DE L'ART ET DES MATHEMATIQUES DANS NOS CLASSES.

Institut de Mathématiques de Bordeaux

Unité de formation Mathématiques et interactions

université de BORDEAUX

IREM AQUITAINE

Sommaire

La mathématique avec l'art

Tout semble séparer la mathématique et l'art : tandis que la première construit ses raisonnements et forme ses figures dans un ordre méthodique où elle prétend fonder la vérité, l'émotion esthétique, qui s'éprouve mais ne se démontre pas, constitue le champ privilégié du second. Vérité contre beauté : d'un côté la raison pure appliquée à des formes idéales, de l'autre une émotion incarnée dans un objet réel. Dans la méthode comme dans la pratique, les domaines paraissent nettement délimités, et bien rares les recoupements possibles.

Ce serait pourtant négliger un phénomène fondamental : toutes les grandes civilisations ont connu un développement concomitant de ces deux domaines ; souvent, un même individu a su concilier l'esprit géométrique et l'émotion esthétique. Il n'est qu'à citer, à l'époque de la Renaissance, des personnalités hybrides comme celles de Piero della Francesca, Léonard de Vinci, Albert Dürer ; plus près de nous des artistes comme Escher ou Georges Rousse, pour se rendre compte que les deux *forma mentis*, versants opposés et complémentaires de l'esprit humain, peuvent très bien cohabiter de manière féconde.

Il n'y a là, selon nous, ni miracle ni paradoxe : dès qu'on creuse un peu la question apparemment obscure des affinités entre mathématiques et art, tout un faisceau de fécondations croisées s'offre à la vue. D'abord parce que les mathématiques ne sont pas étrangères à la beauté : elles recèlent des révélations aussi émouvantes que celles produites par une œuvre d'art, et la compréhension profonde d'un théorème peut s'avérer aussi troublante que la contemplation d'une image. Réciproquement, l'art atteint souvent à une forme de vérité, éprouvée plutôt que prouvée, mais dont la compréhension intuitive approche parfois la rigueur d'une démonstration. C'est ainsi que « Les Ménines » de Vélasquez constitue à la fois une réflexion d'une profondeur vertigineuse sur les pouvoirs de l'image, et l'impeccable application du dispositif perspectif. Dans le domaine non moins fascinant des arts décoratifs, on a observé que les motifs de faïence et stuc apposés sur les murs de l'Alhambra de Grenade réalisaient rigoureusement certains groupes de pavages réguliers du plan. Dans les deux cas, la fascination visuelle ressentie par le spectateur s'appuie sur une structure profonde informée par la mathématique.

Il ne faut pas imaginer, d'ailleurs, que la rencontre se fasse selon une direction unique, de la science vers l'art ; au contraire, il advient fréquemment que l'étonnement suscité par une œuvre d'art débouche sur des formalisations scientifiques aussi riches qu'inattendues. Les anamorphoses (étymologiquement : « retour vers la forme » ; il s'agit de représentations perspectives observées en dehors du point de vue, et donnant lieu à une déformation surprenante : l'exemple le plus fameux figure dans les « Ambassadeurs » de Hans Holbein le Jeune) ont par exemple précédé la découverte par les géomètres du XVII^{e} siècle (principalement Desargues) des notions de groupe de transformations et d'invariant associé. L'interprétation des coniques comme anamorphoses d'un cercle a ainsi débouché sur toute une série de résultats impressionnants dans le domaine de la géométrie projective.

Par ses prétentions à l'universalité, une époque et un lieu ont pu cristalliser le croisement fécond de la science et de l'art : il s'agit de la civilisation de la Renaissance en Italie. La perspective centrale, développée par un architecte (Filippo Brunelleschi), pratiquée par les peintres et sculpteurs (Masaccio, Donatello, Paolo Uccello, Piero della Francesca...), enfin théorisée par un humaniste (Leon Battista Alberti), illustre parfaitement l'esprit de synthèse qui a permis l'élaboration et le succès considérable de ce qui n'était au départ qu'une simple technique de représentation, et s'est rapidement tranformée en une « forme symbolique » qui résume presque à elle seule l'esprit de la Renaissance.

Il advient aussi qu'en se confrontant à la science dans un dialogue inquiet et curieux, l'art cherche à se redéfinir en s'émancipant des formes du passé. C'est ce qui s'est produit lors de la naissance de l'art moderne, quand à la suite des expériences fondatrices de Manet et Cézanne, les grands peintres du début du XX^{e} siècle, Picasso, Matisse, Klimt et consorts, ont paru se détacher de la perspective pour mieux affirmer l'autonomie de leur art. Or il convient de rappeler que selon Cézanne : « tout dans la nature se modèle selon le cylindre, la sphère et le cône ». Idée qui trouve un curieux écho dans la célèbre phrase de Galilée : «Le livre de l'Univers est écrit en langue mathématique ... et les caractères en sont les triangles, les cercles, et d'autres figures. » Cette intuition synthétique de la nature comme spontanément géométrique rapproche à travers les siècles l'artiste et le scientifique, et ce rapprochement doit d'autant moins surprendre que Galilée, excellent dessinateur, ne dédaignait pas de se faire critique d'art, et d'entretenir une correspondance suivie avec des peintres contemporains comme Artemisia Gentileschi. Et si Cézanne a paru abolir la perspective centrale, c'est pour lui substituer une géométrie non moins rigoureuse mais plus synthétique dans son appréhension de l'espace, puisque non soumise à la tyrannie d'un point de vue.

C'est dans cet esprit que le groupe « Arts et mathématiques » de l'IREM d'Aquitaine a pu constituer ces dernières années à l'Université de Bordeaux un centre d'échanges et de dialogues renouvelés entre les deux pratiques, élaborant un riche matériel pédagogique à la croisée de la géométrie et des arts plastiques. Qu'il s'agisse du flipbook, du perspectographe de Dürer, de la mise au point historique, de l'étude des pavages ou de la géométrie inhérente aux œuvres d'art, le travail réalisé est impressionnant. Nous laissons au lecteur le plaisir de trouver son chemin dans ces pages fécondes, au carrefour de la beauté et de la vérité.

Denis Favennec (professeur de mathématiques et historien d'art).

De l’art et des mathématiques dans nos classes

Des activités où les mathématiques sont sources d'expression créatrice...

Introduction

Cette brochure est le fruit du travail du groupe « Arts et Mathématiques » de l'IREM d'Aquitaine, qui s'est constitué en 2013 avec la participation d'enseignants de mathématiques et d'arts plastiques. Il s'est donné pour objectif de mettre au point des activités pour le cours de mathématiques, à différents niveaux mais dans le cadre des programmes, ayant un lien avec l'art, tout en faisant en sorte que le contenu mathématique de l'activité soit réel et que l’élève ne soit pas juste spectateur.

Ce travail entre collègues de disciplines a priori assez éloignées a été indispensable pour mettre au point des activités pédagogiquement intéressantes des deux côtés, où les mathématiques ne se résument pas à une construction géométrique, ni les arts plastiques à un travail de coloriage. L'une des différences de nos pratiques en classe est qu'on ne fait pas d'« exercice » en arts plastiques. Une activité doit pouvoir être source d’expressivité.

L'un des thèmes de rencontre de nos deux disciplines qui s'est vite imposé à nous est la perspective. C'est pourquoi cette brochure s'ouvre sur deux **éclairages sur la perspective**, d'une part d'un point de vue historique et artistique, d'autre part sur les notions en jeu d'un point de vue mathématique.

La première activité que nous présentons concerne la classe de 6ème. Elle n'est pas à proprement parler artistique, mais elle permet de présenter concrètement la **perspective cavalière du cube** à l'aide d'un vidéoprojecteur, par un jeu d'ombre sur le tableau.

Nous restons encore dans le cadre de la perspective cavalière pour l’activité du **flipbook** : les élèves vont réaliser un flipbook d'une porte qui s'ouvre. C'est l'occasion de parler d'ellipse, de dessiner des parallélogrammes ; le flipbook obtenu sert ensuite de point de départ à un travail d'expression artistique.

Nous passons ensuite à la perspective centrale (à point de fuite). Non étudiée en tant que telle au collège en mathématiques, elle peut néanmoins être abordée et fournir une application concrète au théorème de Thalès.
Nous avons lors de nos échanges mis au point un objet, le « **perspectographe** », permettant d’expérimenter concrètement le procédé utilisé par Dürer. Nous présentons cet outil, ainsi qu'une activité de collège où nous le mettons à profit pour expliquer le principe de la perspective centrale avec une modélisation par le théorème de Thalès.

Thalès est également au cœur de l'activité « **Thalès in situ** », dont l'objectif est la réalisation dans l'enceinte de l’établissement d'une exposition où les œuvres sont en deux morceaux. C'est en se plaçant au bon point de vue qu'on peut les voir.
Ces deux activités autour de Thalès ont été testées en collège, mais nous les pensons pertinentes également en lycée.

L’activité suivante a été motivée par l'introduction des **pavages** dans les programmes de collège. Les frises ou pavages sophistiqués ne suscitaient que peu d’intérêt chez nos collègues d'arts plastiques, car peu propice au développement de l'expressivité. Nous proposons plutôt un travail sur un pavage très simple à base de losanges. Il est en fait déjà assez riche mathématiquement pour nos élèves, et le fait qu'on puisse y voir des cubes en perspective cavalière en fait un support pertinent pour diverses activités artistiques.

Enfin, les œuvres de certains artistes contemporains sont basées sur des réflexions d'ordre mathématique. Nous présentons en particulier une activité autour d'œuvres de **Charles Chirinian**. Il s'agit de tableaux en plusieurs morceaux que l'on peut réarranger de diverses manières. Après une analyse géométrique de l'œuvre déjà intéressante, un travail de dénombrement est possible. L'activité a été testée en primaire et en collège.

Nous avons cherché autant que possible à faire des activités en co-intervention avec nos collègues d'arts plastiques. Lors de nos échanges, nous avons constaté que la sémantique de certains termes que nous utilisons est très différente d'une discipline à l'autre. C'est pourquoi nous avons trouvé pertinent de mettre en annexe un **lexique** qui permet aussi de réfléchir à ce travail de traduction que nos élèves sont de fait amenés à faire en permanence.

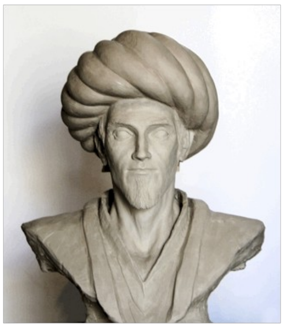
L'arrivée des nouveaux programmes de collège et des EPI nous a parfois facilité la tâche. Néanmoins nous sommes bien conscients que de telles activités sont parfois difficiles à mettre en place. Pour Thalès in situ, les mathématiques sont réellement au service de la démarche artistique, donc l'activité n'a que peu de sens sans le professeur d'arts plastiques. Mais les autres activités sont pertinentes même portées uniquement par l'enseignant de mathématiques (et nous les avons parfois également testées ainsi).

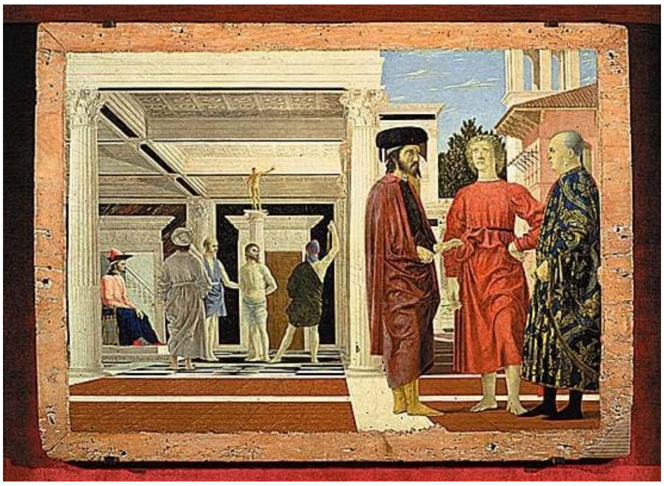
Nous espérons que ces activités vous inspireront et vous convaincront de la pertinence de faire parfois se rejoindre nos deux disciplines.

Le groupe Arts et Mathématiques de l'IREM d'Aquitaine

Le groupe remercie tout particulièrement Andréa Harcourt pour la conception de la couverture de la brochure

Brève histoire de la perspective à points de fuite dans l'art occidental

Pendant longtemps la perspective désignait en fait l'étude de l'optique. L'Antiquité identifie l'œil à une chambre noire. L'étude de la vision et le principe de la camera obscura sont connus dès l'époque d'Aristote (vers 300 BC). Pour Ptolémée (100-168), le cône des rayons visuels se suffit à lui-même ; l'œil n'est pas représenté.	 Raphaël, École d'Athènes (1509-1511) au centre en bleu Aristote
 Ibn Al Haytam dit Alhazen (Bassora c. 965 – Le Caire c.1039)	Le savant Ibn Al Haytam étudie la lumière et le rayon lumineux. Il écrit un traité d'optique (Kitab Al Mazanir) qui influencera Roger Bacon (1214-1294) et Léonard de Vinci (1452-1519).
 Brunelleschi (1377-1446)	La perspective linéaire est une technique utilisant la projection pour représenter sur un plan (bidimensionnel) des objets de l'espace (tridimensionnel). La tradition attribue sa découverte à Brunelleschi. C'est l'architecte Averlino dit le Filarète (c.1400-c.1469) qui le signale. Mais c'est surtout le mathématicien Manetti (1423-1497) qui, en écrivant la vie de Brunelleschi, décrit l'expérience fondatrice réalisée vers 1413 pour la construction du dôme de Florence.

<table>
<tr><td>Traditionnellement, les premières œuvres utilisant la perspective centrale sont attribuées en peinture à Masaccio (la fresque de la Trinité de l’église Santa Maria Novella à Florence) et en sculpture à Donatello (1386-1466).
Des études récentes sur les artistes du Trecento placeraient cette découverte de la perspective cent cinquante ans plus tôt (Giotto (1266-1337), chapelle Scrovegni de Padoue).</td><td></td></tr>
<tr><td>C’est Alberti (1404-1472) qui, avec son « De pictura » (« sur la peinture », Bâle 1435), expliquera la technique de la perspective ; elle fait appel à la « pyramide visuelle » de l’optique euclidienne : les rayons visuels forment un cône dont le sommet est l’œil, et la base l’objet à représenter.
Cette méthode se retrouvera dans l’œuvre de Pierro della Francesca (1418-1492) et plus au nord dans celle d’Albert Dürer (1471-1528).</td><td></td></tr>
</table>

<u>Où la perspective devient rationalité mathématique !</u>

La perspective entre dans le champ des mathématiques par les études sur les livres d’Euclide. Elles sont alors en plein développement. Des mathématiciens comme, par exemple, Daniele Barbaro (1513-1570) traduisent et commentent les livres d’Euclide.
Dans son livre « Perspectivae libri sex », le mathématicien Guidobaldo del Monte (1509-1575) démontre à la manière des géomètres les principales propriétés de la projection perspective.
Desargues (1591-1661), avec son maintenant célèbre traité du « Brouillon project d'une atteinte aux événements des rencontres du Cône avec un Plan » (1639) : les principales idées que l’on y rencontre sont les notions de dualité point-droite et de point à l’infini.

<u>Ainsi la perspective devient géométrie projective.</u>

Autour de la perspective : point de vue mathématique

Le peintre d'un tableau figuratif doit représenter un objet de l'espace sur un objet plan (la toile). La perspective explicite des règles pour cela. (Lorsqu'on veut représenter un objet sur un cylindre ou une sphère, on parle d’anamorphose).
Il y a plusieurs types de perspectives. Ici nous parlerons de la perspective centrale - ou à point de fuite - et de la perspective parallèle - avec la perspective cavalière en cas particulier. Mathématiquement, une perspective est donc une application de l'espace R^3 (éventuellement pas tout entier) dans le plan R^2.
Nous allons les définir et donner leurs principales propriétés mathématiques.

I. Perspective centrale

La perspective centrale est peu présente dans les programmes de mathématiques de collège. Elle est plus souvent utilisée en arts plastiques. On parle aussi de perspective à point de fuite, ou encore de perspective géométrique.
On va considérer que le peintre ne regarde l’objet que d’un œil. C’est son point de vue. Les mathématiques réduisent celui-ci à un point O de l’espace, et modélisent le tableau par un plan P.

Définition :
Un point M de l'espace est représenté sur la toile par le point M' situé à l'intersection de la droite (OM) et du plan P (voir figure 1).

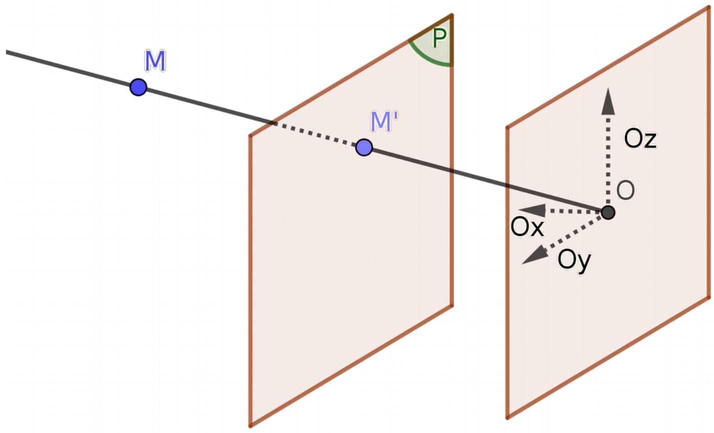


Figure 1 : Principe de la perspective centrale

On constate que :
- tous les points situés sur cette droite (OM) seront représentés par le même point M’ sur le plan P.
- si la droite (OM) est parallèle au plan P, elle ne coupe pas le plan P. Donc ces points M’ n’auront pas de représentation. Ils forment le plan P_0, parallèle à P et passant par O.

Cette définition nous permet d’étudier les ombres et lumières, en mettant le point M entre le plan P et le point O. Si le point O est une source lumineuse (supposée ponctuelle), la projection de l'objet sur le plan P correspond alors à l'ombre de l'objet sur le plan (voir la figure 2).
Cette application de R^3 (privé d’un plan) dans R^2 est une projection sur le plan P appelée *projection conique.*

<u>Expression analytique</u> : on peut toujours supposer que le point O a pour coordonnées (0 , 0 , 0) et le plan P pour équation $x = 1$. Alors le point M(x_M , y_M , z_M) (avec x_M non nul, sinon (OM) est parallèle au plan P) aura pour représentation le point M'(1 , y_M/x_M , z_M/x_M) : en effet $\overrightarrow{OM'}$ doit être colinéaire à $\overrightarrow{OM}$.

Propriétés :

A. Image d'une droite

Suivant la position de la droite, son image par cette projection peut être une droite, un point, ou une droite privée d'un point.

L'image par cette projection d'une droite (d) parallèle au plan P (mais pas incluse dans le plan P_0) est une droite parallèle à (d) : c'est l'intersection du plan P et du plan P_d contenant O et la droite (d).

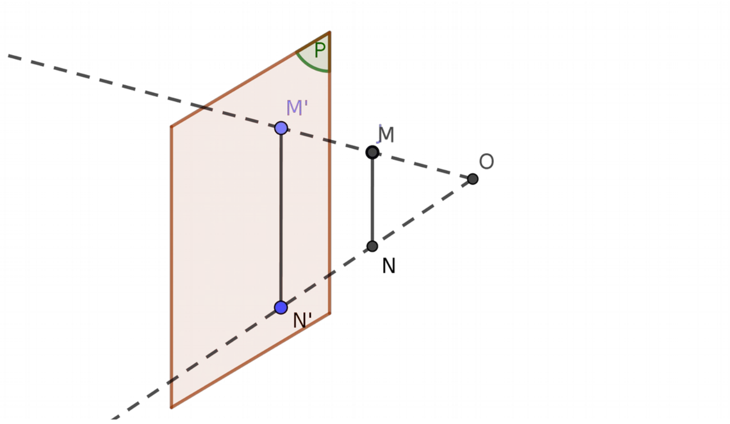


Figure 2 : Image d'un segment parallèle au plan de projection. La projection peut être interprétée comme l'ombre du segment.

L'image d'une droite (d) passant par O est un point unique (l'intersection de (d) et du plan P).

L'image d'une droite (d) ne passant pas par O et non parallèle au plan P est une droite privée d'un point (voir figure 3)**.**
Cette droite (d') est l'intersection du plan P et du plan P_d contenant O et la droite (d).
Il faut lui enlever le point projection de O sur P parallèlement à (d), appelé ***point de fuite.***
Preuve :
On note (d') l'intersection du plan P et du plan P_d contenant O et la droite (d),
Quel que soit le point M appartenant à (d), la droite (OM) est incluse dans le plan $P_{d.}$ Donc l'image M' de M par la projection appartient bien à l'intersection de P_d et de P, c'est-à-dire (d').
Réciproquement, si on considère un point N' sur cette droite (d'), un antécédent éventuel de N' appartiendra forcément à la droite (ON'). Or la droite (ON') et la droite (d) sont coplanaires (elles appartiennent au plan de projection P_d) ; elles seront donc sécantes en un point N si et seulement si elles ne sont pas parallèles. Ce point N aura alors bien pour image N'. Si elles sont parallèles, le point N' n'aura pas d'antécédent. Ce point qui n'a pas d'antécédent, appelé ***point de fuite***, est la projection de O sur le plan P parallèlement à la droite (d) ; il n'est la représentation d'aucun point de (d) par cette perspective. Il correspond en fait à l'image d'un point « à l'infini » : c'est la limite des images de M lorsque M part vers l'infini en restant sur la droite (d). Évidemment l'artiste qui dessine, représente aussi ce point !

Remarque 1 : le point de fuite d'une droite ne dépend en fait que de la direction de cette droite : **deux droites parallèles définissent ainsi le même point de fuite, et auront donc des droites images concourantes en ce point.**

Remarque 2 : le point de fuite sépare la droite image en 2 demi-droites, qui correspondent aux points situés devant l'observateur O, et derrière l'observateur. En peinture, on ne voit généralement représentée qu'une demi-droite, car on ne représente que ce qui est devant nous.

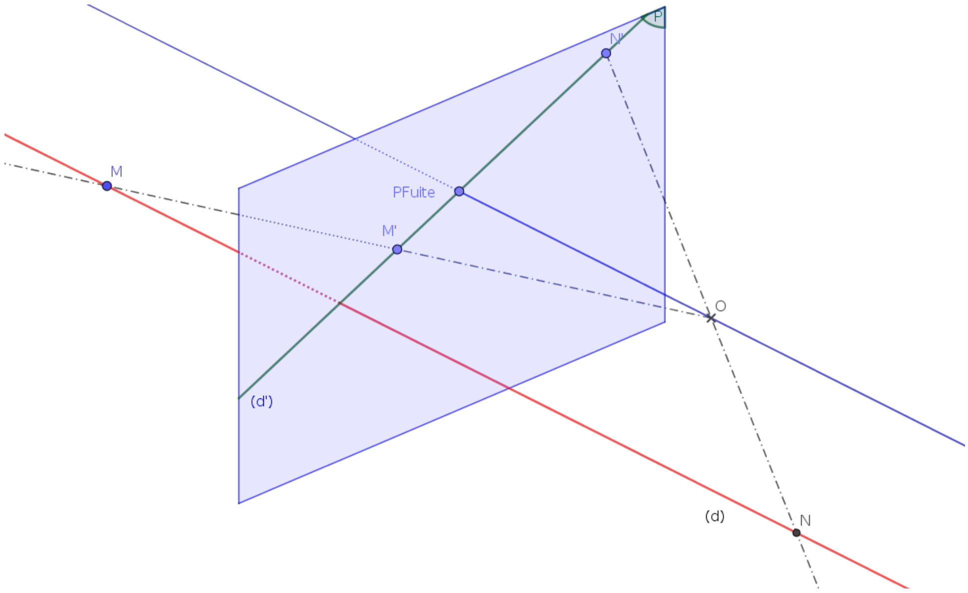


Figure 3 : (d'), privée du point de fuite, est l'image de la droite (d).

B. Image de 2 droites et parallélisme (ou non), point de fuite

L'image de deux droites parallèles dans un plan parallèle au plan de projection P est à nouveau deux droites parallèles, par transitivité de la relation de parallélisme.

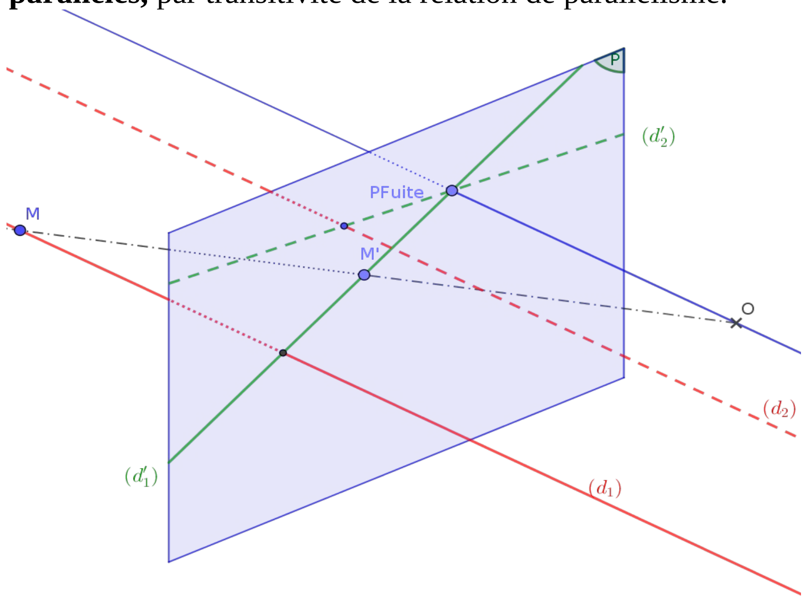


Figure 4 : (d'$_1$) et (d'$_2$) sont les images des deux droites parallèles (d$_1$) et (d$_2$).

Par contre, **l'image de deux droites (d_1) et (d_2) parallèles, mais situées dans un plan non parallèle au plan de projection P est formée de deux droites sécantes, privées de leur point d'intersection**, qui est le point de fuite dans la direction (commune) de ces droites (voir figure 4).

Quand on fait un dessin, on dessine aussi le point de fuite, et on considère donc que les images de toutes les droites parallèles à (d_1) sont des droites concourantes vers le point de fuite. C'est l'image qu'on a d'une photo de rue, avec les trottoirs, les bords des immeubles parallèles aux trottoirs, qui sont des droites concourantes (ou plutôt, en général sur le dessin, des demi-droites). La figure 5 est l'image (sur le plan de projection, ici supposé être la feuille) de 4 segments parallèles (par exemple une rue et des toits d'immeuble), non parallèles au plan de projection, et de 6 segments parallèles au plan de projection (par exemple des séparations entre des immeubles).

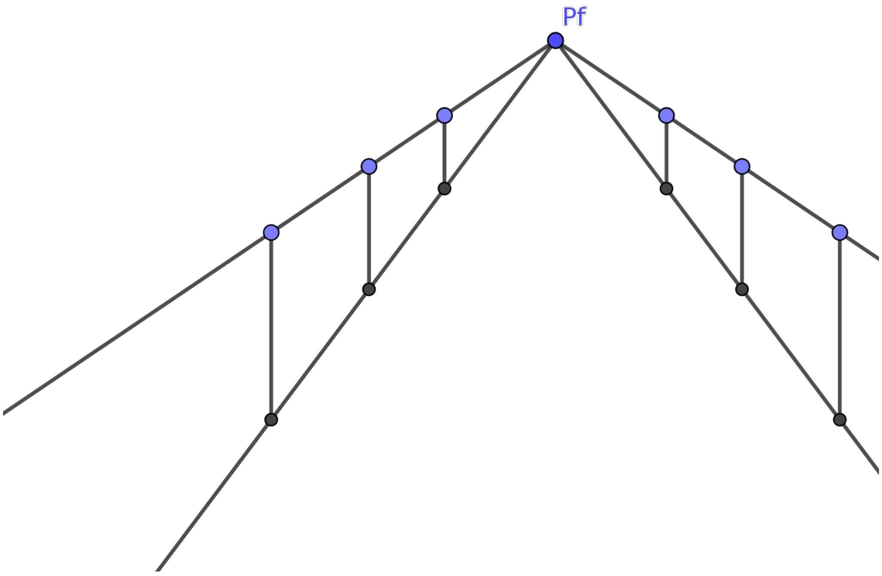


Figure 5 : Ce qu'on observe sur le plan de projection pour l'image de 4 droites parallèles sécantes au plan de projection.

Voici un autre exemple : l'image d'un carré contenu dans un plan parallèle au plan de projection est un carré. Mais l'image d'un carré n'ayant qu'un côté dans un plan parallèle au plan de projection est un trapèze, puisque deux côtés parallèles ont pour image deux droites concourantes (d’où l'image d'un pavage en damier, voir figure 7).

