ils ont en outre chacun un coût, cela dans le but d'encourager l'élève à en utiliser certains aux dépens d'autres.

Par exemple, dans le cas illustré en Figure 6, il s'agit de restaurer une *rosace à quatre branches, inscrite dans un carré*, l'amorce proposée étant un carré. La figure modèle et l'amorce ne sont pas à la même échelle et orientées différemment par rapport aux bords de la feuille, cela afin d'encourager l'élève à l'analyse du modèle et d'éviter qu'il le reproduise en faisant appel aux longueurs ou par simple translation de certains éléments.

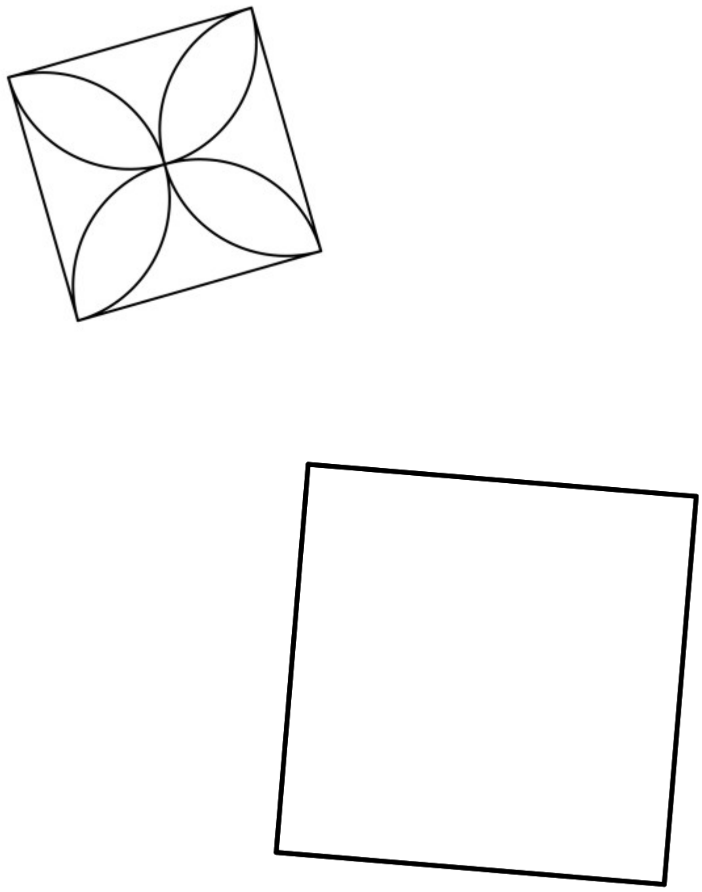


*Figure 6.* Un exemple de problème de « restauration » d'une figure géométrique plane (extrait de Bulf & Celi, 2016).

*Attention ! La figure 6 est constituée de deux images : la rosace inscrite dans le carré (modèle) et le carré (amorce). Il faut qu'elles soient sur la même page.*

Selon les instruments mis à disposition et leur coût, l'analyse du modèle varie.

Dans ce cas (Figure 6),

- si l'élève dispose d'un gabarit de demi-disque, il faut qu'il identifie le bord droit du gabarit comme étant de même longueur que les côtés de l'amorce carrée ; par ailleurs, ce gabarit aide à voir une superposition de demi-disques sur la figure-modèle ;

- s'il peut se servir d'un compas, il faut qu'il repère que les centres des demi-cercles à tracer coïncident avec les milieux des côtés du carré ;
- la règle graduée n'étant pas disponible ou ayant un coût élevé, c'est le recours à une règle informable ou à une bande de papier que l'on peut plier qui lui permettra de placer les centres des demi-cercles à tracer pour restaurer la *rosace*.

En effet, l'absence de la règle graduée ou son coût élevé constituent un autre postulat fondamental au cœur de l'approche développée par le groupe de Lille et que nous partageons dans cette brochure : le travail sur les grandeurs géométriques **sans recours à la mesure** conduit à conceptualiser les objets géométriques ainsi que les opérations sur les grandeurs.

Cette brochure rassemble un grand nombre de problèmes dits de restauration.

Nous détaillons en particulier les différentes valeurs retenues pour un ensemble de variables didactiques qui sont communes à l'ensemble des situations proposées (renforçant la continuité construite tout au long de l'année) :

- *la nature des figures et leur complexité (juxtaposition, superposition, propriétés et relations géométriques…) ;*
- *le choix de l'amorce et « la différence » entre la figure modèle et l'amorce (autrement dit toutes les étapes intermédiaires, tous les tracés non visibles qui restent à la charge de l'élève) ;*
- *l'échelle (agrandissement-réduction de la figure modèle) ;*
- *les positions relatives entre la figure-modèle et la figure-amorce mais aussi par rapport aux bords de la feuille ;*
- *la taille de la figure modèle et de l'amorce ;*
- *le support (feuille blanche…) ;*
- *les contraintes sur les instruments mis à disposition (le coût sur les instruments) ;*
- *modes de validation (vérification du respect des propriétés de la figure modèle, calque…).*

Nous revenons en détail sur toutes ces variables lors des premières situations de la brochure.

## BIBLIOGRAPHIE & SITOGRAPHIE

***Cette bibliographie/sitographie compte des références citées explicitement dans l'introduction ainsi que des textes qui permettront aux usagers de cette brochure, s'ils le souhaitent, d'approfondir le thème en question.***


- Berthelot R. & Salin M.-H. (1992). *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire,* Thèse de doctorat, Université de Bordeaux. https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00414065/document
- Brousseau G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches En Didactique Des Mathématiques*, 4(2), 165-198. https://revue-rdm.com/1983/les-obstacles-epistemologiques-et/
- Bulf, C. & Celi, V. (2015a). Des problèmes de reproduction aux problèmes de restauration de figures géométriques planes : quelles adaptations pour la classe ? 41e Colloque de la COPIRELEM, Mont-de-Marsan, 2014.
- Bulf C. & Celi V. (2015b). Une étude diachronique de problèmes de reproduction de figures géométriques au cycle 3. *Grand N*, 96, 5-33.
- Bulf C. & Celi V. (2016). Essai d'une progression sur le cercle pour l'école primaire – une articulation clé : gabarit-compas. *Grand N*, 97, 21-58.
- Bulf, C. & Celi, V. (2018). Changement de regard sur le cercle, Le bulletin de l'APMEP. *Au fil des maths*, *530*, 41-49.
- Bulf C., Mathé A.-C. (2018). Agir-parler-penser en géométrie, un point de vue sémiotique sur l'enseignement et l'apprentissage de la géométrie à l'école primaire. *Actes du 44e Colloque de la Copirelem*, Épinal, 13-15 juin 2017.
- Celi V. (2005). Une comparaison de l'enseignement de la géométrie dans le secondaire en France et en Italie. *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies*. 5-3, 377-399.
- Celi V. & Perrin-Glorian M.-J. (2014). Articulation entre langage et traitement des figures dans la résolution d'un problème de construction en géométrie. *Spirale – Revue de recherche en éducation*, n. 54, 151-174.
- Chaachoua (1997). Fonction du dessin dans l'enseignement de la géométrie dans l'espace. Étude de cas : la vie des problèmes de construction et rapports des enseignants à ces problèmes. Thèse de doctorat. Université Joseph Fourier, Grenoble. https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-02047251/document
- Duval R., Godin M., Perrin Glorian M.-J. (2004). Reproduction de figures à l'école élémentaire, *Actes du séminaire national de Didactique des Mathématiques de l'ARDM*, Ed. Irem de Paris 7.
- Duval R., Godin M. (2005). Les changements de regards nécessaires sur les figures. *Grand N*, 76, 7-27.

- Godin M., Perrin M.-J. (2009). De la restauration de figure à la rédaction d'un programme de construction. Le problème de l'élève, le problème du maître. *Actes du 35ème colloque la Copirelem, Bordeaux – Bombannes*, 2008.

- Houdement C. & Kuzniak A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives*, 11, 175-193. https://mathinfo.unistra.fr/websites/math-info/irem/Publications/Annales_didactique/vol_11_et_suppl/adsc11-2006_007.pdf

- Keskessa B., Perrin-Glorian M.-J., Delplace J.-R. (2007). Géométrie plane et figures au cycle 3. Démarche pour élaborer des situations visant à favoriser une mobilité du regard sur les figures de géométrie. *Grand N*, 79, 33-60.

- Mangiante & Perrin-Glorian, http://lea-geometrie.etab.ac-lille.fr/

- Mangiante C. (2013). Une étude du processus d'appropriation par des enseignants de situations produites par la recherche pour l'enseignement de la géométrie. *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques de l'ARDM,* Irem Paris 7.

- Mangiante C., Perrin-Glorian M.-J. (2014). Géométrie en primaire : des repères pour une progression et pour la formation des Maîtres. *Grand N,* 94, 47-83.

- Mathé A.-C., Barrier T., Perrin-Glorian M.-J. (2020). Enseigner la géométrie élémentaire. Enjeux, ruptures et continuités. Éd. Academia L'Harmattan.

- Mathé A.-C. & Mithalal J. (2019). L'usage des dessins et le rôle du langage en géométrie : quelques enjeux pour l'enseignement, dans S. Coppé et al. (éds.), *Nouvelles perspectives en didactique : géométrie, évaluation des apprentissages mathématiques,* Grenoble : La pensée sauvage, 47-86.

- Parzysz, 1989. « Knowing » vs « seeing », problems of the plane representation of space geometry figures. Educational Studies of Mathematics, 19, 79-92.

- Perrin Glorian M.-J., Mathé A.C, Leclercq R. (2013). Comment peut-on penser la continuité de l'enseignement de la géométrie de 6 à 15 ans ? *Repères IREM*, 90, 5-41.

- Perrin-Glorian M.-J. & Godin A. (2014). De la reproduction de figures géométriques avec des instruments vers leur caractérisation par des énoncés. *Math-École*, n° 222, Numéro Spécial sur la géométrie, 26-35.

- Perrin-Glorian M.-J. & Godin M. (2018). Géométrie plane : pour une approche cohérente du début de l'école à la fin du collège. CORFEM *Ressources pour la formation des professeurs. Savoirs mathématiques à enseigner au collège et au lycée. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01660837v2/document*

- Vergnaud G. (2001). Forme opératoire et forme prédicative de la connaissance Conférence publiée dans les Actes du Colloque GDM-2001 http://www.recherches.philippeclauzard.com/vergnaud_forme_connaissance.pdf

- Godin, *https://www.aider-ses-eleves.com/*

# La fiche-outils
# ou l’usage géométrique des instruments

## La « fiche-outils » ou l'usage géométrique des instruments

Les problèmes de reproduction, et notamment de restauration, proposés dans cette brochure permettent de faire évoluer le regard de l'élève sur les figures ainsi que l'usage des instruments.

Comme déjà précisé dans l'introduction (pages 3 et suivantes), la *géométrie physique* et la *géométrie théorique* entretiennent des liens étroits à exploiter dans l'enseignement, à travers celle que Perrin-Glorian & Godin (2018) nomment la *géométrie des tracés*. Selon cette approche, la reproduction de figures, à l'aide d'instruments, contribue à une articulation entre usage des instruments et conceptualisation en géométrie.

C'est ainsi que les instruments acquièrent un double rôle, matériel et théorique :

« *Pour que les instruments matériels qu'utilisent les élèves puissent jouer le rôle d'interface entre la géométrie physique et la géométrie théorique, il est important que ceux-ci apprennent à en faire un usage que nous appelons géométrique parce qu'il respecte des règles qui correspondent à la représentation de propriétés géométriques avec les instruments théoriques et qui réfèrent implicitement à des axiomes, des définitions ou des théorèmes de géométrie.*

*Cet apprentissage [...] nous paraît essentiel pour éclairer les liens entre géométrie physique et géométrie théorique [...].*

*En effet, l'usage des instruments est à relier à la finalité de la géométrie : si la finalité est pratique, on cherche à avoir le plus de précision possible en fonction des instruments dont on dispose ou à adapter l'usage des instruments pour obtenir plus de précision dans le tracé, ce que nous appelons un usage technique des instruments ; si la finalité est théorique, on cherche à avoir une construction juste grâce à un usage géométrique des instruments.*

*L'enjeu du cycle 3, et plus particulièrement de la classe de 6e pourrait être de passer d'un usage technique à un usage géométrique des instruments* »

(Perrin-Glorian & Godin, *ib.*, p. 22).

Les instruments utilisés ne sont pas des instruments de mesure : cette géométrie des tracés fait intervenir des grandeurs mais sans nécessité d'utiliser la mesure et donc des nombres. Néanmoins, dans certaines situations, la règle graduée sera autorisée pour ne pas bloquer les élèves et permettre à toutes et tous de trouver une solution au problème de restauration posé – son coût sera par contre élevé.

Les instruments utilisés ne sont pas seulement les instruments usuels : règle non graduée – la règle usuelle avec impossibilité d'en utiliser les graduations ou règle fabriquée en carton très fin plastifié par exemple, équerre, compas. Ce sont aussi la bande de papier avec un bord droit, que l'on peut éventuellement plier, la règle informable, les gabarits d'angles ou de formes, etc.

Chaque instrument a une fonction en lien avec des *concepts et relations géométriques* :

- la règle non graduée permet de tracer un trait rectiligne, de vérifier des alignements (*droite, alignement*) ;
- la bande de papier ou la règle informable permet de reporter une longueur sur une droite déjà représentée (*longueur, distance*) ; plus tard, dans la progression, le compas sera aussi un instrument de report de longueur ;
- la bande de papier avec un bord droit que l'on peut plier permet d'obtenir une longueur moitié (*milieu d'un segment*) ;
- le compas permet de tracer un cercle (*cercle, centre, rayon*) ;
- l'équerre permet de tracer un angle droit (*angle droit, perpendicularité*) ;
- un gabarit d'angle permet de reporter un angle, de tracer une droite dans une direction donnée par une autre droite (*angle, direction*).

Construire des parallèles (il n'y a pas d'instrument) sera l'occasion de trouver de nouvelles relations – grâce à l'utilisation des gabarits d'angle, angles correspondants, double perpendicularité – et d'amorcer un passage vers la géométrie théorique.

Au fur et à mesure de la progression des connaissances des élèves, le nombre d'instruments nécessaires se restreint pour tendre vers l'utilisation de la règle et du compas seuls.

En proposant aux élèves de produire cette fiche-outils, il s'agit d'abord d'établir avec eux des règles de « bon usage » des instruments.

- Pour pouvoir utiliser la règle, il faut avoir deux points ou un trait droit déjà tracé.
- Pour utiliser la bande de papier ou la règle informable ou le compas pour un report de longueur, il faut avoir un support rectiligne et un point de départ.

  En l'absence de support, il faut le compas pour tracer un cercle ou un arc de cercle.
- Pour obtenir une longueur moitié, il faut reporter le segment sur la bande de papier et on la plie de façon à superposer les deux marques.
- Pour utiliser le compas pour tracer un cercle, il faut un point pour poser la pointe (le centre) et un autre point pour poser la mine ou une longueur (rayon) qui donne l'écartement.
- Pour utiliser l'équerre ou un gabarit d'angle droit, il faut un support tracé pour poser un côté de l'angle droit et, éventuellement, un point.
- Pour utiliser un gabarit d'angle, il faut un support tracé pour poser un côté de l'angle et un point pour poser le sommet.
- …

Ces règles permettent de se mettre d’accord, avec les élèves, au cours de leurs recherches, sur ce qu’est une construction « au hasard » et donc erronée.

Dans le cas de la règle non graduée, cette étape cruciale est détaillée dès la première situation, dans la partie 1, restauration 1-1 pages 29-30.

Ces règles permettent aussi de pouvoir faire référence, pour chaque instrument, à son usage géométrique, c’est-à-dire au lien avec les objets géométriques qu’ils permettent de représenter et au lien avec les relations/propriétés dont ils sont porteurs.

Cette fiche-outils se trouve sur des pages spéciales du « cahier de leçons », à compléter au fur et à mesure de l’avancée dans les restaurations et de l’usage des instruments.

**Nous en proposons des exemples ci-après.**

Elle peut aussi faire l’objet d’un affichage dans la classe.

**Un exemple de fiche-outils visée**

## Usage géométrique des instruments

### Usage de la règle (non graduée)

Pour poser sa règle, il faut deux points déjà représentés ou un trait droit déjà tracé que l'on prolonge.

Lors d'une restauration de figure :

- sur le modèle, la règle permet de vérifier des alignements ;
- sur la figure à réaliser, elle permet de tracer des traits qui représentent des segments, des droites.

### Usage d'une règle informable ou d'une bande de papier pour un report de longueur

Pour reporter une longueur, il faut :

- un support droit c'est-à-dire une droite ou un segment (que l'on peut prolonger si besoin) déjà représentés ;
- un point de départ.

### Usage d'une bande de papier pour placer le milieu d'un segment

Le milieu d'un segment est aligné avec les extrémités et il se trouve à la même distance de ces deux extrémités :

- on reporte la longueur du segment sur le bord droit de la bande ;
- on la plie en faisant coïncider les deux extrémités, on obtient une longueur moitié ;
- on reporte cette longueur moitié à partir d'une des extrémités du segment, « vers l'intérieur ».

### Usage du compas

➔ Pour reporter une longueur

« L'écartement » du compas est pris entre deux points déjà placés ou avec un segment déjà tracé.

On reporte à partir d'un point existant sur un support existant (segment, droite, demi-droite), on fait une marque [on trace un arc de cercle].

➔ Pour tracer un cercle, un arc de cercle

Il faut un point (le centre) pour poser la pointe.

Il faut un autre point pour placer la mine ou une longueur qui donne « l'écartement » pour avoir le rayon.

Usage du gabarit d'angle droit

Pour poser son gabarit d'angle droit, il faut un trait existant (représentant une droite, une demi-droite, un segment) sur laquelle poser un côté de l'angle droit.

L'autre côté de l'angle droit peut-être « en appui » sur un point déjà représenté.

Usage de l'équerre pour tracer deux droites perpendiculaires

Pour poser son équerre, il faut une droite sur laquelle poser un côté de l'angle droit.

L'autre côté de l'angle droit peut-être « en appui » sur un point déjà représenté.

...

(À compléter en fonction des outils utilisés.)

**Avec l'apparition de la mesure :**

Usage de la règle graduée pour tracer un segment de mesure donnée

C'est un report de longueur.

Pour reporter une longueur donnée par une mesure, il faut :

- un support droit c'est-à-dire une droite ou un segment (que l'on peut prolonger si besoin) déjà représentés ;
- un point de départ ;
- la graduation 0 positionnée sur ce point de départ.

*(Cette règle est particulièrement utile dans le cas de la construction d'un triangle connaissant les mesures de ses trois côtés, pour laquelle un usage erroné de la règle graduée est parfois prégnant !)*

## Un exemple de trace écrite

Utilisation des instruments de géométrie

* La règle non graduée

Elles sert à tracer des traits sans mesurer.

Pour tracer ces traits, on positionne la règle :

— sur deux points.

— sur un trait déjà existant.

— Elle sert à trouver l'alignement de points

* La règle ~~infor~~ informable

Elle sert à reporter des longueurs sans mesurer.

* La règle graduée

• Elle sert à mesurer des longueurs.

• Elle sert à placer le milieu d'un segment.

* Le compas

• Il sert à reporter des longueurs (sans mesurer) et (symétrie)

• Il sert à tracer des cercles ou des arcs de cercle.

• Il sert à construire des triangles.

• Il sert à construire une droite perpendiculaire à un droite con

• Il sert à construire des parallélogrammes : rectangle, losange car

• Il sert à construire les droites remarquables : médiatrice et bisse

* L'équerre

• Elle sert à tracer des angles droits, des droites perpendiculaires.

• Elle sert à tracer des droites parallèles

# La progression proposée

## La progression proposée

### Les solides, l'espace

Pour une déconstruction dimensionnelle complète, le premier chapitre se doit d'avoir pour thème l'espace, les solides.

Il s'agit de « démarrer » en modélisant l'espace 3D dans lequel évoluent les élèves pour en arriver à la nécessité de l'étude d'éléments 2D (faces...), 1D (arêtes...) et 0D (sommets…).

Cependant, dans cette brochure, nous ne traiterons pas cette partie « Espace ».

De nombreux travaux existent déjà comme, par exemple, la brochure « Espace et géométrie » de l'Irem de Clermont-Ferrand.

(*http://www.irem.univ-bpclermont.fr/Espace-et-geometrie*)

### 1 - Segment, droite, point, alignement

### 2 - Milieu d'un segment

**Exercices segments/points, milieu** (à programmer à la suite et à distance)

**Figures téléphonées** (à insérer régulièrement dans la progression générale)

### 3 - Exercices à faire « à distance » sur la symétrie axiale

(à programmer régulièrement avant la partie 9)

### 4 – Cercle

**Construction de triangles**

### 5 - Médiatrice d'un segment

### 6 – Angles

### 7 – Droites perpendiculaires, droites parallèles

### 8 - Restaurations autour des quadrilatères particuliers

### 9 – Symétrie axiale (définition ponctuelle)

# Partie 1
# Segment, droite, point, alignement

## 1 - Segment, droite, point, alignement

Nous reprenons, ci-dessous, des éléments d'un exposé d'Anne-Cécile Mathé et d'Aurélie Chesnais (XXV° colloque de la CORFEM, Bordeaux, juin 2018) pour préciser les objectifs des restaurations proposées dans cette partie.

- Il faut amener les élèves à construire un rapport géométrique aux dessins (c'est-à-dire analyser, traiter, décrire ces dessins pour pourvoir les reproduire, les construire) :

- par l'utilisation des instruments ;
- en jouant sur des visions en termes de surfaces (2D), de lignes (1D), de points (0D) ;
- en prolongeant des bords de formes en « traits que l'on peut prolonger autant que l'on veut » ;
- en percevant et en reproduisant, à l'aide d'instruments, des relations entre des traits (bords de formes) et des sommets ou entre des sommets ;
- en construisant un sommet comme point, intersection de lignes ;
- en reproduisant des traits à partir d'un autre trait ou de deux points.

- Grâce à un usage réglé des instruments, les élèves accèdent à des premiers niveaux de conceptualisation des objets géométriques.

Par exemple, que peuvent-être une droite, un point, un segment en géométrie des tracés ?

- Un segment est un trait rectiligne (fini ; avec un début et une fin).
- Une droite est un trait rectiligne que l'on peut toujours prolonger, que l'on peut prolonger autant qu'on veut (idée d'infini).

  (Une classe de traits de même direction et de différentes longueurs.)
- Un point est l'intersection de lignes (ou de traits) ou l'extrémité d'un segment.

- Les relations entre ces objets géométriques visées ici sont :

- On peut prolonger un segment en une droite.
- Il existe des points sur une droite (une ligne).
- Une droite est caractérisée par un segment ou deux points.

  « Pour tracer une droite, on doit avoir un segment (que l'on prolonge) ou deux points. »
- Les notions d'alignement :
  - segment-segment ;

- segment-point ;
- points.

« Ils » sont portés par une même droite.

- Des points sont alignés « s'ils sont » sur la même droite.
  (avant de passer à « s'ils appartiennent » à la même droite).

**Les restaurations proposées dans cette partie visent tous ces objectifs, de manière progressive.**

Les restaurations 1-1, 1-2 et 1-3 sont des situations d'enseignement qui sont à faire vivre en classe.

Leur description est volontairement très détaillée : il s'agit de préciser le déroulement de ce type de situations, leurs objectifs, les réactions prévisibles des élèves, leurs difficultés particulières, les points de vigilance pour le professeur ainsi que les concepts et relations géométriques à mettre en évidence.

Avec ces premières restaurations, les « règles du jeu » sont posées pour les élèves et seront valables pour toutes les autres restaurations de la progression. Leur dévolution en sera grandement facilitée et la mise au travail plus rapide et motivée !

Cela permettra au professeur d'aborder les restaurations suivantes avec tous les éléments principaux, génériques, et facilitera leur prise en main pour les mener en classe. La lecture des autres parties de la progression en sera aussi allégée !

Chacune de ces trois restaurations représente une à deux séances.

Des exercices d'application sont proposés. Certains peuvent être faits immédiatement ou rapidement après, mais il n'est pas inutile d'en proposer de manière « déconnectée » plus tard dans l'année.

**Quelques précisions concernant la validation**

Différentes formes de validation sont possibles : le calque, les règles d'usage géométrique des instruments, le coût d'utilisation des instruments (lorsqu'il est mis en place), le respect des propriétés de la figure modèle (alignements, intersections…).

Le calque peut poser problème si la figure, faite au hasard ou à vue, est finalement proche du bon résultat… Il peut donc occulter l'objectif de mise en évidence des propriétés de la figure modèle.

Nous privilégierons donc l'explicitation des propriétés de la figure modèle. Les tracés sur l'amorce seront ainsi justifiés, ce qui permettra le contrôle de l'usage géométrique des instruments qui sera défini progressivement au fur et à mesure de la progression.

Lors des mises en commun, il est essentiel de favoriser la verbalisation des objets géométriques utilisés et représentés ainsi que leurs relations et/ou propriétés afin ne pas rester sur le plan unique de l'usage des instruments.

Au moins dans les premiers temps, nous acceptons les mots des élèves sans faire preuve d'une rigueur « excessive » pour éviter tout blocage dans la verbalisation, l'explicitation des procédures ou raisonnements. Il est par contre essentiel de reprendre chacun des termes employés par les élèves afin de les mettre en relation avec les concepts géométriques étudiés et le vocabulaire adéquat.

La nécessité de nommer les points, le langage géométrique, les codages apparaissent alors progressivement et naturellement : ils convainquent par leur utilité, leur praticité et ne sont donc pas posés a priori sans sens ou justification.

Il en est de même des objets géométriques, de leurs relations, de leurs propriétés dont la conceptualisation est ainsi travaillée avant toute institutionnalisation.

**Généralités sur les restaurations (documents élève, organisation des séquences…)**

- L'amorce doit être de grande taille pour mettre en évidence les erreurs de tracés (en particulier, pour les constructions à vue).

- En fonction des situations, le modèle et l'amorce peuvent être de même taille ou de tailles différentes : par contre, leurs orientations doivent être différentes (pour éviter des procédures du type « glissement » par exemple).

- Chaque situation peut démarrer par la question : « Que voyez-vous ? » en ne présentant que la figure modèle.

La vision première, naturelle, étant une vision surface (2D) avec des parties juxtaposées ou superposées (voir la partie « Introduction »), l'idée est de mettre en évidence avec les élèves lors des mises en commun finales, la nécessité dans l'analyse des figures d'affiner le regard pour « voir » des éléments 1D et/ou 0D, autrement dit la nécessité d'**un changement de regard** sur les figures.

**Exemples de bilan final visé après les restaurations proposées**

## Segment, droite, point, alignement

***Premier exemple***

**Des définitions**

Un segment est représenté par un trait rectiligne*, avec un début et une fin (un segment est limité).

Une droite est représentée par un trait rectiligne* que l'on peut toujours prolonger, que l'on peut prolonger autant qu'on veut (une droite est infinie, illimitée).

Deux droites ou deux segments ou une droite et un segment qui se coupent, se coupent en un point (on parle de point d'intersection).

L'intersection de deux traits représente un point.

Aux extrémités d'un segment, il y a deux points.

**Relations entre point(s), segment et droite**

- Sur une droite, sur un segment, il y a des points.
- Un segment est « porté » par une droite.
- Une droite est définie par deux points (ou par un segment).

- **Alignement**
  - Lorsque deux segments sont « portés » par la même droite, on dit que ces deux segments sont alignés.
  - Lorsque un segment et un point sont « portés » par la même droite, on dit que ce segment et ce point sont alignés.
  - Lorsque des points, au moins trois, sont sur la même droite (appartiennent à la même droite), on dit que ces points sont alignés.

* Trait rectiligne : trait droit que l'on trace avec une règle.

***Deuxième exemple***

<u>Avec une règle, on peut :</u>

- tracer des traits,
- prolonger des traits,
- repérer des alignements de traits,
- repérer des traits qui se rejoignent.

<u>Institutionnalisation (inspiré de phrases diverses employées par les uns et les autres) :</u>

- Un trait représente un <u>segment</u>, il a un début et une fin.
- Un « trait que l'on peut prolonger autant que l'on veut » représente une <u>droite</u>.
- Deux traits qui se croisent représentent un <u>point</u>.
- Deux droites ou deux segments ou une droite et un segment qui se coupent, se coupent en un point ; on parle de <u>point d'intersection</u>.

(Pour plus tard car difficile : aux extrémités d'un segment, il y a deux points.)

**Ce bilan final doit être obtenu, négocié avec la classe.**

**Si certains aspects ne sont pas apparus, ce n'est que partie remise.**

# <u>Restauration 1-1</u>

## Objectifs

- « Poser les règles du jeu » pour l'ensemble des restaurations à venir.

En particulier :

- règles d'usage de la règle non graduée en lien avec ce que l'on explicitera comme « construction au hasard » ;
- nécessité d'analyser la figure modèle pour en découvrir les propriétés (« comment elle est construite ») et donc de faire des tracés sur le modèle pour faire cette analyse.

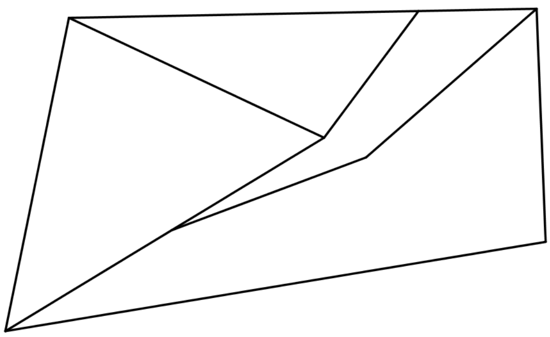
- Commencer le travail de conceptualisation des objets géométriques point, segment, droite et leurs relations, alignement, intersection…

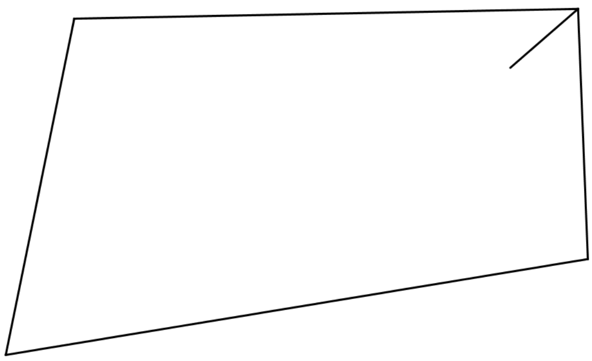
- Apprendre à faire évoluer le regard sur les figures (passer progressivement d'une vision 2D à une vision 1D et/ou 0D).

## Consigne

Reproduire la figure donnée à partir de l'amorce proposée.

Le seul instrument autorisé est **<u>la règle non graduée</u>**.





Remarques

Le modèle et l'amorce sont de tailles différentes : il s'agit de bloquer toute tentative de mesurage. Il est important aussi de veiller à ce que le rapport de longueurs entre le modèle et l'amorce ne soit pas trop simple pour éviter des calculs de longueurs.

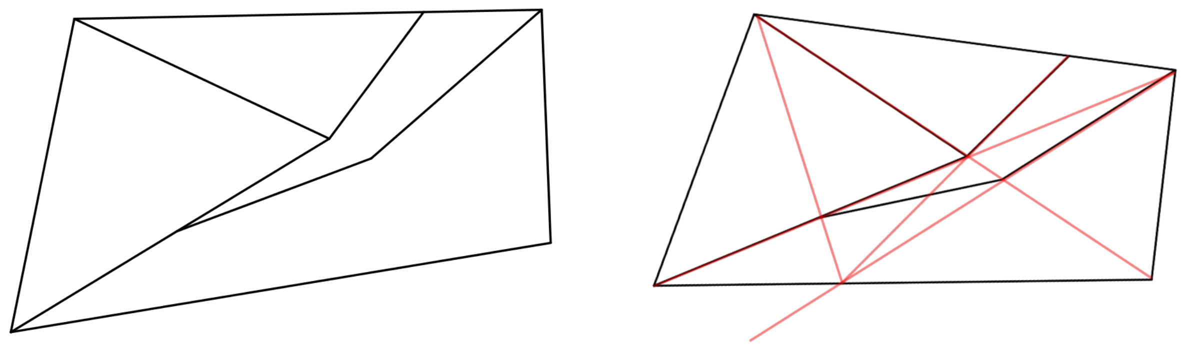
Le modèle et l'amorce sont d'orientations différentes : cela permet d'éviter par exemple des procédures de type « glissement ».

(Un exemple de document élève est proposé en annexe.)

On attend des élèves :

- qu'ils prononcent les mots : prolonger, diagonale, alignement ;
- qu'ils abordent les concepts de segment, de droite, de point (représenté par l'intersection de deux traits).

**Résolution**



Il faut repérer deux types d'alignement dans la figure modèle :

- alignement point-segment ;
- alignement de points.

Pour la construction à partir de l'amorce, les élèves devront :

- joindre des points (représentation et concept de segment) ;
- prolonger des segments sans vraiment savoir « où s'arrêter » (représentation et concept de droite) ;
- aborder une première représentation de points comme intersection de lignes.

Les difficultés principales de cette première restauration sont liées au bon usage de la règle non graduée et au repérage de trois points alignés.

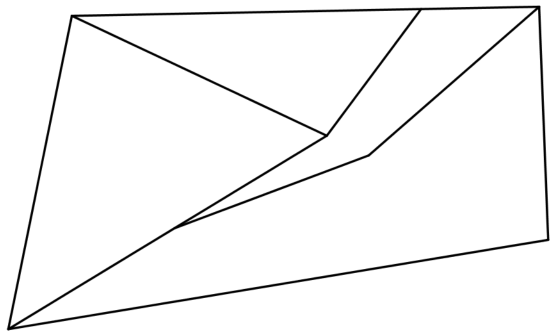
C'est dans cette situation que les élèves comprennent (s'approprient) la « règle du jeu ». Beaucoup de choses se mettent en place préparant les restaurations suivantes (« règle du jeu »).

## <u>**Restauration 1-1 : un déroulement, points de vigilance**</u>

Le professeur commence par montrer **la figure modèle <u>seule</u>**.

### Question initiale

« Que voyez-vous ? »



Les élèves ont une petite minute pour écrire leurs réponses.

Le choix de faire écrire les élèves est justifié par le fait que, les participations orales induisent ou parasitent la vision des autres élèves.

Il s'ensuit une synthèse rapide sans intervention du professeur sinon peut-être pour recadrer certaines réponses (voir plus loin).

Des réponses obtenues lors d'expérimentations :

« pyramide » (revient souvent), « carte postale », « rectangle », « triangles », « une enveloppe » (plusieurs fois aussi), « une branche », « un cadre penché avec un triangle », « des équerres », « triangle équilatéral », « un rectangle avec des côtés penchés et des lignes à l'intérieur. Certaines lignes forment des triangles. », « la moitié d'une lettre », « des traits, des triangles », « des segments », « polygone », « moitié d'un éclair »…

Les élèves voient des formes dans leur globalité. À noter également, la pluralité des points de vue (presque un élève, un point de vue !).

Une vision 3D peut être surprenante mais les élèves concernés « assument » en venant montrer au tableau ce qui pourrait être le sommet, les faces latérales...

Comme précisé dans la partie introductive et comme on peut le constater, la première vision n'est pas forcément celle attendue et utile lorsque l'on travaille en géométrie et ce, même si quelques-un·e·s parlent tout de même de lignes, de segments.

Lors des premières restaurations, certaines réponses se situent dans des domaines très ouverts souvent en référence avec leur culture quotidienne… Dès la deuxième restauration, il sera utile de préciser le cadre du cours de mathématiques pour réorienter les réponses.

Nous rappelons que la question est posée pour pouvoir mettre en perspective ces réponses avec ce qu'il aura été nécessaire de « voir » pour réaliser la restauration. L'objectif est de mettre en évidence pour les élèves, le changement de regard qu'ils auront effectué sur la figure pour réaliser la restauration.

Un retour est donc à prévoir en fin de situation.

**Consigne et première phase**

« Il s'agit maintenant de reproduire (restaurer) cette figure modèle à partir de l'amorce proposée. »

Le mot « amorce » est explicité : une partie de la figure à reproduire ou restaurer.

Un seul instrument est autorisé ici : la règle non graduée.

Cela mérite une explication à la classe : c'est la règle usuelle, mais on ne se sert pas des graduations. Autrement dit, il n'est pas autorisé de mesurer.

Cela doit être clairement précisé pour éviter un usage prégnant de la mesure (voir en introduction), en particulier pour la recherche de coefficients d'agrandissement ou de réduction dans le cas de modèle et amorce de tailles différentes.

Le professeur n'en dit pas plus à ce stade et demande aux élèves de se mettre au travail.

Une première phase de recherche individuelle commence. Elle est brève (2-3 minutes).

La très grande majorité des élèves se lance dans une construction à vue et certains ont très vite « fini »…

Très peu d'élèves recherchent les propriétés de la figure modèle (elles ne peuvent ici s'obtenir qu'en traçant sur le modèle, ce qui n'est pas fait ou très rarement).

Quelque-un·e·s prolongent le trait sur l'amorce (sans savoir forcément pourquoi).

Le professeur passe voir ces élèves qui ont « fini » pour leur demander d'expliquer leur construction : ils expliquent en général avoir posé leur règle « comme ça » en mimant. La construction n'est donc pas justifiée, elle a été faite à vue.

Il faut maintenant convaincre que cela ne convient pas !

Il est nécessaire de préciser « les règles du jeu » avec une première mise en commun.

L'expression **« construction au hasard »** peut être employée mais doit être largement explicitée pour arriver à un consensus avec la classe. En effet, « à vue » pour les élèves ne signifie pas « au hasard » puisque la règle n'est pas posée « n'importe où » ou « n'importe comment » pour eux : le trait tracé est « là où il doit être puisqu'il est là sur le modèle ».

**« Au hasard » est alors mis en relation avec le bon usage de la règle non graduée.**

Les premiers arguments pour un bon usage de la règle non graduée sont obtenus par un dialogue avec la classe :

- la règle sert à tracer des traits, des lignes (droits ou rectilignes, introduction du mot) ;

- pour tracer un trait « non au hasard », il faut prolonger un trait existant ou il faut avoir deux points ***déjà représentés sur l'amorce***.

On accepte les mots « trait » et « ligne » même si les élèves peuvent déjà parler de droite, de segment. Ces mots doivent être mis en relation avec les objets géométriques qu'ils représentent en lien avec la figure modèle : s'ils n'ont pas déjà été prononcés, il faut amener les élèves à dire les mots « droite » et « segment » et préciser les différences entre ces objets géométriques.

À propos de la notion de point, le professeur demande de montrer sur le modèle « où il y en a ». Les élèves parlent souvent des « coins » ou/et montrent (au tableau) les sommets du quadrilatère « bord » de la figure, et quelques-un·e·s évoquent les « croisements de certains » traits : on peut alors rappeler le mot « intersection ».

Des élèves peuvent parler aussi de « points de repère » sans que le concept de point géométrique (du moins sa représentation) soit clairement présent : il faut leur faire expliciter leur expression en les amenant à parler d'intersection de lignes.

C'est une première approche de la représentation d'un point (objet géométrique) comme l'intersection de deux traits ou lignes, ici des droites ou segments.

L'objectif essentiel est que la classe se mette d'accord sur :

- avec la règle non graduée, pour une construction qui ne soit pas « au hasard », il faut impérativement un trait à prolonger ou deux points ***déjà représentés sur l'amorce*** ;

- les objets géométriques représentés sont des droites (demi-droites) ou des segments et à leurs intersections éventuelles, il y a des points.

Tout autre usage de la règle non graduée n'est donc pas correct et dans ce cas, la construction est donc « au hasard » et fausse.

Un premier bilan intermédiaire est écrit avec les mots de la classe pour fixer cela.

Une deuxième phase de recherche est lancée.

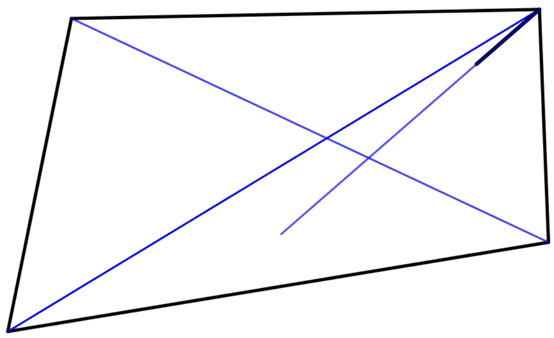
### Deuxième phase

Le professeur rappelle la consigne ainsi que les règles établies précédemment. Les élèves se remettent au travail.

Cette phase de recherche ne dure pas trop longtemps et s'achève dès que le professeur constate qu'il a des appuis parmi les élèves pour le bilan autour de la nécessité de l'analyse de la figure. Ces points d'appui sont précisés ci-après.

Davantage d'élèves alors prolongent le trait existant sans savoir où « s'arrêter ». La question est parfois posée. Le professeur n'intervient pas. Pour la mise en commun à suivre, il sera important d'y revenir pour mettre en évidence qu'un trait que l'on peut prolonger comme on veut est la représentation d'une droite ou d'une demi-droite.

Certain·e·s tracent les diagonales, toujours sur l'amorce. Une partie de la figure est obtenue mais cela bloque pour la suite.



D'autres continuent de tracer « au hasard » : il faut y revenir sans cesse en s'appuyant sur le bilan intermédiaire précédent.

Un questionnement systématique peut être mis en place collectivement :

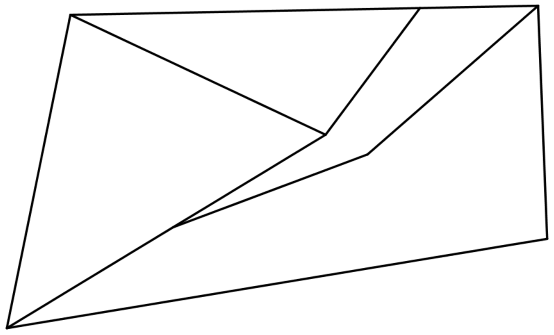
- Connaissions-nous les points pour poser la règle ?
- As-tu bien deux points pour poser ta règle ?
- As-tu un trait existant ?
- Comment sais-tu que ce point est à cet endroit-là ?

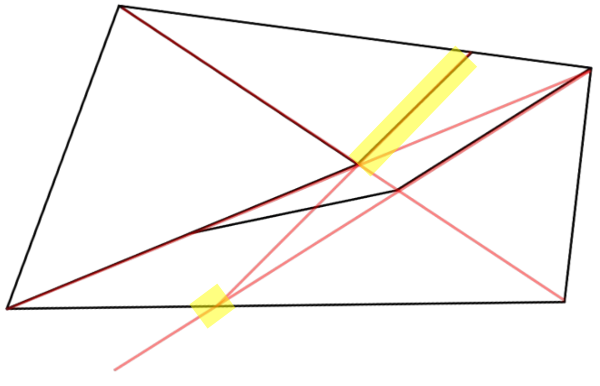
Le but est que ce questionnement soit initié par chaque élève à chaque intention d'utiliser la règle !

Le professeur interrompt la recherche tant que nécessaire pour faire ce rappel à la classe, même s'il ne concerne pas tout le monde.

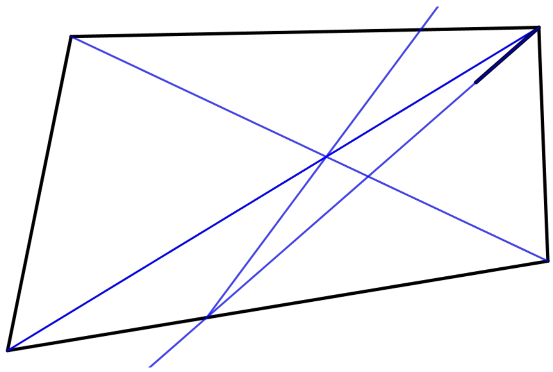
Toujours très peu d'élèves font des tracés sur le modèle. Cependant cette idée se diffuse un peu plus.

Des élèves, grâce à leurs tracés sur le modèle, constatent l'alignement entre un point d'intersection et un segment de la figure (sans l'exprimer ainsi).

