



## **Des pistes pour travailler avec les définitions**

Groupe REMSup

• ○ •



# Table des matières

<b>1 Premières définitions en analyse</b>	<b>5</b>
I Lycée . . . . .	5
II Enseignement supérieur . . . . .	7
<b>2 Valeur Absolue</b>	<b>9</b>
I Lycée . . . . .	9
II Enseignement supérieur . . . . .	11
<b>3 Limite et continuité</b>	<b>13</b>
I Lycée . . . . .	13
II Enseignement supérieur . . . . .	15
<b>4 Dérivation</b>	<b>19</b>
I Lycée . . . . .	19
II Enseignement supérieur . . . . .	20
<b>5 Convexité</b>	<b>21</b>
I Lycée . . . . .	21
II Enseignement supérieur . . . . .	21
<b>6 Produit scalaire</b>	<b>23</b>
I Lycée . . . . .	23
II Enseignement supérieur . . . . .	24
<b>7 Bornes supérieure et inférieure, extrema</b>	<b>27</b>
I Maximum . . . . .	27
II Borne supérieure, borne inférieure . . . . .	28



## Introduction

### Motivation pour un travail autour de la notion de définition.

« L'étymologie du terme *de-fin-itio* montre bien que la fonction première d'une définition est d'établir des limites strictes. » **Yuri Manin**, *Séminaires et Congrès*, vol. 3, Société Mathématique de France, 1998, p. 158-168.

« S'apercevoir en milieu d'oral qu'un candidat ne connaît pas la définition d'un groupe alors que cela fait 15 minutes qu'il en parle peut s'avérer fatal. » **Rapport de jury**, *Concours Centrale-Supélec 2018*, oral de mathématiques 1.

En mathématiques, la définition apporte un cadre de travail et donne bien souvent la direction à prendre pour produire une démonstration. Il n'est pas rare de rencontrer un étudiant s'engager avec plus ou moins de succès dans un raisonnement autour d'un objet dont il ne connaît pas vraiment la définition ; à l'inverse, d'autres peuvent avoir beaucoup de peine à démarrer un exercice et une simple suggestion de retour à la définition d'un mot de l'énoncé résout le blocage.

Les lacunes observées dans le supérieur peuvent potentiellement s'expliquer par la différence de statut ou de forme que l'on donne à la définition dans un cours de lycée et un cours de l'enseignement supérieur. On analyse des définitions proposées avant et après le Bac et des exercices d'application où ces définitions doivent s'employer.



# Chapitre 1

## Premières définitions en analyse

### I Lycée

Partie qui a pour objectif d'être utilisée assez directement par les enseignants en classe.

#### Les suites

##### Des définitions

- $(u_n)$  est une **suite arithmétique** signifie qu'il existe un réel  $r$  tel que

$$\text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + r$$

- $(u_n)$  est une **suite géométrique** signifie qu'il existe un réel  $q$  tel que

$$\text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = qu_n$$

- $(u_n)$  est une **suite croissante** signifie que

$$\text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \geq u_n$$

- $(u_n)$  est une **suite décroissante** signifie que

$$\text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \leq u_n$$

##### Utilisations :

1. On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 1$  et  $u_{n+1} = \sqrt{0,5u_n^2 + 8}$  pour tout entier naturel  $n$ .  
Démontrer que la suite  $(v_n)$  définie par  $v_n = u_n^2 - 16$  pour tout entier naturel  $n$  est une suite géométrique.
2. Soit la suite  $(u_n)$  définie par :  $u_0 = 2$  et  $u_{n+1} = \frac{5u_n - 1}{u_n + 3}$  pour tout entier naturel  $n$ .
  - (a) Montrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n \neq 1$ .
  - (b) Démontrer que la suite  $(v_n)$  définie pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$  par  $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$  pour tout entier naturel  $n$ , est une suite arithmétique.
3. Soient deux suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  définies par  $u_0 = 2$  et  $v_0 = 10$  et pour tout entier naturel  $n$  :

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3} \text{ et } v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4}$$

Pour tout entier naturel  $n$ , on pose  $w_n = v_n - u_n$  et  $t_n = 3u_n + 4v_n$ .

Montrer que  $(w_n)$  est géométrique et  $(t_n)$  est constante.



## Parité

### Des définitions

- Un domaine de définition  $D$  est dit **symétrique** lorsque pour tout  $x \in D$ ,  $-x \in D$ .
- Une fonction  $f$  définie sur  $D$  est **paire** si son ensemble de définition est symétrique par rapport à 0 et si pour tout réel  $x$  de  $D$ ,  $f(-x) = f(x)$ .
- Une fonction  $f$  définie sur  $D$  est **impaire** si son ensemble de définition est symétrique par rapport à 0 et si pour tout réel  $x$  de  $D$ ,  $f(-x) = -f(x)$ .

### Utilisations :

1. Montrer que la somme de deux fonctions paires définies sur  $D$  est une fonction paire.
2. Montrer que la somme de deux fonctions impaires définies sur  $D$  est une fonction impaire.
3. Montrer que le produit de deux fonctions paires définies sur  $D$  est une fonction paire.
4. Montrer que le produit de deux fonctions impaires définies sur  $D$  est une fonction paire.
5. Montrer que le produit d'une fonction impaire et d'une fonction paire définies sur  $D$  est une fonction impaire.



## Variations

### Des définitions

- $f$  est une fonction **strictement croissante** sur  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  signifie que, pour tous réels  $u$  et  $v$  de  $I$ , si  $u < v$  alors  $f(u) < f(v)$ .
- $f$  est une fonction **strictement décroissante** sur  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  signifie que, pour tous réels  $u$  et  $v$  de  $I$ , si  $u < v$  alors  $f(u) > f(v)$ .

### Utilisations :

1.  $f$  et  $g$  sont deux fonctions strictement croissantes sur  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ . Montrer que  $f + g$  est strictement croissante sur  $I$ .  
Même question dans le cas où  $f$  et  $g$  sont deux fonctions strictement décroissantes sur  $I$ .

*Dans la question suivante, certaines étapes pour justifier les inégalités utiliseront les variations des fonctions de référence. Le préciser.*

*Par exemple :  $x + 1 > 5 > 0$  donc avec la stricte décroissance de la fonction inverse sur  $]0, +\infty[$ ,  $\frac{1}{x+1} < \frac{1}{5}$ .*

2.  $x$  est un réel strictement supérieur à 4.

(a) Montrer que  $5 + \frac{10}{x+1} < 7$ .

(b) Montrer que  $\sqrt{4x+9} > 5$ .



## II Enseignement supérieur

### Monotonie d'une fonction

#### Exercice 1.

- 1) Donner la définition d'une fonction croissante sur un intervalle  $I$ ; d'une fonction décroissante sur un intervalle  $I$ ; d'une fonction monotone sur un intervalle  $I$ .
- 2) Justifier de deux façons différentes que la fonction  $f$  définie sur  $[0, +\infty[$  par

$$f(x) = 1 + \frac{1}{1+x} + \frac{1}{2+x}$$

est décroissante.

- 3) Comment justifier que la fonction  $f$  définie sur  $[0, +\infty[$  par

$$f(x) = \frac{x^2 + 5x + 5}{x^2 + 3x + 2}$$

est décroissante?

- 4) La fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = 2$  si  $x < 0$  et  $f(x) = x$  si  $x \geq 0$ , est-elle monotone?

- 5) La fonction  $F$  définie sur  $]0, +\infty[$  par

$$F(x) = \int_0^1 \frac{dt}{x+t^2}$$

est-elle monotone?

• ○ •

### Monotonie d'une suite

#### Exercice 2.

- 1) Soit  $f$  une fonction définie sur  $\mathbb{R}_+$ . Montrer que si  $f$  est croissante sur  $\mathbb{R}_+$  alors la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $u_n = f(n)$  est croissante.

- 2) Soit  $f$  la fonction définie sur  $[0, +\infty[$  par  $f(x) = \frac{2^x}{x^2} \cos(\pi x)$ .

(a) Montrer que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  définie par  $u_n = f(2n)$  est croissante.