Une direction : 1 point de fuite ; deux directions : 2 points de fuite

Si on trace les images de deux groupes de droites, les droites d'un même groupe étant parallèles entre elles, on obtient deux points de fuite. C'est ce qu'on a représenté figure 6 (là encore on ne voit que ce qui est sur le plan de projection), qui pourrait être la représentation d'un coin de rue, avec des façades, une fenêtre et une porte, où on obtient deux points de fuite, un pour chacune des deux rues ; le plan de projection étant supposé vertical, les images des arêtes verticales restent bien, elles, toutes parallèles.

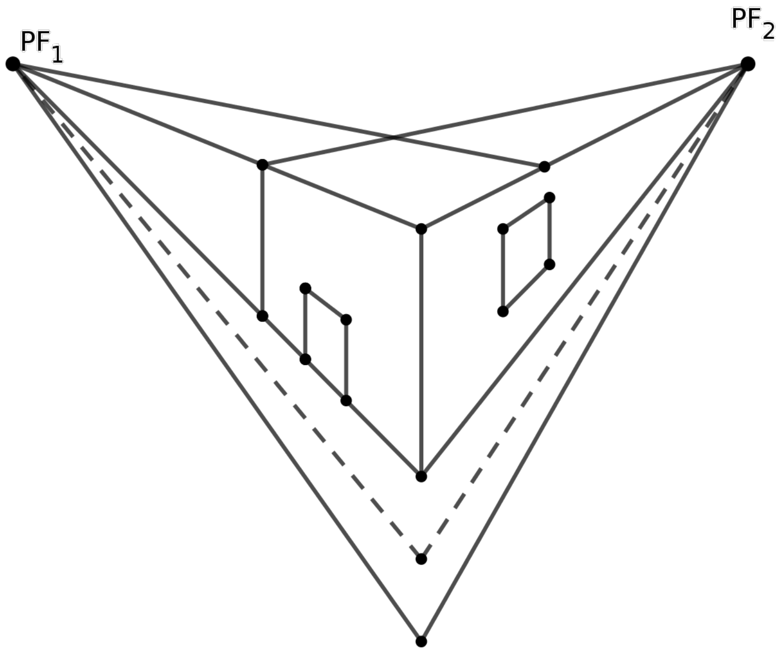


Figure 6 : Représentation d'un coin de rue en perspective centrale.Deux directions, deux points de fuite.

C. Image du damier, point de distance

Dans un damier, les côtés des différentes cases carrées sont parallèles. Si on imagine que l'un des côtés des carrés est parallèle au plan de projection, on a donc un point de fuite unique P_F pour tous les côtés (il correspond à la direction « à 90 degrés »). Il est donc facile de dessiner les images de tous ces côtés. On sait que les images des autres côtés seront tous des segments parallèles, mais où les placer ? (pour indiquer la profondeur)
Pour cela, on peut remarquer que les diagonales sont également toutes parallèles. Il leur correspond donc un autre point de fuite (il correspond à la direction « à 45 degrés »). Ce point de fuite est appelé point de distance P_D. Il permet donc de dessiner toutes les diagonales, et ainsi d'obtenir tout le damier (voir figure 7).

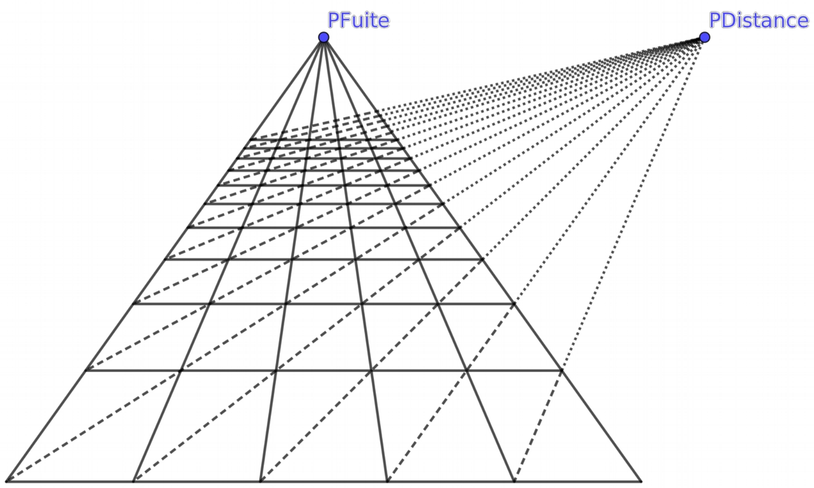


Figure 7 : Image d'un damier en perspective centrale.

Ce point de distance s'appelle ainsi car il permet de déterminer la distance du point de vue du peintre à son plan de projection. En effet, une vue de dessus (voir figure 8) montre que le point O, le point de distance et le premier point de fuite (à 90 degrés) forment un triangle isocèle rectangle ; donc on a $OP_F = P_FP_D$. De plus OP_F correspond à la distance de O au plan de projection.

Ainsi, en peinture, l'observation de la distance P_FP_D (qu'on mesure sur le tableau, si le peintre a eu la gentillesse de peindre un damier dont un côté est parallèle au tableau...), permet de déterminer la distance du point de vue du peintre à son plan de projection.

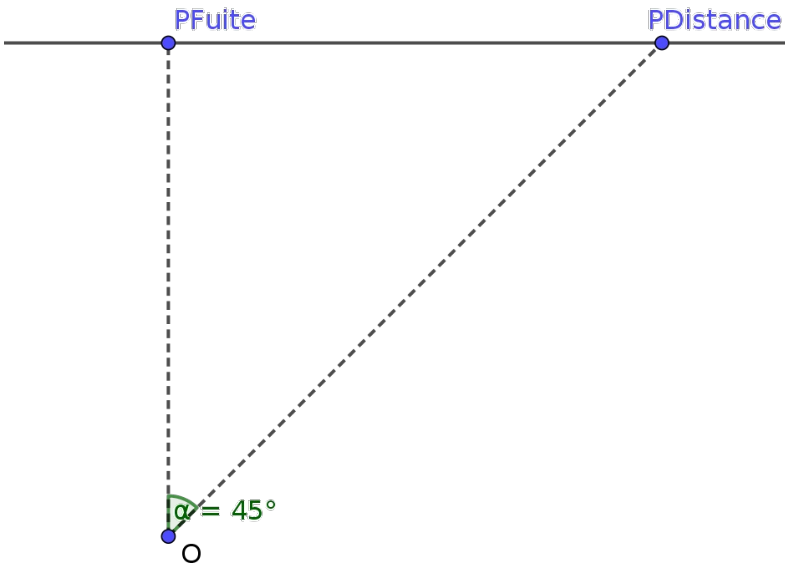


Figure 8 : Point de fuite et point de distance.

D. Image d'un plan, ligne d'horizon

En peinture, par exemple, peut se poser la question de l'image du sol, ou de la mer (supposée plate). D'un point de vue mathématique, l'image d'un plan peut être un plan, une droite, ou un plan privé d'une droite. Plus précisément :

L'image d'un plan parallèle au plan de projection P et ne contenant pas le point O est le plan P lui-même.

L'image d'un plan P' contenant le point O et non parallèle à P est exactement la droite intersection de P et P'.

L'image d'un plan P' non parallèle à P et ne contenant pas le point O est le plan P privé d'une droite. (On est dans ce cas avec l'image du sol.)

Preuve de ce dernier point : Il est clair que tous les points de l'image sont bien dans le plan de projection. Réciproquement, soit M' un point de P. Si la droite (OM') est sécante à P' au point M, M' est bien l'image de M. Tous les points de P ont donc un antécédent, sauf ceux pour lesquels (OM') est parallèle à P', qui n'ont pas d’antécédent dans P'. Ainsi tous les points de P sont des images de points de P', sauf les points tels que (OM') est parallèle à P', c'est-à-dire les points intersection de P et du plan parallèle à P' passant par O. Cette droite est appelée **ligne d'horizon.**

Dans le cas (par exemple pour une peinture ou une photo) d'un plan P vertical (la toile) et d'un plan H horizontal (le sol par exemple, ou la mer), les points de P situés **en dessous** de la ligne d'horizon sont des images de points situés **devant** l'observateur, les points situés **en dessus** de la ligne d'horizon sont des images de points situés **derrière** l'observateur (qui ne sont donc a priori pas représen-

tés dans une peinture). (voir figure 9)
D'une certaine manière, ces points de la ligne d'horizon correspondent à des images de points du plan « à l'infini ». Ce sont les points de fuite de toutes les directions de droites contenues dans le plan.

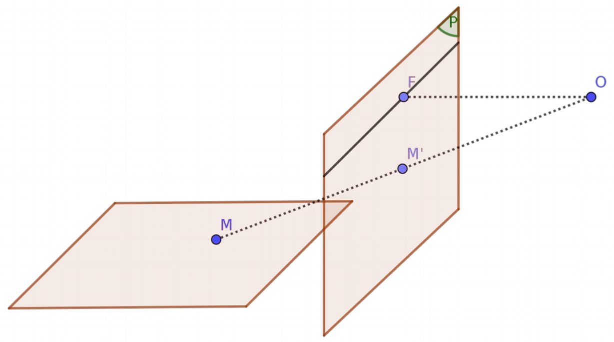


Figure 9 : Image d'un plan et ligne d'horizon.

E. Propriétés des distances, théorème de Thalès

On a intuitivement l'idée que plus un objet est loin, plus sa représentation est petite. Le théorème de Thalès permet de quantifier ceci, et montre que plus précisément, l'image d'un segment contenu dans un plan P' parallèle au plan de projection est un segment parallèle, de longueur inversement proportionnelle à la distance de P' au point O (voir figures 10 et 11).

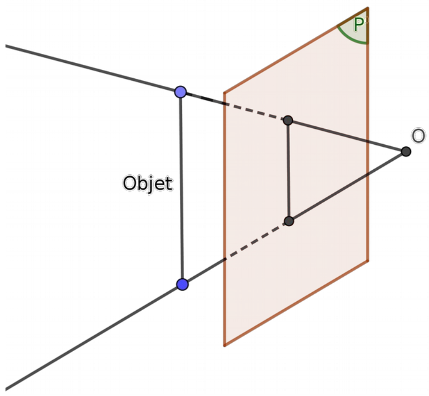


Figure 10 : Image d'un segment.

On peut appliquer le théorème de Thalès en se plaçant dans le plan contenant O et les deux segments, plan sur lequel on se place pour la figure 11. On obtient alors :

$$\frac{longueur(objet\ projeté)}{longueur(objet)} = \frac{OM'}{OM} = \frac{OJ}{OH} = \frac{distance(O\ au\ plan\ de\ projection)}{distance(O\ à\ l'objet)}$$

Ainsi le même objet, mais situé deux fois plus loin (par rapport à l'observateur, pas par rapport au plan de projection bien sûr) sera représenté deux fois plus petit.
Ce sont ces propriétés que l'on fait expérimenter avec l'activité décrite avec le perspectographe.

D'autre part, on les met concrètement à profit dans l’activité Thalès in situ, où le théorème de Thalès permet de calculer le coefficient d'agrandissement pour l'obtention d'une œuvre s'inscrivant dans l'espace, par exemple l'espace du collège.

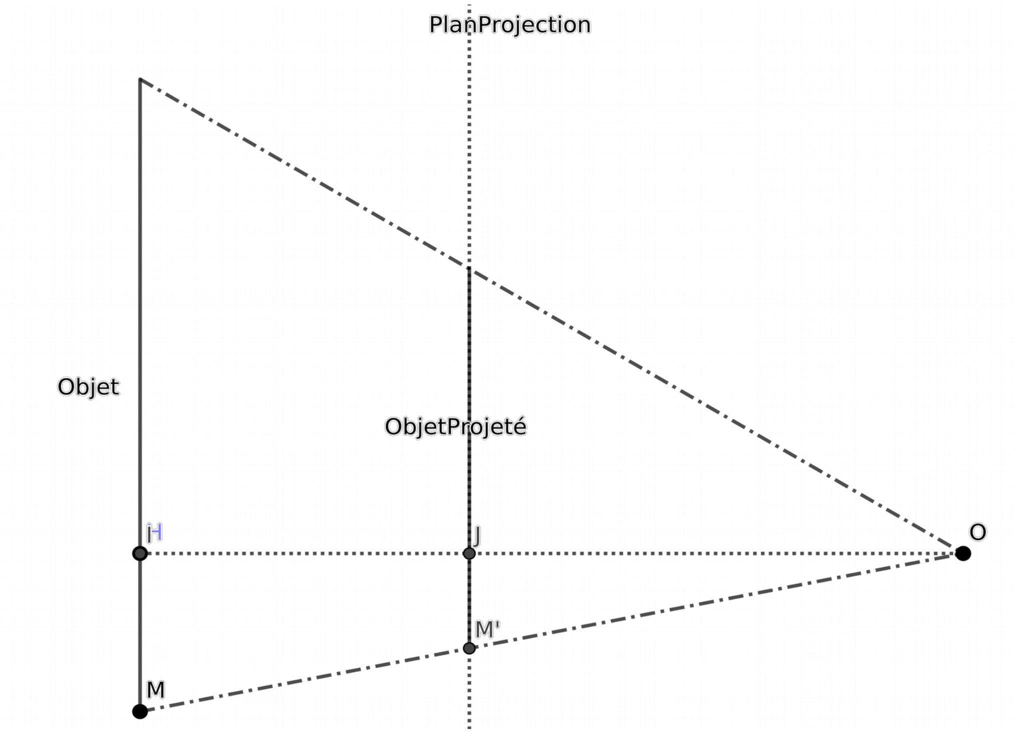


Figure 11 : Thalès et propriété des distances.

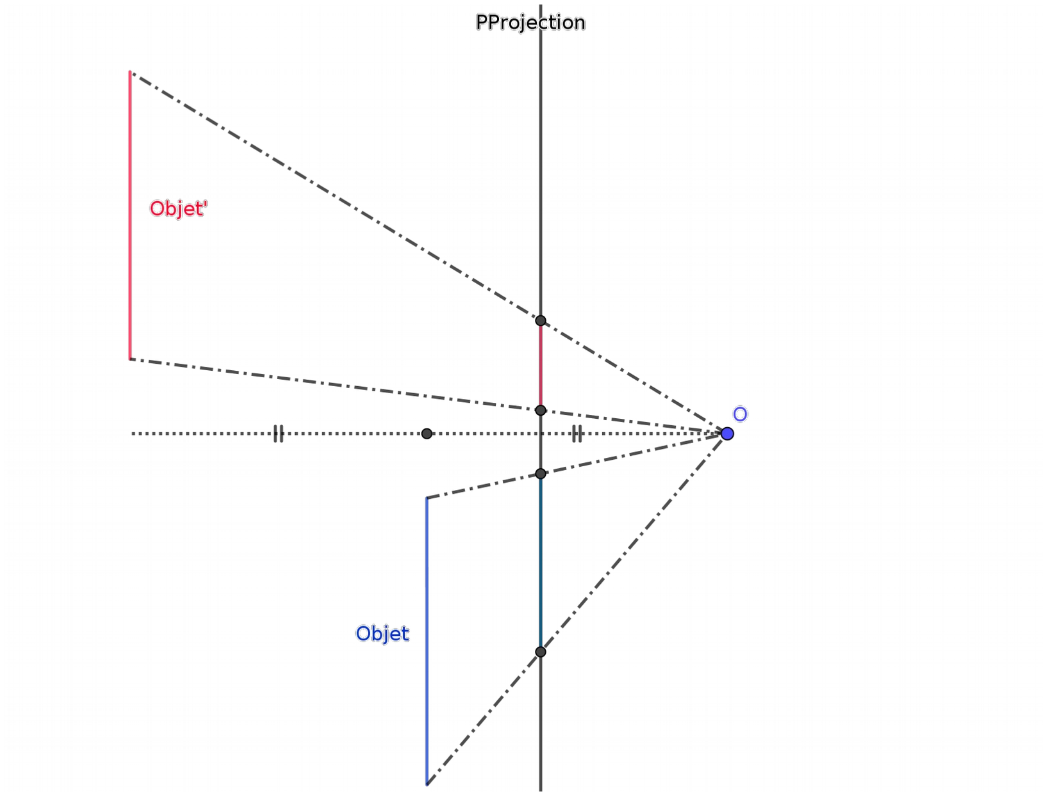


Figure 12 : L'objet rouge, de même taille que l'objet bleu mais situé deux fois plus loin de O, a une image deux fois plus petite.

II. Perspective parallèle, perspective cavalière

La transformation mathématique qui permet d'obtenir le dessin en perspective cavalière du cube s'appelle perspective parallèle. Elle peut, comme la perspective centrale, s’interpréter comme une ombre portée, mais en imaginant une source lumineuse « à l'infini » avec des rayons tous parallèles (le soleil par exemple). On peut donc la voir comme une limite de la perspective centrale, lorsque le point de vue part à l'infini.
Comme on le verra dans l’activité sur l'ombre du cube, on peut ainsi la « matérialiser » dans une salle de classe en utilisant l'ombre fournie par une lampe (comme celle d'un rétroprojecteur ou d'un vidéoprojecteur), **à condition que la lampe soit loin du plan de projection**.

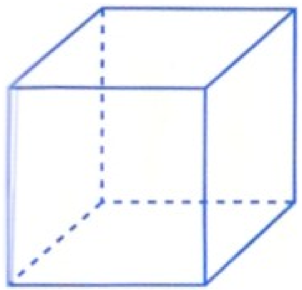
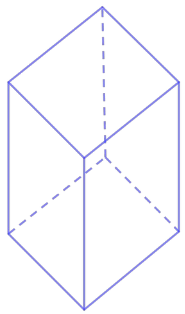
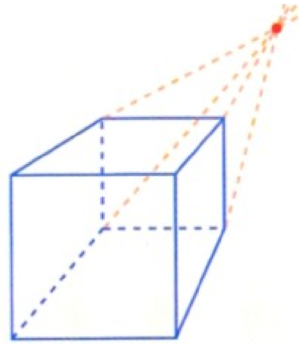
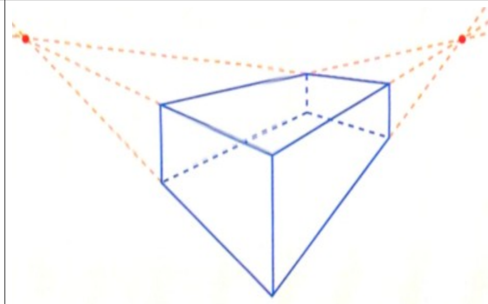
Mathématiquement parlant, la perspective parallèle d'un point sur un plan P est la projection du point sur le plan P parallèlement à une direction fixée. Ainsi, à la différence de la perspective centrale, il n'y a pas de point de vue O, mais seulement d'une certaine manière une direction de vue.
Mathématiquement, il s'agit d'une transformation affine, elle en a donc toutes les propriétés. En particulier, elle conserve le parallélisme, d’où son nom.

Le nom de perspective cavalière désigne la représentation d'un objet en perspective parallèle, lorsqu'une de ses faces est parallèle au plan de projection. Avec d'autres orientations, on peut parler aussi de perspective axonométrique, et isométrique pour une orientation à 120 degrés.
Par convention, sur les dessins, les arêtes cachées seront représentées en pointillés.

Propriétés :

La perspective parallèle a toutes les propriétés d'une transformation affine. Ainsi, à la différence de ce qui se passe avec la perspective centrale, l'image d'une droite est toujours une droite, l'image d'un plan est un plan, et de plus la perspective cavalière conserve le parallélisme : **l'image de deux droites parallèles reste deux droites parallèles.** Ainsi l'image d'un carré est un parallélogramme.
Enfin, les distances mesurées dans un plan parallèle au plan de projection sont conservées.
Ces propriétés expliquent son intérêt en mathématiques, et en dessin technique, bien qu'elle soit moins satisfaisante « à l’œil » pour la représentation de la réalité.

Différentes représentations pour un cube :

Perspective cavalière	Perspective parallèle générale	**Perspective centrale à 1 point de fuite** (la face avant du cube est parallèle au plan de projection)	**Perspective centrale à 2 points de fuite** (aucune face du cube n'est parallèle au plan de projection.
			
Le parallélisme est conservé : les faces sont représentées par des parallélogrammes. Pas de déformation des angles pour les faces avant et arrière.	Le parallélisme est conservé : les faces sont représentées par des parallélogrammes.	Le parallélisme est conservé uniquement pour les arêtes parallèles au plan de projection : les deux faces avant et arrière sont carrées, mais les autres sont représentées par des trapèzes. Les arêtes qui ne sont pas parallèles au plan de projection sont toutes concourantes en un point : le point de fuite.	Le parallélisme est conservé uniquement pour les arêtes parallèles au plan de projection, donc pour les arêtes verticales. Toutes les faces ayant une arête verticale sont représentées par des trapèzes. Les deux points de fuite correspondent aux points d'intersection provenant des deux directions des arêtes non verticales,
La face de derrière et celle de devant sont des carrés de même taille.	Les faces sont toutes des parallélogrammes non carrés. Deux faces opposées ont la même taille.	La face de derrière et celle de devant sont des carrés, mais de tailles différentes.	Les faces n'ont pas toutes la même taille.

Perspective cavalière d'un cube (6ème)

Niveau : 6ème

Descriptif rapide : Introduction à la perspective cavalière à partir de projections d'ombres d'un squelette de cube par vidéoprojecteur (ou rétroprojecteur)

Objectifs :

Mathématiques - Découvrir la perspective cavalière du cube - Observer et comprendre ses propriétés (parallélisme)	**Arts Plastiques**

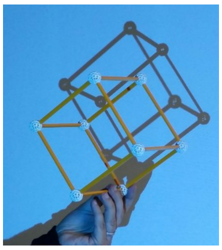
Durée :

Mathématiques : 1 séance	**Arts Plastiques**

Prérequis :

Mathématiques - Reconnaissance du cube - Notion de parallélisme	**Arts Plastiques**

Matériel :
- Un vieux rétroprojecteur, ou un vidéoprojecteur mobile.
- Un cube fabriqué avec des baguettes (par exemple zometool disponible sur internet).

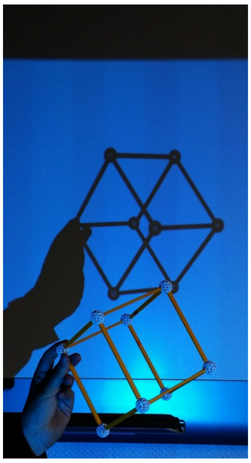


Motivation :
On souhaite par cette activité donner un sens concret à la représentation cavalière du cube, et montrer que les conventions qui la définissent ne sont pas complètement abstraites.
C'est aussi l'occasion de parler de la perspective comme d'une représentation, et de montrer l'importance des choix qui sont faits (angle...).
Cette activité n'a pas de pendant dans le cours d'arts plastiques, néanmoins elle nous semble adresser des questions pertinentes dans ce cadre de lien entre mathématiques et arts plastiques.

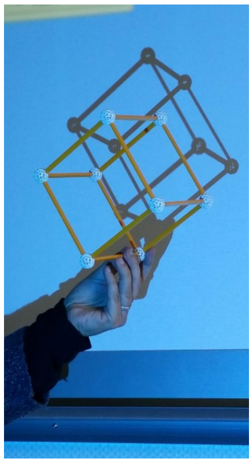
Description détaillée de la séquence et commentaires

Le professeur explique qu'il va montrer comment on peut représenter un pavé en perspective cavalière, c'est-à-dire dessiner sur une feuille de papier une figure qui permet d'imaginer l'objet en volume (à ne pas confondre avec le patron) en visualisant son contour. Il explique qu'on utilise pour cela, l'ombre de l'objet projetée par les rayons du soleil sur une surface plane (tableau ou feuille de papier).

Remarque :
Rappelons ici pour l'enseignant que la perspective cavalière correspond à une projection sur un plan selon une direction donnée. Il n'y a pas de point de vue, seulement une direction de vue. On a donc besoin d'un éclairage qui imite le soleil, avec des rayons parallèles. Plus la source de lumière sera loin de l'objet, mieux ce sera. Lorsque la source de lumière se rapproche, on perçoit que les rayons ne sont pas parallèles, il s'agit alors d'une perspective centrale (voir la partie sur la perspective d'un point de vue mathématique en début de brochure).
L'idéal est d'utiliser un vieux rétroprojecteur. Avec les vidéoprojecteurs récents qui sont fixés au plafond tout près du tableau, l'expérience sera un peu faussée. En effet, on est dans la classe et le vidéoprojecteur qui représente le soleil est très proche du tableau, alors que le soleil en est très loin. Ainsi les rayons de lumière qui viennent du vidéo projecteur ne sont pas parallèles : on observe alors une perspective centrale... Avec le rétroprojecteur, ou un vidéoprojecteur mobile, on peut éloigner la source de lumière du tableau et l'orienter comme on veut, c'est-à-dire de manière à ne plus percevoir de non parallélisme et observer alors réellement une perspective cavalière.



On observe une perspective cavalière



On observe une perspective centrale

Le professeur place le pavé en squelette, **le plus près possible du tableau, dans la lumière du rétroprojecteur, sur le côté droit du tableau.** *Si on le met en face, on ne voit qu'une face ! Il faudra avoir le dessin vu de gauche pour la suite de la situation.*
Et il demande à un élève de venir **repasser avec un feutre, sur le tableau blanc, les contours de l'ombre de l'objet.** Cette étape n'est pas très facile à réaliser. Le professeur doit bien placer le pavé et ne pas bouger. Il doit tenir le pavé par un de ses sommets sans trop faire d'ombre à l'élève. L'élève doit repasser les contours en veillant à ne pas se mettre dans l'ombre du projecteur. On obtient un dessin très approximatif, mais que les élèves reconnaissent. Le professeur peut l'améliorer un peu s'il le souhaite. Il peut y avoir une légère déformation où les deux faces avant et arrière ne sont pas tout à fait de la même taille. On peut le faire remarquer aux élèves en expliquant

d’où cela vient (voir l’explication ci-dessus).
Par un dialogue avec la classe, on dégage des règles pour dessiner cette figure :
- les deux faces avant et arrière sont rectangulaires et gardent leurs dimensions,
- les autres faces perdent leurs angles droits,
- les arêtes verticales et horizontales gardent leurs dimensions,
- les arêtes « penchées » n’ont plus les mêmes dimensions que dans l’objet réel, mais elles restent parallèles.

Le professeur demande aux élèves de reproduire un tel dessin sur leur cahier, le schéma restant affiché au tableau.
Le professeur peut aider les élèves à **repérer où sont les différentes faces dans la représentation : un élève pose son doigt sur une des arêtes du pavé et on observe où se trouve l’ombre du doigt.**

Commentaires
Il est un peu délicat de tenir le cube sans bouger pendant que l'élève dessine au tableau, mais c’est très visuel et cela montre bien que la perspective est un moyen de représenter la réalité.
Bien que les élèves soient familiers des écrans et autres vidéoprojecteurs, la projection du cube sur le tableau a quelque chose d'un peu « magique » qui a beaucoup plu aux élèves.

Mon Flipbook, une histoire cavalière

Niveau : 6ème ou 5ème

Descriptif rapide : Réalisation d'un flipbook représentant une porte qui s'ouvre et se ferme en perspective cavalière dévoilant quelque chose derrière. Après avoir réfléchi en mathématiques sur la perspective, en particulier sur la perspective cavalière, les élèves construisent d'abord une ellipse à partir d'un cercle, puis tracent des parallélogrammes représentant les différentes positions d'une porte qui s'ouvre et puis se referme. En arts plastiques, ils imaginent une histoire en mouvement derrière cette porte.

Objectifs :

Mathématiques - Comment les mathématiques peuvent aider à représenter dans le plan un objet de l'espace. - Questionnement sur le point de vue à partir duquel on observe un objet . - Perspective cavalière. - Construction d'une ellipse avec utilisation du rapporteur. - Tracés de parallèles (6ème). - Construction de parallélogrammes (5ème).	**Arts Plastiques** - Création d'un mouvement par une succession d'images fixes. - Invention d'une histoire. - Comprendre pourquoi et comment le flipbook est en quelque sorte l'ancêtre de l'animation image par image et du dessin animé. http://www.flipbook.info/historique.php hhttp://www.flipbook.info/videos/moebius.htm

Durée :

Mathématiques : 4 h ou 5 h avec les élèves + beaucoup de manipulation.	**Arts Plastiques** : 1 ou 2 séances

Prérequis :

Mathématiques - Tracé de parallèles (6ème). - Tracé de parallélogrammes (5ème). - Symétrie axiale - Angles. - Report de distances au compas. - Calcul mental (division par 2). - Un travail sur la perspective cavalière du cube avant peut être utile.	**Arts Plastiques**

Matériel :
- instruments de géométrie,
- fiches pour les tracés de la porte préparées avec GeoGebra.