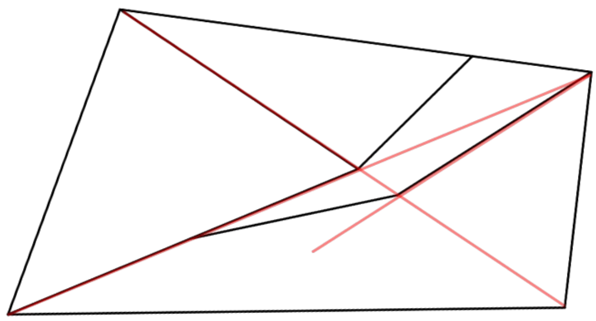


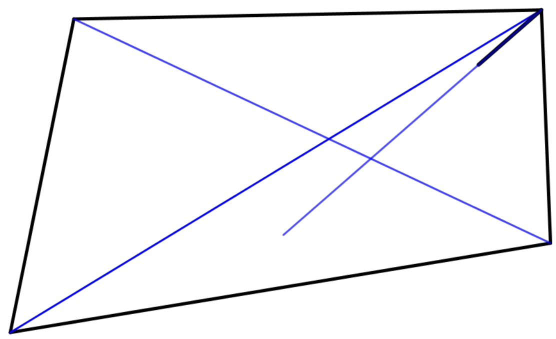


Cela aboutit à des premières constructions sur l'amorce qui ne permettent pas d'obtenir le résultat final !



Il est nécessaire d'avoir suffisamment prolongé le segment existant sur le modèle pour obtenir ce point d'intersection.

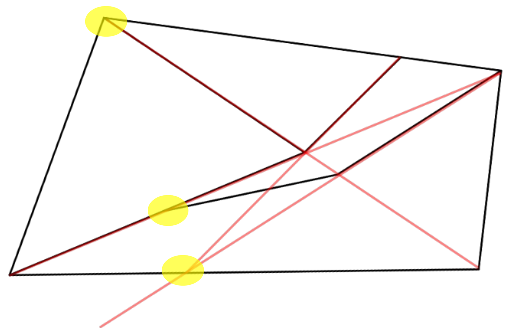




Ces élèves sont déjà rentrés dans une phase d'analyse de la figure modèle, indispensable à la compréhension de ses propriétés pour la reproduction (restauration). Le travail de déconstruction dimensionnelle est en cours : il est nécessaire de voir des traits ou lignes particulières pour comprendre la figure (voir des objets 1D).

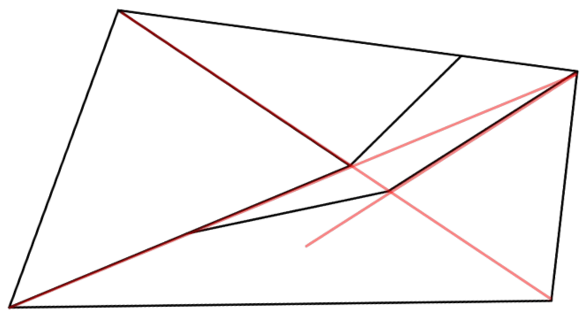
Ils sont néanmoins bloqués, ne trouvant pas l'alignement de trois points qui permet de terminer la figure en traçant le dernier segment.

C'est compréhensible car c'est le plus difficile : cela oblige à une vision « point » (0D), ce qui est un objectif essentiel de ces situations.



Un nouveau bilan intermédiaire s'appuie sur ces réussites pour mettre en avant la nécessité, avant de s'engager dans la construction sur l'amorce, de cette phase d'analyse de la figure modèle : pour cela, il peut être utile voire indispensable de faire des tracés sur ce modèle.

Même si cette étape n'est pas atteinte, il est nécessaire d'interrompre cette phase de recherche pour faire le point en s'appuyant au moins sur les élèves qui auront réalisé la phase d'analyse ci-dessous.



Lors de ce deuxième bilan intermédiaire, le professeur accepte toujours des élèves les mots « trait » et « ligne », tout en demandant systématiquement ce qu'ils représentent comme objets géométriques. Il s'agit de faire distinguer **l'objet géométrique**, **sa représentation** et **l'instrument** qui sert à réaliser cette représentation.

Il est également nécessaire de montrer « physiquement » l'usage de la règle, son positionnement précis, et ce, même si la mise en commun se fait avec un logiciel de géométrie dynamique.

Lors de cette première restauration, il est possible de faire venir les élèves au tableau pour montrer ce qu'ils ont tracé.

On peut aussi laisser les élèves à leur place pour montrer que nommer les points facilite grandement la communication, orale uniquement ici ; il n'est pas encore prévu d'écrire un programme de construction pour cette première restauration.

Ce deuxième bilan a donc pour but de fixer avec la classe la nécessité de cette phase d'analyse ; on se met d'accord pour l'appeler « analyse de la figure modèle ». Elle doit être préliminaire à toute construction sur l'amorce.

Il faut maintenant préciser avec la classe le contenu de cette analyse.

Le seul instrument autorisé étant la règle non graduée, le professeur amène la classe à expliciter les propriétés que l'on peut rechercher.

« On cherche des traits à prolonger », « on cherche des points », « des croisements »…

En s'appuyant sur les débuts d'analyse de certain·e·s élèves, les mots « diagonale » ou « point d'intersection » sont prononcés. Le point d'intersection des diagonales a un rôle important dans la construction, ainsi que le point d'intersection entre une diagonale et le « trait prolongé comme on veut » qui représente donc une demi-droite ou une droite.

En fonction de l'avancée dans le dialogue avec la classe, le mot « alignement » peut être introduit. Ici, il s'agit d'un alignement entre un point et un segment. Sinon, ce sera fait lors de la phase suivante.

Les élèves doivent comprendre qu'il est indispensable de faire des tracés sur la figure modèle pour en découvrir les propriétés : prolonger des traits, rechercher des points d'intersection et peut-être déjà, rechercher des alignements. On ne précisera pas forcément qu'il peut s'agir de trois points. C'est d'ailleurs plutôt le sens connu du mot « alignement » pour les élèves (et aussi pour les enseignants).

Il reste à découvrir l'ensemble des propriétés qui vont permettre de compléter la figure : c'est l'objectif de la phase de recherche suivante.

**Troisième phase**

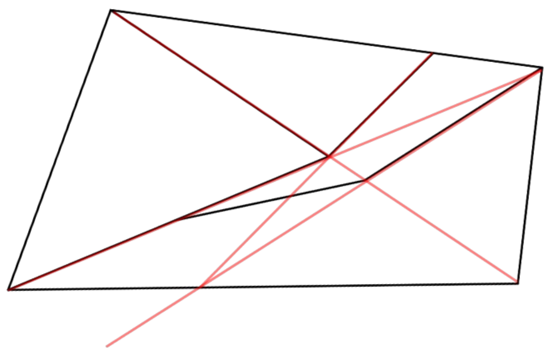
Les élèves sont remis au travail avec pour objectif de terminer l'analyse de la figure modèle.

Il faut sans cesse revenir sur la « construction au hasard » avec quelques élèves en les incitant à se poser les bonnes questions avant tout usage de la règle (voir phase précédente).

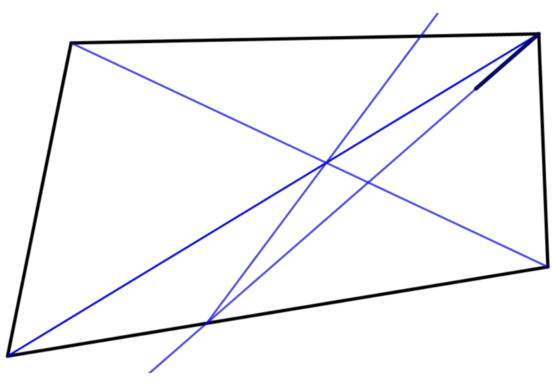
Et malgré le bilan précédent, des élèves « s'acharnent » sur l'amorce sans analyse du modèle : un recadrage est indispensable !

Le professeur peut avoir à arrêter la recherche pour faire une première synthèse de cette analyse si elle n'a pas pu être faite lors de la phase précédente.

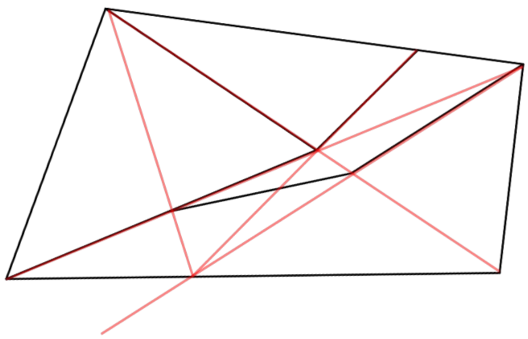
C'est le cas si la figure suivante n'apparaît que maintenant.

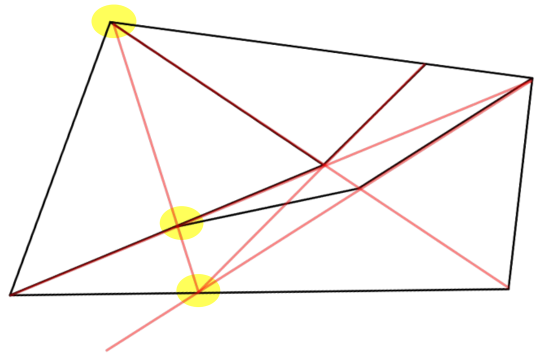


Sur l'amorce, cela donne en général le début de construction suivant.



L'alignement des trois points reste difficile à obtenir : en cas d'échec de la classe, après un certain temps, le professeur peut mettre sur la voie pour obtenir l'analyse finale.





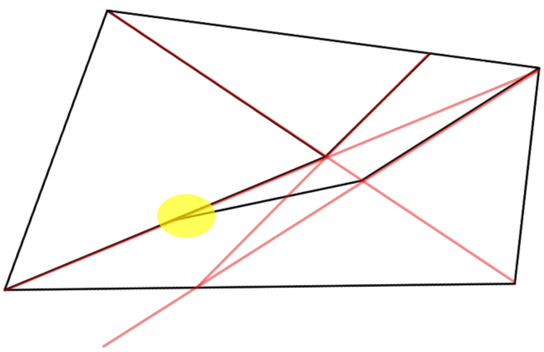
C'est l'occasion de mettre en évidence le questionnement essentiel à mener lors d'une restauration de figure, portant cette fois sur les objets géométriques et leurs relations, et que l'on retrouvera plus tard lorsque l'on cherchera à démontrer ou à résoudre un problème de géométrie théorique (voir partie « Introduction »).

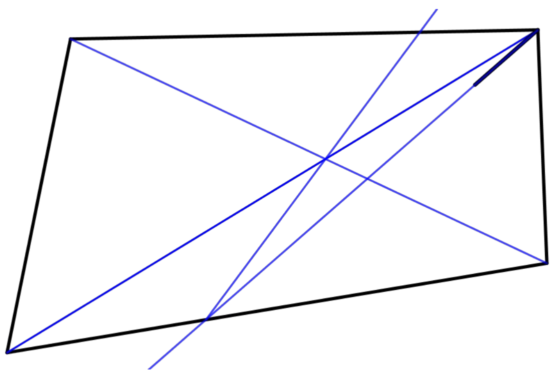
« Qu'est-ce que je connais ? Qu'est-ce que j'ai ? »

Les points déjà représentés, présents sur l'amorce ou obtenu à l'intersection de lignes construites ou prolongées par exemple…

« Qu'est-ce que je cherche ? Que me manque-t-il ? »

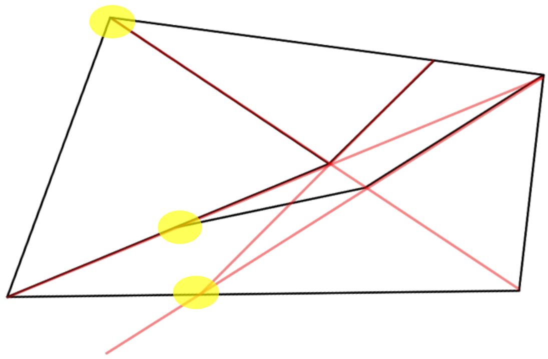
Ici, à ce stade, il manque un point qui permettrait de tracer un dernier segment pour obtenir la figure modèle à partir de l'amorce.





« Comment le trouver ? Quelles relations le lient aux objets géométriques déjà présents ? »

Il faut donc constater que le point cherché est aligné avec un sommet du quadrilatère et le point d'intersection construit précédemment.



Les différents alignements sont repris et explicités : point-segments, trois points. Le vocabulaire des objets géométriques (droite, éventuellement demi-droite, segment, point), que l'on a été amené à représenter, est précisé à nouveau.

L'usage de la règle non graduée est mis en relation avec les objets géométriques qu'elle permet de représenter et leurs propriétés et/ou relations : elle permet de représenter des droites et des segments, des points à l'intersection de lignes, elle permet de vérifier sur le modèle et de construire sur l'amorce des alignements.

Cette analyse finale permet de déduire la construction. Le professeur laisse un temps supplémentaire aux élèves pour terminer.

Des élèves ont des difficultés importantes à transcrire en actions sur l'amorce, l'analyse qui vient d'être faite.

N'ayant plus rien à prolonger a priori, il s'agit alors de repérer et de construire sur l'amorce les points qui sont utiles pour faire les tracés tels que repérés sur le modèle. Le travail de déconstruction se poursuit ici avec, plus particulièrement, une vision « point » (0D) nécessaire à la construction d'un trait rectiligne.

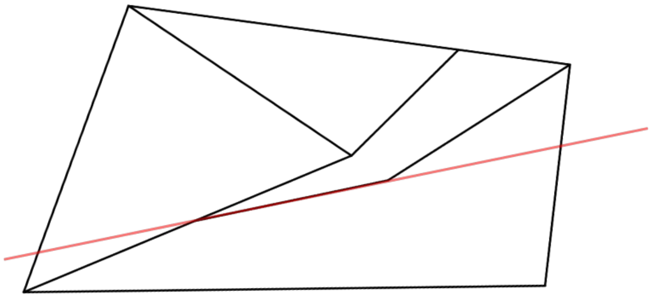
**Après avoir construit sur l'amorce les traits permettant la restauration, les élèves doivent faire apparaître la figure modèle en repassant (en couleur ou en sur-épaisseur par exemple) les segments significatifs.**

Prolongement

Pour celles et ceux qui auraient résolu le problème en avance, il peut être demandé un « programme de construction » même s'il ne sera pas exploité collectivement.

*Remarque*

*Des tracés inutiles peuvent apparaître lors de la phase d'analyse.*



*C'est même très probable !*

*Des élèves ont tendance à tracer tout ce qu'ils peuvent sans le recul nécessaire quant à leur pertinence de leurs tracés. Il faut en débattre avec la classe.*

*Cela pourra poser problème lors de restaurations à venir, nous y reviendrons.*

## Restauration 1-1 : synthèse des différentes phases

*Remarque*

*Ces différentes phases ne sont pas figées : le·la professeur·e qui utilise cette situation adapte le scénario en fonction de ce qui se passe dans sa classe. Elles sont à comprendre comme des moments clés qu'il est important de prendre en compte pour que les objectifs de la situation d'enseignement soient atteints. Elles sont issues d'expérimentations.*

### Question initiale

Présentation de la figure modèle <u>seule</u>.

« Que voyez-vous ? »

Réponses écrites sur les cahiers (1-2 minutes) puis bilan collectif rapide (2-3 minutes).

Retour à prévoir lors du bilan final.

### Première phase

Présentation du modèle, de l'amorce et de l'instrument à utiliser (règle non graduée).

Consigne : « Reproduire cette figure à partir de l'amorce donnée. »

Recherche des élèves (2-3 minutes) : tracés très majoritairement à vue, « au hasard ».

<u>Bilan intermédiaire : **règle d'usage de la règle non graduée** et mise au point sur « construction au hasard ».</u>

### Deuxième phase

Remise au travail des élèves avec autant d'arrêts que nécessaires pour rappeler le bilan précédent.

Durée également assez courte : fin de cette phase de recherche lorsque les élèves sont bloqués par les tracés possibles sur l'amorce. Très peu (généralement) ont utilisé le modèle pour découvrir d'autres tracés à faire et donc très peu ont cherché les propriétés de la figure à reproduire.

<u>Bilan intermédiaire : **l'analyse de la figure modèle**</u>

<u>Son but est de montrer la nécessité de comprendre comment la figure est construite, de trouver ses propriétés et pour cela, de faire des tracés sur le modèle.</u>

### Troisième phase

Reprise de la recherche en veillant à ce que les élèves se lancent véritablement dans l'analyse avant de tracer sur l'amorce : là aussi, interrompre le travail autant de fois qu'il le faut pour rappeler l'objectif de cette phase.

La mise en commun a pour objectif de faire collectivement l'analyse de la figure, avec un éventuel coup de pouce pour l'alignement des trois points.

Un dernier temps de travail est à prévoir pour faire la construction à partir de l'analyse : c'est encore difficile pour certain·e·s.

**Bilan final de cette première situation**

Cela reste un bilan intermédiaire : aucune institutionnalisation sur les objets géométriques travaillés (point, segment, droite) et leurs relations (intersection, alignement) n'est prévu à ce stade dans le cahier de leçons. C'est encore trop tôt.

Seule la règle d'usage de la règle non graduée peut faire l'objet d'une institutionnalisation dans la partie réservée du cahier de leçon.

Les éléments importants à reprendre dans le bilan de la situation avec les élèves :

- Nécessité de **l'analyse de la figure modèle** :

- tracés sur le modèle ;

- repérage de points comme intersections de droites, segments, d'alignements point-segment ou points seuls ;

- Règle d'**usage de la règle non graduée** :

- on a tracé avec la règle non graduée (instrument) des traits ou des lignes rectilignes qui représentent des droites, des demi-droites ou des segments (objets géométriques) ; la règle permet de trouver des alignements.

- Premier **concept géométrique** :

- à l'intersection de deux traits ou lignes est représenté un point.

Exemple de formulation que l'on pourra noter dans la partie dédiée du cahier de leçon (voir la partie « Fiche outils »).

Usage de la règle non graduée

Pour poser sa règle, il faut deux points déjà représentés ou un trait droit (segment, demi-droite ou droite) déjà tracé.

Lors d'une restauration de figure :

- sur le modèle, la règle permet de vérifier des alignements ;
- sur la figure à réaliser, elle permet de tracer des traits qui représentent des segments, des droites.

**Retour sur la question initiale : « Que voyez-vous ? »**

(À l'oral)

Il s'agit de mettre en évidence avec les élèves la nécessité de voir des traits ou des lignes, des intersections de traits ou de lignes pour pouvoir réaliser cette restauration.

Tout cela est à mettre en lien avec les objets géométriques représentés et leurs relations.

C'est ce qui, à terme, les amènera à modifier le regard qu'ils portent à la figure.

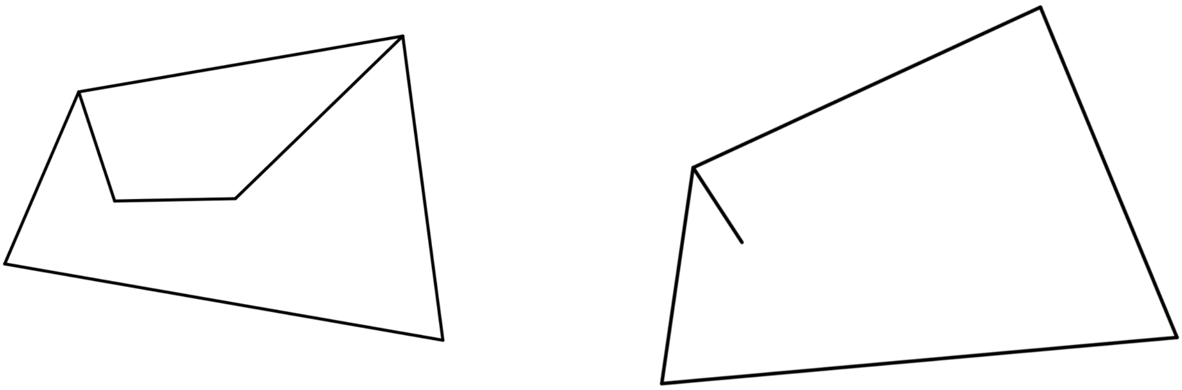
Ce changement de regard nécessaire (voir dans la partie « Introduction ») est un des objectifs de ces situations de restaurations.

**Exercice d'application à faire à la suite**

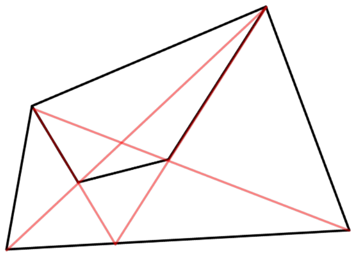
**Exercice 1-1**

Reproduire la figure donnée à partir de l'amorce proposée.

Seule la règle non graduée est à utiliser.



**Résolution**



**Objectif**

Réinvestir immédiatement ce qui a été travaillé précédemment.

Cet exercice est plutôt réussi mais des élèves vont à nouveau tracer à vue, certain·e·s complètement, d'autres pour terminer. Il faut y revenir sans cesse, ce sera encore le cas plus tard...

Il est possible de demander aux élèves de rédiger un programme de construction.

Les objectifs en sont :

- de faire (ou refaire) émerger l'utilité de nommer les points ;

- l'introduction progressive des notations.

# Restauration 1-2

## Objectifs

- Poursuivre le travail de conceptualisation des objets géométriques point, segment, droite et de leurs relations, intersection, alignement.

- Apprendre à faire évoluer le regard sur les figures (passer progressivement d'une vision 2D à une vision 1D et/ou 0D).

- Introduire un nouvel instrument pour reporter des longueurs : la bande de papier avec un bord droit. Le compas n'est pas encore utilisé, car il peut parasiter les objectifs précédents en étant utilisé à outrance pour la réalisation de la tâche. Son usage demande également à être travaillé spécifiquement, ce qui sera fait dans la partie 3.

- Introduire un coût sur l'utilisation des instruments dans l'objectif ici, de « forcer » les élèves à repérer un alignement de trois points.

- Faire apparaître la nécessité de « sortir » de la figure pour trouver un point utile à une construction.

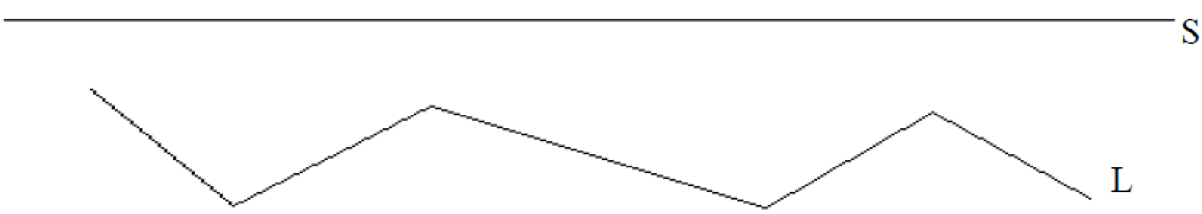
***Exercices rapides à prévoir éventuellement avant de commencer la restauration 1-2, pour apprendre à se servir d'une bande de papier pour reporter des longueurs***

*- Reproduire un segment de longueur donnée (par un tracé) ;*

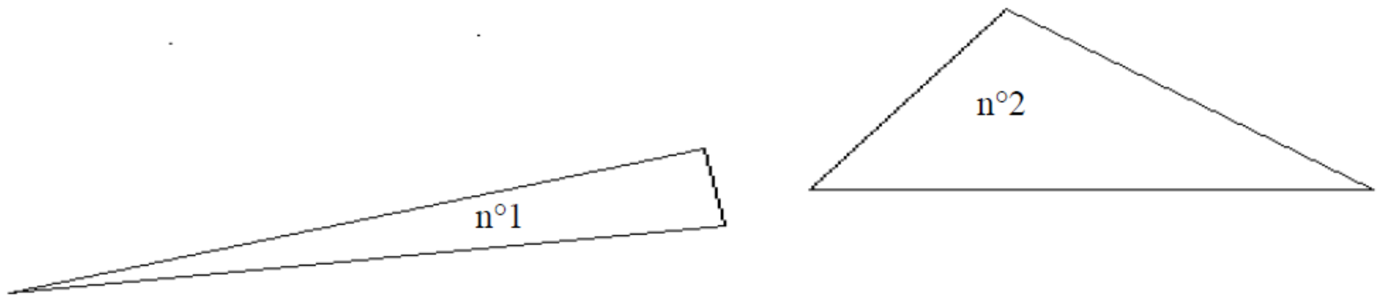
Dessine un segment ayant la même longueur que le segment [AB]
un segment ayant une longueur double de celle du segment [AB]

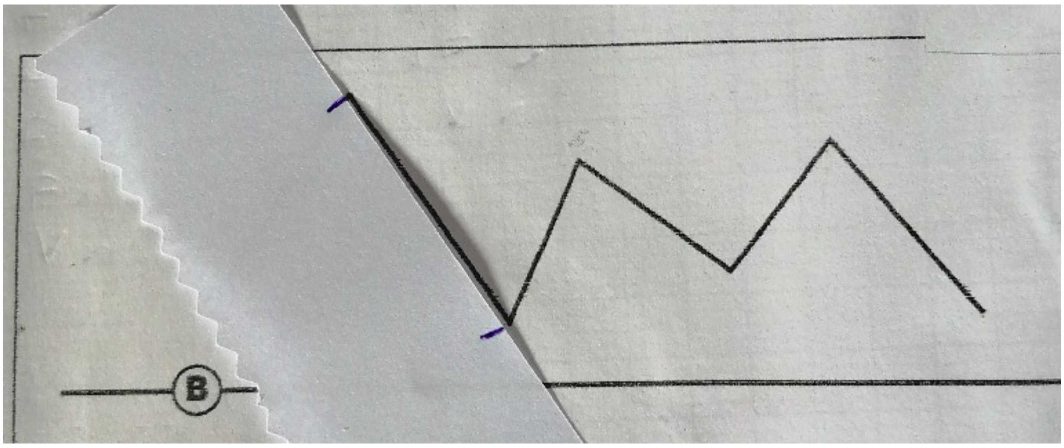

*- Comparaisons de longueurs, de périmètres...*

1. Qui est le plus long, la ligne L ou le segment S ?



2. Parmi ces deux triangles, quel est celui qui a le plus grand périmètre ?

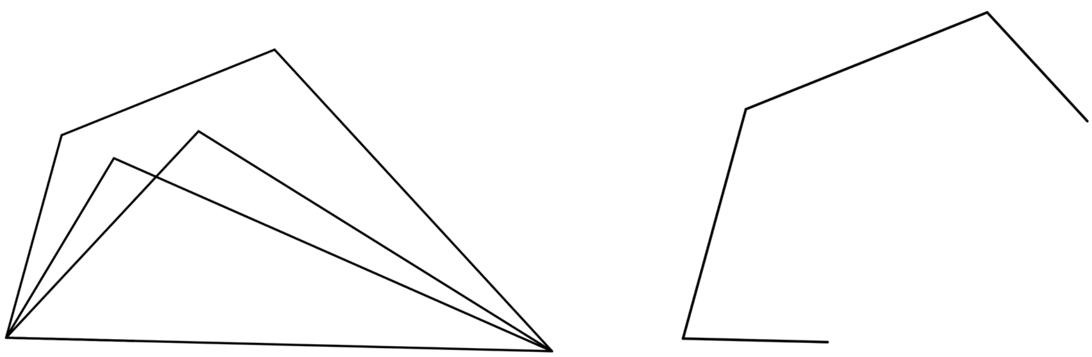



**Consigne**

Reproduire la figure donnée à partir de l'amorce proposée.

Instruments autorisés : **la règle non graduée** et **une bande de papier pour les reports de longueurs**.



- Amorce et modèle de même taille (orientations différentes sur le document élève).

La position du modèle et de l'amorce sur la feuille ne doit pas trop laisser supposer que l'on a besoin de place « au-dessus » des figures.

C'est pourquoi une position la plus centrale possible sur la feuille en mode paysage doit être privilégiée. Ce qui n'est pas forcément aisé à obtenir sachant que la figure modèle et son amorce, de même taille, doivent être de la plus grande taille possible pour exacerber les erreurs de tracés, « au hasard » (voir la partie « Introduction » et le document élève en annexe).

- Introduction de l'usage de la bande de papier pour reporter une longueur.

L'usage d'une règle informable (une règle non graduée sur laquelle on peut marquer des repères) est possible, mais il nous apparaît délicat d'avoir un instrument, « deux en un », pour deux usages différents. En effet, la règle informable permet à la fois de tracer des segments et de reporter des longueurs.

Les instruments classiques de géométrie présentent souvent plusieurs usages possibles.

Par exemple, la règle graduée permet de mesurer une longueur mais aussi de tracer des segments.

L'équerre permet de vérifier ou tracer des angles droits, mais aussi comme elle comporte un côté gradué, de mesurer des longueurs ou tracer des segments.

Pour faciliter la conceptualisation des objets géométriques, nous préférons utiliser, dans un premier temps, des instruments « à usage unique ». Un seul instrument pour une seule fonction : la règle non graduée pour tracer des segments, la bande de papier pour reporter des longueurs, l'équerre non graduée pour vérifier ou tracer des angles droits…

Cela est d'autant plus important dans ces premiers temps de travail avec un coût dépendant de l'instrument et de son usage.

- Introduction d'un coût sur l'usage des instruments.

| | |
|---|---|
| Tracer un trait avec la règle non graduée coûte 1 € | |
| Reporter une longueur du modèle coûte 10 € | |

**Quelques généralités sur ce système de coût**

Il peut être mis en place pour amener les élèves à mobiliser certains instruments plutôt que d'autres et à travailler certains concepts ou propriétés plutôt que d'autres.

Ici, les tarifs sont adaptés pour inciter les élèves à recourir le moins possible au report de longueur, même si celui-ci est autorisé : on vise des repérages d'alignements.

Les tarifs et leurs objectifs seront précisés dans chaque situation dans laquelle ce système sera mis en place (cela fait partie des variables didactiques de chacune d'elles).

Il peut aussi permettre une lecture de l'algorithme de construction. Chaque instrument doit alors avoir un coût différent et cela demande une présentation rigoureuse des coûts successifs. C'est une difficulté pour les élèves.

Chaque action avec l'utilisation de l'instrument correspondant est notée par une petite barre. Le coût de la construction est calculé à la fin des tracés.

Les tracés sur le modèle sont gratuits. Le but est de chercher une construction avec un coût moindre.

Ce système permet de relancer ou de maintenir l'étude : chercher une construction avec un coût moindre pour atteindre l'objectif visé (ici, un alignement particulier).

Nous ne parlons pas « de moindre coût » : il y a une difficulté voire une impossibilité de prouver l'existence d'une telle construction, ce qui n'est de toute façon pas l'objectif.

Il est à noter que ce système de coûts amène quelques « effets secondaires ».

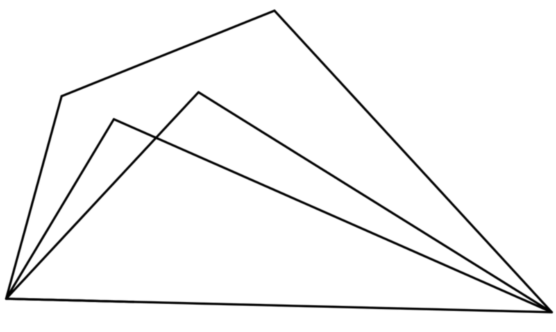
Outre le fait qu'il est parfois difficile à mettre en œuvre par les élèves qui ne pensent pas systématiquement à noter chaque usage d'un instrument, il pousse certain·e·s élèves à s'empêcher d'utiliser les instruments « les plus chers » ce qui peut les bloquer dans la recherche d'une solution.

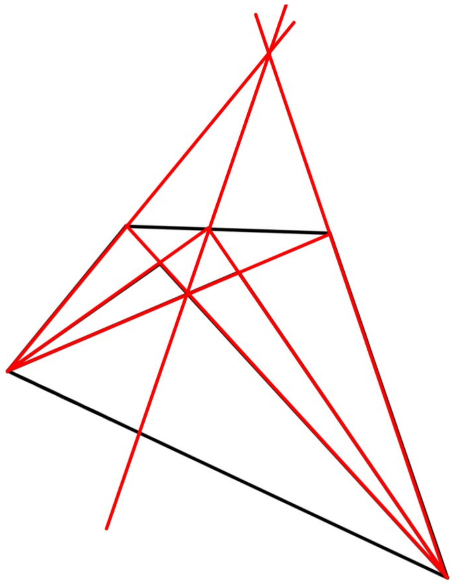
**Le professeur doit bien insister : dans un premier temps, c'est la recherche d'une solution qui importe (et non son coût).**

**C'est un point de vigilance particulier qui sera rappelé dans les restaurations concernées.**

- Il est possible également de rédiger un programme de construction pour continuer un apprentissage progressif des notations et codages.

**Résolution**





Une construction avec un report de longueur est plutôt facile à obtenir.

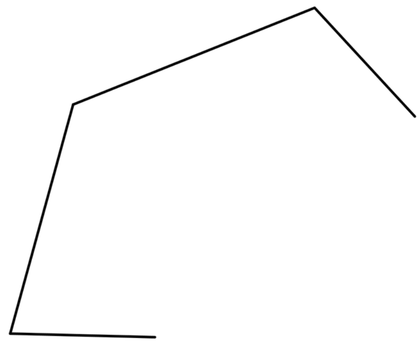
Mais une construction avec un coût moindre est possible en repérant un alignement de trois points et « en sortant » de l'amorce !

L'intérêt ici est de forcer « cette sortie ». En effet, la vision naturelle des figures est celle de surfaces « fermées », délimitées par des bords. Il est très difficile pour les élèves de « sortir de la figure », en dépassant des bords.

Le système de coût permet de motiver la poursuite de la recherche.

*Remarque*

*À propos de l'amorce, on peut se poser la question de l'utilité pour les élèves d'avoir à reconstituer le quadrilatère.*



*Le quadrilatère étant vu a priori comme une surface « fermée » délimitée par des bords, ses côtés ne sont pas vus comme des lignes (1D) et ses sommets comme des points (0D).*

***Prolonger ces « morceaux » de côtés contribue donc à les aider à voir ces côtés comme des lignes, qui ont une intersection.***

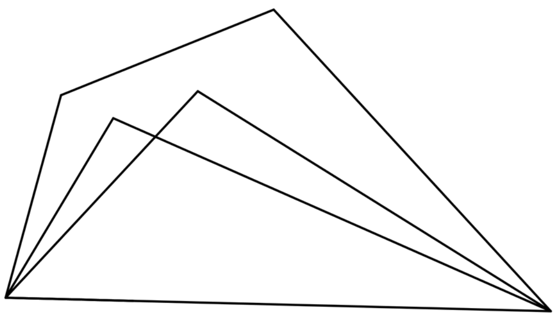
***Cette intersection, qui est un sommet du quadrilatère, représente un point.***

## <u>Restauration 1-2 : un déroulement, points de vigilance</u>

Le professeur commence par montrer **la figure modèle <u>seule</u>**.

### Question initiale

« Que voyez-vous ? »



Les réponses obtenues sont davantage géométriques, majoritairement 2D.

Les élèves voient un quadrilatère, des angles (comme secteurs angulaires, vision surfaces), trois triangles juxtaposés (beaucoup d’élèves), deux triangles superposés (peu d’élèves)…

Sont prononcés également les mots côtés, segments, bords, sommets…

Les élèves peuvent venir montrer au tableau pour gagner du temps.

Des élèves se rappelant la restauration précédente, anticipent l’analyse de la figure en proposant déjà de prolonger des traits pour voir d’autres « choses » : à ce stade, on les interrompt en précisant que l’on se contente ici de ce qui est tracé, mais il pourra être utile de faire ce qu’ils proposent très vite !

### Consigne et première phase

« Il s’agit maintenant de reproduire (restaurer) cette figure modèle à partir de l’amorce proposée. Cette fois, le modèle et l’amorce sont de même taille. »

Cela amène à donner les instruments utilisables.

- La règle non graduée.

Collectivement sont alors rappelées ses conditions d’usage pour une construction « non au hasard ».

- Une bande de papier pour reporter une longueur.

Une explication rapide, minimale, peut être nécessaire en fonction de l’expérience de la classe : on peut évoquer simplement les petites marques à faire sur la bande de papier…

Le professeur n'en dévoile pas plus pour éviter de donner des pistes de résolution aux élèves. Il sera néanmoins utile au cours de la phase de recherche de poser des règles d'utilisation précise de son usage.

Le système de coût est explicité.

La difficulté principale pour les élèves est de penser à noter chaque utilisation.

*<u>Point de vigilance particulier</u>*

*Dans un premier temps, le professeur n'insiste pas trop sur les coûts : il rappelle plutôt qu'il faut absolument trouver une construction, quoi qu'il en coûte ! Il faut déjà trouver une solution ! Dans un deuxième temps seulement, il faudra éventuellement chercher à en baisser le coût.*

*En effet, certains élèves se focalisent sur ces coûts et peuvent s'interdire d'utiliser les instruments « les plus chers », ce qui peut les bloquer.*

*Ce sont les « effets secondaires » de ce système de coût.*

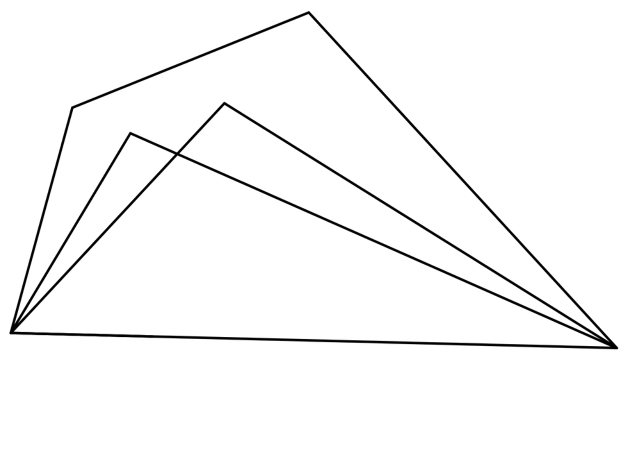
Les élèves se lancent dans la recherche.

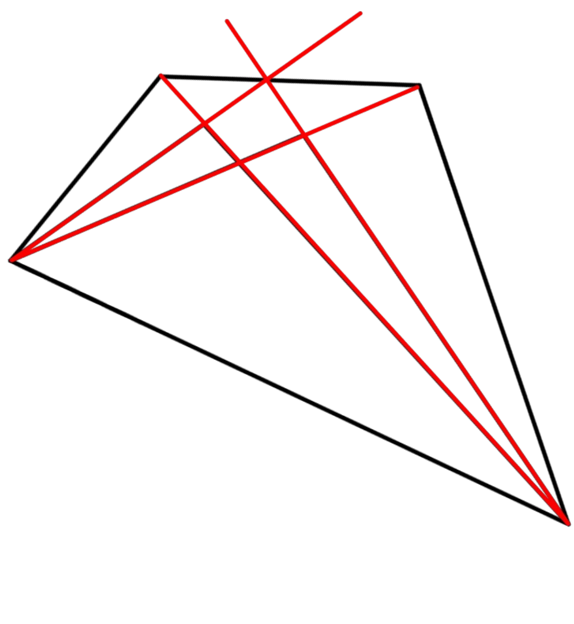
Une majorité d'élèves analyse la figure modèle. Il faut recadrer celles et ceux qui ne le font pas ; c'est une occasion de rappeler son objectif : comprendre comment est construite cette figure, en trouver les propriétés.

À ce stade, ils n'utilisent pas du tout la bande de papier mais cherchent à prolonger ou joindre des points représentés, en particulier en traçant les diagonales.

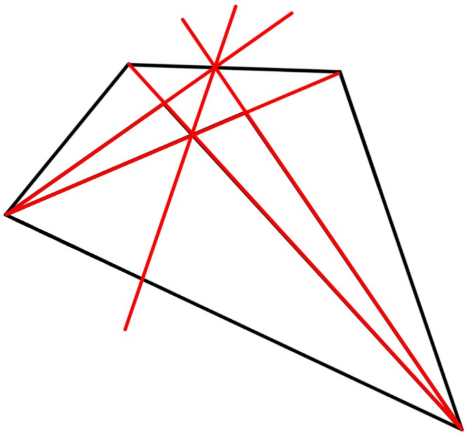
À l'oral, les élèves disent bien (ou il faut les amener à dire si ce n'est pas le cas) qu'ils recherchent des points « particuliers » pour construire sur l'amorce. « Particuliers » est associé aux propriétés de ces points : alignement ou intersection.

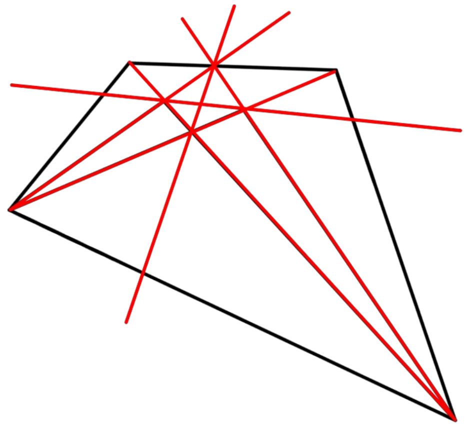
L'analyse généralement obtenue est la suivante :





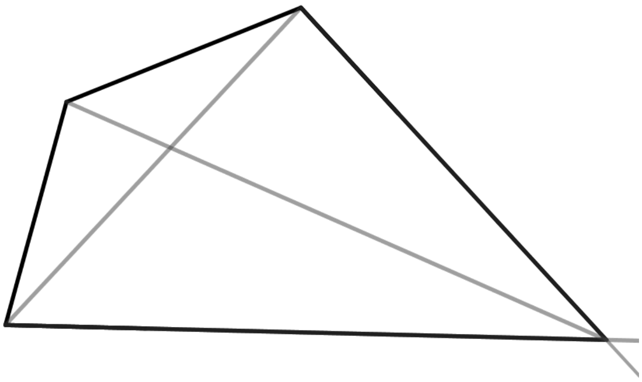
Un certain nombre d'élèves va plus loin en rajoutant un trait ou deux.





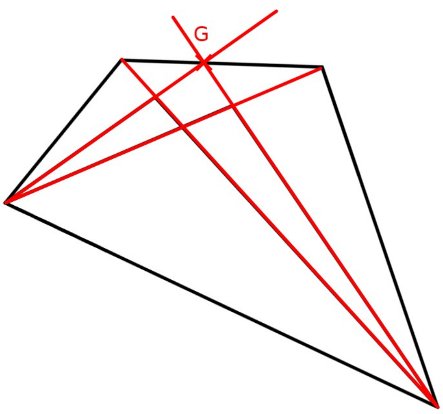
Aucun ne pense à « sortir » de la figure.

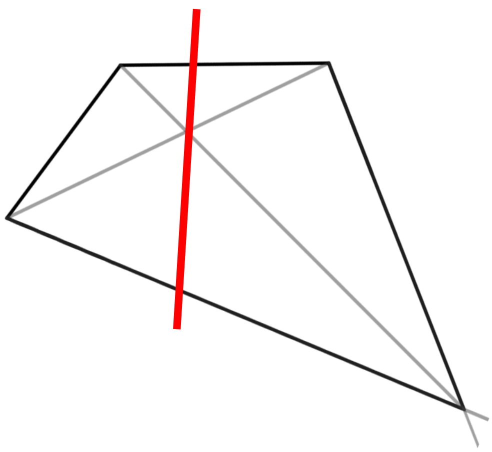
Sur l'amorce, cela ne conduit qu'à une construction très incomplète !



À partir de là, quelques-un·e·s pensent alors à utiliser la bande de papier.

Mais d'autres pensent terminer en trouvant le point G (voir ci-dessous) en traçant un nouveau trait plus ou moins vertical en appui seulement sur le point d'intersection des deux diagonales ou encore en traçant d'autres traits sans plus respecter les usages de la règle non graduée…



On peut penser que le contrat didactique avec ou sans les « effets secondaires » du système de coût les a poussés dans ces procédures erronées voulant terminer absolument avec la règle graduée, qui plus est, à un coût moindre ! Tout cela combiné à l'utilisation d'une direction « prototypique » (verticale).

Un bilan intermédiaire s'impose pour expliciter ces procédures erronées.

Il est alors encore utile de rappeler le questionnement indispensable avant tout usage de la règle non graduée (cf restauration 1-1, page 11). Cela suffit à s'accorder sur l'inexactitude de ces constructions et de les inciter à utiliser aussi la bande de papier s'ils ne trouvent pas plus de points avec la règle non graduée.

