IREM - Dénombrement et combinatoire

Groupe REMSup

2019-2021

• ◯ • ◯ •

Table des matières

Introduction

Dénombrer c'est « compter tous les cas possibles ». Pour cela on peut les lister intégralement ou de façon symbolique mais dans les deux cas il aura fallu auparavant définir le modèle choisi.

Pour le choix du modèle les questions principales à se poser sont

- qu'est-ce qui est discernable ?
- y a t-il de l'ordre ?
- y a t-il répétition ?

Nous commençons par présenter des situations de référence et des façons de les représenter. Puis au travers de divers exemples nous montrons comment s'y ramener et analysons des erreurs possibles.

Nous mettons aussi en évidence les deux grands principes de dénombrement : principe additif et principe multiplicatif.

Ce document se veut progressif, les exemples et exercices sont d'un niveau varié et peuvent être exploités aussi bien au lycée qu'en début d'études supérieures. Ils peuvent aussi être utiles à la formation des futurs enseignants.

Nous nous sommes efforcés de proposer plusieurs résolutions possibles des problèmes présentés en n'oubliant pas le support du dessin.

Bien qu'on y trouve des possibilités d'exploitations directe en classe, le document est plus axé sur la prise de recul pour l'enseignant.

I Modèles de référence, principes additifs et multiplicatifs

I.1 Modèles de référence

Une urne avec n boules numérotées de 1 à n.

Les boules sont discernables puisque numérotées.

- Cas 1 : On tire p boules une à une sans remise et on tient compte de l'ordre dans lequel on les a tirées.
  On peut modéliser le tirage par un p-uplet $(x_1, \ldots, x_p)$ avec $x_i \in [\![1, n]\!]$ sans répétition.
- Cas 2 : On tire p boules une à une sans remise et on ne tient pas compte de l'ordre dans lequel on les a tirées.
  On peut modéliser le tirage par une partie de p-éléments $\{x_1, \ldots, x_p\}$ de l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$.
  On peut déjà remarquer que le tirage simultané (et donc sans ordre) de p boules, sera aussi modélisé ainsi.
- Cas 3 : On tire p boules une à une avec remise et on tient compte de l'ordre dans lequel on les a tirées.
  On peut modéliser le tirage par un p-uplet $(x_1, \ldots, x_p) \in \{1, \ldots, n\}^p$.
- Cas 4 : On tire p boules une à une avec remise et on ne tient pas compte de l'ordre dans lequel on les a tirées.
  On verra plus loin que ce cas est plus dur à modéliser et que l'on va se ramener au cas 2 grâce à une bijection.

I.2 Principes additifs et multiplicatifs

A et B sont deux ensembles finis et non vides.

- Principe additif
$$\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B).$$
Une représentation privilégiée pour ce principe est le diagramme de Venn.
- Principe multiplicatif
$$\text{card}(A \times B) = \text{card}(A) \times \text{card}(B).$$
Une représentation privilégiée pour ce principe est l'arbre où chaque nouvelle ramification peut être traduite en langage courant par « puis ».

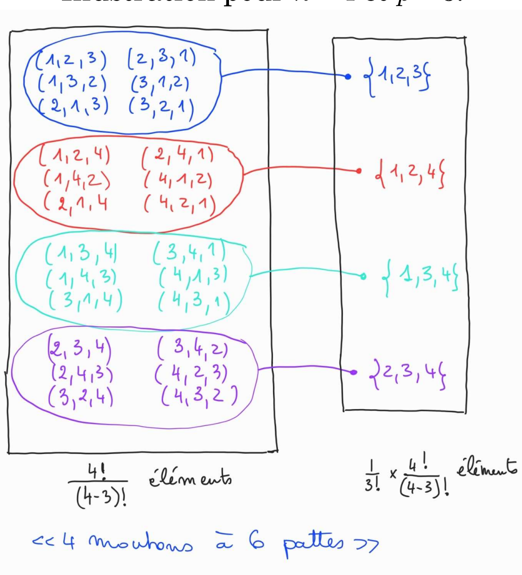
Deux erreurs classiques lors de l'application des ces deux principes sont
- pour le principe additif d'oublier l'intersection et donc de compter deux fois certains objets ;
- de confondre les deux principes en confondant union et produit cartésien (nous en donnerons une illustration lorsque l'on dénombre des chemins passant par un point donné).

Un corollaire souvent utilisé du principe additif est le lemme des bergers : si on partitionne un ensemble de n éléments en r sous ensembles de p éléments chacun alors $n = r \times p$ (pour compter ses moutons le berger compte le nombre de pattes).

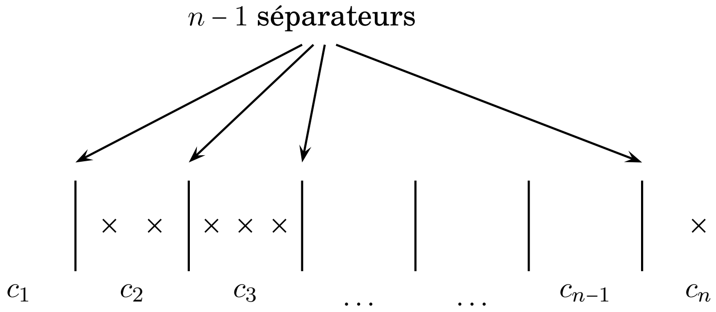
I.3 Dénombrement pour les modèles de référence

- Cas 1 : Pour $p > n$ cette situation ne peut se produire.
Pour $p \leq n$ on a $n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1) = \dfrac{n!}{(n-p)! = A_n^p}$ tirages différents.
C'est le nombre *d'arrangements de p éléments parmi n.*
On peut démontrer ce résultat par récurrence sur n.
- Cas 2 : Pour $p > n$ cette situation ne peut se produire.
Pour $p \leq n$ on a $\dfrac{n!}{(n-p)!p!} = \dbinom{n}{p}$ tirages différents.
C'est le nombre *de combinaisons de p éléments parmi n.*
On peut démontrer ce résultat en partitionnant l'ensemble des p-uplets sans répétition selon les p éléments qui les composent. Avec le lemme des bergers on aura que $\dfrac{n!}{(n-p)!} = N \times p!$ où N est le nombre de sous-ensembles de la partition, soit le nombre de tirages sans remise et sans ordre.

Lemme des bergers pour les combinaisons de p éléments parmi n.
Illustration pour $n = 4$ et $p = 3$.



- Cas 3 : Pour tous entiers p et n on a n^p tirages possibles, c'est une conséquence du principe multiplicatif.
- Cas 4 : Il est possible de visualiser le tirage schématiquement



Une « croix » dans la case libellée c_ℓ ($\ell \in [\![1, n]\!]$) représente le tirage d'une boule numérotée ℓ.
On a $n-1$ séparateurs (pour « matérialiser » les n cases) et p croix à placer soit un total de $n+p-1$ emplacements que l'on notera e_i, $1 \leq i \leq n+p-1$ et $E = \{e_i\ ,\ 1 \leq i \leq n+p-1\}$. Un tirage avec remise et sans ordre peut être mis en bijection avec un sous ensemble de $n-1$ éléments de E (choix de la place des séparateurs) ou bien un sous ensemble de p éléments de E (choix de la place des p croix).
On obtient que le nombre de tirages possibles est $\binom{n+p-1}{n-1} = \binom{n+p-1}{p}$.
C'est le nombre *de combinaisons avec répétition de p éléments parmi n.*

On peut résumer le dénombrement de ces 4 cas avec le tableau suivant
Tirer p boules discernables parmi n

	sans remise	avec remise (répétitions)
ordonnés (liste)	A_n^p	n^p
non ordonnés	$\binom{n}{p}$	$\binom{n+p-1}{p}$

II Premiers exemples

II.1 Dénombrer des dominos

Dénombrer des dominos ▷

Les dominos sont des pièces rectangulaires sur lesquelles figurent, sur une de leurs faces, deux ensembles de points séparés par un trait. En général, le nombre de points va de 0 à 6.
Le zéro est symbolisé par une absence de points.
On trouve aussi des variantes allant de 0 à 9, de 0 à 12, de 0 à 15 et de 0 à 18.
Calculer le nombre de pièces dans le jeu classique (de 0 à 6).

* ◯ *

Remarque préliminaire

Le domino $[2,1]$ est le même que le domino $[1,2]$ (il suffit de le retourner).

On peut donc représenter un domino par deux entiers, et on peut imposer que le premier soit inférieur ou égal au deuxième.

Des solutions : plusieurs approches.

- **Dénombrement par énumération exhaustive.**

  C'est long, mais c'est possible. Pour être sûr de ne pas en oublier, on est conduit à chercher une manière un peu systématique de les énumérer, et on arrive assez facilement à la méthode suivante.

- **Dénombrement en fixant d'abord un des nombres.**

  On compte d'abord combien de dominos contienne 0. $(0,0)$, $(0,1)$, $(0,2)$, $(0,3)$, $(0,4)$, $(0,5)$, $0,6)$. Il y en a 7.
  On compte alors les dominos qui contiennent 1 mais pas 0. $(1,1)$, $(1,2)$, $(1,3)$, $(1,4)$, $(1,5)$, $(1,6)$. Il y en a 6.
  Et ainsi de suite. Avec la convention de mettre le plus petit nombre en premier, 5 dominos commencent par 2, 4 par 3, 3 par 4, 2 par 5, et 1 par 6.
  On obtient ainsi 7+6+5+4+3+2+1 = 28 dominos.
  Remarque : cette méthode se généralise à des dominos ayant entre 0 et n points sur chaque côté : on trouve $\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$. Cela nécessite de connaître la formule pour la somme des premier termes d'une suite arithmétique.

- **Méthode graphique.**

  Lorsqu'on écrit explicitement tous les dominos dans la méthode précédente, ils forment un triangle, ce qui peut motiver cette approche.
  Si on considère un damier de 7×7 cases. On peut repérer une case par ses coordonnées (i,j), où i et j sont deux entiers entre 0 et 6.

$(0,0)$	$(0,1)$	$\dots$	$(0,6)$
	$(1,1)$	$\dots$	$(1,6)$
		$\ddots$	$\vdots$
			$(6,6)$

  Compter les dominos revient alors à compter les cases situées au dessus de la diagonale (diagonale comprise).
  Il y a 49 cases au total, dont 7 sur la diagonale. Par symétrie, il y en a $\frac{49-7}{2} = 21$ strictement au dessus de la diagonale.
  Il y a donc $7+21 = 28$ dominos.
  Remarque : cette méthode se généralise à des dominos ayant entre 0 et n points sur chaque côté : il y a $(n+1)^2$ cases au total, dont $(n+1)$ sur la diagonale. Par symétrie, il y en a $\frac{(n+1)^2-(n+1)}{2}$ strictement au dessus de la diagonale.
  Il y a donc $\frac{(n+1)^2-(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ dominos.

- **Par une formule de récurrence.**

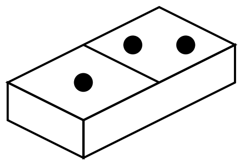
  On peut se poser directement la question de chercher le nombre D_n de dominos en fonction de n, où n est le nombre maximal de points.
  On passe de D_n à D_{n+1} en ajoutant les dominos qui contiennent $(n+1)$.
  Il y en a $(n+2)$. On a ainsi :
  $D_0 = 1$ et pour tout entier n, $D_{n+1} = D_n + (n+2)$.
  Cette formule permet bien de déterminer D_n pour tout n. On peut s'en servir pour démontrer par récurrence que $D_n = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

- **Dénombrement en utilisant des combinaisons.**

On observe d'abord qu'il y a 7 dominos dont les deux côtés sont identiques.
Il reste à dénombrer ceux dont les deux côtés sont différents. Cela revient à compter le nombre de manières de choisir 2 entiers différents parmi 7, c'est donc $\binom{7}{2}$.
Il y a donc au total $7 + \binom{7}{2} = 28$ dominos différents.
Remarque : cette méthode se généralise à des dominos ayant entre 0 et n points sur chaque côté : il y a $(n+1)$ dominos ayant deux nombres identiques, et $\binom{n+1}{2}$ dominos ayant deux nombres différents.
Il y a donc $n+1+\binom{n+1}{2} = n+1+\frac{n(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ dominos.

- **Méthode experte : dénombrement utilisant les combinaisons avec répétition**

On choisit de représenter un domino de la façon suivante : 6 séparateurs délimitent 7 cases numérotées de 0 à 6. On place deux croix correspondant au nombre de points d'un domino dans la case ou les cases de numéro le nombre de points.



Par exemple, le domino dessiné se représente,

	×	×				
0	1	2	3	4	5	6

le « double-six » ,

						××
0	1	2	3	4	5	6

Il s'agit de compter le nombre de manières de choisir $k = 2$ objets parmi $m = 7$, mais en s'autorisant à choisir plusieurs fois les mêmes, sans que l'ordre compte (tirage avec remise et sans ordre).
Le nombre est $\binom{m+k-1}{k}$, soit ici $\binom{8}{2} = 28$.

Remarque : cette méthode se généralise à des dominos ayant entre 0 et n points sur chaque côté : on a $m = n+1$, et on trouve donc $\binom{n+2}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ dominos.

$\ast \bigcirc \ast$

Pour aller plus loin

Une preuve bijective de $\sum_{k=1}^{n} k = \binom{n+1}{2}$.

Les dominos sont placés avec le plus petit nombre à gauche et sur chaque diagonale on a le même nombre. De plus sur chaque ligne horizontale, la différence du plus grand nombre par le plus petit est constante, on la nommera « hauteur ».

A un domino donné correspondent exactement deux diagonales distinctes et réciproquement à deux diagonales distinctes correspond exactement un domino. Il y a autant de dominos que de choix possibles de deux entiers distincts parmi $[\![0,7]\!]$ soit $\binom{8}{2}$.

Il y a 7 dominos à la hauteur "1" et la hauteur "i+1" a un domino de moins que la hauteur "i", on a un total de $\sum_{k=1}^{7} k$ dominos.

On a obtenu que $\sum_{k=1}^{7} k = \binom{8}{2}$, la preuve pour n arbitraire est identique.

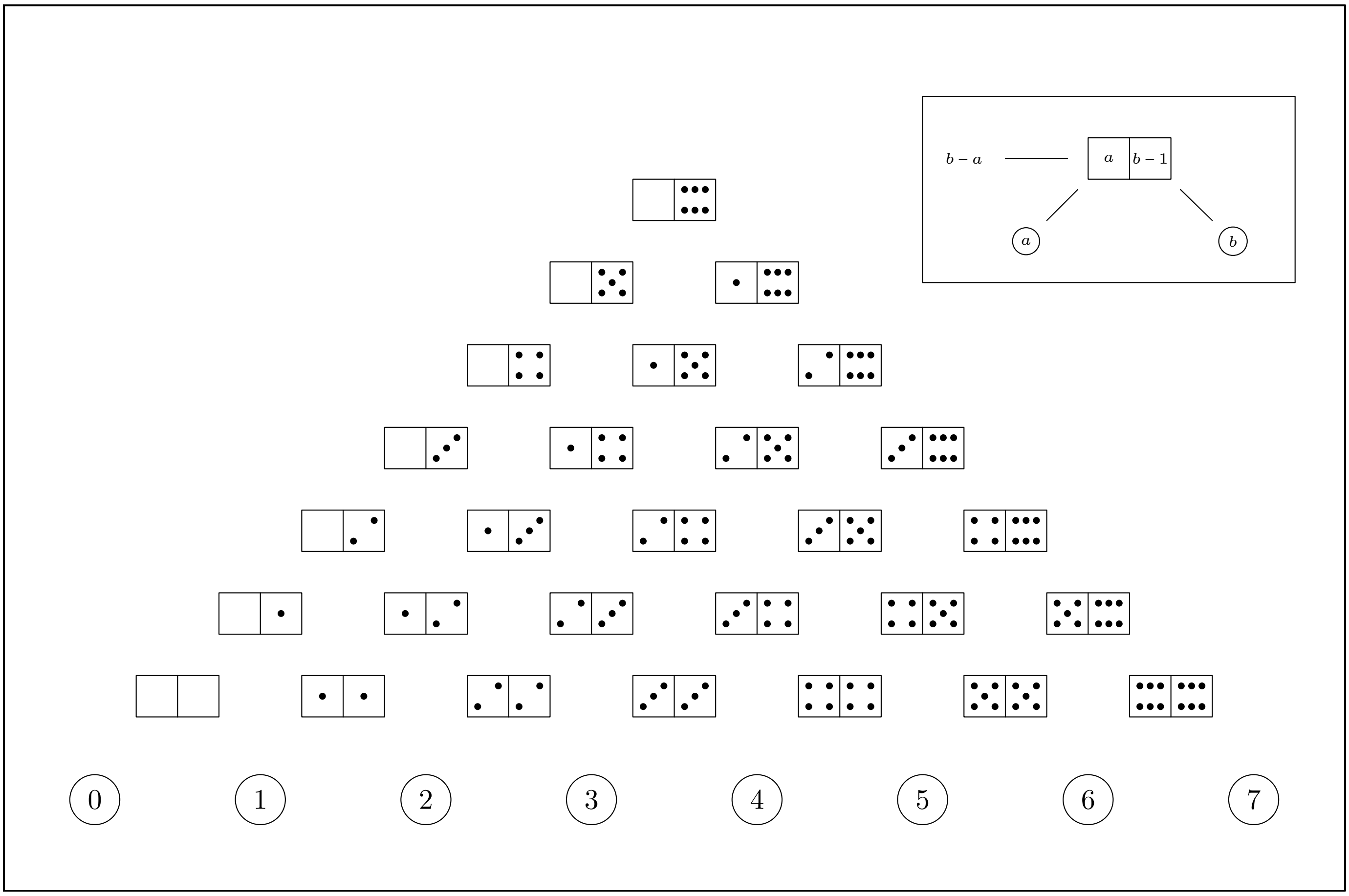


FIGURE 1 – $\binom{8}{2}$ Dominos

• ○ • ○ •

II.2 Le problème des huit tours

Problème des huit tours ▷

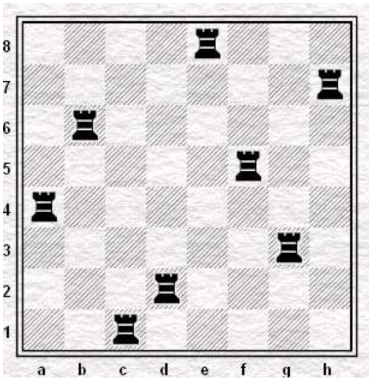


Figure 1.

De combien de manières différentes peut-on placer huit tours d'un jeu d'échecs sur un échiquier de 8×8 cases sans que les tours ne puissent se menacer mutuellement (la couleur des pièces est ignorée) ?

⋆ ○ ⋆

Remarque préliminaire

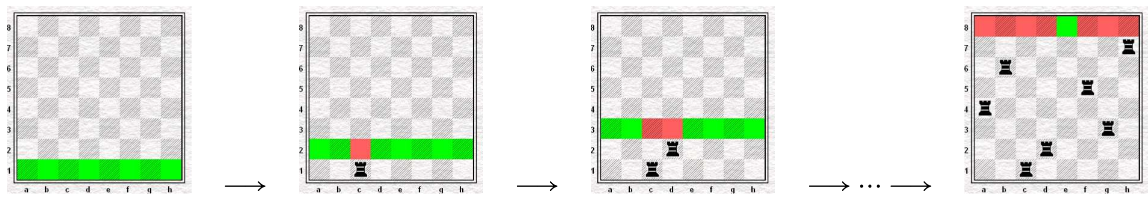
On rappelle qu'une tour ne peut se déplacer que horizontalement ou verticalement. Les tours ne doivent donc jamais partager la même ligne ou la même colonne. Dans une configuration satisfaisante, chaque ligne et chaque colonne contient une et une seule tour.

Des solutions : plusieurs approches.

- **Dénombrement par choix successifs.**

  Pour placer la première tour dans la ligne **1**, il y a 8 possibilités. Pour placer la seconde tour dans la ligne **2**, il reste 7 possibilités. Pour placer la troisième tour dans la ligne **3**, il reste 6 possibilités... Pour placer la dernière tour dans la ligne **8**, il ne reste plus qu'une seule possibilité.

  Illustration de choix successifs.

  choix 1 → **choix 2** → **choix 3** → ⋯ → **choix 8**

  Il y a $8 \times 7 \times 6 \times \cdots \times 1 = 8! = 40320$ possibilités d'enchaîner ces choix successifs : c'est le nombre de configurations cherchées.