Dans ce dossier vous trouverez :
- la description de l'activité menée en classe de 6ème,
- une fiche élève Arts Plastiques,
- une fiche élève « Dessin de l'ellipse »,
- des tracés vierges pour les portes,
- des exemples de productions d'élèves.

Des fichiers GeoGebra sont disponibles sur le site GeoGebra.

Description détaillée de la séquence et commentaires

L'activité a été testée notamment dans une classe de 6ème qui faisait un projet cinéma. Dans le cadre de ce projet cinéma, la classe a vu le film d'animation « Le tableau » de Jean-François Laguionie. Lors de la projection, l'animatrice leur a parlé du principe du dessin animé et du phénomène de la persistance rétinienne qui fait que cela fonctionne.
Le projet dans cette classe est de faire réaliser aux élèves un flipbook dans lequel on verra une porte s'ouvrir et se refermer (tracée en cours de mathématiques) et par laquelle vont sortir des personnages qui vont se colorer au fur et à mesure (en arts plastiques). Dans le film d'animation, certains personnages ne sont « pas finis » et terminent leurs couleurs à la fin.

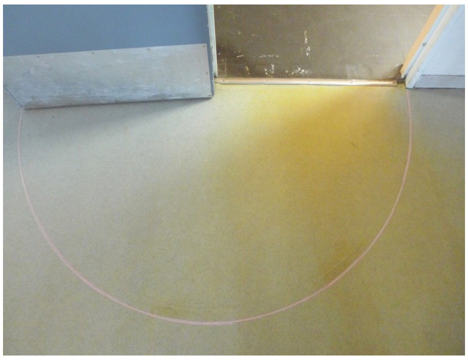
Séance 1 : cours de mathématiques (1h ou 2h)

a. Trace d'un objet en mouvement
On ouvre et on ferme une porte. Que dessine au sol le bas de la porte ?
Avec une craie scotchée au bas de la porte, on trace sur le sol (ou au feutre sur un papier) l'arc de cercle qu'elle dessine en s'ouvrant.
Question 1 : que voit-on dessiné sur le sol depuis l'endroit d'où l'on regarde la trace ?
Question 2 : comment faire pour redessiner ce que l'on voit sur une feuille de papier A4 ?
***Commentaire** : il faut déjà que les élèves comprennent que la figure sur le sol est un arc de cercle (conservation de la distance à l'axe de rotation). Tout l'intérêt de l'activité est de prendre conscience que si l'objet est bien un arc de cercle, on ne voit pas un arc de cercle. Comme il est très difficile de dire ce que l'on voit (surtout lorsqu'on sait que c'est, en fait, un cercle), on va passer par l'intermédiaire de la photographie.*
Vu en classe : *les élèves comprennent tous que la craie trace un cercle au sol mais ils disent le voir de la même façon quelle que soit leur place dans la salle.*

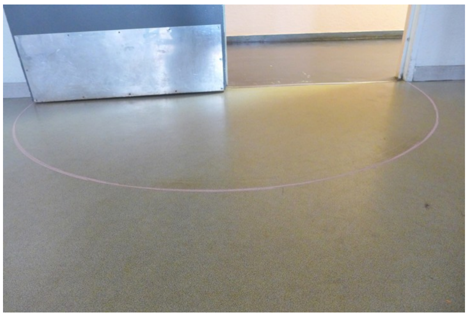
b. Capture photographique de la trace
Si on prend une photo, quelle forme apparaît sur la photo ?
Si on obtient une ellipse dans certains schémas, il est intéressant de les comparer aux réponses à la question 1. La photo vient alors renforcer cela en y rajoutant l'idée du point de vue selon lequel on la prend.

Projection d'une photo de la porte ouverte avec la trace au sol.
***Commentaire** : cette question peut être vue comme une reformulation de la question précédente si elle est difficile à comprendre pour les élèves, ou comme une manière de tester les réponses à la question précédente.*
Il est conseillé de prendre les photos à l'avance pour éviter de mauvaises surprises.

Trace d'un objet en mouvement



Capture photographique de la trace
Notre cerveau croit voir un cercle...



c. Dessin et observation d'un cercle vu de face et de côté au tableau
(passage d'une représentation horizontale à une représentation verticale)
On dessine un cercle au tableau, en se plaçant de côté : que voit-on et qu'observe-t-on ?

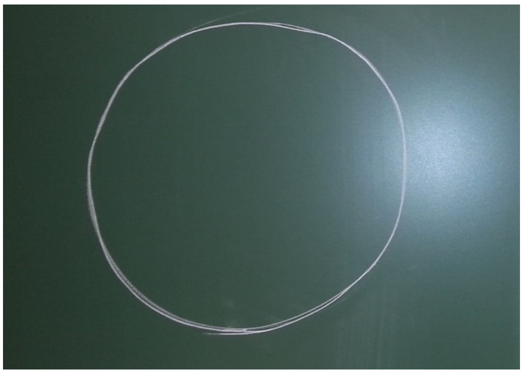


Tableau vu de face

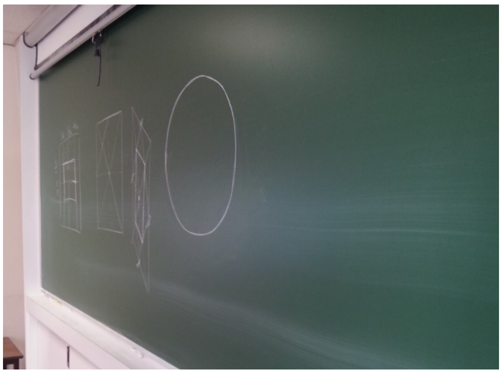


Tableau vu de côté

Autre exemple permettant d'illustrer le propos

Plaque d'égout vue du dessus : cercle

Plaque d'égout vue de côté : ellipse

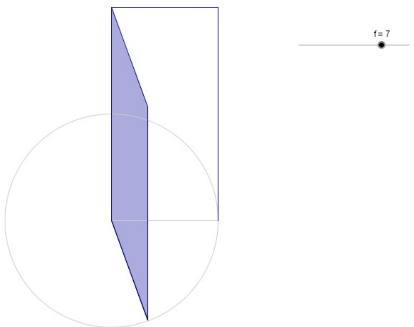
En classe : *sur les photos les élèves finissent par voir un ovale, certains maintiennent quand même que c'est un cercle. L'utilisation de la photo est importante ; sinon, le cerveau sachant que c'est un cercle, on continue de percevoir un cercle.*
Conclusion : si on veut dessiner la porte et donner l'illusion qu'elle s'ouvre, il faut la dessiner à différents moments en suivant un mouvement elliptique et pas un mouvement circulaire comme on pouvait le penser au début de l'observation.
On ne dessine donc pas la réalité telle qu'elle est !
Question : Comment représenter la porte en suivant le mouvement d'ellipse qu'elle fait en s'ouvrant ? Par quoi commence-t-on ?
***Réponses possibles des élèves** : on commence par une porte fermée et ensuite il faudrait faire plusieurs dessins, combien ? Mais comment faire l'ellipse ? Et comment faire pour que la porte reste droite quand on la dessine sur l'ellipse ?*

Conclusion et amorce de l'activité suivante : c'est à partir d'un cercle que l'on a <u>observé</u> une ellipse, et c'est maintenant à partir d'un cercle que l'on va <u>construire</u> une ellipse.

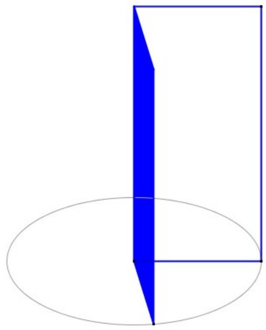
***Remarque pour les curieux :** nous avons également testé (sans élève) ce que donnerait la représentation si on gardait un cercle au lieu d'une ellipse ; l'expérience a été malheureusement peu concluante : on n'a pas repéré que « c'était bizarre » (voir le fichier GeoGebra).*

Observation comparée (animations GeoGebra)

https://www.geogebra.org/classic/rmaygpuu https://www.geogebra.orvg/classic/hny8h5d



Porte s'ouvrant sur une base circulaire



Porte s'ouvrant sur une base elliptique

d. Distribution de la fiche élève « Construction d'une ellipse » : construction de l'ellipse à partir du cercle avec le rapporteur et la règle.
(Il peut être nécessaire de demander aux élèves de finir la construction à la maison).

Commentaires sur cette fiche

L’intérêt de faire cette construction est de familiariser les élèves avec cette nouvelle figure, et en particulier de faire apparaître que l'ellipse n'est pas « pointue » sur les bords. Dans l’étape 1, on commence par le tracé d'un cercle et de 18 points régulièrement espacés sur le cercle.
Les élèves peuvent soit placer leur rapporteur une seule fois, et placer tous les points, soit tourner leur rapporteur 18 fois. On les laisse libres de trouver leur propre méthode : évidemment la première méthode est plus précise, mais la deuxième leur apprend à manipuler leur rapporteur. On peut espérer que la perspective de devoir déplacer leur rapporteur 18 fois les fera trouver la méthode la plus économique...
Le point B_{18} est diamétralement opposé au point B. Ils peuvent le constater, et même le démontrer.
On demande de ne pas tracer les segments pour ne pas surcharger la figure.
L’étape 2 consiste à tracer l'ellipse en effectuant une affinité. Cette étape demande des divisions par 2. Suivant ce qu'on souhaite faire travailler, on peut être plus ou moins exigeant à ce niveau, et autoriser ou non l'usage de la calculatrice.
Le tracé des milieux à l'aide du compas serait ici très long.
L’étape 3 permet de compléter l'ellipse et est l'occasion de travailler la symétrie.
L’étape 4 termine le dessin de l'ellipse. Attention à ce que l'ellipse soit « lisse », sans pointe !

Vu et entendu en classe

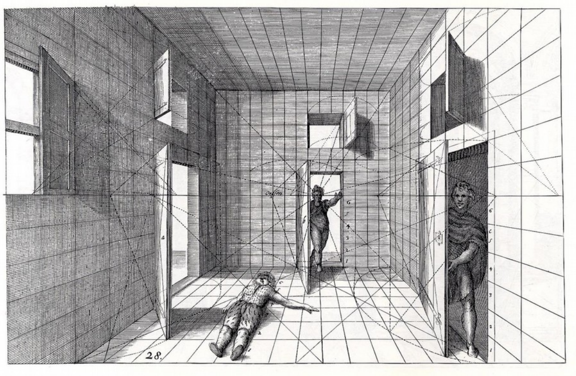
Un élève a tout de suite dit « On peut faire en une seule fois de 10 en 10 ! »
Une autre a dit qu’on pouvait tracer le premier point avec le rapporteur, puis reporter les suivants au compas (alors qu'on n’avait pas fait dans le cours la reproduction d’un angle au compas).
Avec sa voisine, elles ont fait comme cela mais en ajoutant les décalages de tracé au compas, donc cela ne tombait pas juste à la fin.

Curieusement, le plus difficile a été l’étape des milieux, pour placer les points C_1 , C_2 , … : certains se sont trompés en mesurant, ou, surtout en divisant la longueur par deux, pour placer les milieux des segments. Du coup, ils obtenaient une courbe avec des « décrochages » qui ne ressemblait pas beaucoup à une ellipse.

En reliant les points, certains ont aligné et tracé à la règle les points B_1, B et B'_1 ainsi qu’à l’autre bout, B_{17}, B_{18} et B'_{17}, ce qui donnait des extrémités « carrées » et non « en pointe » comme ce qu'on

obtient souvent lors d'un tracé à main levée.
Certains élèves ont été très déçus du résultat, « tout ça pour un ovale ! », ils ne voulaient pas croire qu'il n'y avait pas de moyen plus simple d'obtenir le tracé de l'ellipse...
Séance 2 : cours de mathématiques (1h ou 2h)

e. Culture artistique et mathématique : Représentation d'une porte à un moment et à un endroit de son ouverture



Gravure de Vredeman de Vries (1604)

***Dessin artistique et géométrique** : la gravure de Vredeman de Vries est une vue centrale à hauteur d'homme, sur laquelle on voit une porte ouverte avec une perspective centrale.*
Le dessin mathématique que vont faire les élèves sera une perspective cavalière, qui pourra évoquer une vue du dessus ou « en plongée ».
En perspective centrale et en perspective cavalière, le cercle est bien une ellipse, mais la porte n'est représentée par un parallélogramme qu'en perspective cavalière ; en effet dans la perspective centrale la porte est représentée par un trapèze... Pour l'animation GeoGebra correspondante, voir le fichier https://www.geogebra.org/classic/e6svefhp
La question a également été soulevée de savoir si l'ellipse était droite ou oblique. Si on imagine qu'on est face à la porte (et donc que la porte fermée est bien un rectangle), l'ellipse sera bien droite (grand axe et petit axe horizontal et vertical).
La perspective cavalière est une convention de représentation ; ce n'est pas forcément la plus fidèle à notre regard. S'il paraît difficile de faire observer un parallélogramme aux élèves (là où il y a plutôt un trapèze...), on peut en tout cas les convaincre, que de même qu'on ne voyait pas un cercle, on ne voit pas un rectangle.

f. Réalisation du flipbook *(élèves par groupes de 4 ou 5*)
Le cercle sur lequel se déplace la porte a été représenté en perspective (ellipse).
Quelle est la forme de la porte ? Comment la dessiner quand elle s'ouvre ?
Pour que le dessin conserve le parallélisme des côtés, on va dessiner en **perspective cavalière***.*
Le déroulement peut être différent suivant que l'on a fait ou non auparavant l'introduction de la perspective cavalière avec l'activité du « squelette de cube » projeté.

On distribue les fiches préparées avec les tracés *(4 dessins par élève minimum).*
Sur chaque dessin ont été tracés le cadre de la porte, l'ellipse et un point sur l'ellipse qui représente le coin de la porte se déplaçant.
Les élèves complètent les figures à la règle et à l'équerre ou au compas en traçant des parallèles (en 5ème, on peut leur demander de tracer les parallélogrammes au compas).

Les élèves découpent et rangent dans l'ordre les dessins et le professeur vérifie et agrafe les flipbooks *(40 dessins pour un flipbook).*

Pour les élèves les plus rapides, on peut distribuer d'autres fiches pour qu'ils en fassent un pour eux et leur suggérer, si cette prolongation n'a pas été envisagée en cours d'arts plastiques, de dessiner un personnage qui ouvre la porte et/ou un motif sur la porte...
On obtient au minimum deux flipbooks pour la classe.
Dans la perspective d'une utilisation en cours d'arts plastiques, un flipbook par élève est souhaitable. Une solution consiste à photocopier les dessins obtenus par la classe.

***Commentaires** : il est important pour le flipbook que la distance à la reliure soit à peu près conservée, ainsi que la hauteur sur chaque page. Cela peut occasionner des soucis, et en particulier on a eu de mauvaises surprises avec l'impression de fichiers pdf donnant des marges différentes suivant les imprimantes utilisées.*
D'où notre choix de placer la figure dans un cadre sous GeoGebra et d'exporter ce cadre en image.
D'autre part, il a été suggéré que la manipulation du flipbook est extrêmement facilitée si les pages sont de largeur croissante ; nous avons essayé avec des cadres de largeur croissante (avec un pas de 0,5 mm, 40 pages donnent un décalage de 2 cm) ; le découpage a demandé beaucoup plus de temps, cela ne nous a pas semblé en valoir la peine.
Une autre suggestion, également avec des pages de largeur constante, est de cartonner la dernière page.
Certains dessins sont plus difficiles à faire que d'autres ; c'est en particulier le cas de l'angle de 90 degrés, que l'enseignant peut garder pour lui, et d'angles qui en sont proches, qu'il peut confier à de bons élèves.
On peut, si on le souhaite, faire aussi tracer les diagonales de la porte.

Finalement :
Certains élèves ont tracé très facilement leurs 4 figures de départ alors que d'autres ont eu beaucoup de mal.
À la fin de la première heure, les figures ont été ramassées et vérifiées. Il a fallu ensuite les redonner aux élèves et pendant que certains refaisaient leurs tracés, d'autres ont réalisé des tracés supplémentaires, certains ont effectué entièrement les 40 tracés nécessaires pour leur flipbook.
Au bout de deux séances, chaque élève a gardé ses figures plus, si nécessaire pour avoir les 40, les figures manquantes photocopiées sur des camarades (photocopies faites par le professeur). En effet le but était que chaque élève ait son propre flipbook pour l'utilisation en arts plastiques.
L'agrafage a été fait en arts plastiques.

Séance 3 : Arts Plastiques. Fiches élèves (2 sujets possibles)

Nous proposons deux formulations, à choisir et adapter bien évidemment comme vous le souhaitez**.**

<table>
<tr><th colspan="2">FLIPBOOK / DERRIÈRE LA PORTE</th></tr>
<tr><th>Sujet 1</th><th>Sujet 2</th></tr>
<tr><td>En cours de mathématiques, vous avez réalisé un flipbook représentant l’ouverture d’une porte.

Maintenant faites sortir tout/s ce/ceux qui était/aient enfermé/s, ou se cachait/aient derrière cette porte.

Par la succession des images du flipbook, vous devrez représenter le déplacement de chacun des éléments que vous choisirez de faire sortir par cette porte.

Toutes techniques sèches autorisées : crayon à papier, pastels, feutres, stylo billes, etc...</td><td>Suite à la réalisation d'un flipbook en mathématiques montrant l'ouverture d'une porte, inventez l'histoire qui va avec. Faites sortir ou passer tous les éléments ou personnages qui se cachaient derrière la porte Utilisez tous les moyens plastiques possibles pour donner une impression maximale de mouvement et de déplacement à votre image. (Vous pouvez créer un décor autour qui vous permettra de renforcer cette impression.)

Techniques : dessin au crayon à papier, couleur aux feutres et crayons de couleur.</td></tr>
<tr><th colspan="2">Compétences à évaluer</th></tr>
<tr><td colspan="2">Être capable de :
- imaginer différents éléments/personnages,
- représenter le déplacement par une séquence d’images,
- donner un titre au flipbook adapté à votre idée personnelle,
- maîtriser la technique choisie.</td></tr>
<tr><th>Références</th><th>À retenir</th></tr>
<tr><td>Zbigniew Rybczyński Tango,1980 (8 min)
Edward Muybridge
Séquence en mouvement du Galop de Annie G.,1878
Séquence en mouvement de La chienne Maggie,1887
Zoopraxiscope,1897
Etienne-Jules Marey
Course d'un homme, 1883
Saut d'un homme, 1886
Giacomo Balla
Petite fille courant sur un balcon, 1912</td><td>Séquence : 1. Série d’éléments hiérarchisés et ordonnés chronologiquement (alors que l'ordre des éléments d'une série peut être parfois modifiable).
2. Succession des plans d'un film, constituant un ensemble signifiant (voir film).</td></tr>
<tr><th>Problématique</th><th>Dans les programmes</th></tr>
<tr><td>Comment créer une narration en donnant l'illusion d'un mouvement par la succession d’images fixes ?</td><td>La représentation : images, réalité et fiction
La narration visuelle : mouvement et temporalité suggérés ou réels, dispositif séquentiel et dimension temporelle, durée, vitesse, rythme, montage, découpage, ellipse (au sens artistique)...
Invention et mise en œuvre de dispositifs artistiques pour raconter (narration visuelle ancrée dans une réalité ou production d'une fiction).
Découverte et utilisation des différents modes de représentation de l'espace et du temps pour en comprendre les usages et les origines (pratiques en 2 et 3 dimensions, images fixes et animées, créations numériques).</td></tr>
</table>

Fiche élève : Construction d'une ellipse

Le but de cette activité est de construire une ellipse, pour préparer la réalisation d'un flipbook montrant une porte s'ouvrir en réunissant le travail de chaque élève de la classe.
Les figures doivent être soignées.

Étape 1

Tracer un segment [AB] tel que AB = 7 cm. Construire le cercle de centre A et de rayon [AB].
Sur ce cercle,

placer le point B_1 tel que $\widehat{BAB_1} = 10°$ *(Ne pas tracer le segment [AB_1])*

placer le point B_2 tel que $\widehat{B_1AB_2} = 10°$*(Ne pas tracer le segment [AB_2])*

placer le point B_3 tel que $\widehat{B_2AB_3} = 10°$*(Ne pas tracer le segment [AB_3])*

Continuer la construction jusqu'au point B_{18}.

Que peut-on dire du point B_{18} ?

. . . .

. . . .

Étape 2

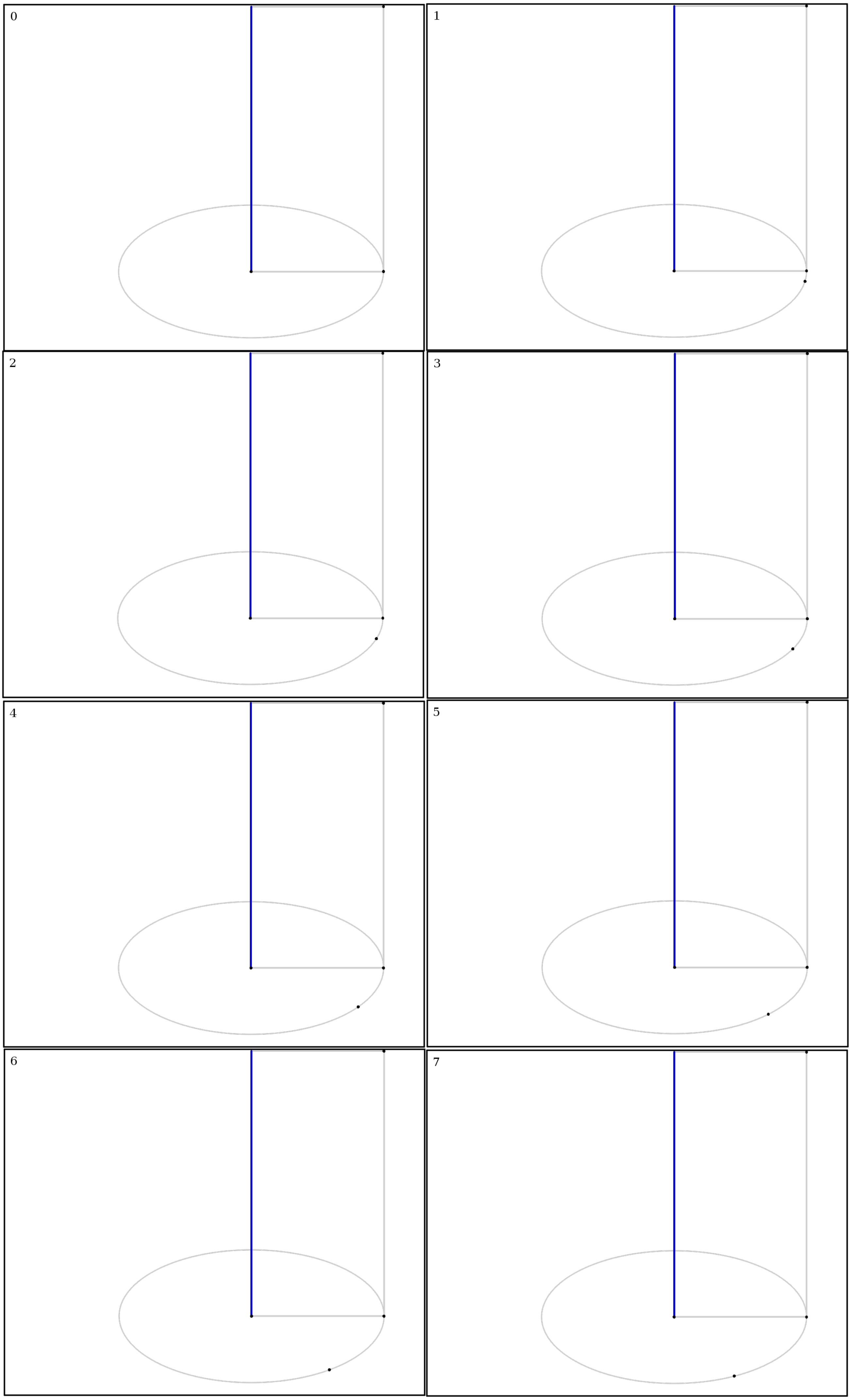
- Tracer, en pointillés, la droite perpendiculaire à la droite (AB) passant par le point B_1, elle coupe la droite (AB) en C_1.
  Placer le point D_1, milieu du segment [B_1C_1].
- Tracer, en pointillés, la droite perpendiculaire à la droite (AB) passant par le point B_2, elle coupe la droite (AB) en C_2.
  Placer le point D_2, milieu du segment [B_2C_2].
- Tracer, en pointillés, la droite perpendiculaire à la droite (AB) passant par le point B_3, elle coupe la droite (AB) en C_3.
  Placer le point D_3, milieu du segment [B_3C_3].
- Poursuivre la construction jusqu'au point D_{17}.