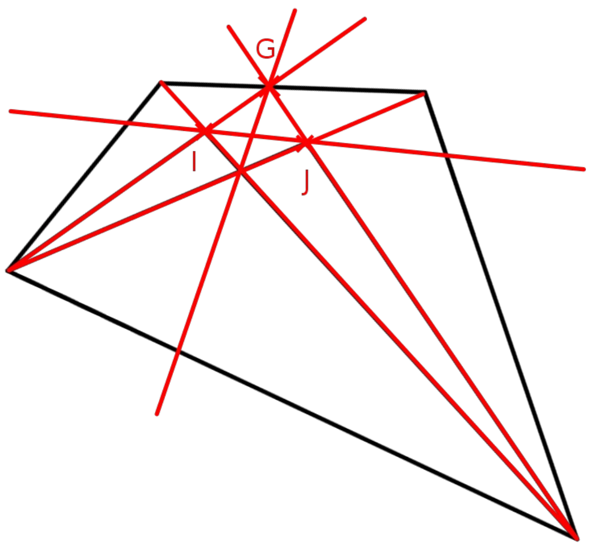
Ce premier bilan permet aussi de préciser avec la classe que si l'on peut tracer (en respectant les règles d'usage) un certain nombre de traits sur la figure modèle, ils ne sont pas tous utiles, car on ne peut obtenir les points sur l'amorce qui permettraient de les restaurer.

Distinguer les traits utiles des traits non utiles est une difficulté importante pour les élèves dans ce type de travail : le professeur doit l'avoir bien pris en compte.

Les élèves doivent apprendre à gérer ces incessants allers-retours entre amorce et modèle.

**Deuxième phase**

C'est à ce moment-là, devant quelques usages incorrects de la bande de papier, qu'il peut s'avérer indispensable d'en fixer à nouveau les règles d'utilisation : nécessité d'avoir un support déjà tracé (et correctement !) et un point « de départ » pour pouvoir reporter une longueur prise sur le modèle.

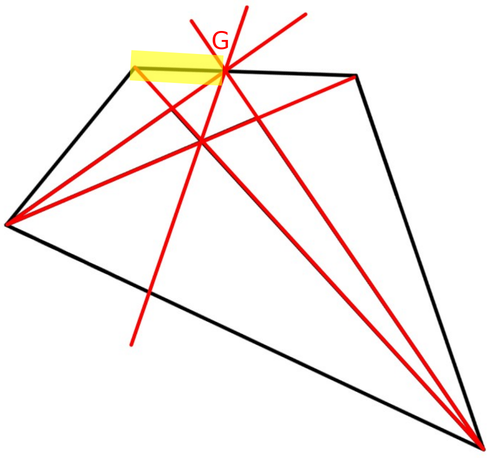


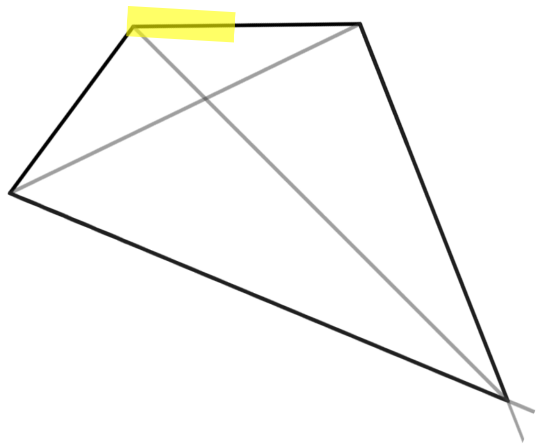

Les élèves qui ont vite compris qu'il faudrait a priori utiliser la bande de papier pour terminer le font à bon escient : ils obtiennent un des points I, J ou G ce qui suffit pour finir.

Certaines constructions se font à deux reports pour obtenir I et J.

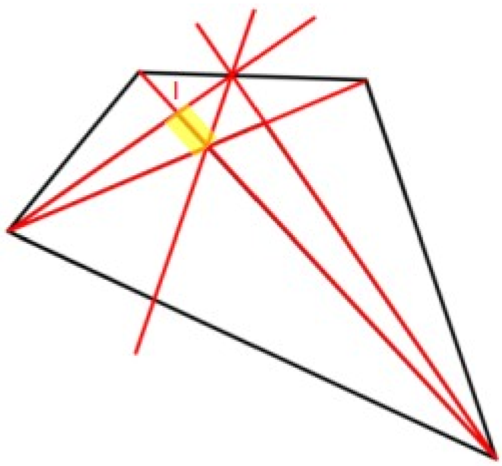
Des exemples sur les figures suivantes.

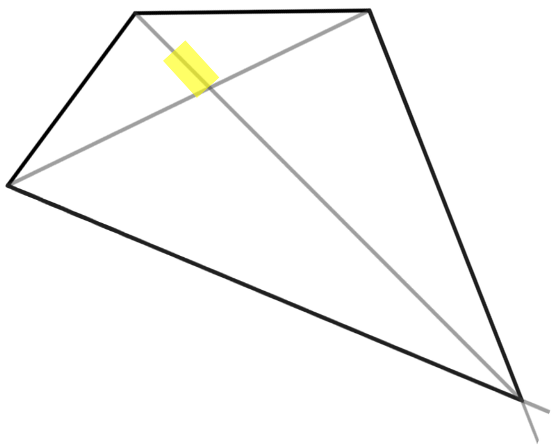
Pour obtenir G :



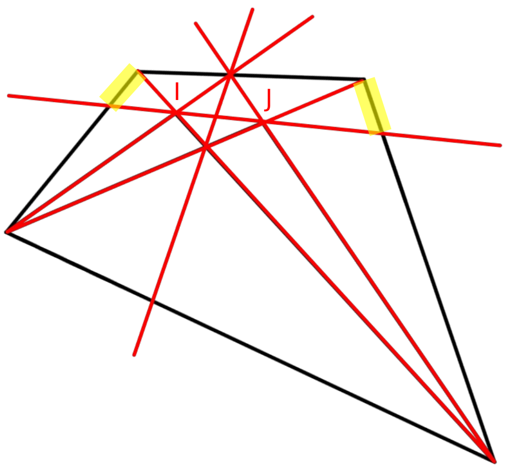



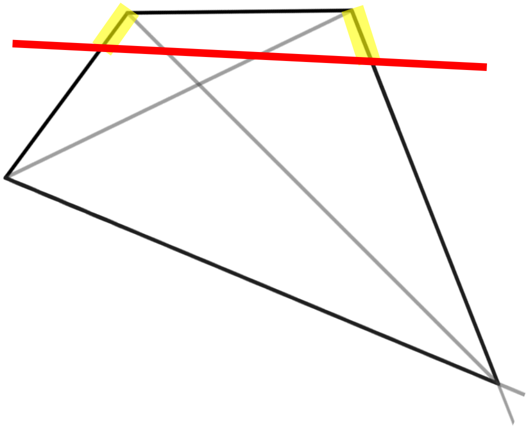
Pour obtenir I (parfois, procédure identique simultanée pour obtenir J en même temps) :



Parfois, des reports originaux pour trouver I et J :



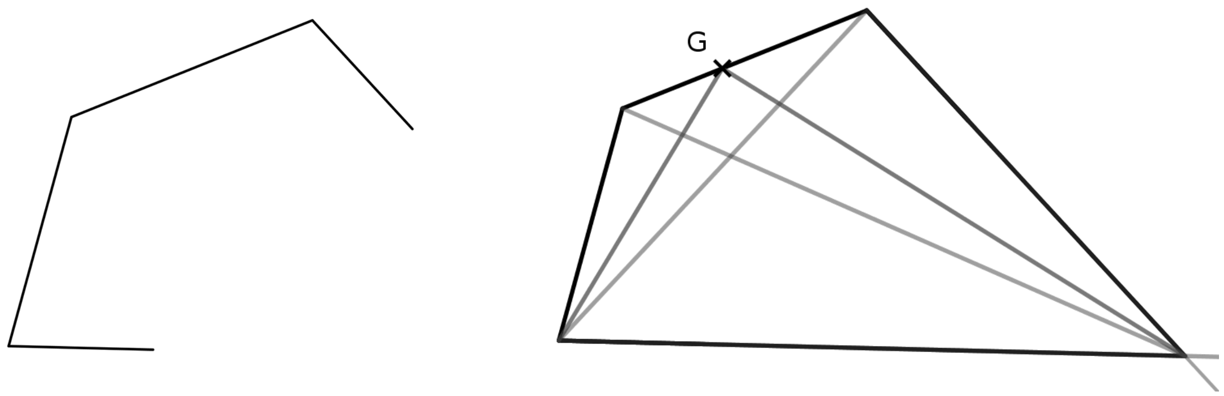



On incite ces élèves à préciser le coût de leur construction, ce qu'ils n'ont pas toujours pensé à faire. Cela les oblige, parfois avec difficulté, à reprendre leur algorithme de construction mais aussi à affiner encore davantage le regard qu'ils portent sur leur figure.

Pour les aider et pour faciliter le travail du professeur, il faut leur demander de faire apparaître sur le modèle le (ou les) segment(s) dont la longueur a été reportée sur l'amorce : avec un crayon de couleur ou pourquoi pas, lorsque cela est possible, en utilisant les codages usuels, une occasion de les introduire.

Après avoir prolongé les côtés du quadrilatère et tracé les deux diagonales (4 €) puis effectué un report pour obtenir I, J ou G (10 €), il faut encore tracer deux traits (2 €) pour pouvoir restaurer la figure.

Exemple en ayant obtenu G :




Il en est de même à partir de I ou de J.

On fait « repasser » sur l'amorce les segments qui font partie de la figure modèle : <u>ces tracés sont gratuits</u>.

La construction obtenue a donc un coût de 16 €.

Le temps que le plus d'élèves possible terminent dans cette voie, ce qui se produit majoritairement, le professeur relance individuellement la recherche pour une construction à coût moindre, celle qui demande de trouver un alignement de trois points tout en « sortant » de la figure.

Une fois la construction avec report très largement obtenue, une mise en commun est organisée pour expliciter cette construction et son coût. C'est l'occasion de préciser les objets géométriques représentés, points, segments, droites ou demi-droites ainsi que leurs relations, intersections, alignements (point-segment pour l'instant).

La recherche est alors relancée pour tous, pour obtenir une construction « moins chère » !

**Troisième phase**

Les élèves comprennent vite que pour obtenir un coût moindre, il faut chercher à se passer de la bande de papier et à privilégier l'usage de la règle non graduée. Dans leurs réflexions souvent à voix haute à ce moment de la recherche, ils parlent d'alignements supplémentaires à trouver en prolongeant d'autres traits.

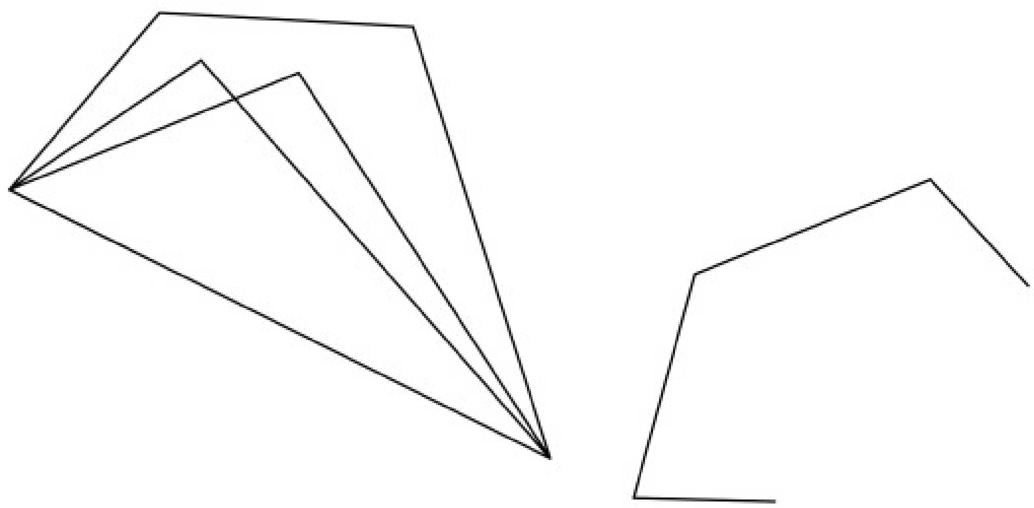
Beaucoup sont bloqués, s'interdisant probablement de tracer à l'extérieur du quadrilatère (la vision naturelle est celle de surfaces fermées, limitées par des bords qu'il est difficile de franchir ou de dépasser).

Mais quelques-un·e·s franchissent le pas en prolongeant deux côtés opposés pour obtenir l'alignement recherché de trois points (voir figure suivante).

*Remarque*

*La position de la figure modèle sur la fiche élève proposée incite à prolonger les côtés « les plus verticaux » plus que les autres côtés du quadrilatère.*

Restauration de figure 2



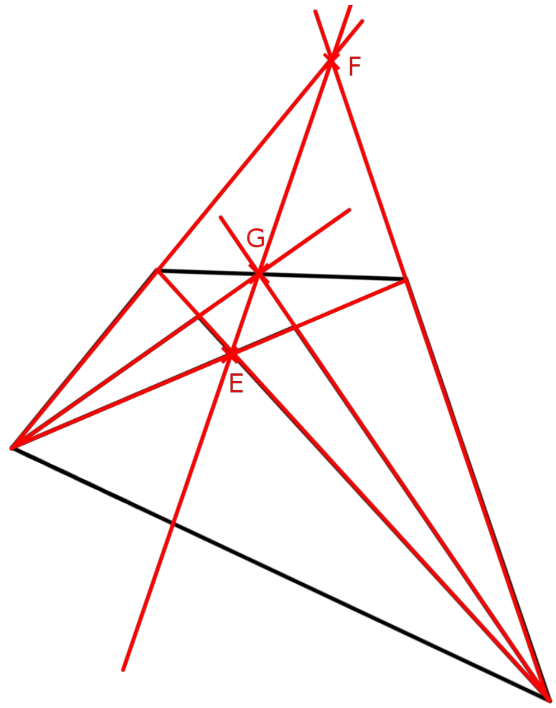
| | |
|---|---|
| Tracer un trait avec la règle non graduée coûte 1 € | |
| Reporter une longueur du modèle coûte 10 € | |

*Cela ne pose pas problème, l'important étant de repérer maintenant l'alignement des trois points.*

*Privilégier la taille des figures empêche ces deux autres prolongements mais cela ne nous apparaît pas gênant par rapport aux objectifs visés (à moins de choisir un format A3 pour le document élève).*

Le temps de recherche est assez court, mais on peut différencier en demandant à celles et ceux qui ont trouvé rapidement cet alignement de rédiger un programme de construction.

L'idée du prolongement des deux côtés se diffusant, certains élèves n'arrivent pas à terminer, ne repérant pas les trois points alignés et/ou ne sachant pas quoi en faire sur l'amorce. Un coup de pouce débloque la situation.

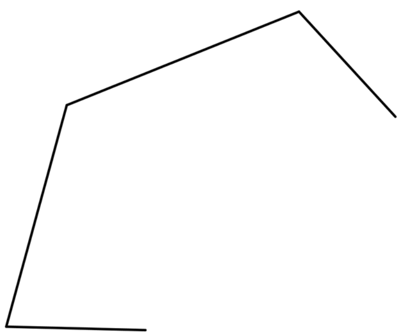


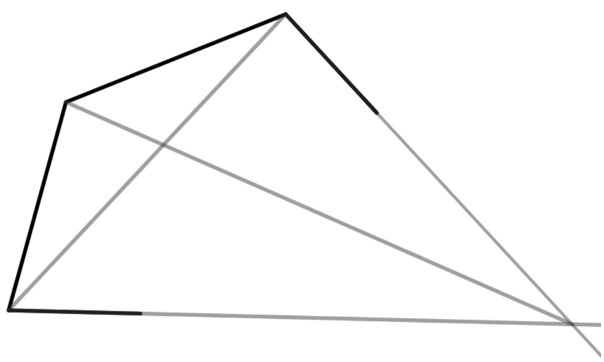

On obtient le point F qui permet de tracer (EF) et d'obtenir G.

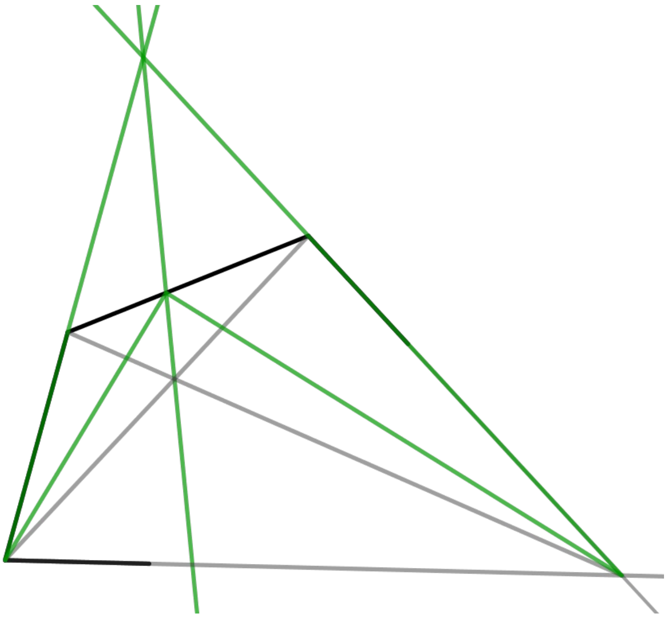
Pour les élèves, il y a là les prémices d'un raisonnement déductif précurseur du passage à une géométrie théorique, un objectif de la fin du cycle 3. Les droites, supports des deux côtés du quadrilatère, se coupent au point F et les points F, E et G sont alignés, G appartient donc à la droite (EF) que l'on peut représenter : ainsi le point G est le point d'intersection de la droite (EF) et du côté correspondant du quadrilatère.

Ce raisonnement doit être explicité lors de la mise en commun suivante.

Après avoir prolongé les côtés du quadrilatère et tracé les deux diagonales (4 €), cette construction nécessite le tracé de cinq traits supplémentaires ce qui donne une construction à 9 € (voire 8 € si l'on considère que l'un des côtés du quadrilatère déjà prolongé pour le « fermer », est à nouveau prolongé et que cela ne correspond qu'à un usage de la règle non graduée).







Le système de coût est ici une plus-value dans le déroulement du travail des élèves : il crée une motivation à poursuivre la recherche, en particulier lorsqu'ils ont déjà trouvé une solution.

Cela les oblige à une nouvelle analyse plus fine encore de la figure modèle, trouver un alignement de trois points, c'est-à-dire aller vers une vision 0D de la figure.

Cela les amène donc à approfondir ce travail de déconstruction dimensionnelle indispensable pour aborder plus tard une autre forme de travail géométrique.

**<u>Restauration 1-2 : synthèse des différentes phases</u>**

*Remarque*

*Ces différentes phases ne sont pas figées : le·la professeur·e qui utilise cette situation adapte le scénario en fonction de ce qui se passe dans sa classe. Elles sont à comprendre comme des moments clés qu'il est important de prendre en compte pour que les objectifs de la situation d'enseignement soient atteints. Elles sont issues d'expérimentations.*

### Question initiale

Présentation de la figure modèle <u>seule</u>.

« Que voyez-vous ? »

Réponses écrites sur les cahiers (1-2 minutes) puis bilan collectif rapide (2-3 minutes).

Retour à prévoir lors du bilan final.

### Première phase

Présentation du modèle, de l'amorce et des instruments à utiliser (règle non graduée et bande de papier).

Introduction du coût sur l'usage des instruments.

Consigne : « Reproduire cette figure à partir de l'amorce donnée. »

Recherche des élèves (2-3 minutes).

<u>Première mise en commun lorsque la majorité des élèves a prolongé les deux côtés pour terminer le quadrilatère et tracer les diagonales :</u> il y a un blocage possible à ce stade, les élèves ayant tendance à « s'interdire » l'usage de la bande de papier. Il faut les inciter à le faire pour poursuivre leur travail.

Reprise de l'usage de la règle non graduée, de la nécessité et la nature de l'analyse de la figure modèle si besoin.

### Deuxième phase

Explicitation des règles d'usage de la bande de papier si nécessaire et au moment opportun selon l'avancée des élèves et de leurs difficultés.

Utilisation de la bande de papier pour obtenir une solution à un report de longueur (16 €).

Certain·e·s trouvent des solutions à deux reports : il faut les inciter à en faire moins.

Pour ceux qui ont trouvé : relances individuelles pour la recherche d'une solution avec un coût moindre qui s'obtient en trouvant un alignement de trois points dont un « extérieur » au quadrilatère.

Nouvelle mise en commun lorsqu'une majorité des élèves a trouvé cette construction à un report et relance de la recherche vers la solution sans report de longueur.

**Troisième phase**

Reprise de la recherche vers la solution sans report de longueur.

Il est possible de demander aux élèves les plus avancés de réaliser un programme de construction. Pour cela, il faut prévoir de nommer les points : le professeur doit l'anticiper sans dévoiler à l'ensemble de la classe la solution.

Une dernière mise en commun pour expliciter et débattre de la solution avant de faire le bilan de la situation.

**Bilan final de la situation**

Il s'agit encore d'un bilan intermédiaire de fin de situation, il n'est toujours pas prévu d'institutionnalisation dans le cahier de leçons.

Le professeur peut reprendre les objets géométriques représentés et leurs relations : les points d'intersection indispensables à la construction, à la différence d'autres obtenus lors de l'analyse, les points alignés, les alignements point-segment qui ont permis de restaurer la figure. Le retour à la question initiale « Que voyez-vous ? » peut se faire en même temps que ce bilan.

En nommant les points collectivement, il est possible d'exprimer les relations entre les objets géométriques qui ont été repérées par les élèves, en poursuivant l'apprentissage des notations et de formaliser l'analyse de la figure modèle.

Puis on en vient à l'écriture d'un programme de construction.

**Seule la règle d'usage de la bande de papier est institutionnalisée dans le cahier de leçon dans la partie dédiée.**

Par exemple :

Usage d'une règle informable ou d'une bande de papier pour un report de longueur

Pour reporter une longueur, il faut :

- un support droit c'est-à-dire une droite ou un segment (que l'on peut prolonger si besoin) déjà représentés ;
- un point de départ.

**Retour sur la question initiale : « Que voyez-vous ? »**

(À l'oral)

Il s'agit de la même procédure et des mêmes intentions que pour la situation précédente, en insistant ici sur le fait d'avoir eu besoin de voir des lignes et un point « extérieurs » à la figure !

## Restauration 1-3

### Objectifs

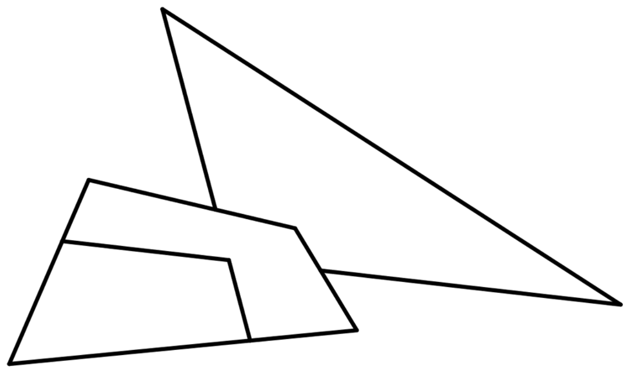
- Poursuivre le travail de conceptualisation des objets géométriques (point, segment, droite) et de leurs relations (intersection, alignement).
- Apprendre à faire évoluer le regard sur les figures (passer progressivement d'une vision 2D à une vision 1D et/ou 0D).
- Travailler les trois types d'alignement : segment-segment, segment-point, points.
- Cette restauration est une synthèse des précédentes et doit amener un bilan à institutionnaliser sur les objets géométriques travaillés, leurs représentations et leurs relations.

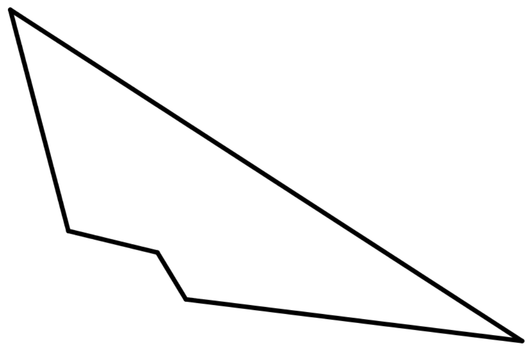
### Consigne

Reproduire la figure donnée à partir de l'amorce proposée.

Instruments autorisés : **la règle non graduée** et **une bande de papier**.

Une règle informable peut être utilisée (avec précaution, voir page 44).





La figure modèle et l'amorce sont de même taille.

Sur le document élève, les orientations sont différentes.

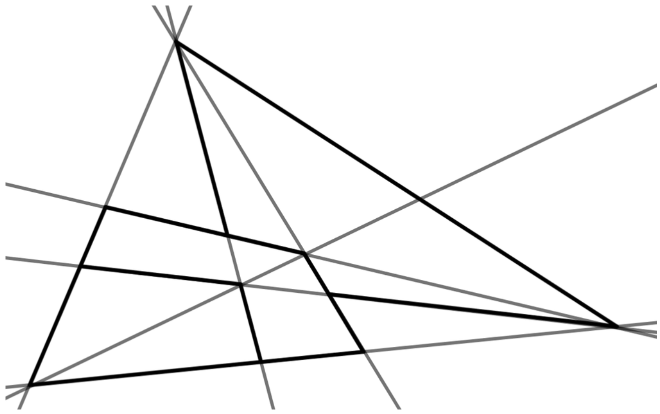
Coût sur l'usage des instruments

| | |
|---|---|
| Tracer un trait avec la règle coûte 1 € | |
| Reporter une longueur du modèle coûte 5 € | |

### Résolution

Alignements à repérer : tous les types d'alignement sont présents ici, segment-

segment, point-segment et points seuls.



Au moins un report de longueur est nécessaire pour restaurer la figure et il est indispensable de trouver un alignement de trois points pour une construction à un report.

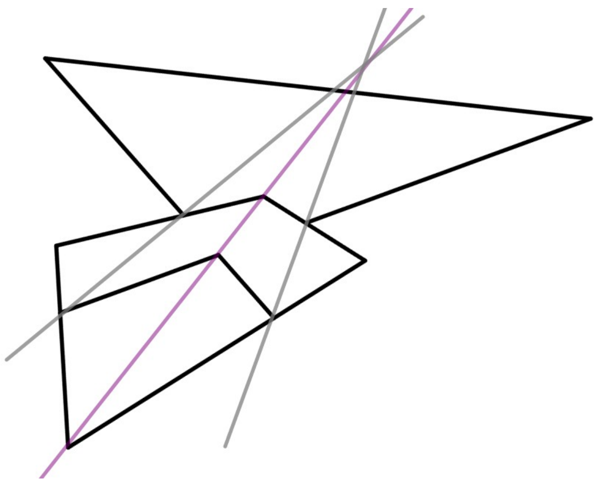
Le système de coût favorise la recherche d'alignements pour obtenir une construction « économique ». Il permet également de différencier le travail des élèves en permettant au plus grand nombre de trouver une solution grâce à un coût d'utilisation de la bande de papier peu élevé.

Il permet également de relancer le travail, si nécessaire, pour trouver l'alignement des trois points et obtenir un coût moindre.

*Point de vigilance particulier*

*Le professeur rappelle qu'il est prioritaire de trouver une solution avant de se préoccuper du coût (afin d'éviter tout blocage, « effets secondaires » évoqués précédemment).*

La précision des tracés sur la figure modèle est ici essentielle pour ne pas trouver des alignements qui n'existent pas.

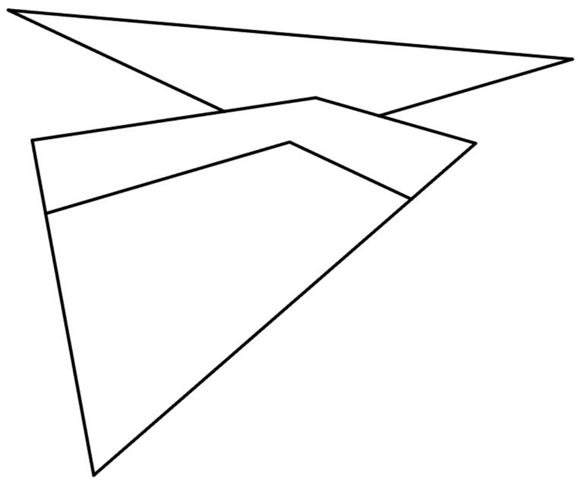


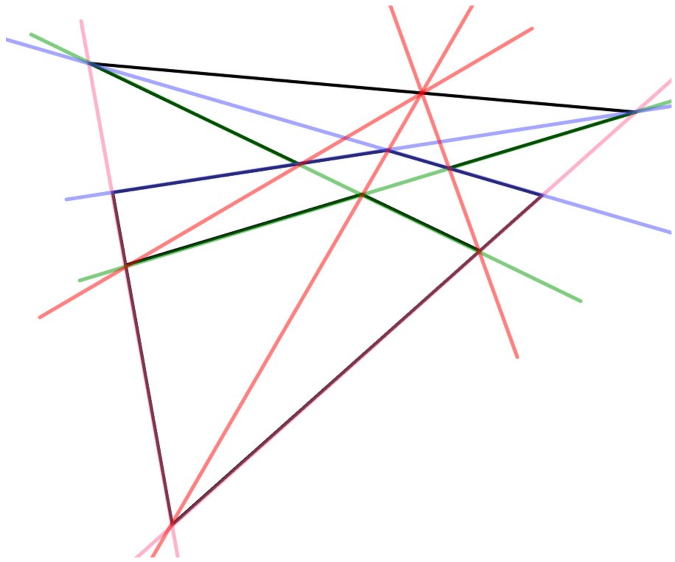
**Variante**

Avec le modèle précédent, l'alignement des points est présent sur le modèle.

On peut complexifier le travail en ajoutant des alignements supplémentaires non présents sur le modèle mais n'apparaissant que lors de l'analyse du modèle en effectuant des tracés supplémentaires (cf restauration 1-1).

Ceux-ci rendent possibles une construction sans report de longueur.





L'amorce est du même type et le coût sur les instruments est le même.

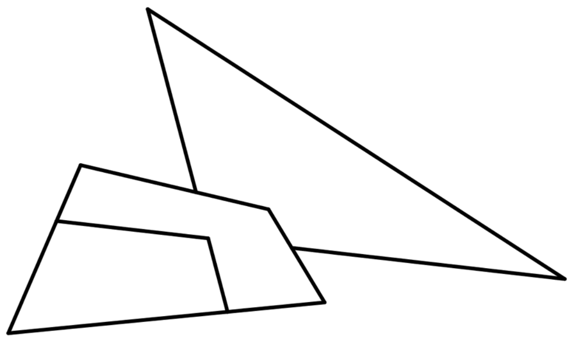
Huit traits suffisent alors ce qui donne un coût de 8 € contre 12 € dans la situation précédente (voir la description d'un déroulement ci-après).

## Restauration 1-3 : un déroulement, points de vigilance

Le professeur commence par montrer la figure modèle seule.

### Question initiale

« Que voyez-vous ? »



Les réponses majoritaires sont deux quadrilatères « l'un dans l'autre », un triangle auquel « on a enlevé un bout », des lignes, des traits, des segments, des sommets, des points.

Une élève a parlé d'un triangle « sur lequel on a posé les quadrilatères » : elle voit donc des figures superposées plutôt que juxtaposées, un regard qui lui permet de « voir » des lignes « cachées » ou non représentées.

### Consigne et première phase

« Il s'agit maintenant de reproduire (restaurer) cette figure modèle à partir de l'amorce proposée. Le modèle et l'amorce sont de même taille. »

Les instruments utilisables, la règle non graduée et une bande de papier, et leur coût sont donnés.

Un bref rappel des règles d'usage de ces instruments est fait. Est rappelé aussi la nécessité de « marquer » les segments dont on fait un report de longueur en les repassant ou en les codant.

La dévolution du problème se déroule sans encombre et les élèves se mettent au travail très volontiers.

À de rares exceptions près, les élèves entrent dans la tâche par l'analyse de la figure modèle. Le professeur recadre les autres !

Des élèves en difficulté peuvent encore à ce stade reproduire « à vue » : il faut reprendre avec eux ce qui est attendu dans ce travail de restauration.

Les mêmes difficultés apparaissent encore mais en moins grand nombre : tracés

« hors de propos » sur le modèle, tracé sur le modèle qui est automatiquement reproduit sur l'amorce en passant outre les règles d'usage des instruments...

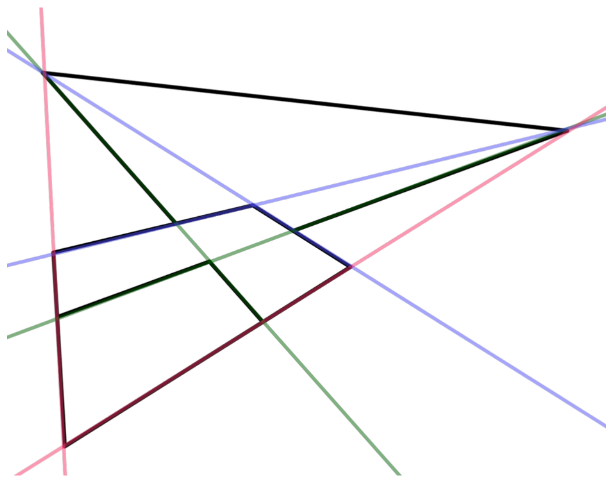
L'essentiel du travail doit donc se concentrer sur cet aller-retour permanent entre le modèle et l'amorce, en motivant un questionnement systématique :

- ce que j'ai pu tracer sur le modèle, peut-il être tracé immédiatement sur l'amorce ?
- permet-il d'obtenir un élément utile pour la construction ?

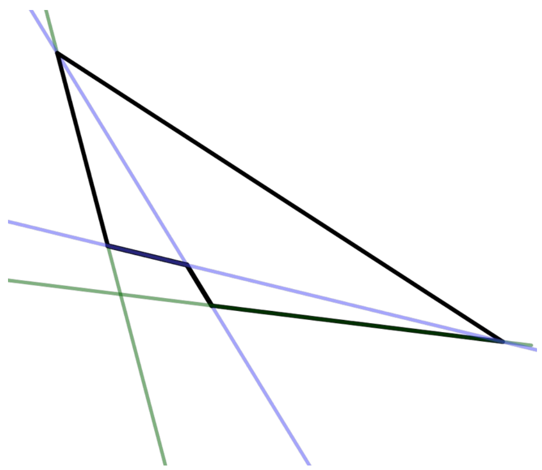
Autrement dit, si je dois tracer un trait ou une ligne droite (représentant une droite ou une demi-droite ou un segment), ai-je les éléments nécessaires pour le faire : prolongement ou deux points ?

On en revient au questionnement sur l'usage correct des instruments.

L'analyse majoritairement obtenue est la suivante :



Ces élèves ont bien repéré des alignements de segments ou point-segment mais « voir » des points alignés est encore difficile. Cette analyse ne leur permet, dans un premier temps, que les tracés suivants sur l'amorce, sans utilisation de la bande de papier.



Quelque-un·e·s complètent sans report de manière erronée ce qu’une mise en commun suffit à corriger (sans en dévoiler plus !).

Cette mise en commun sert aussi à préciser les premiers objets géométriques utilisés et représentés :

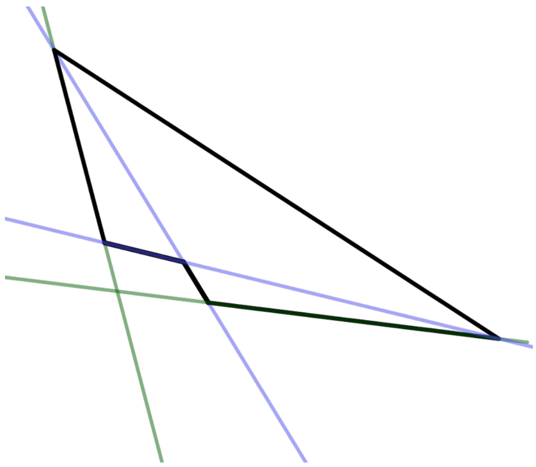
- des droites (ou demi-droites) obtenues en prolongeant des segments déjà tracés,
- un point important, sommet d’un des quadrilatères, obtenu comme intersection de deux droites (ou demi-droites).

Pour expliciter les procédures et objets géométriques, il apparaît évidemment utile à la classe de nommer les points (cela permet aussi de différencier en demandant aux plus avancés de rédiger une analyse de la figure modèle et/ou un programme de construction).

On convient que cela ne suffit pas : il manque des points pour pouvoir tracer les segments manquants ou des droites permettant d’obtenir d’autres points par intersection.

Le débat dans la classe permet de progresser.

Il semble qu’à ce stade, l’on ne puisse pas trouver de points comme intersections de droites, demi-droites ou segments.

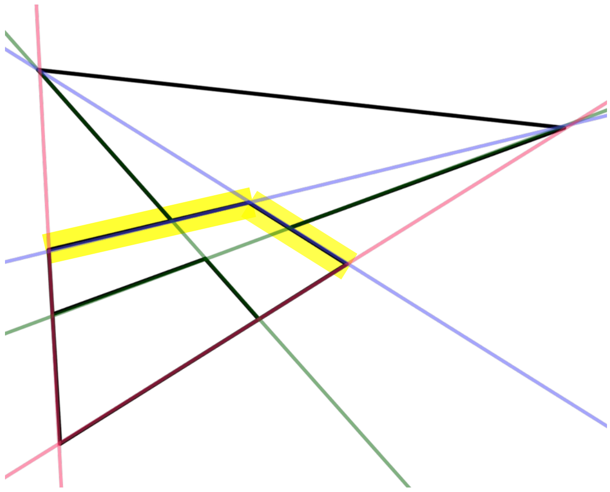


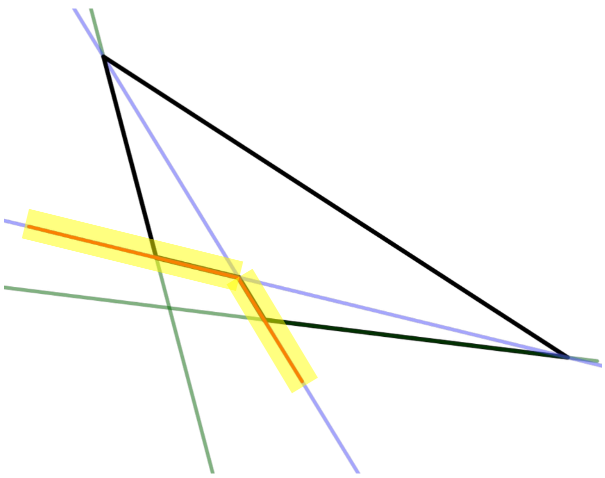
On les obtient donc certainement par report de longueurs : il s’agit alors de repérer les supports déjà tracés et les points qui peuvent servir de « points de départ ». Les points cherchés sont donc à « l’extrémité du report ». Il faut ensuite relier ces points en fonction du modèle.

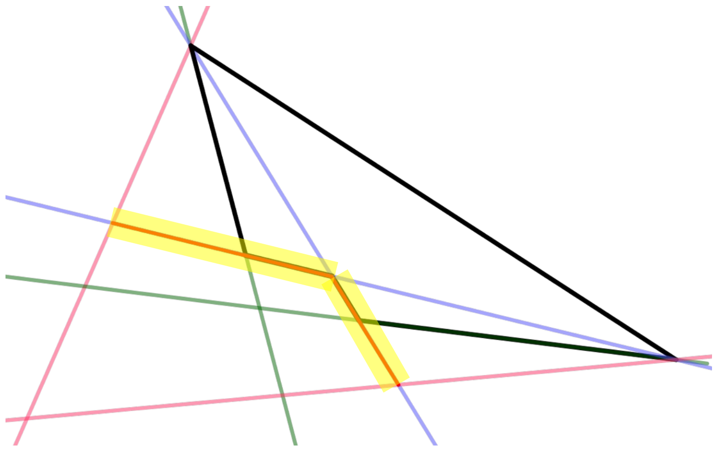
On (re)met en évidence le concept de segment comme partie de droite limitée avec des points aux extrémités. Le segment a une longueur ce qui n’est pas le cas de la droite ou de la demi-droite.

Un nouveau temps de recherche est éventuellement laissé aux élèves.

Des élèves utilisent alors très souvent deux reports pour terminer.

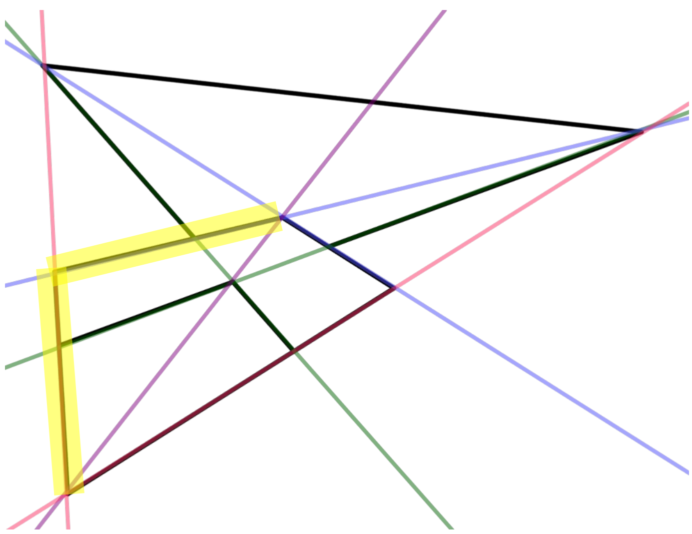


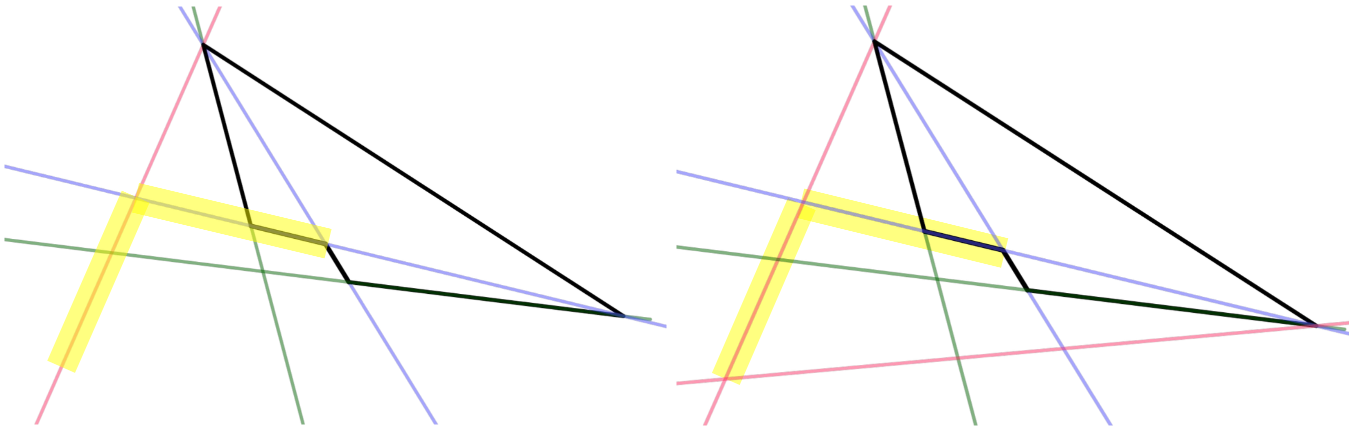




Il y a d'autres possibilités.

Par exemple, un des deux reports présentés ci-dessus et le report de la longueur d'un côté du plus grand quadrilatère...





Une brève correction complémentaire de la mise en commun est organisée.

Après calcul du coût (6 x 1 € + 2 x 5 € = 16 €), le travail de recherche est relancé en mentionnant la possibilité d'une construction avec un coût moindre.

L'obtenir oblige à voir trois points alignés !

**Ce sont là les fonctions essentielles de ce système de coût : relancer la recherche, favoriser la différenciation et « forcer », ici, une vision 0D.**

**Deuxième phase**

Des élèves sont déjà entrés dans cette deuxième phase en repérant très vite l'alignement de trois points et ce, avant même la première mise en commun ! Il ne faut pas que leur avancée significative soit dévoilée trop tôt pour permettre aux autres d'approfondir leur travail.

Il faut différencier avec ces élèves-là, en leur demandant de faire par écrit l'analyse de la figure modèle, ou un programme de construction.

Les autres élèves sont incités à analyser plus finement la figure modèle, à chercher quel point pourrait permettre de tracer sur l'amorce les droites supports que l'on n'a pu tracer sur le modèle.