- **Listes ordonnées sans répétition / arrangements.**

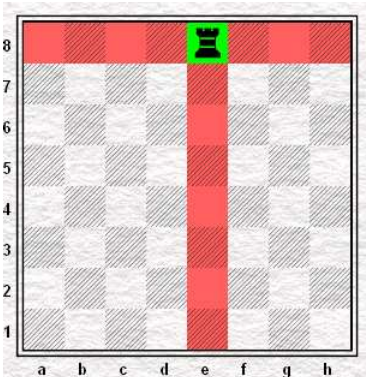
  Une configuration satisfaisante peut-être associée à un unique tirage ordonné et sans répétition des 8 lettres de l'ensemble $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \ldots, \mathbf{h}\}$. Le i-ème tirage donne la lettre de la colonne où est placée la tour de la ligne **i**.

  Par exemple, la configuration de la **figure 1** est associée au tirage **cdgafbhe**.

  Le nombre de tels tirages, et donc le nombre de configurations cherchées, est donné par l'arrangement $A_8^8 = \dfrac{8!}{(8-8)!} = 8!$.

  On dénombre ici également tous les anagrammes du mot **abcdefgh**.

- **Bijection.**
  Dans une configuration satisfaisante, à toute indice i de ligne dans l'ensemble $L = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, ..., \mathbf{3}\}$ on associe l'indice dans l'ensemble $C = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, ..., \mathbf{h}\}$ de la colonne où se trouve la tour de la ligne $\mathbf{i}$. On définit ainsi une application de L vers C qui est bijective puisque toute colonne contient une unique tour.
  Dans l'autre sens, toute bijection de L vers C donne une configuration satisfaisante.
  Or le nombre de bijections d'un ensemble de cardinal 8 vers un autre ensemble (de même cardinal) est $8!$: c'est donc le nombre de configurations cherchées.
- **Une solution récursive.**
  Stratégie classique en mathématiques : plutôt que de résoudre le problème pour un échiquier à $8{\times}8$ cases avec 8 tours, on va résoudre le problème pour un échiquier à $n \times n$ cases avec n tours où n est un entier naturel ; notons alors $T(n)$ le nombre de configurations satisfaisantes.
  On vérifie facilement que $T(1) = 1$.

  Soit un entier $n \geqslant 2$.
  Dans une configuration satisfaisante pour le problème de taille n, il y a n colonnes possibles pour la tour de la ligne n. Pour chacun de ses choix, on fixe la colonne où se trouve cette tour, on la raye ainsi que la ligne n. Il reste à placer les $n-1$ tours dans un échiquier de taille $(n-1)\times(n-1)$: il y a $T(n-1)$ configurations possibles.

  On obtient donc la relation $T(n) = n \times T(n-1)$ ce qui permet d'avoir par récurrence (ou par définition ?) $T(n) = n!$.

  Cette résolution du problème se prête bien à une introduction à la programmation récursive.
  La fonction Python ci-contre calcule le nombre $T(n)$ selon le principe indiqué ci-dessus.

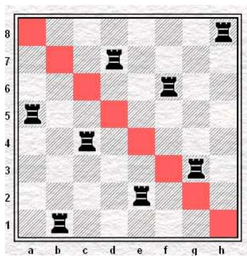
```
def T(n):
    if n==1:
        return 1
    else:
        return n*T(n-1)
```

* ○ *

Pour aller plus loin

On peut obtenir d'autres questions de dénombrement en imposant des contraintes sur le placement des tours ou en changeant les pièces.

Par exemple, si on cherche les configurations satisfaisantes où aucune tour n'est sur la diagonale de l'échiquier, on tombe sur le classique problème de dénombrement des *dérangements* (permutations sans point fixe).



En remplaçant les tours par des dames (qui se déplacent aussi en diagonale), on tombe sur le (bien plus compliqué) *problème des huit dames* posé par Édouard Lucas dans ses *Récréations mathématiques* (Quatrième récréation : le problème des huit reines au jeu des échecs). Ce problème a une longue histoire et aurait intéressé Gauss lui-même.

• ○ • ○ •

Erreurs observées

Posé en M1MEEF après un cours sur le dénombrement, cet exercice n'a pas été facile du tout. Le problème 8×8 étant intimidant, il a été suggéré d'examiner le cas 4×4. La stratégie proposée a été : 16 choix pour la première tour, puis (on raye la ligne et la colonne concernée) 9 choix pour la deuxième, puis 4 choix puis 1, soit $16 \times 9 \times 4 \times 1$. L'erreur est qu'on compte ainsi plusieurs fois chaque configuration : en effet, les tours sont indiscernables, il n'y a pas a priori de première tour et de deuxième tour. Or cette stratégie compte comme des configurations différentes, par exemple, le fait de mettre une première toursur la case $(1,1)$ puis une deuxième tour sur la case $(1,2)$, ou de mettre une première tour sur la case $(1,2)$ puis une deuxième sur la case $(1,1)$.
Dans la première stratégie présentée plus haut (dénombrement par choix successifs), on parle de première tour, deuxième tour, etc, mais elles sont numérotées dans l'ordre des lignes où elles apparaissent, ce qui permet bien de les classer.
À noter que cette enumération $16 \times 9 \times 4 \times 1$ conduit en faitbien à énumérer les configurations dans le cas où les tours sont discernables (chacune d'une couleur différente par exemple). On compte donc chaque configuration (avec les tours indiscernables) 4 ! fois. On récupère bien le bon résultat à partir du lemme des bergers en calculant $\frac{16 \times 9 \times 4 \times 1}{4!} = 4!$.

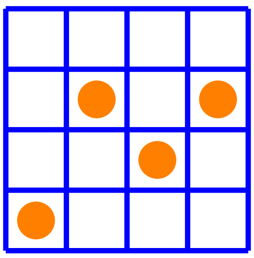
• ◯ • ◯ •

Un exercice avec des jetons : retour d'expériences ▷

Donné en colle filière PCSI
Un damier carré comporte 4 lignes et 4 colonnes. Ce damier est placé dans une position fixe. On se propose de placer 4 jetons **indiscernables** au toucher sur quatre cases différentes de ce damier.

1. Déterminer le nombre de dispositions possibles de ces quatre jetons sur le damier.
2. Parmi celles-ci, dénombrer successivement celles qui répondent aux critères :
   (a) aucun des jetons n'est placé sur une diagonale.
   (b) il y a un jeton sur une diagonale et deux sur l'autre.
   (c) il y a exactement un jeton sur chaque ligne et sur chaque colonne.
   (d) il y a une ligne sans jeton et au moins un jeton dans chacune des autres lignes.
   (e) aucune colonne ne contient exactement trois jetons.

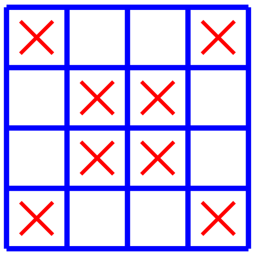
* ◯ *



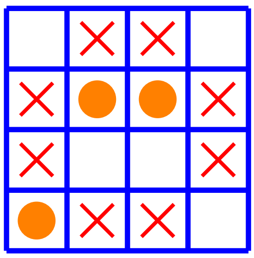
`Une correction :`

1. Les jetons étant indiscernables, le nombre de disposiions possibles est le nombre de combinaisons de 4 cases parmi les 16, donc $\binom{16}{4} = 1820$.

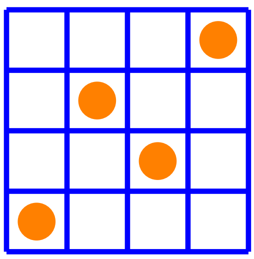
2.(a) Aucun des jetons n'est placé sur une diagonale donc il reste 8 cases possibles donc le nombre de dispositions de ce type est $\binom{8}{4} = 70$.



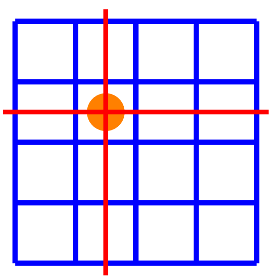
(b) Une diagonale portant un jeton donc 8 choix possibles (ou $\binom{8}{1} = 8$). Le jeton placé, l'autre diagonale porte alors deux jetons et le nombre de possibilités de placement est $\binom{4}{2} = 6$. Enfin, nous disposons de 8 cases pour placer le dernier jeton.
La réponse est donc : $\binom{8}{1} \times \binom{4}{2} \times \binom{8}{1} = 384$.



(c) On peut au choix raisonner sur les lignes ou sur les colonnes.
Dans la premières colonnes, nous avons 4 places disponibles mais ce jeton étant placé, il ne reste que 3 places pour le second dans la deuxième colonne et etc ...
Finalement, 4 !=24 dispositions possibles.



∗ ○ ∗



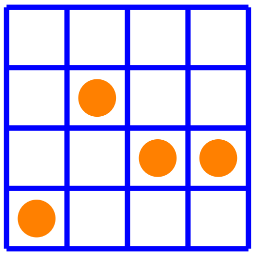
Raisonnement proposé par un élève : On place un jeton sur le damier, ce qui offre 16 possibilités ou encore $\binom{16}{1}$, puis après avoir tracé la ligne et la colonne passant par le pion, il reste 9 positions possibles pour le deuxième jeton et ainsi de suite ...
Finalement, $\binom{16}{1} \times \binom{9}{1} \times \binom{4}{1} \times \binom{1}{1} = 576$ possibilités

Après réflexion, l'élève convient qu'il dénombre plusieurs fois les mêmes possibilités et que son raisonnement vaut pour des jetons que l'on peut distinguer, par exemple de couleurs différentes ou numérotés.

∗ ○ ∗

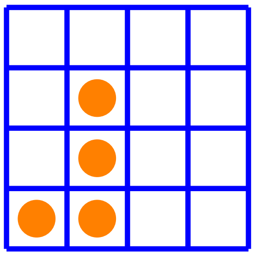
(d) Choisissions la ligne sans jeton : 4 choix possibles. Chacune des autres lignes possède au moins 1 jeton donc l'une des autres lignes possède 2 jetons : nous avons 3 choix possibles de lignes et $\binom{4}{2} = 6$ dispositions possibles pour les deux jetons qu'elle contient. Enfin, dans chacune des 2 lignes restantes nous avons $\binom{4}{1}$ choix de la place du jeton.

Finalement, la réponse est $\binom{4}{1} \times \binom{3}{1} \times \binom{4}{2} \times \binom{4}{1}^2 = 1152$



(e) Aucune colonne ne contient exactement trois jetons : il est plus facile de chercher les configurations où une colonne contient exactement 3 jetons. Nous avons 4 choix de colonne, $\binom{4}{3}$ façons d'y placer les 3 jetons et il reste 12 cases disponibles pour placer le dernier jeton.

On obtient dons $4 \times \binom{4}{3} \times \binom{12}{1} = 192$ dispositions défavorables. Toutes les autres dispositions sont favorables, il suffit d'écrire $1820 - 192 = 1628$ pour répondre à la question.



• ◯ • ◯ •

II.3 Anagrammes

Dénombrer des anagrammes ▷

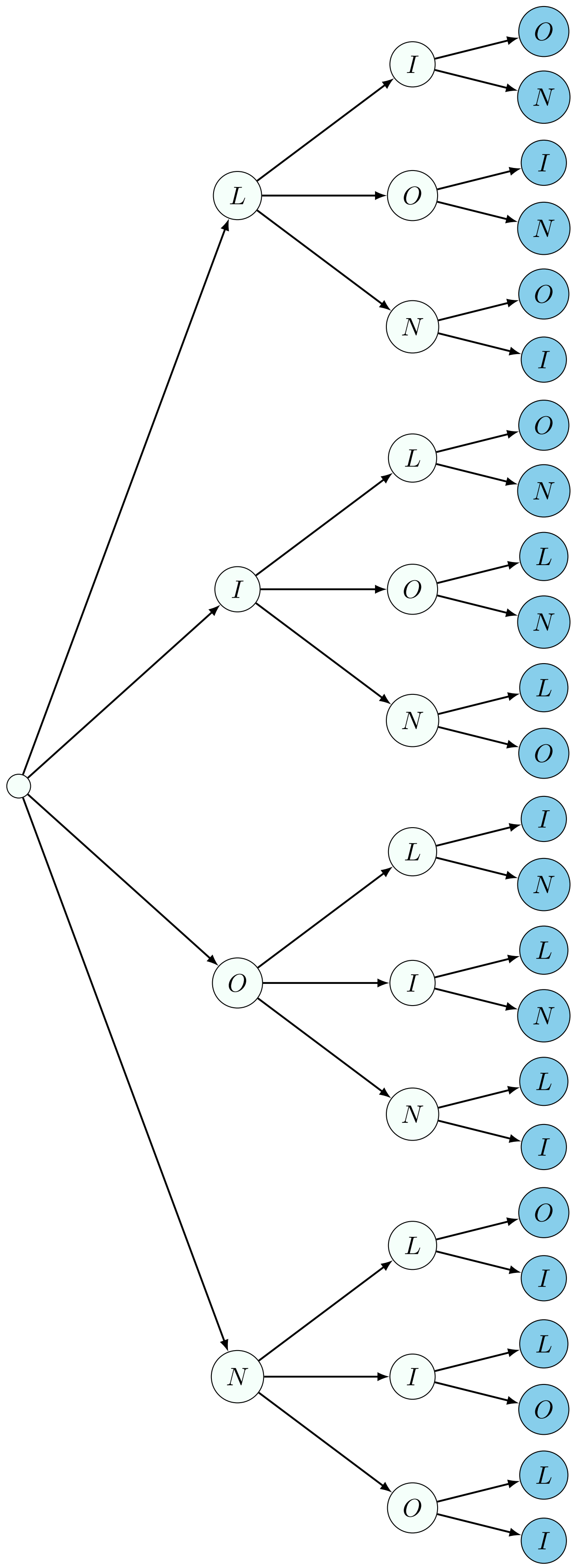
Donner le nombre d'anagrammes de

1. LION
2. LAMA
3. URUBU
4. RENNE

1. **Anagrammes de LION** :
   - ▷ Avec de l'organisation, on peut trouver les 24 anagrammes de LION « à la main »,

$$LION, LINO, LONI, LOIN, LNOI, LNIO, ILNO, ILON, \ldots$$

▷ En utilisant un arbre,

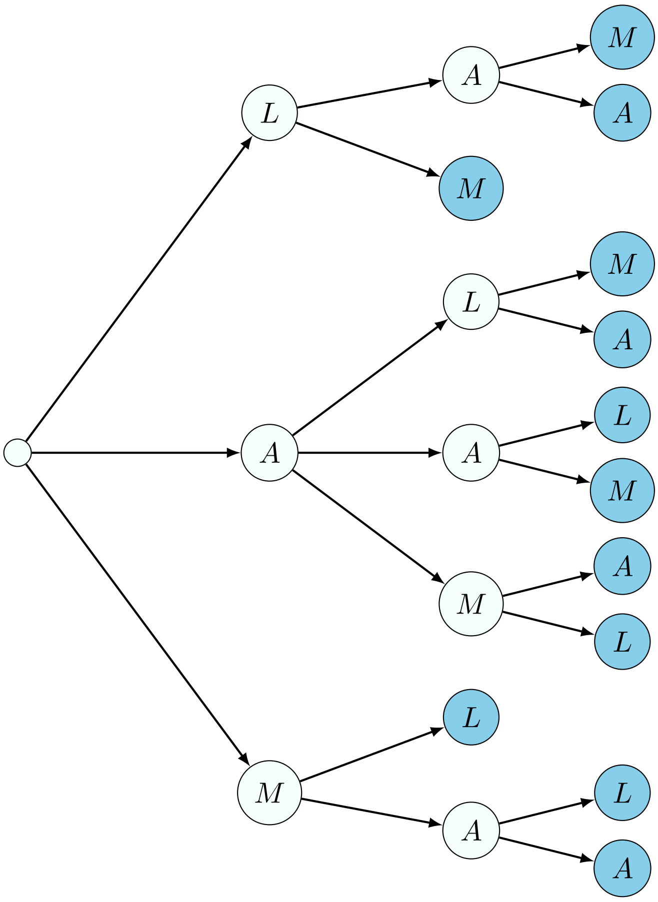


▷ En utilisant le nombre de permutations de l'ensemble $\{L, I, O, N\}$, c'est à dire $4! = 24$.

2. **Anagrammes de LAMA** :
   - ▹ « à la main »,

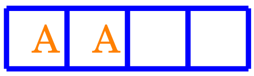
     $LAMA, LAAM, LMAA, ALMA, ALAM, AALM, AAML, AMLA, AMAL, MLAA, MAAL, MALA$

   - ▹ En utilisant un arbre,



     12 chemins pour atteindre un nœud terminal donc 12 anagrammes.

   - ▹ En utilisant les combinaisons,



     - On commence par déterminer le nombre de positions possibles pour les deux « A ». Comme représenté sur le schéma, il s'agit de choisir 2 places dans une « grille » en comportant 4 ; ce qui offre $\binom{4}{2}$ possibilités.

       À partir de là, il reste alors 2 possibilités pour placer L $\left(\binom{2}{1}\text{ choix}\right)$. Il ne reste alors qu'une seule possibilité pour la lettre M $\left(\binom{1}{1}\text{ choix}\right)$.

       Ainsi, via le principe multiplicatif, $\binom{4}{2} \times \binom{2}{1} \times \binom{1}{1} = 12$, soit 12 anagrammes possibles.

     - Une alternative est de commencer par placer L (4 choix), puis M (3 choix) et les 2 places restantes occupées par les deux lettres A.

     - On peut aussi commencer par déterminer le nombre de places pour la lettre L (ou M) : 4 possibilités $\left(\binom{4}{1}\text{ choix}\right)$, il ne reste alors que 3 places pour les deux lettres A, c'est à dire $\binom{3}{2}$ possibilités. La lettre restante M (ou L) est alors positionnée à la place restante.

Finalement $\binom{4}{1} \times \binom{3}{2} \times 1 = 12$, soit 12 anagrammes.

▷ En utilisant des permutations,
On distingue dans un premier temps les deux lettres A, on a 4 ! permutations dans l'ensemble $\{L, A_1, M, A_2\}$ mais des anagrammes sont alors comptés autant de fois qu'il y a de permutations des deux lettres A soit 2 ! (par exemple LA_1MA_2 et LA_2MA_1).
Avec le lemme des bergers, on dénombre donc $\frac{4!}{2!} = 12$ anagrammes possibles.

• ○ • ○ •

3. **Anagrammes de URUBU** :
▷ Avec 5 lettres, il n'est plus trop question de chercher les anagrammes « à la main ».
▷ En utilisant un arbre, 20 chemins possibles (laissé à la sagacité du lecteur)
▷ En utilisant les combinaisons,

U	U		U	

- Nombre de positions possibles pour les trois U : $\binom{5}{3}$; il reste alors 2 possibilités pour placer B $\left(\binom{2}{1} \text{ choix}\right)$. Il ne reste alors qu'une seule possibilté pour la lettre R $\left(\binom{1}{1} \text{ choix}\right)$.

$$\binom{5}{3} \times \binom{2}{1} \times \binom{1}{1} = 20$$

soit 20 anagrammes possibles.

- Si l'on commence par placer la lettre B : $\binom{5}{1}$ choix possibles ; 3 lettres U à placer sur 4 places : $\binom{4}{3}$; la lettre R est alors positionnée dans la place restante.

$$\binom{5}{1} \times \binom{4}{3} \times \binom{1}{1} = 20$$

- On peut également commencer par placer B, puis placer R, Les trois lettres U seront positionnées dans les 3 places restantes.

$$\binom{5}{1} \times \binom{4}{1} \times \binom{1}{1} = 20$$

▷ En utilisant des permutations,
On distingue dans un premier temps les trois lettres U, on a 5 ! permutations des éléments de l'ensemble $\{U_1, R, U_2, B, U_3\}$; on dénombre les doublons, permutations des trois lettres U, soit 3 ! ; Finalement, $\frac{5!}{3!} = 20$ anagrammes possibles de URUBU.

• ○ • ○ •

4. **Anagrammes de RENNE** :
▷ Avec un arbre, difficilement lisible.
▷ En utilisant les combinaisons,

N		N	E	E

- Places possibles pour les deux E : $\binom{5}{2}$; pour les deux N, 3 places restantes : $\binom{3}{2}$, le R est positionnée dans la place restante.

$$\binom{5}{2} \times \binom{3}{2} \times \binom{1}{1} = 30$$

soit 30 anagrammes possibles de RENNE.