(b) Montrer que la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  définie par  $v_n = f(n)$  n'est pas monotone.

- 3) Est-il nécessaire que la fonction  $f$  soit croissante pour que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  le soit?

• ○ •





# Chapitre 2

## Valeur Absolue

Au lycée la valeur absolue apparaît dès la classe de seconde mais n'est quasiment plus exploitée dans les classes qui suivent jusqu'à son retour impérieux dans l'enseignement supérieur où l'on en fait un usage intensif.

### I Lycée

En seconde, la valeur absolue est abordée conjointement à la notion géométrique de distance entre nombres réels. Certains ouvrages présentent d'abord la distance avant d'introduire la notation de la valeur absolue, d'autres font le choix inverse.

#### Des définitions

► **Définition (formulation 1) :** *Mathématiques 2de, Hyperbole.*

La **distance** entre deux nombres réels est la différence entre le plus grand et le plus petit. Ainsi, la distance entre les réels  $x$  et  $a$  est égale à  $\begin{cases} x - a & \text{lorsque } x \geq a \\ a - x & \text{lorsque } x \leq a \end{cases}$

**Notation :** au lieu d'utiliser cette notation sur deux lignes, on utilise la notation condensée  $|x - a|$  (lire « **valeur absolue** de  $x - a$  ») pour désigner la distance entre  $x$  et  $a$ .

**Cas particulier :** lorsque  $a = 0$ , la distance entre  $x$  et 0 est  $|x - 0|$  c'est à dire  $|x|$  (« valeur absolue de  $x$  »).

► **Définition (formulation 2) :** *Mathématiques 2de, Barbazo.*

Soit  $x$  un nombre réel.  
On appelle **valeur absolue** de  $x$ , et on note  $|x|$ , le nombre réel égal à  $\begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$ .

#### Définition et propriété.

Soit  $a, x$  et  $r$  des nombres réels avec  $r \geq 0$ .

- On appelle **distance entre les nombres**  $a$  et  $x$  le nombre  $|x - a|$ . Cette distance est aussi égale à  $|a - x|$ .
- $x \in [a - r, a + r]$  si et seulement si  $|x - a| \leq r$ .

#### Utilisations :

Quelques exercices d'application des définitions.

1. *Extrait du document ressources voie GT « Automatismes »*

- Que représente la valeur renvoyée par la fonction Python suivante ?

```
def mystere(a,b):
    if a<b:
        return b-a
    else:
        return a-b
```

2. Écrire le plus simplement possible :

A.  $|-2, 7|$  ; B. La distance entre les nombres 4 et -6,2.

Remarque :  $| -(-2, 7) |$  intéressant à poser.

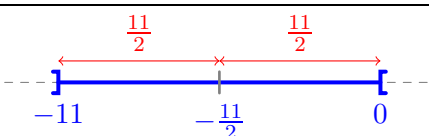
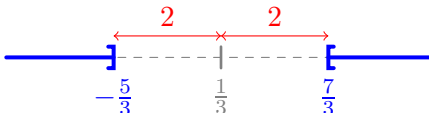
- 3(a) Représenter à l'aide d'un intervalle la condition  $|x - 1| \leq 10^{-2}$ .

- (b) Traduire à l'aide d'une valeur absolue la condition  $y \in [7, 4; 7, 6]$

4. (D'après un test élaboré par la Commission Inter IREM Université)

Dans chaque colonne du tableau ci-dessous est proposée une écriture ou une représentation d'un ensemble de réels. Compléter toutes les cases du tableau afin d'en donner une représentation équivalente.

Indiquer l'ordre de remplissage.

ensemble fini de réels ou intervalle(s)	égalités ou inégalités	croquis ou schéma de l'ensemble des $x$ considérés	distance	valeur absolue
$x \in ]6, 15[$				
	$-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$			
				
			$d(x; -4) \leq 5$	
				$ x - 3  \leq \frac{1}{2}$
				

5. Dans chaque cas, représenter sur une droite graduée l'ensemble auquel appartient le nombre réel  $x$ , puis l'exprimer sans la notation valeur absolue.

a)  $|x - 4| = 2$  ; b)  $|x + 5| < 3$  ; c)  $|x + 5| \geq 3$ .

On trouve aussi quelques exercices pour approfondir la notion qui pourraient être repris à profit dans le supérieur.

• **Exercice : raisonner.**

Indiquer pour chaque proposition si elle est vraie ou fausse.

1. Pour tous nombres réels  $x$  et  $y$ ,  $|x + y| = |x| + |y|$ .
2. Il existe deux nombres réels  $x$  et  $y$  tels que  $|x + y| = |x| + |y|$ .
3. Si  $|x| = |y|$  alors  $x = y$ .
4. Si  $|x| \leq |y|$  alors  $x \leq y$ .
5. Si  $x \leq y$  alors  $|x| \leq |y|$ .

• **Exercice : chercher, représenter, raisonner.**

Dans un repère orthonormé, représenter l'ensemble des points  $M(x, y)$  tels que  $|x| + |y| = 1$ .

Utilisations ultérieures de la définition de valeur absolue :

- **En seconde.** Aire d'un parallélogramme  $ABCD$  dans un repère orthonormé direct :

$$A_{ABCD} = |\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})|$$

- **En première ou terminale spécialité.** Distance d'un point à une droite ou plan défini à l'aide d'un vecteur normal.
- **En terminale spécialité.** Inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Intervalle de fluctuation, il faut savoir écrire :

$$|X - E(X)| < t \iff E(X) - t < X < E(X) + t.$$

- **En terminale expert.** Module d'un nombre complexe.

• ○ •

## II Enseignement supérieur

La valeur absolue est généralement introduite dans le contexte de la présentation des nombres réels et des suites numériques. On rencontre globalement deux types de formulation de sa définition. L'usage de l'objet devient très vite incontournable dans un grand nombre d'exercices d'analyse ou de probabilité.

Des définitions

- ▶ **Définition (formulation 1) :** *Mathématiques MPCSI-PCSI, Cap Prépa – Pearson.*

|| Soit  $x \in \mathbb{R}$ . La **valeur absolue** de  $x$  est  $|x| = \max(-x, x)$ .

- ▶ **Définition (formulation 2) :** *Mathématiques tout-en-un PCSTI/PTSI, Dunod.*

|| On définit la **valeur absolue** d'un réel  $x$  par

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Utilisations :

Voici une liste de quelques exercices d'application où on privilégiera l'une ou l'autre des formulations [F1] ou [F2].

1. [F1] Soit  $x \in \mathbb{R}$  et  $a \in \mathbb{R}_+$ . Montrer que :

$$|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a.$$

2. [F1] Déterminer l'ensemble des solutions réelles  $x$  de l'inéquation :

$$2 \leq |1 + x| \leq 3.$$

3. [F2] Résoudre l'équation  $|2x - 4| = |x + 3|$
4. [F1] Montrer que :  $\forall x \in \mathbb{R}, |\sin(x) - x| \leq \frac{x^2}{2}$ .
5. [F2] Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}, |x| = \sqrt{x^2}$ .
6. [F2] Montrer que pour  $(x, y) \in \mathbb{R}^2, |xy| = |x||y|$ .
7. [F2] Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}, x = |x| - |x - |x||$ .
8. [F2] Soit  $x$  et  $y$  deux nombres réels. Démontrer que

$$\max(x, y) = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|) \quad \text{et} \quad \min(x, y) = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|).$$

9. [F1] Montrer que pour  $(x, y) \in \mathbb{R}^2,$

$$||x| - |y|| \leq |x + y| \leq |x| + |y|.$$

**Exercice 3.** (*Difficile*) Montrer que pour  $(x, y) \in \mathbb{R}^2,$

$$\frac{|x + y|}{1 + |x + y|} \leq \frac{|x|}{1 + |x|} + \frac{|y|}{1 + |y|}.$$

*Indication : on pourra commencer par montrer que la fonction  $t \mapsto \frac{t}{1+t}$  est croissante sur  $[0, +\infty[$ .*

• ○ •

# Chapitre 3

## Limite et continuité

### I Lycée

#### Limites de suites

##### Des définitions

- La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  **tend vers**  $+\infty$  lorsque tout intervalle de la forme  $[A; +\infty[$  contient toutes les valeurs  $u_n$  à partir d'un certain rang.
- Soit  $\ell \in \mathbb{R}$ . La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  **converge vers le nombre réel**  $\ell$  lorsque tout intervalle ouvert contenant  $\ell$ , contient toutes les valeurs  $u_n$  à partir d'un certain rang.