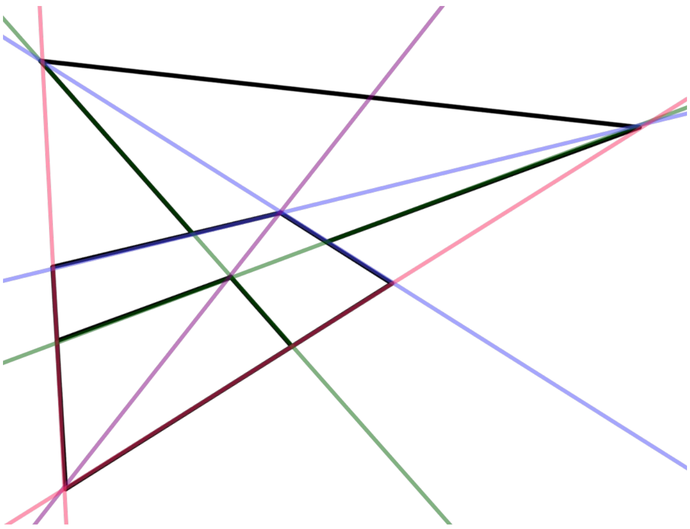
Une mise en commun peut être organisée si le blocage est plutôt généralisé après un temps de recherche ou des étayages individuels pendant la recherche.

Il apparaît assez vite que ce point pourrait être le sommet commun des deux quadrilatères.

Il faut maintenant trouver ses éventuelles propriétés ou relations avec les autres objets géométriques.

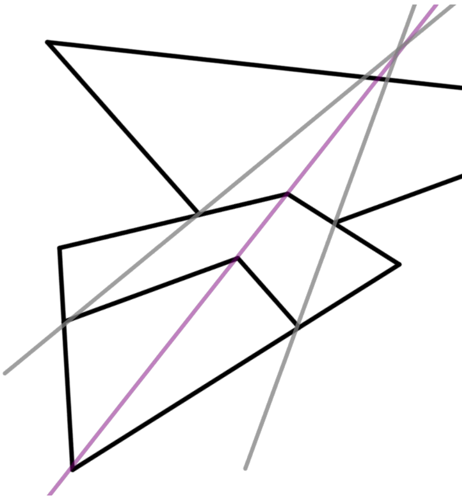
L'alignement recherché est alors généralement trouvé par le plus grand nombre.

Selon les cas, le professeur pourra faire une mise en commun après un temps de recherche, s'il apparaît dans la classe un blocage plutôt généralisé, ou des étayages individuels pendant la recherche.



Attention à la précision des tracés pour ne pas trouver d'alignements imaginaires !

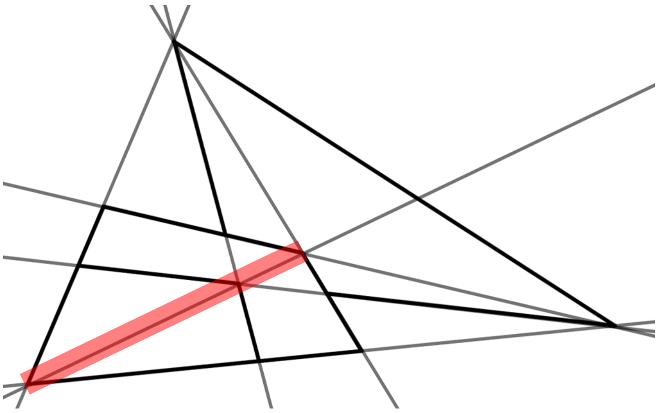
Par exemple…

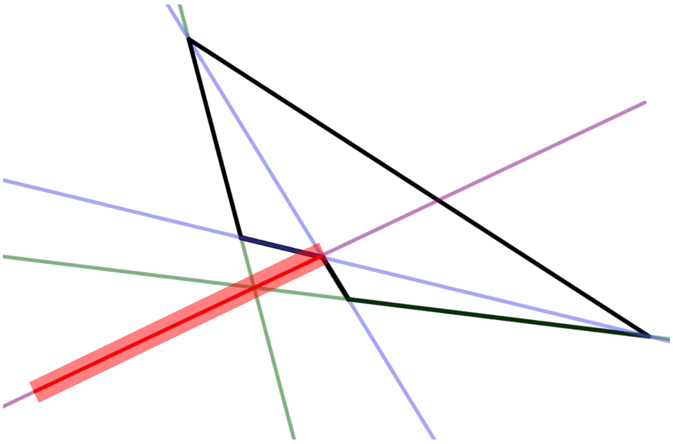
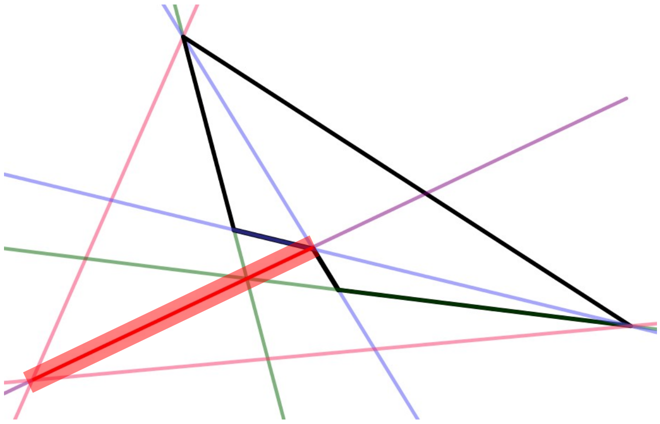


Il suffit qu'un crayon soit mal taillé, que les traits soient épais pour que cela devienne un alignement supplémentaire…

Le report suffisant est également trouvé assez facilement ensuite.

Il y a plusieurs possibilités : un exemple sur les figures suivantes.



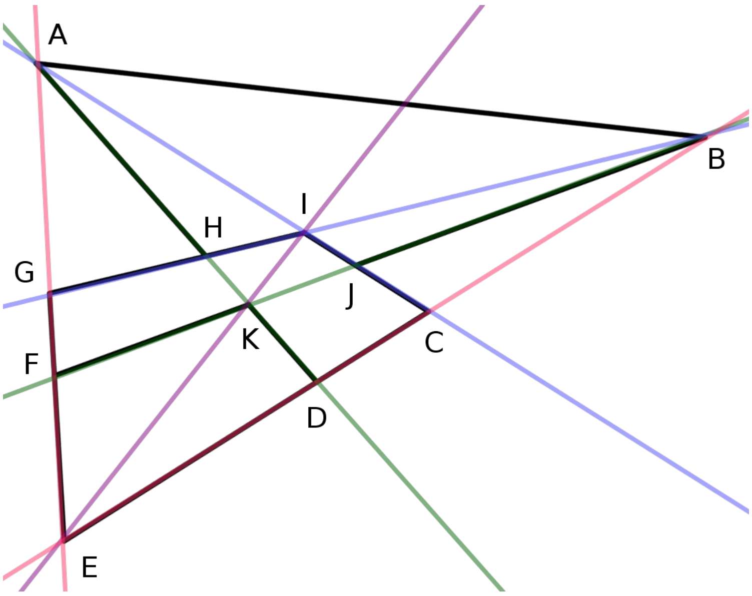
Le coût devient : 7 x 1 € + 1 x 5 € = 12 €.

Une dernière mise en commun permet d'expliciter à nouveau les procédures, les objets géométriques, les relations entre ces objets et le coût.

Le travail donné pour différencier doit être repris, en partie comme travail à la maison si besoin.

Une analyse écrite, même partielle, de la figure modèle est possible.

Les points étant nommés, les élèves doivent citer les objets représentés et écrire les relations entre ces objets. Cela permet d'utiliser de manière justifiée les notations.




Voici des exemples d'écrits pouvant être attendus.

- Le point A est aligné avec les segments [GE], [FE] (qui sont des côtés des quadrilatères EGIC et FKDE).

Ce que l'on pourra faire justifier par : ils sont « portés » par la même droite, propriété établie avec la règle non graduée.

On peut également dire que les points A, G, F et E sont alignés.

On aurait pu y ajouter le segment [GF] mais ce n'est pas une propriété particulièrement utile pour la construction et elle est en soit « contenue » dans la précédente : cela peut faire partie de la discussion avec les élèves.

Déterminer lors de l'analyse l'utilité ou non pour la restauration des propriétés de la figure modèle, être capable d'anticiper la construction en faisant des allers-retours avec l'amorce sont des aspects essentiels de ce travail.

- Les segments [FK] et [JB] sont alignés car « portés » par une même droite.
- Les points E, K et I sont alignés.
- Le point D est le point d'intersection des droites (BE) et (AH) par exemple.
- …

On ne vise pas l'exhaustivité !

Il faut préciser aux élèves que ces relations sont obtenues par l'usage des instruments.

Passer ensuite au programme de construction est un travail exigeant et indispensable : il faut trier, ordonner ces propriétés pour permettre la construction progressive de points à partir des seuls points représentés sur l'amorce.

On ne pourra pas parler immédiatement de la droite (AD) à partir de l'amorce par exemple...

Cela demande de reformuler certaines propriétés, de privilégier certains points comme objectifs de construction par intersection ou report de longueur.

Il y a là une forme de raisonnement déductif qui prépare au passage futur à une géométrie théorique (voir la partie « Introduction »).

## Restauration 1-3 : synthèse des différentes phases

*Remarque*

*Ces différentes phases ne sont pas figées : le·la professeur·e qui utilise cette situation adapte le scénario en fonction de ce qui se passe dans sa classe. Elles sont à comprendre comme des moments clés qu'il est important de prendre en compte pour que les objectifs de la situation d'enseignement soient atteints. Elles sont issues d'expérimentations.*

### Question initiale

Le professeur montre la figure modèle seule.

« Que voyez-vous ? »

Réponses écrites sur les cahiers (1-2 minutes) puis bilan collectif rapide (2-3 minutes).

Retour à prévoir lors du bilan final.

### Première phase

Présentation du modèle, de l'amorce et des instruments à utiliser (règle non graduée et bande de papier), de leur coût.

Analyse de la figure modèle, premières procédures.

Mise en commun à prévoir dès que des blocages se présentent et/ou des procédures erronées méritent d'être traitées collectivement.

Cette première phase peut être considérée comme terminée si une majorité d'élèves a accès à une procédure avec deux reports.

Ces différentes procédures sont explicitées lors d'une mise en commun sans divulguer des avancées possibles vers une procédure à un report.

### Deuxième phase

Relance de la recherche grâce au coût vers une procédure à un report de longueur (moins « chère ») nécessitant une vision 0D soit trois points alignés.

Différenciation à prévoir pour les élèves les plus avancés : analyse écrite de la figure modèle après avoir nommé les points, programme de construction.

Une dernière mise en commun est organisée pour expliciter cette procédure à un report et mettre en évidence la relation géométrique qui l'a permise.

### Bilan final de la situation

En guise de bilan de la situation elle-même, un travail écrit d'analyse de la figure modèle et un programme de construction peuvent être envisagés avec une utilisation motivée du vocabulaire géométrique et des notations.

**Retour sur la question initiale : « Que voyez-vous ? »**

(À l'oral)

Ce retour ne se démarque pas des précédents.

On peut insister ici sur la nécessité de voir des lignes ou des traits non tracés, en particulier si la vision de figures superposées s'est présentée.

**Institutionnalisation « point, segment, droite, alignement »**

C'est à l'issue de cette troisième situation d'enseignement que nous proposons d'institutionnaliser une partie des concepts géométriques étudiés et leurs relations.

Dans le cahier de leçon, dans un chapitre qui pourrait s'intituler « Point, segment, droite, alignement », sont synthétisés les bilans intermédiaires des trois situations, négociés avec les élèves, reformulés ou pas pour cette institutionnalisation.

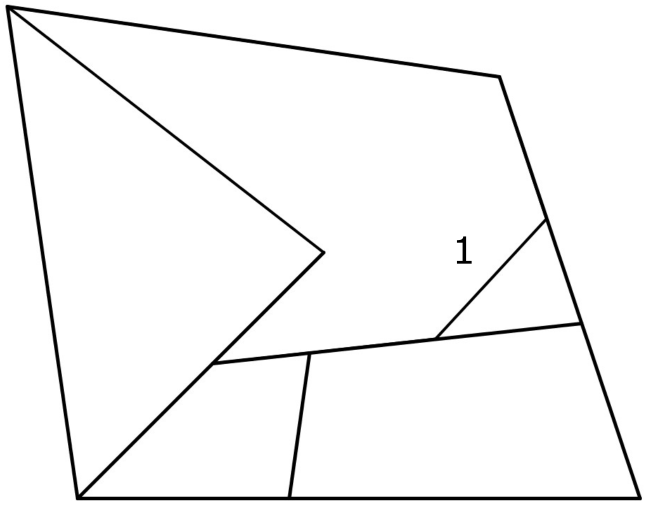
Voir les propositions en début de cette partie 1.

## Exercices à programmer à la suite et/ou à distance

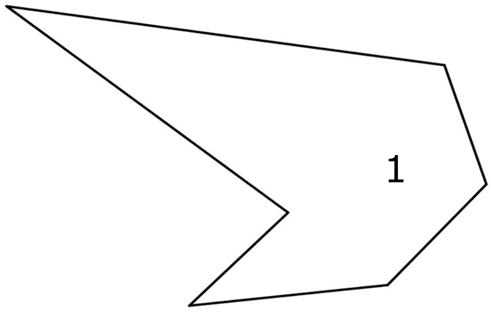
**Exercice 1-2** (repérer des alignements, des points d'intersection)

Reconstruire la figure ci-dessous à partir du morceau 1.

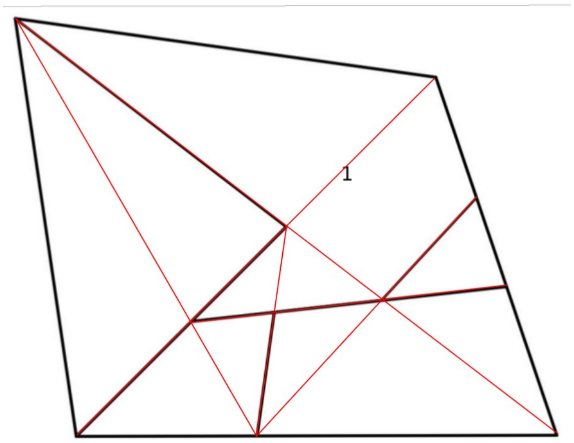
- un modèle est fourni (de « taille » différente) ;
- une amorce de la figure est fournie ;
- seule la règle (non graduée) est autorisée ;




L'amorce




Résolution

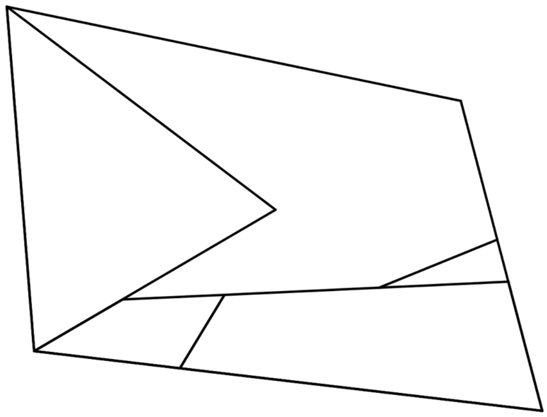



Produire un programme de construction : utilité de nommer les points, du codage…

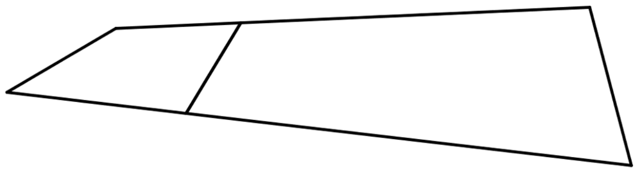
**Exercice 1-3** (repérer des alignements, des points d'intersection, « sortir » de l'amorce)

Reconstruire la figure ci-dessous à partir des morceaux donnés.

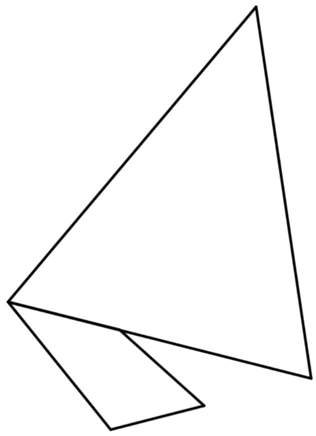
(Seule la règle non graduée est autorisée !)



Amorce 1

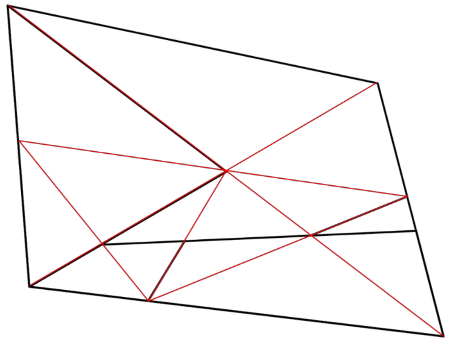


Amorce 2



(Amorce 1 ou 2 au choix, ou les deux !)

Résolution



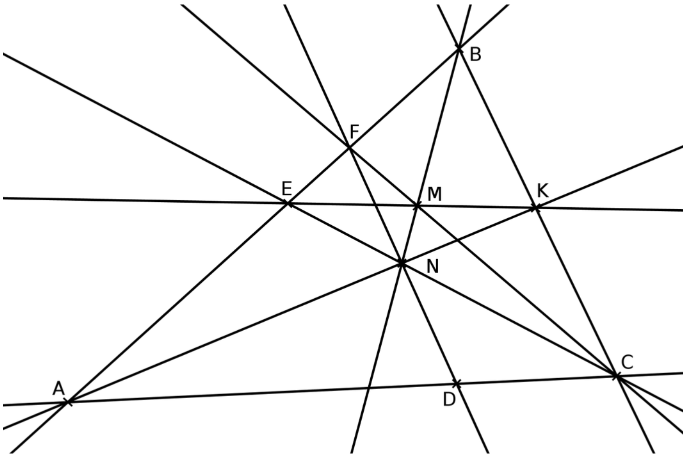
Produire un programme de construction afin de montrer l'utilité de nommer les points, du codage…

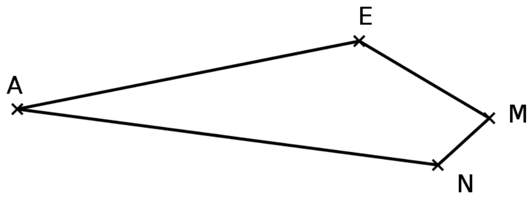
**Exercice 1-4** (<u>ordre des constructions, programme de construction</u>)

On a commencé à reproduire la figure ci-dessous. Il faut la terminer !

Seul instrument autorisé : la règle non graduée.

Tous les points qui paraissent alignés le sont.



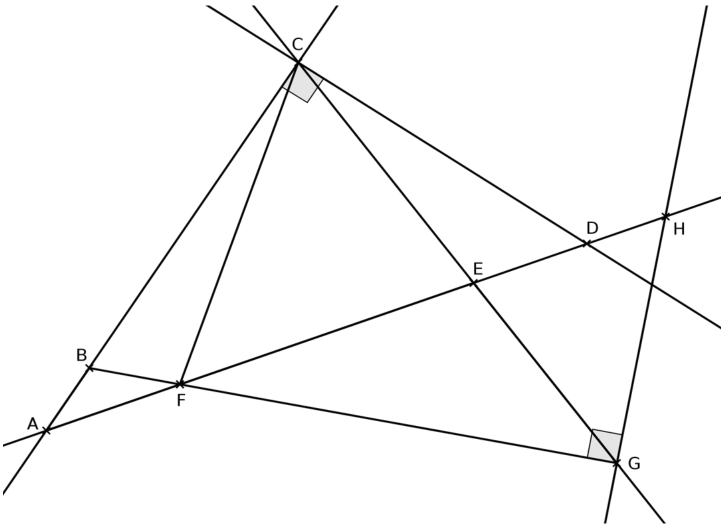

Écris un texte court qui explique la construction.

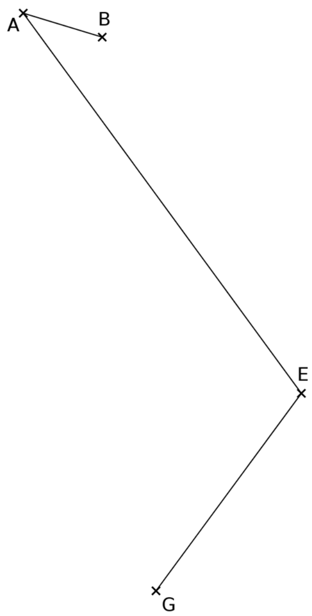
**Exercice 1-5** (<u>ordre des constructions, programme de construction</u>)

On a commencé à reproduire la figure ci-dessous. Il faut la terminer !

Seuls instruments autorisés : la règle non graduée et l'équerre.

Tous les points qui paraissent alignés le sont.




Écris un texte court qui explique la construction.

*Remarque*

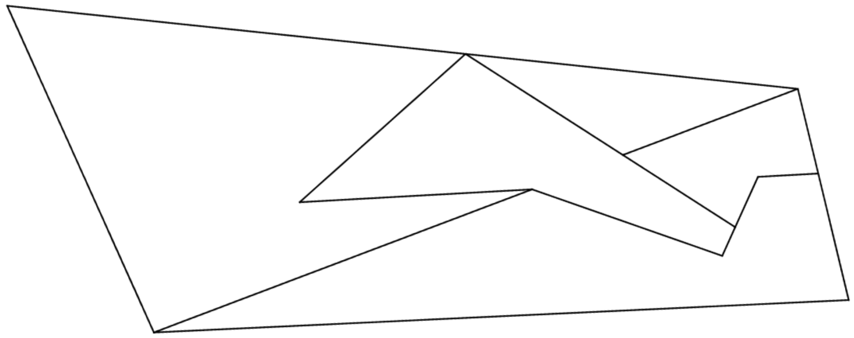
*Cet exercice pourra être fait à distance après avoir retravaillé l'usage de l'équerre.*

**Exercice 1-6** (repérer des alignements, des points d'intersection, plus difficile)

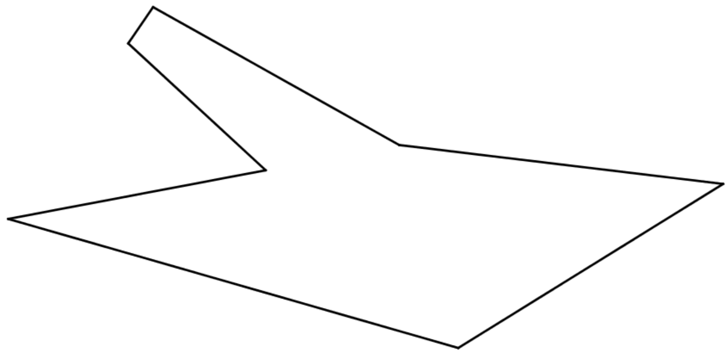
Reproduire la figure modèle ci-dessous à partir de l'amorce donnée.

Instrument autorisé : la règle non graduée.

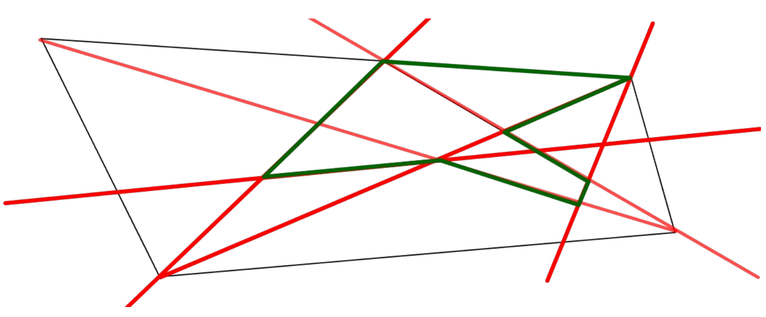
Modèle



Amorce



Résolution



Il est possible de trouver d'autres exercices dans les différents articles ou ressources proposés dans la bibliographie/sitographie de la partie « Introduction ».

## Des idées d'exercices pour évaluation

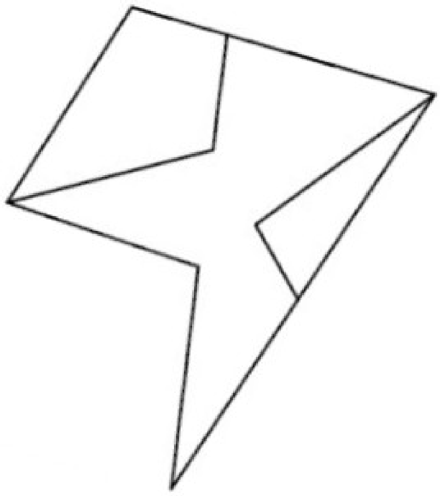
Les compétences mathématiques évaluables peuvent être :

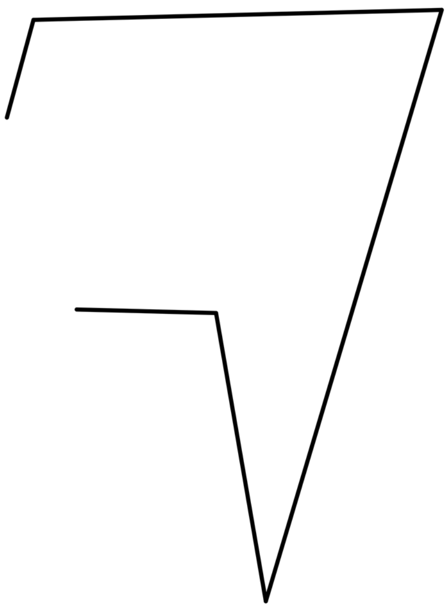
| | |
|---|---|
| Représenter 3 | Analyser une figure sous différents aspects (surface, contour, lignes, points). |
| Représenter 5 | Utiliser et produire des représentations de solides et de situations spatiales. |
| Communiquer 1 | Utiliser un vocabulaire adéquat et/ou des notations adaptées pour décrire une situation, expliquer. |

**Exercice**

Restaure la figure ci-contre à partir de l'amorce proposée.

Seule la règle non graduée est autorisée.





**Exercice**

En utilisant la figure modèle de l'exercice précédent, réponds aux questions suivantes.

Dans chaque cas, un exemple suffit.

1) Quels segments sont alignés ?

2) Quels point et segment sont alignés ?

3) Quels points sont alignés ?

*Remarque*

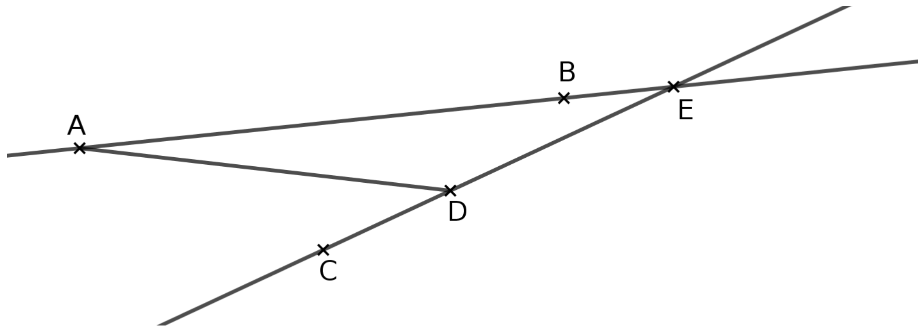
*Il est attendu dans cet exercice que les élèves prennent l'initiative de nommer les points sur la figure modèle.*

*Si ce n'est pas le cas, a minima, qu'une « légende » soit précisée (utilisation de crayons de couleur…).*

*Il est important de ne donner aucune indication en ce sens !*

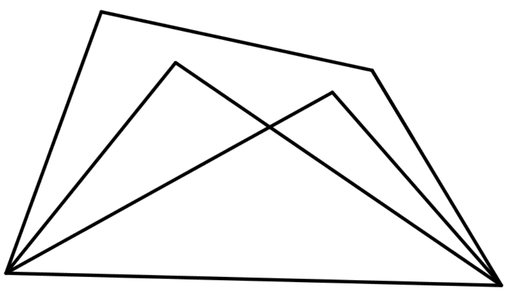
**Exercice**

Décris la figure ci-dessous en précisant les objets géométriques représentés et des relations entre ces objets (intersections, alignements).

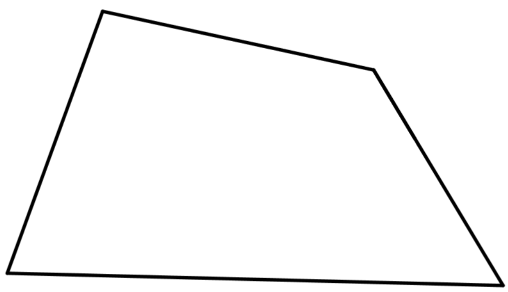



**Exercice**

Figure modèle



Amorce



(Les orientations de la figure modèle et de l'amorce doivent être différentes sur la consigne de l'évaluation.)

Compléter la figure amorce pour qu'elle soit identique au modèle.

Matériel et coût : règle non graduée (1 €), instrument de report de longueurs (5 €).

La construction doit être la plus « économique » possible.

*Remarque*

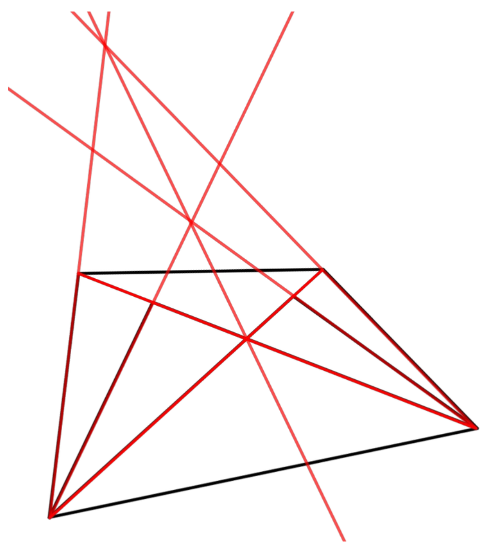
*La figure modèle de cet exercice ressemble à celle de la restauration 1-2.*

*Il peut constituer un exercice d'évaluation.*

*Une construction facile est possible avec deux reports de longueur sans « sortir » de l'amorce. Mais il est possible de n'en réaliser qu'un en repérant le même type d'alignement que dans la restauration 1-2 et donc « en sortant » de la figure modèle.*

*La seule différence ici étant que le point crucial n'est pas sur un côté du quadrilatère…*

*Ce qui oblige à un report !*



**Partie 2**

**Milieu**

**Exercices sur les thèmes « segments/points, milieu »**

**Figures téléphonées**

## 2 - Milieu d'un segment

Comme cela a été expliqué dans les pages 42-43, l'usage de la bande de papier a été travaillé en amont sur des exercices rapides et variés.

Ainsi, les élèves ont conscience que pour reporter une longueur, il est nécessaire d'avoir un support (droite ou segment) et un point de départ.

Avant d'aborder les restaurations proposées dans cette partie, autour de la conceptualisation de la notion de milieu, il peut être néanmoins utile de proposer les exercices préliminaires suivants.

« Tracer un segment avec la règle non graduée.

Placer son milieu avec comme seul instrument une bande de papier. »

La bande de papier distribuée aux élèves devra être suffisamment longue afin que les élèves aient la possibilité de reporter la longueur totale de leur segment.

Ou encore, un exercice du type :

« Tracer un segment puis un segment de longueur double, moitié… avec la règle non graduée et une bande de papier. »

Pour appréhender le concept de milieu d'un segment sans la mesure, on peut procéder d'au moins deux façons différentes avec les deux restaurations suivantes.

Ces deux restaurations 2-1 et 2-2 aboutissent à la même conclusion.

On peut donc utiliser l'une ou l'autre ou les deux, suivant le temps disponible et le niveau de la classe. La situation 2-2 est plus facile.

# Restauration 2-1

## Objectifs

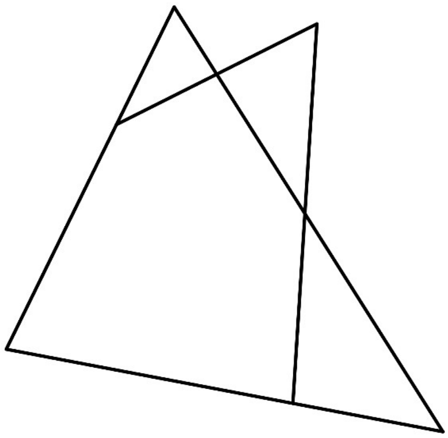
- Définir le milieu d'un segment comme point appartenant au segment et à égale distance des extrémités du segment.
- Vérifier qu'un point est le milieu d'un segment avec la règle non graduée et la bande de papier comme reporteur de longueurs.
- Construire le milieu d'un segment avec ces mêmes instruments (travailler sur les grandeurs, toujours sans la mesure).
- Réinvestir les concepts étudiés dans la partie précédente, l'usage géométrique des instruments, ainsi que la nécessité d'analyse de la figure modèle.
- Et continuer d'apprendre à faire évoluer le regard sur les figures (passer progressivement d'une vision 2D à une vision 1D et/ou 0D).

## Consigne

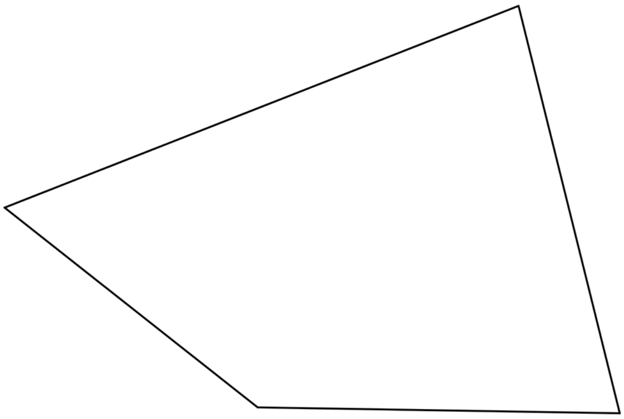
Reproduire la figure donnée à partir de l'amorce proposée.

Instruments autorisés : la règle non graduée et une bande de papier.

Modèle



Amorce



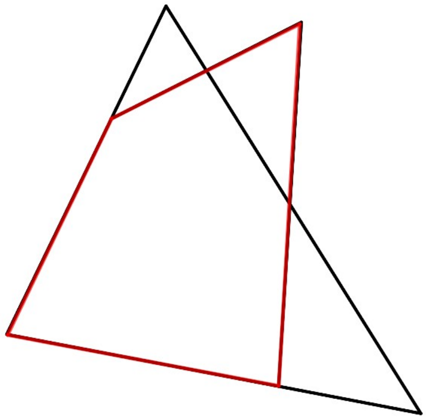
Le modèle et l'amorce sont de tailles différentes afin que le report de longueurs via la bande de papier entre le modèle et l'amorce ne soit pas possible.

La position du modèle et celle de l'amorce sont différentes.

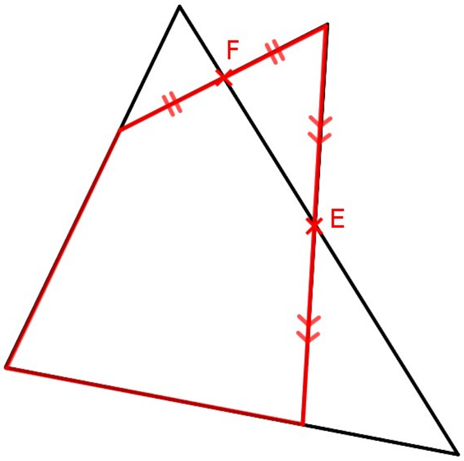
**Résolution**

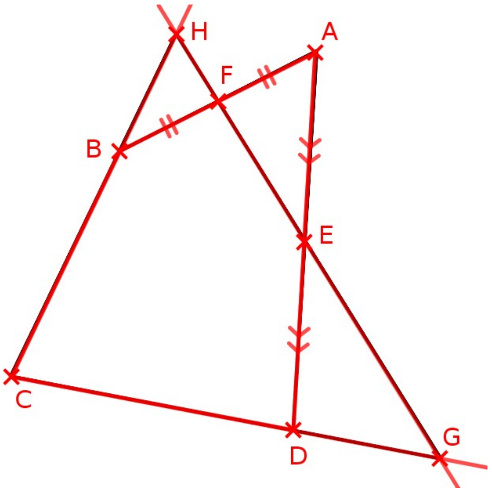
Même si des exercices sur un nouvel usage de la bande de papier, en lien avec la notion de milieu, nécessaire ici pour résoudre le problème, ont été faits en amont, **la démarche de rechercher une propriété de certains points de la figure modèle autre que l'alignement est une difficulté pour les élèves**.

Le repérage de l'amorce sur le modèle en est une autre pour certain·e·s élèves.



Dans cette restauration, deux points sont les milieux de deux côtés du quadrilatère amorce, deux autres points sont obtenus comme intersections de droites.



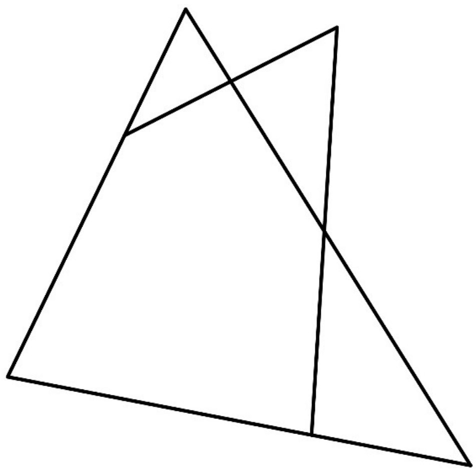



## Restauration 2-1 : un déroulement, points de vigilance

Le professeur commence par montrer la figure modèle seule.

### Question initiale

« Que voyez-vous ? »



Les réponses obtenues sont plutôt géométriques et encore majoritairement 2D.

Les élèves voient un triangle et un quadrilatère superposés, deux voire trois petits triangles, des demi-droites et un quadrilatère, des triangles et un pentagone juxtaposés…

Comme pour les restaurations précédentes, les élèves peuvent venir au tableau pour montrer ce qu'ils voient et ainsi gagner du temps.

### Consigne et première phase

« Il s'agit maintenant de restaurer cette figure modèle à partir de l'amorce proposée. Le modèle et l'amorce ne sont pas de la même taille. »

Cela amène à donner les instruments utilisables :

- La règle non graduée

Collectivement sont alors rappelées ses conditions d'usage pour une construction « non au hasard ».

- Une bande de papier

Les élèves rappellent son usage : point de départ, support afin de reporter une longueur.

Quelques élèves s'interrogent sur la pertinence de cet instrument de géométrie au vu de la différence de tailles entre le modèle et l'amorce. Le professeur laisse volontairement les interrogations en suspens afin de ne pas orienter les stratégies des élèves.

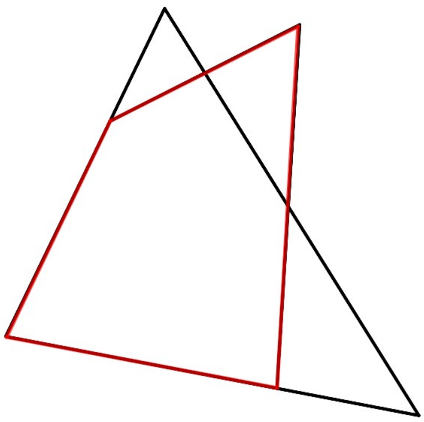
Point de vigilance particulier

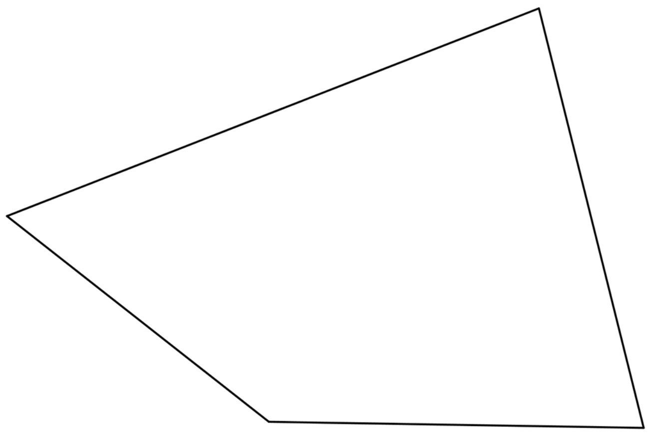
Les élèves questionnent le professeur au sujet du tableau des coûts qui n'est pas présent sur la fiche distribuée. Notre choix de ne pas en proposer pour cette restauration induit une résolution commune de la part de tous les élèves, mais cela n'est pas explicité à la classe.

En effet, les élèves doivent pouvoir se lancer dans la recherche en pensant que plusieurs stratégies seront valables. Réduire le nombre de procédures et l'annoncer pourrait démotiver certains élèves. Cette restauration est plus difficile car, pour résoudre le problème, il faut trouver des propriétés de points de la figure modèle (vision 0D).

Une majorité d'élèves se lancent dans la recherche.

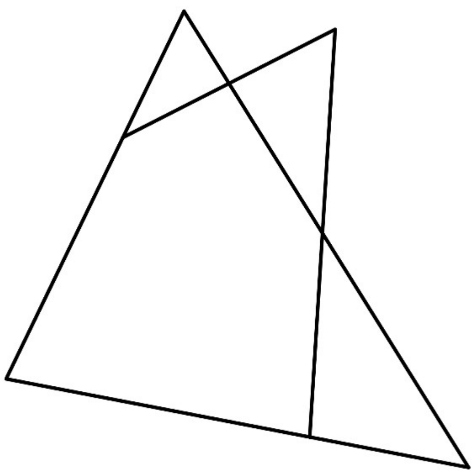
Ils ont très souvent besoin de repérer l'amorce dans le modèle, voire de la repasser en couleur. L'orientation de l'amorce que nous avons choisie rend nécessaire cette étape pour certains élèves.

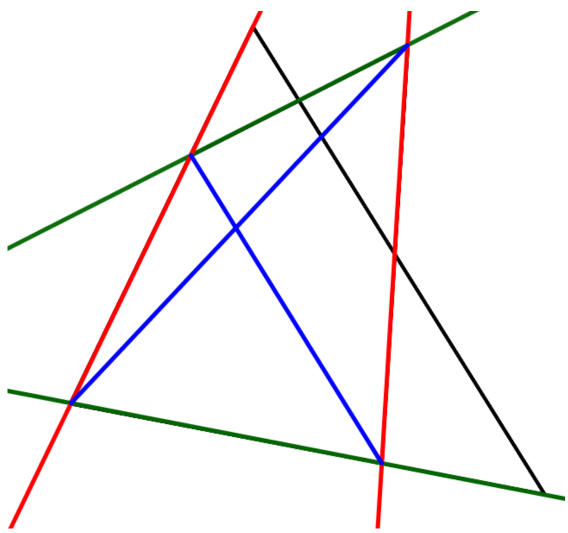




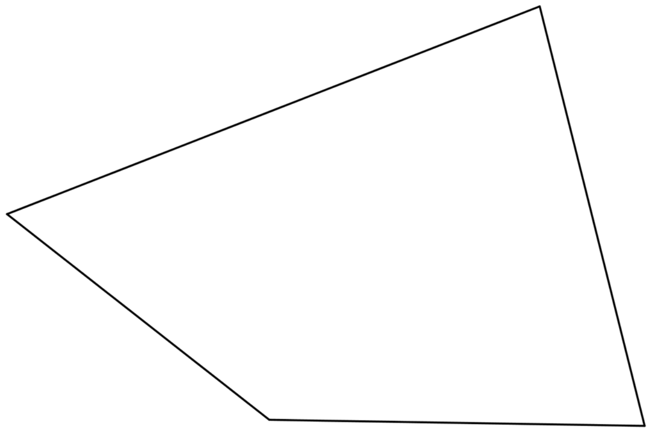
L'analyse généralement obtenue est la suivante : les élèves prolongent les côtés du quadrilatère et tracent des diagonales.