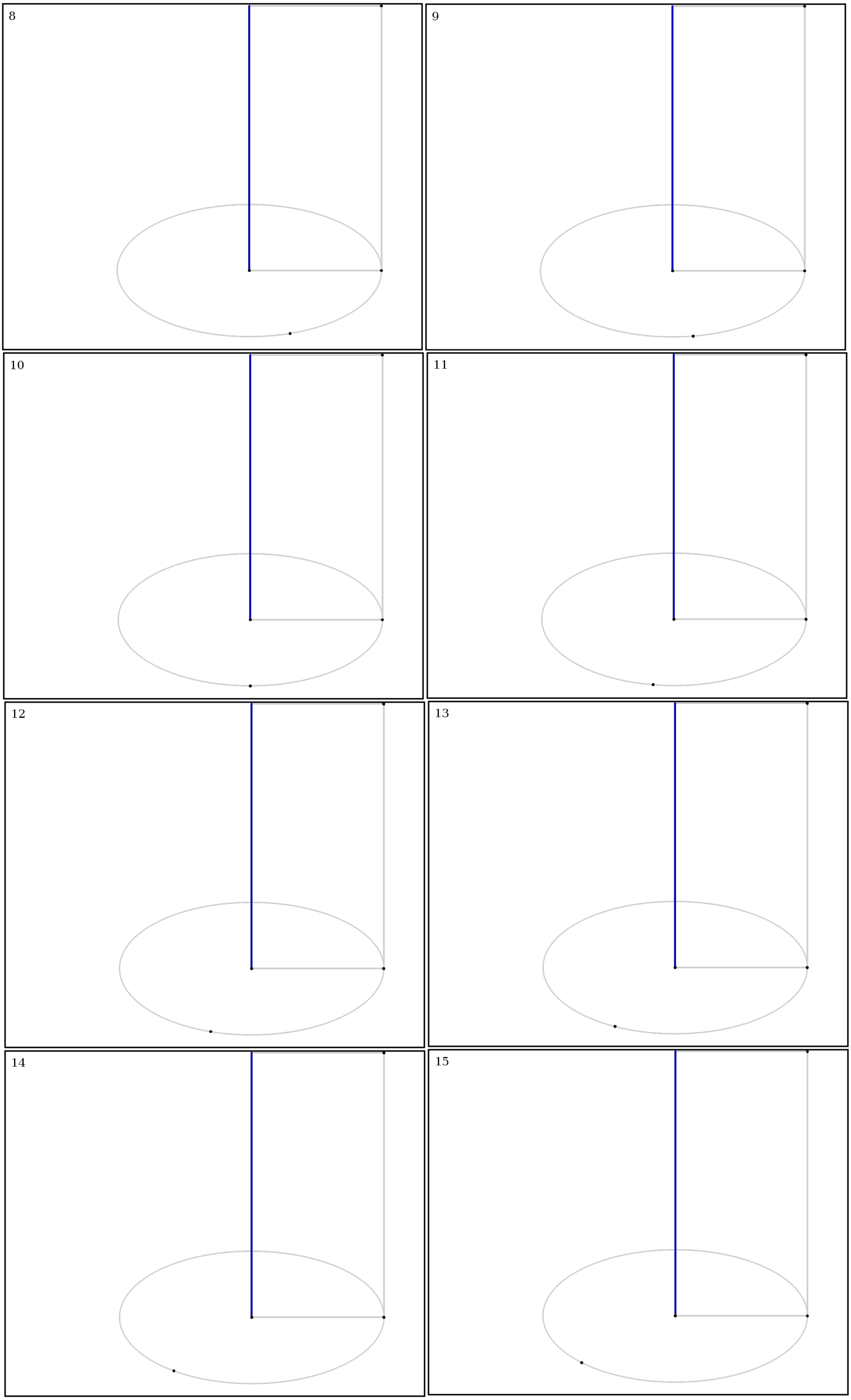
Étape 3

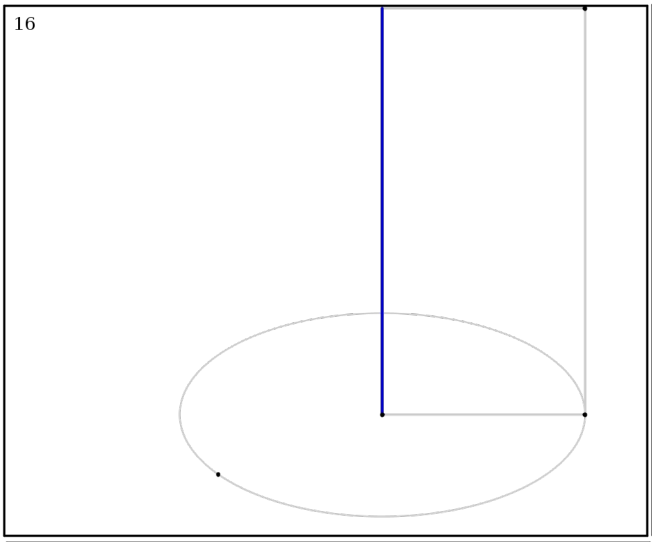
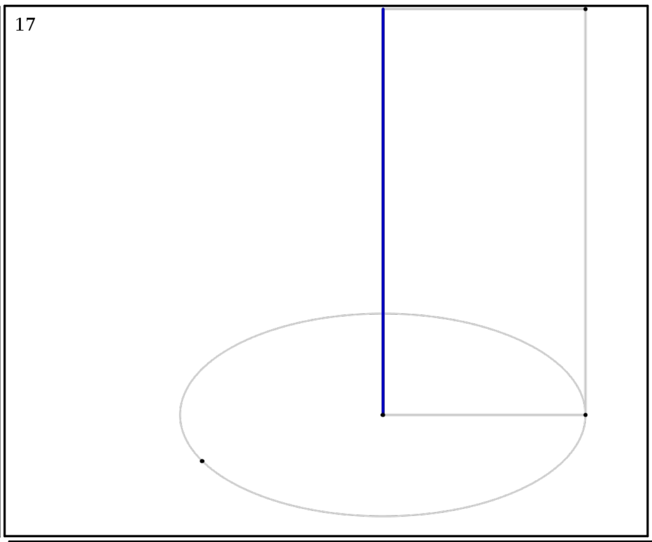
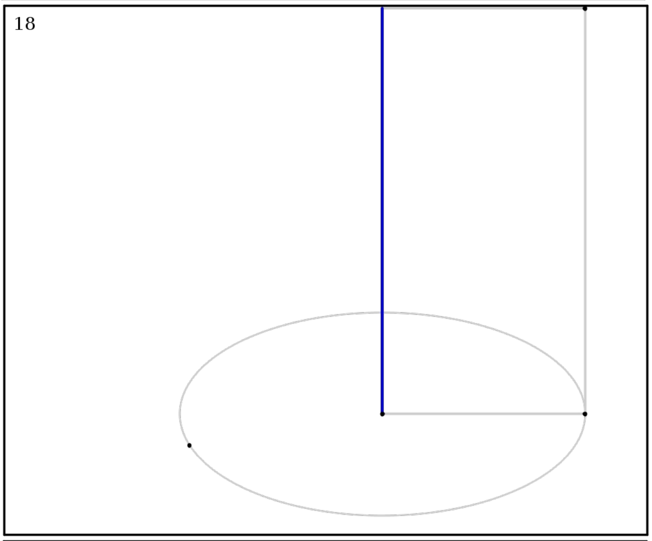
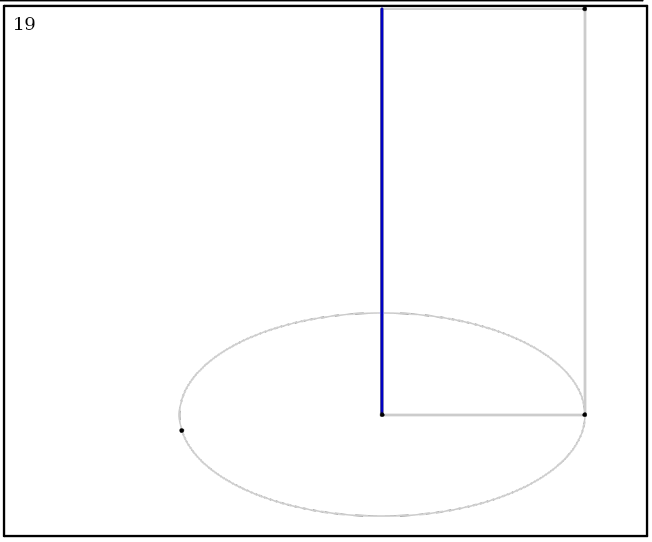
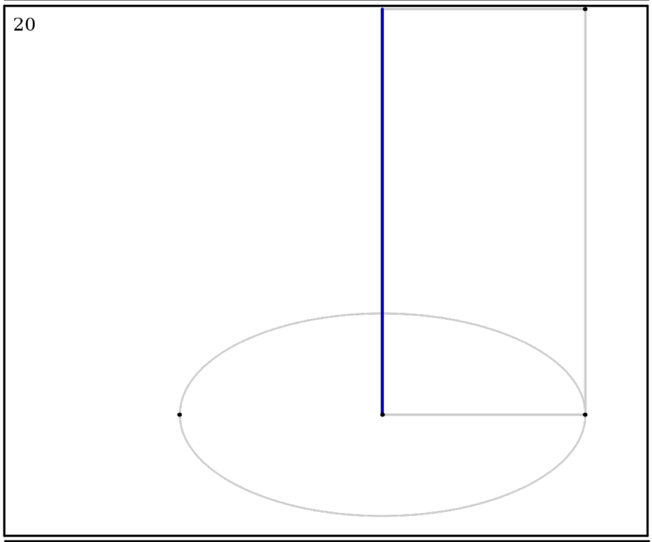
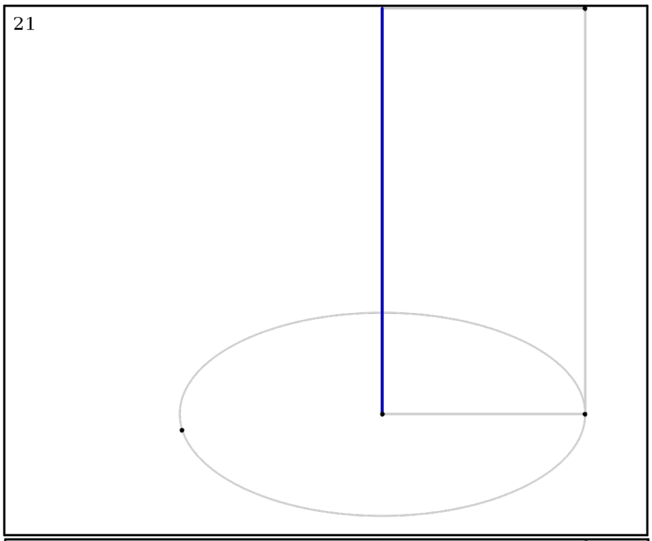
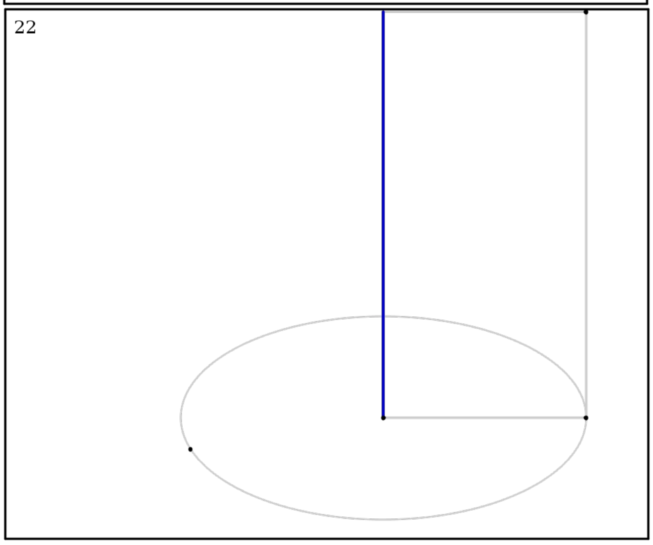
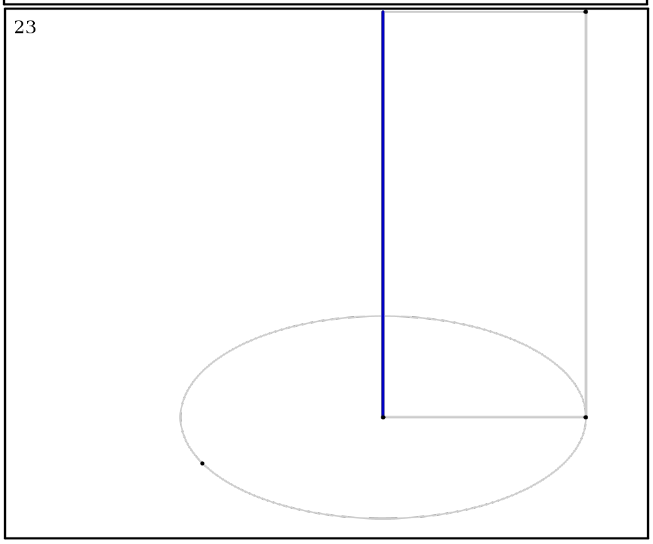
Tracer les symétriques des points D_2, ..., D_{17} par rapport à la droite (AB).

Étape 4

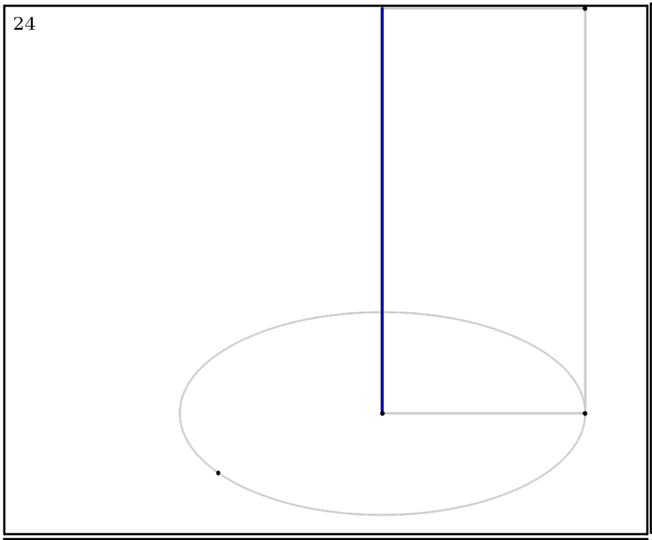
Pour terminer, tracer l'ellipse à main levée en reliant de proche en proche les différents points D obtenus.


0
1
2
3
4
5
6
7

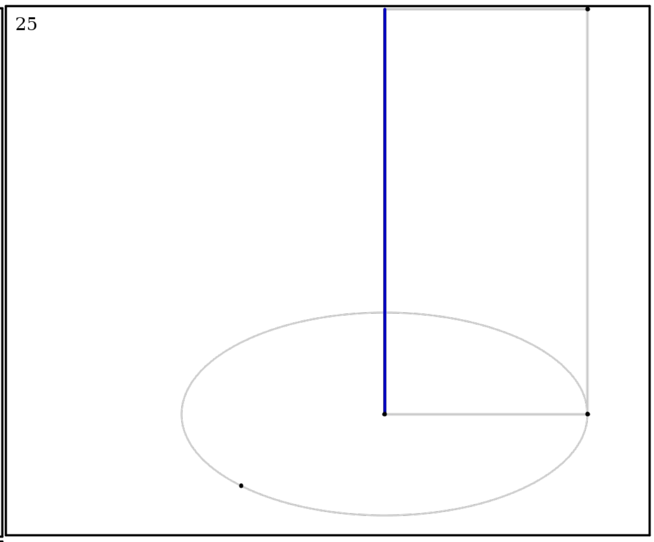

8
9
10
11
12
13
14
15


16

17

18

19

20

21

22

23

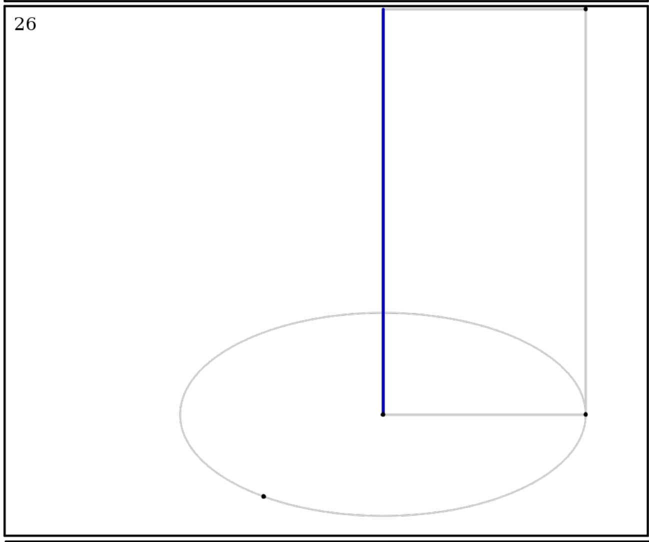
24



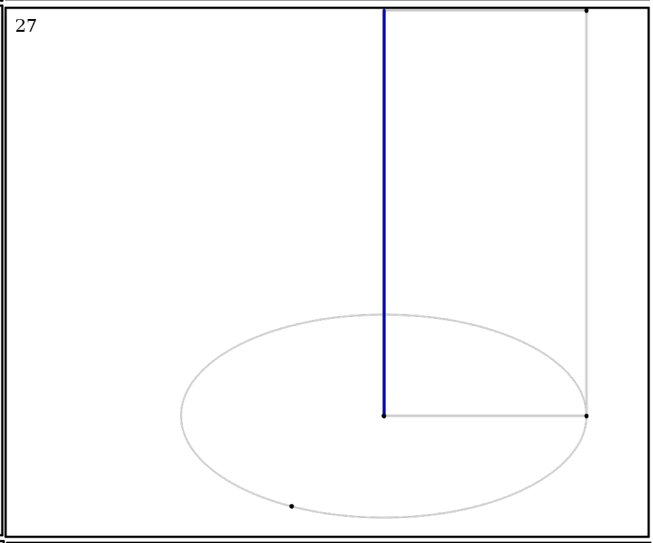
25



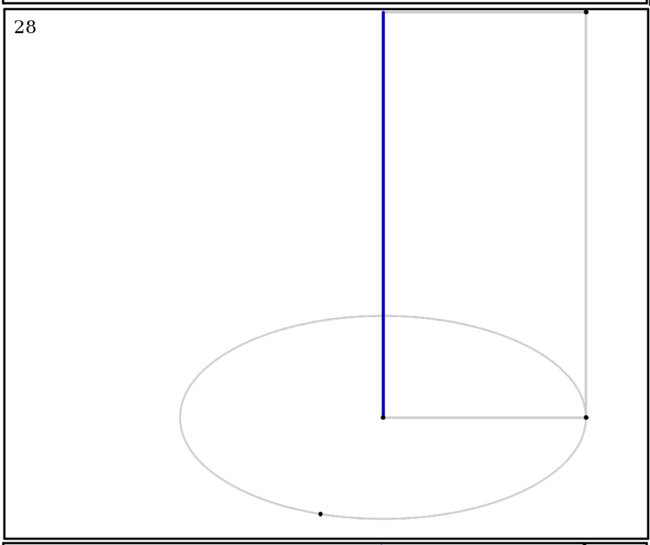
26



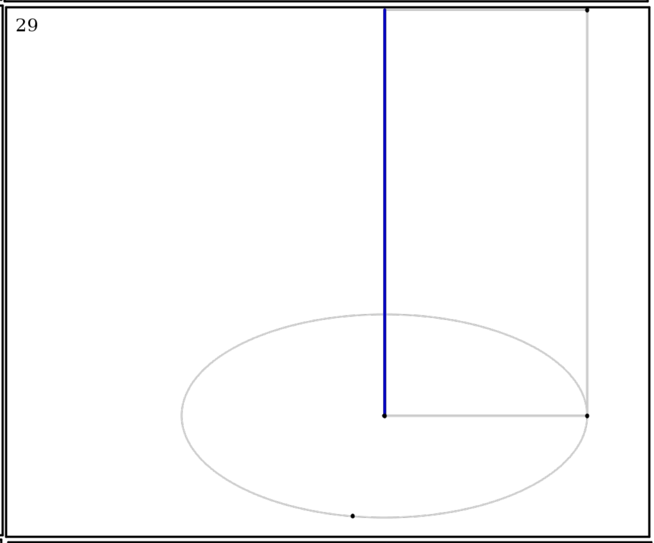
27



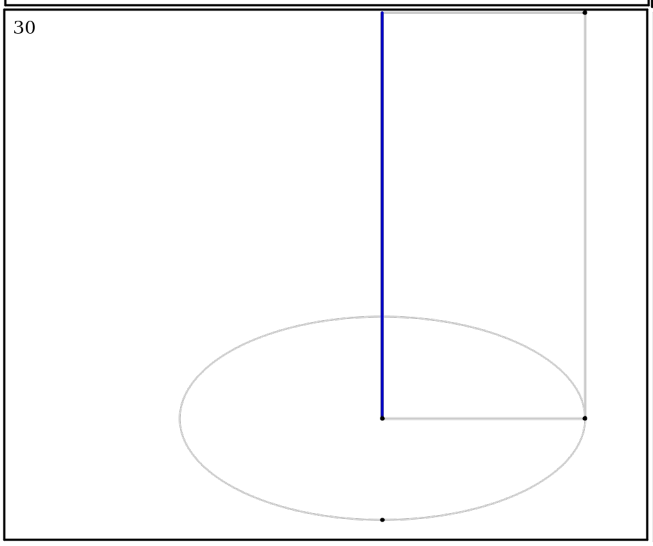
28



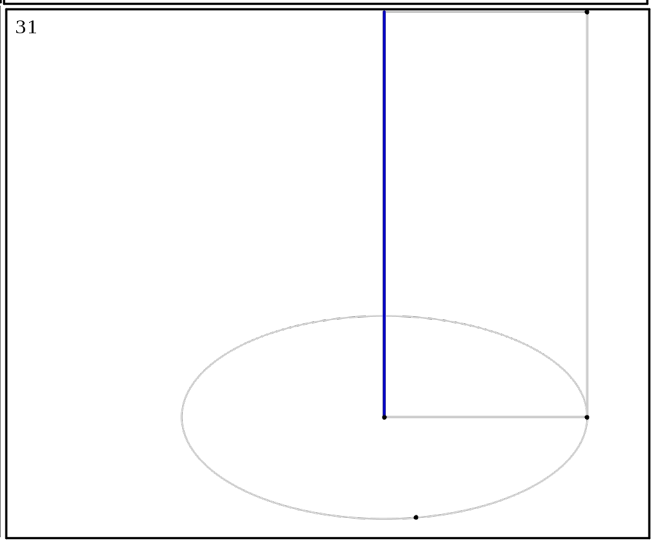
29



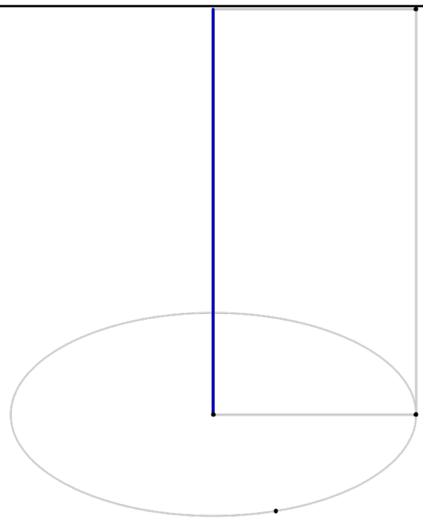
30



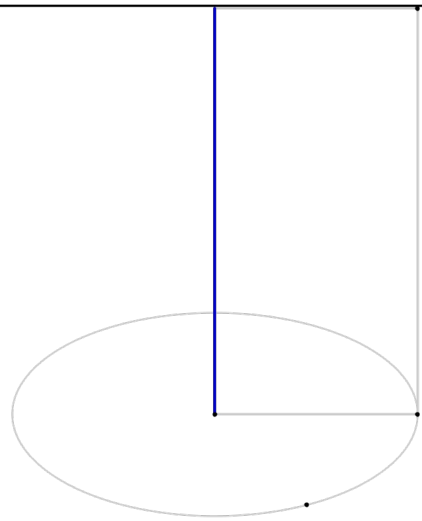
31



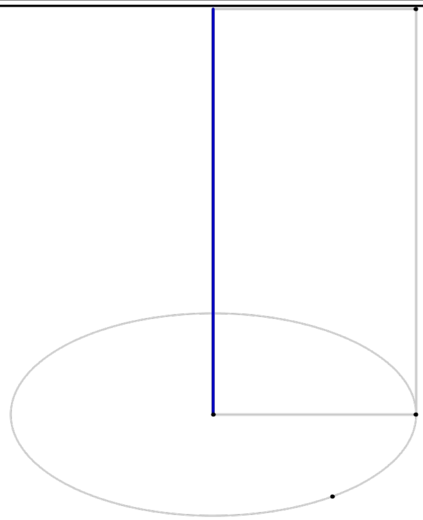
32



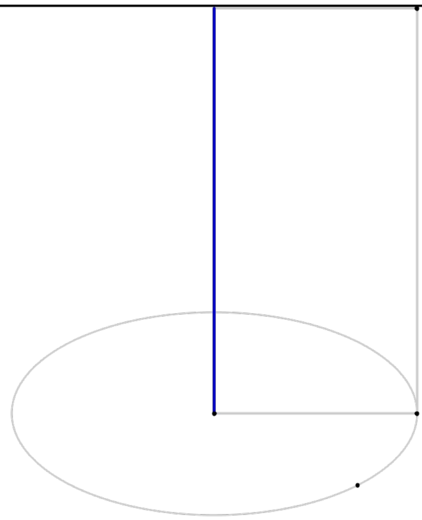
33



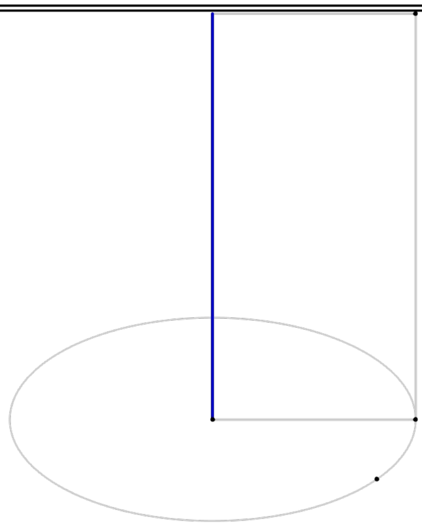
34



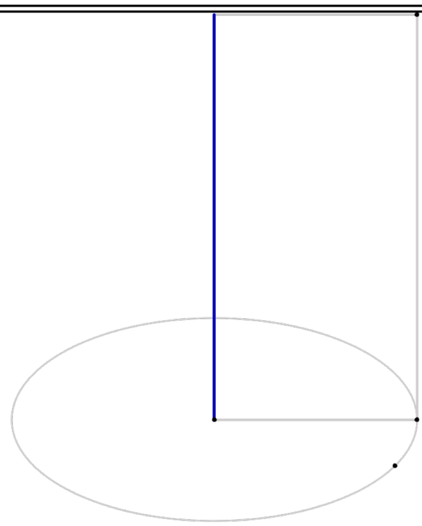
35



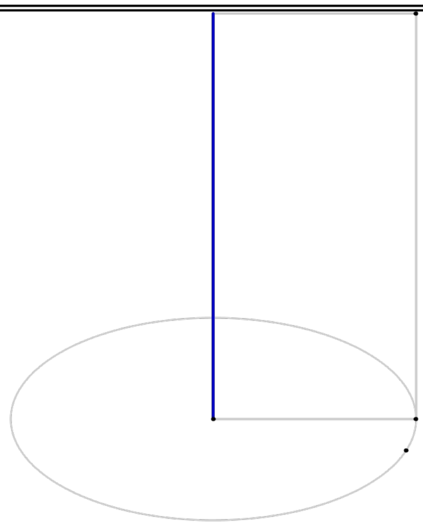
36



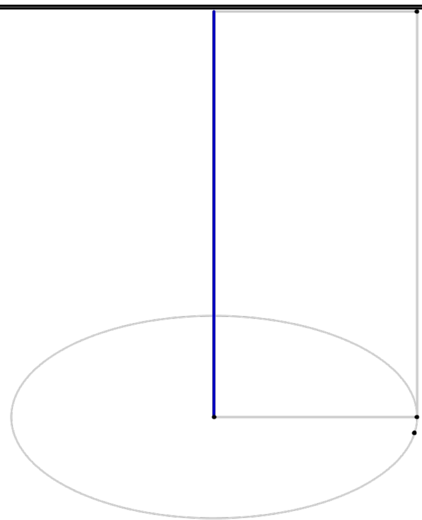
37

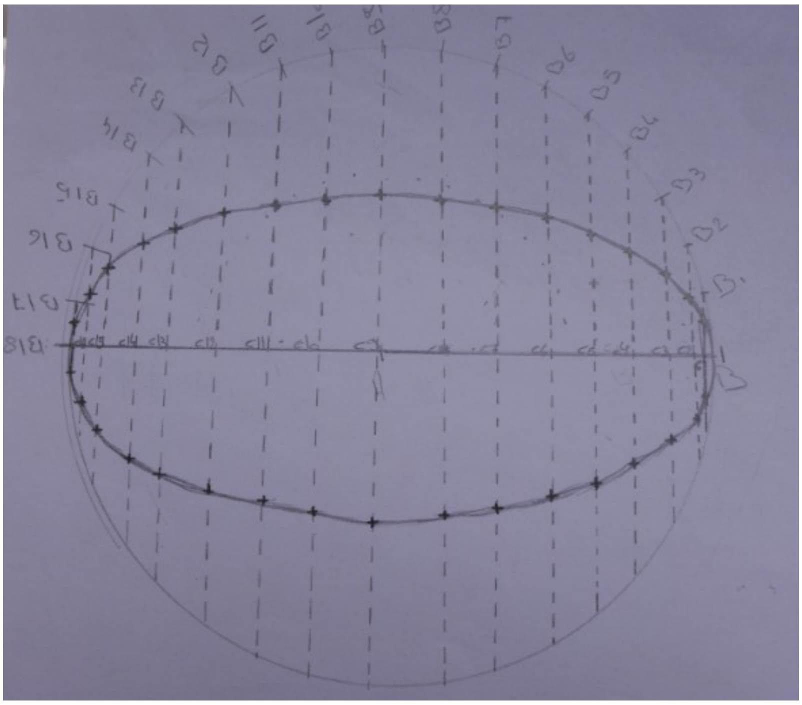


38

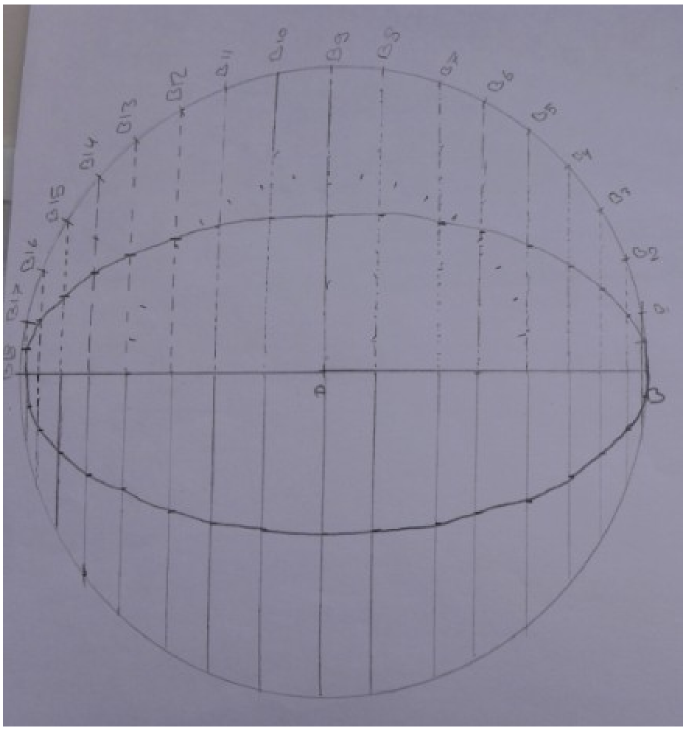


39

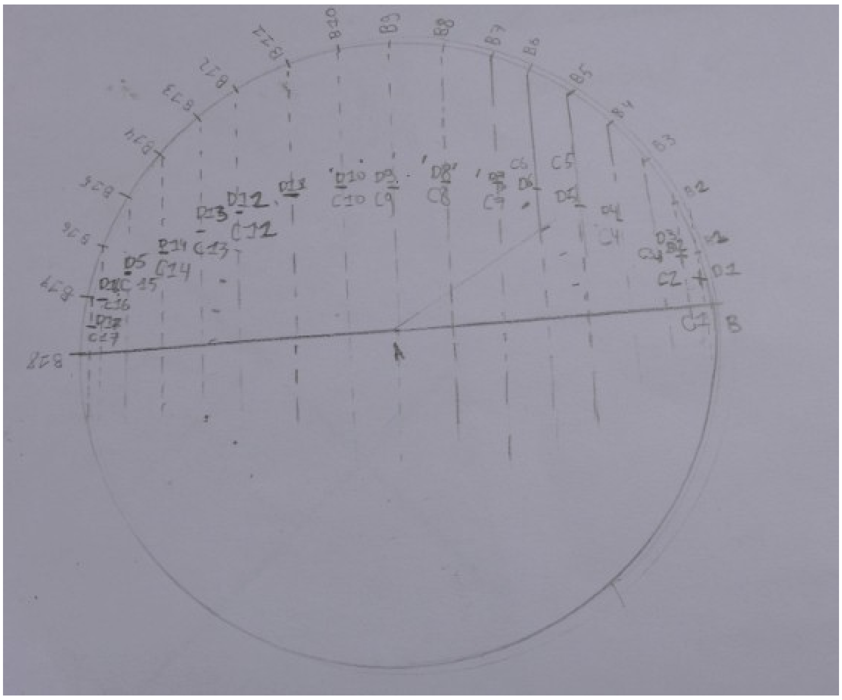




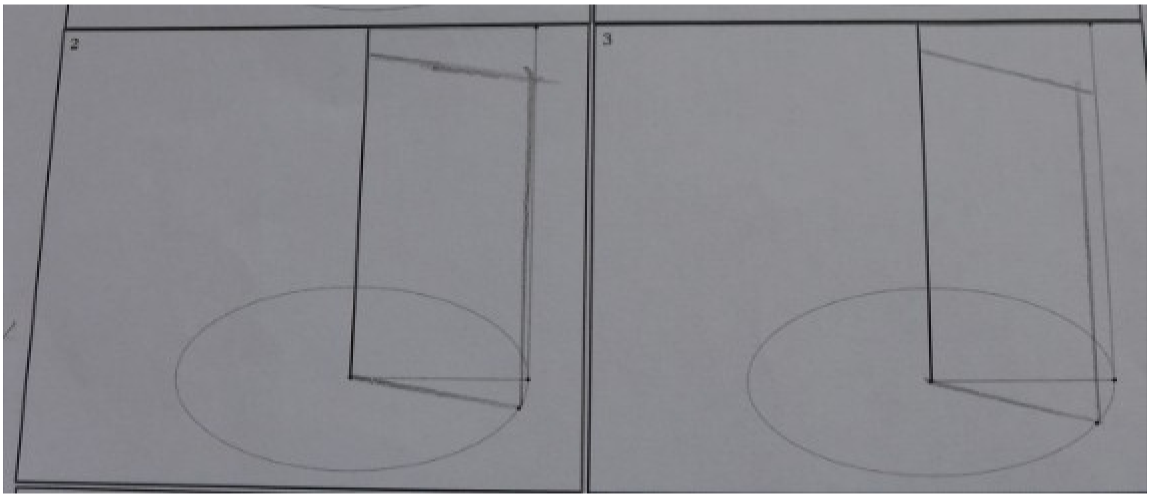
Les points B ont bien été placés (légendés peut-être en tournant la feuille). Les milieux ont à peu près bien été indiqués. Par contre comme dans beaucoup d'autres copies, l’extrémité de l'ellipse ne passe pas par le point B : ils ont relié B_1 à son symétrique. On n'observe effectivement pas une ellipse pointue, mais plutôt une ellipse aplatie.