On trouve dans les manuels une « interprétation » de ces définitions :

- Pour tout réel  $A$ , il existe un entier  $n_0$  tel que, si  $n \geq n_0$  alors  $u_n \geq A$ .
- Pour tout intervalle ouvert  $I$  contenant  $\ell$ , il existe un entier  $n_0$  tel que si  $n \geq n_0$  alors  $u_n \in I$ .

*La formulation « tout intervalle ouvert contenant  $\ell$  » est difficile à comprendre au lycée. A cela va s'ajouter en post-bac, le fait que l'on ne travaillera qu'avec des intervalles centrés en  $\ell$ .*

##### Utilisations :

1. Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par  $u_n = \frac{5n^2 + 3n + 1}{n^3 + n + 1}$  pour tout entier naturel  $n$ .
  - (a) Calculer la limite de la suite  $(u_n)$ . (On attend ici une réponse utilisant les opérations sur les limites.)
  - (b) Compléter l'algorithme afin qu'il détermine la plus petite valeur de  $n$  telle que  $u_n < 10^{-p}$

Donner la valeur de  $p$

$n \leftarrow 0$

$u \leftarrow 1$

Tant que ...

$n \leftarrow \dots$

$u \leftarrow \dots$

Afficher ...

Peut-on affirmer que cet algorithme se termine pour toute valeur de  $p \geq 1$  ?

2. On considère la suite  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie pour tout entier naturel  $n$  par  $w_n = 3n - \sin(n)$ .
  - (a) Montrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $w_n \geq 3n - 1$ . En déduire la limite de la suite  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .
  - (b) Montrer qu'il existe-t-il un entier naturel  $n_0$  tel que pour tout  $n \geq n_0$ ,  $w_n \geq 10^9$ .
  - (c) Montrer que la suite  $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$  n'a pas de limite.

- (d) Soit pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k$ . Calculer  $S_0, S_1, S_2, \dots$ , la suite  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  a-t-elle une limite?
- (e) On considère une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  qui converge vers 1. Montrer qu'il existe un rang  $n_0$  tel que pour tout  $n \geq n_0$ ,  $u_n \geq 0$ .



## Limites de fonction

### Définition

||  $f$  est une fonction définie sur un intervalle  $[a, +\infty[$ .  
 Dire que  $f$  **tend vers**  $+\infty$  **lorsque**  $x$  **tend vers**  $+\infty$  signifie que pour tout intervalle  $]A, +\infty[$  il existe un réel  $x_0$  tel que si  $x \geq x_0$  alors  $f(x) \in ]A, +\infty[$ .

- Déterminer la limite en  $+\infty$  de la fonction  $f$  définie par  $f(x) = 3x^2 - 2x + 4$ .
- La fonction seuil définie ci-contre renverra-t-elle toujours une valeur  $x$  quel que soit le nombre  $A$  choisi?

```
def seuil(A):
    x=1
    y=5
    while y<=A:
        x=x+1
        y=3*x**2-2*x+4
    return x
```

- Même question pour la fonction  $\text{seuil}(A, h)$  avec  $h > 0$  écrite ci-contre.
- (Difficile) On ne suppose plus  $h > 0$ , pour quelles valeurs de  $A$  et  $h$  la fonction  $\text{seuil}(A, h)$  retourne-t-elle une valeur?

```
def seuil(A, h)
    x = 1
    y = 5
    while y <= A :
        x = x + h
        y = 3 * x ** 2 - 2 * x + 4
    return x
```



## Continuité

### Définition

||  $f$  est une fonction définie sur un intervalle  $I$ ,  $a$  est un réel de  $I$ .  
 Dire que  $f$  est **continue en**  $a$  signifie que  $f$  admet une limite en  $a$  égale à  $f(a)$ .

On parle de définition par les limites dans le programme.

### Utilisations :

- $f$  est une fonction continue en un réel  $\ell$  et  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite qui converge vers  $\ell$ . Montrer que la suite  $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $f(\ell)$ .
- Pour montrer qu'une fonction n'est pas continue, on utilise souvent la caractérisation séquentielle de la continuité. L'exercice suivant a pour but de montrer la discontinuité en revenant à la définition avec les intervalles.  
 Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = 0$  si  $x < 0$  et  $f(x) = 1$  si  $x \geq 0$ .
  - Tracer la courbe représentative de  $f$ .
  - On prend  $I = ]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[$ , montrer que  $f(0) \in I$ .

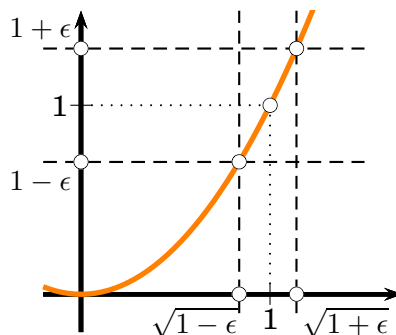
(c) Soit  $x < 0$ , a t-on  $f(x) \in I$ ?

(d)  $f$  est-elle continue en 0?

3. Prouver que  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^2$  est continue en 1.

$f(1) = 1$ , donc  $f$  continue en 1  $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1} x^2 = 1$ .

Ce qui, en Terminale, se traduit par : « tout intervalle ouvert contenant 1, contient les images  $f(x)$  pour  $x$  suffisamment proche de 1 ».



On peut commencer par  $\epsilon = 0,1$  puis dans le cas général, pour  $\epsilon > 0$ . On résout  $1 - \epsilon < x^2 < 1 + \epsilon$  (E)

- $\epsilon > 1$  : pour  $0 \leq x < \sqrt{1 + \epsilon}$ , l'encadrement (E) est vérifié;
- $0 < \epsilon \leq 1$  : pour  $\sqrt{1 - \epsilon} < x < \sqrt{1 + \epsilon}$ , l'encadrement (E) est vérifié; (les deux fois par croissance de la fonction carré sur  $[0; +\infty[$ )

Ainsi pour  $x$  suffisamment proche de 1 (c'est-à-dire pour tout  $x \in ]\sqrt{1 - \epsilon}, \sqrt{1 + \epsilon}[$ ), l'intervalle  $]1 - \epsilon; 1 + \epsilon[$  contient les images  $f(x)$  et  $f$  est continue en 1.



## II Enseignement supérieur

### Limites de suites

**Définition**

Soit  $\ell \in \mathbb{R}$ , la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers le nombre réel  $\ell$  lorsque

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \Rightarrow |u_n - \ell| \leq \epsilon)$$

**Utilisations :**

Terminale et première année enseignement supérieur.

1(a) Soit  $\epsilon$  un réel strictement positif. Résoudre dans  $\mathbb{N}$  l'inéquation

$$\frac{2n + 1}{n + 1} \geq 2 - \epsilon$$

(b) Prouver que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\frac{2n + 1}{n + 1} \leq 2$ .

(c) Existe-t-il un entier  $N$  tel que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,

$$n \geq N \Rightarrow \left| \frac{2n + 1}{n + 1} - 2 \right| \leq \epsilon ?$$

Que peut-on en déduire pour la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ?

2. Soit la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par

$$u_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \notin \{10^q, q \in \mathbb{N}\} \\ 1 & \text{si } n \in \{10^q, q \in \mathbb{N}\} \end{cases}$$

La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est-elle convergente?

Utilisation « compliquée » de la définition au lycée, plus précisément de celle d'un intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$ .

Les exercices qui suivent sont du niveau de première année enseignement supérieur.

• ○ •

**Exercice 4.** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite et  $\ell$  un réel.

1) Rappeler la définition vue en cours de  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ .

Réponse attendue :  $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \Rightarrow |u_n - \ell| < \epsilon)$ .