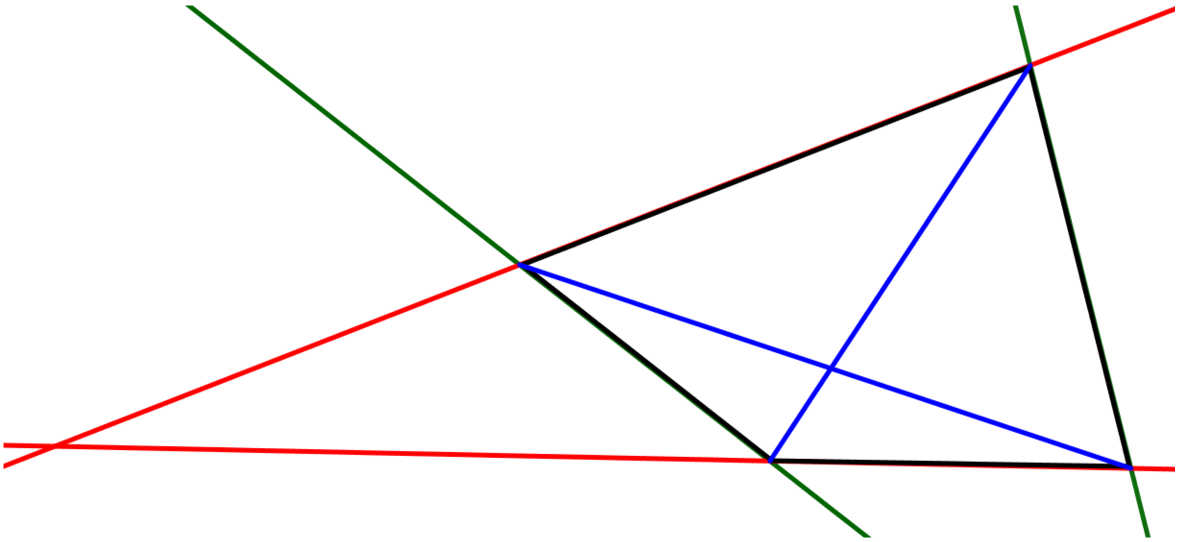
Ils reproduisent des procédures de restauration déjà validées.





Ce qui amène les constructions suivantes sur l'amorce.





Ces constructions ne permettent pas de conclure.

<u>Point de vigilance particulier</u>

Lors de l'analyse du modèle, les élèves ne trouvent pas facilement la procédure à utiliser. Ainsi, après avoir utilisé des stratégies déjà efficaces sur d'autres restaurations comme le prolongement des côtés ou le tracé des diagonales, ils tracent de multiples segments qui surchargent rapidement le modèle sans apporter de solution.

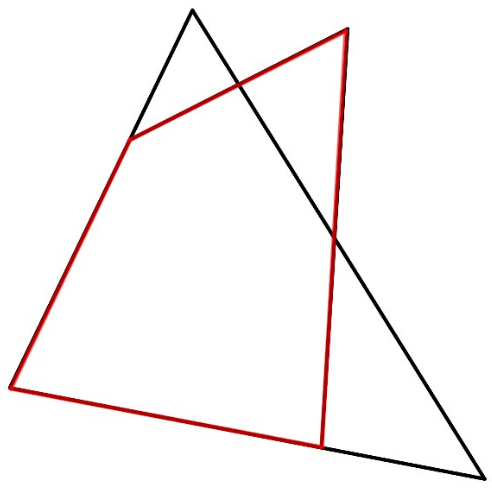
Un bilan intermédiaire s'impose afin de faire distinguer aux élèves les traits utiles des traits non utiles, ce qui est une difficulté importante pour les élèves dans ce type d'activité.

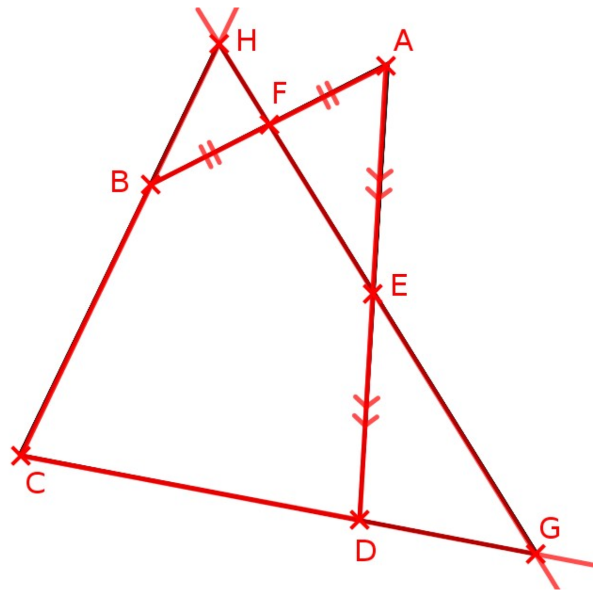
La mise en commun avec une mise en couleurs comme ci-dessus de tous les tracés effectués permet de mettre en lumière les points et segment à construire. Le professeur peut aussi faire rappeler à la classe les instruments de géométrie autorisés afin d'ouvrir les procédures : les élèves vont exploiter la bande de papier et non plus se contenter de prolongements ou tracés de segments.

De plus, les élèves prennent confiance dans la gestion des incessants allers-retours entre amorce et modèle qui sont indispensables à la restauration de figure.

**Deuxième phase**

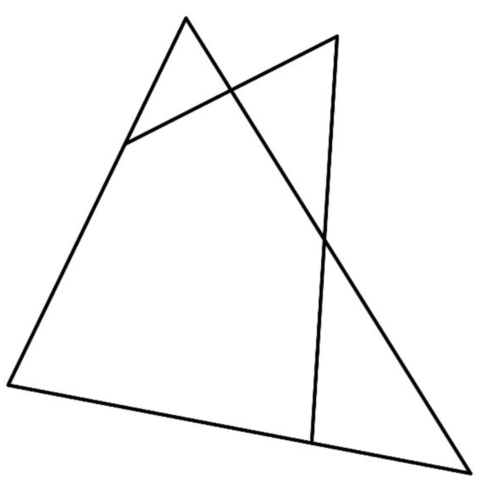
Très peu d'élèves ont tracé à vue le segment [GH] recherché : un bref rappel à l'oral sur les règles d'usage de la règle non graduée a suffi pour les convaincre de poursuivre leurs recherches.

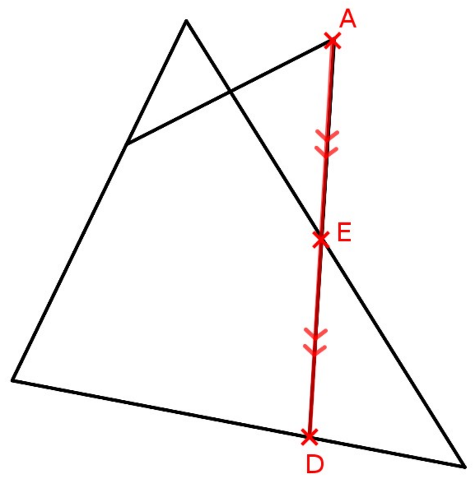





C'est à ce moment-là, que des élèves investissent la bande de papier pour affiner leur analyse, insuffisante pour conclure jusque-là.

Ils ont conscience de la différence de taille mais essaient de comparer des longueurs. Quelques élèves déterminent la position du point E comme étant le milieu du segment [AD] : ils ont souvent pris les repères des trois points sur leur bande de papier et ont plié.





La majorité des élèves qui ont déterminé la position du point E, ont aussi, par la même procédure, déterminé celle du point F.

Une mise en commun est organisée pour « débloquer » la partie des élèves qui n'a pas trouvé de propriété particulière sur la figure modèle. Le point F n'est pas évoqué pour permettre une poursuite de recherche pour ces élèves-là dans une troisième phase.

Des élèves expliquent leur construction en utilisant les formulations suivantes :

– on cherche la moitié du segment [AD],

– on divise le segment [AD] en deux moitiés,

– on place le milieu du segment [AD],

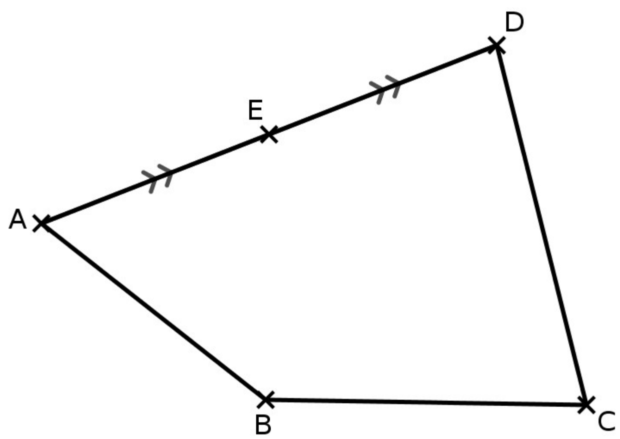
– on met un point E au milieu du segment [AD],

– une description de la construction du point E en expliquant la manipulation de la bande de papier pliée en deux.

Lors de cette mise en commun, le vocabulaire correct est précisé.

Et notamment, l'usage du mot « moitié » qui fait référence à une longueur et non à un point, ou l'expression « au milieu » qui est issue de la vie courante mais ne traduit pas, du moins dans l'esprit des élèves, le statut d'objet géométrique du point E.

Le point E est alors construit sur l'amorce.




Les élèves sont invités à utiliser un codage afin de mémoriser les procédures utilisées pour construire le point E.

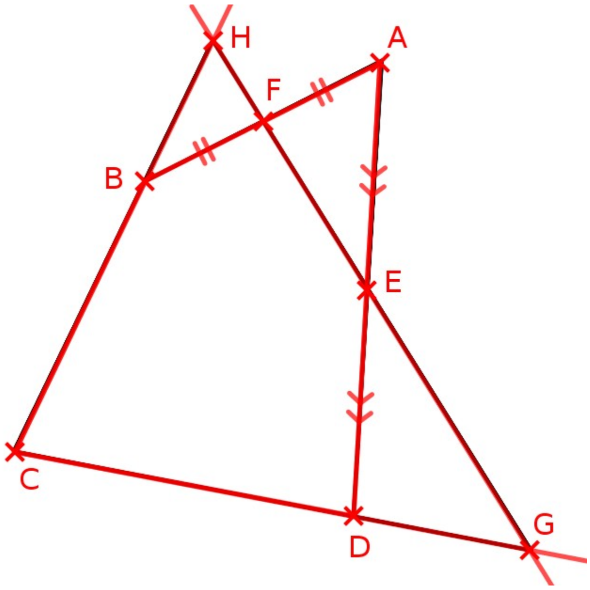
**Troisième phase**

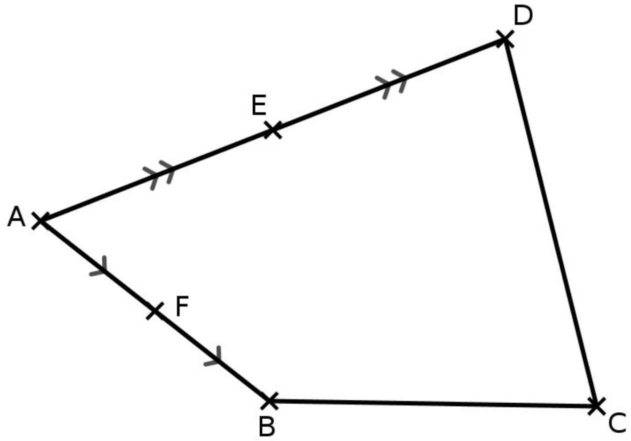
Une nouvelle phase de recherche est lancée pour les élèves qui restent en difficulté : c'est la première fois que la construction repose sur les propriétés de points particuliers de la figure.

Pour ces élèves, il reste à construire le deuxième point déterminant pour restaurer la figure, le point F, et donc à découvrir sa propriété.

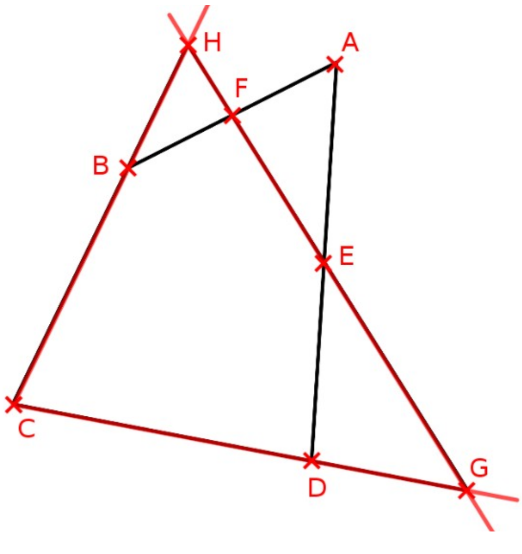
L'expérience acquise avec la construction du point E permet d'aboutir assez rapidement.

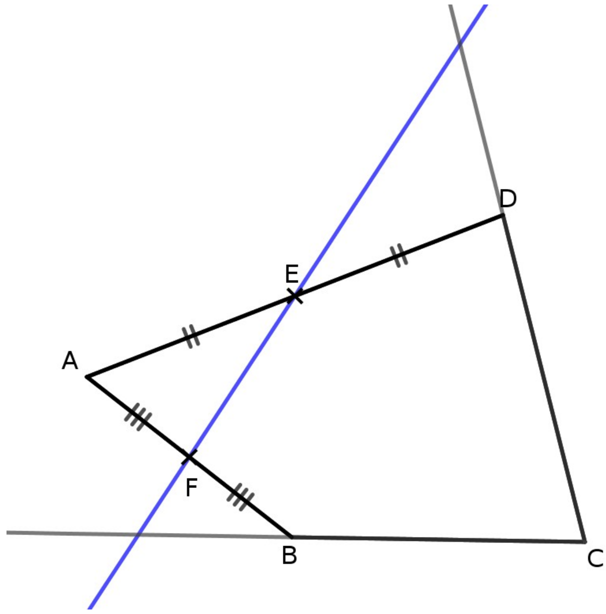
L'analyse finale est alors obtenue ce qui permet la construction du point F sur l'amorce.




Le tracé de la droite (EF) ainsi que les points d'intersection H et G avec les côtés du quadrilatère ne posent aucun problème aux élèves.




Pendant ce temps, les élèves ayant déjà restauré la figure prolongent l'activité par la rédaction d'un programme de construction. Ils vont expliciter les constructions des points E et F.

Ils pourront y réinvestir le fait de nommer la figure, d'utiliser un vocabulaire précis ainsi que les notations usuelles.

### Bilan final de la situation

Il s'agit d'établir une définition du milieu d'un segment : en effet, cette activité permet de mettre en relief que le milieu d'un segment est un objet géométrique et non une valeur numérique.

Le milieu d'un segment est le point qui appartient au segment et qui est situé à égale distance des extrémités de ce segment.

Sa position peut être déterminée à l'aide d'une bande de papier sur laquelle il s'agit de reporter les extrémités du segment puis de la plier en faisant se superposer les deux repères positionnés.

La pliure indique la position du milieu du segment.

Le professeur pourra aussi institutionnaliser un nouvel usage de la bande de papier dans le cahier de leçon dans la partie dédiée.

### Retour sur la question initiale : « Que voyez-vous ? »

(À l'oral)

Est mis en évidence ici la nécessaire vision de lignes (1D) – en particulier, voir les côtés du quadrilatère comme des lignes prolongeables –, de leurs intersections (0D) mais aussi qu'il faut aller au-delà des questions d'alignement pour trouver des propriétés (milieu) de points indispensables à la restauration.

# Restauration 2-1 : synthèse des différentes phases

*Remarque*

*Ces différentes phases ne sont pas figées : le·la professeur·e qui utilise cette situation adapte le scénario en fonction de ce qui se passe dans sa classe. Elles sont à comprendre comme des moments clés qu'il est important de prendre en compte pour que les objectifs de la situation d'enseignement soient atteints. Elles sont issues d'expérimentations.*

## Question initiale

Le professeur montre la figure modèle seule.

« Que voyez-vous ? »

Réponse écrite sur les cahiers (1-2 minutes) puis bilan collectif rapide (2-3 minutes).

## Première phase

Présentation du modèle, de l'amorce et des instruments à utiliser.

Analyse individuelle de la figure modèle et premières procédures.

Mise en commun dès que des blocages se présentent et/ou des procédures erronées méritent d'être traitées collectivement.

## Deuxième phase

Relance de la recherche en utilisant **les deux** instruments de géométrie autorisés.

Mise en commun partielle dès qu'un petit groupe d'élèves a abouti la restauration : ces derniers communiquent leur procédure de détermination **d'un des deux milieux** (le point E dans notre déroulement mais cela pourrait tout aussi bien être le point F).

## Troisième phase

Relance de la recherche du deuxième milieu et finalisation de la restauration pour l'ensemble de la classe.

Différenciation pour les élèves ayant terminé : mise en place des codages sur leur figure, rédaction du programme de construction en réinvestissant les règles déjà établies (nécessité de nommer les points, etc.)

## Bilan final de la situation

Retour sur le « Que voyez-vous ? ».

Institutionnalisation possible de la notion de milieu d'un segment et de l'usage de la bande de papier pour vérifier qu'un point est le milieu d'un segment ou pour construire le milieu d'un segment (ou après la restauration 2-2, voir page suivante).

# Restauration 2-2

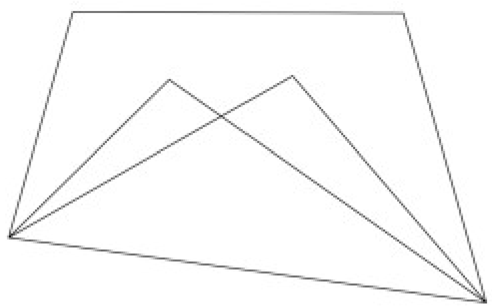
## Objectifs

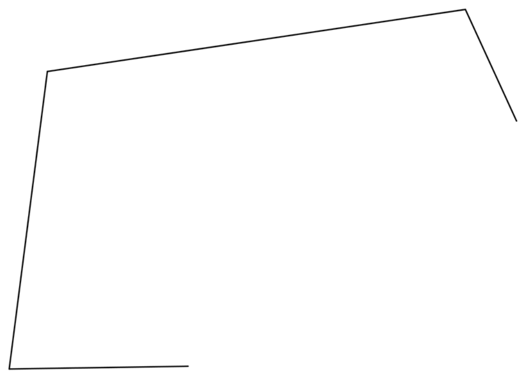
- Définir le milieu d'un segment comme point appartenant au segment et à égale distance des extrémités du segment.
- Vérifier qu'un point est le milieu d'un segment avec la règle non graduée et la bande de papier comme reporteur de longueurs.
- Utiliser un point non représenté sur le modèle et trouver sa propriété (milieu).
- Construire le milieu d'un segment avec ces mêmes instruments (on travaille sur les grandeurs, toujours sans la mesure).
- Réinvestir les concepts étudiés dans la partie précédente, l'usage géométrique des instruments, ainsi que la nécessité d'analyse de la figure modèle.
- Et continuer d'apprendre à faire évoluer le regard sur les figures (passer progressivement d'une vision 2D à une vision 1D et/ou 0D).

## Consigne

Reproduire la figure donnée à partir de l'amorce proposée.

Instruments autorisés : la règle non graduée et une bande de papier.





La figure modèle et l'amorce sont de tailles différentes afin que le report de longueurs via la bande de papier entre le modèle et l'amorce ne soit pas possible. Leurs orientations sont différentes.

Pour plus de différenciation, il est possible d'autoriser la règle graduée et de mettre un coût sur les instruments.

Par exemple :

| | |
|---|---|
| Utiliser la règle non graduée coûte 1 € | |
| Utiliser la bande de papier coûte 5 € | |
| Utiliser la règle graduée coûte 10 € | |

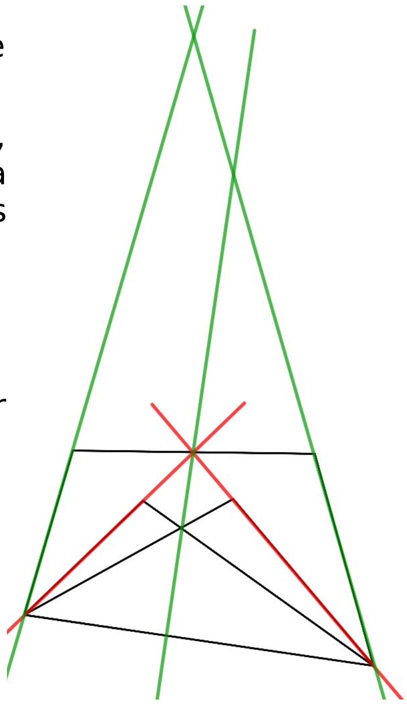
**Résolution**

Cette figure modèle ressemble à celle de la restauration 1-2 de la partie 1 (p 43).

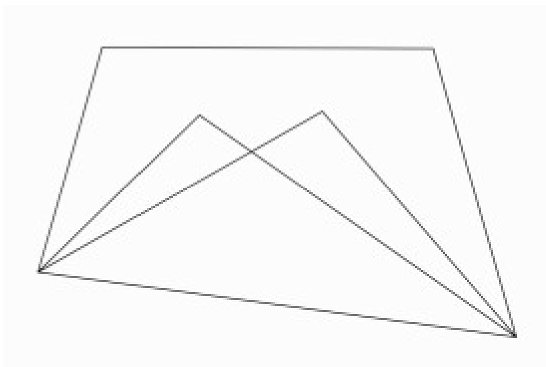
Lors de l'analyse de la figure, pour la recherche d'alignements, il est intéressant de constater que, le fait de « sortir » de la figure modèle est un acquis pour certain·e·s élèves (le plus grand nombre, espère-t-on !).

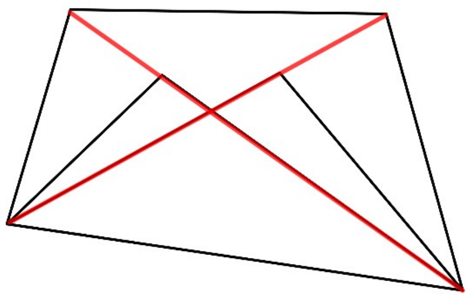
Cette fois, pas d'alignement !

Il faudra donc aller « plus loin » dans l'analyse et chercher d'autres propriétés de points à déterminer.

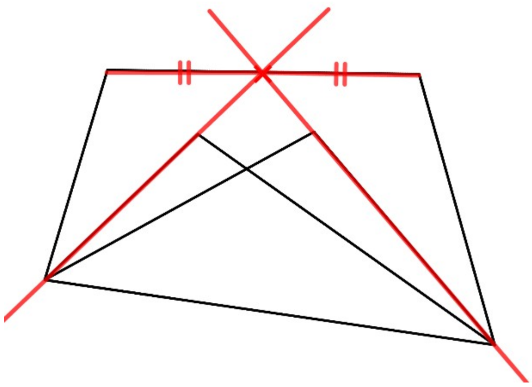


Un côté de chaque triangle est porté par une diagonale du quadrilatère amorce.





Les autres côtés sont portés par des droites qui se coupent en un point qui est le milieu d'un côté du quadrilatère amorce.

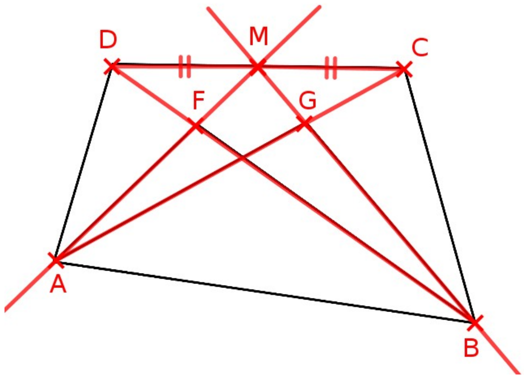


Malgré les exercices préparatoires faits en amont pour initier un nouvel usage de la bande de papier pour vérifier ou placer un milieu de segment, les élèves ne pensent pas vraiment à cette possibilité ici. C'est une difficulté.

Il faut vraiment les inciter alors à chercher d'autres propriétés des points « déterminants ». On discute avec les élèves pour savoir de quoi il s'agit (sans leur donner la solution bien sûr). Il s'agit de points placés précisément sur l'amorce et qui permettent de savoir où poser la règle non graduée pour tracer un segment.

La présence de la règle graduée peut aider les élèves à avoir l'idée que le point M est le milieu du segment [DC], même si, ensuite, pour la construction, il faudra bien utiliser la bande de papier pour réduire les coûts.

Soit l'analyse complète :




Sur l'amorce (le quadrilatère ABCD est incomplet, le point B manque), il faudra donc tracer les deux diagonales une fois le quadrilatère « fermé » puis placer le milieu M de [DC] et tracer [AM] et [BM].

*Remarque*

*On peut également choisir comme figure modèle une figure combinant l'alignement de la restauration 1-2 (partie 1 p 43) et la propriété du point M comme milieu de [DC].*

*Mais il s'agirait alors, en utilisant le coût des instruments de faire investir aux élèves une nouvelle façon de restaurer cette figure déjà connue.*

*Par exemple :*

| | |
|---|---|
| *Utiliser la règle non graduée coûte 10 €* | |
| *Utiliser la bande de papier coûte 1 €* | |
| *Utiliser la règle graduée coûte 20 €* | |

*La méthode de recherche de l'alignement de trois points ne sera plus celle qui permettra de « coûter » le moins cher.*

*Mais cela permet encore une fois de différencier le travail proposé aux élèves.*

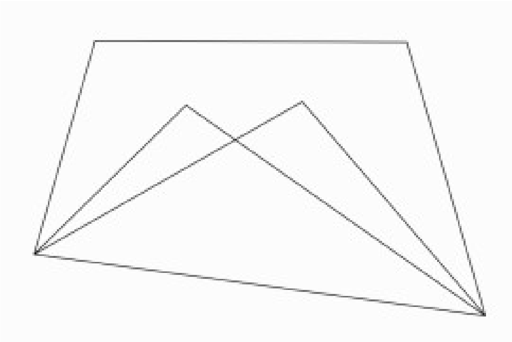
*Le but étant toujours de réussir à restaurer la figure en respectant les « règles du jeu », les élèves plus en difficulté pourront réutiliser la méthode mémorisée.*

## Restauration 2-2 : un déroulement, points de vigilance

Le professeur commence par montrer la figure modèle seule.

### Question initiale

« Que voyez-vous ? »



Les réponses obtenues sont plutôt géométriques et encore majoritairement 2D.

Les élèves voient deux triangles et un quadrilatère superposés, trois triangles dans un quadrilatère, des segments et un quadrilatère, des triangles juxtaposés…

Certains élèves y voient encore une représentation de montagnes comme lors de la première restauration où ils voyaient une enveloppe. Le changement de regard est à exercer et c'est un objectif visé par le travail des restaurations.

Comme pour les restaurations précédentes, les élèves peuvent venir au tableau pour montrer ce qu'ils voient et ainsi gagner du temps.

*Remarque*

*Certains élèves se rendent compte qu'ils « reconnaissent » le modèle. Après les avoir rassurés (« c'est volontaire ! »), il peut alors leur demander en quoi cette figure leur paraît connue. L'objectif de cette discussion pouvant être : « Est-ce vraiment la même figure ? A-t-elle les mêmes propriétés ? Seule l'analyse le dira ! ».*

### Consigne et première phase

« Il s'agit, comme vous le savez maintenant, de restaurer cette figure modèle à partir de l'amorce proposée. Le modèle et l'amorce ne sont pas de la même taille. »

C'est la version avec les trois instruments et les coûts d'utilisation qui est donnée.

Les instruments utilisables sont alors précisés.

- La règle non graduée.

Collectivement sont alors rappelées ses conditions d'usage pour une construction « non au hasard ».

- Une bande de papier.

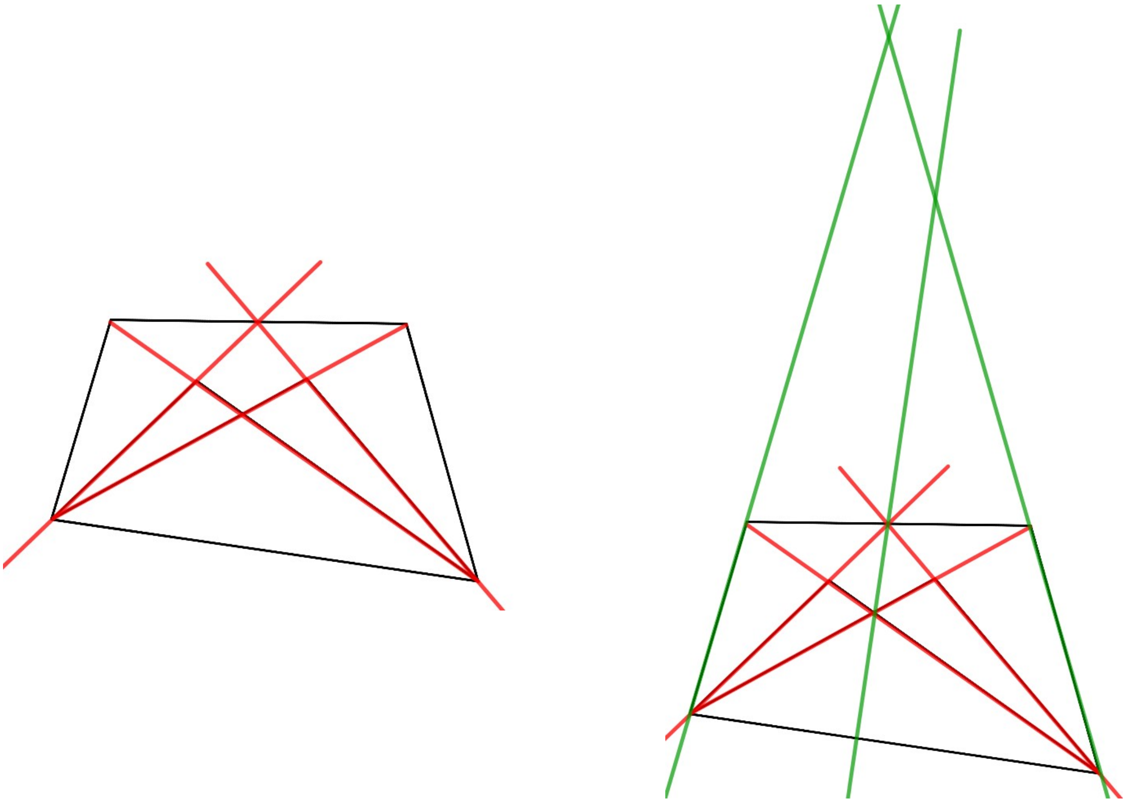
Les élèves rappellent son usage : point de départ, support afin de reporter une longueur.

- La règle graduée.

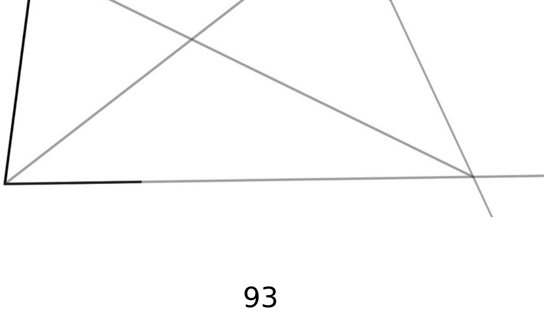
Les élèves connaissent son usage au vu de l'utilisation de la règle non graduée.

Quelques élèves s'interrogent sur la pertinence de ces deux derniers instruments de géométrie à cause de la différence de taille entre le modèle et l'amorce. Le professeur laisse volontairement les interrogations en suspens afin de ne pas orienter les stratégies des élèves.

Les analyses généralement obtenues sont les suivantes.



Ce qui ne permet que le tracé des diagonales sur l'amorce (avec la « fermeture » du quadrilatère).



Quelques élèves tracent tout de même les droites portant les côtés du quadrilatère (en vert sur l'analyse) mais réalisent que cela ne sert à rien contrairement à la restauration 1-2, présente dans les esprits : il n'y a pas d'alignement avec le point qui manque !

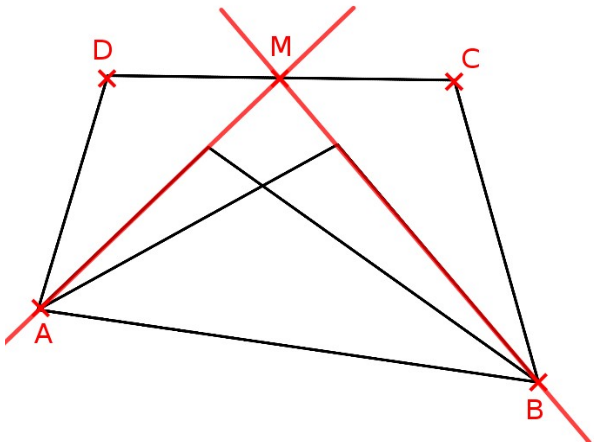
Lors de l'analyse du modèle, les élèves ne trouvent pas facilement la procédure à utiliser qui consiste à déterminer le milieu du segment.

En effet, cela nécessite des tracés sur le modèle et une prise d'informations sur ces tracés.

Les élèves doivent établir une conjecture sur le fait que le point obtenu est le milieu du segment et savoir le vérifier avec les outils proposés.

Un bilan intermédiaire s'impose afin de faire expliciter aux élèves ce qu'il manque précisément pour terminer la restauration et de faire une première synthèse de l'utilisation des instruments.

Le point M est identifié comme crucial.




Mais ce point ne peut s'obtenir, comme les élèves le constatent, grâce à un alignement contrairement à la restauration 1-2 ! C'est une difficulté, ici.

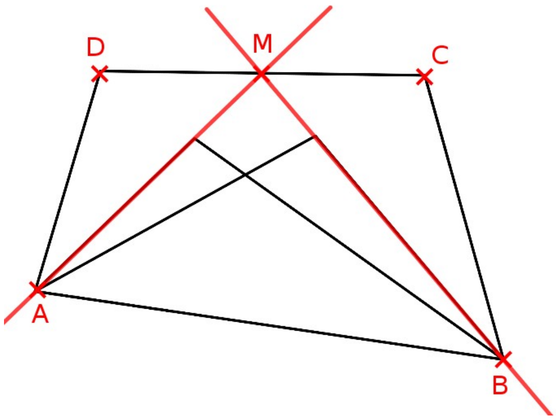
Ce sera le moment pour le professeur de faire rappeler à la classe les instruments de géométrie autorisés afin d'ouvrir les procédures : les élèves vont exploiter la bande de papier et non plus se contenter de prolongements ou tracés de segments.

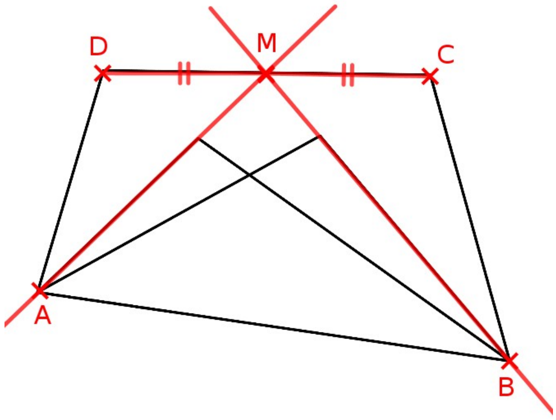
De plus, suite au rappel des règles, les élèves reprennent les incessants allers-retours entre amorce et modèle qui sont indispensables à la restauration de figure. « Ils mènent l'enquête » !

**Deuxième phase**

C'est à ce moment-là, que les élèves investissent la bande de papier. Ils ont conscience de la différence de taille des figures mais essaient de comparer des longueurs.

Quelques élèves déterminent la position du point M comme étant le milieu du segment [DC] : ils ont souvent construit le point M sur le modèle par prolongement des deux segments. Ils ont ensuite pris des mesures à la règle graduée pour observer que M était le milieu du segment.




En termes de coût, cela importe peu (les usages des instruments sont « gratuits » sur le modèle pour l'analyse), mais il faudra trouver une stratégie avec la bande de papier pour que le coût de la restauration ne soit pas impacté par l'usage de la règle graduée.

*Remarques*

- *Les activités préliminaires d'usage de la bande de papier permettent, ici, de savoir comment utiliser cette dernière pour trouver le milieu d'un segment et ce n'est donc pas un frein à la restauration.*
- *Une fois, la figure restaurée, les élèves sont invités à utiliser un codage afin de se rappeler les procédures et les propriétés de la figure modèle qu'ils ont utilisées pour reproduire la figure donnée (M est le milieu du segment [DC]).*

Les élèves, ayant restauré la figure avec un coût inférieur aux autres, vont expliciter leur procédure notamment la construction du point M.

Vous trouverez le détail de cette phase dans la rédaction de la restauration 2-1 (page 84 et suivante).

**Troisième phase**

Une nouvelle phase de recherche pourra être lancée pendant que les élèves les plus rapides prolongeront l'activité par la rédaction d'un programme de construction dans lequel ils·elles réinvestiront le fait de nommer les points de la figure, d'utiliser un vocabulaire précis ainsi que les notations usuelles.

**Bilan final de la situation**

Le bilan de la restauration 2-1 peut être repris.

Il s'agit d'établir une définition du milieu d'un segment : cette activité permet de mettre en relief que le milieu d'un segment est un objet géométrique et non une valeur numérique.

Le milieu d'un segment est le point appartenant au segment qui est situé à égale distance des extrémités de ce segment.

Nous pouvons déterminer sa position à l'aide d'une bande de papier sur laquelle il s'agit de reporter les extrémités du segment puis de la plier en faisant se superposer les deux repères positionnés. La pliure indique la position du milieu de ce segment.

Le professeur pourra aussi institutionnaliser un nouvel usage de la bande de papier dans le cahier de leçon dans la partie dédiée.

**Retour sur la question initiale : « Que voyez-vous ? »**

(A l'oral)

Il s'agit de mettre de nouveau en relief la nécessité de déterminer les points (vision 0D) dits particuliers de la figure modèle qui vont permettre la restauration :

- comme intersections de lignes (alignement, vision 1D) ;
- ayant une propriété particulière (milieu de segment, vision 0D).

Voir les côtés d'un quadrilatère comme des lignes prolongeables et ses sommets comme intersections des côtés est mis en évidence également.

## Restauration 2-2 : synthèse des différentes phases

*Remarque*

*Ces différentes phases ne sont pas figées : le·la professeur·e qui utilise cette situation adapte le scénario en fonction de ce qui se passe dans sa classe. Elles sont à comprendre comme des moments clés qu'il est important de prendre en compte pour que les objectifs de la situation d'enseignement soient atteints. Elles sont issues d'expérimentations.*

### Question initiale

Le professeur montre la figure modèle seule.

« Que voyez-vous ? »

Réponse écrite sur les cahiers (1-2 minutes) puis bilan collectif rapide (2-3 minutes).

### Première phase

Présentation du modèle, de l'amorce et des instruments à utiliser.

Analyse individuelle de la figure modèle et premières procédures.

Mise en commun dès que des blocages se présentent et/ou des procédures erronées méritent d'être traitées collectivement.

### Deuxième phase

Relance de la recherche en utilisant les trois instruments de géométrie autorisés

Mise en commun partielle dès qu'un petit groupe d'élèves a abouti la restauration : ces derniers communiquent leur procédure de détermination du point crucial, milieu d'un côté du quadrilatère.

### Troisième phase

Relance de la recherche du milieu et finalisation de la restauration pour l'ensemble de la classe.

Différenciation pour les élèves ayant terminé : mise en place des codages sur leur figure, rédaction du programme de construction en réinvestissant les règles déjà établies (nécessité de nommer les points, etc.).

### Bilan final de la situation

Retour sur le « Que voyez-vous ? »

Institutionnalisation de la notion de milieu d'un segment et de l'usage de la bande de papier pour vérifier ou construire un milieu.

# Proposition d'exercices
# sur les thèmes « segments/points, milieu »

## À programmer après les restaurations des parties 1 et 2, à distance.

Ces exercices ne sont que des exemples, mais ils nous paraissent significatifs.

Il ne s'agit pas de tous les faire, ni d'en faire de manière trop groupée mais d'en donner régulièrement, en fonction du temps, à distance après les restaurations 2-1 et 2-2.

L'ordre proposé ne constitue pas une progression.

**Exercice 1**

(S'il n'a pas déjà été donné en activité préparatoire à l'usage de la bande de papier.)

<u>Objectifs</u>

- Utiliser de la bande de papier pour reporter une longueur.

- Trouver le milieu d'un segment.

<u>Consigne</u>

Représenter un segment [AB].

Sur la même figure, en utilisant la règle non graduée et une bande de papier :

- Tracer un segment de même longueur.
- Tracer un segment de longueur double.
- Tracer un segment de longueur moitié.

**Exercice 2**

Objectif

Mettre en évidence qu'un segment est composé d'une infinité de points.

Consigne

Représenter un segment [AB].

Sur la même figure, représenter :

- un segment sans point en commun* avec [AB] ;
- un segment ayant une extrémité commune avec [AB] ;
- un segment ayant un point en commun* avec [AB] autre qu'une extrémité ;
- un segment ayant plus d'un point en commun* avec [AB].

*Point en commun : point qui appartient aux deux segments.

**Exercice 3**

Objectif

Nommer des points : deux points distincts d'une figure ne peuvent pas porter le même nom.

Consigne

Construire un segment [AB] et un segment [AC] tels que AB = AC.

**Exercice 4**

Objectif

Travailler la configuration « segments de même milieux ».

Consigne

1) Construire plusieurs segments ayant le même milieu.

2) Construire plusieurs segments ayant le même milieu et ayant un autre point en commun.

**Exercice 5**

Objectif

Utiliser les relations de longueur entre les segments lorsqu'un point est le milieu.

Consigne

Pas de règle graduée.

M est le milieu d'un segment [AB].

C est le point tel que B soit le milieu du segment [CM].

Placer le point C.

L'ordinateur indique que la longueur AB mesure 3,24 cm.

Quelles sont les longueurs AM, MB, CM, AC ?

**Exercice 6**

Objectif

Utiliser les relations de longueur entre les segments lorsqu'un point est le milieu.

Consigne

1) Tracer deux segments [AB] et [CD] sachant que :

- AB = 6 cm et CD = 9 cm ;
- les deux segments ont le même milieu.

2) Placer un point O puis construire trois segments ayant le même milieu O.

3) Tracer deux segments [RS] et [TU] sachant que :

- RS = 10 cm et TU = 7,6 cm ;
- les deux segments ont le même milieu ;
- les points R, S, T et U sont alignés.

Calculer RU (la mesure de la longueur du segment [RU] en cm).

## Exercice 7

Objectifs

- Utiliser les notions de milieu et longueurs.
- Mettre en évidence qu'un segment est composé d'une infinité de points en lien avec les nombres décimaux.

Consigne

1) Construire un segment [RS] de longueur 5 cm (RS = 5 cm).

2) Placer un point A appartenant au segment [RS] tel que RA = 3,5 cm.

Placer un point B appartenant au segment [RS] tel que RB = 3,6 cm.

Est-il possible de placer un point C appartenant au segment [AB] ?

Quelle peut être la longueur du segment [RC] ?

3) Jean a placé D appartenant au segment [RS] tel que RD = 3,53 cm.

Saana a placé E tel que E $\in$ [RS] et RE = 3,54 cm.

Les points D et E appartiennent-ils à [AB] ?

Est-il possible de placer un point K appartenant au segment [DE] ?

Quelle peut être la longueur du segment [RK] ?

# FIGURES TÉLÉPHONÉES

## À intercaler entre les différentes parties de la progression, au fil de l'année.

L'objectif principal des « figures téléphonées » est de travailler la compétence « communiquer » en utilisant le vocabulaire géométrique à bon escient et en utilisant correctement les notations.

Elles permettent aussi de travailler les propriétés des figures, leurs constructions.

Les « figures téléphonées » se font sans faire intervenir la mesure pour « se concentrer » sur les objets géométriques :

- règle graduée interdite ;
- instruments autorisés possibles : règle non graduée, bande de papier, gabarit d'angle droit, compas ;
- bien préciser dans la consigne que la taille et l'orientation des figures à reproduire n'interviennent pas.

Nous vous proposons quelques exemples mais d'autres choix sont possibles !

On prendra deux figures assez simples à décrire et de difficultés semblables.

**FT 1**

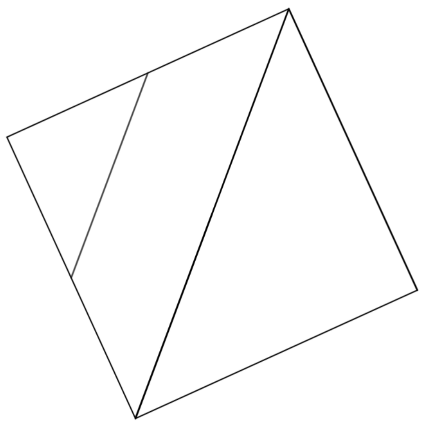
<u>Objets géométriques mobilisés</u>

Milieu d'un segment, carré.