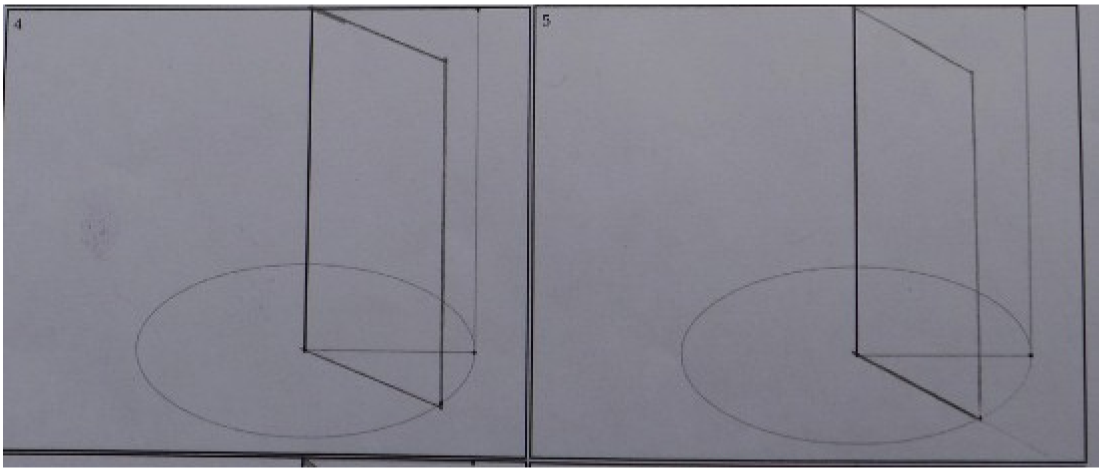
On voit ici les traces de l'utilisation d'un rapporteur (un peu petit) avec les points de 10 en 10. L'utilisation de rapporteurs de tailles différentes leur ont parfois posé problème.



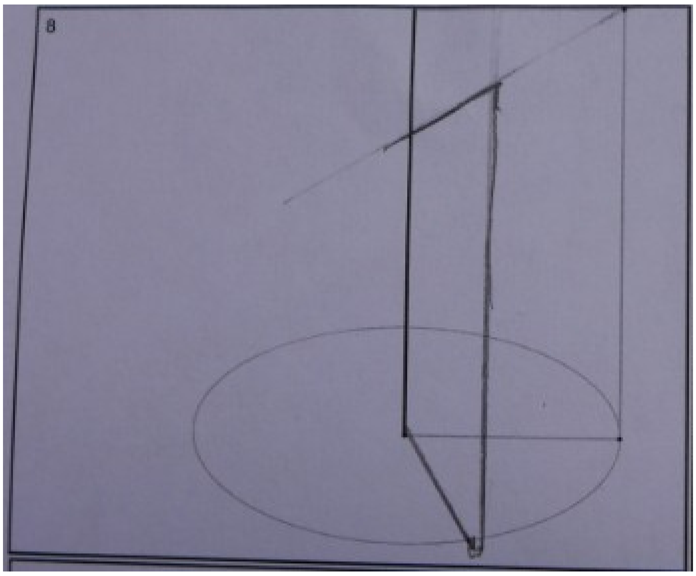
Ci-dessus, le tracé est correct (seulement sur une demi-ellipse) ; tous les points sont légendés ce qui lui a probablement fait perdre du temps, et surcharge le dessin : l’élève n'a pas pu tracer la demi-ellipse.



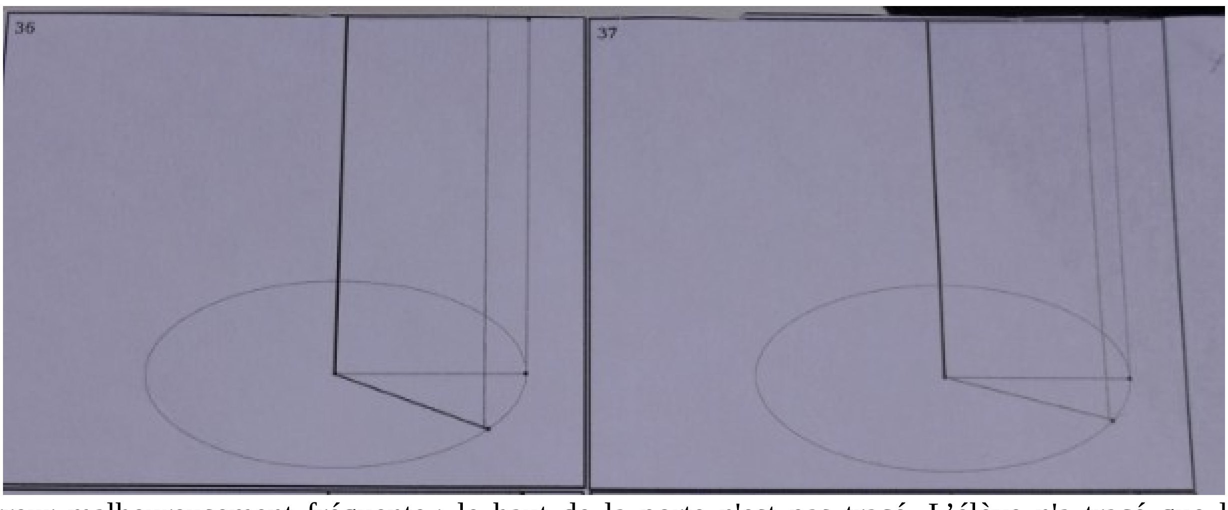
Ci-dessus, plusieurs élèves ont bien tracé des côtés parallèles, mais pas au bon endroit (la porte a été rapetissée). A priori ils utilisent la méthode de la règle et de l’équerre et ils ne semblent pas savoir jusqu’où déplacer l’équerre, à moins que leur règle n’ait été trop courte.



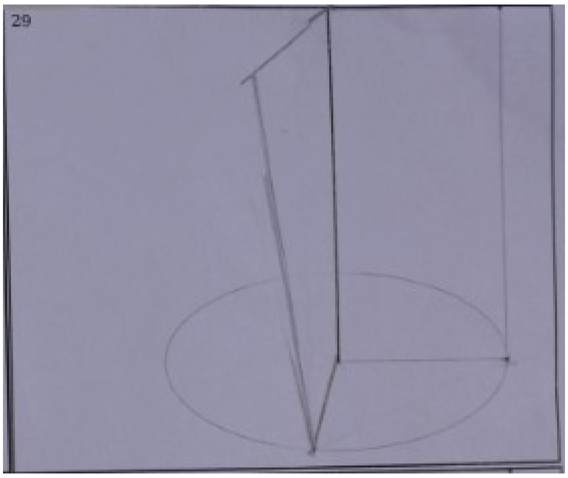
Travail d’un autre élève, qui a bien réussi ses tracés.

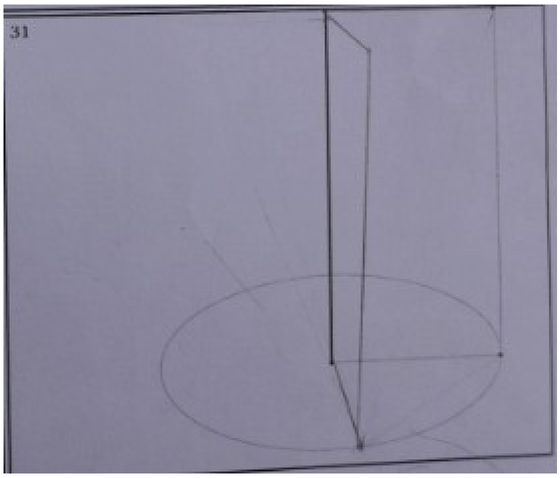


Ci-dessus, un tracé intéressant : l’élève a apparemment cherché à représenter ce qu'elle voyait, en utilisant (probablement intuitivement) une perspective centrale : la porte forme un trapèze, dont les deux fuyantes semblent se couper sur la médiatrice du cadre de la porte.

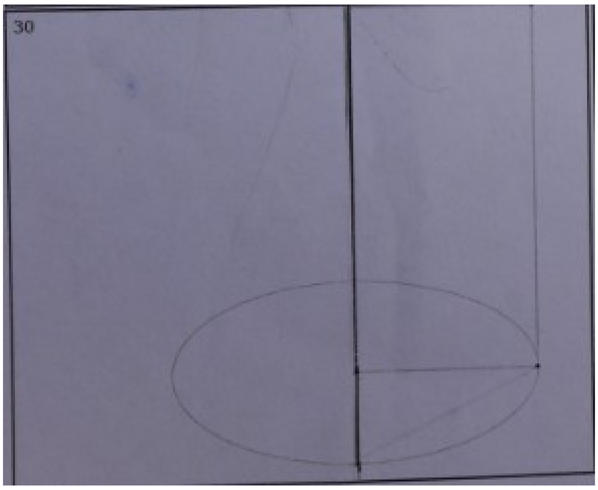


Erreur malheureusement fréquente : le haut de la porte n'est pas tracé. L’élève n'a tracé que les montants verticaux (et peut-être à l’œil, sans utiliser l’équerre).

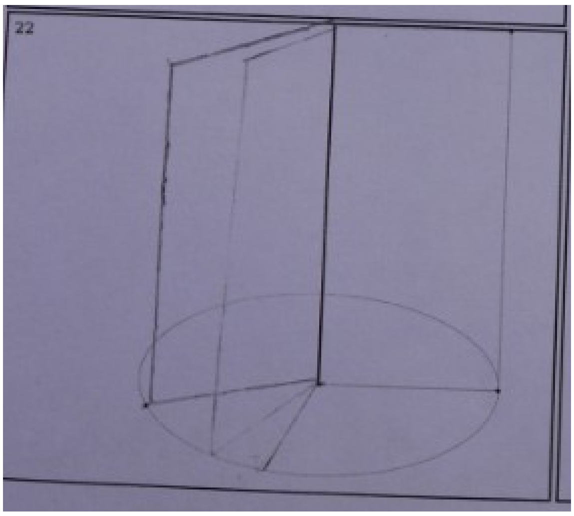




Ce qu'on observe quand un élève n'arrive pas à tracer des parallèles : la porte est bien tordue. Avantage de l’activité : l’élève se rend compte que la porte n'est pas correctement tracée.



Pour cette porte (correspondant à un angle de 90 degrés), la compréhension est plus difficile que la réalisation…(l’élève a l'impression qu'il manque quelque chose).



Des traces de plusieurs essais qui ne passent pas par le bon point sont apparentes (sur tous les tracés de cet élève). La consigne de prendre le point dessiné sur l'ellipse lui a peut-être échappé…

Perspectographe / Paysage en perspective

Niveau : 3ème

Descriptif rapide : Expérimentation avec un perspectographe par groupes, tracé de cubes en perspective centrale, questionnement sur les proportions et les dimensions du dessin par rapport au cube de départ, en fonction de sa position.
Utilisation de ces relevés en arts plastiques pour composer un paysage qui met en scène une ou des perspectives linéaires. La composition peut être figurative ou abstraite.

Objectifs :

Mathématiques	**Arts Plastiques**
- Manipulation. - Mise en évidence des différences entre perspective centrale et perspective cavalière. - Modélisation d'un problème concret. - Réinvestissement du théorème de Thalès pour des calculs de longueur et la démonstration.	Comment exploiter l'outil perspectographe pour composer une image intentionnelle, figurative ou abstraite, illustrant le principe de perspective linéaire.

Durée :

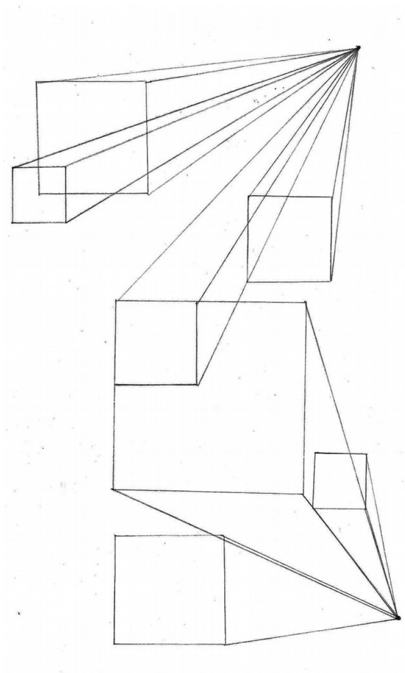
Mathématiques : 2 h	**Arts Plastiques** : 4 h

Prérequis :

Mathématiques	**Arts Plastiques**
- Théorème de Thalès ou triangles semblables. - Proportionnalité.	

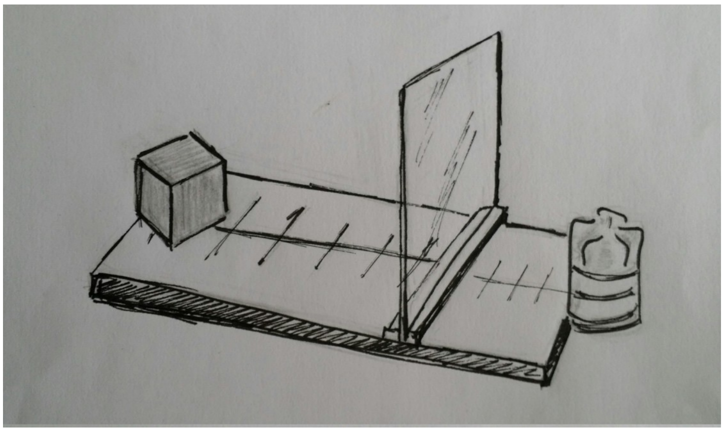
Matériel :
Par groupe de 2 ou 3 élèves :
- un perspectographe,
- une mentonnière, un cube,
- un transparent, un feutre, deux pinces à linge.

On trouvera les fiches élèves en annexe.



Description du perspectographe et commentaires

Notre perspectographe se compose de :



- une planche en bois (graduée ou non),

- une vitre (ou plexiglas) maintenue verticale sur un support, vitre sur laquelle on placera un transparent fixe avec des pinces,

- une mentonnière (par exemple un cul de bouteille) qui servira d'appui pour l'observateur.

On a choisi de ne pas fixer la mentonnière, pour permettre aux élèves de tester son influence.

Le plus pratique est d'avoir une graduation sur l'ensemble de la planche : les élèves ont déjà tendance à penser que la seule distance importante est la distance à la vitre, si les graduations partent de la vitre cela conforterait leur erreur.

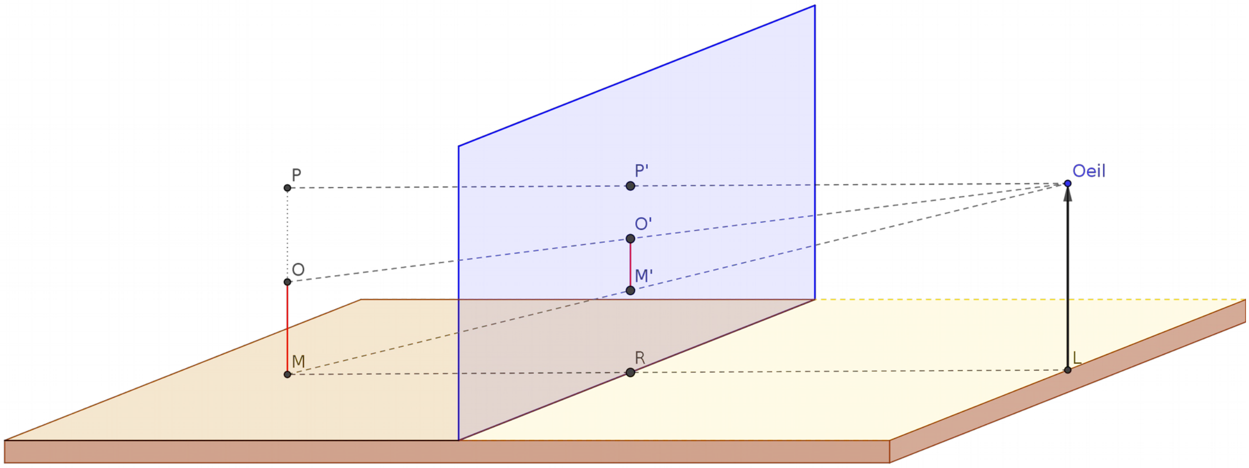
On a utilisé comme objets à représenter des cubes de taille 6 ou 7 centimètres.

Attention :
- utiliser des feutres effaçables ! (les plus fins possibles)
- bien fermer un œil quand on veut dessiner.

Mode d'emploi :
- placer un transparent sur la vitre
- placer l'objet à représenter
- poser le menton sur la mentonnière et fermer un œil, ne plus bouger la tête…
- pointer les sommets sur le transparent avec le feutre
- enlever le transparent et compléter le dessin.

On peut dessiner directement, mais le dessin manquera de précision, et les traits ne seront pas droits.
Il est conseillé de faire une démonstration devant les élèves. Mais surtout : essayez avant de l'utiliser avec des élèves !

Schéma de principe :



Le théorème de Thalès (considérer le triangle Œil O M) fournit :

$$\frac{O'M'}{OM}=\frac{Oeil\,M'}{Oeil\,M}=\frac{Oeil\,O'}{Oeil\,O}$$

Si l'œil est à la même hauteur que l'objet, on reconnaît alors facilement le rapport entre la distance de l'œil à la vitre et la distance de l'œil à l'objet. Dans le cas général, c'est encore vrai : on peut utiliser une deuxième fois le théorème de Thalès, par exemple en considérant le triangle M Oeil L :

$$\frac{Oeil\,M'}{Oeil\,M}=1-\frac{MM'}{M\,Oeil}=1-\frac{MR}{ML}=\frac{LR}{LM}=\frac{Distance\,Oeil\,,Vitre}{Distance\,Oeil\,,Objet}$$

On peut aussi considérer le triangle Œil O P (cela a été notre choix dans le devoir à la maison présenté en annexe) pour obtenir :

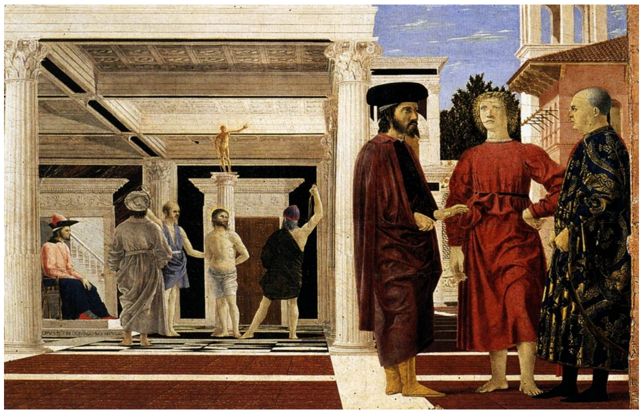
$$\frac{Oeil\,O'}{Oeil\,O}=\frac{Oeil\,P'}{Oeil\,P}=\frac{LR}{LM}=\frac{Distance\,Oeil\,,Vitre}{Distance\,Oeil\,,Objet}$$

Ainsi la distance de l'objet à la vitre n'est pas une grandeur pertinente, seule joue la distance de l'objet à l'œil.
De plus, la taille O'M' du dessin de l'objet est inversement proportionnelle à la distance de l'œil à l'objet : si l'objet est deux fois plus loin de l'œil, son dessin sera deux fois plus petit. Il paraît intéressant de faire préciser ces points à des élèves de troisième, déjà familiers avec la proportionnalité : s'ils sentent une relation de proportionnalité « quelque part », savoir laquelle et la démontrer est loin d'être évident.
Passer de la situation concrète à un schéma tel que ci-dessus, permettant de reconnaître une situation typique de Thalès et faisant apparaître les grandeurs pertinentes, est un point clé de cette activité. Dans nos classes, il a été fait par le professeur en fin d'activité, et retravaillé par les élèves dans le cadre d'un devoir à la maison.
Une animation GeoGebra permettant d'illustrer la situation est disponible sur le site : https://www.geogebra.org/classic/k4e4kaus (déplacer le point E pour obtenir l'animation)

Description détaillée de la séquence et commentaires

<u>Séance d'introduction</u> (15 à 20 min, par exemple en fin de cours de mathématiques la veille de la première séance). Cette séance peut aussi être faite en co-intervention, ou dans le cours d'arts plastiques.
On pense important de commencer par une présentation de tableaux de différentes époques et différents lieux, montrant l'évolution de la représentation, l'apparition des règles de la perspective et leur détournement.
Œuvres choisies (voir en annexe de l'activité) : un tableau du Moyen-Âge, la Flagellation du Christ de Piero Della Francesca (XV^{e} siècle), une gravure de Dürer (XVI^{e} siècle), une estampe japonaise (XVII^{e} siècle), une œuvre de Vredeman de Vries (XVI^{e} siècle), un dessin de M.C. Escher (XX^{e} siècle), une œuvre de street art de Kurt Wenner (XXI^{e} siècle).

Moyen-Âge



La Flagellation du Christ
Piero de la Francesca, entre 1444 et 1478

On demande aux élèves à propos de l'œuvre du Moyen-Âge (où la perspective est absente) et de La Flagellation du Christ : « qu'est ce qui est différent ? »
« Sur la première les personnages sont plus grands que les maisons, il n'y a pas de perspective, sur la seconde il y a de la perspective, les personnages plus loin sont plus petits… »

L'enseignant trace sur La Flagellation du Christ les fuyantes et leur montre qu'elles convergent en un point.
Les élèves peuvent reconnaître le point de fuite (vu précédemment en arts plastiques, en 4ème ou en 3ème). Attention ils ne l'ont pas forcément apprise sous le nom de « perspective centrale » ; c'est parfois perspective fuyante, ou perspective à point de fuite, ou perspective focale, ou encore linéaire...

Artiste dessinant une femme allongée (Instructions…)
Albrecht Dürer, 1525

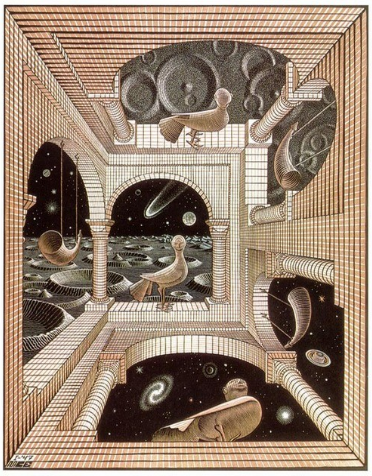
On présente ensuite le dessin de Dürer avec son perspectographe. Les élèves sont intrigués et demandent : *comment ça marche ? (il peut y avoir des réactions sur la nudité et la position du modèle.)*
On leur explique qu'ils vont justement utiliser des perspectographes simplifiés dans la suite de l'activité.

On présente alors une estampe japonaise ; on leur demande de comparer avec les œuvres précédentes.
Ils voient que c'est différent mais ils ne savent pas dire pourquoi ; ils ont du mal à définir s'il y a ou non une perspective. On trace les parallèles et on constate qu'il s'agit de la perspective cavalière.

Japon, Moronobu, XVIIe siècle

On leur montre ensuite, pour illustrer ce qu'on peut faire quand on connaît les règles de la perspective, des œuvres de Vredeman de Vries, M.C. Escher et un trompe-l'œil de rue.

Caprice architectural avec personnages
Vredeman de Vries, 1568



Un autre monde
M.C. Escher, 1947

Mélancolie et mystère d’une rue
Chirico, 1914

Après avoir testé cette séquence en projetant un plus grand nombre d’œuvres, on a choisi de ne présenter que celles-ci car les élèves saturaient. En particulier l'œuvre de Chirico « Mélancolie et mystère d’une rue », avec un mélange de trois perspectives (deux points de fuite, et une perspective cavalière), n'a suscité aucune réaction de leur part.

Séance 1 avec le perspectographe (par groupe de deux) en demi-classe, dans le cours de mathématiques (peut être faite en co-intervention en classe entière).

Étape 1

Un perspectographe, un cube, un transparent, deux pinces à linge et un feutre par groupe.

On commence par leur montrer comment se servir de l'appareil en traçant un cube devant eux, puis on distribue la fiche élève mathématiques n°1 avec la consigne de faire des essais et de compléter la fiche au recto et au verso.
Le cas échéant, on indique aux élèves que l'on gardera les traces pour les décalquer et les utiliser par la suite en arts plastiques.
Les élèves font des essais et des remarques soit orales soit par écrit sur les fiches :

- *on dessine le cube en 3D*
- seul un groupe change de position leur œil au lieu du cube, et dit : *si on change de point de vue, ça change tout !*
- *le dessin est plus petit que le cube*
- *plus on s’éloigne, plus les mesures sont petites (de même si on éloigne le cube)*
- *c’est proportionnel !*

Il est difficile d’obtenir des précisions sur ce qui est proportionnel à quoi, on arrive à *: « la taille du dessin »*

Certains pensent qu’on obtiendrait le même dessin à main levée… c’est-à-dire un dessin approximatif de cube en perspective cavalière comme ils ont l’habitude de le faire depuis l’école primaire. On demande de préciser, on dessine au tableau cette représentation en cavalière qu'ils connaissent bien. On pose alors la question de savoir ce qui est ou non parallèle sur le dessin et dans la réalité.

Il est étonnant de constater qu'ils ne voient pas la différence entre leur dessin et la perspective cavalière avant d'avoir prolongé les arêtes sur le dessin. De plus, ils n'ont pas l'idée de le faire tout seuls, il faut le leur suggérer.
C'est l'occasion de rappeler la définition de la perspective cavalière (on peut ici utiliser les éventuels souvenirs de l'activité de 6ème sur la projection du cube avec un vidéoprojecteur) ainsi que les différences entre perspective centrale et perspective cavalière.