2) Au lycée la définition de  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$  est :

« Pour tout intervalle ouvert  $I$ , contenant  $\ell$ , il existe  $N$  entier tel que si  $n \geq N$  alors  $u_n \in I$ . »

Comment choisir l'intervalle  $I$  pour que  $u_n \in I$  implique  $|u_n - \ell| < \epsilon$ ?

3) Soit  $I = ]a, b[$  un intervalle ouvert contenant  $\ell$ , comment choisir  $\epsilon > 0$  pour que  $|u_n - \ell| < \epsilon$  implique  $u_n \in I$ ? (indication : on pourra s'aider d'un dessin)

• ○ •

**Exercice 5.** (Moyenne de Cesaro)

Soit  $(u_n)_{n \geq 1}$  une suite, on définit pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k$ .

1) Montrer que si la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  converge vers  $\ell$  alors la suite  $(v_n)_{n \geq 1}$  converge vers  $\ell$ .

2) La réciproque est-elle vraie?

• ○ •

**Exercice 6.** Soit  $(u_n)$  une suite à valeurs dans  $\mathbb{N}$ . Montrer que la suite converge si et seulement si elle est constante à partir d'un certain rang.

• ○ •

## Limite finie en un point et continuité

### Des définitions

Soit  $I$  un intervalle et  $x_0$  un point de  $I$  ou une extrémité.  $f$  une fonction définie sur  $I$  ou sur  $I \setminus \{x_0\}$ .

► **Formulation 1 :**

$\left\| \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \\ \text{Tout intervalle ouvert contenant } \ell, \text{ contient } f(x) \text{ pour } x \text{ assez proche de } x_0. \end{array} \right.$

► **Formulation 2 :**

$\left\| \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \\ \forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \quad |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - \ell| < \epsilon. \end{array} \right.$

► **Formulation 3 :**

$\left\| \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \\ \forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \setminus \{x_0\} \quad |x - x_0| \leq \delta \implies |f(x) - \ell| \leq \epsilon. \end{array} \right.$

• ○ •



Les formulations 1 et 2 sont équivalentes, ce n'est pas le cas de la formulation 3 lorsque  $f$  est définie sur  $I$  contenant  $x_0$ . En effet lorsque  $I$  contient  $x_0$ , avec les formulations 1 et 2, si la limite existe alors elle est nécessairement égale à  $f(x_0)$  alors qu'elle peut-être différente de  $f(x_0)$  avec la formulation 3.

La formulation 3 est de moins en moins utilisée, en particulier elle est bannie en classes préparatoires.

Pour le calcul du nombre dérivé, on est dans le cas d'une fonction définie sur  $I \setminus \{x_0\}$ .

Pour les calculs de limite à droite (resp. gauche) on considère la restriction de la fonction  $f$  à  $I \cap ]x_0, +\infty[$  (resp.  $I \cap ]-\infty, x_0[$ ).

### Définition

$f$  est une fonction définie sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ ,  $a$  est un réel de  $I$ .

$f$  est **continue en**  $a$  lorsque,

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I, (|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon)$$

Avec les formulations 1 et 2 de limite en un point, il est important de remarquer que  $f$  continue en  $a$  équivaut à  $f$  admet une limite en  $a$ .

### Utilisations :

1. Prouver que  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^2$  est continue en 1.

$$f(1) = 1.$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, |x^2 - 1| = |(x - 1)^2 + 2(x - 1)| \text{ et } |(x - 1)^2 + 2(x - 1)| \leq |x - 1|^2 + 2|x - 1|$$

$$\text{De plus } |x - 1| < \delta \Rightarrow |x - 1|^2 + 2|x - 1| < \delta^2 + 2\delta$$

Ainsi, si  $\delta < 1$  alors  $\delta^2 + 2\delta < 3\delta$ , d'où  $|x^2 - 1| < 3\delta$ . Le choix de  $\delta = \min\left(1, \frac{\epsilon}{3}\right)$  permet de vérifier la définition et  $f$  est continue en 1.

2. Toujours pour prouver que  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^2$  est continue en 1 de façon directe.

Pour  $0 < \epsilon < 1$ , on cherche  $\delta > 0$  tel que

$$]1 - \delta, 1 + \delta[ \subset ]\sqrt{1 - \epsilon}, \sqrt{1 + \epsilon}[.$$

Le « meilleur  $\delta$  possible » est

$$\delta = \min\{1 - \sqrt{1 - \epsilon}, \sqrt{1 + \epsilon} - 1\}.$$

L'astuce de calcul précédent donnait une autre valeur possible pour  $\delta$ , en effet il **suffit** de trouver une valeur qui convienne.





# Chapitre 4

## Dérivation

### I Lycée

#### Des définitions

##### ► En 1ère spécialité :

- Le **taux de variation** de la fonction  $f$  entre  $a$  et  $a + h$  est le nombre  $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ .
- Soit  $a \in \mathbb{R}$ .  $f$  est définie sur un intervalle ouvert contenant  $a$ . On dit que la fonction  $f$  est **dérivable en  $a$**  lorsque le nombre  $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$  tend vers un réel lorsque  $h$  tend vers 0. Ce nombre limite est appelé **nombre dérivé de  $f$  en  $a$**  et se note  $f'(a)$ .

##### ► En 1ère technologique :

$f$  est une fonction définie sur un intervalle  $I$ ,  $a$  et  $b$  sont deux nombres distincts de  $I$ .  
Le **taux de variation de la grandeur**  $y = f(x)$  est le nombre  $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ .

*Remarque : L'expression « taux de variation » crée des confusions chez les élèves car les professeurs de SES et de gestion l'emploie pour qualifier le taux d'évolution entre deux grandeurs  $V_1$  et  $V_2$ .*

*Dans les programmes de 2000 et 2009, on parle de la limite quand  $h$  tend vers 0 de  $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$  mais on ne lui donne pas de nom. Dans celui de 1995 et des précédents,  $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$  est appelé **taux d'accroissement de  $f$  entre  $a$  et  $a + h$** . Il en est de même dans les derniers documents d'accompagnement.*

• ○ •

#### Utilisations :

1. (Première) On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^*$  par  $f(x) = 1 + \frac{3}{x}$ . Prouver que  $f$  est dérivable en 5 et donner la valeur de  $f'(5)$ .
2. L'objectif de l'exercice suivant est de travailler sur le nombre dérivé, les dérivées des fonctions usuelles sont supposées connues.

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^n - 1}{x - 1} \quad \text{pour tout entier naturel } n \neq 0.$$

• ○ •

## II Enseignement supérieur

### Des définitions

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  et  $a$  un point de  $I$ .

► **Formulation 1 :**

||  $f$  est dérivable en  $a$  lorsque la fonction  $x \mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ , définie sur  $I \setminus \{a\}$ , admet une limite finie lorsque  $x$  tend vers  $a$ .

► **Formulation 2 :**

||  $f$  est dérivable en  $a$  lorsque la fonction  $h \mapsto \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ , définie sur un voisinage de 0 privé de 0, admet une limite finie lorsque  $h$  tend vers 0.

► **Formulation 3 :**

||  $f$  est dérivable en  $a$  lorsque la fonction  $f$  admet un développement limité d'ordre 1 en  $a$ .

### Utilisations : (Ens. supérieur)

1.  $f$  est dérivable en  $a$  alors  $f$  est continue en  $a$  (connaissance de la définition de la continuité de  $f$  en  $a$ ).
2. La justification de la dérivabilité de  $\frac{1}{f}$  en  $a$  si  $f(a) \neq 0$  et  $f$  dérivable en  $a$ .

*Remarque : en 2<sup>ième</sup> ou 3<sup>ième</sup> année post-bac on reviendra à la définition de la dérivée en un point pour démontrer la dérivabilité des intégrales à paramètres mais cela reste un moment de l'enseignant.*



# Chapitre 5

## Convexité

### I Lycée

#### Définition

*Terminale spécialité, Indices.*

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  et  $C_f$  sa courbe représentative.