## Figure A

Observe bien la figure reçue.

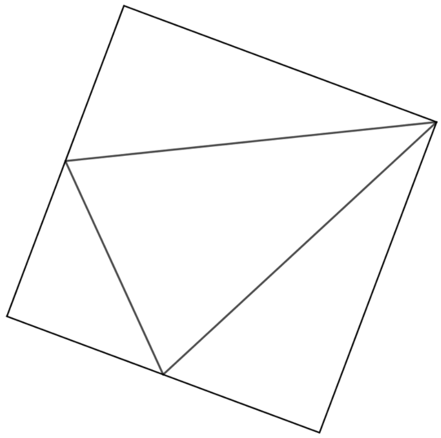
Rédige ensuite un message qui doit permettre à ton correspondant de construire la figure sans même la voir.



## Figure B

Observe bien la figure reçue.

Rédige ensuite un message qui doit permettre à ton correspondant de construire la figure sans même la voir.



**FT 2**

Objets géométriques mobilisés

Rectangle, milieu d'un segment.

**Figure A**

Observe bien la figure reçue.

Rédige ensuite un message qui doit permettre à ton correspondant de construire la figure sans même la voir.

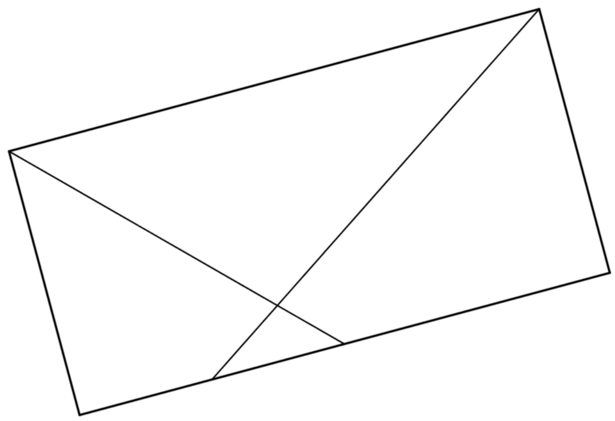
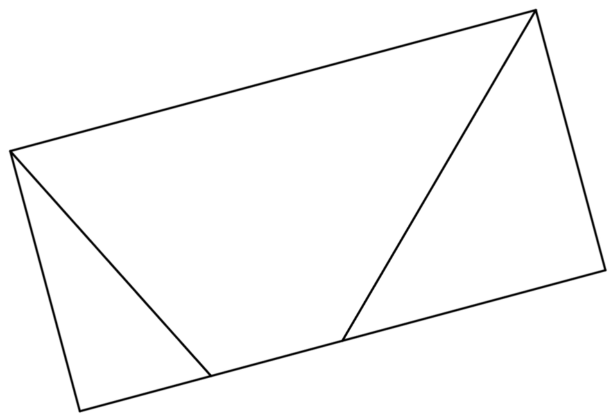


**Figure B**

Observe bien la figure reçue.

Rédige ensuite un message qui doit permettre à ton correspondant de construire la figure sans même la voir.



**FT 3**

Objets géométriques mobilisés

Droite, demi-droite, segment, point d'intersection.

**Figure A**

Observe bien la figure reçue.

Rédige ensuite un message qui doit permettre à ton correspondant de construire la figure sans même la voir.

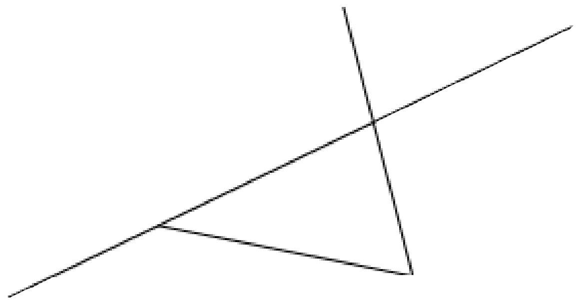
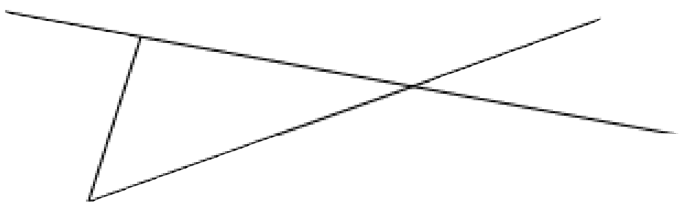


**Figure B**

Observe bien la figure reçue.

Rédige ensuite un message qui doit permettre à ton correspondant de construire la figure sans même la voir.



**FT 4**

Objets géométriques mobilisés

Carré, milieu d'un segment, cercle.

**Figure A**

Observe bien la figure reçue.

Rédige ensuite un message qui doit permettre à ton correspondant de construire la figure sans même la voir.

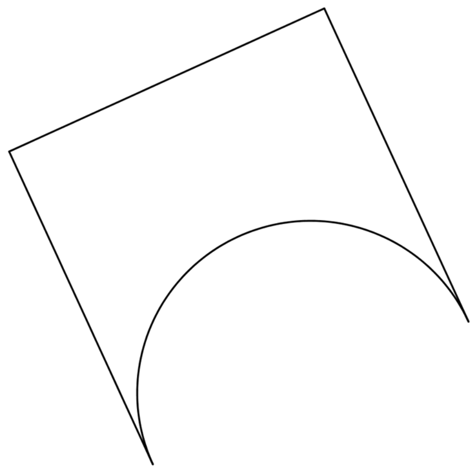
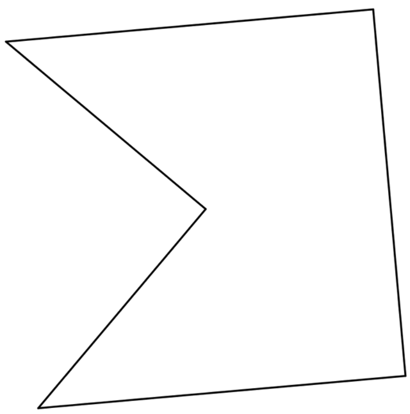


**Figure B**

Observe bien la figure reçue.

Rédige ensuite un message qui doit permettre à ton correspondant de construire la figure sans même la voir.



**FT 5**

<u>Objets géométriques mobilisés</u>

Carré, cercle, arc de cercle.

**Figure A**

Observe bien la figure reçue.

Rédige ensuite un message qui doit permettre à ton correspondant de construire la figure sans même la voir.

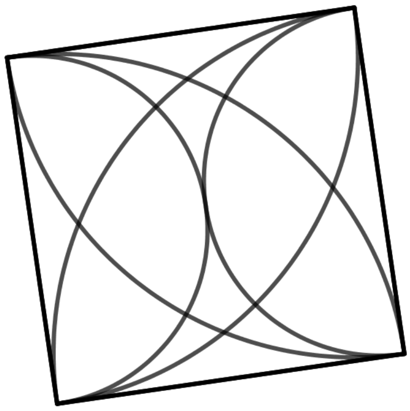
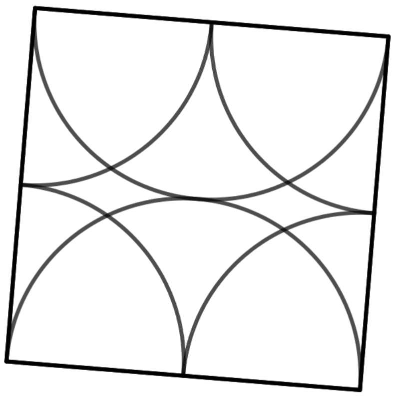


**Figure B**

Observe bien la figure reçue.

Rédige ensuite un message qui doit permettre à ton correspondant de construire la figure sans même la voir.



# Partie 3

## Exercices sur la symétrie axiale à faire à distance, avant la partie 9

## 3 - Exercices sur la symétrie axiale à faire « à distance » avant la partie 9

Nous proposons dans cette partie un certain nombre d'exercices, dont des restaurations de figure, qui peuvent être faits régulièrement pour travailler le sens de la symétrie axiale dans son aspect global avant d'aborder, en fin de progression, l'aspect ponctuel avec la construction et la définition du symétrique d'un point (partie 9).

Il ne s'agit pas de tous les faire ou de les faire sur une même période, mais d'en faire de temps en temps, tout au long de l'année. Certains peuvent être donnés en devoir à la maison.

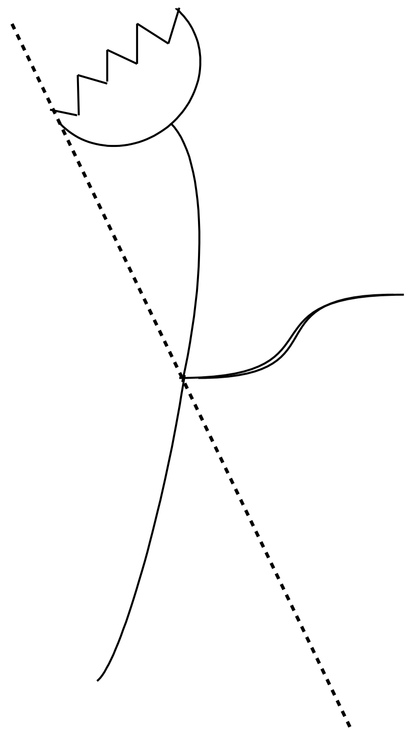
On s'appuie sur les connaissances antérieures des élèves.

On travaille les propriétés de la symétrie : **conservation des alignements** – en particulier, le symétrique d'une droite est une droite et le point d'intersection d'une droite avec l'axe est un point invariant qui appartient donc à la droite symétrique –, **conservation des longueurs**, **des angles** (sans la mesure).

**Construire des figures symétriques à main levée, par pliage, avec calque…**

Les manuels contiennent suffisamment d'exemples de figures symétriques à construire ou à compléter. Nous ne donnons ici que quelques exemples qui nous paraissent significatifs.

➔ La fleur



**Étape 1**

Tracer à main levée la figure symétrique de la fleur.

Interdiction de gommer. Aucun instrument autorisé à part le crayon.

La figure obtenue sera approximative mais c'est volontaire, on ne cherche pas à tracer une figure exacte.

**Étape 2**

Plier la feuille selon l'axe de symétrie et repasser au crayon la figure modèle afin d'obtenir, en grattant le verso, une empreinte de la figure symétrique. Repasser cette empreinte en vert.

**Étape 3**

Comparer le dessin à main levée et la figure symétrique en vert. Si elles ne sont pas identiques, ou presque, décrire par des phrases, les erreurs commises.

**Étape 4**

Mise en commun des erreurs constatées parmi les élèves de la classe et analyse commune de ces erreurs.

Exemples d'échanges avec la classe

« La fleur est mal placée : elle doit toucher l'axe ».

« Les deux fleurs se touchent sur l'axe. »

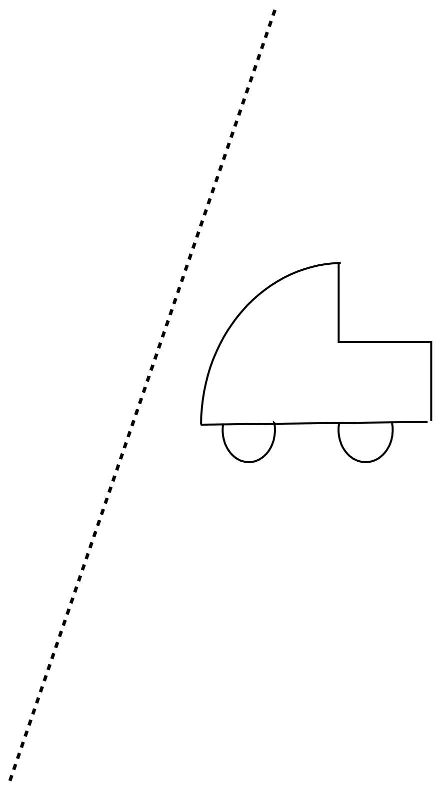
« La tige est mal dessinée : elle doit croiser l'axe. »

« Les deux tiges se croisent sur l'axe. »

« La figure symétrique est trop petite ou trop grande. »

…

Même travail avec la « petite voiture »



Exemples d'échanges avec la classe

« La petite voiture est dans le mauvais sens : elle doit être à l'envers ».

« La petite voiture est mal positionnée dans la feuille : elle doit être à la même distance, de l'autre côté de l'axe. »

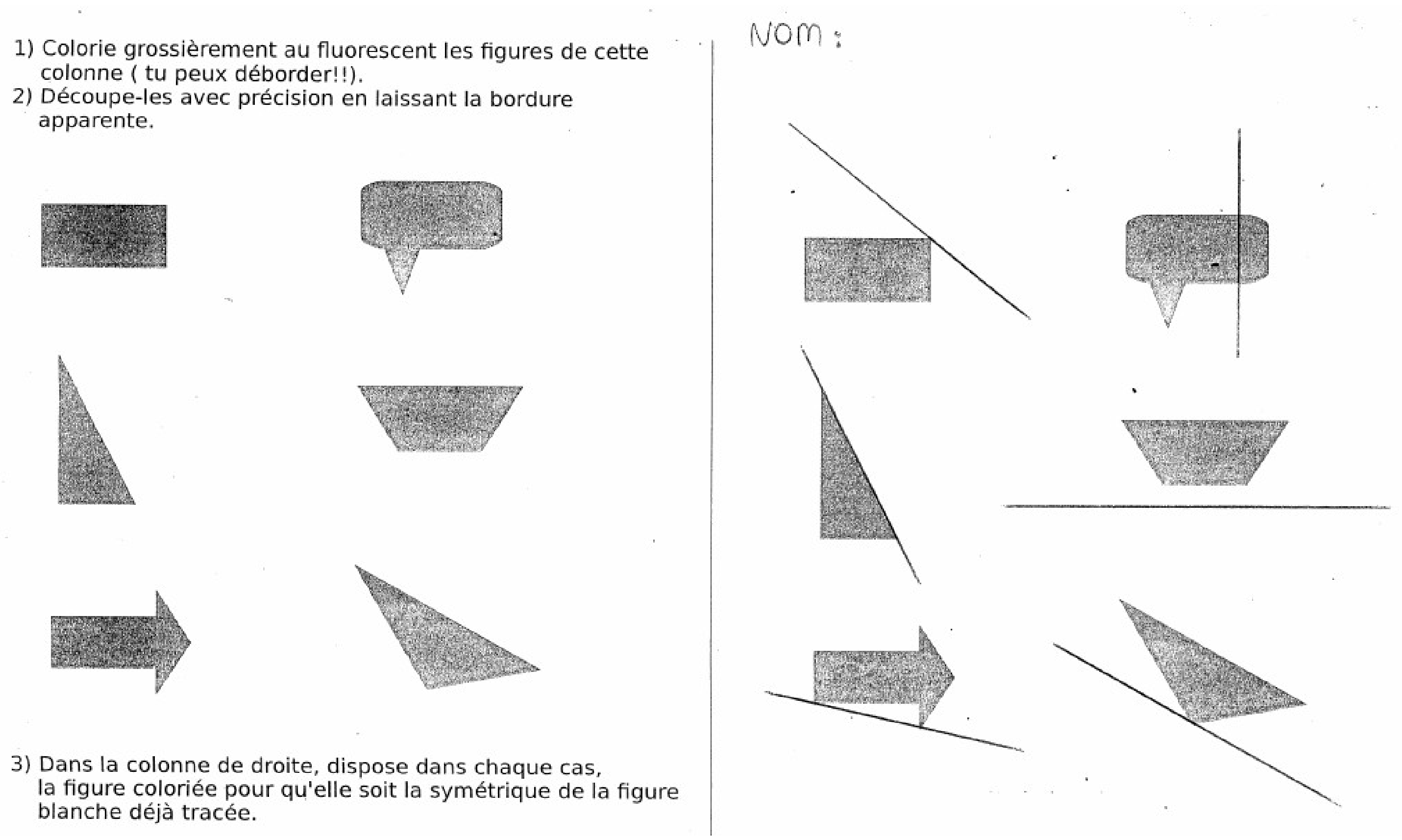
« Quand on joint les deux figures modèle et symétrique, le segment obtenu doit être perpendiculaire à l'axe. »

…

Les remarques faites dans cette mise en commun peuvent être notées en bilan comme des propriétés de figures symétriques.

*(Exercice librement inspiré de : Collection Enseigner au collège, "Apprentissages mathématiques en sixième", rédigé par André Pressiat, INRP ERMEL sous la direction de Jacques Colomb, Editions Hatier.)*

- ➔ L'exercice ci-dessous provient d'un manuel dont nous ne trouvons plus la référence.




Il nous paraît particulièrement intéressant pour travailler l'idée de retournement de la figure symétrique et la position de la figure par rapport à l'axe. L'avantage est que les élèves sont déchargés de la tâche du tracé.

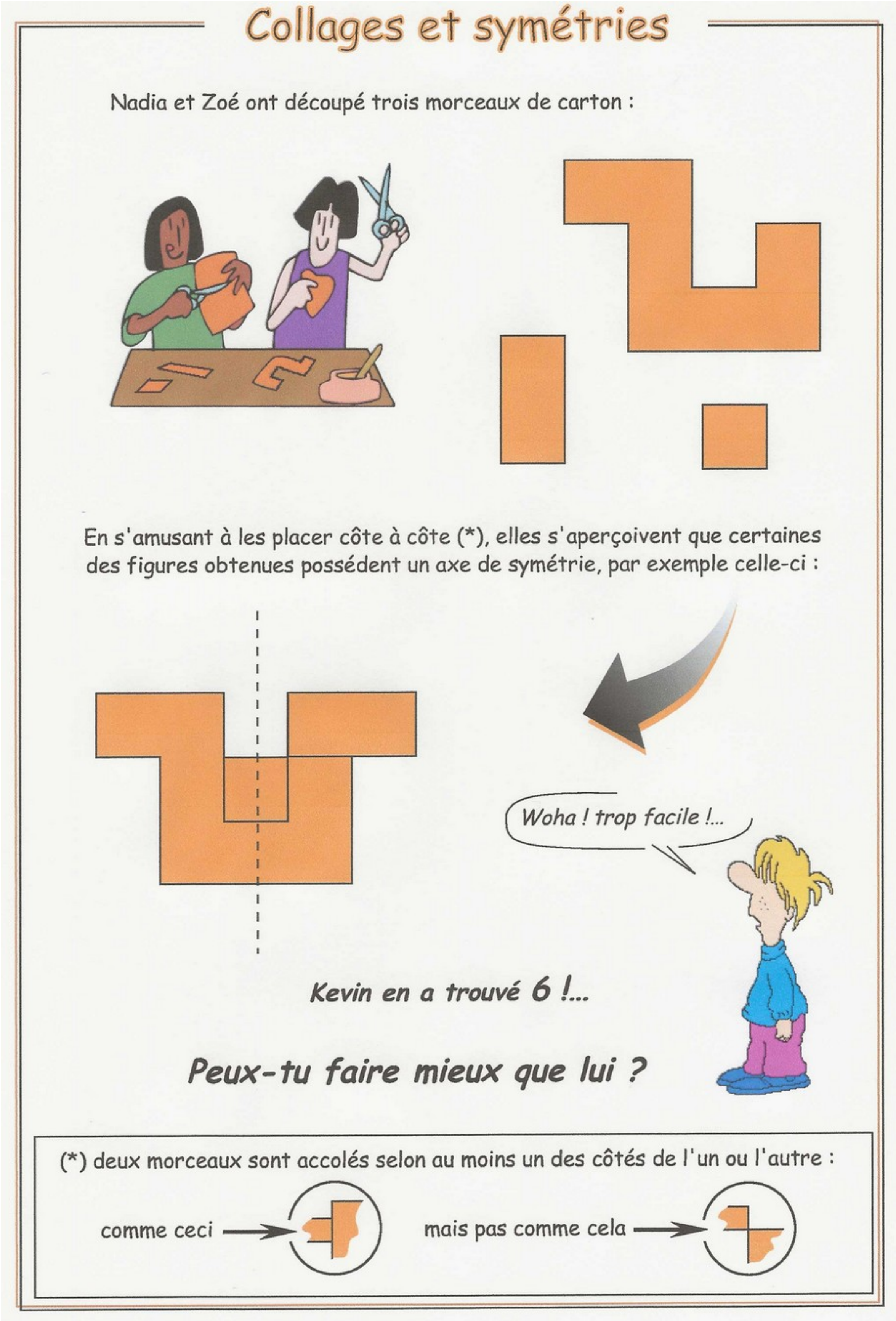
La validation peut se faire par pliage : l'idée de retournement est mise en avant.

Cette idée est confirmée avec du papier calque : nécessité de le retourner pour superposer la figure et la figure image, de le positionner correctement grâce à l'axe et des points invariants.

Cet exercice permet aussi de souligner le problème des directions privilégiées : par exemple dans le cas 1, le rectangle est « horizontal » donc son symétrique est « horizontal », erreur que l'on rencontre souvent.

Il peut être refait en 5e, à l'identique d'abord, puis en passant à la symétrie centrale, pour comparaison, afin d'insister sur les effets différents des deux symétries : retournement n'est pas demi-tour !

➔ D'après l'Irem de Paris-Nord
(http://www-irem.univ-paris13.fr/site_spip/spip.php?article147)



# Collages et symétries

Nadia et Zoé ont découpé trois morceaux de carton :

En s'amusant à les placer côte à côte (*), elles s'aperçoivent que certaines des figures obtenues possèdent un axe de symétrie, par exemple celle-ci :

Woha ! trop facile !...

*Kevin en a trouvé 6 !...*

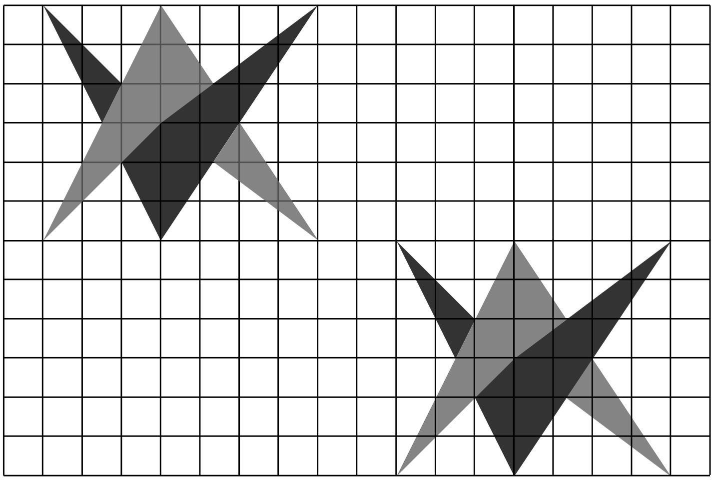
***Peux-tu faire mieux que lui ?***

(*) deux morceaux sont accolés selon au moins un des côtés de l'un ou l'autre :

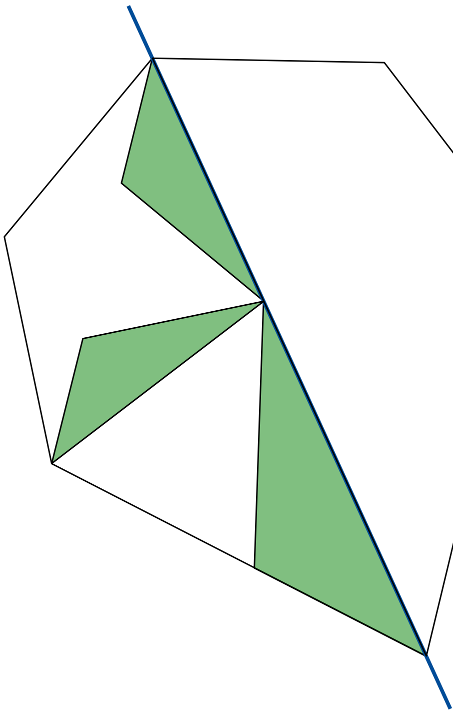
comme ceci → mais pas comme cela →

**Compléter des figures symétriques**

➔ Complète la figure ci-dessous pour que l'ensemble ait un axe de symétrie.
(D'après Sésamath, https://manuel.sesamath.net/)

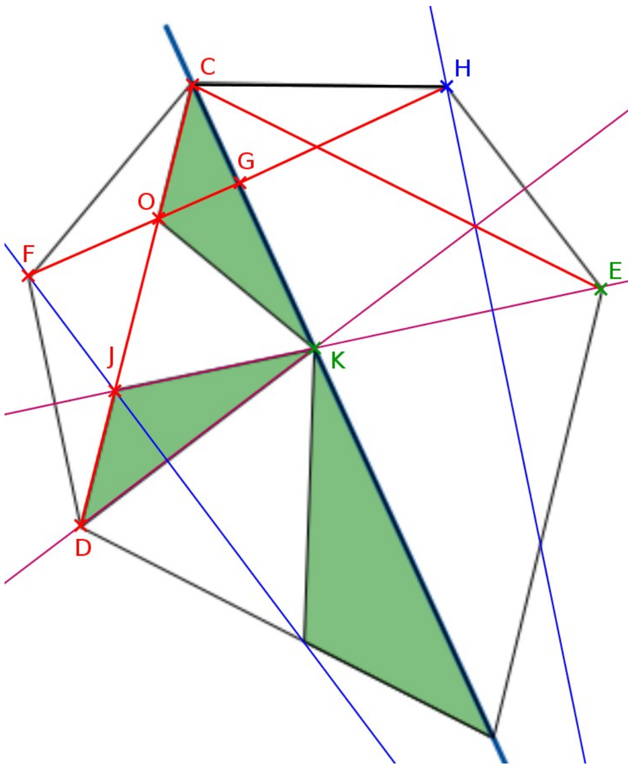


➔ Complète la figure pour qu'elle ait un axe de symétrie (**restauration 3-1**).
(D'après Sésamath, https://manuel.sesamath.net/)

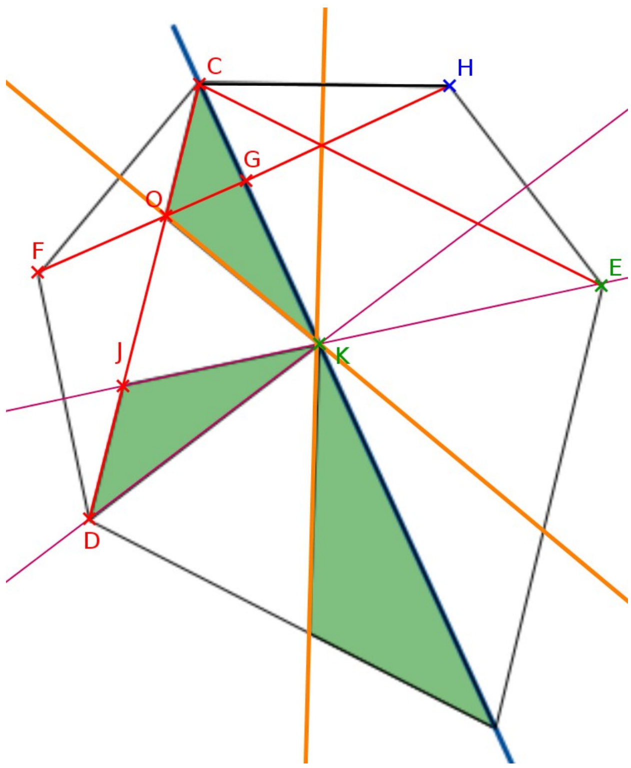


L'axe de symétrie peut ne pas être donné.

Cet exercice peut être résolu en utilisant seulement la règle non graduée grâce à des alignements.



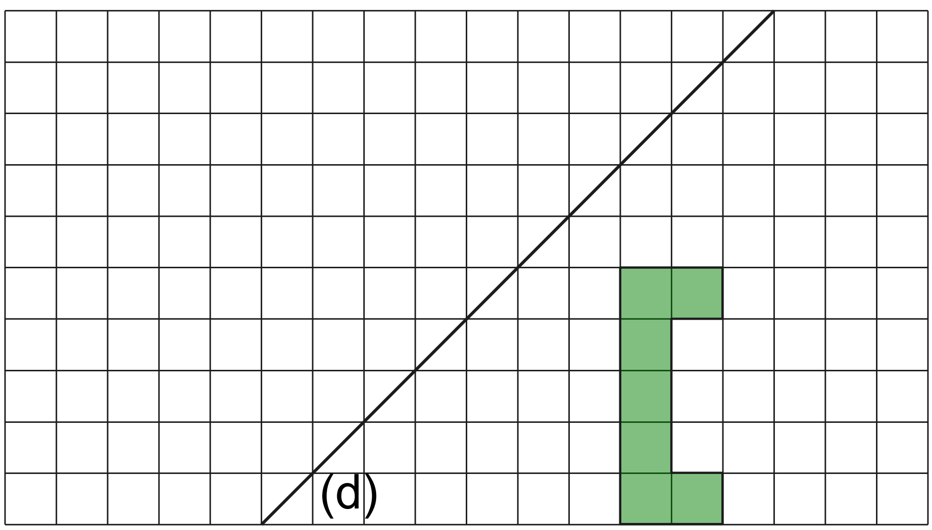

ou




Il peut l'être aussi en utilisant uniquement le compas grâce à la conservation des longueurs (mise en application de la construction de triangles connaissant les longueurs des côtés – en tant que grandeurs sans la mesure toujours).

On peut également autoriser l'usage de la règle graduée et d'une bande de papier afin de favoriser des procédures mixtes, utilisant les deux propriétés.

➔ Construis le symétrique de la figure par rapport à la droite (d).
(D'après Sésamath, [https://manuel.sesamath.net/](https://manuel.sesamath.net/))

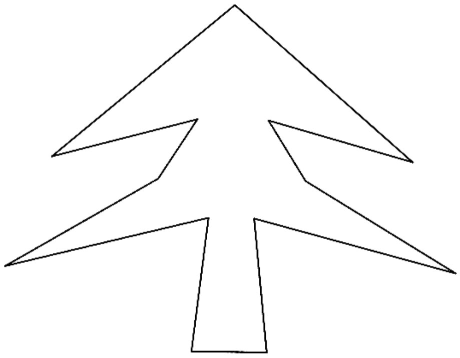



De manière plus générale, des exercices de constructions sur trame.

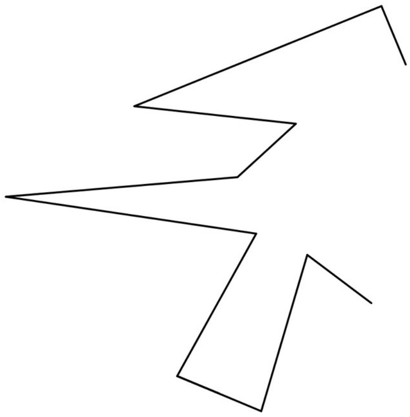
- Des restaurations de figure à partir d'un sapin symétrique (compléter la figure pour reconstituer le sapin complet).

**Restauration 3-2**

Modèle

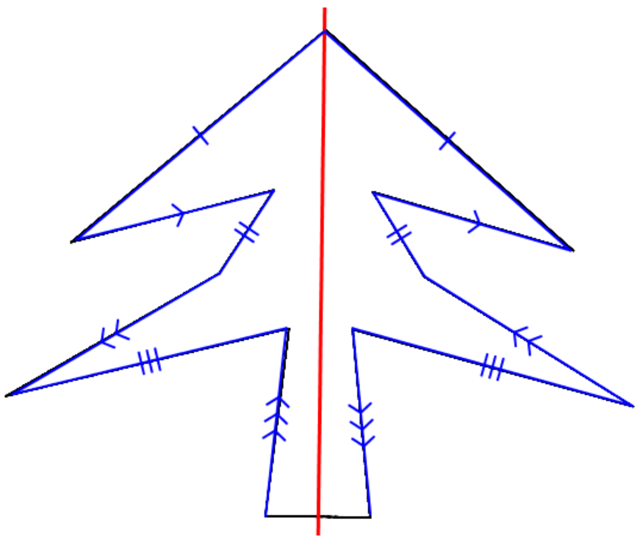


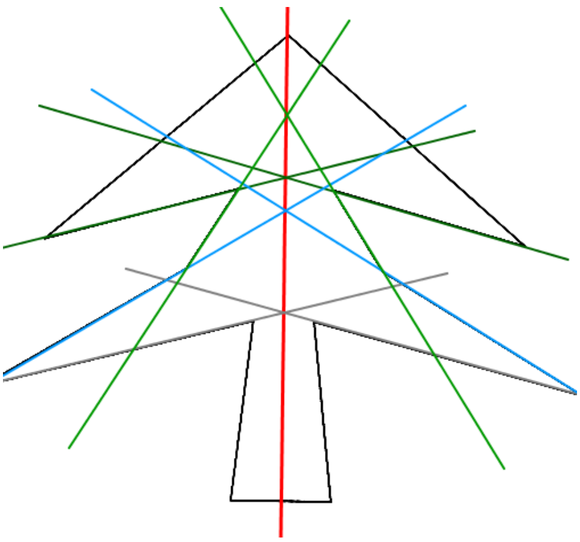
Amorce



Le modèle et l'amorce n'ont pas la même taille.

Analyse





Les instruments autorisés sont la règle non graduée et un instrument de report de longueurs (bande de papier ou compas si la partie « Cercle » a été traitée et les règles d'usage du compas établies).

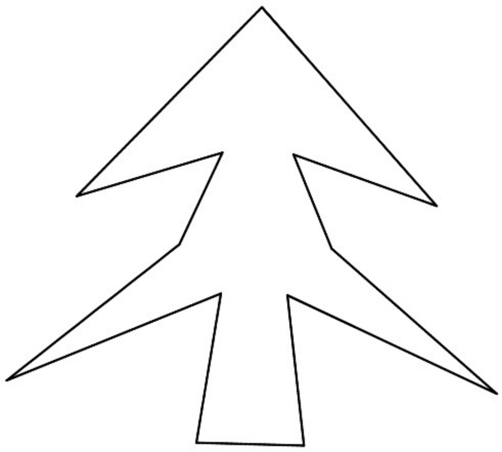
La conservation des longueurs des segments symétriques est utilisée. Les reports de longueurs sur un support déjà tracé obligent aussi à utiliser des paires de droites symétriques et leurs points d'intersection sur l'axe.

Majoritairement, les élèves utilisent quatre reports de longueurs.

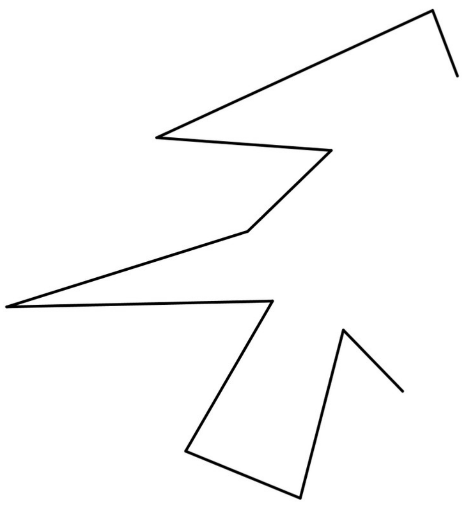
Cependant, un des points symétriques peut s'obtenir, après avoir effectué trois premiers reports, par intersection de droites. Cela peut être un moyen de différencier soit comme simple relance pour les plus rapides, soit en établissant un coût sur l'usage des instruments.

**Restauration 3-3**

Modèle

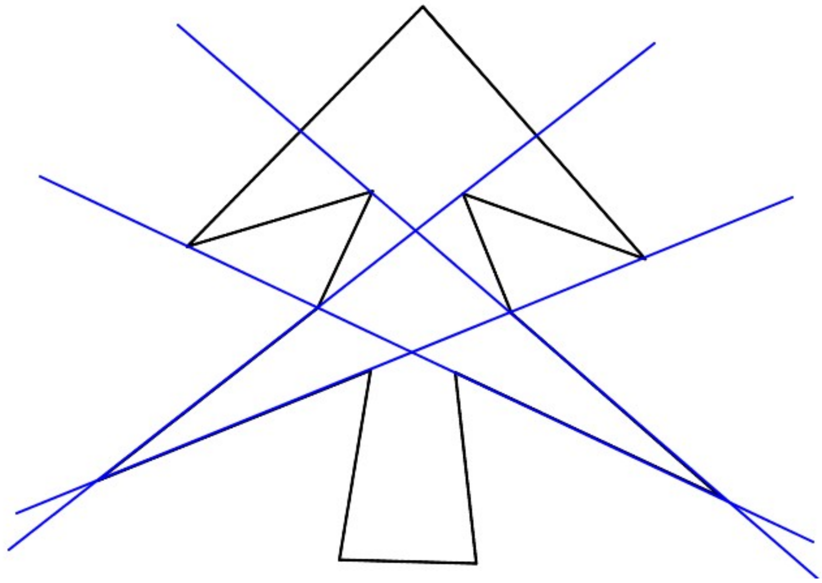


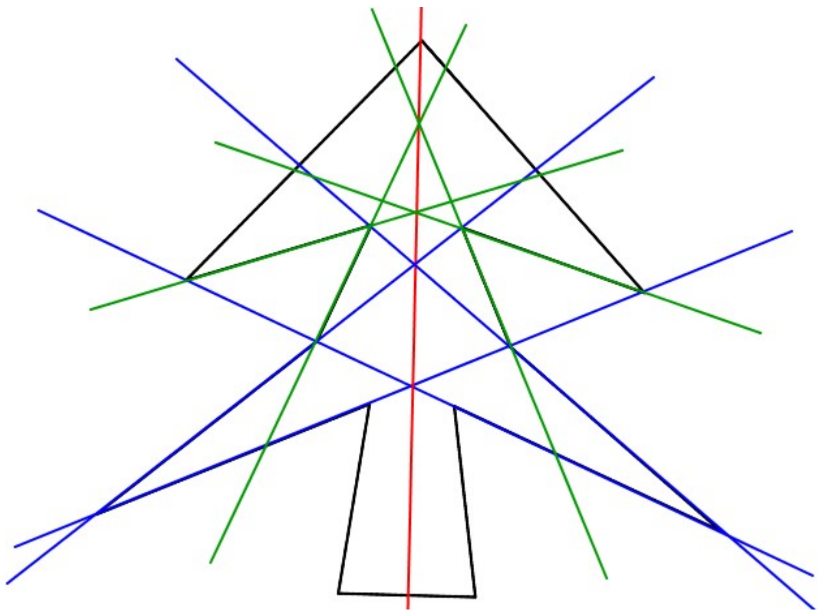
Amorce



Le modèle et l'amorce n'ont pas la même taille.

Analyse





Cette restauration peut se résoudre en utilisant seulement la règle non graduée.

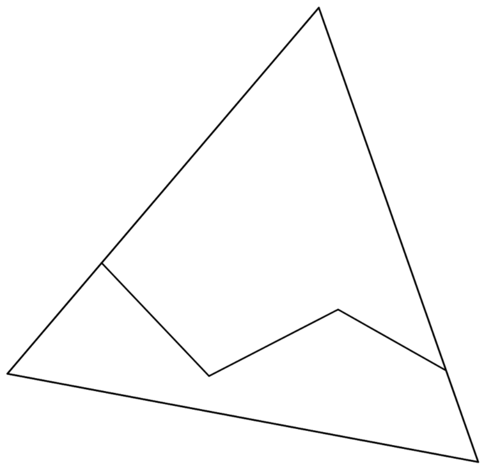
La résolution utilise des alignements de points sur les « deux parties symétriques » de la figure et la propriété d'invariance des points d'intersection des droites symétriques qui appartiennent nécessairement à l'axe (ce qui permettra aussi de le tracer).

Cette restauration n'est pas facile.

Aussi pour permettre au plus grand nombre d'aboutir à une construction, il peut être opportun d'autoriser un instrument de report de longueurs : une bande de papier ou le compas si la partie « Cercle » a été traitée et les règles d'usage du compas établies.

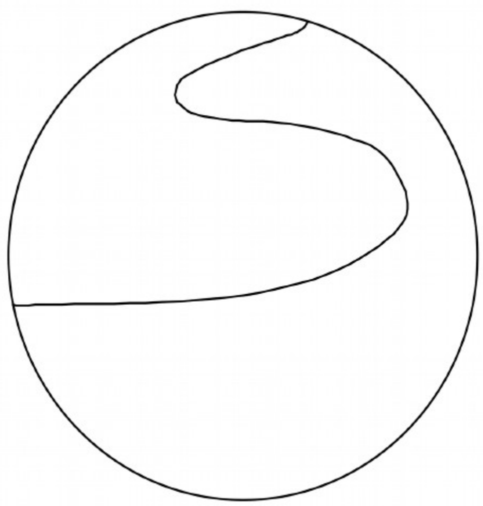
Un coût sur les instruments – par exemple, règle non graduée, 1 €, reporteur de longueurs, 10 € – permettra également de relancer l'étude pour les plus rapides et favorisera les procédures à la règle non graduée seule.

➔ Complète la figure pour qu'elle soit symétrique et représente l'axe de la symétrie. (Pour travailler aussi les axes de symétries des figures usuelles.)



Le choix de l'axe est difficile pour les élèves !

Il est possible de les faire travailler en autorisant un pliage et/ou le papier calque.



Il y a ici une infinité d'axes de symétrie possibles !

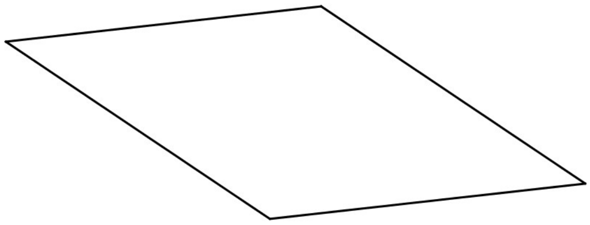
Cette dernière figure est complétée à main levée. On peut accepter le tracé approximatif de l'axe de symétrie choisi (en faisant verbaliser sa propriété particulière ici).

On peut également autoriser l'usage du papier calque et son pliage ou simplement le pliage de la feuille « consigne » pour obtenir un diamètre et le centre de manière un peu plus précise – le reste de la construction devant se faire à main levée sans instrument.

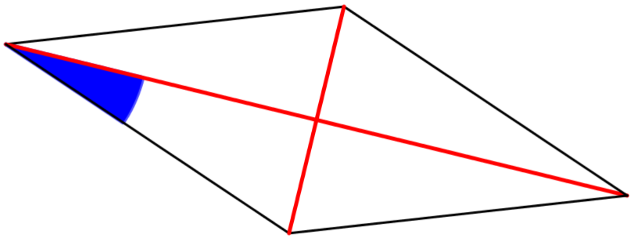
Ce type d'exercices peut être proposé avec toute figure « enveloppe » ayant au moins un axe de symétrie.

➔ Restaurer un losange en donnant un gabarit d'angle moitié d'un de ses angles (**restauration 3-4**).

Un losange est donné.



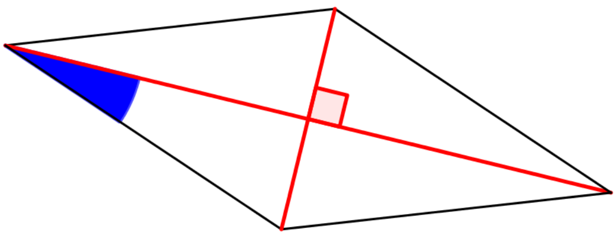
L'amorce est l'agrandissement d'un côté du losange.

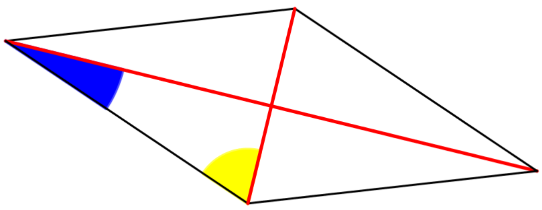


Les diagonales comme axes de symétrie du losange sont ainsi travaillées.

Le compas est également autorisé, ainsi que la règle non graduée.

On peut également y ajouter un gabarit d'angle droit ou un gabarit d'angle moitié du deuxième angle du losange.





Un coût plus élevé d'usage du compas favorisera l'usage des gabarits et donc, la propriété des diagonales du losange comme axes de symétrie.