Les questions suivantes ne posent pas de problème majeur :
- pour voir 3 faces : une arête face à la vitre
- pour en voir 2 : une face parallèle à la vitre
- pour voir une face uniquement : on penche le cube, on baisse l'œil au ras de la table, ou on soulève le cube.

Ils trouvent très vite les positions demandées mais c'est le vocabulaire pour l'exprimer qui pêche… ils disent droit, de travers… au lieu de parallèle ou non à la vitre.
Quelques-uns pensent qu'on ne peut pas voir une seule face.
On peut avoir la question : peut-on en voir 4 ? À laquelle ils trouvent la réponse tout seuls.

Étape 2

Les élèves cherchent la réponse à la question de savoir où placer le cube pour qu'il soit deux fois plus petit sur le dessin. Ils trouvent tous en tâtonnant.
Par contre l'explication est plus compliquée à obtenir.

Les élèves donnent la position et donc la distance du cube par rapport à la vitre et non à l'œil : ceux qui pensent à la proportionnalité n'arrivent alors pas à l'utiliser puisqu'ils n'ont pas la bonne longueur.
Il n'est pas facile de mettre en évidence avec eux que la distance importante est celle entre le cube et l'œil.
Ce problème est peut-être accentué par le fait que les perspectographes utilisés ne sont gradués qu'après la vitre ; on peut tenter d'y remédier en rajoutant une graduation du côté de la mentonnière.

Pour ceux qui ont trouvé la réponse, on peut leur demander de chercher comment faire pour que le dessin soit trois fois plus petit.

On peut choisir de faire des bilans intermédiaires et de discuter ensemble entre chaque étape, ou bien de les laisser davantage seuls chercher et remplir les fiches avec un bilan uniquement en fin de séance.

Séance 2

Le professeur redistribue aux élèves le matériel et leur fiche de la première séance pour qu'ils se remettent en mémoire le travail précédent, ainsi que la fiche n°2.
Ils s'y remettent, refont quelques essais et ont du mal à comprendre la question. Quand ils comprennent qu'il s'agit de calculer ce qu'ils ont trouvé précédemment par la manipulation, beaucoup sont perplexes.

On se heurte ici au problème de ce qu'ils ne savent pas chercher, n'osent pas tenter des choses, faire des calculs, des schémas…

Au cours des expérimentations réalisées, peu d'élèves ont abordé cette étape de modélisation.

- *Certains ont tenté des tableaux de proportionnalité en retombant sur le problème des distances à utiliser, et finalement sur la question « qu'est-ce qui est proportionnel ? ».*
- *Beaucoup restent sur un modèle additif : « le dessin doit faire 1 cm de moins, donc je rapproche de 1 cm ». Variante : « Chaque fois qu'on éloigne le cube de 5 cm de la vitre c'est 0,5 cm en moins sur le dessin ».*
- *Deux groupes ont tenté une modélisation avec le théorème de Pythagore sans succès.*
- *Un groupe a réussi une modélisation correcte et utilisé le théorème de Thalès.*

Au cours du bilan final, le professeur explique la modélisation de la situation et met en évidence l'utilisation du théorème de Thalès (suivant la période de l'année, on peut également parler d'homothéties).
On peut alors démontrer, en utilisant plusieurs fois le théorème, que la taille du dessin de l'objet est inversement proportionnelle à la distance de l'œil à l'objet (voir plus haut le schéma de principe).
Une animation GeoGebra disponible sur le site (https://www.geogebra.org/classic/r8ftkxkw) permet de bien comprendre la modélisation (déplacer le point D).

Il est possible de faire entièrement la démonstration en classe ou de l'expliquer à partir d'une figure et de la donner à rédiger aux élèves en devoir maison (voir plus loin pour un exemple d'énoncé).

Bilan
La majorité des élèves se sont bien investis, ils ont réfléchi et cherché ; certains se sont même dits fatigués à la fin de l'heure !
Ceux qui ont cherché étaient vraiment demandeurs des preuves et de la démonstration finale.
Cela a donné lieu à beaucoup de débats, sur la proportionnalité, la modélisation, la nécessité de passer par des recherches, des conjectures et leur validation (ou non) et le fait qu'une conjecture même non validée fait avancer les choses.
Il est intéressant également de montrer l'efficacité de la modélisation des problèmes concrets par une théorie rigoureuse.

Commentaires sur le devoir maison sur le perspectographe

Suite à l'activité sur le perspectographe, on a donné le devoir maison (voir annexe) pendant les vacances de février.
Question 1 : La démonstration avait été faite en classe lors du bilan de l'activité sans la rédiger.
Beaucoup ont recopié leurs notes sans rédaction et en sautant des étapes, mais certains l'ont rédigée correctement.

Certains ne se souvenaient pas trop des deux étapes et ont péniblement trituré les rapports de Thalès pour finalement y arriver quand même.
Deux ou trois élèves ont utilisé des triangles semblables.
Question 3 : Il n'y a que deux élèves qui n'ont visiblement pas compris la modélisation de la situation.
Questions 2 et 4 : Quelques tableaux de proportionnalités faux, sans légende...
Question 5 vrai/faux :
On a utilisé l'animation GeoGebra https://www.geogebra.org/classic/r8ftkxkw pour pouvoir visualiser ce qui variait. Cela a permis de voir ce qui se passe dans le cas où l'une ou l'autre des dimensions varie. Notamment, on constate que la hauteur de l'œil ne change rien.
Il y a eu beaucoup d'erreurs sur la proportionnalité (affirmation **b**). La correction a été l'occasion de repréciser la définition de deux grandeurs proportionnelles : il ne suffit pas de varier « ensemble », ni même dans le même sens pour être proportionnel.
Pour l'affirmation **d,** on a proposé deux formulations suivant les classes : une plus mathématique « si BD double alors HI est divisé par deux » et l'autre plus concrète « si la distance mentonnière cube double, alors la taille du dessin est divisé par deux ».
Les élèves qui avaient la seconde formulation se sont beaucoup moins trompés que les autres.
Un élève a remarqué qu'il manquait une précision (arête du cube fixe), cela n'a pas gêné les autres.
Question bonus :
Beaucoup ont utilisé les valeurs numériques des questions précédentes, et n'ont pas dit que le produit était fixe quelles que soient les dimensions.
Une élève a calculé avec des valeurs d'abord, puis conjecturé que c'était constant et l'a prouvé.

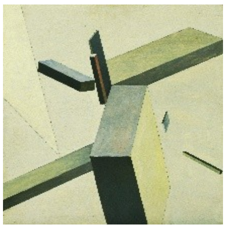
Bilan
Les élèves ont davantage cherché que d'habitude (pendant l'activité comme dans le devoir maison)
On a pu travailler :
- la modélisation
- la démonstration : le théorème de Thalès est utilisé pour des calculs de longueurs mais rarement pour des démonstrations.
Le devoir à la maison en particulier a été l'occasion de revenir sur la proportionnalité.

Exemple de prolongement dans le cours d'arts plastiques

Le professeur de mathématiques peut être présent au début. Voir la fiche élève arts plastiques « Paysage en perspective » en annexe.

Étape 1

Projection et présentation des trois œuvres avec à chaque fois questionnement et un débat : L.Lissitzki, composition ; Piero della Francesca, la Flagellation du Christ ainsi qu'un projet de décor d’Erich Kettelhut pour le film *Metropolis* de Fritz Lang.



L. Lissitzky, 1922

La Flagellation du Christ
Piero Della Francesca, 1444

Dessin Ville du futur
E. Kettelhut, 1926

Que voit-on ? Que traduit le tableau comme émotion ? Est-ce figuratif ou abstrait ?
Il y a débat sur ce point.

Le professeur d'arts plastiques parle des débuts de l'abstraction, et du cubisme.
Sur chaque tableau, on recherche aussi la perspective, où sont les points de fuite …

Les élèves participent activement au débat, viennent au tableau montrer la perspective.

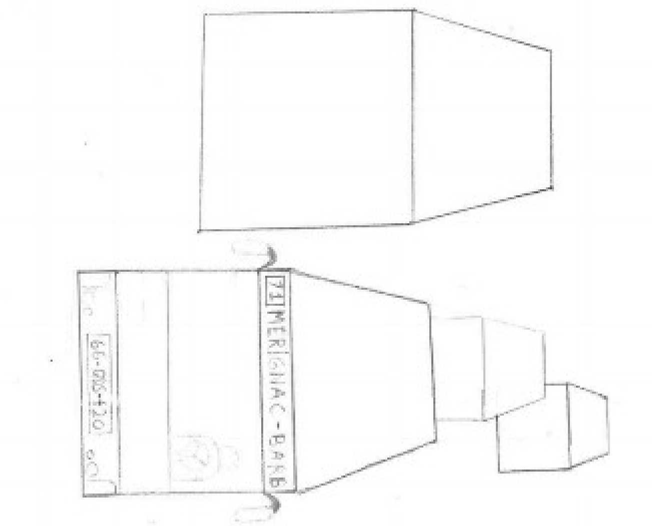
Étape 2

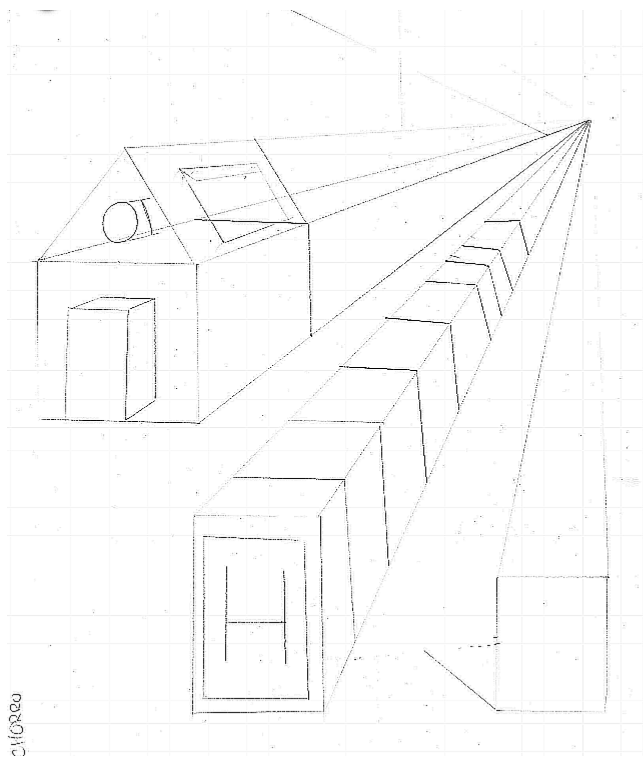
Le sujet est distribué (fiche élève « Paysage en perspective » en annexe) et les élèves récupèrent leurs transparents avec les figures tracées en mathématiques. Ils peuvent se resservir des perspectographes s’ils le veulent.
Il leur est possible de choisir une image figurative ou une image abstraite, et il est nécessaire de définir et de conserver intention et expressivité.
Il faut trois séances d’arts plastiques supplémentaires pour que les élèves terminent leur travail.

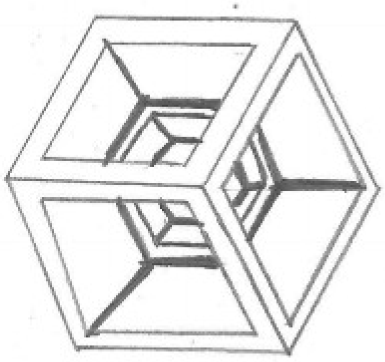
Bilan
Très intéressant pour les élèves.
Il pourrait aussi sans doute être pertinent d’introduire le sujet en arts plastiques avant les mathématiques en enlevant, à ce moment-là, la référence au théorème de Thalès du sujet de manière à ce qu’ils en sentent eux-mêmes le besoin en mathématiques.

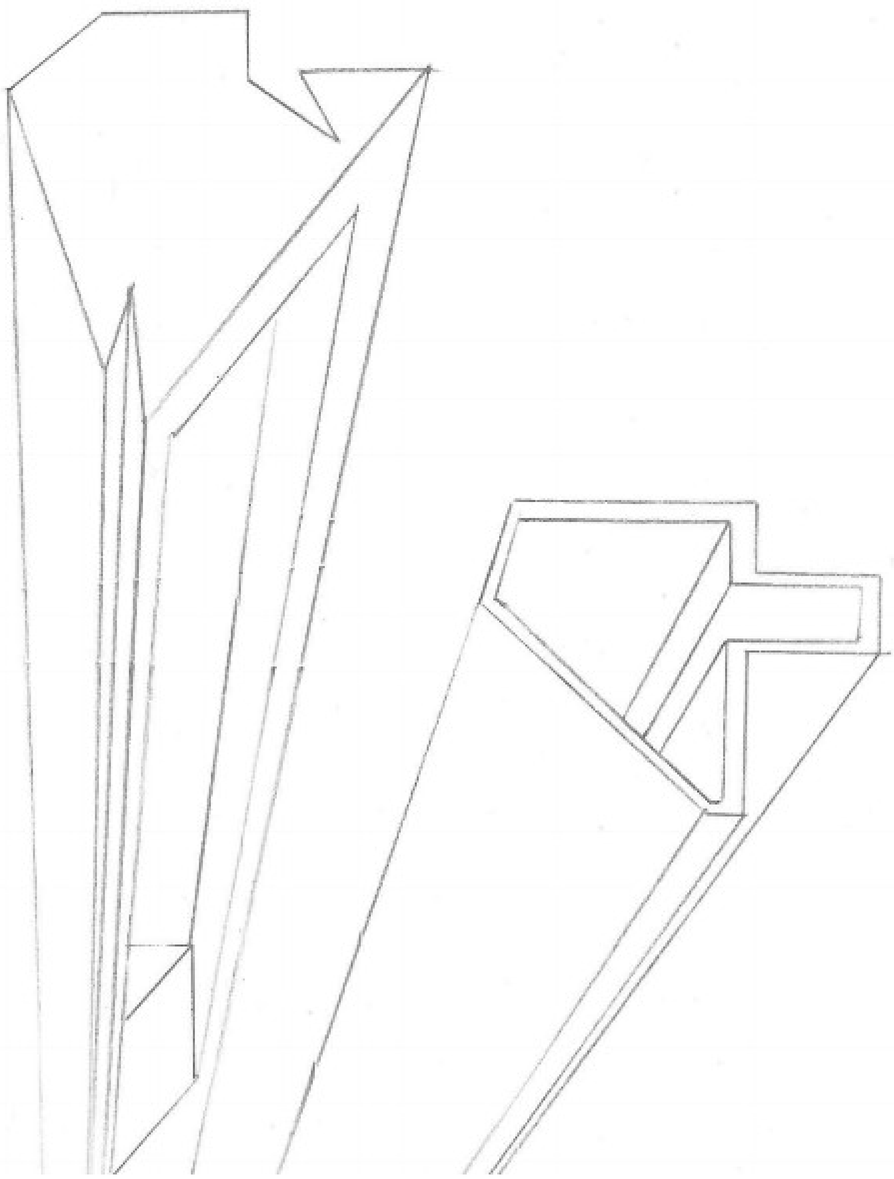
Exemples de productions d’élèves à la fin de la première séance d'arts plastiques

On trouve des bus, des maisons, du dessin technique...





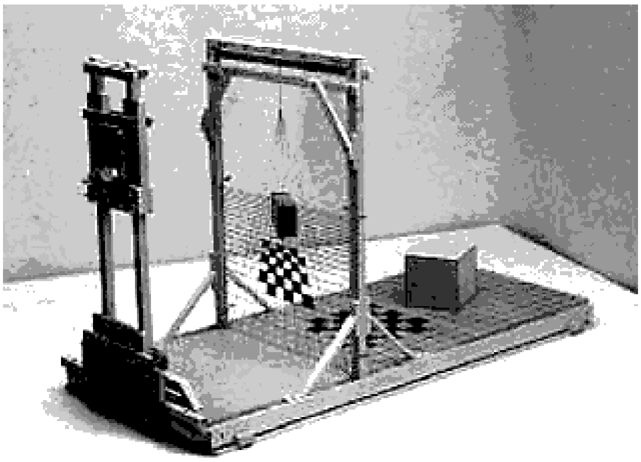




Mathématiques : fiche élève n°1

Le perspectographe

Un perspectographe est un appareil mécanique permettant de tracer une vue en perspective.
Le dessin obtenu dépend de la position de l'observateur. Son principe repose sur des règles mathématiques. Inventé à la Renaissance, il est composé d'un écran et d'un œilleton (appareillage simple appelé *portillon*).



Perspectographe de A. Dürer
peintre et graveur allemand (1471-1528)

Nous allons utiliser des perspectographes simplifiés où le *portillon* a été remplacé par une « mentonnière » sur laquelle il faut poser le menton et fermer un œil.

Matériel : *par groupe de deux ou trois : un perspectographe et un cube (de 7 cm d'arête environ).*
À la fin de la séance, tout le matériel doit être rendu au professeur, y compris les feutres et les transparents avec les tracés.
Les transparents seront décalqués et utilisés en cours d'arts plastiques.

Étape 1
Utiliser l'appareil pour tracer sur le transparent avec les feutres.

Pour faire un dessin correct :

- poser le cube sur la graduation,
- placer le menton sur la mentonnière,
- **fermer un œil**,
- pointer les sommets du cube avec le feutre sur le transparent,
- relier ensuite les sommets sur le dessin (éventuellement avec une règle).

Faire plusieurs essais de dessins de cubes dans différentes positions.

Que remarque-t-on ? …..

…...

....

....

Comment placer le cube pour pouvoir dessiner 3 faces ? …..

…...

…..

....

Comment placer le cube pour pouvoir dessiner uniquement 2 faces ?…..

…...

…..

Pourrait-on ne voir qu'une seule face ? …...

…...

Étape 2
En fixant la mentonnière (à ne jamais déplacer une fois le travail commencé) et en plaçant le cube avec une face parallèle à la vitre, placer le cube pour que l'arête de la face de devant soit deux fois plus petite sur le transparent.

Comment y êtes-vous arrivé? (expliquez par des phrases, schémas, etc) ….......................................

…...

…...

…..

....

Mathématiques : fiche élève nº2

Le perspectographe (suite)

Lors de la première séance, vous avez trouvé où placer le cube pour que l'arête de la face de devant soit deux fois plus petite sur le transparent.
Comment aurait-on pu prévoir cette position à l'avance ?…...

…...

…..

....

…..

Déterminez où placer le cube pour que son arête mesure 4 cm sur le dessin.…............................

…...

…..

Vérifiez expérimentalement. Votre prévision était-elle correcte ? Si oui, expliquez votre démarche ; sinon, que faudrait-il modifier dans votre démarche ? …..

…...

…..

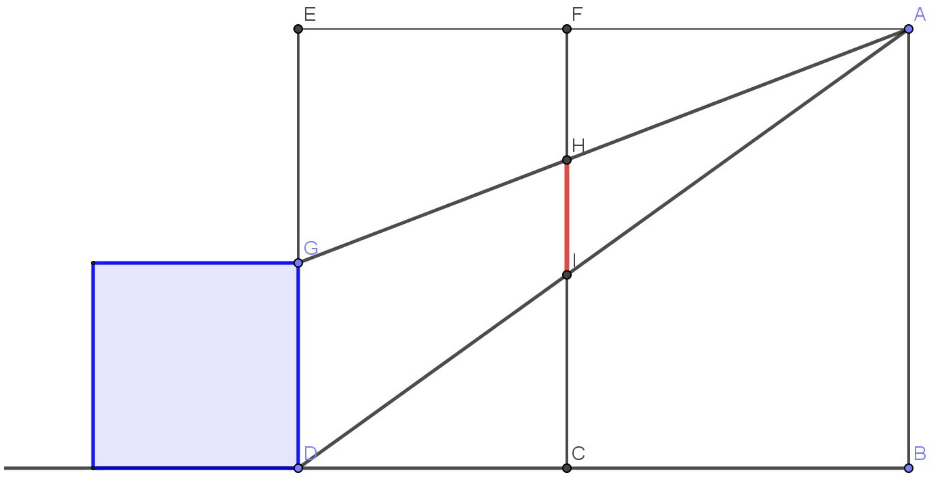
Mathématiques : devoir à la maison

Le perspectographe

Géométrie

On considère la figure ci-dessous dans laquelle les droites (AB), (FC) et (ED) sont perpendiculaires à (CD).

BC = 12 cm
GD = 6,5 cm



1) Démontrer que $\frac{AF}{AE} = \frac{HI}{GD}$

2) Dans le cas où DC = 16 cm, combien vaut la longueur HI ? Justifier.

3) Si cette figure modélise la situation vue en classe d'un cube et son dessin obtenu avec un perspectographe :
a- Où se trouve sur la figure l'œil de l'observateur ?
b- Où se trouve la vitre ?
c- Quel segment représente l'arête du cube ? Quel segment représente le dessin de cette arête ?

4) Si la mentonnière est fixée à 12 cm de la vitre, où faut-il placer un cube d'arête 6,5 cm pour que son arête sur le dessin mesure 2 cm ? Justifier.

5) VRAI/FAUX
Avec une distance BC fixe, dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses :
a- Si GD ne change pas et si CD augmente, alors HI augmente.

b- HI est proportionnelle à CD.

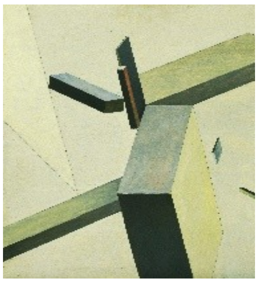
c- Si GD augmente et CD est fixe, alors HI augmente.

d- Si la distance mentonnière-cube double, alors la taille du dessin, d'un même cube, est divisée par deux.

Question Bonus :
Si la mentonnière est fixée et que l'arrête du cube reste la même, que peut-on dire du produit BD x HI ? Pourquoi ?

Arts Plastiques : fiche élève 3ème

Paysage en perspective



L. Lissitzky, 1922

La Flagellation du Christ
Piero Della Francesca, 1444

Dessin Ville du futur
E. Kettelhut, 1926

Sujet

À partir des relevés obtenus avec le perspectographe en cours de mathématiques, composez un paysage qui met en scène une ou des perceptives linéaires, et illustre (au moins entre deux éléments) le théorème de Thalès ; la composition peut être figurative ou abstraite. Donnez du sens à votre proposition, proposez un titre à votre production.

Travail personnel ou en binôme. Format 24x32 ou A3 (binôme)

Toutes techniques (noir et blanc ou couleurs selon l'intention choisie, crayon papier, feutres, peintures, crayons couleurs, collages…).

Objectifs

Faire le lien entre art et mathématiques : utilisation du théorème de Thalès pour composer une image expressive.

Notions : espace, forme, perspective linéaire.

Vocabulaire : perspectographe ; abstraction /figuration dans un paysage.

Axes du programme cycle 4

La représentation, image réalité fiction : le dispositif de représentation.

Compétences / Évaluation

Composantes expressives :

Expérimenter, produire, créer : intention, sens donné à la composition dans les choix d'organisation de l'espace et de mise en scène de la ou des perspectives ;

Respect du théorème de Thalès entre au moins deux éléments.

Composantes techniques : mise en espace de l'impression de profondeur, composition par rapport au format et techniques choisis, mise en valeur de la production.

Composantes culturelles et langagières :

Être capable de faire le lien entre le théorème de Thalès et sa production artistique ; donner un titre à son travail lequel oriente l'intention choisie.

In Situ avec Thalès

Niveau : 3ème

Descriptif rapide : Le théorème de Thalès sert à déterminer l'emplacement et la taille des œuvres des élèves qui seront affichées en différents endroits du collège pour profiter d'effets de perspective (un même dessin sera en plusieurs parties, affichées sur des plans parallèles).

Objectifs :

Mathématiques	**Arts Plastiques**
- Reconnaître une configuration de Thalès. - Agrandir ou réduire une figure en utilisant la conservation des angles et la proportionnalité entre les longueurs de la figure initiale et celles de la figure à obtenir - Comprendre les effets d'un agrandissement ou d'une réduction sur les longueurs, les angles, les aires et les volumes.	- Inventer une forme s'adaptant à un lieu. - Tenir compte du point de vue du spectateur pour élaborer une production. - Choisir une technique adaptée au projet (au format, au support, aux contraintes du lieu). - Expliquer son travail par écrit à destination d'un public.

Durée :

Mathématiques : 4 séances	**Arts Plastiques** : 4 séances

Prérequis :

Mathématiques	**Arts Plastiques**
- Théorème de Thalès - Agrandissement, réduction - Proportionnalité	

Matériel :

- Papier grand format (affiches)
- Des locaux qui s'y prêtent (murs parallèles, poteaux...)
- Utilisation de locaux pour exposer les œuvres du collège : accord de l'administration.

Motivation et liens avec les programmes

Pour le cours de mathématiques
Attendus du programme Réinvestir dans une situation concrète le théorème de Thalès pour résoudre un problème. **But du projet** Développer les compétences, l'envie de chercher, l'autonomie, le travail en groupe des élèves et la communication entre pairs. **Compétences travaillées :** Modéliser, Raisonner, Communiquer. L'intérêt pour le cours de mathématiques est de faire vivre le théorème de Thalès. On part d'une situation concrète, dans l'espace, avec des dimensions qui sont de l'ordre du mètre et pas du centimètre. Un vrai travail de modélisation est nécessaire avant d'être en mesure de dessiner sur son cahier un schéma où l'on retrouve la configuration du théorème de Thalès. C'est un travail qui n'est pas facile, et qui demande non seulement de savoir reconnaître une configuration de Thalès, mais aussi de savoir la trouver. Les élèves sont motivés par l'activité, et vont faire l'effort, en groupe, de ce travail de modélisation. | Le travail est validé non par l'enseignant, mais par une installation de l'œuvre dans les murs de l'établissement.

Références aux programmes d'arts plastiques
<u>**La représentation ; images, réalité et fiction**</u> **Le dispositif de représentation :** l'espace en deux dimensions (littéral et suggéré), la différence entre organisation et composition ; l'espace en trois dimensions (différence entre structure, construction et installation), l'intervention sur le lieu, l'installation. <u>**L'œuvre, l'espace, l'auteur, le spectateur**</u> **La présence matérielle de l'œuvre dans l'espace, la présentation de l'œuvre :** le rapport d'échelle, l'*in situ*, les dispositifs de présentation, la dimension éphémère, l'espace public ; l'exploration des présentations des productions plastiques et des œuvres ; l'architecture. Appropriation plastique d'un lieu ou de l'environnement par des créations plastiques (intégration ou rupture avec les caractéristiques du lieu, affirmation de l'œuvre, débordement du cadre, du socle, mise en espace, mise en scène, parcours...), jeux sur l'échelle et la fonction de l'œuvre, sur les conditions de sa perception et de sa réception. Point de vue de l'auteur et du spectateur dans ses relations à l'espace.

Éclairage artistique

Le but est de mettre en place une installation in situ.
Cela donnera l'occasion de présenter ces concepts dans le cours d'arts plastiques.

L'œuvre In Situ

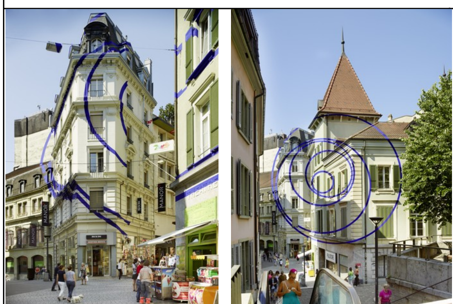
Chapelle Sixtine. Vatican. Rome
MICHEL-ANGE, 1508-12

La Villa Barbaro à Maser (Italie)
Paul VÉRONÈSE réalise les fresques en 1559-1560 en jouant sur les trompe-l'œil et le point de vue du spectateur.
Trompe-l'œil : Peinture qui utilise des effets, notamment ceux de la perspective, pour créer une illusion de relief, de profondeur, etc.

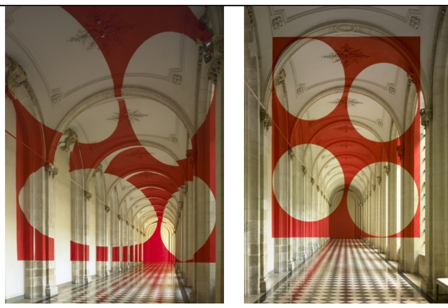
Installation :
1. Disposition de matériaux et d'éléments divers dans un espace.
2. Œuvre ainsi obtenue.
3. Mode d'expression artistique apparue au troisième tiers du XX^{e} siècle.