On dit que  $f$  est **convexe** sur  $I$  lorsque pour tous points distincts  $A$  et  $B$  de  $C_f$ , la courbe  $C_f$  est située « au-dessous » du segment  $[AB]$ .

On dit que  $f$  est **concave** sur  $I$  lorsque  $-f$  est convexe sur  $I$ .

Utilisations : (Terminale)

1. On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = (x - 1)^2 + 2$ . Prouver que  $f$  est convexe sur  $\mathbb{R}$ .

Soit  $A(a, f(a))$  et  $B(b, f(b))$  deux points quelconques de  $C_f$  (on fixe  $a < b$ ).

- ▷ On détermine une équation de la droite  $(AB)$  .....  $y = (a + b - 2)x + 3 - ab$ ;
- ▷ Soit  $x \in [a, b]$ . On prouve que  $f(x) - [(a + b - 2)x + 3 - ab] \leq 0$ ;

2. En sachant que la fonction  $\sin$  est concave sur  $[0, \frac{\pi}{2}]$ , établir que, pour tout  $x$  réel de  $[0, \frac{\pi}{2}]$ ,  $\sin(x) \geq \frac{2}{\pi}x$ .
3. (Une variante possible de la question précédente) Existe-t-il  $a > 0$  tel que pour tout  $x$  réel de  $[0, \frac{\pi}{2}]$ ,  $\sin(x) \geq ax$ ? Trouver la plus grande valeur possible de  $a$ .
4. Avec un argument de concavité ou convexité, démontrer que, pour tout  $x$  réel,  $e^x \geq x + 1$ .  
*Ici, on travaille une propriété (admise) : « Lorsque  $f$  est  $C^1$  sur  $I$ ,  $f$  convexe sur  $I$  équivaut à la courbe représentative de  $f$  est située au-dessus de chacune de ses tangentes sur  $I$ . »*



### II Enseignement supérieur

#### Définition

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$   
 $f$  est **convexe sur**  $I$  lorsque

$$\forall (x, y) \in I^2, \forall t \in [0, 1], f(tx + (1 - t)y) \leq tf(x) + (1 - t)f(y).$$

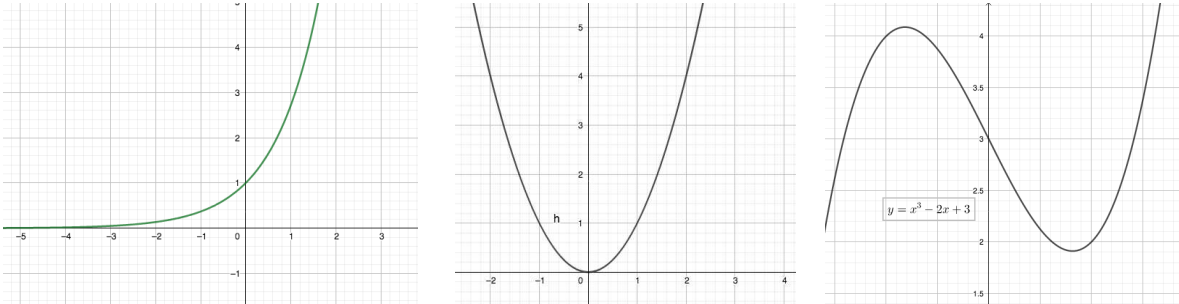
*Motivation a priori ou a posteriori :*

$f$  est convexe sur  $I$  si pour tout  $(x, y) \in I^2$  le graphe de  $f$  entre les points d'abscisses  $x$  et  $y$  est en dessous de la corde joignant les points de coordonnées  $(x, f(x))$  et  $(y, f(y))$ .

La caractérisation géométrique de la convexité permet la transition avec la définition vue au lycée. On a tout de même ici un exemple de rupture entre le lycée et le supérieur puisque dans le supérieur c'est la définition analytique de la convexité d'une fonction qui est en général privilégiée.

### Utilisations :

1. En utilisant un dessin justifier l'interprétation géométrique de la définition.
  2. Utilisation de la définition.  
Etudier la convexité des fonctions définies sur  $\mathbb{R}$  par  $f_1(x) = ax + b$  où  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ ,  $f_2(x) = |x|$ ,  $f_3(x) = x^2$ .
  3. Utilisation de la la définition (au lycée) ou de l'interprétation géométrique (supérieur).
- (a) Les dessins suivants sont les graphes de fonctions. Etudier les intervalles sur lesquels la fonction est convexe.



Remarque : Le troisième graphique oblige l'élève ou l'étudiant à préciser les intervalles sur lesquels la fonction est convexe ou concave.

- (b) La fonction  $f$  définie par  $f(x) = 2$  si  $x < 0$  et  $f(x) = x$  si  $x \geq 0$  est-elle convexe? On pourra faire une conjecture graphique puis donner une justification en revenant à la définition.
4. Soient  $f$  et  $g$  des fonctions convexes sur  $I$ . Démontrer que  $f + g$  est convexe sur  $I$ .
  5. Soient  $f$  une fonction convexe sur  $I$  à valeurs dans  $J$  et  $g$  une fonction convexe et croissante sur  $J$ . Démontrer que  $g \circ f$  est convexe sur  $I$ .
  6. Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction convexe sur  $I$  et  $x < y < z$  trois points de  $I$ . Visualiser sur un dessin les inégalités suivantes :

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(x)}{z - x}, \quad \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}$$

Puis les démontrer en utilisant la définition de la convexité.

7. Application (cette partie est plus souvent traitée par l'enseignant ou fait l'objet d'un devoir maison).  
Soit  $I$  un intervalle **ouvert** de  $\mathbb{R}$ ,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction convexe sur  $I$  et  $\alpha < a < x < y < b < \beta$  des points de  $I$ .
  - Comparer  $\frac{f(a) - f(\alpha)}{a - \alpha}$ ,  $\frac{f(y) - f(x)}{y - x}$ ,  $\frac{f(\beta) - f(b)}{\beta - b}$ .
  - En déduire que  $f$  est lipschitzienne sur le segment  $[a, b]$  puis en déduire que  $f$  est continue sur  $I$ .

### Suites possibles toujours avec $I$ intervalle ouvert :

- Existence de dérivée à droite et à gauche en tout point de  $I$ .
- Si  $f$  est dérivable sa dérivée est croissante et le graphe de  $f$  est au dessus de ses tangentes.
- Application aux inégalités de convexité.
- Si  $f$  admet une dérivée seconde sur  $I$ ,  $f$  est convexe si et seulement si  $f''$  est positive.

On pourra consulter l'épreuve 1 du concours du CAPES de mathématiques session 2022 dans lequel un problème était consacré à la convexité.

[https://capes-math.org/data/uploads/ecrits/ep1\\_2022.pdf](https://capes-math.org/data/uploads/ecrits/ep1_2022.pdf)

De nombreuses questions sont similaires à celles proposées ci-dessus. On pourra en particulier remarquer que la définition retenue d'une fonction convexe est la définition universitaire avec l'inégalité de convexité.

# Chapitre 6

## Produit scalaire

### I Lycée

#### Des définitions

Selon le choix de l'enseignant il est pris comme définition du produit scalaire l'une des deux définitions ci-dessous.

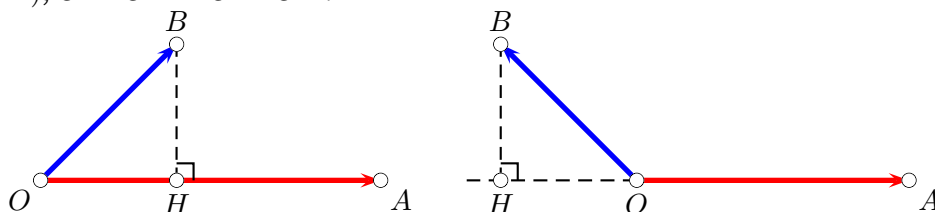
#### ► Formulation 1 :

Soient  $O, A$  et  $B$  trois points du plan. Le produit scalaire de  $\vec{OA}$  par  $\vec{OB}$  est le réel noté  $\vec{OA} \cdot \vec{OB}$  et est défini par

- si  $O, A$  et  $B$  sont alignés,

$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = \begin{cases} OA \times OB & \text{lorsque } \vec{OA} \text{ et } \vec{OB} \text{ sont de même sens} \\ -OA \times OB & \text{lorsque } \vec{OA} \text{ et } \vec{OB} \text{ sont de sens opposé} \end{cases}$$

- si  $O, A$  et  $B$  ne sont pas alignés, on note  $H$  est le projeté orthogonal de  $B$  sur la droite  $(OA)$ ,  $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = \vec{OA} \cdot \vec{OH}$ .