…

# Partie 4
# Cercle
# Construction de triangles

## 4 – Cercle

Nous utilisons dans cette partie les travaux de Caroline Bulf et Valentina Celi (Inspé de l'Académie de Bordeaux, Lab-ED3, Université de Bordeaux), exposés notamment dans deux articles présents dans la bibliographie/sitographie de la partie « Introduction » :

- dans la revue *Au fil des maths* de l'APMEP, « Changement de regard sur le cercle » (n° 530, octobre-novembre-décembre 2018, p 41 à 49) ;

   https://afdm.apmep.fr/rubriques/ouvertures/changement-de-regard-sur-le-cercle/

- dans la revue *Grand N*, « Essai d'une progression sur le cercle pour l'école primaire – une articulation clé : gabarit-compas. » (n° 97, 2016, p 21 à 58).

   https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/medias/fichier/97n2_1552556028428-pdf

Les situations de restauration proposées sont issues de ces travaux.

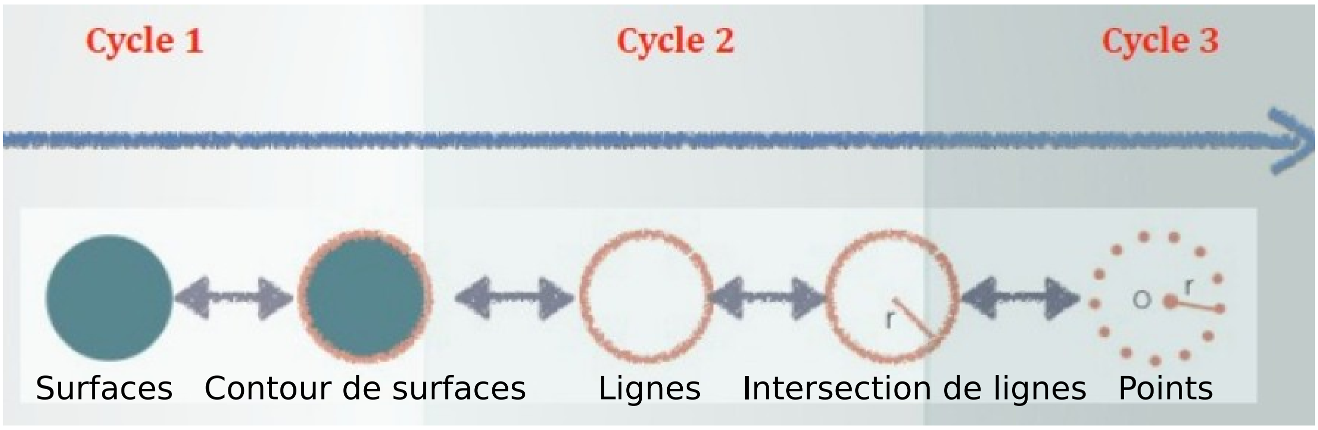
Contrairement aux « apparences », le cercle est un objet géométrique complexe !

Au commencement, une forme, le « rond », puis, dans le langage mathématique, contrairement à d'autres objets géométriques (triangle, carré…), deux termes, « disque » pour désigner une surface et « cercle » pour désigner le contour de cette surface ; les points qui sont à l'intérieur de cette surface, y compris le centre, n'appartiennent pas au cercle ; des éléments caractéristiques, rayon et diamètre, qui, selon le contexte, désignent un segment – objet géométrique – ou une longueur – grandeur ; des façons de le définir qui renvoient à des conceptions différentes – contour, ligne de courbure constante ou à égale distance d'un point, ensemble de points ; un instrument, le compas, à plusieurs usages, etc.

Toutes ces spécificités demandent donc des situations d'enseignement qui les prennent en charge.

**Les objectifs de cette partie sont :**

- La poursuite du travail sur le nécessaire changement de regard sur les figures géométriques – ici le passage du disque (vision surface 2D) au cercle (ligne 1D et ensemble de points 0D) comme l'illustre le schéma ci-dessous.



- Évidemment en lien avec le changement de regard, la prise en compte des différentes conceptions du cercle :
    - contour de surface,
    - ligne de courbure constante,
    - ligne à égale distance d'un point donné,
    - ensemble de points à égale distance d'un point donné.

Conceptualiser le cercle comme « ensemble de tous les points situés à une même distance du centre » est un passage très délicat.

Cette difficulté est évoquée par C. Bulf et V. Celi (2016) :

« *La conception du cercle comme lieu géométrique de tous les points situés à une distance r (le rayon) d'un point donné O (le centre) empêche de faire le lien avec la trace graphique du rayon vu comme bord de surface ou encore celle du centre vu comme intersection de lignes (également bords de surface).*

*Dans cette conception, il ne s'agit pas d'opérer une déconstruction dimensionnelle mais bien une reconstruction dimensionnelle, du point vers la ligne : la vision qu'on a de la figure se situe en effet d'abord au niveau du point (0D) pour ensuite « remonter » vers la vision du cercle comme un ensemble de points représenté par une ligne continue (1D).*

*À notre avis, ce passage est non trivial et la matérialité du rayon et du centre demeure essentielle pour penser cette transition.* »

Comprendre que sur un cercle, il y a des points et peut-être, qu'il y a en a une infinité, sont déjà des objectifs raisonnables en 6ᵉ.

Nous n'introduisons donc pas le cercle comme lieu géométrique et favorisons plutôt la distinction entre les deux propriétés caractéristiques du cercle :

- ◆ tous les points qui appartiennent au cercle sont à la même distance du centre ;

- ◆ tout point situé à cette distance du centre appartient au cercle.

Pour plus de précisions sur ces différentes conceptions, nous renvoyons aussi vers les travaux de M. Artigue et J. Robinet : « Conceptions du cercle chez les enfants de l'école élémentaire ». In : *Recherche en didactique des mathématiques n°3.1* (1982), p 5-64 (*https://revue-rdm.com/1982/conceptions-du-cercle-chez-les/*).

Il est à noter que ces différentes conceptions sont travaillées en lien avec les instruments utilisés qui peuvent être : gabarit ; pochoir ; ficelle, punaise et crayon ; compas.

Pour compléter cette introduction, nous avons aussi comme objectifs, dans cette partie :

- Les éléments caractéristiques du cercle :
  - son centre,
  - le rayon et le diamètre, comme segments ou comme longueurs.

- Les différents usages du compas et ainsi, continuer de compléter la fiche-outils :
  - pour comparer ou reporter des longueurs,
  - pour tracer des cercles.

# Restauration 4-1

## Objectifs

- Favoriser le passage d'une vision surface puis contour de surface – par la présence d'un gabarit de demi-disque indispensable pour l'analyse, la médiatrice n'étant pas encore disponible – à une vision ligne – par la présence du compas à un coût bien moindre pour la construction.

- Favoriser le passage d'une conception du cercle comme ligne à courbure constante et invariante par rotation, que permet l'usage du gabarit, à une conception du cercle défini par le centre et un rayon, par le centre et un point, par un diamètre.

- Matérialiser le centre d'un cercle, le rayon, à la fois comme segment et comme longueur – en particulier, faire le lien entre « écartement » du compas et rayon. De même pour le diamètre.

- Favoriser la conceptualisation des éléments caractéristiques d'un cercle, de leurs relations et amorcer le passage au cercle comme ensemble de points.

En particulier :

- le centre d'un cercle comme intersection de deux diamètres ou comme milieu d'un diamètre ;
- un rayon comme segment joignant le centre du cercle avec l'un de ses points ;
- le diamètre comme segment joignant deux points du cercle et passant par son centre ;
- deux points appartenant au cercle comme intersections de chaque diamètre avec le cercle et, avec la possibilité de tracer « beaucoup » de diamètres, « beaucoup » de points appartiennent au cercle ;
- caractérisation de ces points appartenant au cercle par leur équidistance du centre.

- Expliciter les différents usages du compas : instrument de report de longueur et traceur de cercle.

## Consigne

Restaurer un cercle donné :

il s'agit de reproduire le « même cercle » que le cercle modèle qui est représenté.

Le centre du cercle modèle n'est pas donné.

Nous vous présentons deux versions de cette situation : la version originale (Bulf et Celi, 2016 ; Bulf et Celi, 2018) et une version modifiée se distinguant matériellement de la première par les outils autorisés et par la présence d'un coût sur les instruments.

## Version 1 : la version originale

### Restauration d'un cercle
### à l'aide d'un gabarit de demi-disque et d'un compas

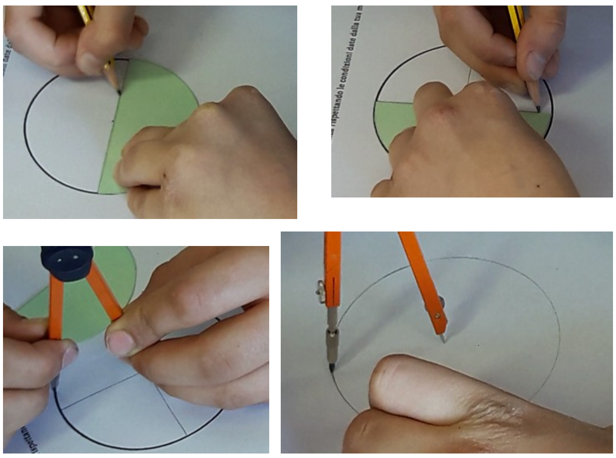
Dans sa version originale (cf Bulf et Celi, 2016, Bulf et Celi, 2018), le problème consiste à trouver un moyen de reproduire un cercle donné – la figure-modèle – en se servant uniquement du compas pour le tracer.

Un gabarit de demi-disque de même rayon est fourni et ne doit servir, lors de l'analyse de la figure, que pour prendre ou ajouter des informations sur la figure-modèle, il pourra également servir à valider la production finale.

La figure-modèle est suffisamment grande pour qu'une reproduction à l'œil ne soit pas validée.

Voici la consigne pour les élèves :

« *Vous devez trouver un moyen de reproduire le même cercle en une seule fois, en vous servant uniquement du compas pour le tracer. Le gabarit de demi-disque fourni ne devra vous servir que pour prendre ou ajouter des informations sur le cercle-modèle. Le gabarit fourni ne doit être ni plié, ni coupé* ».



Pour résoudre ce problème, on peut alors tracer sur la figure-modèle un diamètre avec le gabarit de demi-disque, puis, en le tournant suivant la trajectoire du bord courbe, on peut en tracer un second qui permettra ainsi de mettre en évidence :

- le centre d'un cercle comme intersection de deux diamètres ;
- un rayon comme segment joignant le centre du cercle avec l'un de ses points ;
- un diamètre comme segment joignant deux points du cercle et passant par son centre ;
- deux points comme intersections d'un diamètre avec le cercle.

Une fois les deux diamètres tracés, le compas servira pour reporter la longueur du rayon et tracer ainsi le cercle superposable à la figure-modèle.

Le recours à un demi-disque opaque et rigide permet de chercher à mobiliser des façons d'agir sur cette figure, d'en parler et de la voir en termes de surface, contour de surface, surface à courbure constante.

L'utilisation du gabarit pour prendre des informations sur la figure-modèle et non pour la reproduction sont des contraintes qui orientent vers l'usage du compas, ce dernier étant aussi porteur de différentes façons d'agir sur le cercle d'en parler et de les voir : ligne courbe fermée, vision dynamique en rotation et, à terme, ensemble de points à égale distance du centre.

Le rayon est matérialisé par l'écartement du compas mais l'espace est vide. Il est aussi matérialisé par l'intersection des lignes obtenues par les tracés du contour droit du gabarit de demi-disque.

Dans cette version, le problème est proposé dès la fin du cycle 2 de l'école primaire.

Sa mise en œuvre est détaillée dans l'article de la revue *Au fil des maths* de l'Apmep, cité en introduction :

« Changement de regard sur le cercle » (n° 530, octobre-novembre-décembre 2018, p 41 à 49).

*https://afdm.apmep.fr/rubriques/ouvertures/changement-de-regard-sur-le-cercle/*

**Version 2, mise en œuvre dans une classe de 6e**

Les instruments autorisés sont cette fois : **la règle non graduée**, **la bande de papier** que l'on peut plier, **la règle graduée**, **un gabarit de demi-disque opaque** (aux mêmes dimensions que le cercle-modèle) et **le compas**.

Il y a un coût sur l'usage de ces instruments.

**Objectif supplémentaire et remarque importante à propos du coût dans le cas particulier de cette situation**

La présence de la règle graduée et de la bande de papier permet de mettre en évidence certaines procédures erronées, parfois prégnantes, pour obtenir le centre d'un cercle : l'élève pose sa règle ou la bande de papier « à vue », pensant avoir « partagé » son cercle en deux parties « égales » ou avoir trouvé la longueur la plus grande entre deux points du cercle…

Pour invalider ces procédures, l'alignement des deux points du cercle formant un diamètre avec le centre du cercle est particulièrement mis en évidence.

Le coût, ici, ne cherche pas à faire évoluer les procédures de construction des élèves mais est présent pour bloquer la reproduction du cercle grâce au gabarit. Peut-être aussi (non constaté à ce jour), pour bloquer le tracé éventuel à la règle graduée ou en utilisant la bande de papier d'un rayon du cercle lors de sa construction, avant d'utiliser le compas.

Une analyse a priori, détaillée, de la situation avec ce coût est présentée dans un article de Petit x n°114, p 24 et suiv (2021) :

« Tracé du cercle et circulation des discours (première partie). Approche didactique des (inter)actions langagières et matérielles », Caroline Bulf, Valentina Celi, Karine Millon-Fauré, Céline Beaugrand et Catherine Mendonça Dias.

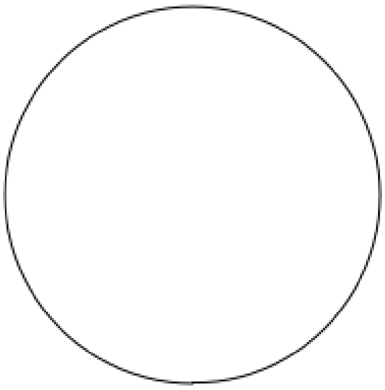
https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/revues/petit-x/consultation/numero-114-petit-x/1-trace-du-cercle-et-circulation-des-discours-premiere-partie-approche-didactique-des-inter-actions-langagieres-et-materielles-876533.kjsp?RH=1623312678208

On précise aux élèves :

- le gabarit ne doit être ni plié, ni découpé (à dire en fonction de sa constitution qui peut être du plastique, du bois...),

- le gabarit correspond au même disque que celui représenté sur leur feuille de travail.

Le professeur sera peut-être amené également, si nécessaire, à préciser que la feuille de travail ne doit pas être pliée. Ne pas le faire de suite pour ne pas « donner des idées » sur la nécessaire recherche d'un diamètre !



| Coût sur les instruments | Coût | Comptes |
| --- | --- | --- |
| Règle non graduée | 0 | |
| Bande de papier | 10 | |
| Règle graduée | 20 | |
| Gabarit de demi-disque | 10 | |
| Compas | 1 | |

Coût sur l'usage des instruments

| Instrument | Coût | Comptes |
|---|---|---|
| Règle non graduée | 0 | |
| Bande de papier | 10 | |
| Règle graduée | 20 | |
| Gabarit de demi-disque | 10 | |
| Compas | 1 | |

Rappel : l'usage des instruments est gratuit sur la figure-modèle.

**Résolution**

Une fois les procédures erronées (mauvais usage de la règle graduée ou de la bande de papier sur le modèle) «évacuées » collectivement, la résolution du problème est identique à la version originale.

Avec le bord droit du gabarit, on peut tracer deux diamètres du cercle-modèle qui se coupent en un point qui est son centre.

On peut également tracer un diamètre avec le gabarit et construire son milieu qui est le centre du cercle.

La construction du cercle à moindre coût se fera avec le compas après avoir pris l'information du rayon sur le cercle-modèle.

## Restauration 4-1 : un déroulement, points de vigilance

La question initiale « Que voyez-vous ? » présente ici moins d'intérêt si ce n'est de montrer que même en 6e, des élèves parlent encore de « rond » !

### Consigne et première phase de travail

« Vous devez reproduire le même cercle que le cercle-modèle déjà représenté. »

Est ensuite présentée la feuille de travail sur laquelle :

- est représenté le cercle-modèle,
- la place est laissée pour la construction,
- figure la liste des instruments autorisés ainsi que leur coût.

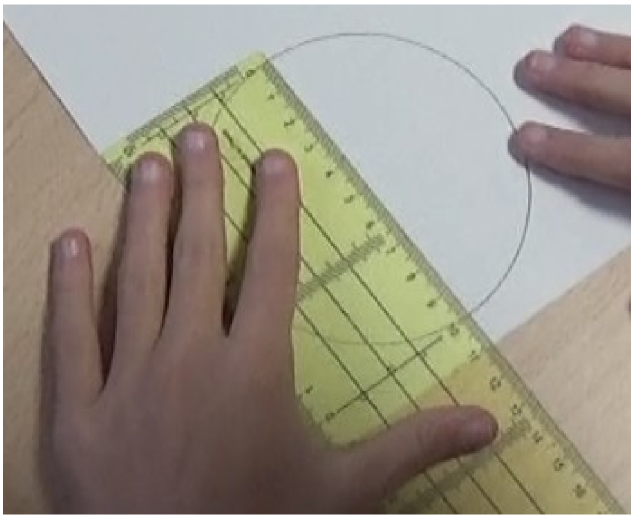
Pour ne pas influencer ou donner des idées, il n'est pas précisé à ce stade qu'il n'est pas autorisé d'utiliser en plus le gabarit du voisin ou que la feuille de travail ne doit pas être pliée : il faudra intervenir discrètement au cas par cas si cela se produit !

Débute alors le travail des élèves.

Cette première phase est plutôt courte : chaque élève trouve assez rapidement une procédure qu'elle soit juste ou fausse.

Le·la professeur·e, pour organiser la mise en commun à venir, repère ces différentes procédures et demande à certain·e·s de les préciser : lorsque rien n'est tracé sur le cercle modèle, ce qui laisse présager une procédure erronée.

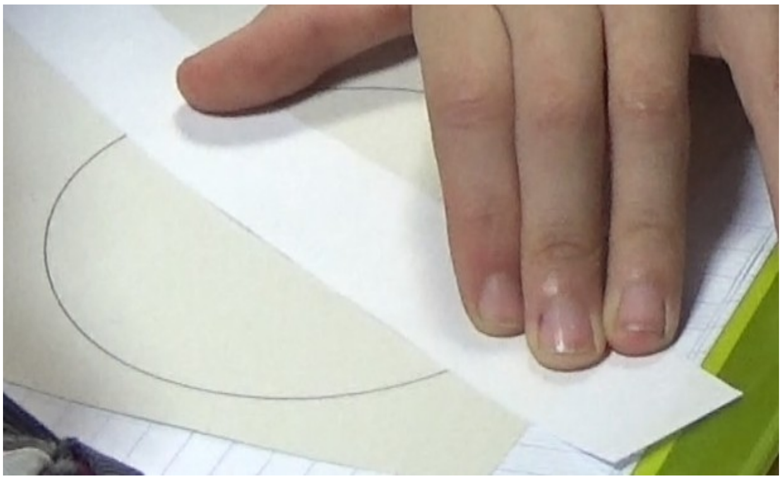
Pour l'analyse du cercle-modèle, un nombre non négligeable d'élèves utilise la règle graduée pour mesurer ce qu'ils ou elles pensent être le diamètre, vu peut-être ici comme « plus grande longueur sur le cercle » ou comme « ligne de partage en deux moitiés » (voir plus loin).



Certain·e·s ont tracé leur « pseudo-diamètre », d'autres n'ont rien tracé ne retenant que sa mesure.

Cette procédure a pu être favorisée par le fait que le diamètre du cercle-modèle était de 10 cm en raison de gabarits de demi-disque en bois trouvés dans le commerce ! Il est possible de fabriquer avec une imprimante 3D des gabarits en plastique, résistants et opaques, avec un diamètre au choix : il sera pertinent de choisir une mesure plus « complexe ». Cela a été fait dans notre cas, et avec un diamètre de 9,7 cm, moins d'élèves ont utilisé la règle graduée.

Cependant, ce n'est pas la seule raison qui explique cette procédure : d'autres élèves ont utilisé la bande de papier pour prendre cette « plus grande longueur ». Il ne leur reste plus qu'à plier la bande pour obtenir la longueur moitié.



Parmi celles et ceux utilisant la règle, certain·e·s tracent ainsi deux « pseudo-diamètres » et pensent donc avoir obtenu le centre du cercle à l'intersection de ceux-ci.

On peut penser que ces élèves connaissent a priori les éléments caractéristiques d'un cercle – ce qui paraît « normal » en 6e – en dévoyant certaines relations (alignement extrémités d'un diamètre et centre) et/ou en utilisant incorrectement la règle ou la bande de papier qu'ils·elles doivent « poser sur un alignement » de trois points dont seulement deux sont connus, choisis arbitrairement sans garantie d'alignement avec le troisième.

La vision première d'une surface (2D) et les symétries du cercle et du disque peuvent aussi expliquer cette facilité à croire que l'on peut partager « à vue » le disque en deux parties égales…

D'après M. Artigue et J. Robinet (article précédemment cité), et repris par C. Bulf et V. Celi, parlant des tracés des élèves :

*« le cercle y apparaît comme une figure géométrique ayant même dimension dans deux directions privilégiées : l'horizontale et la verticale. Il a une longueur et une largeur, voire une largeur et une hauteur et elles ont même mesure. Pour tracer cette longueur et cette largeur, l'enfant ne cherche pas, semble-t-il, à réaliser un maximum de longueur de cordes horizontales ou verticales, mais plutôt à partager le cercle en deux parties égales. Le milieu du cercle est justement le point de croisement de la longueur et de la largeur. De ce fait, longueur et largeur semblent être considérées comme des axes de symétrie plutôt que comme des diamètres ensemblistes. »*

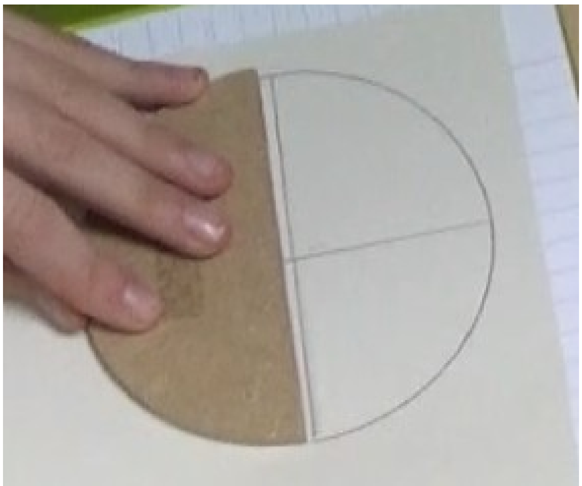
Il ne restera plus qu'à convaincre ces élèves lors d'une mise en commun (voir plus loin), que leur procédure, même si elle fournit un rayon « approché », n'est pas correcte. C'est une vraie difficulté, résistante, pour certain·e·s de ces élèves.

Rarement, la recherche du centre est faite par tâtonnement en utilisant le compas : le fait que cette procédure est due au hasard est facilement compris.

Des procédures justes émergent également.

La plupart du temps, après avoir constaté que le gabarit de demi-disque correspondait bien au cercle-modèle (à interroger lors de la mise en commun), deux diamètres sont tracés avec le bord droit du gabarit identifié comme diamètre, très souvent dans des directions prototypiques (à peu de choses près, horizontale et verticale), parfois même annoncées comme perpendiculaires, sans plus de justification et sans instrument permettant de tracer un angle droit…

Le centre du cercle est obtenu à l'intersection de ces deux diamètres.



Dans quelques cas, un seul diamètre est tracé avec le gabarit, le milieu étant ensuite obtenu en utilisant la bande de papier.

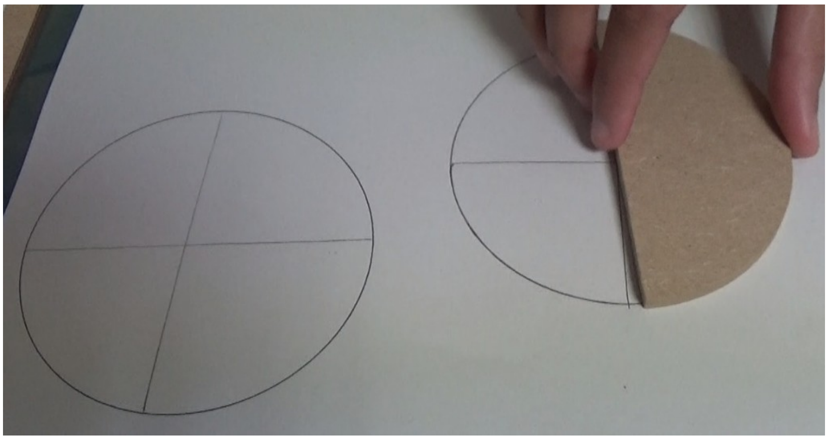
La construction du cercle demandé, que son rayon soit trouvé de manière erronée ou juste, se fait bien avec le compas.

Dans la très grande majorité des cas, le centre n'est pas représenté : lorsque l'on demande à ces élèves de « mimer » leur construction, il leur est difficile de retrouver son centre ! Ils ou elles n'ont d'autres recours que de chercher, en levant leur feuille, un petit trou…

Ces élèves sont incités à effacer le cercle tracé et à refaire la construction dans le bon ordre : représenter d'abord le point qui sera le centre pour pouvoir poser la pointe du compas.

C'est un élément important de la règle d'usage du compas.

Parmi les très rares constructions erronées après une analyse correcte, on trouve celle qui consiste à reproduire ce qui a été fait sur le cercle-modèle : deux « diamètres » sont tracés avec le bord droit du gabarit sans s'assurer qu'ils se coupent en leur milieu commun…



Quelques élèves, après avoir « contrôlé » le gabarit, l'utilisent deux fois (au moins) pour construire le cercle attendu : cette procédure est juste mais son coût élevé – 20 € – les incitent à chercher autre chose !

**Deuxième phase : la mise en commun**

Il s'agit maintenant de faire expliciter toutes les procédures utilisées et de débattre de leur justesse.

Il s'agit également de mettre en relation ces différentes procédures avec les différentes conceptions du cercle et les différentes possibilités de le définir.

A priori, les élèves de 6e sont outillés en ce qui concerne le vocabulaire du cercle mais cet exercice d'explicitation reste difficile.

Dans un premier temps, sont explicitées les procédures erronées utilisant la règle graduée ou la bande de papier.

Il faut amener les élèves concerné·e·s, avec l'appui de la classe, à dire qu'ils·elles visent un diamètre soit en tant que segment pour ensuite en prendre la mesure (en traçant avec la règle graduée) ou soit directement le diamètre comme grandeur en mesurant (sans tracer avec la règle graduée) ou en marquant deux repères sur la bande de papier. Le but, dans tous les cas, est bien d'obtenir un segment de longueur moitié ou seulement cette longueur moitié (par sa mesure ou sur la bande de papier).

Il faut maintenant leur demander de justifier que ce segment et/ou cette longueur correspondent bien au rayon du cercle-modèle, ce qui permet de remonter à la question cruciale :

« En posant la règle ou la bande de papier sur le cercle tel que vous l'avez fait, qu'est-ce qui vous assure d'obtenir un diamètre ou le diamètre ? ».

C'est l'aspect ponctuel qui entre en jeu (extrémités d'un diamètre, centre du cercle).

Collectivement, les connaissances des élèves permettent d'aboutir (parfois laborieusement…) au problème qui se pose ici.

Tout d'abord, il faut leur faire prendre conscience que poser la règle ou la bande de papier comme cela, revient à choisir arbitrairement – « au hasard » – deux points appartenant au cercle et à considérer le segment joignant ces deux points (le mot « corde » apparaît parfois).

« Pour que ce segment soit un diamètre, que faut-il de plus ? »

La classe en arrive au fait que le centre doit appartenir à ce segment ou que les extrémités de ce segment et le centre du cercle doivent être alignés ou que le centre du cercle doit être le milieu de ce segment.

La classe en conclut qu'en posant la règle ou la bande de papier tel que cela a été fait, il n'y a aucune assurance que ces conditions soient respectées ! Cela s'apparente donc à une construction « au hasard ».

Les plus difficiles à convaincre sont celles et ceux qui pensent avoir tracé deux diamètres : ils ont davantage de mal à admettre que « leur » point d'intersection n'est pas le centre du cercle ! La connaissance de la relation « Deux diamètres d'un cercle se coupent au centre du cercle » est bien là mais le raisonnement précédent doit s'appliquer deux fois pour « leurs » deux segments. Ne sachant pas si les deux segments tracés sont des diamètres, on ne peut savoir si le point d'intersection obtenu est le centre du cercle.

Autant en ce qui concerne des éléments ponctuels du cercle (centre, extrémités d'un diamètre qui sont donc des points appartenant au cercle), de relations entre eux (alignement, milieu), que des objets rayon et diamètre, vus comme objets géométriques et comme grandeurs, cette première partie de mise en commun est riche.

Sont abordées ensuite les procédures exactes, avec l'usage du gabarit de demi-disque :

- pour tracer deux diamètres dont l'intersection est le centre du cercle ;

- pour tracer un diamètre dont il faut ensuite placer le milieu qui est le centre du cercle.

S'engage alors une discussion sur l'outil gabarit : que représente son bord droit ?

C'est l'occasion aussi de bien différencier « cercle » et « disque ».

L'usage du gabarit favorise ici, une conception du cercle comme contour de surface, mais aussi comme ligne à courbure constante.

Le gabarit étant « de même dimension » que le cercle-modèle, la classe en déduit que le bord droit représente un diamètre du cercle.

Certain·e·s proposent alors de mesurer ce diamètre pour avoir le rayon : les autres disent que cela n'est pas nécessaire, qu'ils·elles ont réussi sans le faire.

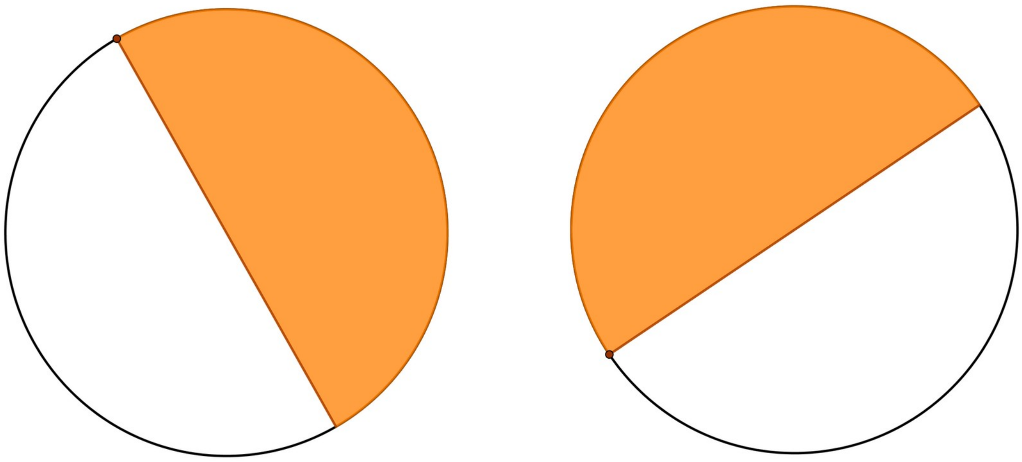
En évoquant également le coût de la construction, il est fait remarquer que cela engendre alors l'usage de la règle graduée pour prendre l'information du rayon pour la construction au compas… Cette procédure est juste mais coûteuse comparée à celles annoncées à 1 € (à discuter plus tard !).

Des élèves exposent alors leurs procédures qui permettent donc d'avoir le centre du cercle pour avoir un rayon / le rayon.

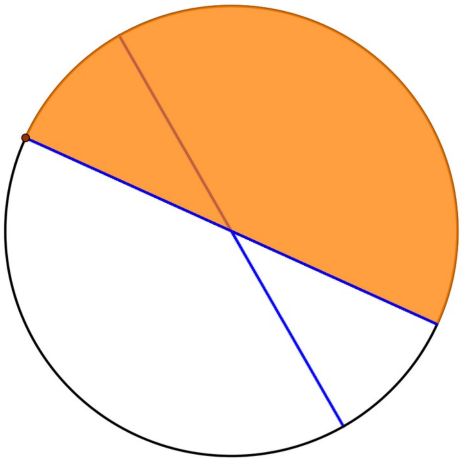
Avant de poursuivre, sont évoquées les positions du gabarit lorsque deux diamètres sont tracés : on convient que l'on obtient bien le centre avec deux diamètres quelconques, quelles que soient les positions du gabarit.

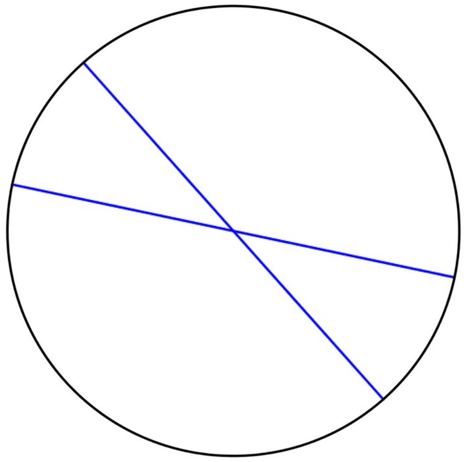
L'invariance par rotation du cercle et du disque est également mise en évidence à cette occasion.

L'usage d'un logiciel de géométrie dynamique permet d'aider à la visualisation de cette invariance. Il permet également de montrer, comme évoqué plus haut, que les deux diamètres peuvent être quelconques : les élèves ont en effet tendance à favoriser des directions prototypiques de ces diamètres – « verticale », « horizontale ».



Le demi-disque peut se positionner à volonté, il suffit ensuite de faire apparaître pour chaque position du demi-disque virtuel, le diamètre et d'en afficher la trace.



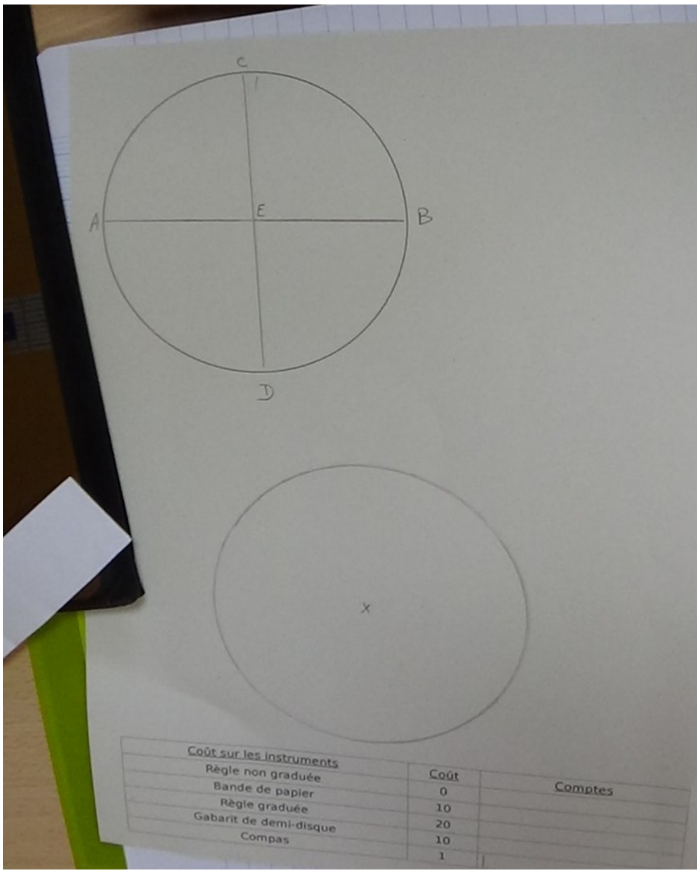


L'analyse terminée, la construction est maintenant explicitée.

Le centre du cercle-modèle étant construit, le rayon est ainsi « matérialisé » : il permet d'obtenir l'écartement du compas pour tracer le cercle. Il y a donc un report de longueur de la figure-modèle avec le compas.

Pour le tracé, le centre du cercle est représenté avant de poser la pointe : cela a déjà été évoqué plus avant, il est nécessaire de le préciser !

Il faut donc représenter à l'aide du compas le cercle de centre le point choisi arbitrairement, représenté, et de rayon la longueur prise sur le cercle-modèle.



Parfois, certain·e·s élèves tracent un ou deux diamètre·s, une fois leur cercle construit reproduisant ainsi la figure-modèle et les tracés de leur analyse : on convient que c'est inutile.

Une discussion peut s'engager sur le coût de la construction.

Le compas est d'abord utilisé pour « prendre » une longueur sur le cercle-modèle donc comme instrument de report puis pour tracer le cercle.

Ce n'est pas tant le coût qui importe mais surtout que les élèves prennent conscience de ce double usage.

## Restauration 4-1 : synthèse des différentes phases

*Remarque*

*Ces différentes phases ne sont pas figées : le·la professeur·e qui utilise cette situation adapte le scénario en fonction de ce qui se passe dans sa classe. Elles sont à comprendre comme des moments clés qu'il est important de prendre en compte pour que les objectifs de la situation d'enseignement soient atteints. Elles sont issues d'expérimentations.*

**Première phase**

Présentation du cercle-modèle, des instruments, de leur coût, de la feuille de travail.

Possibilité de présenter le gabarit comme un demi-disque ou seulement un secteur de disque, sans préciser qu'il correspond aux dimensions du cercle-modèle – cette vérification est à la charge des élèves.

Consigne : « Vous devez reproduire le même cercle que le cercle-modèle déjà représenté. »

Précisions à donner seulement si cela se produit et individuellement : la feuille de travail ne doit pas être pliée, un deuxième gabarit ne doit pas être utilisé.

**Recherche des élèves (5-10 min)** : le temps que la très grande majorité des élèves ait trouvé une procédure, juste ou fausse.

Pas d'intervention du·de la professeur·e sauf pour éventuellement débloquer ou faire expliciter une construction obtenue sans tracé sur le cercle-modèle.

**Deuxième phase : mise en commun**

Explicitation par les élèves de leurs procédures d'analyse de la figure-modèle – objectif : trouver le rayon – en commençant par les procédures fausses.

Il s'agit d'abord de disqualifier les procédures « à vue » avec utilisation de la règle graduée ou non, et de la bande de papier.

Lors de l'explicitation des procédures correctes, utilisant obligatoirement le gabarit de demi-disque ou de secteur de disque – à ce stade de la progression, la médiatrice n'est pas disponible.

Construction du cercle : mettre en évidence le double usage du compas et fixer qu'il faut poser la pointe du compas sur un point déjà représenté.

**Bilan final de la situation (deux versions)**

Cela peut être un bilan intermédiaire : on peut institutionnaliser après avoir fait la restauration suivante (« La rosace »).

Les éléments à reprendre alors dans ce bilan peuvent être,

- à propos des objets géométriques et de leurs relations :

- le cercle vu comme contour de surface, le disque, favorisé ici par l'usage du gabarit ; distinction cercle, objet géométrique 1D / disque, objet géométrique 2D ;

- définition d'un diamètre comme segment joignant deux points appartenant au cercle et dont le centre du cercle est le milieu ;

- définition d'un rayon en tant que segment ;

- distinction avec diamètre et rayon en tant que grandeur ; égalités de longueurs ;

- les diamètres d'un cercle se coupent au centre du cercle ;

- les extrémités d'un diamètre étant des points appartenant au cercle, un cercle « contient » des points ; ces points sont à égale distance du centre ;

- il y a une infinité de diamètres possibles (en relation avec l'infinité de droites passant par le centre, axes de symétrie), il y a donc une infinité de points « sur » un cercle ;

- à propos des instruments :

- le diamètre du cercle est « matérialisé » par le bord droit du gabarit de demi-disque ;

- l'écartement du compas « matérialise » le rayon du cercle ;

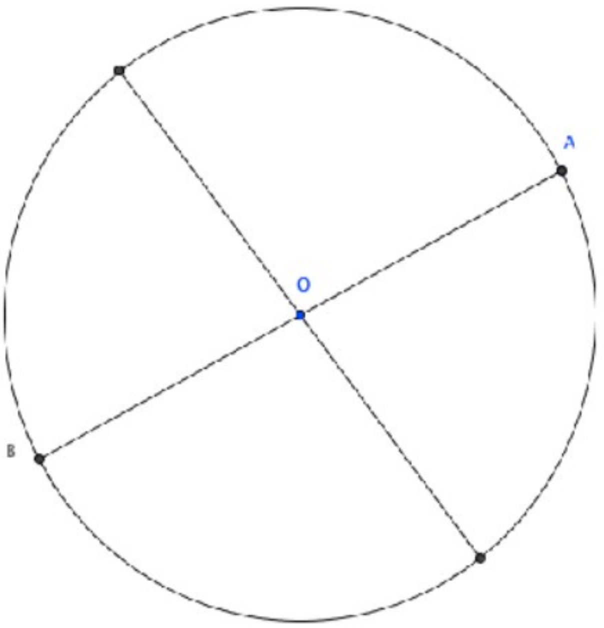
- les différents usages du compas dans la situation.

Il est prévu d'institutionnaliser les règles d'usage du compas dans la partie dédiée (voir la partie « La fiche-outils ou l'usage géométrique des instruments ») : c'est encore un peu tôt à ce stade, car ces usages ne sont pas complets après cette situation. Il n'y a pas eu de report de longueur sur un support déjà tracé : ce sera le cas dans la situation suivante.

Il est par contre important de préciser à nouveau que, pour tracer un cercle, la pointe du compas se pose sur un point déjà représenté, que cela soit un point construit ou placé arbitrairement.

Il est également possible après cette situation, quelle que soit la version choisie, de formaliser une trace écrite sur le cercle. Dans ce cas, la situation suivante « La rosace » peut être vue comme une situation de réinvestissement, complétant aussi l'usage du compas comme reporteur de longueurs.

Nous proposons ci-après un exemple de ce que peut être cette trace écrite.




• **<u>Le point</u>** O est le point d'intersection de deux diamètres du cercle.
**Le point O est le <u>centre</u> du cercle.**

• **<u>Un diamètre</u>** est un segment passant par le centre et deux points du cercle.

Le segment [AB] est **<u>un diamètre</u>** du cercle. O est le milieu du segment [AB].

• **<u>Un rayon</u>** est un segment joignant le centre du cercle avec l'un de ses points ; il correspond à **l'écartement du compas.**

Le segment [OA] est un **<u>rayon</u>** du cercle. La longueur OA est aussi appelée le **<u>rayon</u>** du cercle.

La longueur du rayon est la moitié de celle du diamètre.

## Restauration 4-2, la rosace

### Objectifs

- Poursuivre le travail de conceptualisation de l'objet géométrique « cercle », de ses éléments caractéristiques.

- Continuer d'apprendre à faire évoluer le regard sur les figures (passer progressivement d'une vision 2D à une vision 1D et/ou 0D).

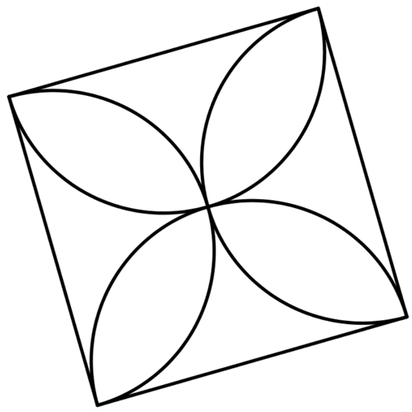
En particulier ici, cela demande le passage préalable d'une vision par juxtaposition de formes, qui est plutôt la vision spontanée, à une vision par superposition qui amènera à voir, par exemple, des demi-disques superposés avant d'appréhender des demi-cercles.

- Utiliser le compas comme reporteur de longueur et comme traceur de cercle.

- Réinvestir des connaissances géométriques précédemment travaillées ou provenant des classes antérieures (le carré, ses axes de symétrie, la perpendicularité, milieu, appartenance, égalités de longueurs…).

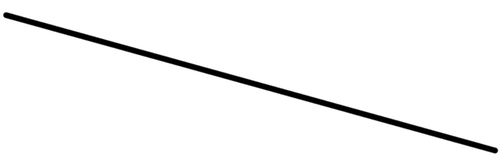
### Consigne

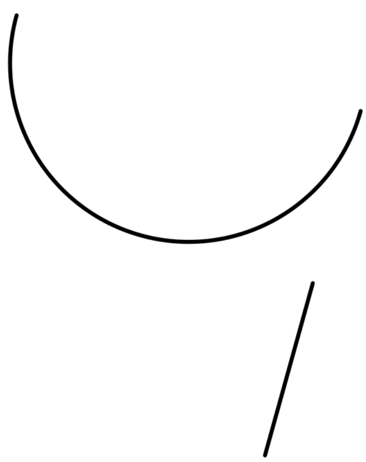
Restaurer la figure-modèle.



Deux amorces au choix :

un côté complet du carré* ; un demi-cercle et un « morceau » de côté**.