In situ : se dit d'une œuvre réalisée en fonction d'un lieu auquel elle est destinée et sur lequel elle réagit (expression proposée par Daniel Buren : "en situation"). Depuis les années 1960, les artistes de l'art minimal, du *land art*, de l'art néo conceptuel, les vidéastes, les installateurs, etc. ont particulièrement développé la création *in situ.*

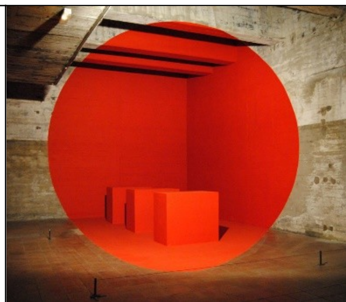
Excentrique(s), Monumenta. Grand Palais, Paris,
***Daniel BUREN**, 2012*
Installation de 377 disques translucides suspendus horizontalement entre 2,50 et 2,90 m au-dessus du sol.



Cinq cercles excentriques, Objectif gare, Lausanne,
***Felice VARINI**, 2015*



Quatre disques dans le rectangle, Arras,
***Felice VARINI**, 2007*



Base Sous-Marine, Bordeaux,
***Georges ROUSSE**, 2014*

Toutes ces œuvres amènent à réfléchir à l'importance du point de vue. Dans la perspective classique, il y a, a priori, un point de vue unique. Dans les œuvres plus modernes, la multiplicité des points de vue, la perte de la frontalité, la production de séries, etc. ont libéré le spectateur de sa position statique en l’invitant à mener sa propre expérience visuelle et corporelle par rapport à l'œuvre d’art. Ainsi la question est-elle parfois centrale dans les œuvres de Georges Rousse ou Felice Varini. A noter que ces deux artistes ne travaillent pas dans la même optique : Georges Rousse est un photographe, et ses œuvres sont ses photographies ; les œuvres de Felice Varini sont ses installations.

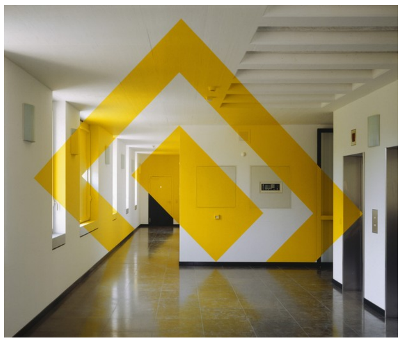
Focus sur Felice Varini

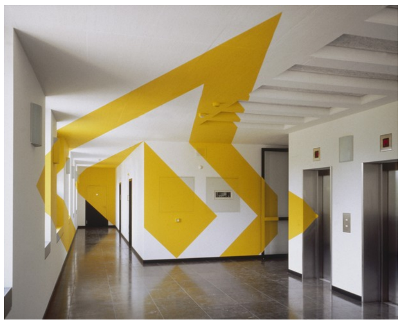
Felice Varini est un artiste suisse contemporain. Il est né en 1952 à Locarno et vit à Paris. L'espace architectural est le support de sa peinture. Varini intervient in situ dans un lieu chaque fois différent. Il définit un point de vue autour duquel son intervention prend forme. C'est un point dans l'espace choisi avec précision, généralement situé à hauteur des yeux et qui offre une vision en perspective particulière. Le point de vue va fonctionner comme un point de lecture, c'est-à-dire que la forme peinte est une anamorphose (une projection sur une surface quelconque) qui devient cohérente quand le spectateur se trouve au point de vue choisi. L’une de ses œuvres est visible à l’Ecole d’Architecture de Nancy.

Site de l’artiste : www.varini.org

Ci-dessous à nouveau des œuvres de Felice Varini :

Huit carrés,
Orangerie du Château de Versailles,
***Felice Varini**, 2006.*

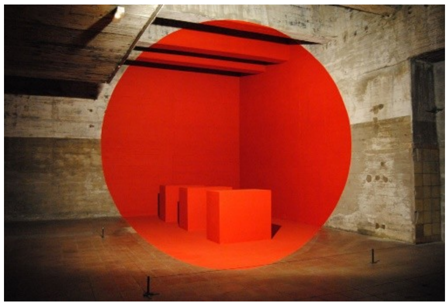




Rettangoli gialli concentrici senza angoli al suolo» Suglio Lugano,
***Felice Varini**, 1998*

Focus sur Georges Rousse

Coblence,
***Georges Rousse**, 1994*



Base Sous-Marine, Bordeaux,
***Georges Rousse**, 2014*

Georges Rousse est un photographe plasticien français contemporain, né en 1947 à Paris. Il intervient dans des lieux abandonnés pour y faire des installations éphémères, dont la mémoire sera gardée par la photographie. Lors de notre visite à l'exposition de Georges Rousse à la Base Sous-Marine de Bordeaux en 2014, nous avons été fascinés, et les enseignants de mathématiques que nous sommes ont tout de suite pensé « perspective, projection, théorème de Thalès ». De toute évidence, c'était là une œuvre dans laquelle nous voyions des mathématiques. Néanmoins, Georges Rousse déclare lui-même qu'il « *ne peu[t] pas utiliser la projection qui ne [l]'intéresse pas comme méthode de dessin dans l'espace* ». Pour autant, il défend l'idée que son travail est « *mathématique et mental* » mais ne le voit pas comme *« un travail sur la proportionnalité ou la projection* ». Les enseignants de mathématiques seront également peut-être fiers de savoir qu'il « *rappelle souvent ses souvenirs des cours de géométrie sur l'intersection d'une forme avec différents plans que l'on apprenait à l'école à [s]on époque en géométrie dans l'espace* ».
Ci-dessous un visuel d'un travail qu'il a réalisé à Beaumont le Roger en 2002 au collège Croix Maître Renault.

Site de l'artiste : https://www.georgesrousse.com/

Autres artistes pratiquant l'in situ : Daniel Buren, Christo, Stéphane Daflon, Gordon Matta Clark, etc...

Description de l’activité

Ce travail a été effectué trois fois dans deux établissements différents. Dans l'un des collèges, il s'est inscrit dans le cadre d'un EPI (Enseignement Pratique Interdisciplinaire).

Voici le travail qui a été proposé aux élèves, en cours d'arts plastiques :

> *« Dans un espace de collège de votre choix, réalisez une installation in situ d’une forme qui envahirait l’espace.*
> *Techniques picturales ou graphiques libres, sur papier. »*
> Travail en binômes.

Explications des techniques pour les élèves :
Votre forme débutera sur le mur A et devra se poursuivre sur le mur B placé plusieurs mètres plus loin sans avoir l’air d’être discontinue.

Choisissez un espace du collège comportant deux plans parallèles visibles simultanément (par exemple un espace comportant un mur et un pilier, un couloir avec une porte ouverte donnant sur un autre espace) puis inventez une forme figurative ou abstraite simple, s’adaptant au lieu et l’envahissant.
Dessinez un croquis de cette forme sur un petit format (A4).
Réalisez ensuite votre dessin sur un grand format à l’échelle 1 de la réalisation finale.
Une partie de cette image sera celle placée directement sur le mur A.

La deuxième partie de la forme, placée plus loin sur le mur B, devra être de plus grande dimension.
Pour cela, vous allez utiliser la méthode de l’agrandissement au carreau.
La taille des carrés du mur B sera calculée en cours de mathématiques avec le théorème de Thalès en fonction de la taille des carrés du quadrillage du mur A et du point de vue.
Ensuite sur un support plus grand, vous réaliserez un agrandissement au carreau de la forme pour le mur B.

Méthode d’agrandissement au carreau :
Sur la feuille échelle 1 (mur A), tracez, au crayon, un quadrillage constitué de carreaux carrés de côté 3 cm tous identiques.
Sur le grand format (pour le mur B), réalisez un quadrillage de forme identique avec des carrés dont la longueur du côté a été déterminé en mathématiques. Reproduisez la partie non placée sur le mur A sur cette feuille en vous aidant des carreaux.

Les deux feuilles A et B seront ensuite placées « à l’œil » en fonction du point de vue déterminé initialement.

1. Séances préparatoires en cours de mathématiques : autour de agrandissement/réduction

Les problèmes d'agrandissement/réduction sont au cœur de cette activité. Un travail préparatoire autour de ce thème nous semble important pour une bonne modélisation par la suite.
Ci-dessous deux propositions d'activités, réalisées dans deux établissements différents :

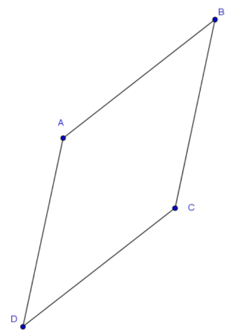
<u>Première proposition</u>
Dans le cadre de l'EPI, on a présenté aux élèves des photos pour les sensibiliser à l'importance d'avoir un coefficient unique pour toutes les distances.
Ci-dessous des exemples où une même image a été redimensionnée, d'abord de façon à respecter le rapport de longueur, puis sans cette contrainte.

Les élèves ont ensuite eu à calculer des coefficients d'agrandissement/réduction dans diverses situations, partant d'abord d'une photo pour faire le lien avec ce qui venait de leur être présenté, puis se rapprochant de ce qu'ils auront à faire pour l'activité Thalès in situ.

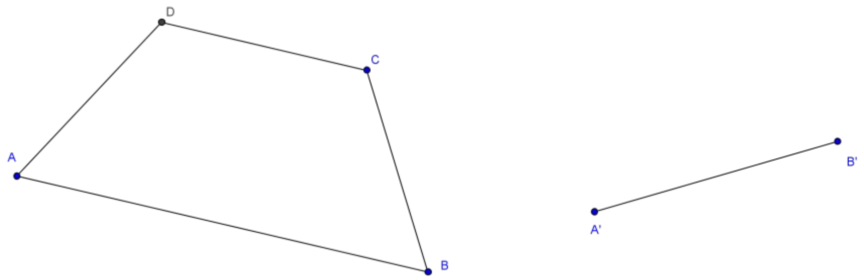
Exemples de questions posées

1. On considère une photo qui est un rectangle de 4 cm sur 8 cm : on veut l'agrandir de sorte que la longueur qui est 4 cm devienne 7 cm. Quelle est la largeur de la nouvelle photo ? Indiquer les calculs faits et dessiner le rectangle représentant la photo agrandie.

2. Tracer un agrandissement de ce losange à l'échelle 1,8. Trouver un moyen de vérifier que c'est un bon agrandissement.



3. Tracer une réduction de ce trapèze de façon à ce que le côté [AB] devienne le côté [A'B'].



Activité de réinvestissement

L'activité suivante, bien que non directement liée aux calculs que les élèves auront à faire, permet de réinvestir ce qui a été vu.

<u>Étape 1</u>
a) Tracer un triangle ayant un angle de 115° et un autre de 47°.
b) Que peut-on dire de tous les triangles de la classe ?

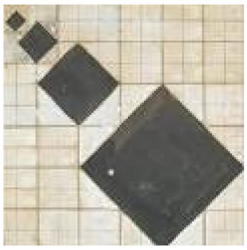
La question b) est posée lorsque les élèves ont terminé de tracer leur triangle.

<u>Étape 2</u>
« Tracer sur la feuille blanche que je vous distribue un triangle ayant un angle de 115° et un autre de 47°, le plus grand possible entrant dans la feuille ».

<u>L'étape 3 se déroule à l'oral</u> : le professeur dit aux élèves qu'il veut comparer les triangles qu'il a ramassés pour déterminer qui est le gagnant. Il veut le faire en économisant le plus possible la manipulation de son rapporteur pour gagner du temps.
Il leur demande donc de lui indiquer comment faire.

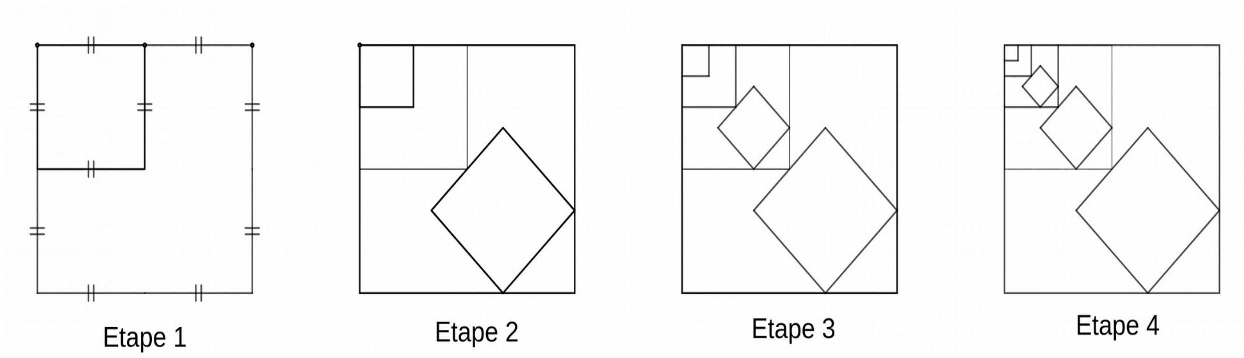
<u>Deuxième proposition</u>

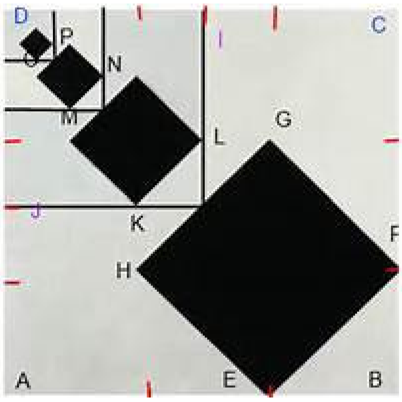
Dans l'autre établissement, on a choisi de faire travailler les élèves sur les notions d'agrandissement/réduction dans un devoir à la maison autour d'une œuvre du peintre néerlandais Theo van Doesburg (1883-1931).



Composition arithmétique
Theo van Doesburg (1929-1930)

Les étapes ci-dessous montrent comment on peut construire une telle image :





Ce qu'on peut lire sur cette construction : *il peut être intéressant de faire ce travail à l'oral avec les élèves en insistant sur ce qui est certain (codage) et sur ce qu'il faudra (qu'il faudrait) démontrer.*

Données :
• ABCD est un carré • E ∈ [AB] • AE/AB = 2/3 • F ∈ [BC] • CF/CB= 2/3
• I milieu de [CD] • J milieu de [AD]
• EFGH est un rectangle passant par le centre du carré ABCD.

Ces données permettent de construire G et H ; on reproduit alors dans le carré supérieur gauche ce qui a été fait dans le grand carré ABCD, et ainsi de suite.

Remarque : EFGH est en fait un carré, cela peut être admis pour les élèves, ou démontré (voir plus loin).

Exemples de questions pour des élèves de 3ème :
- *Quel est le coefficient de réduction permettant de passer du carré EFGH au carré KLMN ?*
- *Si le carré EFGH a un côté de longueur 3 cm, quelle sera la longueur du côté du carré le plus petit ?*
- *Si on recommence l'opération jusqu'à obtenir 10 carrés, quelle sera la longueur du côté du carré le plus petit ?*

Ce qu'on peut prouver ou admettre :
On peut montrer que le rectangle EFGH est bien en fait un carré. Ce point peut être démontré à des élèves de 3ème, ou admis dans un premier temps.
Le triangle EBF est isocèle et rectangle en B, on en déduit que l'angle $\widehat{\mathrm{BEF}}$ est de 45 degrés : (EF) est donc parallèle à la diagonale (AC). Il en est de même de (GH), qui de plus passe par le centre du carré : on en déduit que (GH) et (AC) sont confondues. De plus, l'angle $\widehat{AEH}$ est également de 45 degrés. Le triangle AEH est donc rectangle en H avec deux angles de 45 degrés, il est donc isocèle en H : on en déduit AH = EH. De même, CG = FG. De plus, puisque EFGH est un rectangle, FG = EH. Enfin, les droites (EF) et (AC) étant parallèles, le théorème de Thalès fournit :
BE/BA = 1/3 = BF/BC = EF/AC.
Finalement EF = HG = AC/3, donc AH = CG = AC/3 et enfin EH = AH = EF.
EFGH est donc bien un carré.

(**Remarque** : on peut procéder dans l'autre sens, c'est-à-dire construire G et H en imposant que EFGH soit un carré ; on peut alors montrer que (GH) passe bien par le centre du carré ABCD. En effet, le théorème de Pythagore appliqué au triangle EBF fournit EF = $(\sqrt{2}/3)$ AB.
Le triangle AEH vérifie donc AE = (2/3) AB, EH = $(\sqrt{2}/3)$ AB et l'angle $\widehat{\mathrm{AEH}}$ vaut 45 degrés.
Construisons le point A' tel que le triangle A'HE soit isocèle et rectangle en H. On vérifie, en utilisant le théorème de Pythagore, A'E = (2/3) AB. On en déduit que A' = A : ainsi le triangle AHE est isocèle rectangle, donc l'angle $\widehat{\mathrm{HAE}}$ vaut 45 degrés : H appartient donc bien à la diagonale du carré ABCD. Cette preuve, bien que ne nécessitant pas le théorème de Thalès, nous semble plus délicate que la précédente.)

On peut demander le coefficient de réduction qui permet de passer du carré EFGH au carré de côté [OP].
On passe alors du carré EFGH au carré de côté [KL] par une homothétie de centre D et de rapport 1/2, le coefficient de réduction qui permet de passer du carré EFGH au carré de côté [KL] est donc 1/2. Le coefficient cherché est donc $(1/2)^3$ =1/8. C'est ainsi l'occasion de travailler les puissances de 2 ; on peut aussi naturellement se demander ce qui se passerait si on répétait l'opération 10 fois, ou *n* fois, au lieu de 3.

On peut aussi chercher le coefficient de réduction qui permet de passer du carré initial ABCD au carré EFGH.
Cette question nécessite le théorème de Pythagore, et fait intervenir une racine.
En effet, EF = $\sqrt{2}$ EB = $\sqrt{2}$ AB/3, le rapport est donc $\sqrt{2}/3$.

2. Déroulement de l'activité elle-même

Une partie importante de l’activité doit se faire sur les lieux de l'installation (préparation, prise de mesure, etc...). Dans nos expérimentations, cela a été fait avec l'enseignant de mathématiques, puisque c’était en lien avec le travail de modélisation avec le théorème de Thalès ; en particulier la question « quelles mesures prendre ? » était une question liée au cours de mathématiques.

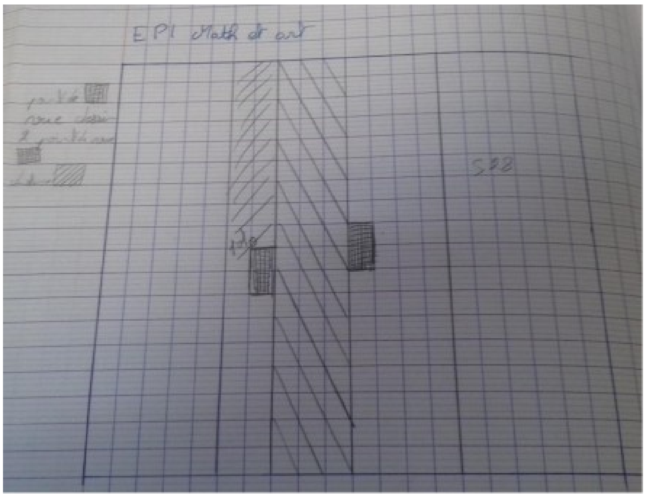
<u>Descriptif du déroulement dans le premier établissement</u>

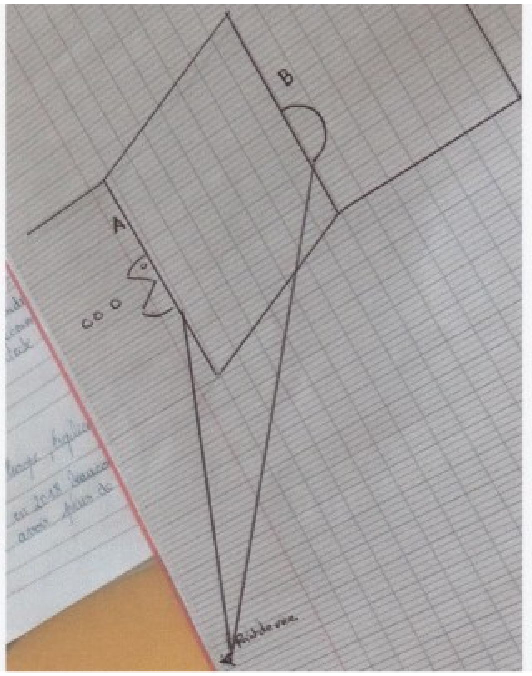
- Insertion dans la progression : après environ 6 h de travail préparatoire sur agrandissement/ réduction (avec introduction sur une photo, réflexion sur ce qu'est un bon agrandissement, sur la proportionnalité, travail sur rectangle, losange, trapèze, et enfin triangle (et le théorème de Thalès).

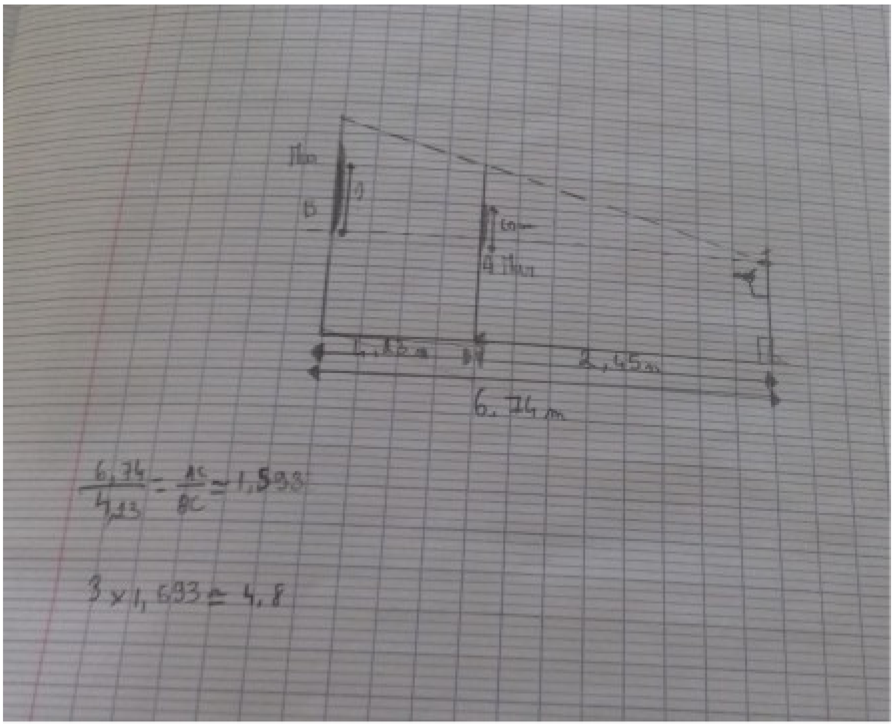
- Arts plastiques (1 ou 2 séances) : lecture et explication de la fiche d’activité présentant Thalès in situ. Une œuvre de Felice Varini peut par exemple être étudiée en classe.
Choix des sujets : il peut être opportun de leur suggérer des sujets un peu géométriques (cette année-là, ont été choisis des motifs comme le Yin Yang, flèches, Batman...), choix des emplacements (pas encore de mesure de distance).
Attention, pour certains emplacements, il a fallu faire attention à cause des ombres.

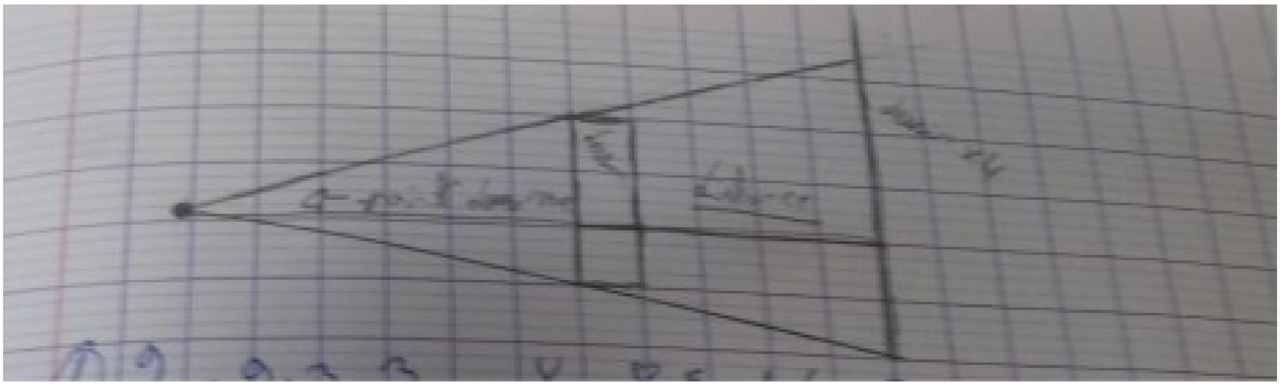
- Mathématiques (1 ou 2 séances) : réflexion sur les mesures à prendre. On leur demande pour cela de commencer par faire un schéma de l'emplacement. Ils partent en général d'un schéma inutilisable. On les fait alors réfléchir sur comment en faire quelque chose d'utilisable, pour faire le lien avec le dessin du triangle qui accompagne le théorème de Thalès dans le cours. Cette étape est fondamentale si l'on veut que l’activité apporte du sens au théorème de Thalès.
Puis ils prennent les mesures dont ils ont effectivement besoin (avec les problèmes matériels éventuels).

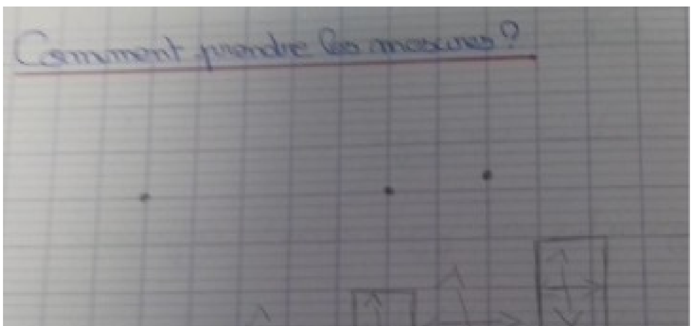
<u>Exemples de schémas d’élèves :</u>

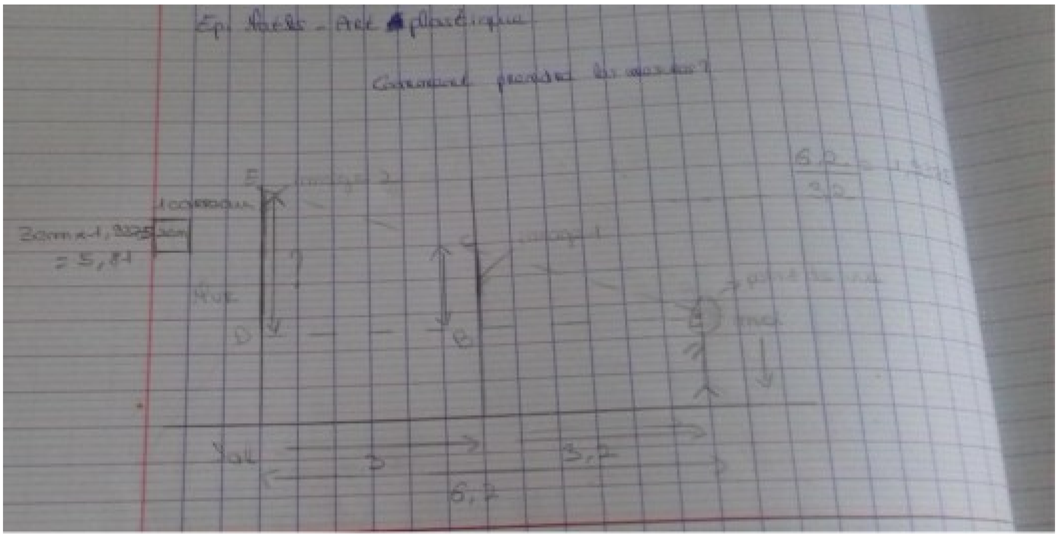




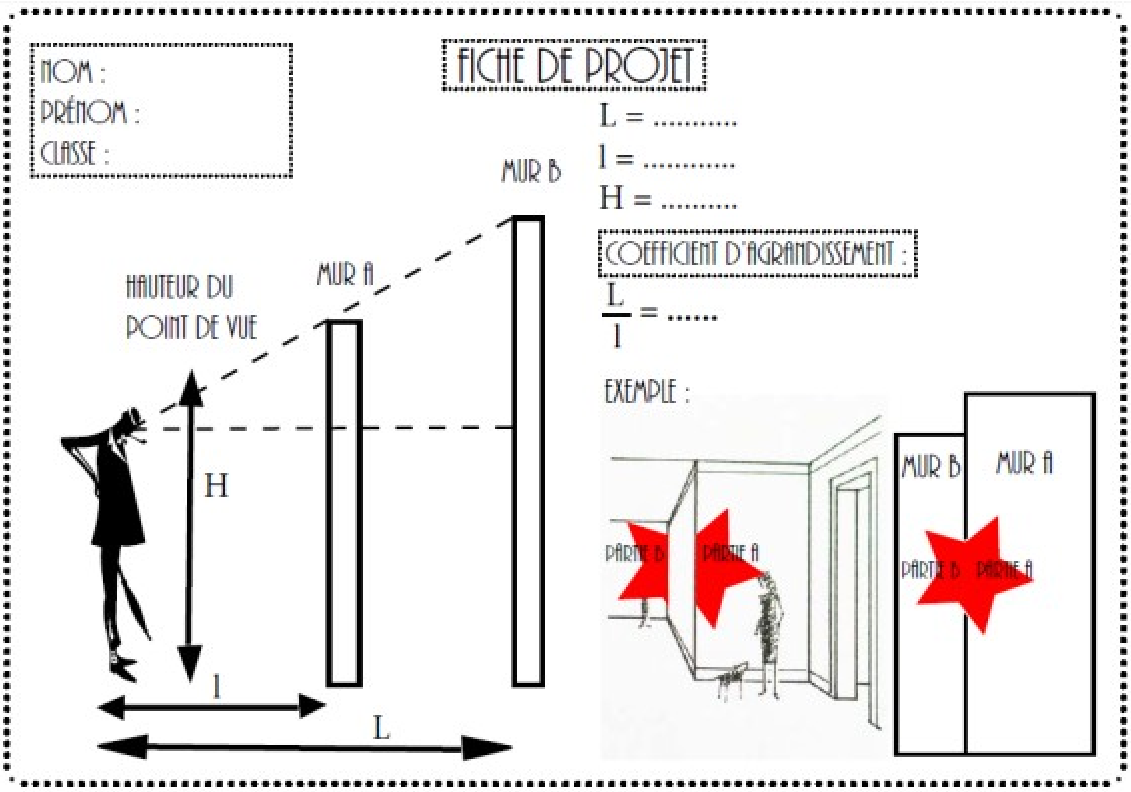

2,45m
6,74 m
6,74 / 4,23 = AC / BC ≈ 1,593
3 x 1,593 ≈ 4,8




Comment prendre les mesures ?