▷ Avec des permutations,
Les permutations de l'ensemble $\{R, E_1, N_1, N_2, E_2\}$ sont au nombre de 5 ! ; pour éliminer les doublons, on dénombre les permutations des deux E et des deux N, soit $2! \times 2!$.
Finalement, $\dfrac{5!}{2! \times 2!} = 30$ anagrammes de RENNE.

5. En utilisant les différentes méthodes, on trouve qu'il existe 30240 anagrammes du mot ANAGRAMME.
   - Combinaisons :

M		M	A		A		A	

les A : $\binom{9}{3}$; les M (6 places restantes) : $\binom{6}{2}$; le G (4 places restantes) : $\binom{4}{1}$; le R (3 places restantes) : $\binom{3}{1}$; le N (2 places restantes) : $\binom{2}{1}$; le E positionné dans la place laissée libre.

$$\binom{9}{3} \times \binom{6}{2} \times \binom{4}{1} \times \binom{3}{1} \times \binom{2}{1} \times \binom{1}{1} = 30240$$

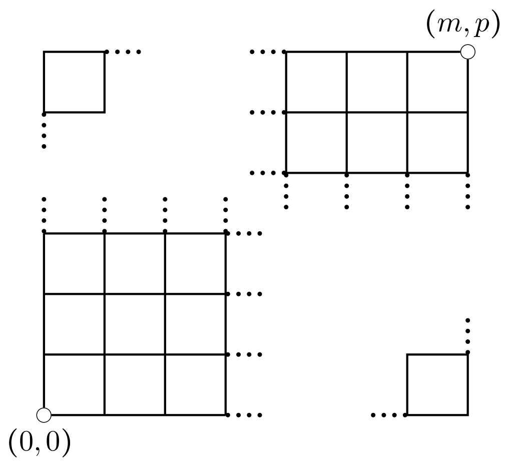
   - Permutations : à l'image de ce qui précède on a

$$\frac{9!}{3! \times 2!} = 30240$$

II.4 Dénombrer des chemins sur un quadrillage

Dénombrer des chemins sur un quadrillage entre $(0,0)$ et (n,p) ▷

Il s'agit de dénombrer le nombre de chemins entre les points de coordonnées (0,0) et (m,p) dans un quadrillage de taille $m \times p$. Les déplacements autorisés étant : vers le haut (H) et vers la droite (D).



On peut représenter un chemin par un « mot » composé de p lettres H et de m lettres D.

le mot $\underbrace{HHDDH\dots\dots\dots DDH}_{m+p\,lettres\,dont\,m\,D}$ est un chemin

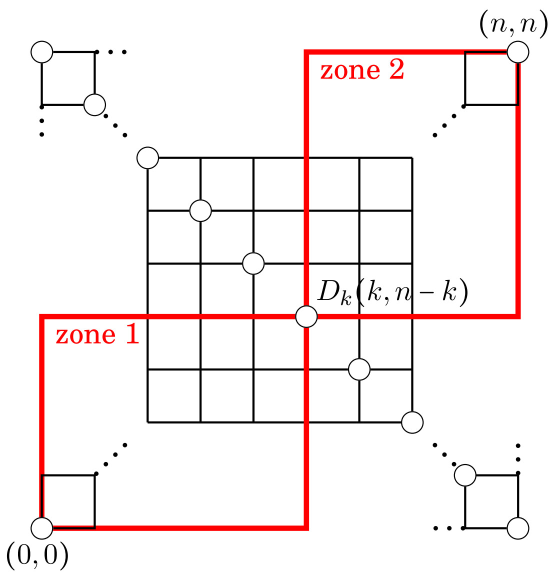
On dispose m lettres parmi $m+p$ places possibles, ce qui permet de dénombrer le nombres de chemins, c'est à dire exactement $\binom{m+p}{m}$ chemins possibles.

En particulier, si le quadrillage est de taille $n \times n$, le dénombrement précédent permet d'affirmer qu'il existe exactement $\binom{n+n}{n} = \binom{2n}{n}$ chemins possibles entre les points de coordonnées $(0,0)$ et (n,n).

$\ast \bigcirc \ast$

Une application : On décide de dénombrer les chemins entre les points de coordonnées $(0,0)$ et (n,n) en découpant le problème de la façon suivante : par chaque point D_k de la seconde diagonale, de coordonnées $(k, n-k)$ pour $k \in [[0,n]]$, un chemin ne passe qu'une seule fois. Et plus précisément, on pourrait noter,

$\mathcal{C} = \{\text{Chemins entre } (0,0)\ et\ (n,n)\}$ et $\text{card}(\mathcal{C}) = \binom{2n}{n}$, puis $\mathcal{C}_k = \{c \in \mathcal{C} \,|\, c \text{ passe par } \mathrm{D_k}\}$ et $\mathcal{C} = \bigcup_{k=0}^{n} \mathcal{C}_k$



Les zones 1 et 2 sont des quadrillages de tailles respectives $k\times(n-k)$ et $(n-k)\times k$. Elles sont « symétriques », donc il suffit de dénombrer les chemins de la zone 1, en même nombre que ceux de la zone 2, puis d'adopter le principe multiplicatif pour dénombrer les chemins reliant les points de coordonnées $(0,0)$ et (n,n).

D'après ce qui précède, $\binom{(n-k)+k}{k} = \binom{n}{k}$ chemins dans la zone 1 donc $\binom{n}{k} \times \binom{n}{k}$ chemins passant par le point D_k de coordonnées $(k, n-k)$.

$\mathcal{C} = \bigcup_{k=0}^{n} \mathcal{C}_k$ donc,

$$\operatorname{card}(\mathcal{C}) = \sum_{k=0}^{n} \operatorname{card}(\mathcal{C}_k) \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

.

$\star \bigcirc \star$

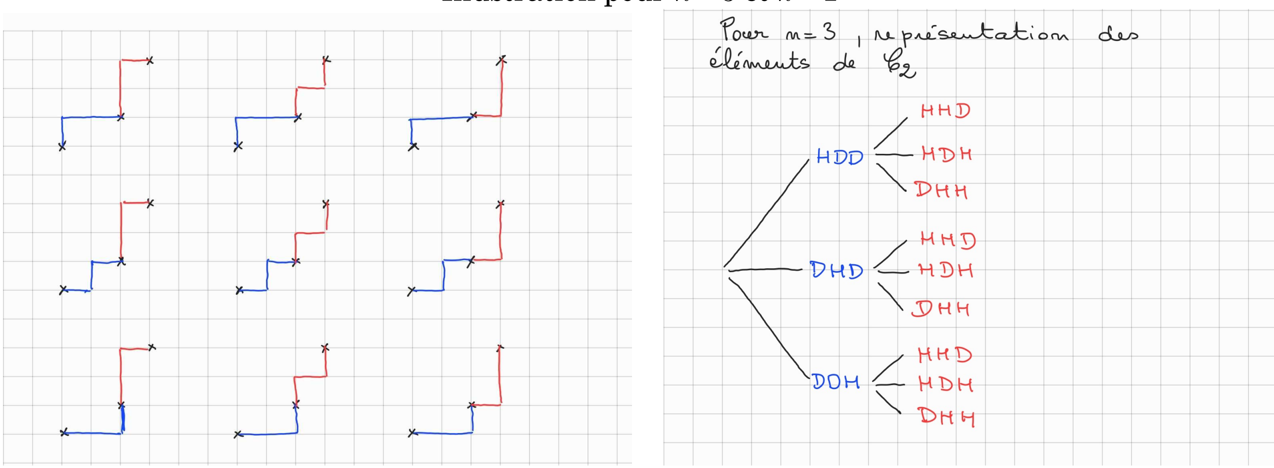
Une erreur possible :

Pour compter le nombre de chemins passant par D_k une erreur possible est de confondre le principe multiplicatif avec le principe additif.

En effet *visuellement* un chemin passant par D_k est *l'union* d'un chemin allant de $(0,0)$ à $(k, n-k)$ et d'un chemin allant de $(k, n-k)$ à (n,n). L'union étant alors traduite de façon automatique lors du dénombrement, par une somme.

Pour faire comprendre qu'il s'agit bien ici du principe multiplicatif, on peut représenter plusieurs chemins ayant même première partie de $(0,0)$ à $(k, n-k)$. On peut aussi traduire formellement un élément de $\mathcal{C}_k$ comme un couple (c_1, c_2) avec pour c_1 un élément de $\mathcal{C}_k^1$ (ensemble des chemins de $(0,0)$ à $(k, n-k)$) et c_2 un élément de $\mathcal{C}_k^2$ (ensemble des chemins de $(k, n-k)$ à (n,n))). C'est-à-dire $\mathcal{C}_k = \mathcal{C}_k^1 \times \mathcal{C}_k^2$ et donc $\operatorname{card}(\mathcal{C}_k) = \operatorname{card}(\mathcal{C}_k^1) \times \operatorname{card}(\mathcal{C}_k^2)$.

Illustration pour $n = 3$ et $k = 2$



$\bullet \bigcirc \bullet \bigcirc \bullet$

III Des boules et des urnes

Boules et urnes ▷

> De combien de façons peut-on répartir p boules dans n urnes ?
> On suppose $n \geq p \geq 1$.

Cet énoncé est incomplet, les boules sont-elles discernables, les urnes sont-elles discernables ? Nous allons étudier les différents cas.

$\star \bigcirc \star$

III.1 Boules et urnes discernables

Si les boules et les urnes sont discernables on peut modéliser un tirage par un p-uplet $(x_1, \dots, x_p) \in [\![1, n]\!]^p$, où x_i correspond au numéro de l'urne dans laquelle est la i-ième boule. On a n^p répartitions possibles.

Il est intéressant de remarquer ici que ce sont les urnes que « l'on tire p fois » avec répétition possible.

$* \bigcirc *$

III.2 Boules discernables et urnes indiscernables

Concrètement on peut imaginer des urnes similaires sur un plateau tournant, on fait une répartition des boules puis on fait tourner le plateau.

Si on suppose que le nombre d'urnes est supérieur ou égal au nombre de boules, une répartition des boules dans les urnes correspond à une partition de l'ensemble des boules. Le nombre de partitions d'un ensemble à p éléments est donné par le nombre de Bell : B_p. Voir plus bas la section VII.

On suppose toujours que le nombre d'urnes n est supérieur ou égal au nombre de boules p, que les urnes sont indiscernables et les boules discernables. Une adaptation possible est de dénombrer le nombre de répartition lorsque les urnes ne peuvent recevoir qu'au plus une boule. Il s'agit ici de choisir les p urnes qui vont recevoir une boule soit $\binom{n}{p}$.

$* \bigcirc *$

III.3 Boules indiscernables et urnes discernables

Le nombre de répartitions possibles est le *nombre de combinaisons de p éléments avec répétition parmi n*.

On a $\binom{n+p-1}{p}$ répartitions possibles.

$* \bigcirc *$

III.4 Boules et urnes indiscernables

Pour $n \geq p$ une répartition peut-être associé à une décomposition de l'entier p en une somme d'entiers strictement positifs rangés dans l'ordre croissant (appelé partition ou partage d'un entier), le problème est donc de compter le nombre d'une telle décomposition.
Ce problème a été abordé par Euler. Dans "Introduction à la théorie des nombres" de Hardy et Wright chapitre XIX (dans la traduction de F. Sauvageot), on trouve des formules proposées par Euler mais aussi par Jacobi, Ramanujan ....
Sur internet on trouve aussi des exposés de MATh.en.JEANS sur ce thème.
Suivant l'article de wikipedia https://fr.wikipedia.org/wiki/Partition_d'un_entier il existe une formule qui donne le nombre de partitions d'un entier (série de Rademacher).

$* \bigcirc *$

III.5 Sur un exemple quel modèle retenir ?

Enoncé ambigu ▷

> On dispose de trois jetons et de cinq boites notées A, B, C, D et E. On doit ranger les jetons dans les boites, une boite ne pouvant pas contenir deux jetons. Combien a-t-on de rangements possibles ?
> *Réponse : On dispose de cinq possibilités pour le premier jeton, de quatre possibilités pour le deuxième et de trois possibilités pour le troisième. Les rangements possibles sont donc les 3-uplets d'éléments deux à deux distincts de l'ensemble* $T = \{A; B; C; D; E\}$. *Leur nombre est* $5 \times 4 \times 3 = 60$.

La solution proposée est en modélisant avec des triplets, et comme on l'a vu ci-dessus dans le cas général cela suppose que l'on peut distinguer les jetons. Il est d'ailleurs dit « premier jeton », « deuxième jeton »... Rien dans l'énoncé ne le précise, si on veut aboutir à une telle modélisation il faut ajouter par exemple 3 jetons de couleur différentes, ou 3 jetons numérotés 1,2,3 ...
Avec des jetons indiscernables la modélisation doit être avec des parties de 3 éléments de l'ensemble $T = \{A; B; C; D; E\}$.

• ○ • ○ •

IV Suites ordonnées

Nombre de suites strictement croissantes d'un ensemble ordonné fini ▷

Soit $E \subset \mathbb{N}$ un ensemble fini non vide de cardinal n et $1 \leq p \leq n$ un entier. Le nombre de suites $x_1 < x_2 < \cdots < x_p$ strictement croissantes de longueur p de E est $\binom{n}{p}$.

∗ ○ ∗

Choisir une suite $x_1 < x_2 < \cdots < x_p$ de E revient à choisir p éléments de E. Nous sommes dans le cadre du cas 2 des modèles de référence (tirage sans remise et sans ordre).

∗ ○ ∗

Nombre de suites croissantes d'un ensemble ordonné fini ▷

Soit E un ensemble fini non vide ordonné de cardinal n et $p \geq 1$ un entier. Le nombre de suites $y_1 \leq y_2 \leq \cdots \leq y_p$ croissantes de longueur p de E est $\binom{n+p-1}{p}$.

On peut remarquer que nous sommes dans le cas 4 des modèles de référence (tirage avec remise et sans ordre).

∗ ○ ∗

Des solutions : plusieurs approches.

On peut supposer que $E = [\![1, n]\!]$ et $y_i \in [\![1, n]\!]$.

- On peut construire une bijection de l'ensemble des suites croissantes de longueur p de $[\![1, n]\!]$ dans l'ensemble des suites strictement croissantes de longueur p de $[\![1, n+p-1]\!]$:

- Si $y_1 \leq y_2 \leq \cdots \leq y_p$ est une suite croissante de $[\![1, n]\!]$, on pose $x_i = y_i + (i-1)$. Ainsi de $y_i \leq y_{i+1}$ on en déduit que
$$\underbrace{y_i + (i-1)}_{=x_i} < y_i + i \leq \underbrace{y_{i+1} + i}_{=x_{i+1}}$$
d'où $1 \leq x_1 < x_2 \cdots < x_p \leq n+p-1$ est une suite strictement croissante de longueur p de $[\![1, n+p-1]\!]$.
- Si $1 \leq x_1 < x_2 \cdots < x_p \leq n+p-1$ est une suite strictement croissante de $[\![1, n+p-1]\!]$, on pose $y_i = x_i - (i-1)$. Ainsi de $x_i < x_{i+1}$ on en déduit que $x_i + 1 \leq x_{i+1}$ et :
$$x_i - i < \underbrace{x_i - (i-1)}_{=y_i} \leq \underbrace{x_{i+1} - i}_{=y_{i+1}}$$
d'où $y_1 \leq y_2 \leq \cdots \leq y_p$ est une suite croissante de longueur p de $[\![1, n]\!]$.

On a donc que l'ensemble des suites croissantes de longueur p de $[\![1, n]\!]$ a le même cardinal que l'ensemble des suites strictement croissantes de longueur p de $[\![1, n+p-1]\!]$ soit $\binom{n+p-1}{p}$.

- On note $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ les n éléments de E. Pour former une suite croissante de E on entoure l'élément choisi par 1, 2 ou k cercles si on le prend 1, 2 ou k fois (il revient au même de placer 1, 2 ou k barres à droite de l'élément) .

Ainsi si $n = 7$ et $p = 4$ le schéma :

$$a_1 \ \boxed{\boxed{a_2}} \ a_3 \ \boxed{a_4}, \ a_5 \ a_6 \ \boxed{a_7}$$

ou

$$a_1 \ \ a_2|| \ \ a_3 \ \ a_4| \ \ a_5 \ \ a_6 \ \ a_7|$$

code la suite croissante $a_2 \leq a_2 \leq a_4 \leq a_7$.

Ou encore avec les séparateurs déjà présentés dans le paragraphe I.3

	××		×			×
a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7

Une suite croissante d'éléments de E peut-être schématisée en mettant les éléments de E dans l'ordre croissant et en plaçant des barres à droite des éléments que l'on prend pour former la suite (avec la convention que 0 , 1, 2 ou k barres indique le nombre de fois que l'on prend cet élément). On a ainsi une liste de $n+p$ places : n places pour les éléments de E et p places pour les barres. Comme la liste doit commencer par l'élément a_1 de E il reste $n+p-1$ place pour placer les p barres (ou $n+p-1$ pour placer dans l'ordre croissant les $n-1$ éléments de E restants) d'où $\binom{n+p-1}{p}$ schémas distincts ($\binom{n+p-1}{p} = \binom{n+p-1}{n-1}$).

• ○ • ○ •

V Nombre de solutions dans $\mathbb{N}$ de $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = p$

V.1 Cas particulier où $n = 3$

Une équation à résoudre dans $\mathbb{N}^3$ ▷

Soit $p \in \mathbb{N}$. On considère l'équation $x + y + z = p$ avec $(x, y, z) \in \mathbb{N}^3$. Dénombrer les triplets (x, y, z) solutions.

* ○ *

Des solutions : plusieurs approches.

- En commençant avec $p = 6$ on peut faire un arbre des possibles puis compter toutes les solutions. Cette méthode est assez laborieuse mais peut permettre d'amorcer le raisonnement itératif suivant.
  Notons $E_3(p) = \{(x,y,z) \in \mathbb{N}^3 \,|\, x+y+z=p\}$ alors $E_3(p) = \dot{\bigcup}_{k=0}^{p} \{(k,y,z) \in \mathbb{N}^3 \,|\, y+z=p-k\}$.
  Puis en remarquant que pour tout entier n, $\{(y,z) \in \mathbb{N}^2 \,|\, y+z=n\} = \{(k,n-k) \in \mathbb{N}^2, 0 \leq k \leq n\}$ on obtient avec le principe additif que
  $$\mathrm{card}(E_3(p)) = \sum_{k=0}^{p}(p-k+1) = \sum_{j=1}^{p+1} j = \frac{(p+2)(p+1)}{2} = \binom{p+2}{2}.$$
- En commençant à nouveau avec $p = 6$, on doit résoudre $x+y+z=6$.
  Par exemple $(3,1,2)$ est solution que l'on peut représenter par l'enchaînement des symboles
  $$* * * | * | * *$$
  une autre solution est $(2,0,4)$ représentable par
  $$* * || * * * *$$
  et donc si l'on s'appuie sur cette représentation avec 6+2 symboles, les solutions différentes apparaissent en plaçant les 2 « séparateurs | » dans l'une des 8 positions possibles ; soit $\binom{6+2}{2}$ solutions.

  Dans le cas général, l'équation $x+y+z=p$ admet des solutions que l'on peut représenter par n symboles $*$ et 2 séparateurs | : Il y en a $\binom{n+2}{2}$ soit $\frac{(n+2)(n+1)}{2}$ solutions.

• ◯ • ◯ •

V.2 Cas particulier où $n = 4$

Une équation à résoudre dans $\mathbb{N}^4$ ▷

> Soit $p \in \mathbb{N}$. On considère l'équation $x+y+z+w=p$ avec $(x,y,z,w) \in \mathbb{N}^4$. Dénombrer les quadruplets (x,y,z,w) solutions.

* ◯ *

Des solutions : plusieurs approches.

- **Une démonstration basée sur les séparateurs** :
  On doit placer p symboles $*$ et 3 séparateurs | : il y a $\binom{p+3}{3}$ solutions.
- **Une démonstration itérative** :
  En reprenant les notations précedentes et en notant $E_4(p) = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{N}^4 \,|\, x+y+z+w=p\}$. On a
  $$E_4(p) = \dot{\bigcup}_{k=0}^{p} \{(k,y,z,w) \in \mathbb{N}^4, (y,z,w) \in E_3(p-k)\}$$
  et avec le principe additif
  $$\mathrm{card}(E_4(p)) = \sum_{k=0}^{p} \mathrm{card}(E_3(p-k)) = \sum_{j=0}^{p} \mathrm{card}(E_3(j)) = \sum_{j=0}^{p} \binom{j+2}{2}.$$
  On obtient alors avec les 2 méthodes
  $$\mathrm{card}(E_4(p)) = \binom{p+3}{3} = \sum_{j=0}^{p} \binom{j+2}{2}.$$

$* \bigcirc *$

Prolongement possible : deux démonstrations de $\binom{n+3}{3} = \sum_{j=0}^{n} \binom{j+2}{2}$

Remarque : Ce prolongement peut être passé en première lecture et le cas général sera vu dans la section VIII.