* : lors de la présentation de l'amorce choisie, il faudra éventuellement parler de « quadrilatère ». En effet, vérifier avec les instruments que c'est un carré peut rester à la charge de l'élève lors de l'analyse de la figure-modèle. Le contrat doit alors être parfaitement clair quant à l'utilisation des instruments, car il en sera tout autrement, dans la géométrie théorique, pour justifier la nature d'une figure.

** : ce « morceau » peut être la moitié d'un côté.

D'autres amorces sont possibles : les restaurations associées sont étudiées dans l'article de C. Bulf et V. Celi dans la revue Grand N, « Essai d'une progression sur le cercle pour l'école primaire – une articulation clé : gabarit-compas. » (n° 97, 2016, p 21 à 58).

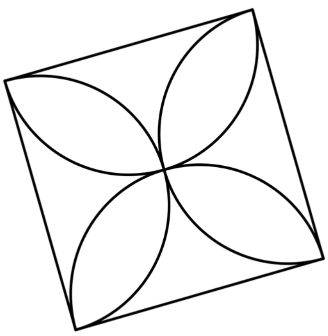
Les dimensions de modèle et de l'amorce doivent être différentes, les orientations également.

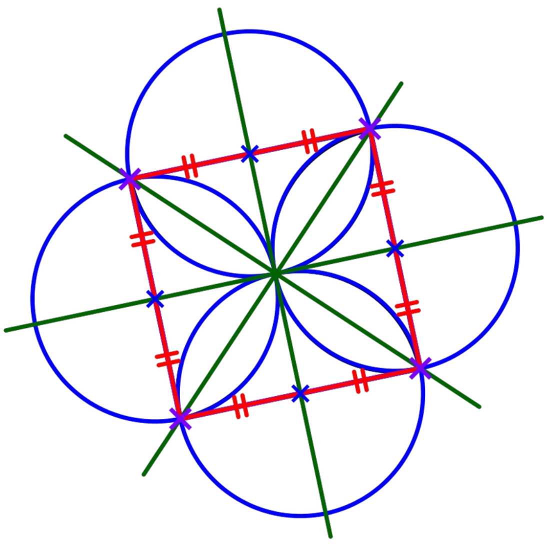
Coût sur les instruments

| Instrument | Coût | Comptes |
|---|---|---|
| Règle non graduée | 0 € | |
| Bande de papier | 10 € | |
| Règle graduée | 20 € | |
| Gabarit d'angle droit | 5 € | |
| Compas | 1 € | |

Ces coûts sont choisis pour favoriser le double usage du compas !

**Résolution**





La figure est composée d'un carré et de quatre demi-cercles dont les centres sont les milieux des côtés du carré.

Les côtés du carré sont des diamètres des demi-cercles.

Le centre du carré, point d'intersection des diagonales, est aussi le point d'intersection des quatre demi-cercles.

Cette dernière propriété de la figure est un élément important, parmi l'ensemble des propriétés de la figure-modèle, de la validation des constructions des élèves.

Les axes de symétrie peuvent être utiles à la construction : les diagonales et les médianes du carré.

*Remarque*

*Le mot « médiane » sera utilisé dans la suite pour plus de facilité. À ce stade, ne disposant pas de la notion de médiatrice d'un segment, il peut l'être avec les élèves : il désigne une droite passant par les milieux des côtés opposés du carré. Il faudra « justifier » avec les élèves que ces deux droites sont bien axes de symétrie du carré (par pliage).*

En fonction de l'amorce choisie, différentes stratégies sont possibles.

Le coût de la construction est également un élément important de la validation.

De manière générale, « baisser » le coût des constructions des élèves – permettant de relancer la recherche et d'atteindre un des objectifs fixés – est essentiellement possible par l'utilisation du compas comme instrument exclusif de report de longueurs.

<u>Dans le cas où l'amorce est un côté complet du carré</u>

La construction du carré, pour un·e élève de 6e, à ce stade de la progression, sans avoir à disposition la médiatrice d'un segment, peut se faire :

- par le tracé de deux perpendiculaires et deux reports (au mieux 2 × 5 € + 2 × 1 € = 12 €) ;
- par le tracé d'une perpendiculaire et trois reports (au mieux 1 × 5 € + 3 × 1 € = 8 €).

Il faut ensuite construire les milieux des côtés.

Là aussi, différentes possibilités :

- en utilisant la bande de papier une fois pour placer un milieu puis 3 reports (au mieux, 1 × 10 € + 3 × 1 € = 13 €) ;
- après avoir obtenu le centre du carré en traçant les diagonales (gratuit), deux perpendiculaires passant par ce point pour obtenir les médianes du carré qui coupent les côtés en leur milieu (2 × 5 € = 10 €) ; les médianes du carré sont en effet aussi les médiatrices des côtés du carré et des axes de symétrie ;
- après avoir obtenu le centre du carré en traçant les diagonales (gratuit), une seule médiane est tracée en utilisant le gabarit d'angle droit, deux milieux

sont alors obtenus, puis un report pour obtenir un troisième milieu et enfin, tracé de la deuxième médiane (gratuit) pour obtenir le quatrième milieu (1 × 5 € + 1 × 1 € = 6 €).

La construction des demi-cercles coûtera obligatoirement 4 €.

Ce n'est pas un inventaire exhaustif des procédures mais plutôt celles qui nous paraissent les plus accessibles à un·e élève de 6e (et qui sont apparues lors de nos expérimentations pour certaines d'entre elles).

On obtient là un éventail de coûts finaux de 18 € à 29 € en utilisant exclusivement le compas comme reporteur de longueurs.

C'est un repère important pour le·la professeur·e lors du déroulement de la séance, pour relancer la recherche en vue des objectifs visés.

*Remarque*

*Il est à noter que cette restauration peut être réutilisée avantageusement lorsque la médiatrice d'un segment a été introduite, ainsi que sa construction à la règle et au compas : elle permet de baisser significativement le coût (autour de 10 €, à vos constructions !).*

<u>Dans le cas où l'amorce est un demi-disque et un « morceau » d'un côté du carré</u>

Pour terminer le carré de manière optimale, on peut obtenir un troisième sommet en prolongeant le « morceau » de côté puis en effectuant un report.

Le quatrième sommet peut s'obtenir à l'intersection de deux arcs de cercle de centres les deux sommets adjacents et de rayon un des côtés déjà tracé (total de 3 €).

On peut également l'obtenir en traçant la diagonale possible : on obtient alors le centre du carré à son intersection avec le demi-cercle (gratuit). Puis on trace la deuxième diagonale et on place le quatrième sommet grâce à un report (total de 2 €).

Le tracé d'une médiane grâce au centre du carré avec le gabarit d'angle droit permet d'obtenir deux milieux pour un coût de 5 €. L'utilisation du compas lorsque la médiatrice ainsi que ses constructions seront connues permet d'abaisser ce coût à 2 €.

Un report suffit ensuite à obtenir un troisième milieu, la deuxième médiane et ainsi, le quatrième milieu.

Reste ensuite à tracer les quatre demi-cercles (4 €).

On peut donc envisager des coûts allant de 9 € à 12 €.

*Remarque*

*Le « morceau » de côté peut aussi être un « demi-côté » joignant un sommet au milieu de ce côté. L'analyse avec cette amorce figure dans l'article de C. Bulf et V. Celi cité précédemment.*

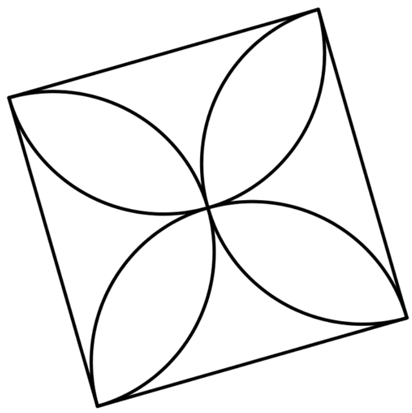
## Restauration 4-2 : un déroulement, points de vigilance

Le professeur commence par montrer la figure-modèle seule.

Il n'en dit rien !

### Question initiale

« Que voyez-vous ? »



Les mots qui apparaissent souvent sont : « rosace », « fleur », « pétales »… Des « pétales qui partent du même endroit ». Il est encore nécessaire de « recadrer géométriquement » certain·e·s.

Beaucoup parlent d'arcs de cercle, de figures construites avec des arcs de cercle à l'intérieur d'un carré ou d'un quadrilatère mais très peu de demi-cercles.

Tout cela peut vraisemblablement s'expliquer par une vision prégnante par juxtaposition.

Quelques élèves évoquent aussi « un point d'intersection » sans être capable de préciser les objets géométriques en jeu. Parfois, celles et ceux qui ont vu les demi-cercles le font pour eux.

Est apparu aussi « des espèces de triangles avec deux côtés arrondis » !

### Première phase

L'amorce est un côté du carré.

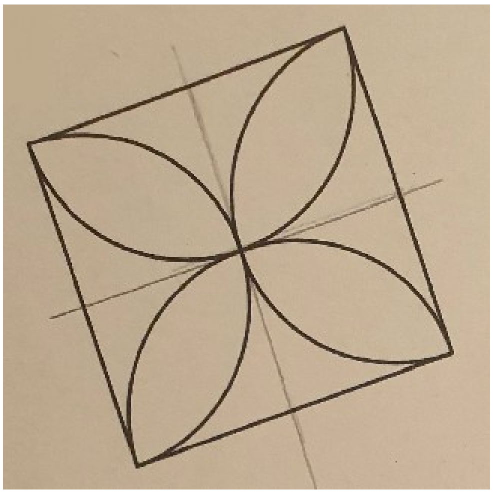
Lors de la dévolution du problème, en présentant l'amorce choisie, le choix a été fait de parler de « quadrilatère » afin que la reconnaissance argumentée de la nature du quadrilatère (en utilisant les instruments) soit à la charge des élèves.

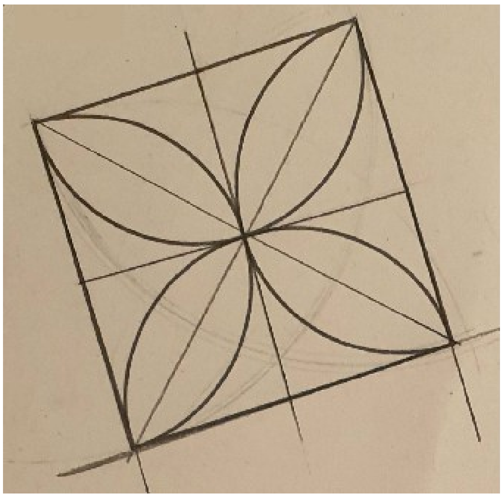
À ce stade de la progression, leur expérience accumulée pour ce type de travail rend cette dévolution simple et brève avec une mise au travail rapide et motivée.

Encore, mais plus rarement, des élèves commencent immédiatement à tracer sur l'amorce. Leur demander individuellement ce qu'ils·elles tracent suffit en général à leur rappeler qu'ils ont oublié d'analyser au préalable la figure-modèle.

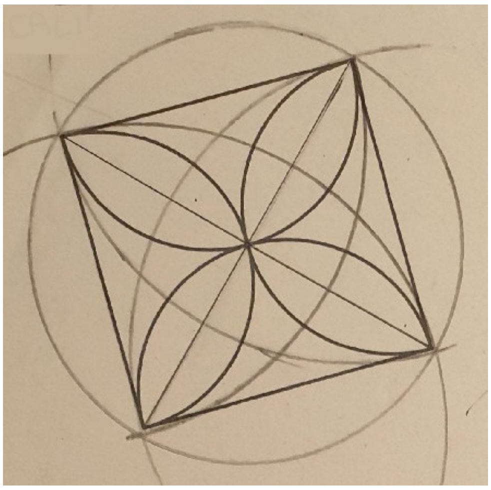
Une intervention collective peut être nécessaire pour rappeler cette obligation préalable à toute construction.

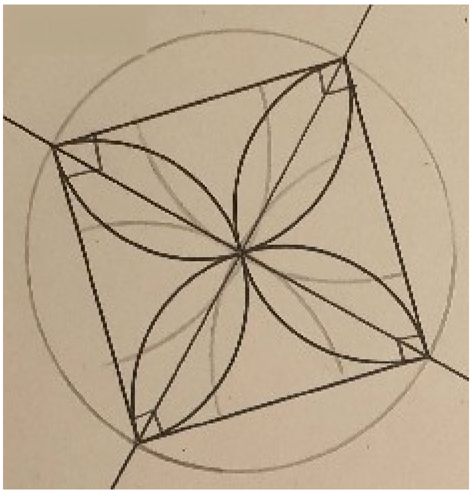
Il y a peu de choses à tracer sur la figure-modèle : les diagonales, les médianes du carré…





C’est peut-être ce qui incite quelques-un·e·s à construire à outrance ! Rappeler à ces élèves le but de l’analyse, la nécessité de faire des allers-retours modèle/amorce pour étudier l’utilité de certains tracés sur le modèle leur permet de comprendre et finalement, d’effacer certains traits.





Des propriétés et/ou relations sont à vérifier pour s’assurer de la présence d’objets géométriques particuliers ou de relations/propriétés particulières :

- « le contour » est un carré ;

(Rappel : cette vérification a été laissée à la charge des élèves mais ce n’est pas une obligation.)

- il y a quatre demi-cercles dont les côtés du carré sont des diamètres et donc, les milieux des côtés du carré en sont les centres ;

- des sommets du carré et le point d'intersection des diagonales appartiennent aux demi-cercles.

Ces vérifications entraînent des actions sur la figure-modèle, en particulier pour les demi-cercles : il faut construire les milieux des côtés puis en utilisant le compas, « tracer » ou « simuler le tracé » de quatre demi-cercles de centre ces milieux et de rayon le demi-côté du carré et contrôler la coïncidence avec les arcs présents.

Si l'on voit parfois quelques angles droits codés – mais sans codage des égalités de longueurs pour le carré –, pour les demi-cercles, les milieux des côtés ne sont quasiment jamais représentés et l'on ne perçoit pas de tracés de vérification. Tout au plus, la présence de « trous au milieu » des côtés en témoigne… Il faut que les points caractéristiques de la figure modèle soient représentés, c'est à rappeler à la classe.

Les élèves qui ont construit les médianes ont obtenus ces milieux par intersection, à condition de les avoir tracées comme perpendiculaires aux côtés passant par le centre du carré : cela sera à vérifier et justifier lors de la mise en commun.

Il est donc pertinent ici de leur demander d'écrire leur analyse de la figure-modèle.

Il faut leur rappeler que celle-ci doit se faire sur deux plans :

- l'explicitation des objets géométriques en jeu, les propriétés et/ou relations présentes ;

- les actions réalisées – et les instruments utilisés – pour s'assurer de la justesse de leur analyse.

On peut également leur suggérer de coder la figure modèle.

Une première mise en commun a lieu pour faire le bilan de cette analyse.

Le carré émerge en premier, certainement en lien avec leur première action de construction envisagée sur l'amorce : reconstituer le carré.

Il leur est demandé de justifier que l'on a bien un carré : cette justification se fait encore ici à l'aide des instruments. Ils·elles évoquent alors « les quatre angles droits et les quatre côtés de même longueur », connaissance bien ancrée.

Une fois le carré justifié, sont évoqués « les arcs de cercles » pour un certain nombre, « les demi-cercles » pour d'autres.

Le·la professeur·e, sans prendre parti pour l'instant, demande alors les éléments caractéristiques de ces objets géométriques, ce qu'il faut connaître pour pouvoir les représenter.

Avant que les mots « centre » et « rayon » n'émergent, on entend encore « là où on met la pointe du compas », « l'écartement du compas »…

Les procédures de vérification sont alors explicitées : « j'ai trouvé le milieu des côtés et j'ai repassé le compas dessus et ça a marché ».

À propos des milieux des côtés, c'est souvent la bande de papier que l'on peut plier qui est utilisée – d'autant plus si la mesure du côté sur la figure-modèle est « complexe » – et la pointe du compas est ensuite directement posée « au bon endroit ». Il est donc rappelé à nouveau à cette occasion qu'il faut d'abord représenter le point qui sera le centre du demi-cercle.

Certain·e·s élèves avouent « avoir vérifié à vue » : on insiste bien sur la nécessité de cette vérification instrumentée !

Les élèves qui ont tracé les médianes donnent leur explication de leur construction sur la figure-modèle.

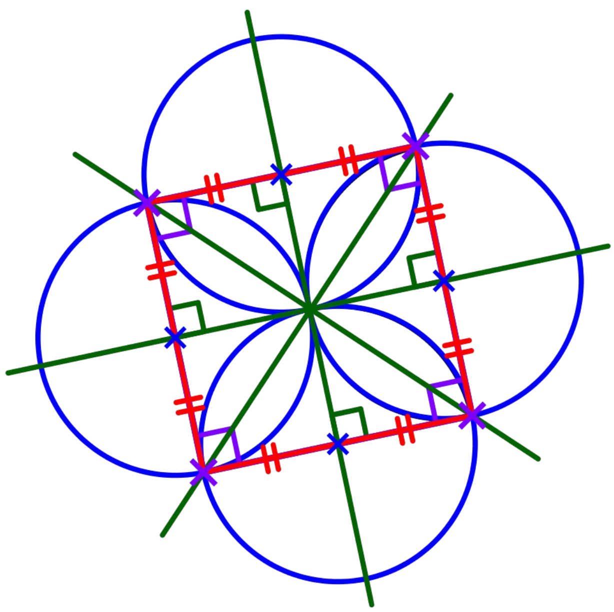
Certaines s'avèrent erronées : tracés « à vue » pour partager le carré en deux parties égales « par symétrie », en passant par le point d'intersection des demi-cercles bien perçu comme « centre » du carré (souvent dit « milieu » du carré) et qu'il faut faire caractériser comme point d'intersection des diagonales du carré.

Pour les constructions correctes, on justifie collectivement que ces médianes sont perpendiculaires aux côtés du carré et qu'elles se croisent au point d'intersection des demi-cercles : elles sont des axes de symétrie du carré (connaissance antérieure, utilisation du pliage) et se coupent au point d'intersection des diagonales qui sont aussi des axes de symétrie.

La classe arrive avec difficultés à dire qu'il faut donc tracer des droites perpendiculaires aux côtés du carré passant par le point d'intersection des diagonales qui est aussi le point d'intersection des quatre demi-cercles. On retrouvera cette difficulté pour faire expliciter la construction du carré à partir de l'amorce.

Ce n'est pas anormal puisque, dans la progression choisie, la notion de perpendicularité arrive plus tard (partie 6). Cependant, puisque ces médianes sont susceptibles d'intervenir dans cette restauration, c'est l'occasion aussi d'utiliser des relations perpendicularité/parallélisme pour justifier qu'en traçant une perpendiculaire à un côté d'un carré, elle est aussi perpendiculaire au côté opposé. Le·la professeur·e peut l'anticiper sans formaliser à ce stade.

Une synthèse de cette analyse est formalisée avec la classe et écrite.



**Deuxième phase**

Il s'agit maintenant de réaliser la construction à partir de l'amorce.

L'ensemble des élèves commence par la construction du carré.

C'est une vraie difficulté pour certain·e·s avec des tracés sans utilisation du gabarit d'angle droit et parfois, en n'utilisant que le compas pour reporter la longueur du côté connu et en plaçant les sommets manquants «à vue » sur les arcs tracés.

C'est l'occasion d'étayages individuels pour faire prendre conscience du côté hasardeux de cette procédure.

En particulier, c'est le moment de fixer l'usage du compas comme reporteur de longueur : pour pouvoir reporter une longueur, il doit y avoir un support tracé – représentant une droite, une demi-droite… – et un point « de départ » représenté, sur lequel on place la pointe du compas.

Ce sont, majoritairement, le tracé de deux perpendiculaires au côté et deux reports qui sont réalisés. Soit deux usages du gabarit d'angle droit et deux usages du compas comme reporteur de longueurs (2 × 5 € + 2 × 1 € = 12 €).

On incite celles et ceux qui ont utilisé la bande de papier, pour un coup bien plus élevé (2 × 5 € + 2 × 10 € = 30 €), à reprendre leur construction !

Plus rarement, une seule perpendiculaire est tracée et un report permet d'obtenir un troisième sommet : le quatrième est alors obtenu à l'intersection de deux arcs de cercle (1 × 5 € + 3 × 1 € = 8 €). Lors de l'explicitation de cette procédure, à distinguer d'un report de longueur, les éléments caractéristiques de ces arcs – centre et rayon – seront à faire préciser.

On le voit ici encore, dès la construction du carré, le coût sur l'usage des instruments permet de favoriser l'usage de certains instruments, en l'occurrence ici, un même instrument, le compas, dans ces deux utilisations possibles, le tout en lien avec l'objet géométrique cercle et ses éléments caractéristiques. Et , pour rappel, ce n'est pas tant obtenir un coût minimum qui importe que pouvoir obtenir un coût moindre que celui obtenu pour maintenir l'intérêt des élèves pour la recherche et les amener aux objectifs visés, aussi bien concernant les usages des instruments que les concepts géométriques.

Une première mise en commun peut être organisée si besoin pour faire le point sur la construction du carré.

La suite de la restauration concerne les milieux des côtés.

Les procédures pour les obtenir sont diverses.

Majoritairement, les élèves utilisent la bande de papier pour construire un milieu. Le compas est ensuite utilisé pour obtenir les trois autres (1 × 10 € + 3 × 1 € = 13 €).

Une réflexion sur le coût permet de convaincre celles et ceux qui n'ont utilisé que la bande de papier de reprendre leur construction.

Il ne reste alors plus que les quatre demi-cercles à tracer : pour chacun, le centre est maintenant représenté et on connaît leur rayon commun (4 × 1 € = 4 €).

Les objectifs de la situation sont d'ores et déjà atteints avec ces procédures.

Le coût de construction des milieux peut néanmoins être baissé par la construction des médianes du carré :

- soit par le tracé de deux perpendiculaires aux côtés du carré passant par le point d'intersection des diagonales (2 × 5 € = 10 €) ;

- soit par le tracé d'une de ces perpendiculaires et obtenir l'autre en traçant la droite passant par le troisième milieu obtenu grâce un report, et le point d'intersection des diagonales (1 × 5 € + 1 × 1 € = 6 €).

Ces procédures sont extrêmement rares, même pour celles et ceux qui ont tracé les médianes lors de leur analyse.

Cela peut être un levier pour le·la professeur·e pour différencier, permettre à toutes et tous de terminer leur construction tout en relançant la recherche pour d'autres.

Si l'utilisation des médianes n'est pas apparue, cette restauration pourra être proposée à nouveau, comme exercice, lors du travail sur les notions de perpendicularité et de parallélisme (partie 6, « Droites perpendiculaires, droites parallèles ») en baissant cette fois le coût d'utilisation du gabarit d'angle droit ou de l'équerre.

D'autres procédures y compris pour la construction du carré sont également possibles.

Nous rappelons également que l'usage de la notion de médiatrice d'un segment permet aussi de baisser significativement le coût de la construction et que donc, cette restauration peut avantageusement faire l'objet d'un exercice dans la partie 4, « Médiatrice d'un segment ».

*Remarque*

*Un des critères de justesse et/ou précision des constructions des élèves peut être que les quatre demi-cercles se coupent en un même point, le point d'intersection des diagonales. Cependant, beaucoup d'élèves ont des difficultés à réaliser des constructions précises, soignées et cela n'est pas le cas. L'explicitation des procédures permet de valider tout de même leur construction.*

Une mise en commun est organisée pour finaliser les constructions en mettant en avant les procédures utilisant le compas comme reporteur de longueur et traceur de cercle ou arc de cercle. Les éléments caractéristiques des arcs éventuellement tracés et des demi-cercles sont explicités.

En particulier, grâce aux diverses interventions des élèves, le rayon des demi-cercles est à la fois vu comme une longueur – « la moitié du côté du carré » – et comme un segment joignant un point du demi-cercle – un sommet du carré – et le centre du cercle – le milieu d'un côté.

Un programme de construction écrit est demandé suite à cette mise en commun.

## Restauration 4-2 : synthèse des différentes phases

*Remarque*

*Ces différentes phases ne sont pas figées : le·la professeur·e qui utilise cette situation adapte le scénario en fonction de ce qui se passe dans sa classe. Elles sont à comprendre comme des moments clés qu'il est important de prendre en compte pour que les objectifs de la situation d'enseignement soient atteints. Elles sont issues d'expérimentations.*

### Question initiale

Présentation de la figure modèle seule.

« Que voyez-vous ? »

Réponses écrites sur les cahiers (1-2 minutes) puis bilan collectif rapide (2-3 minutes).

Retour à prévoir lors du bilan final.

### Première phase

Analyse de la figure-modèle.

Demander, qu'en plus d'éventuels tracés et codages sur la figure-modèle, que cette analyse soit écrite en précisant les objets géométriques présents et les procédures de vérification mises en œuvre.

Mise en commun pour une synthèse de cette analyse.

### Deuxième phase

C'est la phase de construction.

Les élèves commencent en général par la construction du carré. Des difficultés d'usage du gabarit d'angle droit sont à prévoir et possiblement, un mauvais usage du compas pour reporter une longueur.

Bilan intermédiaire pour fixer la règle d'usage du compas comme reporteur de longueur (avant institutionnalisation de son usage complet en bilan de cette situation).

Inciter les élèves à baisser le coût de leur construction grâce à l'usage du compas pour reporter des longueurs au lieu de la bande de papier.

Pour différencier, l'utilisation des médianes du carré est un levier pour baisser le coût de la construction.

Bilan pour faire la synthèse de ces constructions : mise en avant de l'usage complet du compas, des éléments caractéristiques du cercle.

**Bilan final de cette situation**

L'objet géométrique « cercle » et ses éléments caractéristiques peuvent avoir fait l'objet d'une leçon à l'issue de la première restauration. Dans ce cas, il s'agit, dans ce bilan, de remettre en lien l'analyse du modèle et les procédures de construction avec cette leçon. Sinon, c'est le moment d'institutionnaliser (un exemple de trace écrite est proposé page 19).

Selon les procédures utilisées, on obtient également différentes propriétés caractéristiques du carré.

Cette restauration a aussi permis de compléter les usages du compas, en particulier comme reporteur de longueurs (sur un support déjà tracé).

La règle d'usage du compas est donc finalisée dans la partie dédiée « Usage géométrique des instruments ».

En voici une proposition (extraite de la partie 2 « Fiche-outil ou l'usage géométrique des instruments ») :

<u>Usage du compas</u>

- ➔ Pour reporter une longueur

« L'écartement » du compas est pris entre deux points déjà placés ou avec un segment déjà tracé.

On reporte à partir d'un point existant sur un support existant (segment, droite, demi-droite), on trace un arc de cercle.

- ➔ Pour tracer un cercle, un arc de cercle

Il faut un point (le centre) pour poser la pointe.

Il faut un autre point pour placer la mine ou une longueur qui donne « l'écartement » pour avoir le rayon.

***Remarque importante***

*Lors d'un report de longueur avec le compas, les élèves n'ont pas réellement conscience qu'un arc de cercle est tracé dans ce cas : ils·elles disent souvent « je fais une marque ». Il est nécessaire d'expliciter cela et de les amener à le verbaliser (« je trace un arc de cercle de rayon…, de centre… »).*

*De même, les élèves n'ont pas tous conscience de construire alors un point.*

*Progressivement, nous les amenons à comprendre que l'on cherche un point d'intersection « de 2 lignes » : intersection entre une droite (ou demi-droite, ou segment) et un cercle (ou arc de cercle). Le centre du cercle (ou de l'arc de cercle) est le « point de départ » du report, son rayon, la distance à reporter.*

*Un travail identique est mené afin de faire comprendre la nécessité de l’utilisation du compas (traceur de cercle) pour la construction du troisième sommet d’un triangle dont on connaît les longueurs des trois côtés.*

*Nous proposons plus loin des exercices en ce sens.*

*L’objectif est de faire comprendre aux élèves que la seule fonction du compas est « traceur de cercle » (ou d’arc de cercle) pour la construction de points.*

**Retour sur la question initiale : « Que voyez-vous ? »**

(À l’oral)

On insiste sur la nécessité de voir des lignes et des points pour analyser le figure-modèle et pouvoir la restaurer.

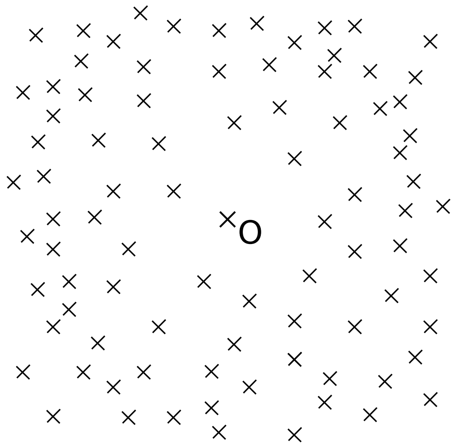
Voir les arcs de cercle, qui s’avéreront êtres des demi-cercles, comme des lignes (1D) joignant des points (0D), ici les sommets du carré. Anticiper l’existence des centres (0D) de ces arcs indispensables à leur construction.

On pourra aussi faire remarquer la nécessité de voir des éléments superposés plutôt que juxtaposés.

# Situations/exercices à faire également

## Le cercle comme ensemble de points

1) « Marquer en rouge tous les points situés à 2,5 cm de O. »




Dans cet exercice, la consigne est volontairement ambiguë : s'agit-il seulement des points représentés ou de tous les points possibles ? En général, une partie des élèves trace le cercle de centre O de rayon 2,5 cm : le débat peut s'engager !

2) « Placer un point A.

a) Construire dix points situés à 3 cm de A. »

Dans un deuxième temps :

« b) construire tous les points situés à 3 cm de A. »

## Construction de triangles connaissant les trois longueurs

1) « Construire un segment [AB] de 5 cm.

Placer tous les points situés à la fois à 6 cm de A et à 7 cm de B.

Combien y en a-t-il ? »

L'interprétation de l'expression « à la fois » pose problème.

Plusieurs situations peuvent être proposées en variant les mesures, pour travailler sur le nombre de points solutions, la « forme des triangles obtenus » même s'ils ne sont pas représentés…

Le but, ici, est que les élèves comprennent que :

« les points situés à 6 cm de A » sont « les points appartenant au cercle de centre A et de rayon 6 cm » et réciproquement, « les points appartenant au cercle de centre A et de rayon 6 cm » sont « les points situés à 6 cm de A » (de même pour le point B).

Les élèves doivent tracer les deux cercles, ils trouvent ainsi deux points d'intersection répondant à la question.

Ceci prépare la construction de triangles connaissant leurs trois longueurs : le troisième sommet, lorsqu'il existe, est un point d'intersection de deux cercles.

2) « Construire le segment [AB] tel que AB = 6 cm.

Placer tous les points C tels que AC = 5 cm et BC = 7 cm. »

Seule la forme de cet exercice varie par rapport au précédent. Cette formulation « tous les points C tels que… » est une difficulté pour les élèves, ainsi que le mot « et ».

Le travail se poursuit avec des exercices de construction de triangles.

3) Avant de passer aux constructions classiques de triangles connaissant les mesures des trois côtés, on peut proposer :

- la construction d'un triangle dont les longueurs sont données par trois segments indépendants déjà tracés ;
- la reproduction d'un triangle donné construit en vraie grandeur.

Dans les deux cas, la règle graduée n'est pas autorisée.

4) Construire un triangle donné par un schéma à main levée, les mesures des trois longueurs étant indiquées directement sur les côtés.

5) « Construire un triangle dont les dimensions sont 10,5 cm, 8 cm et 11 cm. »

6) « Construire un triangle RST tel que RS = 4 cm, ST = 7,5 cm et RT = 11 cm. »

Dans le cas d'un triangle dont un des angles est obtus (c'est le cas ci-dessus), la construction pose problème aux élèves qui ne tracent pas les arcs de cercle « au bon endroit » – en particulier, s'ils·elles ne commencent pas par le plus grand côté.

Selon le côté par lequel les élèves commencent, les triangles obtenus n'ont pas « la même allure ». Ils·elles doutent que les triangles obtenus soient « les mêmes triangles ».

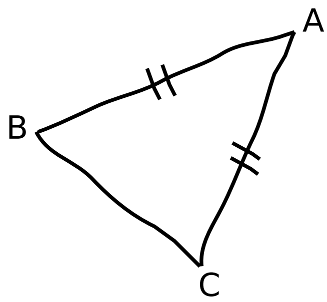
Il est intéressant d'en discuter avec la classe, de leur faire éventuellement utiliser du papier calque pour pouvoir constater que ce sont bien les mêmes triangles quelle que soit la position qu'ils occupent dans la feuille.

7) Constructions de triangles isocèles

Des exercices classiques de construction avec des mesures sont donnés.

Nous proposons également l'exercice suivant de constructions de triangles isocèles en imposant certaines contraintes : à partir de sommets, de côtés, de longueurs de côtés données par des segments indépendants.

« Dans chaque cas, le triangle ABC doit être isocèle en A (mais non équilatéral).

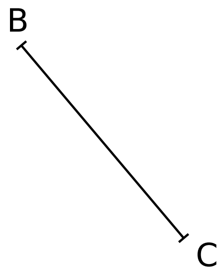
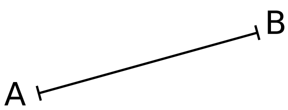
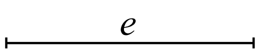


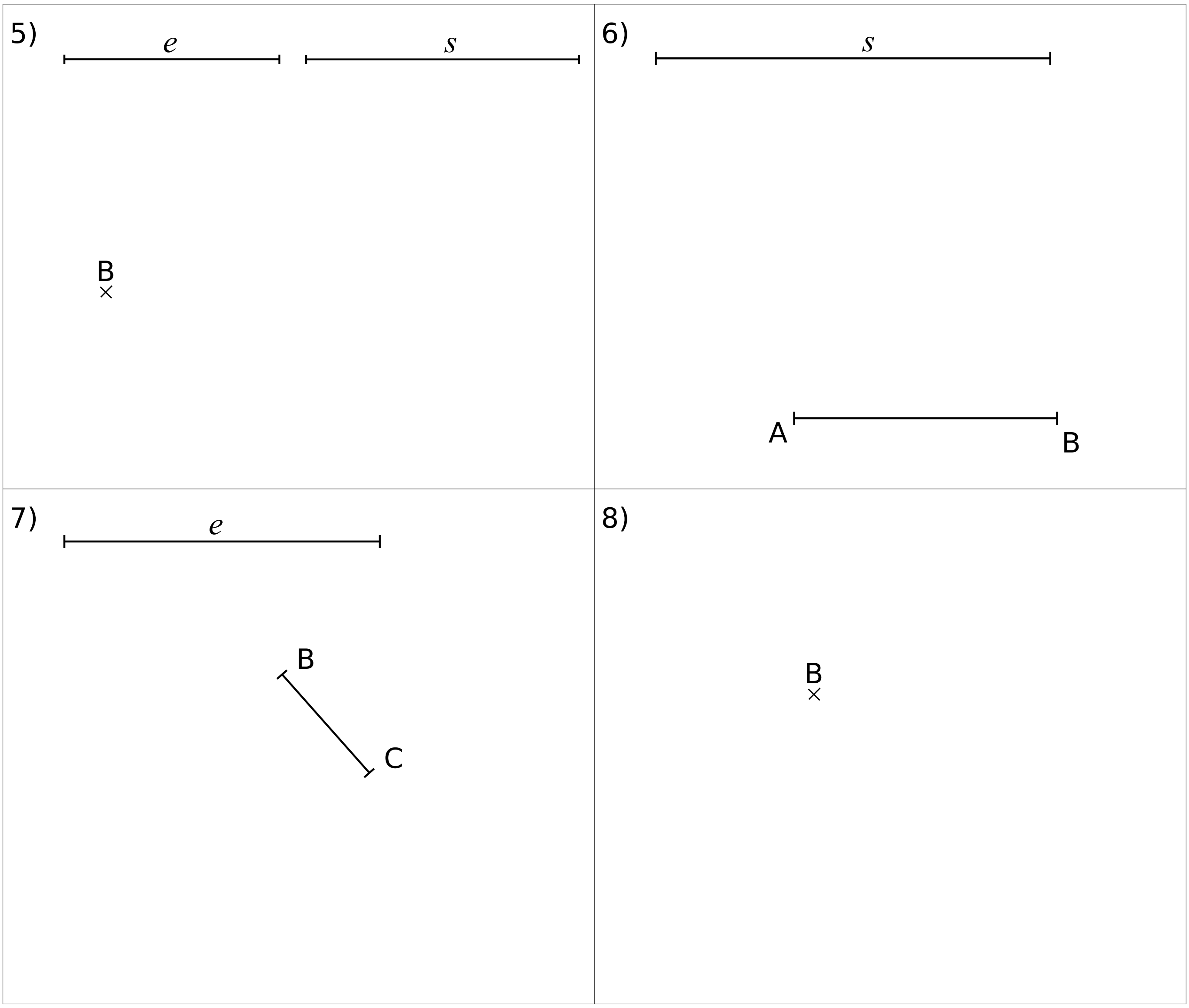

On dit que A est le sommet principal et que le côté [BC] est la base.

Les longueurs des côtés [AB] et [AC] est notée $e$ (en cm) : AB = AC = $e$ cm.

La longueur de [BC] est notée $s$ (en cm) : BC = $s$ cm.

Dans certains cas, ces longueurs sont données par des segments. »

| | |
|---|---|
| 1)   | 2)   |
| 3)   | 4)     |




Extrait de la brochure « La géométrie en 6e », Groupe didactique Irem d’Aquitaine, (1999). http://numerisation.univ-irem.fr/BO/IBO99003/IBO99003.pdf

L’usage du compas y est particulièrement travaillé.

Le lien entre le triangle isocèle et la médiatrice d’un segment sera abordé dans la partie suivante.

*Remarque*

*Il y a deux façons de construire les triangles isocèles : soit en partant de la base, soit en partant du sommet principal.*

*Pour certaines questions, un seul des deux procédés est possible.*

*Les élèves ont plus de difficultés quand il s’agit de partir du sommet principal.*

*Parfois, pour éviter le problème, ils·elles construisent un triangle équilatéral, alors que souvent, à l’inverse, le triangle équilatéral n’est pas considéré comme isocèle, car il a trois côtés de même longueur et non deux (définition prise au sens de « deux seulement »).*

*Un des intérêts de cet exercice est donc la prise en charge de cette difficulté en* *faisant travailler cette deuxième procédure de construction, souvent délaissée parce que, peut-être, considérée comme évidente par les professeur·e·s.*

Voir article « Triangles isocèles et cercles », Annie Berté & Dominique Woilez, Petit x n°38, Irem de Grenoble, 1994.

https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/medias/fichier/38x3_1569841663920-pdf

Cet exercice permet également la prise en charge des difficultés liées à l'expression « isocèle en A ».

Pour contourner les difficultés de tracé dans certaines positions, les élèves tracent des triangles isocèles dont le sommet principal n'est pas A.

L'expression « isocèle en A » est alors rappelée : le sommet A joue un rôle particulier pour le triangle, c'est lui qui est à l'intersection des deux côtés de même longueur.

Un autre intérêt de cet exercice est la représentation de triangles isocèles dans des positions non prototypiques (base horizontale, sommet « au-dessus »…).

On peut, pour certaines questions, en particulier les questions 2) et 8), positionner les points différemment pour accentuer ce travail.

8) Construction de triangles équilatéraux

- Construire un triangle équilatéral dont la mesure du côté est donnée.
- Construire un triangle équilatéral dont un côté est représenté, par exemple, un segment [AB].

Il est intéressant ici de demander un programme de construction pour mettre en évidence les formulations :

« cercle de centre A passant par B » ou « cercle de centre A de rayon AB »…

Elles sont plus difficiles à envisager pour les élèves et méritent donc d'être travaillées.

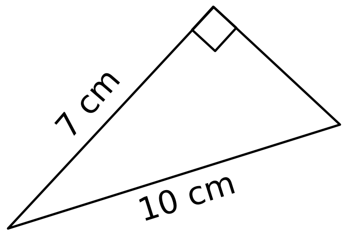
L'usage du logiciel GeoGebra peut également aider pour la construction d'un triangle équilatéral et son explicitation.

Pour que le triangle résiste au déplacement, une fois le premier côté [AB] construit, les élèves sont obligé·e·s de définir correctement les cercles pour construire le troisième sommet.

Ils·elles devront définir les cercles avec un rayon égal à la longueur AB – commande centre-rayon – ou comme passant par l'autre extrémité du côté tracé – commande centre-point.

De plus, les intitulés de ces commandes favorisent les formulations évoquées précédemment.

9) « Construire en vraie grandeur :




»

Dans cet exercice, il y a deux enjeux :

- l'ordre de construction des segments de mesures données ;
- la construction du troisième sommet comme intersection d'un cercle et d'une droite.

On peut aussi proposer des exercices de construction de figures usuelles. Par exemple :

10) « Construire le losange ABCD vérifiant : AB = 5 cm et AC = 2 cm. »

Tout au long de ces exercices, très souvent, apparaît un mésusage de la règle graduée : l'élève la pose au hasard puis « ajuste » pour obtenir le troisième sommet. Le compas n'est donc pas utilisé…

Ce mésusage est persistant puisqu'on le retrouve également jusqu'en fin de cycle 4 !

Il est alors pertinent de fixer l'usage de la règle graduée comme instrument de report de longueur avec l'obligation d'avoir un support déjà tracé et un point de départ.

Voici une proposition ci-dessous.

<u>« Usage de la règle graduée pour tracer un segment de mesure donnée</u>

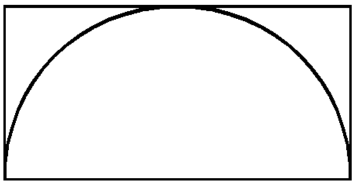
C'est un report de longueur.

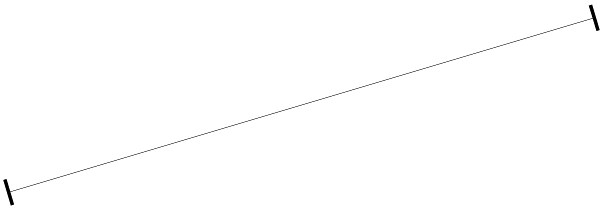
Pour reporter une longueur donnée par une mesure, il faut :

- un support droit c'est-à-dire une droite ou un segment (que l'on peut prolonger si besoin) déjà représentés ;
- un point de départ ;
- la graduation 0 positionnée sur ce point de départ. »

## Idées pour évaluation

### Restauration 4-3

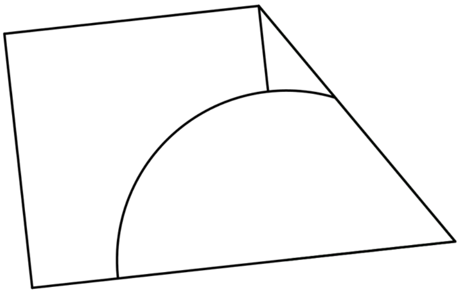




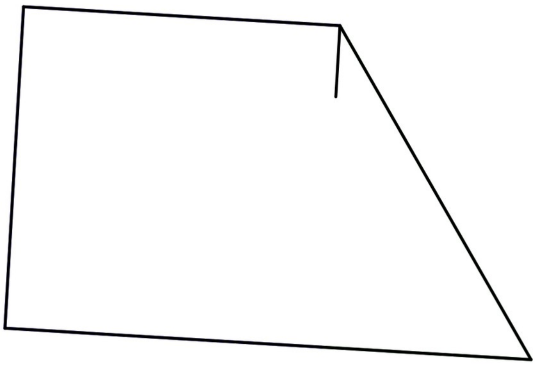
Source : « Des maths ensemble et pour chacun 6e »

### **Restauration 4-4** (d'après Marie-Jeanne Perrin-Glorian)

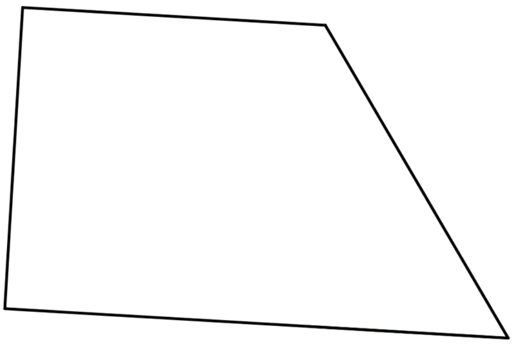
Modèle :



Amorce



ou



Analyse