Si  $\vec{OA}$  et  $\vec{OH}$  sont de même sens,  
alors  $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = OA \times OH$

Si  $\vec{OA}$  et  $\vec{OH}$  sont de sens opposé,  
 $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = -OA \times OH$

#### ► Formulation 2 :

Si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont deux vecteurs non nuls, alors

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$$

#### Propriété

Dans le plan muni d'un repère orthonormal  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ , le produit scalaire de deux vecteurs  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

et  $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$  est donné par

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$$

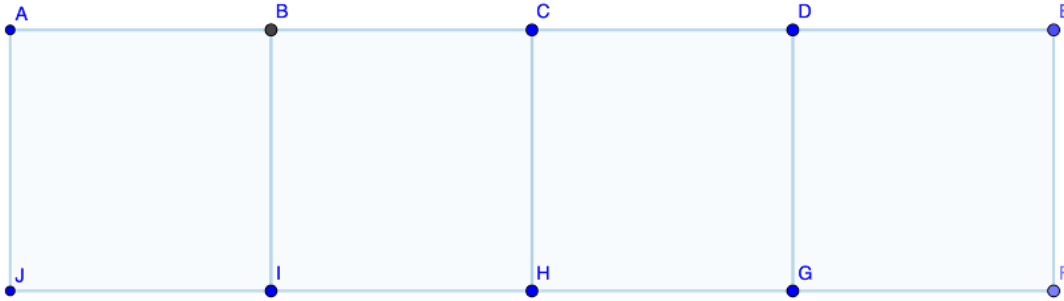
**Remarque 1** Dans les précédents programmes du secondaire, cette propriété pouvait être prise comme définition du produit scalaire.

**Utilisations :**

1. Pour faire travailler une définition et les propriétés du produit scalaire.

On considère la figure ci-dessous.

Le rectangle  $AEFJ$  est constitué de 4 carrés de cotés de longueur  $a$  unités.



(a) Calculer les produits scalaires suivants

$$\begin{array}{ll} \vec{AB} \cdot \vec{IJ} & \vec{AI} \cdot \vec{BJ} \\ \vec{JB} \cdot \vec{JI} & \vec{JC} \cdot \vec{JH} \\ \vec{AB} \cdot \vec{AI} & \vec{AI} \cdot \vec{IB} \\ \vec{IH} \cdot \vec{CF} & \vec{AI} \cdot \vec{BJ} \end{array}$$

On utilise une définition et les propriétés du produit scalaire

(b) i. Calculer  $\vec{ID} \cdot \vec{IG}$ , lorsque  $a = 3$  unités de longueur.

ii. En déduire la mesure de l'angle  $\widehat{DIG}$ . Dépend-elle de la valeur de  $a = 3$ ?

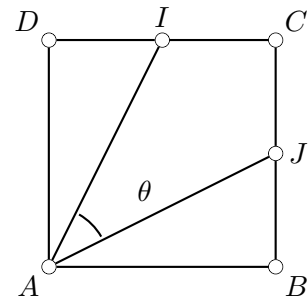
On utilise les deux définitions possibles du programme officiel

2. Pour faire travailler une définition et les propriétés ainsi que le choix d'un repère.

$ABCD$  est un carré de côté  $a$ .

$I$  et  $J$  sont les milieux respectifs des côtés  $[DC]$  et  $[BC]$ .

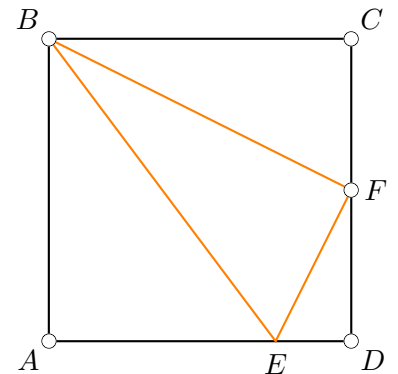
Déterminer la mesure de l'angle  $\theta$ .



$ABCD$  est un carré.

$F$  est le milieu de  $[DC]$  et  $E$  un point de  $[AD]$  tel que  $AE = \frac{3}{4}AD$ .

Quelle est la nature du triangle  $BEF$ ?



## II Enseignement supérieur

À rebours de ce qui est fait lycée, c'est la définition du produit scalaire qui inaugure la géométrie de l'enseignement supérieur dans le cadre des espaces préhilbertiens réels. Il est introduit comme une forme bilinéaire symétrique définie positive sur un espace vectoriel réel.



## Définition

Un **produit scalaire** sur un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $E$  est une application  $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  telle que :

- $\varphi$  est **bilinéaire**, i.e. :

$$\forall v \in E, \forall (u_1, u_2) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{R},$$

$$\varphi(\lambda u_1 + u_2, v) = \lambda \varphi(u_1, v) + \varphi(u_2, v)$$

$$\forall u \in E, \forall (v_1, v_2) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{R},$$

$$\varphi(u, \lambda v_1 + v_2) = \lambda \varphi(u, v_1) + \varphi(u, v_2).$$

- $\varphi$  est **symétrique**, i.e. :

$$\forall (u, v) \in E^2, \varphi(u, v) = \varphi(v, u).$$

- $\varphi$  est **définie positive**, i.e. :

$$\forall u \in E, \varphi(u, u) \geq 0 \quad \text{et} \quad \varphi(u, u) = 0 \implies u = 0_E.$$

On convient souvent de noter le produit scalaire de deux vecteurs  $u$  et  $v$  de la manière suivante :

$$\langle u|v \rangle = \varphi(u, v).$$

C'est à partir du produit scalaire que sont définis les notions de distance, d'orthogonalité et d'angles.

## Définitions

- La **norme** d'un vecteur  $u$  de  $E$  est définie par :

$$\|u\| = \sqrt{\langle u|u \rangle}.$$

- Deux vecteurs  $u$  et  $v$  sont dits **orthogonaux** lorsque  $\langle u|v \rangle = 0$ .
- L'angle  $\widehat{(u, v)}$  non orienté de vecteurs  $u$  et  $v$  non nuls est défini par :

$$\cos \widehat{(u, v)} = \frac{\langle u|v \rangle}{\|u\| \|v\|}.$$

Des théorèmes usuels de la géométrie euclidienne du plan peuvent s'obtenir comme une application plus ou moins immédiate de la définition de produit scalaire.

Par exemple, le **théorème de Pythagore**, s'obtient avec l'égalité :

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2 \langle u|v \rangle$$

de sorte que  $u$  et  $v$  sont orthogonaux si et seulement si  $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$ .

L'**identité de polarisation** sous la forme :

$$\langle u + v|u - v \rangle = \|u\|^2 - \|v\|^2$$

permet de voir qu'un parallélogramme (construit sur les vecteurs  $u$  et  $v$ ) est un losange si et seulement si ses diagonales sont perpendiculaires.

On trouvera bien d'autres exemples dans « *La géométrie élémentaire d'Euclide à aujourd'hui* » (Yves Cou-dène, Ed. Calvage et Mounet, chapitre VI. Les avatars de la géométrie euclidienne) où l'auteur s'emploie à obtenir de nombreux résultats de géométrie élémentaire à l'aide de relations sur les produits scalaires.

L'occasion de revenir à la vision géométrique du lycée est donnée avec la question de la détermination de la distance d'un vecteur  $u$  à un sous-espace vectoriel  $F$  (de dimension finie) lorsqu'on montre que :

$$\min\{\|u - v\|, v \in F\} = \|u - p_F(u)\|$$

où  $p_F(u)$  désigne le projeté orthogonal de  $u$  sur  $F$ .