- **A l'aide d'une relation sur les coefficients binomiaux.**

  En utilisant la propriété des coefficients binomiaux :

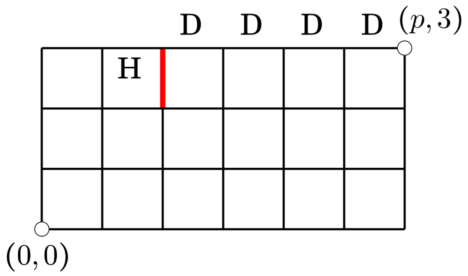
$$\forall j \in \mathbb{N}^*, \ \binom{j+3}{3} = \binom{j+2}{3} + \binom{j+2}{2}$$

  on a

$$\sum_{j=0}^{p} \binom{j+2}{2} = 1 + \sum_{j=1}^{p} \binom{j+2}{2} = 1 + \sum_{j=1}^{p} \left(\binom{j+3}{3} - \binom{j+2}{3} \right) = 1 + \binom{p+3}{3} - 1$$

  avec la somme télescopique.

- **Méthode combinatoire.**



$\binom{p+3}{3}$ est le nombre de chemins entre les points de coordonnées $(0,0)$ et $(p,3)$ dans un quadrillage de taille $p \times 3$. Les déplacements autorisés étant : vers le haut (H) et vers la droite (D). On peut représenter un chemin par un « mot » composé de 3 lettres H et n lettres D.

On peut partitionner l'ensemble E de ces mots selon la position du dernier H.
Par exemple pour $p = 6$, l'ensemble des mots avec le dernier H en 5ième position est
$\{HHDD$**HDDDD**$, HDHD$**HDDDD**$, HDDH$**HDDDD**$,$
$DHHD$**HDDDD**$, DHDH$**HDDDD**$, DDHH$**HDDDD**$\}$.
On a nécéssairement uniquement la lettre D après le dernier H et le nombre de mots de cet ensemble correspond au nombre de mots de 4 lettres avec 2 lettres H et 2 lettres D, soit $\binom{4}{2}$.
Pour $3 \leq k \leq p$, en notant C_k l'ensemble de mots composé de 3 lettres H et p lettres D avec le dernier H en k-ième position, on a : $\text{card}(C_k) = \binom{k-1}{2}$ et $E = \bigcup_{k=3}^{p+3} C_k$ avec les ensembles C_k 2 à 2 disjoints.
On en déduit que

$$\binom{p+3}{3} = \sum_{k=3}^{p+3} \binom{k-1}{2} = \sum_{j=0}^{n} \binom{j+2}{2}$$

avec le changement d'indice $j = k - 3$.

$\bullet \bigcirc \bullet \bigcirc \bullet$

V.3 Cas général

Nombre de solutions dans $\mathbb{N}$ de l'équation $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = p$ où p est un entier naturel $\triangleright$

Soit $p \in \mathbb{N}$ et $n \geq 1$ un entier.
Le nombre de n-uplets $(x_1, \ldots, x_n)$ solutions dans $\mathbb{N}$ de l'équation $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = p$ est $\binom{n+p-1}{p} = \binom{n+p-1}{n-1}$.

Remarque : Ce nombre peut être vu comme le nombre de façons de répartir p boules indiscernables dans n urnes discernables, x_i étant le nombre de boules dans l'urne numérotée i.

$* \bigcirc *$

Des solutions : plusieurs approches.

- **Avec une bijection :**

  Si $n = 1$ on a une seule solution et la propriété est vraie. On suppose que $n \geq 2$, on peut construire une bijection de l'ensemble des solutions de l'équation dans l'ensemble des suites croissantes de longueur $n-1$ de $[\![1, p+1]\!]$:
  - A chaque solution $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{N}^n$ de l'équation on associe la suite

  $$(y_1 = 1 + x_1, y_2 = y_1 + x_2 = 1 + x_1 + x_2, \ldots, y_n = y_{n-1} + x_n = 1 + x_1 + x_2 + \ldots x_n = p + 1)$$

    la suite $(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1})$ est une suite croissante de longueur $n-1$ de $[\![1, p+1]\!]$.
  - A toute suite croissante $(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1})$ de $[\![1, p+1]\!]$ en posant $y_n = p + 1$ on associe la suite de $\mathbb{N}$:

  $$(x_1 = y_1 - 1, x_2 = y_2 - y_1, \ldots, x_i = y_i - y_{i-1}, \ldots, x_n = y_n - y_{n-1}).$$

    Ainsi $x_1 + \cdots + x_n = y_n - 1 = p$ et $(x_1, \ldots, x_n)$ est une solution de l'équation.

  On a donc que le nombre de solutions dans $\mathbb{N}$ de l'équation $x_1+x_2+\ldots x_n = p$ a le même cardinal que l'ensemble des suites croissantes de longueur $n-1$ de $[\![1, p+1]\!]$ soit $\binom{(p+1)+(n-1)-1}{n-1} = \binom{p+n-1}{n-1} = \binom{p+n-1}{p}$.

- **Avec les séparateurs :**

  A chaque solution $(x_1, x_2, \ldots, , x_n)$ de l'équation $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = p$ on associe le schéma suivant : on place sur une ligne p fois le nombre 1, pour $i = 1, \ldots, n-1$ on note
  $n_i = x_1 + \cdots + x_i$ et on place une cloison à droite du n-ième nombre 1. On construit ainsi une nouvelle ligne de longueur $p + n - 1$ constitué de p fois le nombre 1 et de $n - 1$ cloisons.

  Exemple : si $p = 10$ et $n = 6$ le schéma

  $$\underbrace{}_{x_1=0} \mid \underbrace{1\ 1\ 1}_{x_2=3} \mid \underbrace{}_{x_3=0} \mid \underbrace{1\ 1\ 1\ 1\ 1}_{x_4=5} \mid \underbrace{1\ 1}_{x_5=2} \mid \underbrace{}_{x_6=0}$$

  est une représentation de la solution $(x_1 = 0,\ x_2 = 3, x_3 = 0,\ x_4 = 5\ x_5 = 2,\ x_6 = 0)$ de l'équation $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 10$.

  Une solution de l'équation consiste à placer $n-1$ cloisons sur une ligne de $p + n - 1$ places. On a ainsi $\binom{p+n-1}{n-1} = \binom{p+n-1}{p}$ solutions distinctes.

$* \bigcirc *$

Maintenant que le cas de l'égalité a été traité, on peut chercher à dénombrer le nombre de solutions dans $\mathbb{N}$ de $x_1 + x_2 + \ldots + x_n \leq p$. Cette variante est traitée en fin de document dans la partie XIII.3.

$\bullet \bigcirc \bullet \bigcirc \bullet$

VI Nombre de solutions dans $\mathbb{N}^*$ de l'équation $x_1 + x_2 + \dots x_n = p$

Nombre de solutions dans $\mathbb{N}^*$ de l'équation $x_1 + x_2 + \dots x_n = p$ où p est un entier naturel ▹

Soient $n \geq 1$ et $p \geq n$ des entiers.
Le nombre de n-uplets $(x_1, \dots, x_n)$ solutions dans $\mathbb{N}^*$ de l'équation $x_1 + x_2 + \dots + x_n = p$ est $\binom{p-1}{n-1}$.

* ○ *

Des solutions : plusieurs approches.

- **Avec une bijection :**
  A la solution $(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{N}^*)^n$ qui vérifie $x_1 + \dots + x_n = p$ on associe le (n-1)-uplet
  $$(y_1 = x_1, y_2 = x_1 + x_2, \dots, y_{n-1} = x_1 + \dots x_{n-1})$$
  La suite $(y_1, \dots, y_{n-1})$ est une suite strictement croissante de $[\![1, p-1]\!]$. On construit ainsi une bijection de l'ensemble des solutions de l'équation dans l'ensemble des suites strictement croissantes de $[\![1, p-1]\!]$ dont le cardinal est $\binom{p-1}{n-1}$.
- **Avec une autre bijection :**
  Comme
  $$x_1 + x_2 + \dots + x_n = p \Longleftrightarrow (x_1 - 1) + (x_2 - 1) + \dots + (x_n - 1) = p - n$$
  on peut se ramener à la proposition précédente : les solutions dans $\mathbb{N}^*$ de l'équation $x_1 + x_2 + \dots + x_n = p$ sont en bijection avec les solutions dans $\mathbb{N}$ de l'équation $y_1 + y_2 + \dots + y_n = p - n$. Par conséquent le nombre de solution est $\binom{p-1}{n-1}$.
- **Avec une version adaptée des séparateurs :**
  A chaque solution $(x_1, x_2, \dots, , x_n) \in (\mathbb{N}^*)^n$ de l'équation $x_1 + x_2 + \dots + x_n = p$ on associe le schéma suivant : on place sur une ligne p fois le nombre 1 et on place entre les nombres $n-1$ cloisons de façon q'entre 2 cloisons on trouve x_i fois le nombre 1.
  Exemple : si $p = 10$ et $n = 6$ le schéma
  $$\underbrace{1\ 1}_{x_1=2} \mid \underbrace{1\ 1\ 1}_{x_2=3} \mid \underbrace{1}_{x_3=1} \mid \underbrace{1\ 1}_{x_4=2} \mid \underbrace{1}_{x_5=1} \mid \underbrace{1}_{x_6=1}$$
  est une représentation de la solution $(x_1 = 2,\ x_2 = 3, x_3 = 1,\ x_4 = 2\ x_5 = 1,\ x_6 = 1)$ de l'équation $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 10$.

  Une solution de l'équation consiste à placer $n-1$ cloisons pour $p-1$ places (une place entre chaque 1) d'où $\binom{p-1}{n-1}$ solutions distinctes.

• ○ • ○ •

VII Nombre de Bell

Nombre de partitions ▹

Soit $n \geq 1$ un entier. On note B_n le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments.
On a
$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k.$$

∗ ◯ ∗

Remarque : on peut montrer que $B_n = \dfrac{1}{e}\sum_{k=0}^{+\infty}\dfrac{k^n}{k!}$ (exercice sur les séries entières).

A ne pas confondre avec :

- le nombres de parties d'un ensemble à n éléments (2^n, preuve par récurrence ou en comptant le nombre d'applications de l'ensemble dans $\{0,1\}$, ...)
- Partition d'un entier (les n éléments sont indiscernables, ce qui n'est pas le cas d'un ensemble à n éléments).

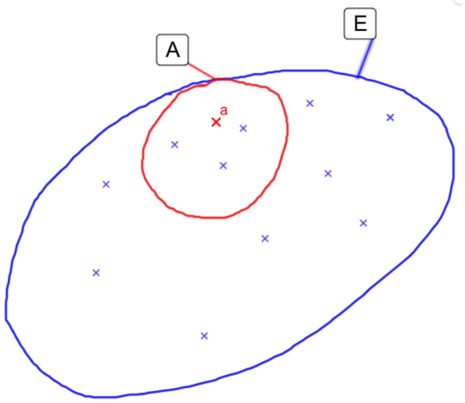
Prolongement :

Dans un ensemble à n éléments on a B_n relations d'équivalence (se donner une relation d'équivalence sur un ensemble revient à se donner une partition de cet ensemble).

∗ ◯ ∗

Justification de l'expression de B_n :

Soit E un ensemble à $n+1$ éléments et $a \in E$. Pour une partition de E donnée, un élément de cette partition contient a. Si A est une partie de E de cardinal $k+1$ contenant a alors le nombre de partitions de E telle que A soit un élément de cette partition est B_{n-k} car $|E \setminus A| = n-k$ et que le nombre de partitions de $E \setminus A$ est B_{n-k}.



Le nombre de parties de E contenant a et ayant $k+1$ éléments est $\binom{n}{k}$ (on choisit k éléments dans $E \setminus \{a\}$), ce qui donne le nombre de partition de E dont un élément contient a et admet $k+1$ élément : $\binom{n}{k}B_{n-k}$. Ainsi $B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_{n-k}$.

Comme $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$,

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{n-k}B_{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k$$

• ◯ • ◯ •

VIII Somme de coefficients binomiaux

Somme de cœfficients binomiaux ▷

Soit $N \geq p \geq 0$ des entiers.

$$\sum_{k=p}^{N}\binom{k}{p} = \binom{N+1}{p+1}.$$

$\ast \bigcirc \ast$

Remarque : Un cas particulier avec $p = 2$ et $N = n + 2$ a déjà été traité dans la partie V.2

Des solutions : plusieurs approches.

- **Par dénombrement.**
  $\binom{N+1}{p+1}$ est le nombre de parties à $p+1$ éléments dans un ensemble à $N+1$ éléments.
  Soit $E = [\![1, N+1]\!]$ et A l'ensemble des parties de E ayant $p+1$ éléments. On peut former une partition de A en considérant le plus grand élément de chaque partie de la partition : pour $k \in [\![p, N]\!]$ on note E_k l'ensemble des parties de E à $p+1$ éléments dont le plus grand élément est $k+1$.
  Ainsi A est l'union disjointe des E_k.
  Un élément de E_k est donné par le choix de p éléments de $[\![1, k]\!]$ auquel on adjoint $k+1$ donc : $|E_k| = \binom{k}{p}$.
  Comme A est l'union disjointe des E_k pour $k \in [\![p, N]\!]$, le cardinal de A est $\sum_{k=p}^{N} \binom{k}{p}$.

- **En utilisant la formule du triangle de Pascal.**
  Comme $\binom{k}{p} = \binom{k+1}{p+1} - \binom{k}{p+1}$:

$$\sum_{k=p}^{N} \binom{k}{p} = \sum_{k=p}^{N} \left(\binom{k+1}{p+1} - \binom{k}{p+1} \right) = \binom{N+1}{p+1} - \binom{p}{p+1} = \binom{N+1}{p+1}.$$

- **Par récurrence.**
  L'entier p étant fixé on note pour $N \geq p$ on note P_N l'assertion $\sum_{k=p}^{N} \binom{k}{p} = \binom{N+1}{p+1}$.
  - Pour $N = p$ l'assertion est vérifiée.
  - Soit $M \geq p$ un entier fixé. On suppose que l'assertion P_M est vérifiée.

$$\sum_{k=p}^{M+1} \binom{k}{p} = \binom{M+1}{p+1} + \binom{M+1}{p} = \binom{M+2}{p+1}.$$

  - Si l'assertion P_M est vérifiée alors l'assertion P_{M+1} est vérifiée. Comme P_p est vraie l'assertion P_N est vraie pour tout entier $N \geq p$.

$\bullet \bigcirc \bullet \bigcirc \bullet$

IX Formule de Vandermonde

Formule de Vandermonde ▷

> Soient p, q, n des entiers où $0 \leq n \leq p+q$.
>
> $$\sum_{\substack{i+j=n \\ i\geq 1,\ j\geq 1}} \binom{p}{i}\binom{q}{j} = \sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k}\binom{q}{n-k} = \binom{p+q}{n}.$$
>
> On peut supposer que $0 \leq i \leq p$ et $0 \leq j \leq q$ car par convention $\binom{n}{m} = 0$ si $n < m$.

$\ast \bigcirc \ast$

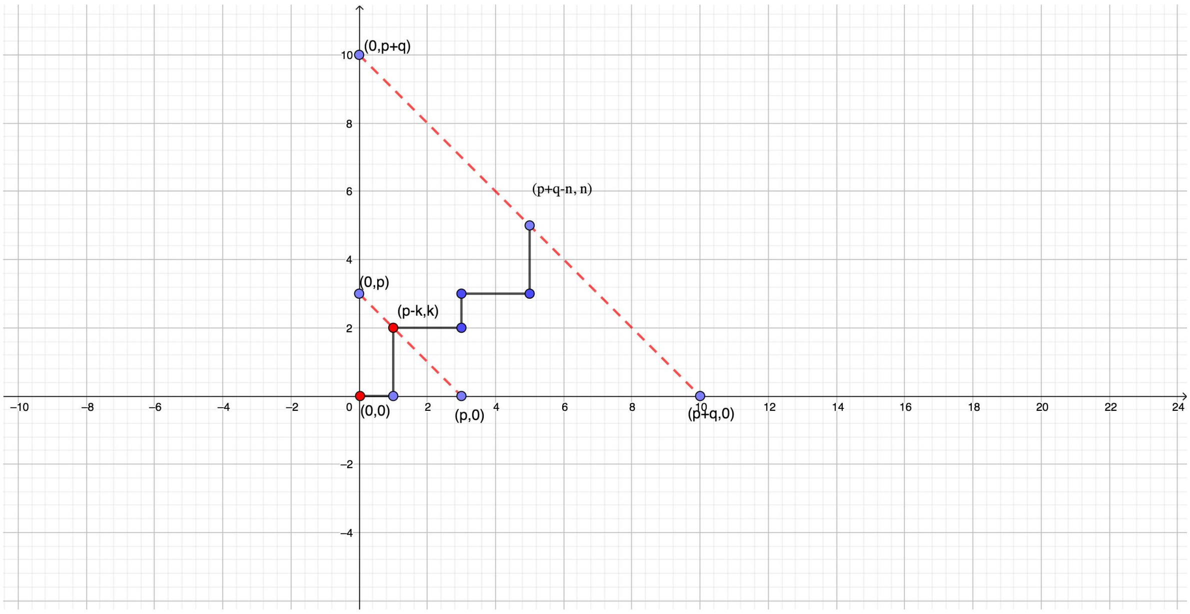
Des cas particuliers de ce résultat ont été vus dans la partie II.4.

$\ast \bigcirc \ast$

Des solutions : plusieurs approches.

- **Avec les chemins :**

  Sur un quadrillage à coordonnées entières on compte le nombre de chemins du quadrillage joignant le point de coordonnées $(0,0)$ au point de coordonnées $(p+q-n,n)$. On ne peut se déplacer sur le quadrillage qu'en augmentant d'une unité l'abscisse ou bien d'une unité l'ordonnée : du point de coordonnées entières (a,b) on peut aller au point de coordonnées $(a+1,b)$ ou au point $(a,b+1)$. Chaque chemin coupe la droite d'équation $x+y=p$ en un point de coordonnées $(p-k,k)$ où $k \in [\![0,p]\!]$.



  Pour aller du point de coordonnées (a,b) au point de coordonnées $(a+m,b+n)$ ($n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$) on a $\binom{m+n}{n}$ chemins : cela revient à placer les n segments verticaux sur les $n+m$ places.

  Le nombre de chemins du point de coordonnées $(0,0)$ au point de coordonnées $(p+q-n,n)$ est $\binom{p+q}{n}$.
  - Soit $k \in [\![0,p]\!]$. Le nombre de chemins du point de coordonnées $(0,0)$ à celui de coordonnées $(p-k,k)$ est $\binom{p}{k}$.
  - Le nombre de chemins du point de coordonnées $(p-k,k)$ à celui de coordonnées $(p+q-n,n) = (p-k)+(q-n+k),k+(n-k))$ est $\binom{q}{n-k}$.

  Ainsi Le nombre de chemins du point de coordonnées $(0,0)$ au point de coordonnées $(p+q-n,n)$ est aussi $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{p}{k}\binom{q}{n-k}$.

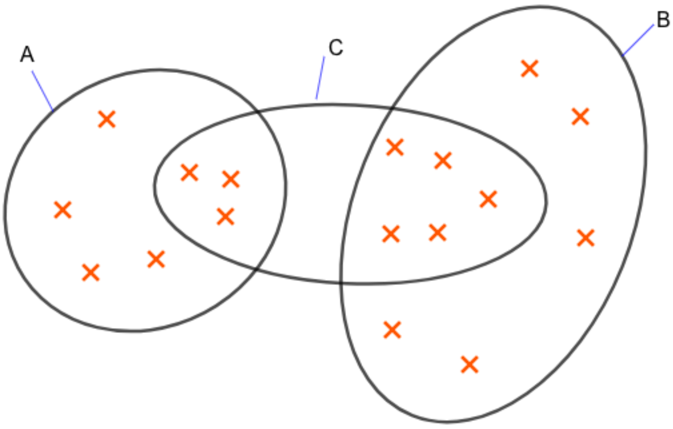
- **Avec les urnes :**

  Cette méthode est un autre habillage de la méthode précédente. On considère une urne qui contient p boules blanches discernables, q boules noires discernables et un entier $n \leq p+q$. On extrait n boules : il y a $\binom{p+q}{n}$ façons de choisir n boules (c'est choisir n objets parmi $p+q$). Le nombre d'extractions qui contiennent k boules noires et $n-k$ boules blanches est $\binom{q}{k}\binom{p}{n-k}$.