# Chapitre 7

## Bornes supérieure et inférieure, extrema

### I Maximum

Au lycée on définit uniquement le maximum et le minimum d'une fonction sur un intervalle, cela est vu en classe de seconde.

#### Des définitions

##### Définition (maximum, minimum d'une fonction)

Le **maximum** (respectivement **minimum**) d'une fonction  $f$  sur un intervalle  $[a, b]$  est, s'il existe, la plus grande (respectivement plus petite) valeur des images  $f(x)$  pour tout réel  $x$  appartenant à  $[a, b]$ .

La détermination d'un extremum se fait en général par lecture du tableau de variation de la fonction. En première après des exemples de mise sous forme canonique d'une fonction polynomiale du second degré, il est retenu que le maximum (ou bien minimum) est atteint en «  $-\frac{b}{2a}$  ».



Dans le supérieur : on définit plus généralement le maximum d'un ensemble (muni d'une relation d'ordre).

##### Définition (maximum, minimum)

Soit  $A$  une partie non vide de  $\mathbb{R}$ .

- Un réel  $\alpha$  est un **plus grand élément** de  $A$  s'il appartient à  $A$  et s'il est un majorant de  $A$ , c'est-à-dire

$$\alpha \in A \text{ et } \forall x \in A \quad x \leq \alpha.$$

S'il existe, le plus grand élément est unique, on le note alors  $\max A$ .

- Le **plus petit élément** de  $A$ , noté  $\min A$ , s'il existe est le réel  $\alpha$  tel que  $\alpha \in A$  et  $\forall x \in A \quad x \geq \alpha$ . C'est-à-dire, c'est un élément de  $A$  qui est un minorant de  $A$ .

Le plus grand élément s'appelle aussi le *maximum* et le plus petit élément, le *minimum*. Il faut garder à l'esprit que le plus grand élément ou le plus petit élément n'existent pas toujours.

#### Utilisations :

**Exercice 7.** Prototype d'exercice obligeant à faire le lien entre maximum / minimum d'une fonction sur un intervalle et maximum / minimum d'un ensemble.

- 1) Soit la fonction  $f$  définie sur  $[1, +\infty[$  par  $f(x) = \frac{4}{x} - 3$ , donner son tableau de variation.
  - a) La fonction  $f$  admet-elle un maximum ou un minimum sur  $[1, 2[$ ? Si oui le déterminer.
  - b) La fonction  $f$  admet-elle un maximum ou un minimum sur  $[1, +\infty[$ ? Si oui le déterminer.
  - c)  $A = f([1, 2]) = \{\frac{4}{x} - 3, x \in [1, 2]\}$  admet-il un maximum ou un minimum? Si oui le déterminer.
  - d)  $A' = f([1, +\infty]) = \{\frac{4}{x} - 3, x \in [1, +\infty]\}$  admet-il un maximum ou un minimum? Si oui le déterminer.

2) Pour étudier l'existence d'un maximum ou d'un minimum pour

$$B = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in ]-2, 3], y = (x + 1)^2\}$$

quelle fonction peut-on considérer et sur quel intervalle? En déduire si  $B$  admet un maximum ou un minimum et le déterminer le cas échéant.

3) Pour étudier l'existence d'un maximum ou d'un minimum pour

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists n \in \mathbb{N}^*, x = 1 - \frac{1}{n}\}$$

quelle suite peut-on considérer? En déduire si  $D$  admet un maximum ou un minimum et le déterminer le cas échéant.



**Exercice 8.** *Des propriétés qui sont rarement mises en valeur mais qui conduisent à une méthode possible pour démontrer des inégalités sur des maximum / minimum. On les utilise par exemple lors de la détermination de la loi du maximum de variables aléatoires indépendantes.*

1) Soit  $A$  une partie non vide de  $\mathbb{R}$  admettant un maximum. Soit  $a \in \mathbb{R}$ , les équivalences suivantes sont-elles vraies? Lorsqu'il n'y a pas équivalence, préciser si l'une des implications est vraie.

a)

$$(\forall x \in A, x \leq a) \Leftrightarrow \max A \leq a.$$

b)

$$(\forall x \in A, x \geq a) \Leftrightarrow \max A \geq a.$$

2) Soit  $B$  une partie non vide de  $\mathbb{R}$  admettant un minimum. Soit  $b \in \mathbb{R}$ , montrer que

$$(\forall x \in B, x \geq b) \Leftrightarrow \min B \geq b.$$

3) Soient  $C$  et  $D$  deux parties non vides ayant chacune un plus grand élément. Montrer que si  $C \subset D$  alors  $\max C \leq \max D$ .

*Dans le supérieur on travaille très peu sur les notions de plus grand et plus petit élément avant d'aborder les notions de bornes supérieures et inférieures. Une des raisons est probablement la volonté d'éviter de donner des réflexes qui ne seront pas adaptés dans le cas où ces bornes ne sont pas atteintes. Une conséquence de cet usage est que les étudiants sont peu habitués à majorer et minorer. Une question présente dans la partie suivante qui a aussi sa place ici.*



**Exercice 9.**

1) Donner un exemple de deux parties  $A$  et  $B$  de  $\mathbb{R}$ , admettant chacune un plus petit élément (respectivement plus grand élément) mais pas  $A \cap B$ .

2) Peut-on trouver deux parties  $A$  et  $B$  de  $\mathbb{R}$ , admettant chacune un plus petit élément (respectivement plus grand élément) mais pas  $A \cup B$ ?



## II Borne supérieure, borne inférieure

Ces notions ne sont étudiées que dans le supérieur.

On peut y préparer un peu au lycée à l'occasion de l'étude de suites monotones convergentes en ajoutant une question sur l'égalité ou non de la limite avec un terme de la suite.

On peut aussi à l'occasion de l'étude d'une suite décroissante et minorée, parler de l'ensemble des minorants de la suite et demander de conjecturer la limite.

Un exemple moins classique est la suite de Erdős  $0,2 \ 0,23 \ 0,235 \ 0,2357$  etc,  $u_n$  a pour développement décimal

$0, p_1 p_2 \dots p_n$  où  $(p_i)_i$  est la suite croissante des nombres premiers. Il peut être formateur de faire chercher des majorants et de demander une conjecture sur la limite.

### Des définitions et propriétés caractéristiques

#### Définition (Borne supérieure, borne inférieure)

Soit  $A$  une partie non vide de  $\mathbb{R}$  et  $\alpha$  un réel.

1.  $\alpha$  est la **borne supérieure** de  $A$  si  $\alpha$  est un majorant de  $A$  et si c'est le plus petit des majorants. S'il existe on le note  $\sup A$ .
2.  $\alpha$  est la **borne inférieure** de  $A$  si  $\alpha$  est un minorant de  $A$  et si c'est le plus grand des minorants. S'il existe on le note  $\inf A$ .

En même temps que sont données les définitions de bornes supérieures et inférieures, le résultat suivant est souvent admis.

#### Théorème

Par construction de  $\mathbb{R}$ , toute partie non vide et majorée (resp. minorée) de  $\mathbb{R}$  admet une borne supérieure (resp. inférieure).

#### Proposition 1 (Caractérisation de la borne supérieure)

Soit  $A$  une partie non vide et majorée de  $\mathbb{R}$ . La borne supérieure de  $A$  est l'unique réel  $\alpha$  tel que

- (i) si  $x \in A$ , alors  $x \leq \alpha$ ,
- (ii) pour tout  $y < \alpha$ , il existe  $x \in A$  tel que  $y < x$ .
- (ii)' pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $x \in A$  tel que  $\alpha - \varepsilon < x$ .

#### Proposition 2 (Caractérisation par les suites)

Soit  $A$  une partie non vide et majorée de  $\mathbb{R}$ . La borne supérieure de  $A$  est l'unique réel  $\alpha$  tel que

- (i)  $\alpha$  est un majorant de  $A$ ,
- (ii) il existe une suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $A$  qui converge vers  $\alpha$ .