  Ainsi le nombre d'extractions de n boules est aussi $\displaystyle\sum_{k=0}^{p}\binom{q}{k}\binom{p}{n-k}$.

- **Avec les parties :**

  Soient A,B deux parties disjointes de cardinal respectif p,q. Le nombre de parties de cardinal n de $A\cup B$ est $\binom{p+q}{n}$. Si C est une partie de cardinal n de $A\cup B$ elle est constituée de k élements de B et $n-k$ éléments de A. Pour choisir C on a $\binom{q}{k}$ choix possibles pour la partie à k éléments de A et $\binom{p}{n-k}$ choix possibles pour la partie à $n-k$ éléments de B donc $\binom{q}{k}\binom{p}{n-k}$ parties à n éléments ayant k éléments dans A.



Ainsi le nombre de parties à n éléments de $A \cup B$ est $\sum_{k=0}^{n} \binom{q}{k}\binom{p}{n-k}$.

- **En utilisant la formule du binôme de Newton :**
  On a
  $$(1+x)^{p+q} = (1+x)^p(1+x)^q = \left(\sum_{i=0}^{p}\binom{p}{i}x^i\right)\left(\sum_{j=0}^{q}\binom{q}{j}x^j\right)$$
  En développant, le cœfficient de x^n est d'une part $\binom{p+q}{n}$ et d'autre part $\sum_{i+j=n}^{p}\binom{p}{i}\binom{q}{j}$.

- **Par récurrence :**

(a) Pour $q \in \mathbb{N}$ on note P_q l'assertion :
« pour tout entier p et tout entier n, $\sum_{k=0}^{n}\binom{p}{k}\binom{q}{n-k} = \binom{p+q}{n}$.»

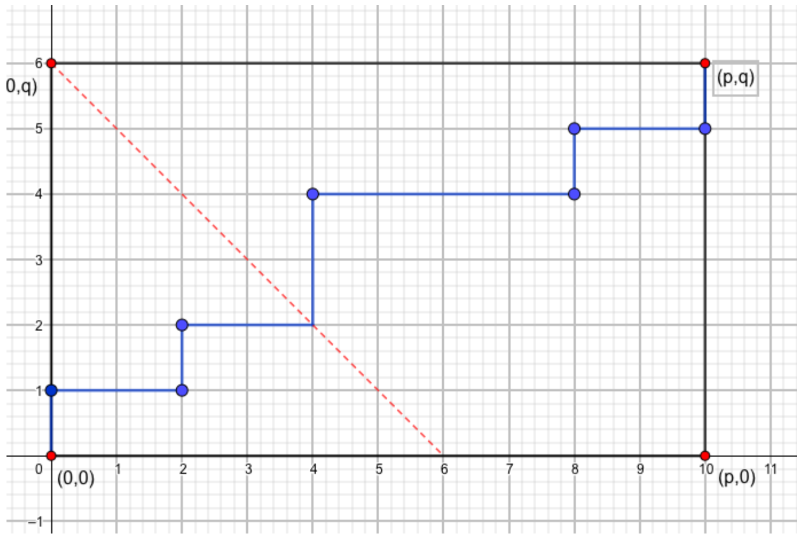
(b) Comme $\binom{q}{m} = 0$ si $q < m$ et $\binom{0}{0} = 1$, on vérifie que lorsque $q = 0$ l'assertion est vraie. Pour tout entier p et tout entier n :
$$\sum_{k=0}^{n}\binom{p}{k}\binom{0}{n-k} = \binom{p}{n}\binom{0}{0} = \binom{p+0}{n}$$
.

(c) Soit q un entier. On suppose que l'assertion P_q est vraie et on se donne deux entiers p et n
$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\binom{p}{k}\binom{q+1}{n-k} &= \sum_{k=0}^{n}\binom{p}{k}\left(\binom{q}{n-k}+\binom{q}{n-k-1}\right) \quad \text{(formule du triangle de Pascal)}\\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{p}{k}\binom{q}{n-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{p}{k}\binom{q}{n-k-1}\\ &= \binom{p+q}{n} + \binom{p+q}{n-1}\\ &= \binom{p+q+1}{n} \quad \text{(formule du triangle de Pascal)}\end{aligned}$$

* ○ *

Un cas particulier.
En prenant $p \geq q \geq 1$ et $n = p$ dans la formule de Vandermonde, on obtient
$$\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2,\ p \geq q \geq 1, \quad \sum_{k=0}^{p}\binom{q}{k}\binom{p}{p-k} = \binom{p+q}{p}.$$

En particulier si $p = q$ on retrouve $\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}^2 = \binom{2p}{p}$. qui a déjà été vue dans le paragraphe II.4.



Comme précédemment, sur un quadrillage à coordonnées entières on compte le nombre de chemins du quadrillage joignant le point de coordonnées $(0,0)$ au point de coordonnées (p,q). On ne peut se déplacer sur le quadrillage qu'en augmentant d'une unité l'abscisse ou bien d'une unité l'ordonnée : du point de coordonnées entières (a,b) on peut aller au point de coordonnées $(a+1,b)$ ou au point $(a,b+1)$.

Pour aller du point de coordonnées (a,b) au point de coordonnées $(a+m,b+n)$ $(n \in \mathbb{N},\ m \in \mathbb{N})$ on a $\binom{m+n}{n}$ chemins : cela revient à placer les n segments verticaux sur les $n+m$ places.

- Pour aller du point de coordonnées $(0,0)$ au point de coordonnées (p,q) on a $\binom{p+q}{p}$ chemins.

- Comme on a supposé que $p \geq q$, un chemin coupe la droite d'équation $x+y=q$ en un point $(k,q-k)$ où $k \in [\![0,q]\!]$. Le nombre de chemins du point $(0,0)$ au point $(k,q-k)$ est $\binom{q}{k}$ et le nombre de chemins du point $(k,q-k)$ au point (p,q) est $\binom{p}{k} = \binom{p}{p-k}$. Ainsi le nombre de chemins est aussi $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{q}{k}\binom{p}{p-k}$.

$* \bigcirc *$

Pour aller plus loin : Nombres de Delannoy.

https://fr.wikipedia.org/wiki/Nombre_de_Delannoy

Sur un quadrillage à coordonnées entières on compte le nombre de chemins joignant le point de coordonnées $(0,0)$ au point de coordonnées $(m,n) \in \mathbb{N}^2$. On ne peut se déplacer sur le quadrillage qu'en augmentant d'une unité l'abscisse ou bien d'une unité l'ordonnée ou d'une unité l'abscisse et l'ordonnée : du point de coordonnées entières (a,b) on peut aller au point de coordonnées $(a+1,b)$ ou au point $(a,b+1)$ ou au point $(a+1,b+1)$. Montrer que le nombre de chemins du point de coordonnées $(0,0)$ au point de coordonnées (m,n) est

$$\sum_{k=0}^{\min\{m,n\}} \binom{n}{k}\binom{m+n-k}{n} = \sum_{k=0}^{\min\{m,n\}} \binom{m}{k}\binom{m+n-k}{m}.$$

Soit $k \in [\![0, min\{n,m\}]\!]$. On compte le nombre de chemins composé de k déplacements diagonaux élémentaires. Sur un tel chemin il y a $m-k$ déplacements élémentaires verticaux et $n-k$ déplacements élémentaires horizontaux. Ainsi sur $m+n-k$ places on met k déplacements diagonaux élémentaires, $m-k$ déplacements élémentaires verticaux et $n-k$ déplacements élémentaires horizontaux. On a donc $\dfrac{(m+n-k)!}{k!(m-k)!(n-k)!}$ configurations différentes pour k fixé.

On note aussi $\dbinom{m+n-k}{k,n-k,m-k} := \dfrac{(m+n-k)!}{k!(m-k)!(n-k)!}$ et on l'appelle coefficient multinomial.

On peut vérifier que $\binom{m+n-k}{k, n-k, m-k} = \binom{m}{k}\binom{m+n-k}{m}$, le nombre de chemins différents est donc :

$$\sum_{k=0}^{\min\{m,n\}} \binom{m+n-k}{k, n-k, m-k} = \sum_{k=0}^{\min\{m,n\}} \binom{n}{k}\binom{m+n-k}{n} = \sum_{k=0}^{\min\{m,n\}} \binom{m}{k}\binom{m+n-k}{m}.$$

• ○ • ○ •

X Dérangements et points fixes d'une permutation

X.1 Formule du principe d'inclusion-exclusion

Formule du principe d'inclusion-exclusion ▷

Soit $n \geq 2$ un entier et $A_1, A_2, \ldots, A_n$ n ensembles distincts finis (éventuellement vides) :

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{k=1}^{n} |A_k| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| + \cdots + (-1)^{n-1}|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|$$

soit $|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n}|A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}|$.

∗ ○ ∗

Remarque : Cette formule est équivalente à la formule de Poincaré pour les probabilités.

∗ ○ ∗

Des solutions : plusieurs approches.

- **Preuve par récurrence.**

  Pour $n \geq 2$ on note P_n l'assertion : « si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont n ensembles distincts finis : $|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n}|A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}|$.»
  - Si $n = 2$, en notant $A_1 \cap A_2 = \{z_1, \ldots, z_r\}$, $A_1 = \{x_1, \ldots, x_p, z_1, \ldots, z_r\}$ et $A_2 = \{y_1, \ldots, y_q, z_1, \ldots, z_r\}$ la formule en découle.
  - Soit $n \geq 3$ un entier, on suppose que l'assertion P_{n-1} est vraie et on considère $A_1, A_2, \ldots, A_n$ des ensembles distincts finis. Comme P_2 est vraie on a :

  $$\begin{aligned}|(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{n-1}) \cup A_n| &= |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{n-1}| + |A_n| - |(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{n-1}) \cap A_n)| \\ &= |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{n-1}| + |A_n| - |(A_1 \cap A_n) \cup (A_2 \cap A_n) \cup \cdots \cup (A_{n-1} \cap A_n)|\end{aligned}$$

    L'assertion P_{n-1} étant supposée vraie on peut l'appliquer sur $|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{n-1}|$ et $|(A_1 \cap A_n) \cup (A_2 \cap A_n) \cup \cdots \cup (A_{n-1} \cap A_n)|$ et ainsi montrer que l'assertion P_n est vraie.
  - Pour $n \geq 3$ si l'assertion P_{n-1} est vraie alors l'assertion P_n est vraie, comme P_2 est vraie l'assertion P_n est vraie pour tout entier $n \geq 2$.
- **En utilisant la formule du binôme de Newton**

  Soit $a \in A_1 \cup \cdots \cup A_n$. On note k le nombre de parties de $A_1, A_2, \ldots, A_n$ dans laquelle a apparait.
  - Si $j \leq k$ on a on a $\binom{k}{j}$ façons de choisir les parties qui contiennent a donc le nombre d'intersections de j parties de $A_1, A_2, \ldots, A_n$ qui contiennent a est $\binom{k}{j}$.
  - Si $k < j \leq n$, a n'est pas dans l'intersection de j parties $A_1, A_2, \ldots, A_n$

Dans $\sum_{k=1}^{n}|A_k| - \sum_{1\le i<j\le n}|A_i\cap A_j| + \sum_{1\le r<s<t\le n}|A_r\cap A_s\cap A_t| + \cdots + (-1)^{n-1}|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n|$ l'élément a est compté :

$$\binom{k}{1}-\binom{k}{2}+\binom{k}{3}+\cdots+(-1)^{k-1}\binom{k}{k}$$

Or $\binom{k}{0}-\binom{k}{1}+\binom{k}{2}-\binom{k}{3}+\cdots+(-1)^{k}\binom{k}{k}=(1-1)^k=0$, Ainsi

$$1=\binom{k}{1}-\binom{k}{2}+\binom{k}{3}+\cdots+(-1)^{k-1}\binom{k}{k}$$

et l'élément a n'est compté qu'une fois dans $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$. Ainsi

$$\sum_{k=1}^{n}|A_k| - \sum_{1\le i<j\le n}|A_i\cap A_j| + \sum_{1\le r<s<t\le n}|A_r\cap A_s\cap A_t| + \cdots + (-1)^{n-1}|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$$

correspond au cardinal de $A_1\cup\cdots\cup A_n$.

* ◯ *

X.2 Nombre de dérangements de n objets

Dérangements ▹

Soit $n\ge 1$ un entier. Le nombre de permutations de $[\![1,n]\!]$ sans point fixe (appelées dérangements de $[\![1,n]\!]$) est

$$d_n = n!\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{1}{k!}.$$

* ◯ *

Exemples d'utilisation :

1. Quel est le nombre de manière de placer n boules numérotées de 1 à n dans n boites numérotées de 1 à n de sorte qu'aucune boule ne soit dans la boite qui porte le même numéro.
2. Un facteur doit distribuer n lettres distinctes à n destinataires distincts. De combien de façon peut-on distribuer les lettres de façon qu'aucune n'arrive à son destinataire.
3. Le problème des 8 tours sur un échiquier (la diagonale étant libre de tours).

* ◯ *

Preuve

On note S_n l'ensemble des permutations de $[\![1,n]\!]$.
Pour $i\in[\![1,n]\!]$, $A_i=\{\sigma\in S_n\ :\ \sigma(i)=i\}$. ($A_i$ est l'ensemble des permutations de S_n qui laisse fixe i).

On a $|A_i|=(n-1)!$: il s'agit du nombre de permutations de $[\![1,n]\!]\setminus\{i\}$.
Pour $1\le i_1<\cdots<i_k\le n$, $A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k}=\{\sigma\in S_n\ :\sigma(i_1)=i_1,\dots,\sigma(i_k)=i_k\}$. On a $|A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k}|=(n-k)!$: il s'agit du nombre de permutations de $[\![1,n]\!]\setminus\{i_1,i_2,\dots,i_k\}$.

$A_1\cup A_2\cdots\cup A_n$ est l'ensemble des permutations de S_n qui admettent au moins un point fixe. Le principe d'inclusion-exclusion donne :

$$|A_1\cup A_2\cdots\cup A_n| = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n}|A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k}|$$

Dans cette somme pour $1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n$ fixé, $|A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}| = (n-k)!$ et on a $\binom{n}{k}$ choix possible pour $\le i_1 < \cdots < i_k \le n$, ainsi

$$|A_1 \cup A_2 \cdots \cup A_n| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{n!}{k!}$$

et le nombre de permutation de S_n sans point fixe :

$$n! - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{n!}{k!} = n! \sum_{k=2}^{n} (-1)^k \frac{1}{k!} = n! \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{k!}.$$

⋆ ○ ⋆

X.3 Nombre de permutations laissant fixe des points

Permutations laissant fixe des points ▷

Soit $n \ge 1$ un entier. Pour $k \in [\![0, n]\!]$ on note $s_n(k)$ le nombre de permutations de $[\![1, n]\!]$ qui admettent exactement k points fixes. On a :

$$s_n(k) = \binom{n}{k} s_{n-k}(0) = \binom{n}{k} d_{n-k}$$

où d_{n-k} est le nombre de permutations de $[\![1, k]\!]$ sans point fixe.

⋆ ○ ⋆

Exemple

Le nombre de permutations de S_n qui admettent exactement un point fixe est :

$$s_n(1) = \binom{n}{1} s_{n-1}(0) = n.(n-1)! \sum_{k=2}^{n-1} (-1)^k \frac{1}{k!} = n! \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{1}{k!}.$$

Remarque

On peut aussi montrer que Le nombre de permutations de S_n qui admettent exactement r points fixes est $s_n(r) = \frac{n!}{r!} \sum_{k=0}^{n-r} (-1)^k \frac{1}{k!}$.

⋆ ○ ⋆

Preuve

Pour obtenir une permutation qui laisse fixe k points de $[\![0, n]\!]$, on fixe les k points, on a donc $\binom{n}{k}$ choix possibles. Une fois les k points $i_1, \ldots, i_k$ fixés le nombre de dérangements de $[\![0, n]\!] \setminus \{i_1, \ldots, i_k\}$ est $s_{n-k}(0)$ d'où le résultat.

⋆ ○ ⋆

Pour aller plus loin : une autre preuve du nombre de dérangements de n objets à l'aide du produit de Cauchy.

La preuve qui va être proposée utilise l'égalité précédente et le produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes. *Elle ne peut donc être abordée qu'en L2 ou en MP/PC.* Comme $1 \le d_n \le n!$, la série entière $f(x) = \sum_{n \ge 0} \frac{d_n}{n!} x^n$ a un rayon de convergence supérieur où égal 1; par conséquent cette série est absolument convergente pour $|x| < 1$. Comme la série $e^x = \sum_{n \ge 0} \frac{x^n}{n!}$ est absolument convergente on peut effectuer le produit de Cauchy de ces deux séries pour $|x| < 1$:

$$e^x f(x) = \sum_{n \ge 0} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{d_{n-k}}{k!(n-k)!} \right) x^n$$

Or $\sum_{k=0}^{n} \dfrac{d_{n-k}}{k!(n-k)!} = \dfrac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_{n-k} = \dfrac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} s_n(k) = 1$. Ainsi

$$e^x f(x) = \sum_{n\geq 0} x^n = \frac{1}{1-x}$$

et

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{1-x} = \left(\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n x^n}{n!}\right)\left(\sum_{n\geq 0} x^n\right).$$

Pour $|x| < 1$ on peut effectuer le produit de Cauchy des deux séries et obtenir :

$$\sum_{n\geq 0} \frac{d_n}{n!} x^n = \sum_{n\geq 0} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}\right) x^n$$

et en identifiant les coefficients

$$d_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

• ○ • ○ •

XI Problème du scrutin

Ce problème est une utilisation classique des dénombrements de chemins vus précédemment.

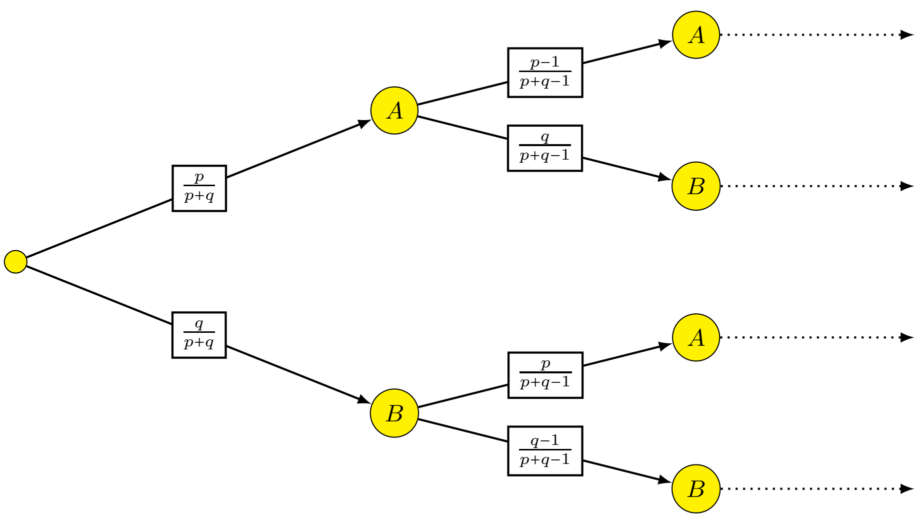
On effectue le dépouillement d'une élection opposant deux candidats. A l'issue du dépouillement, le vainqueur, nommé A, a obtenu p voix, et le vaincu, nommé B, q voix. Quelle est la probabilité que A ait été strictement en tête à chaque instant du dépouillement?

On ignorera les bulletins blancs ou nuls, qui n'interviennent pas dans le problème.

Pour les cas particuliers faciles ($q = 1$ ou $q = 2$), une approche par des arbres est tout à fait possible. Pour le cas général, la modélisation par des chemins sera plus adaptée.