#### Remarque

- On peut remarquer que la propriété 1 est plutôt une re-écriture quantifiée de la définition. Elle va permettre un travail algébrique avec les bornes supérieures et inférieures.
- La propriété 2 de caractérisation par les suites, peut-être vue comme une méthode de l'analyse où le « pour tout  $\varepsilon > 0$  » est remplacé par « pour tout  $\frac{1}{n}$  avec  $n \in \mathbb{N}^*$  »
- A ce stade il a en général aussi été montré que si l'ensemble  $A$  a un plus grand élément alors cet élément est la borne supérieure de  $A$ .

### Utilisations :

Les exercices que l'on propose usuellement utilisent la définition ou l'une des deux propriétés caractéristiques que l'on peut donc voir comme des méthodes.

#### Exercices de familiarisation avec la définition.

**Exercice 10.** Pour chacun des ensembles  $A, B, C$  et  $D$  suivants

$$A = \{0, 1, 3, 15, -7\}, \quad B = [-1, 3], \quad C = ]2, 3], \quad D = ]-2, 3] \cup [4, 5[.$$

dire

- s'ils sont majorés ou minorés,
- s'ils ont un plus grand ou un plus petit élément; si oui le préciser,
- s'ils ont une borne supérieure ou une borne inférieure.

**Exercice 11.** Pour chacun des ensembles suivants, montrer qu'il est borné puis déterminer la borne supérieure (préciser si c'est un maximum) et la borne inférieure (préciser si c'est un minimum).

$$A = \left\{ \frac{4}{x} - 3, x \in [1, 2[ \right\}; \quad B = \{-2\} \cup ]0, 3] \cup \{4\}; \quad A \cap B.$$

*Exercice qui peut servir à faire le lien avec les études de fonctions ou de suites (cf. paragraphe précédent).*

• ○ •

**Exercice 12.** Etudier l'existence des bornes inférieure et supérieure des ensembles suivants. Les déterminer si elles existent et préciser s'il s'agit d'un maximum ou d'un minimum.

$$\begin{aligned} A &= \left\{ y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in ]1, 3], y = \frac{1}{x} \right\}, \\ B &= \{(x+1)^2, x \in ]-2, 3]\}, \\ C &= \{z \in \mathbb{R} \mid \exists n \in \mathbb{N}, z = n^2 + 1\}, \\ D &= \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \exists n \in \mathbb{N}^*, x = 1 - \frac{1}{n} \right\}. \end{aligned}$$

• ○ •

*Un exercice qui se résout en utilisant la propriété 2.*

**Exercice 13.** Soit  $f$  l'application définie sur  $]0, +\infty[$  par  $f(x) = \frac{1}{x+2} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ . Montrer que  $A = f(]0, +\infty[)$  est borné et que  $\sup(A) = \frac{1}{2}$ . Déterminer de même  $\inf(B)$ .

**Exercices nécessitant de revenir à la définition de borne supérieure.**

*La borne supérieure pouvant ne pas être atteinte, tout travail de type algébrique la faisant intervenir nécessite d'utiliser l'une des propriétés caractéristiques. Certaines égalités ou inégalités entre bornes supérieures et inférieures peuvent être montrées directement à partir de la définition.*

• ○ •

**Exercice 14.** Soit  $A$  une partie non vide et majorée de  $\mathbb{R}$ .

1) Soit  $a \in \mathbb{R}$ , on définit le nouvel ensemble l'ensemble  $a + A = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in A, y = a + x\}$ . Montrer que  $a + A$  admet une borne supérieure et que  $\sup(a + A) = a + \sup(A)$ .

2) Soit  $a \in \mathbb{R}_+$ , on définit le nouvel ensemble l'ensemble  $aA = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in A, y = ax\}$ . Montrer que  $aA$  admet une borne supérieure et que  $\sup(aA) = a \times \sup(A)$ .

Indication : pour la première question commencer par montrer que si  $M$  est un majorant de  $A$  alors  $a + M$  est un majorant de  $a + A$ . Puis montrer l'égalité des bornes supérieures par double inégalité.

• ○ •

**Exercice 15.** Soit  $A$  un ensemble non vide et majoré de  $\mathbb{R}$ . On note  $-A := \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in A, y = -x\}$ , montrer que  $-A$  est minoré puis que  $\inf(-A) = -\sup(A)$ .

• ○ •

**Exercice 16.**

1) Soient  $C$  et  $D$  deux parties non vides, minorées et majorées. On suppose de plus que  $C \subset D$ . Montrer que

$$\inf(D) \leq \inf(C) \leq \sup(C) \leq \sup(D).$$

2) Soient  $A$  et  $B$  deux parties de  $\mathbb{R}$  non vides, minorées et majorées. Montrer que si  $A \cap B$  est non vide, cet ensemble admet une borne supérieure et une borne inférieure et que l'on a les inégalités

$$\max\{\inf(A), \inf(B)\} \leq \inf(A \cap B) \leq \sup(A \cap B) \leq \min\{\sup(A), \sup(B)\}.$$

Donner un exemple où les inégalités sont strictes.

3) Donner un exemple où  $A$  et  $B$  admettent chacun un plus petit élément (respectivement plus grand élément) mais pas  $A \cap B$ .

*Dans l'exercice suivant, une difficulté s'ajoute due au fait que l'on montre une égalité en montrant une double inégalité.*

• ○ •

**Exercice 17.** Soient  $A$  et  $B$  deux parties de  $\mathbb{R}$  non vides, minorées et majorées.

1) Montrer que  $A \cup B$  admet une borne supérieure et que :

$$\sup(A \cup B) = \max\{\sup(A), \sup(B)\}.$$

2) Montrer que  $A \cup B$  admet une borne inférieure et que :

$$\inf(A \cup B) = \min\{\inf(A), \inf(B)\}.$$

3) Peut-on trouver deux ensembles  $A$  et  $B$  admettant chacun un plus petit élément (respectivement plus grand élément) mais pas  $A \cup B$ ?

*Le résultat suivant est utile en L1 par exemple lors de la construction de l'intégrale de Riemann via les fonctions en escaliers. Cet exercice n'est cependant qu'à la portée de bons étudiants de L1.*

• ○ •

**Exercice 18.** Soient  $A$  et  $B$  deux parties non vides de  $\mathbb{R}$  telles que

$$\forall (x, y) \in A \times B, x \leq y$$

Montrer que  $A$  admet une borne supérieure, que  $B$  admet une borne inférieure, et que l'on a  $\sup A \leq \inf B$ .

Indication : on pourra commencer par fixer  $y \in B$  arbitraire et montrer que  $\sup A \leq y$ .

*Pour préparer à la norme sup et à la différence entre un travail ponctuel et uniforme (plutôt de niveau L2).*

• ○ •

**Exercice 19.** Lorsque  $f$  est une fonction définie et bornée sur  $\mathbb{R}$ , on note

$$\sup f = \sup\{f(x), x \in \mathbb{R}\} \quad \inf f = \inf\{f(x), x \in \mathbb{R}\}.$$

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions bornées sur  $\mathbb{R}$ , telles que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) \leq g(x)$ . A t-on toujours

1)  $\sup f \leq \sup g$ ?

2)  $\inf f \leq \inf g$ ?

3)  $\sup f \leq \inf g$ ?

• ○ •

*Dans l'exercice suivant on utilise la définition pour montrer qu'un nombre n'est pas la borne supérieure.*

**Exercice 20. (Borne supérieure dans  $\mathbb{Q}$ )**

On va montrer que l'ensemble de rationnels  $A = \{r \in \mathbb{Q} \mid r^2 \leq 2\}$  est non vide, majoré et n'admet pas de borne supérieure dans  $\mathbb{Q}$ .

1) Justifier que  $A$  est non vide et majoré dans  $\mathbb{Q}$ .

2) On suppose qu'il existe  $\alpha \in \mathbb{Q}$  tel que  $\alpha = \sup(A)$ . En considérant les suites  $(\alpha - \frac{1}{n})$  et  $(\alpha + \frac{1}{n})$ , montrer que les inégalités  $\alpha^2 > 2$  et  $\alpha^2 < 2$  sont fausses.

3) Conclure.

• ○ •