Remarque

L'énoncé parle de probabilité. Qu'est-ce qui est aléatoire, et quelle loi on utilise? On peut supposer que dans l'urne de départ comportant p bulletins A et q bulletins B, on tire à chaque fois uniformément et indépendamment des bulletins précédents le bulletin qu'on dépouille. C'est donc une suite de tirages sans remise, jusqu'à ce que l'urne soit vide. Le début de l'arbre correspondant sera le suivant :



XI.1 Cas particulier faciles - abordables au lycée?

XI.1.1 Si $q = 1$

On peut facilement déterminer la réponse si $q = 1$.

On peut passer par l'événement contraire. On cherche donc la probabilité que l'unique bulletin B soit dépouillé en premier ou en deuxième. En s'aidant éventuellement du début de l'arbre, on obtient que :

$$P(\text{Premier bulletin } = B) = \frac{1}{p+1}$$

puis

$$\begin{aligned}P(\text{2ème bulletin } = B) &= P(\text{1er Bulletin } = A)P(\text{2ème bulletin } = B|\text{1er bulletin } = A)\\ &= \frac{p}{p+1}\frac{1}{p} = \frac{1}{p+1}\end{aligned}$$

Finalement la probabilité cherchée est $1 - \frac{2}{p+1} = \frac{p-1}{p+1}$.

On peut aussi directement remarquer que la probabilité cherchée est la probabilité qu'on commence par deux bulletins A c'est-à-dire $\frac{p}{p+1}\frac{p-1}{p} = \frac{p-1}{p+1}$.

XI.1.2 Si $q = 2$

De manière similaire, on cherche la probabilité de l'événement contraire. En terme de bulletins, c'est la probabilité qu'on commence soit par B, soit par AB, soit par $AABB$. Il s'agit bien de trois événements disjoints. Eventuellement à l'aide de l'arbre, on obtient :
$P(\text{commencer par } B) = \frac{2}{p+2}$
$P(\text{commencer par } AB) = \frac{p}{p+2}\frac{2}{p+1}$
$P(\text{commencer par } AABB) = \frac{p}{p+2}\frac{p-1}{p+1}\frac{2}{p}\frac{1}{p-1} = \frac{2}{(p+2)(p+1)}$

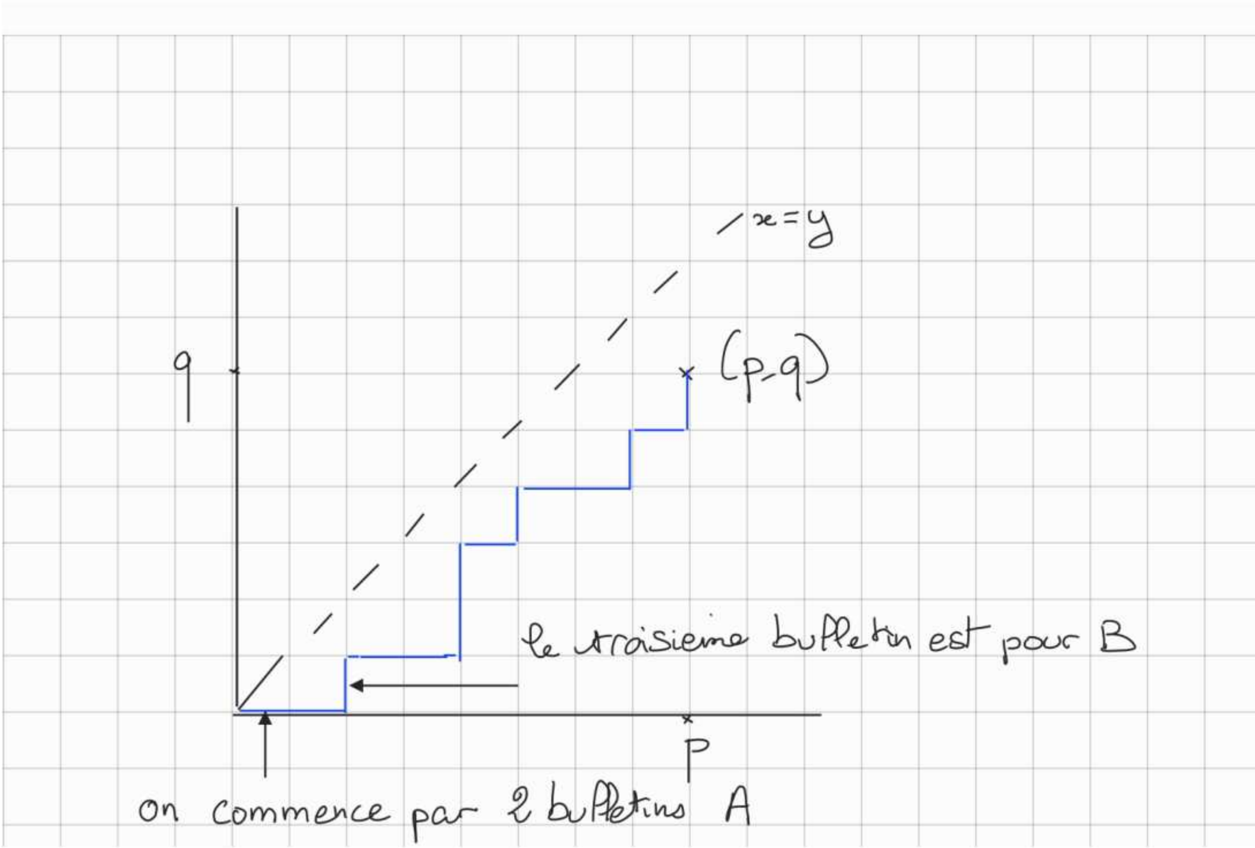
Ainsi :
$P(\text{commencer par } B \text{ ou } AB \text{ ou } AABB) = \frac{2p+2+2p+2}{(p+1)(p+2)} = \frac{4}{p+2}$

Finalement, la probabilité que A soit toujours strictement en tête est $1 - \frac{4}{p+2} = \frac{p-2}{p+2}$.

XI.2 Cas général

XI.2.1 Modélisation par des chemins

La description à l'aide d'un arbre, ou par la description exhaustive de ce qui peut se passer, devient vite inextricable.
On va en fait plutôt modéliser le problème en termes de chemins formés de pas Nord (qui relient un point de coordonnées (x, y) à un point $(x, y + 1)$) et Est (qui relient un point (x, y) à un un point $(x + 1, y)$).
On part de $(0, 0)$. A chaque dépouillement d'un bulletin, on effectue un pas Est si le bulletin est pour A, Nord sinon. L'abscisse représente donc le nombre de bulletins A dépouillés, l'ordonnée le nombre de bulletins B. Lorsqu'on a dépouillé tous les bulletins, on arrive donc au point de coordonnées (p, q). Réciproquement, un chemin formé de pas Nord et Est qui arrive au point (p, q) décrit bien ce qui se passe lors des dépouillements de tous les bulletins.
La question est alors de savoir avec quelle probabilité le chemin obtenu reste strictement sous la première bissectrice d'équation $x = y$ (mis à part à l'origine évidemment).



Rappel. L'ingrédient essentiel pour la suite est que le nombre de chemins formés de pas Nord et Est allant de (a, b) à (c, d) (avec $c \geq a$ et $d \geq b$) est $\binom{c-a+d-b}{c-a}$.

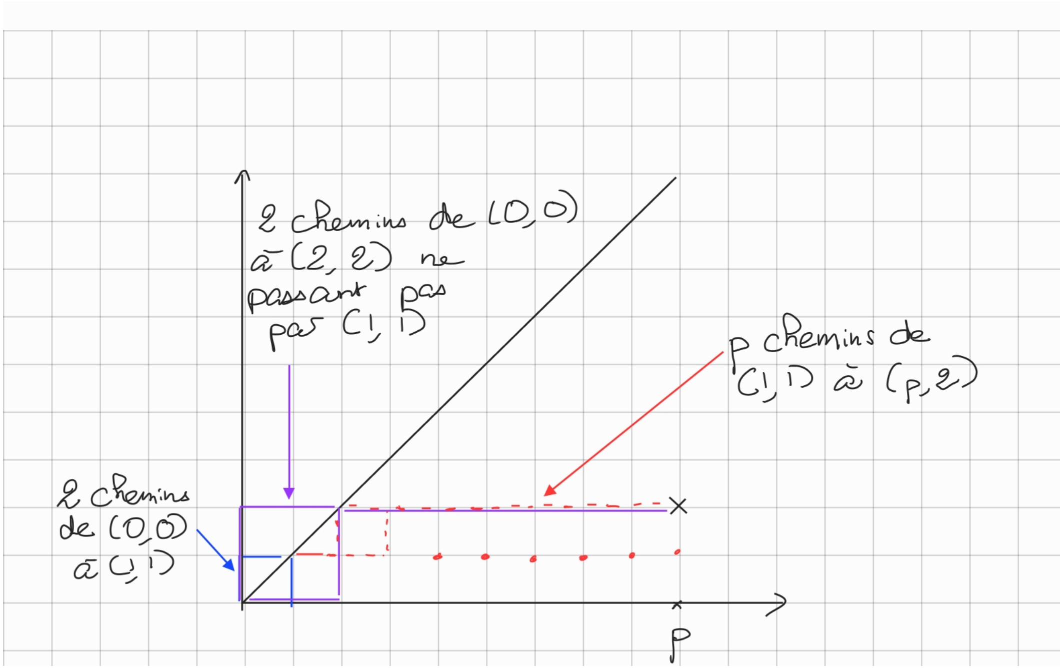
Remarque

Quelle probabilité mettre sur l'ensemble de ces chemins qui vont de $(0,0)$ à (p,q)? On peut avoir l'intuition que c'est la loi uniforme, on va vérifier que c'est bien le cas. Si on reprend la description à l'aide de l'arbre, la probabilité d'obtenir un chemin donné correspond à la probabilité d'une branche toute entière de l'arbre, de l'urne pleine jusqu'à l'urne vide. En multipliant les probabilités conditionnelles le long de la branche, on obtient quelle que soit la branche une fraction avec pour dénominateur $(p+q)(p+q-1)\cdots\times 1 = (p+q)!$, et pour numérateur $(p(p-1)\cdots\times 1)\times(q(q-1)\cdots\times 1) = p!q!$ (pas forcément dans cette ordre, mais les facteurs sont toujours ceux-là).
La probabilité d'une branche de l'arbre est donc $\frac{p!q!}{(p+q)!} = \frac{1}{\binom{p+q}{q}}$: tous les dépouillements possibles ont donc la même probabilité.
La loi de probabilité sur l'ensemble des chemins formé de pas Nord et de pas Est allant de l'origine à (p,q) est donc bien la loi uniforme.

On peut ainsi retrouver les résultats précédents :

- Si $q = 1$
  En passant par l'événement contraire : il y a 2 chemins qui vont de $(0,0)$ à $(p,1)$ en touchant la première bissectrice : celui qui commence par un pas Nord (on commence par dépouiller un bulletin B), et celui qui commence par un pas Est puis un pas Nord (le bulletin B est en deuxième position).
  Puisqu'il y a $\binom{p+1}{p} = p+1$ chemins au total (on peut aussi les énumérer en les dessinant, sans calculer le coefficient binomial), on obtient une probabilité de $1 - \frac{2}{p+1}$.

- Si $q = 2$
  De manière similaire, on cherche la probabilité de l'événement contraire. On cherche donc les chemins qui touchent la diagonale.
  Il y a 2 chemins de $(0,0)$ à $(1,1)$, et $\binom{(2-1+p-1)}{2-1} = p$ chemins de $(1,1)$ à $(p,2)$. Il y a donc $2p$ chemins de $(0,0)$ à $(p,2)$ qui touchent la diagonale en $(1,1)$. Il y a également 2 chemins qui touchent la diagonale en $(2,2)$ sans passer par $(1,1)$. On a donc $2p+2$ chemins qui touchent la diagonale. Le nombre de chemins total est de $\binom{p+2}{p} = \frac{(p+2)(p+1)}{2}$.
  On en déduit qu'un chemin de $(0,0)$ à $(p,2)$ a une probabilité $\dfrac{2(2p+2)}{(p+2)(p+1)} = \dfrac{4}{p+2}$ de toucher la diagonale.
  Finalement, on retrouve que la probabilité que A soit toujours strictement en tête est $1 - \frac{4}{p+2}$.



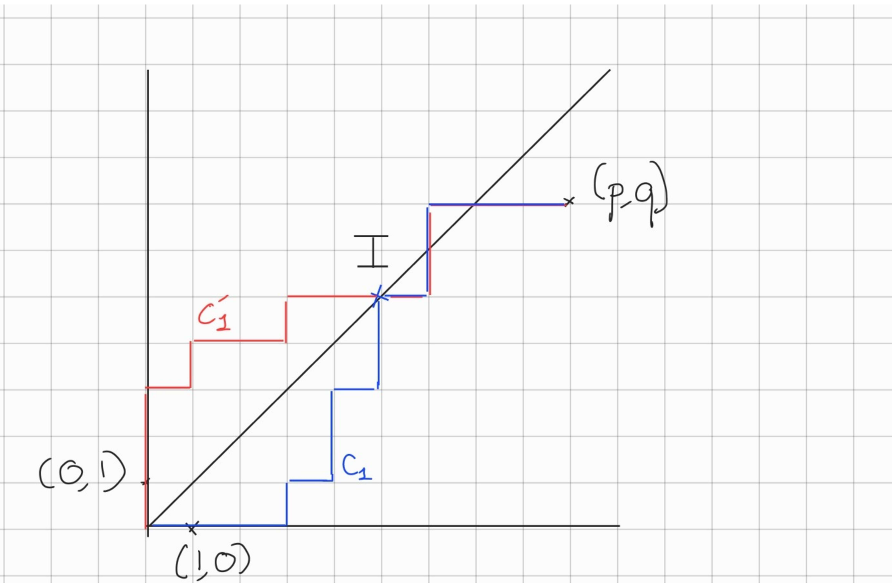
XI.2.2 Cas général : démonstration par principe de symétrie

On cherche donc le nombre de chemins allant $(0,0)$ à (p,q) restant strictement sous la première bissectrice. On commence par remarquer que ces chemins commencent tous par un pas Est (un bulletin A). On cherche donc en fait le nombre de chemins allant de $(1,0)$ à (p,q) restant strictement sous la première bissectrice. Pour cela, on va compter les autres, c'est-à-dire le nombre de chemins allant de $(1,0)$ à (p,q) et rencontrant la première bissectrice.

Lemme Il y a autant de chemins allant de $(1,0)$ à (p,q) et rencontrant la première bissectrice, que de chemins allant de $(0,1)$ à (p,q).

Preuve. Commençons par remarquer qu'il n'y a pas de condition sur les chemins allant de $(0,1)$ à (p,q), mais ils traversent forcément la première bissectrice !

La preuve est bijective, c'est-à-dire qu'on construit une bijection entre l'ensemble (noté D) des chemins allant de $(1,0)$ à (p,q) et rencontrant la première bissectrice, et l'ensemble (noté E) des chemins allant de $(0,1)$ à (p,q).
Soit un chemin c de D. On note I son premier point d'intersection avec la première bissectrice (c'est-à-dire celui ayant la plus petite abscisse, s'il y en a plusieurs). c est formé de deux parties : une partie c_1 de $(1,0)$ à I, une partie c_2 de I à (p,q). On considère le symétrique de c_1 par rapport à la première bissectrice : on obtient un chemin c_1' formés de pas Nord et Est, allant de $(0,1)$ à I. (On peut remarquer que le premier point d'intersection de c_1' avec la première bissectrice est le point I). En concaténant c_1' avec c_2 on obtient bien un chemin de E. On a ainsi construit une application de D dans E.



Pour prouver que cette application est bijective, on explicite sa réciproque. Pour cela on utilise le fait que la symétrie est involutive (elle est sa propre inverse). Considérons un chemin de E. Il rencontre forcément la première bissectrice, notons I le premier point d'intersection (celui avec la plus petite abscisse). De manière analogue, on construit le symétrique du chemin allant de $(0,1)$ à I par rapport à la bissectrice. On obtient bien un chemin de D qui est l'antécédent cherché. □

On a maintenant presque terminé. En effet le cardinal de E est $\binom{p+q-1}{p}$. Il y a donc $\binom{p+q-1}{q} - \binom{p+q-1}{p} = \frac{p-q}{p+q}\binom{p+q}{p}$ chemins allant de $(1,0)$ à (p,q) et ne rencontrant pas la bissectrice.
Finalement, pour trouver la probabilité que A ait toujours été en tête (strictement), il suffit de diviser par le nombre total de chemins de $(0,0)$ à (p,q), soit $\binom{p+q}{p}$ et on obtient finalement une probabilité de $\dfrac{p-q}{p+q}$.

XI.3 Et si $p = q$

Bien évidemment si $p = q$ on trouve 0, puisque tous les chemins touchent la bissectrice au point d'arrivée. Mais on peut se poser la question dans ce cas là de la probabilité que A soit toujours strictement au-dessus de B, sauf au début et à la fin. Cela revient donc à compter les chemins Nord et Est qui vont de $(0,0)$ à (p,p) en restant strictement au-dessous de la première bissectrice sauf en $(0,0)$ et (p,p).

On peut commencer par remarquer qu'un tel chemin commence nécessairement par un pas Est et finit par un pas Nord. On doit donc compter les chemins allant de $(1,0)$ à $(p,p-1)$ sans toucher la première bissectrice.

Procédons comme précédemment, et comptons les chemins allant de $(1,0)$ à $(p,p-1)$ qui touchent la première bissectrice. Le même principe de symétrie que précédemment montre qu'il y en a autant que de chemins qui vont de $(0,1)$ à $(p,p-1)$, c'est-à-dire $\binom{2p-2}{p}$. Il y a donc $\binom{2p-2}{p-1} - \binom{2p-2}{p} = \frac{(2p-2)!}{(p-1)!p!}$.
La probabilité cherchée est donc $\frac{(2p-2)!}{(p-1)!p!\binom{2p}{p}} = \frac{1}{2(2p-1)}$.

(on peut aussi remarquer, par symétrie, que la probabilité pour que B soit toujours strictement au-dessus de A, sauf au début et à la fin, est la même. La probabilité que ce soit toujours le même qui ait été en tête est donc de $\frac{1}{2p-1}$.

XI.4 Variante “sens large”

Qu'en est-il pour la probabilité que A ait été en tête, mais au sens large, à chaque instant du dépouillement ? En particulier, qu'obtient-on si $p = q$?

Pour cela, on peut se ramener au cas précédent, en imaginant qu'on rajoute fictivement un bulletin pour A au début (dit autrement, on translate tout le chemin de 1 pas vers l'Est, et on rajoute le premier pas Est). On obtient ainsi, en partant d'un chemin de $(0,0)$ à (p,q) restant au sens large sous la diagonale, un chemin allant de $(0,0)$ à $(p+1,q)$ restant strictement au-dessous de la diagonale. On vérifie facilement avec l'opération inverse que cette application est bien bijective.
Il suffit donc d'utiliser les formules précdentes en remplaçant p par $p+1$ pour le nombre de chemins : on en trouve $\dfrac{p+1-q}{p+1+q}\dbinom{p+1+q}{p+1}$.
En divisant par $\binom{p+q}{p}$ on trouve une probabilité de $\frac{p+1-q}{p+1}$.

Remarque

Si $p = q$, on trouve une probabilité de $\frac{1}{p+1}$; le nombre de chemins qui restent au-dessous (au sens large) de la première bissectrice est alors $\dfrac{1}{2p+1}\dbinom{2p+1}{p+1} = \dfrac{1}{p+1}\dbinom{2p}{p}$.
Ce nombre est appelé *nombre de Catalan*. C'est aussi le nombre de chemins formés de pas Nord-Est et Sud-Est allant de $(0,0)$ à $(2p,0)$ restant au-dessus de l'axe des abscisses au sens large (appelés chemins de Dyck), ou encore le nombre de parenthésages corrects avec p parenthèses ouvrantes et p parentéses fermantes.

Remarque

On trouve plus couramment dans la littérature une modélisation en terme de chemins Nord-Est (bulletins A) et Sud-Est (bulletins B). L'abscisse d'un point correspond alors au nombre de bulletins dépouillé à ce moment-là, et l'ordonnée à la différence entre le nombre de bulletins A et le nombre de bulletins B. On arrive alors au point de coordonnées $(p+q, p-q)$ et la question initiale est alors de savoir avec quelle probabilité on reste au dessus (strictement) de l'axe des abscisses.

Références

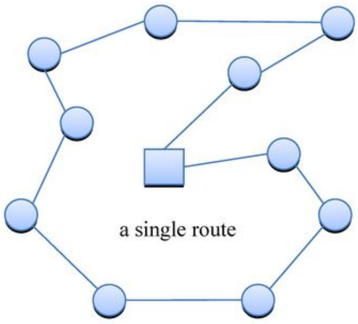
- Problème du scrutin, Wikipedia
- Première épreuve du Capes agricole mathématiques 2017

• ○ • ○ •

XII Exemples en lien avec l'informatique

XII.1 Complexité

Le problème du voyageur de commerce (« complexité ») ▷

> Le problème du Voyageur de commerce (TSP en Anglais pour « Traveler Salesman Problem ». Un commercial doit effectuer une tournée comprenant n villes et il faut déterminer l'ordre de visite qui minimise la longueur de la tournée.
>
> 
>

* ◯ *

Si t_n est le complexité en temps d'un algorithme , la notation $t_n = O(n)$ signifie qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ et $c > 0$ tels que pour tout $n \geq n_0,\ t_n \leq cn$

* ◯ *

Les n points étant numérotés, on cherche un ordre sur les n points. La méthode qui vient à l'esprit, qualifiée de méthode exhaustive, est :

→ générer tous les ordres possibles, calculer la longueur de chacune des tournées et ne garder que la plus petite.

Le nombre d'ordres possibles avec n points est le nombre de permutations, c'est à dire $n!$.

Un algorithme construit selon la méthode exhaustive va prendre un « certain temps ». On peut dénombrer les « opérations » :

Une fois l'ordre des villes fixé, le calcul de la tournée prend un temps $O(n)$ pour calculer la somme des n distances (retour à la ville de départ). Mettre à jour et retenir le minimum prend un temps constant. Finalement, la complexité en temps de l'algorithme basé sur la méthode exhaustive est : $O(n \times n!)$.

`Une remarque :` Pour tout $n > 0$, $n! > \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$. Pour $n = 20$, cela donne un temps approximatif d'au moins

$$n \times n! > 20 \times \left(\frac{20}{2,72}\right)^{20} > 10^9 \times 10^9$$

Avec un processeur de 1 GHz (1 milliard d'opérations par seconde), le temps approximatif est de l'ordre de 1 milliard de secondes soit environ 30 ans.

* ◯ *

→ Le nombre d'ordres possibles peut être affiné en prenant en compte la « symétrie » de la distance euclidienne

Par exemple, pour $n = 4$, $(1,3,2,4)$ et $(4,2,3,1))$ donnera la même longueur de trajet.

De plus, en fixant une ville de départ, le nombre de tournées possibles « se réduit » à $\frac{(n-1)!}{2}$.

→ Pour améliorer la compléxité, une solution consiste à considérer des sous-ensembles de l'ensemble des villes.

Ce n'est pas l'objet ici, mais si l'on note $V = \{v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ l'ensemble des villes et S un sous-ensemble de V.

Pour simplifier l'implémentation, on représentera S directement par un entier de n bits, chaque bit indiquant si $v_i \in S$ ou pas. Plus précisément, $v_i \in S$ si et seulement si le bit en position i de S est à 1.

Par exemple, si $S = \{v_3, v_2, v_0\}$ et $n = 5$, alors on aura :

$$\{v_3, v_2, v_0\} \quad \underset{représenté\, par}{\longrightarrow} \quad \begin{array}{ccccc} v_4 & v_3 & v_2 & v_1 & v_0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

Combien de sous-ensembles peut-on former ? (*réponse* 2^n) Si l'on impose à la ville v_4 de ne pas être dans le sous-ensemble S ? (*réponse*2^{n-1})

Ces résultats sont à rapprocher du nombre de parties d'un ensemble à n éléments.

ette méthode est appliquée dans le cadre d'une mémorisation de distances caculées entre des villes et la complexité s'évalue en $O(n^2 2^n)$.

• ◯ • ◯ •

XII.2 Partition d'un entier

Inspiré de « Techniques Algorithmiques et Programmation » C.Gavoille

Article Wikipédia

« En mathématiques, une partition d'un entier naturel non nul est une décomposition de cet entier en une somme d'entiers strictement positifs (appelés parties ou sommants), à l'ordre près des termes. Une telle partition est en général représentée par la suite des termes de la somme, rangés par ordre décroissant. »

Par exemple,

$$\begin{aligned}5 &= 5\\ &= 4+1\\ &= 3+2\\ &= 3+1+1\\ &= 2+2+1\\ &= 2+1+1+1\\ &= 1+1+1+1+1\end{aligned}$$

On remarque donc qu'il existe 7 partitions de l'entier 5 que l'on note $p(5)=7$ (si $p(n)$ représente le nombre de partitions de l'entier n).
A noter que compter le nombre de partitions d'un entier n, n'est pas le même problème que compter le nombre de solutions dans $\mathbb{N}^*$ de l'équation $x_1+x_2+\dots x_p=n$ avec p fixé. Ce problème a été étudié dans la section VI et il a $\binom{n-1}{p-1}$ solutions pour $n \geq p$.
Les premières valeurs de $p(n)$ sont les suivantes :

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...	100
$p(n)$	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	...	190569292

Il n'existe pas de formule (formule close) permettant de donner l'expression de $p(n)$ en fonction de n ; de nombreuses études, en théorie des nombres, portent sur ce sujet et dernièrement (en 2013), il a été démontré que $p(120052058)$ qui possède 12198 chiffres dans son écriture décimale est un nombre premier.

Hardy et **Ramanujan** ont donné, en 1918, un équivalent de $p(n)$:

$$p(n) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{4n\sqrt{3}} \times \exp\left(\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}\right)$$

et l'on retiendra qu'il existe deux constantes c et c' réelles telles que :

$$2^{c'\sqrt{n}} \leq p(n) \leq 2^{c\sqrt{n}}.$$

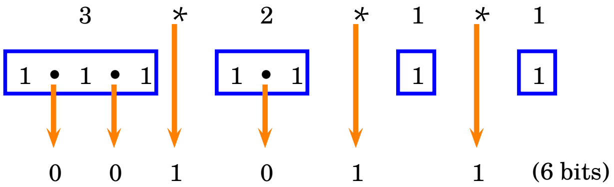
XII.2.1 Approche exhaustive

Fort du constat de l'introduction sur l'absence de formule « close », l'idée est de générer toutes les partitions d'un entier n et de les compter.

Dans un premier temps, on envisage un algorithme de calcul via un codage permettant de représenter une partition. (séparateurs • représentés par des 0 et $\ast$ par des 1)

• ○ • ○ •

Par exemple, pour la partition $3 * 2 * 1 * 1$ *du nombre 7 :*



D'une manière générale, un mot binaire de $n-1$ bits est nécessaire pour représenter une partition d'un entier n. Les séparateurs des 1 encadrés en bleu (symbole •) sont codés par un 0 (si plusieurs 1) et les séparateurs de la partition (symbole $*$) par des 1.

On liste tous les mots binaires de $n-1$ bits (avec un algorithme); on les teste afin de déterminer s'ils représentent une nouvelle partition. En effet, plusieurs mots binaires peuvent correspondre à la même.

Par exemple, 001011 $(=3+2+1+1)$ et 110010 $(=1+1+3+2)$ évoquent la même partition de 7.

Comment faire ? ▷

Adjonction d'un 1 (fictif) au mot binaire et découpage de groupes de bits au niveau des 1 (parts)
Par exemple, dans les deux partition de 7 équivalentes vues précédemment,

- 0010111 → 001,01,1,1 (blocs rangés par longueur décroissante)
- Alors que dans 1100101 → 1,1,001,01 (ce n'est pas le cas)

* ◯ *

En termes d'efficacité, cette méthode trouve ses limites car, par exemple à partir de $n = 61$, on dépasse 10^{18} opérations élémentaires correspondant à plus de 30 ans de calcul avec les ordinateurs actuels. On examine trop de mots binaires par rapport au nombre de partitions $p(n)$ que l'on cherche (dans le tableau de l'introduction, $p(100) = 190569292 \approx 1,9 \times 10^8$ très loin des 10^{18} atteint pour $n = 61$)

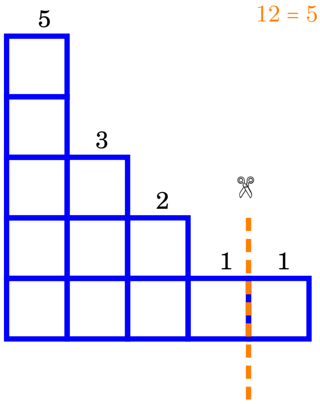
XII.2.2 Relation de récurrence, diagrammes de Ferrers.

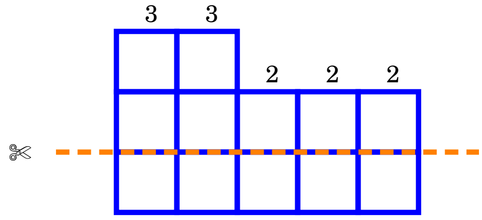
Diagrammes de Ferrers

Une manière graphique de représenter une partition d'un entier n est d'utiliser un empilement de carrés dans des colonnes de **hauteur décroissante**. On appelle une telle représentation un diagramme de **Ferrers**.

Exemple :

$12 = 5+3+2+1+1 = 3+3+2+2+2$





Le diagramme de gauche est qualifié de **type 1** car sa dernière colonne n'est composée que d'un seul carré (partition « terminant » par 1); celui de droite est de **type 2**, la dernière colonne comporte au moins deux carrés. Ces deux catégories sont disjointes et un diagramme est soit de type 1, soit de type 2.

Les diagrammes se décomposent facilement en éléments plus petits. Par exemple, si l'on coupe un diagramme de Ferrers entre deux colonnes, on obtient deux diagrammes de Ferrers. De même si on le coupe entre deux lignes (voir « les ciseaux » de la figure ci-dessus.

Une relation de récurrence est plus facile à établir si l'on fixe **le nombre de parts des partitions**, c'est-à-dire le nombre de colonnes des diagrammes. Dans la suite, on notera $p(n,k)$ le nombre de partitions de n en k parts. Le nombre de parts k varie entre 1 et n, d'où

$$p(n) = p(n,1) + p(n,2) + \ldots + p(n,k) + \ldots + p(n,n) = \sum_{k=1}^{n} p(n,k)$$

avec $p(n,1) = p(n,n) = 1$ et considérant les deux types de diagramme vus précédemment (type 1 et type 2), il est naturel d'écrire

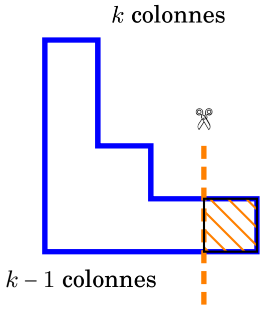
$$p(n,k) = p_1(n,k) + p_2(n,k) \quad (1)$$

où $p_i(n,k)$ est le nombre de diagrammes de type i avec $i \in \{1,2\}$.

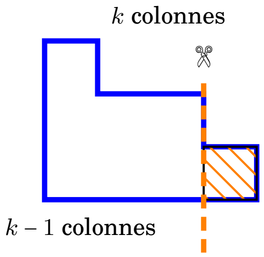
Récurrence

n et k étant fixés, concernant les diagrammes,

- de **type 1** : on retire la dernière colonne ; le diagramme de Ferrers restant comporte $k-1$ colonnes et est du type 1 ou du type 2. Réciproquement à partir d'un diagramme de Ferrers comportant $k-1$ colonnes du type 1 ou du type 2, en ajoutant à droite une colonne avec un seul carré, on obtient un diagramme de Ferrers de type 1 de k colonnes.



ou



si bien que,

$$p_1(n,k) = p(n-1,k-1)$$

- de **type 2** : on enlève la première ligne, le diagramme de Ferrers restant représente une partition de $n-k$ en k parts (type 1 ou type 2). Réciproquement à partir d'un diagramme de Ferrers restant représente une partition de $n-k$ en k parts (type 1 ou type 2) et en ajoutant une ligne de k carrés, on obtient un diagramme de Ferrers rde type 2 représentant une partition de n en k parts. Donc

  $$p_2(n,k) = p(n-k,k).$$

  Ainsi la relation (1) devient,

  $$p(n,k) = p(n-1,k-1) + p(n-k,k)$$

  et la relation de récurrence est établie pour $2 \le k \le n-1$ ($k-1 \ge 1$ et $n-k \ge 1$).

•○•○•

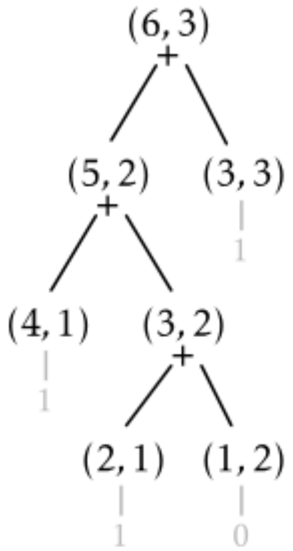
Compte-tenu de ce qui précède, on peut envisager un algorithme récursif écrit en python :

```python
def p(n,k):
    """ fonction recursive mettant en oeuvre la formule precedente """
    if k>n:
        return 0
    if k==1 or k==n:
        return 1
    return p(n-1,k-1)+p(n-k,k)

def partition(n):
    """ retourne p(n) """
    k=0
    s=0
    for k in range(1,n+1):
        s+=p(n,k)
    return s
```

XII.2.3 Compter les appels, vers la complexité d'un algorithme

Arbre des appels



L'arbre des appels d'une fonction est un arbre dans lequel les paramètres d'appels sont placés sur les nœuds ; les fils sont les différents appels lancés par la fonction.

L'exécution de la fonction correspond à un parcours en profondeur de l'arbre (*parcours récursif ; ici on traite la racine puis le sous-arbre gauche et ensuite le sous-arbre droit*). À la racine, figurent les paramètres du premier appel.

Un exemple de l'arbre des appels pour $p(6, 3)$: par rapport à la définition ci-contre, on a ajouté aux nœuds une opération (ici +) ainsi que les valeurs terminales aux feuilles (ici 0 ou 1), c'est-à-dire les valeurs renvoyées lorsqu'il n'y a plus d'appels récursifs. Les valeurs terminales ne font pas partie des nœuds de l'arbre des appels.

7 nœuds dont 4 feuilles, chacune ayant une valeur terminale (0 ou 1) qui ne font pas partie de l'arbre des appels. Le nombre de valeurs terminales à 1 est 3=$p(6, 3)$.

D'une manière générale, $p(n, k)$ est précisément le nombre de feuilles de valeur 1.

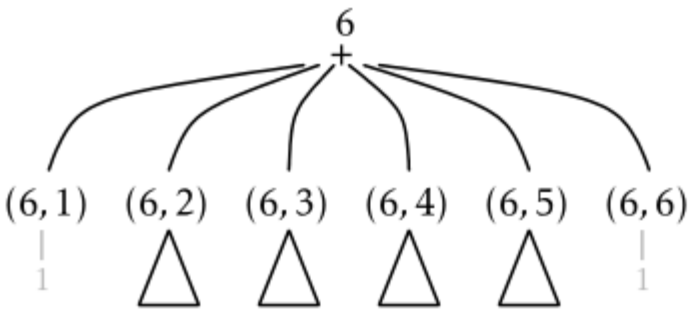
Dans un arbre binaire où chaque nœud interne a deux fils, le nombre de nœuds est égal à 2 fois le nombre de feuilles -1.
(*se démontre par récurrence : n le nombre de nœuds et f celui de feuilles, supposant que $n = 2f - 1$, ajouter 2 feuilles à 1 nœud revient à augmenter de 1 le nombre de feuilles puisque 2 feuilles en plus et une qui devient nœud interne :* $2(f + 1) - 1 = 2f + 1 = 2f - 1 + 2 = n + 2$)

Or chaque feuille renvoie 0 ou 1. De plus il n'y a jamais de feuilles sœurs renvoyant toutes les deux 0. C'est dû au fait qu'une feuille gauche ne peut jamais renvoyer 0 (pour s'en convaincre, partant d'un nœud où $n \geq k$, le fils gauche correspond aux paramètres $n - 1$ et $k - 1$ qui vérifie également $n - 1 \geq k - 1$).

Donc le nombre de feuilles est au plus deux fois le nombre de valeurs 1 et il est aussi au moins égal au nombre de valeurs 1. Il est donc compris entre $p(n, k)$ et $2p(n, k)$.

Ainsi, le nombre de nœuds de l'arbre des appels est entre $2p(n, k) - 1$ et $4p(n, k) - 2$.

De plus, la fonction `partition(6)` que l'on peut schématiser de la façon suivante, nécessite la mise en œuvre des fonctions $p(6, 1)$, $p(6, 2)$, $\ldots$, jusqu'à $p(6, 6)$



donc d'une manière générale, toutes les remarques précédentes permettent de donner une évaluation du nombre total d'appels de fonctions récursives $p(n, k)$ (noté C_n) lors de l'exécution de `partition(n)`.

$$2\sum_{k=1}^{n} p(n, k) - n \leq C_n \leq 4\sum_{k=1}^{n} p(n, k) - 2n \quad \Leftrightarrow \quad 2p(n) - n \leq C_n \leq 4p(n) - 2n$$

Précédemment dans le document, il était écrit qu'il existe deux constantes c et c' telles que

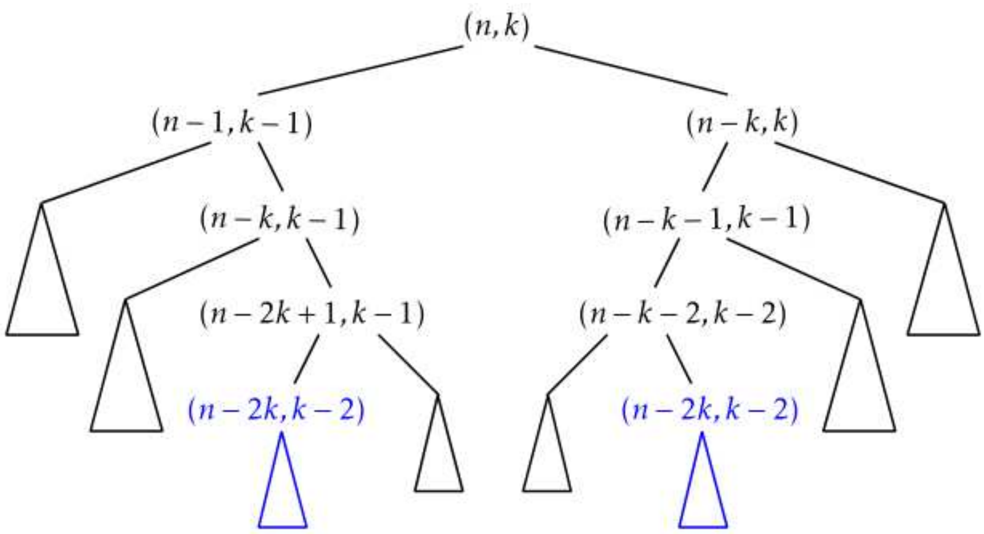
$$2^{c'\sqrt{n}} \leq p(n) \leq 2^{c\sqrt{n}}$$

Ainsi, sans rentrer dans les détails, on peut donc dire que C_n est « de l'ordre de » $2^{\sqrt{n}}$; C_n se définissant comme la complexité en temps de la fonction `partition(n)`. Cela représente une amélioration par rapport à la méthode exhaustive pour laquelle il fallait examiner 2^{n-1} mots binaires.

• ○ • ○ •

`Remarque` : Les paramètres qui figurent dans les différents arbres d'appels sont des couples de la forme (k,ℓ) où k et ℓ sont des nombres de $[\![1,n]\!]$; de ce fait le nombre de nœuds différents est au plus égal à n^2 or $2^{\sqrt{n}}$ est asymptotiquement plus grand que n^2. L'explication est que l'algorithme proposé précédemment « appelle » des fonctions `p(n,k)` déjà calculées ; ce qui constitue une perte de « temps » (on remarquera que ce n'est pas le cas dans `p(6,3)`).

La figure ci-dessous montre qu'à partir de n'importe quel nœud (n,k), on aboutit à la répétition du nœud $(n-2k,k-2)$, à condition que $n-2k \geq 1$ et $k-2 \geq 1$.



On pallie ce problème en effectuant de la `programmation dynamique` (on stocke dans un tableau les calculs effectués) ou de la `mémorisation paresseuse` concepts qui ne seront pas détaillés ici.

• ○ • ○ •

XIII Autres exemples

XIII.1 Alignement d'antennes

Avec un nombre fixé d'antennes défectueuses ▷

On aligne n ($n \geq 3$) antennes relais. Pour que les signaux soient transmis il ne faut pas qu'il y ait 2 antennes défectueuses consécutives. Si parmi les n antennes m sont défectueuses déterminer le nombre de configurations qui permettent la transmission des signaux.
Réponse : $\binom{n-m+1}{m}$ si $m \leq \dfrac{n+1}{2}$, 0 si non (on peut aussi utiliser la convention $\binom{n}{k} = 0$ si $k > n$.)

⋆ ○ ⋆

Des solutions : plusieurs approches.

- **Méthode 1**
  On place les $n-m$ antennes non défectueuses. On peut placer une antenne défectueuse au départ, à la fin ou entre 2 antennes non défectueuses, soit $n-m+1$ places possibles pour les m antennes défectueuses.On obtient ainsi $\binom{n-m+1}{m}$ configurations possibles si $m \leq \dfrac{n+1}{2}$, cela nécessite d'avoir $m \leq n-m+1$.
- **Méthode 2** On note x_i le nombre d'antennes non défectueuses entre 2 antennes défectueuses : x_1 celui avant la première antenne défectueuse, x_2 celui entre les 2 premières antennes défectueuse ,... ,x_{m+1} après la dernière antennes défectueuses :

$$\underbrace{\times\cdots\times}_{x_1} \mid \underbrace{\times\cdots\times}_{x_2} \mid \ \dots \ \mid \underbrace{\times\cdots\times}_{x_{m+1}}$$

  On a $x_1+\cdots+x_{m+1} = n-m$ où $x_1 \geq 0$, $x_{m+1} \geq 0$ et $x_i \geq 1$ pour $i = 2,\dots,m$.
  A la solution $(x_1,x_2,\dots,x_{m+1})$ on peut associer la suite $y_1 = x_1+1$, $y_{m+1} = x_{m+1}+1$ et $y_i = x_i \geq 1$ pour $i = 2,\dots,m$. Ainsi $(y_1,y_2,\dots,y_{m+1})$ est une solution dans $\mathbb{N}^*$ de l'équation $y_1+\cdots+y_{m+1} = n-m+2$. On obtient donc $\binom{n-m+2-1}{m+1-1} = \binom{n-m+1}{m}$ configurations distinctes (voir section VI).

Avec un nombre variable d'antennes défectueuses ▷

On aligne n ($n \geq 2$) antennes relais. Pour que les signaux soient transmis il ne faut pas qu'il y ait 2 antennes défectueuses consécutives. Déterminer le nombre de configurations qui permettent la transmission des signaux.

∗ ○ ∗

Solution :

On note u_n le nombre de configurations possibles pour n antennes ($n \geq 2$).
En notant par 1 si l'antenne est en état de marche et 0 on a :
Pour n= 2, $u_2 = 3$. Configurations possibles :
1 1 ou 1 0 ou 0 1
Pour $n = 3$, $u_3 = 5$. Configurations possibles :
1 1 1 ou 1 1 0 ou 1 0 1 ou 0 1 1 ou 0 1 0
Pour $n \geq 2$, on a la relation de récurrence :

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

En effet si la première antenne est en état de marche on a u_{n+1} configurations possibles et si la première antenne n'est pas en état de marche il est nécessaire que l'antenne suivante soit en état de marche d'où u_n configurations possibles :

$$1 \quad \underbrace{\times\cdots\times}_{n+1 \text{ antennes relais}}$$

$$0\ 1 \quad \underbrace{\times\cdots\times}_{n \text{ antennes relais}}$$

Comme $u_2 = 13$, $u_3 = 5$, on peut établir un programme python pour déterminer u_n, on peut aussi donner une expression de u_n (suites récurrentes linéaires : $u_{n+2} - u_{n+1} - u_n = 0$ (suites de Fibonacci).)

Avec un raisonnement similaire :

De nombreux exercices font appels à ce type de raisonnement :

- Nombre de façons de vider un tonneau de n litres avec des seaux de 1 litre et 2 litres.
  En notant u_n le nombre de façons de vider le tonneau de n litres on a
  $$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$
  avec $u_1 = 1$ et $u_2 = 2$.
- Nombre de façons de paver un tableau de 2 lignes et n colonnes avec des dominos.
  Un notant u_n le nombre de paver un tableau de 2 lignes et n colonnes on a
  $$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$
  avec $u_1 = 1$ et $u_2 = 2$.
- Nombre de façon de descendre un escalier de n marches : marche à marche ou en sautant parfois une ou deux marches.
  En notant u_n le nombre de façons de descendre l'escalier de n marches on a
  $$u_{n+3} = u_{u+2} + u_{n+1} + u_n$$
  avec $u_1 = 1$, $u_2 = 2$ et $u_3 = 4$.
  Remarque : Cela conduit à déterminer les racines de $X^3 - X^2 - X - 1$ et il n'y a pas de racines évidentes.

Des variantes :

Dans une urne qui contient n boules numérotés de 1 à n on tire m boules. Combien de prises contiennent au moins deux boules portant des numéros consécutifs ?
Qui peut aussi être habillé par : nombre de tirage du loto ayant deux entiers consécutifs.

Pour se ramener au problème précédent on peut dénombrer le nombre de prises qui ne contiennent pas 2 entiers consécutifs : $\binom{n-m+1}{m}$ si $m \leq \dfrac{n+1}{2}$, 0 si non. En effet on peut assimiler le tirage des m boules numérotées parmi n à l'emplacement des m antennes défectueuses parmi n. Tirer deux numéros consécutifs, c'est avoir deux antennes défectueuses côte à côte.

• ○ • ○ •

XIII.2 Empilement de sphères

Empilement de sphères ▷

On entasse des boulets (ou des oranges) sous forme pyramidale ayant pour base un triangle équilatéral de côté n boulets.

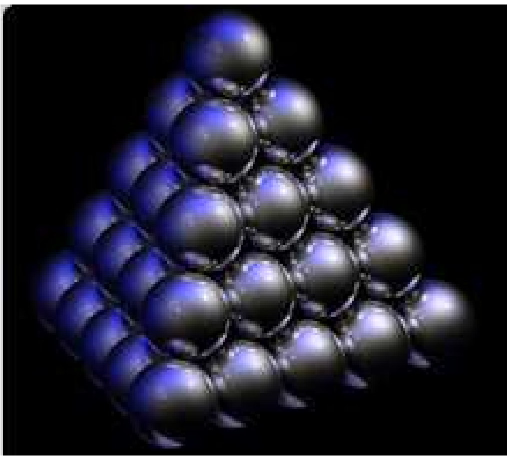


image de
Empilement des sphères, La Recherche
Déterminer le nombre de boulets contenus dans la pyramide.

* ○ *

Une animation : [cliquer ici]

Par Blotwell : Travail personnel. Rendered using POV-Ray and converted with Adobe ImageReady.Cette infographie a été créée avec POV-Ray., CC BY-SA 3.0, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=247432

La pyramide est constituée de n couches, chaque couche forme un triangle équilatéral de coté k boulets et contient $k+(k-1)+\cdots+1=\dfrac{k(k+1)}{2}=\binom{k+1}{2}$ boulets. Ainsi la pyramide contient

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{k+1}{2}=\sum_{k=2}^{n+1}\binom{k}{2}=\binom{n+2}{3}=\frac{(n+2)(n+1)n}{6}\text{ boulets.}$$

Une variante :

On peut aussi prendre pour base un carré de côté n boulets. Le nombre de boulets entassés est :

$$n^2+(n-1)^2+\ldots 1^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

* ○ *

Remarque Ce problème fait appel au rangement de sphères de manière à maximiser la proportion d'espace qu'elles occupent. Il fut poser par Kepler (1611) mais ne fut prouver (à 99 %) que récemment avec le recourt de l(informatique (comme le problème des quatre couleurs). Ci dessous plusieurs liens :

https://www.math.u-bordeaux.fr/~cbachocb/Mathenjean.pdf
https://fr.wikipedia.org/wiki/Empilement_compact
http://villemin.gerard.free.fr/Wwwgvmm/Geometri/SpheEmpi.htm#histo

• ○ • ○ •

XIII.3 Nombre de solutions dans $\mathbb{N}$ de $x_1+x_2+\ldots+x_n\leq p$

Somme d'entiers inférieurs ou égaux à p ▷

Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et $p\in\mathbb{N}$. Déterminer le cardinal de l'ensemble

$$G_{n,p}=\{(k_1,k_2,\ldots,k_n)\in\mathbb{N}^n\mid k_1+k_2+\cdots+k_n\leq p\}$$

$* \bigcirc *$

Des solutions : plusieurs approches.

On note $G_{n,p} = \{(k_1, k_2, \dots, k_n) \in \mathbb{N}^n \,|\, k_1 + k_2 + \dots + k_n \leq p\}$ et, pour tout i de $[\![0, p]\!]$, $E_{n,i} = \{(k_1, k_2, \dots, k_n) \in \mathbb{N}^n \,|\, k_1 + k_2 + \dots + k_n = i\}$.

- **Avec une partition :**
  - On a $G_{n,p} = \bigcup_{i=0}^{p} E_{n,i}$ avec les ensembles $E_{n,i}$ 2 à 2 disjoints. On a donc

    $$\text{card}(G_{n,p}) = \sum_{i=0}^{p} \text{card}(E_{n,i}) = \sum_{i=0}^{p} \binom{n-1+i}{i}$$

    en utilisant les résultats de la partie V.3.
  - Dans la suite, on fixe $n \in \mathbb{N}^*$ et l'on montre que $\text{card}(G_{n,p}) = \binom{n+p}{p}$ par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$.

    L'initialisation ne pose pas de problème puisque $\text{card}(G_{n,0}) = 1 = \binom{n+0}{0}$. Soit $p \in \mathbb{N}$ et supposons que $\text{card}(G_{n,p}) = \binom{n+p}{p}$.

    $\text{card}(G_{n,p+1}) = \sum_{i=0}^{p+1} \binom{n-1+i}{i} = \binom{n+p}{p} + \binom{n+p}{p+1} \underset{Pascal}{=} \binom{n+p+1}{p+1}$.

    On conclut par récurrence que

    $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall p \in \mathbb{N}, \quad \text{card}(G_{n,p}) = \binom{n+p}{p}.$$
  - On peut aussi donner une preuve combinatoire de l'égalité $\sum_{i=0}^{p} \binom{n-1+i}{i} = \binom{n+p}{p}$ à l'aide des chemins sur un quadrillage.

    Les chemins avec des déplacements Est et Nord allant du point de coordonnées $(0,0)$ au point de coordonnées (p,n) sont au nombre de $\binom{n+p}{p}$. On peut partitionner ces chemins en fonction de la position du dernier déplacement Nord, $\binom{n-1+i}{i}$ étant le nombre de chemins pour lesquels le dernier déplacement Nord est en $n+i$-ième position.
- **Avec une bijection :**

  On note $E_{n+1,p} = \{(k_1, k_2, \dots, k_n, k_{n+1}) \in \mathbb{N}^{n+1} \,|\, k_1 + k_2 + \dots + k_n + k_{n+1} = p\}$ et on rappelle que $\text{card}(E_{n+1,p}) = \binom{n+p}{p}$.

  Soit f l'application définie sur $G_{n,p}$ par

  $$f((k_1, k_2, \dots, k_n)) = (k_1, k_2, \dots, k_n, p - \sum_{i=1}^{n} k_i)$$

  est à valeurs dans $E_{n+1,p}$.

  En effet, de $(k_1, k_2, \dots, k_n) \in G_{n,p}$, il découle que $p - \sum_{i=1}^{n} k_i \geq 0$. De plus $k_1 + k_2 + \dots + k_n + (p - \sum_{i=1}^{n} k_i) = p$.
  - f est injective : Soit $K = (k_1, k_2, \dots, k_n) \in G_{n,p}$ et $L = (\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n) \in G_{n,p}$. $K \neq L$ implique qu'il existe $s \in [\![1, n]\!]$ tel que $k_s \neq \ell_s$, ce qui prouve que $f(K) \neq f(L)$.
  - f surjective : Soit $Y = (y_1, y_2, \dots, y_{n+1}) \in E_{n+1,p}$, il est clair que $y_1 + y_2 + \dots + y_n \leq p$ et $(y_1, y_2, \dots, y_n) \in G_{n,p}$ donc f est surjective.
  - f est donc bijective et les ensembles $G_{n,p}$ et $E_{n+1,p}$ ont même cardinal,

    $$\text{card}(G_{n,p}) = \binom{n+p}{p}.$$

$\bullet \bigcirc \bullet \bigcirc \bullet$

XIII.4 Combinaisons avec répétition : un exemple pas à pas

8 sortes de thé et 4 tasses ▷

> On a le choix entre huit thés différents et on veut compter le nombre de plateaux différents composés de quatre tasses de thé.
> `Exercice extrait de Barbazo, enseignement de spécialité de terminale, p305.`

* ○ *

Analyse de l'énoncé :

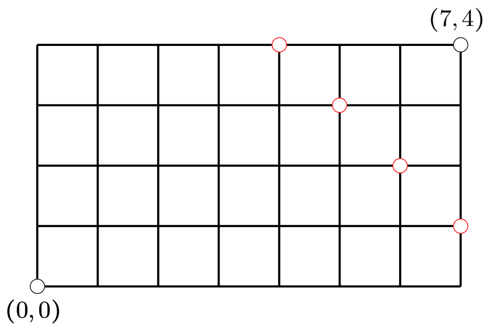
Dans cet énoncé il faut repérer qu'il peut y avoir répétition des thés (il peut y avoir plusieurs tasses avec une même sorte de thé) et que les tasses sont indiscernables (on n'a pas précisé par exemple une tasse verte, une tasse jaune, une tasse bleue, une tasse blanche).

* ○ *

Des solutions : plusieurs approches.

- **Une méthode experte de résolution :**
  En termes de jetons, cela correspond au choix de 4 jetons (jeton=thé dans une tasse) parmi 8 avec remise et sans ordre. En terme de 4-uplet, cela correspond à une solution dans $\mathbb{N}^8$ de l'équation $x_1 + \dots + x_8 = 4$ où x_i est le nombre de tasses contenant le thé numéro i.
  Vu de ces deux façons avec le formalisme des séparateurs, on a $\binom{7+4}{4}$ plateaux différents.
- **Une méthode par disjonction de cas en fonction du nombre de thés différents :**
  - Un seul thé : $8 = \binom{8}{1}$ choix pour ce thé et une fois le thé choisi il n'y a qu'une façon de remplir les tasses.
  - Deux thés différents : $\binom{8}{2}$ choix pour ces deux thés et une fois les thés choisis on a 3 façons de remplir les tasses $(3+1,\ 2+2,\ 1+3)$, soit avec le principe multiplicatif $3 \times \binom{8}{2}$.
  - Trois thés différents : $\binom{8}{3}$ choix pour ces trois thés et une fois les thés choisis on a 3 façons de remplir les tasses $(1+1+2,\ 1+2+1,\ 2+1+1)$, soit avec le principe multiplicatif $3 \times \binom{8}{3}$.
  - Quatre thés différents : $\binom{8}{4}$ choix pour ces quatre thés et une fois les thés choisis il n'y a qu'une façon de remplir les tasses $(1+1+1+1)$.

  On dénombre de cette façon : $\binom{8}{1} + 3 \times \binom{8}{2} + 3 \times \binom{8}{3} + \binom{8}{4}$. Soit, avec les coefficients binomiaux,
  $$\binom{3}{3} \times \binom{8}{1} + \binom{3}{2} \times \binom{8}{2} + \binom{3}{1} \times \binom{8}{3} + \binom{3}{0} \times \binom{8}{4}.$$
  Cette somme est bien égale à $\binom{11}{4}$. On peut le vérifier par un calcul direct ou en prenant un peu de recul avec la méthode combinatoire qui consiste à interpréter les coefficients binomiaux en nombres de chemins dans un quadrillage avec uniquement des déplacements vers la droite et vers le haut. Soit ici



  $\binom{11}{4}$ est le nombre de chemins allant du point de coordonnées $(0,0)$ au point de coordoonées $(7,4)$. L'ensemble de ces chemins étant l'union disjointe des chemins passant respectivement par les points de coordonnées
  - $(7,1)$: il y en a $\binom{3}{3} \times \binom{8}{1}$,
  - $(6,2)$: il y en a $\binom{3}{2} \times \binom{8}{2}$,
  - $(5,3)$: il y en a $\binom{3}{1} \times \binom{8}{3}$,
  - $(4,4)$: il y en a $\binom{3}{0} \times \binom{8}{4}$.

  On utilise pour chaque sous cas le principe multiplicatif puis le principe additif pour l'union.

* ○ *

Des erreurs possibles :

- Avoir remarqué que les tasses sont indiscernables mais ne pas prendre en compte le fait qu'il peut y avoir plusieurs fois le même thé : en dénombrant ainsi cela revient à compter le nombre de parties à 4 éléments dans un ensemble à 8 éléments, soit $\binom{8}{4} \neq \binom{11}{4}$.
- Avoir remarqué qu'il peut y avoir plusieurs fois le même thé mais considérer que les tasses sont discernables : en dénombrant ainsi cela revient à compter le nombre de 4-uplets avec répétition possible d'éléments pris dans un ensemble de huit éléments, soit $8^4 \neq \binom{11}{4}$.
- Avoir bien remarqué que les contraintes (tasses indiscernables et possibilité d'avoir plusieurs fois le même thé) et vouloir reproduire un raisonnement analogue à celui qui permet de compter dans le cas sans remise, les tirages non ordonnés à partir des tirages ordonnés et donner comme résultat $\frac{8^4}{4!}$. Le problème ici est qu'avec la répétition possible des thés, on n'a pas toujours le même nombre de façon d'ordonner les tasses (penser aux tasses de couleurs différentes). Prenons les deux cas extrêmes : le même thé alors il n'y a pas de permutation possible des tasses, les quatre thés différents alors il y a $4!$ permutations possibles des tasses. En effet $\frac{8^4}{4!} \neq \binom{11}{4}$.

- Lorsqu'on compte le nombre de plateaux avec 2 thés différents (analogue pour le cas de 3 thés différents) il faut être vigilant à ce que l'on considère avec ordre et sans ordre. La rédaction ici est : $\binom{8}{2}$ choix pour ces deux thés et une fois les thés choisis on a 3 façons de remplir les tasses ($3+1$, $2+2$, $1+3$). On a fait le choix des thés sans ordre, notons cet ensemble $\{A, B\}$. Un fois l'ensemble choisi, 3 tasses du thé A et 1 tasse de thé B, donne bien un plateau différent de 1 tasse du thé A et 3 tasses de thé B. On pourra remarquer qu'une fois les thés choisis, cela revient à compter le nombre de couples d'entiers (x_A, x_B) solutions de $x_A + x_B = 4$ avec $x_A \geq 1$ et $x_B \geq 1$ (on « retrouve » les séparateurs avec $x'_A = x_A - 1$, $x'_B = x_B - 1$, $x'_A + x'_B = 2$).
  Toujours pour le nombre de plateaux avec 2 thés différents, on aurait aussi pu faire la disjonction de cas. Cas 1 : 1 tasse avec un thé et 3 tasses avec un autre puis choix ordonné des thés 8 choix pour le thé solo, 7 choix pour l'autre thé. Cas 2 : 2 tasses de chaque thé puis $\binom{8}{2}$ choix des deux thés (sans ordre puisqu'il n'y a pas de distinction de nombre de tasses). On a bien $8 \times 7 + \binom{8}{2} = 3 \times \binom{8}{2}$.
  Avec un calcul « sans aucun ordre » on aurait eu $2 \times \binom{8}{2}$ et oublié des cas avec 1 et 3 tasses.
  Avec un calcul avec de « l'ordre partout » on aurait eu $3 \times 8 \times 7$ et on aurait compté deux fois les cas de 2 tasses de chaque thé.

• ◯ • ◯ •

XIV Références

Combinatoire et dénombrement, IREM de Paris

* ◯ *

Rappel des références données au fil du document

https://fr.wikipedia.org/wiki/Nombre_de_Delannoy
Problème du scrutin, Wikipedia
Page personnelle de C.Gavoille
https://fr.wikipedia.org/wiki/Partition_d'un_entier
Empilement des sphères, La Recherche
https://www.math.u-bordeaux.fr/~cbachocb/Mathenjean.pdf
https://fr.wikipedia.org/wiki/Empilement_compact
http://villemin.gerard.free.fr/Wwwgvmm/Geometri/SpheEmpi.htm#histo