Remarque : ils ont fait systématiquement attention - c'était une consigne donnée - à ce que l'œil de l'observateur (la hauteur du point de vue) coïncide avec le bas de l'œuvre.
En effet cela simplifie le travail de modélisation par Thalès, mais théoriquement ce n'est pas impératif pour la situation.
Un but peut être d'établir avec eux une fiche telle que ci-dessous : elle leur a été distribuée dans le premier établissement par le professeur d'arts plastiques, après le cours de mathématiques.



- Arts plastiques (1 séance) : dessin des petites figures sur quadrillage (côté 3 cm, fourni par l'enseignant).

- Mathématiques : Calcul du coefficient d'agrandissement, application au quadrillage (les élèves se sont montrés peu autonomes pour cette étape).

Remarque : Le dessin des figures sur le grand quadrillage (1 séance) a été réalisé dans le cours de mathématiques dans le premier établissement, et dans le cours d'arts plastiques dans le deuxième établissement.

- Sé**ance commune Maths/Arts plastiques** : **installation !**

Le grand jour dans le deuxième établissement :
Le jour de l'installation, un créneau horaire de 2 heures avait été aménagé. Les formes, déjà découpées ont été placées avec de la pâte de fixation.
À la récréation, l'équipe administrative, les enseignants et les élèves ont pu observer la dizaine d'installations.
Même si les formes réalisées étaient très simples et la technique peu aboutie, l'efficacité du dispositif a surpris, étonné, épaté même (oui, oui) les adultes et les élèves.
Les points de vue n'étaient pas indiqués au spectateur. C'était à chacun de trouver le bon point de vu, augmentant et l'effet de surprise et la satisfaction d'avoir réussi à reconstituer la forme.
Les élèves qui passaient dans les couloirs, même sans explication, ont eu des réactions très enthousiastes.
Les couloirs choisis étant très passants, associé au grand nombre d'élèves du collège (1 000), les travaux ne seront restés que quelques heures.

Bilan et remarques sur le déroulement de la séquence par le professeur d'arts plastiques

Quelques problèmes rencontrés et quelques solutions trouvées :
- Certains coefficients d'agrandissement étant trop importants (dû aux grandes distances entre les murs A et B), le dessin B aurait dû être long parfois d'une dizaine de mètres (beaucoup plus grand que la surface d'accrochage et très dépensier en papier).
Il a donc été décidé dans ces cas, de calculer un coefficient de réduction SB/SA, le dessin A devenant le dessin B.
- Pour certaines formes, l'agrandissement au carreau, s'est avéré peu utile. Pour un triangle par exemple, il suffisait de le mesurer et d'agrandir ces mesures avec le coefficient. Cette technique permettait de gagner du temps. D'autre part, pour certaines formes libres, pour simplifier on peut se concentrer sur les points de jonction entre les dessins A et B, puis dessiner librement ensuite.
Ces deux solutions permettent d'augmenter l'efficacité de certains groupes.
- Pendant les séances d'arts plastiques, le professeur devait aider certains élèves restés dans la salle, les autres expérimentant leurs travaux dans le couloir.
Ainsi, pendant les (très courts certes) moments où les élèves étaient en autonomie, ils ont opéré certains choix techniques et/ou plastiques parfois inadaptés au temps imparti, au format ou aux lieux très passants d'exposition.
Pour éviter cet écueil, on peut envisager la co-intervention ou bien très clairement déterminer dès le départ, avec chaque groupe, les moyens techniques utilisés. On peut aussi imposer une technique (par exemple le collage de papier de couleurs (à la bombe aérosol), technique qui s'est avérée assez efficace en termes de rapport temps/effet visuel.

Bilan

Durant cette séquence, les élèves ont semblé avoir bien saisi que les calculs mathématiques effectués leur étaient indispensables pour réaliser leurs projets.

Au début de l’avant-dernière séance, un groupe a positionné son installation pour en faire une photo. Cette photo a été montrée à toute la classe. Chacun a été surpris de l’efficacité du résultat. Cela a permis de remotiver certains groupes.
Il peut être envisagé, en cours de mathématiques, lors de la première séance, de donner à des groupes de trois élèves, deux rectangles de tailles différentes et de leur demander de trouver le bon point de vue pour obtenir un seul rectangle. Cette expérience permettra à chacun de mieux conceptualiser, dès le départ, le dispositif en jeu dans cette séquence.

Fiche à destination des enseignants (2ème établissement) :

<table>
<tr><th colspan="2">MA FORME ENVAHIT L'ESPACE DU COLLÈGE AVEC THALES.</th></tr>
<tr><th>Sujet</th><th>Déroulement et partage des tâches</th></tr>
<tr><td>

« Dans un espace de collège de votre choix, réalisez une installation in situ d'une forme qui envahirait l'espace. Techniques picturales ou graphiques libres, sur papier »
Travail en binômes mixtes

En mathématiques, cette séquence qui se déroulera en avril et mai sera l'occasion de révision pour le DNB.

<u>Déroulement global de la séquence</u>

Objectif technique :
Votre forme débutera sur le mur A et devra se poursuivre sur le mur B placé plusieurs mètres plus loin sans avoir l'air d'être discontinue.

Choisissez un espace du collège comportant deux plans parallèles visibles simultanément (par exemple un espace comportant un mur et un pilier, un couloir avec une porte ouverte donnant sur un autre espace) puis inventez une forme figurative ou abstraite simple, s'adaptant au lieu et l'envahissant.
Dessinez un croquis de cette forme sur un petit format (A4)
Réalisez ensuite votre dessin sur un grand format à l'échelle 1 de la réalisation finale.
Une partie de cette image sera celle placée directement sur le mur A.

La deuxième partie de la forme, placée plus loin sur le mur B devra être de plus grande dimension. Pour cela, vous allez utiliser la méthode de l'agrandissement au carreau.
La taille des carrés du mur B sera calculée en cours de mathématiques avec le théorème de Thalès en fonction de la taille des carrés du quadrillage du mur A et du point de vue.
Ensuite sur un support plus grand, les élèves réalisent un agrandissement au carreau de la forme pour le mur B.

Méthode d'agrandissement au carreau :
Sur la feuille échelle 1 (mur A), tracez, au crayon, un quadrillage constitué de carreaux carrés de 3 cm de côté tous identiques.
Sur le grand format, (pour le mur B) réalisez un quadrillage de forme identique avec des carrés dont le côté a été déterminé en mathématiques. Reproduisez la partie non placée sur le mur A sur cette feuille en vous aidant des carreaux.

Les deux feuilles A et B seront ensuite placées « à l'œil » en fonction du point de vue déterminé initialement.

</td><td>

<u>Arts plastiques séance 1</u>
Lecture et explication du sujet (forme figurative, abstraite).
Une œuvre de Felice Varini est étudiée en classe.

<u>Mathématiques séance 1</u>
Explication du principe de Thalès appliqué dans l'espace (suggestion : le professeur ouvre la porte et prend pour exemple les deux murs parallèles de la salle et du couloir).

<u>Arts plastiques séance 2 et 3</u>
Les élèves choisissent un espace du collège et réalisent un croquis de leur forme sur format A4 puis sur grand format à l'échelle 1 de la réalisation finale.
Une partie de cette image sera celle placée directement sur le mur A.

<u>Mathématiques séance 2</u>
Chaque groupe d'élèves va sur le lieu choisi, détermine un point de vue (à repérer au sol et prend des mesures des différentes distances).

<u>Mathématiques séance 3</u>
Chaque groupe d'élèves calcule la taille des carreaux pour le mur B avec le théorème de Thalès.

<u>Arts plastiques séance 4</u>
Chaque groupe réalise son quadrillage B et trace la partie B de sa forme.

</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="2">Compétences à évaluer en arts plastiques. Etre capable de :</th></tr>
<tr><td colspan="2">- inventer une forme s’adaptant à un lieu,
- tenir compte du point de vue du spectateur pour élaborer une production,
- choisir une technique adaptée au projet (au format, au support, aux contraintes du lieu),
- expliquer son travail par écrit à destination d’un public.</td></tr>
<tr><th>Références</th><th>À retenir</th></tr>
<tr><td>
Installations de Felice Varini</td><td>Installation : 1. Disposition de matériaux et d’éléments divers dans un espace. 2. Œuvre ainsi obtenue. 3. Mode d'expression artistique apparue au troisième tiers du XX^e siècle.

In situ : se dit d'une œuvre réalisée en fonction d’un lieu auquel elle est destinée et sur lequel elle réagit (expression proposée par Daniel Buren : "en situation"). Depuis les années 1960, les artistes de l’art minimal, du land art, de l’art néo conceptuel, les vidéastes, les installateurs, etc... ont particulièrement développé la création in situ (exposition Monumenta 2008 de Richard Serra au Grand Palais).

Point de vue : 1. Endroit d’où l’on perçoit un objet, un personnage, un paysage, etc... 2. Notion centrale liée à la représentation de l'espace dans la perspective classique avec un point de vue unitaire. Dans la modernité, la multiplicité des points de vue, la perte de la frontalité, la production de séries, etc... ont libéré le spectateur de sa position statique en l’invitant à mener sa propre expérience visuelle et corporelle par rapport à l'œuvre d’art. Ainsi la question est-elle parfois centrale dans les œuvres de Georges Rousse ou Felice Varini.</td></tr>
<tr><th>Questions d’enseignement en arts plastiques</th><th>Références aux (nouveaux) programmes d’arts plastiques</th></tr>
<tr><td>Quelle peut-être l’importance du point de vue dans la perception d’une installation ?
Quelles différentes relations la forme/l’image peut-elle entretenir avec son espace d’inscription ?</td><td><u>La représentation : images, réalité et fiction</u>
Le dispositif de représentation : l'espace en deux dimensions (littéral et suggéré), la différence entre organisation et composition ; l'espace en trois dimensions (différence entre structure, construction et installation), l'intervention sur le lieu, l’installation.

<u>L'œuvre, l'espace, l'auteur, le spectateur</u>
La présence matérielle de l'œuvre dans l'espace, la présentation de l'œuvre : le rapport d'échelle, l'in situ, les dispositifs de présentation, la dimension éphémère, l'espace public ; l'exploration des présentations des productions plastiques et des œuvres ; l'architecture.
Appropriation plastique d'un lieu ou de l'environnement par des créations plastiques (intégration ou rupture avec les caractéristiques du lieu, affirmation de l'œuvre, débordement du cadre, du socle, mise en espace, mise en scène, parcours...), jeux sur l'échelle et la fonction de l'œuvre, sur les conditions de sa perception et de sa réception.

Le point de vue de l'auteur et du spectateur dans ses relations à l'espace.</td></tr>
</table>

Fiche à destination des élèves :

	Arts plastiques et mathématiques
3ÈME	**Ma forme envahit l'espace du collège avec Thalès**

Rouge, Jaune, Noir, Bleu, entre les disques et les trapèzes. Paris. ***Felice VARINI**, 2015*
http://info.arte.tv/fr/felice-varini-la-villette

Dans un espace du collège de votre choix, réalisez une installation in situ d'une forme qui envahirait l'espace.

Choisissez un espace du collège comportant deux plans parallèles (mur A et mur B) visibles simultanément (par exemple un espace comportant un mur et un pilier, un couloir avec une porte ouverte donnant sur un autre espace) puis inventez une forme figurative ou abstraite simple, s'adaptant au lieu et l'envahissant.
Techniques picturales ou graphiques libres, sur papier.
Une fois le travail terminé, votre forme sera visible d'un point de vue unique, en une seule partie alors qu'elle sera composée de deux parties (un dessin A réalisé sur une feuille A placée sur un mur A et un dessin B réalisé sur une feuille B placée sur un mur B).

Vous réaliserez une photographie de votre installation.

Compétences à travailler	
En arts plastiques	**En mathématiques**
- inventer une forme s'adaptant à un lieu. - tenir compte du point de vue du spectateur pour élaborer une production. - choisir une technique adaptée au projet (au format, au support, aux contraintes du lieu). - expliquer son travail par écrit à destination d'un public.	- reconnaître une configuration de Thalès. - agrandir ou réduire une figure en utilisant la conservation des angles et la proportionnalité entre les longueurs de la figure initiale et celles de la figure à obtenir. - comprendre les effets d'un agrandissement ou d'une réduction sur les longueurs, les angles, les aires et les volumes.

À retenir
En arts plastiques
Installation : 1. Disposition de matériaux et d'éléments divers dans un espace. 2. Œuvre ainsi obtenue. 3. Mode d'expression artistique apparue au troisième tiers du XX^e^ siècle. ***In situ*** : se dit d'une œuvre réalisée en fonction d'un lieu auquel elle est destinée et sur lequel elle réagit (expression proposée par Daniel Buren : "en situation"). Depuis les années 1960, les artistes de l'art minimal, du *land art*, de l'art néo conceptuel, les vidéastes, les installateurs, etc... ont particulièrement développé la création *in situ.* **Point de vue** : 1. Endroit d'où l'on perçoit un objet, un personnage, un paysage, etc... 2. Notion centrale liée à la représentation de l'espace dans la perspective classique avec un point de vue unitaire. Dans la modernité, la multiplicité des points de vue, la perte de la frontalité, la production de séries, etc. ont libéré le spectateur de sa position statique en l'invitant à mener sa propre expérience visuelle et corporelle par rapport à l'œuvre d'art.

La méthode de travail en arts plastiques
Il s'agit de représenter une forme homogène, visible d'un seul point de vue mais dont une partie est tracée sur un mur A et l'autre partie sur un mur B placé plus loin. Comme vous le savez, ce qui est plus loin parait plus petit. Donc, il faudra réaliser la partie de la forme tracée sur le mur le plus éloigné plus grande que la partie tracée sur le mur le plus proche, pour que le spectateur ait l'impression qu'elles sont de mêmes dimensions et constituent une seule et même forme. Pour y parvenir, voici la méthode : - Dessinez un croquis de la forme choisie sur un petit format. - Réalisez ensuite votre dessin sur un grand format à l'échelle 1 de la réalisation finale. Une partie de cette image, dessin A sera celle placée plus tard directement sur le mur A. - Sur ce dessin A tracez au crayon un quadrillage constitué de carreaux carrés (3 cm de côté) tous identiques. - Coupez votre dessin en deux parties. L'une sera placée sur le mur A, l'autre servira de modèle pour tracer le dessin B sur la feuille B. *La deuxième partie de la forme, réalisée sur une feuille B, placée plus loin sur le mur B devra être plus grande. Pour cette partie, le quadrillage devra être plus grand.* *La taille des carrés du mur B sera calculée en cours de mathématiques avec la propriété de Thalès en fonction de la taille des carrés du mur A et du point de vue.* - Sur la feuille B réalisez un quadrillage de forme identique avec des carrés dont le côté a été déterminé en cours de mathématiques . Reproduisez la partie non placée sur le mur A sur cette feuille B en vous aidant des carreaux. Ensuite, il ne reste plus qu'à placer un élève dans l'espace au point de vue choisi, et à placer les deux dessins sur les murs A et B, à la bonne hauteur. Si la forme B obtenue est beaucoup trop grande et irréalisable vous pouvez utiliser la méthode à l'envers : Le dessin A sera placé sur le mur B (au fond) et avec le théorème de Thalès, il faudra calculer non pas un coefficient d'agrandissement mais un coefficient de réduction pour réaliser la forme à placer sur le mur A. Euh... vous avez tout compris ?

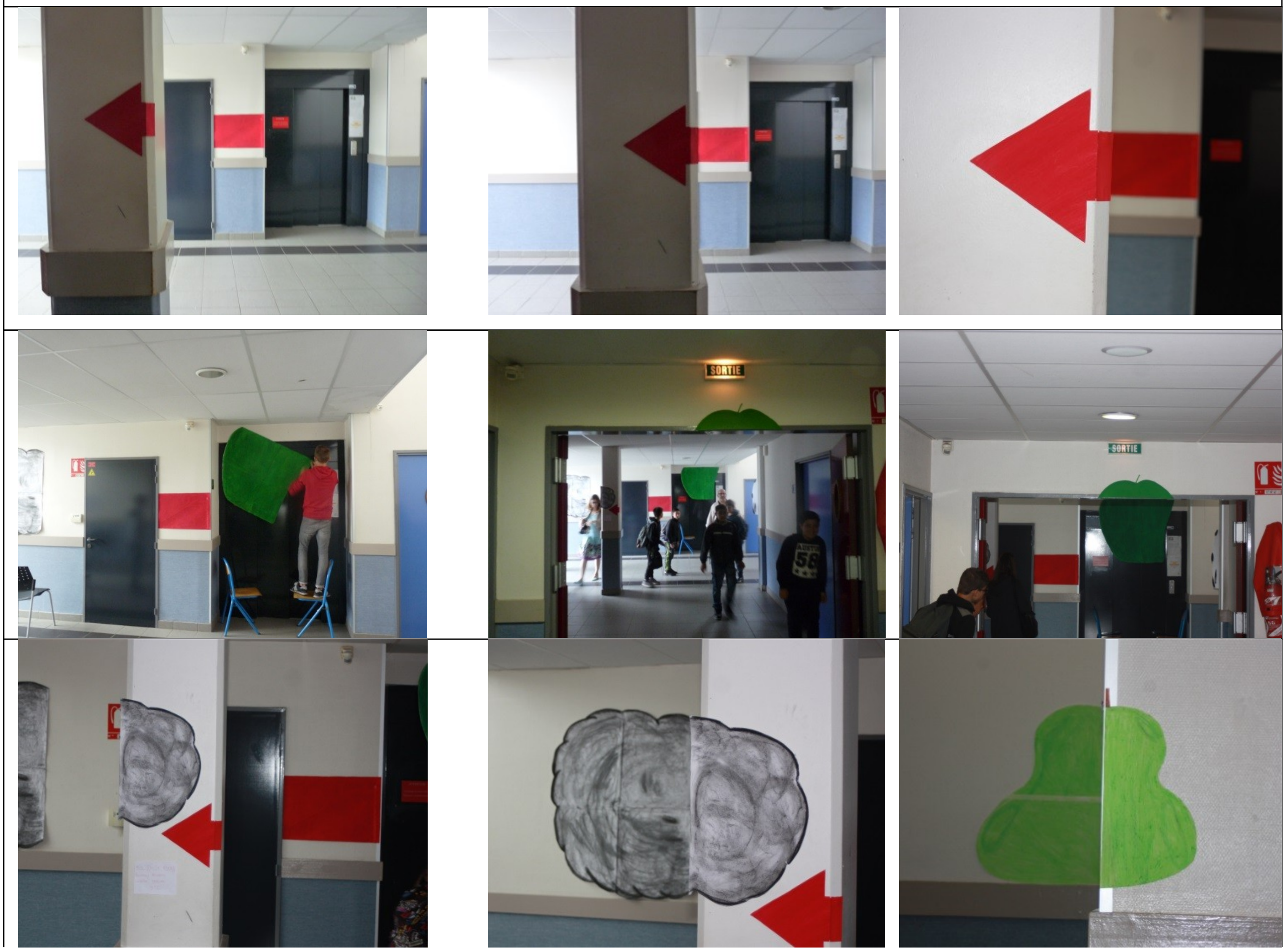
La méthode de travail en mathématiques

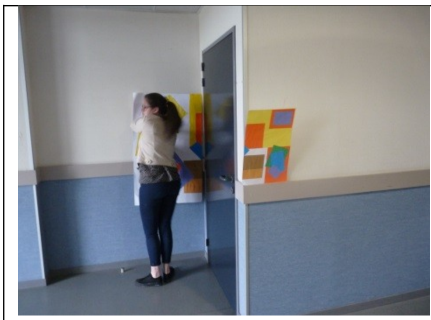
<u>Phase 1</u>
Résoudre, **par écrit**, à la maison, en binôme ou seul(e), un problème d'agrandissement et/ou de réduction à partir d'une œuvre (*ici « Composition Arithmétique » du peintre néerlandais Theo van Doesburg (1883-1931)*) ; puis correction en classe.

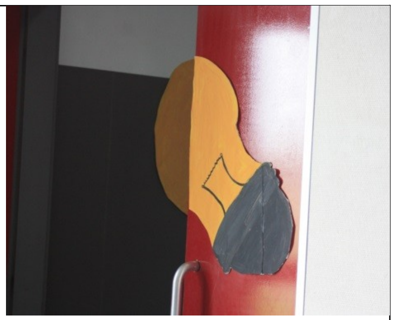
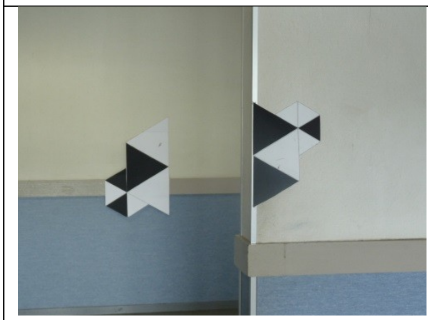
<u>Phase 2</u>
- Repérer, **sur le terrain**, les différents lieux.
- Choisir « un point de vue » et procéder aux différentes mesures afin d'obtenir le rapport d'agrandissement.

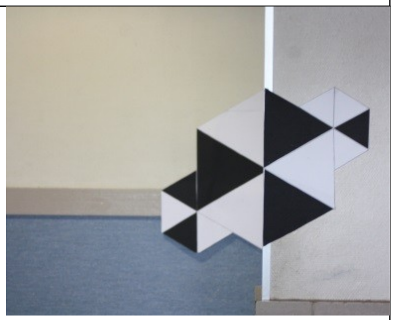
<u>Phase 3</u>
Détermier, en classe, le coefficient d'agrandissement à l'aide du théorème de Thalès.

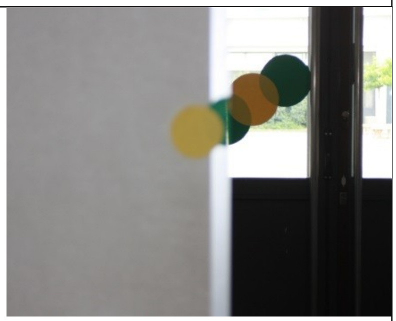
Photographies des installations réalisées par des élèves de 3ème au collège Max Linder à Saint-Loubès.

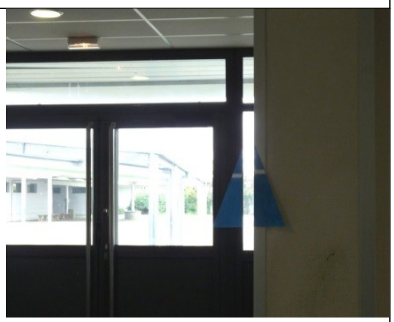






Pavage : mise en espace artistique / espace imaginaire

Niveau : Cycle 4 (5ème – 4ème)
Utilisable en 3ème (juste sur les transformations, pas la construction).

Descriptif rapide : étude et tracé d'un pavage simple constitué de losanges, puis mise en espace imaginaire en arts plastique à partir du tracé mathématique.

Objectifs :

Mathématiques	**Arts Plastiques**

- Découverte des pavages.
- Travail sur les transformations (essentiellement symétries en 5ème).
- Quadrilatères, angles, manipulations, constructions.
- Caractéristiques et tracé du losange, tracé d'un morceau de pavage.
	- Utiliser la structure mathématique pour qu'elle devienne source d'expressivité :
	  - créer un espace en 3D à partir de ce pavage qui sert de support 2D.
	  - variantes (non testées) : habiter le pavage, ou bien partir du pavage et le « pervertir » …
	- Maîtriser la technique choisie.
	- Inventer un titre en relation avec l'intention et le résultat final.

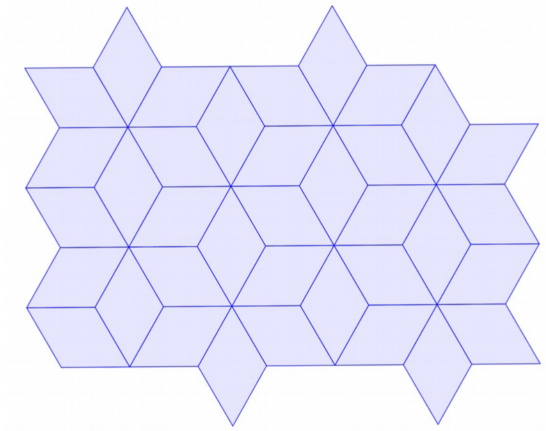
Durée :

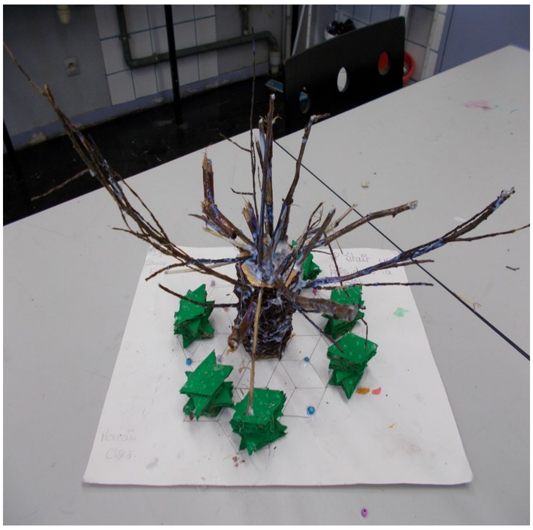
Mathématiques : 3 h-4 h (Les élèves peuvent finir le tracé à la maison).	**Arts Plastiques :** 4 h-5 h

Prérequis :

Mathématiques	**Arts Plastiques**
- Reconnaître et tracer un losange. - Symétries axiale et centrale. - Utilisation des instruments de géométrie.	

Matériel :
- Une feuille de papier Canson.
- Instruments de géométrie





Motivation

Problématique :
Comment exploiter une structure mathématique pour qu'elle devienne source d'expressivité.

Pourquoi travailler les pavages ?

Ils sont maintenant dans les nouveaux programmes de mathématiques de collège.

Ils sont présents dans le monde physique autour de nous (structures cristallines), également dans l'architecture comme éléments décoratifs.

En mathématiques, ils permettent de travailler la géométrie, les transformations, les constructions etc.

En arts plastiques, l'enjeu ici est de passer du champ des arts décoratifs au champ des arts plastiques.

Pourquoi ce pavage ?
Nous avons choisi de travailler sur un pavage assez classique dont le motif de base est un losange formé de deux triangles équilatéraux.
C'est un pavage simple mathématiquement, facile à construire, mais déjà riche en symétries, en transformations à utiliser.
De plus ce pavage donne l'illusion d'un espace tridimensionnel et permet rapidement une exploitation en arts plastiques (d'autres pavages plus compliqués restent à un niveau décoratif et sont difficilement sources d'expressivité).

Références artistiques :
Œuvres de Daniel Buren, Sol LeWitt, Piet Mondrian.
M.C. Escher pour la variante non testée.

Vous trouverez dans cette partie :
- la description détaillée de la séquence assortie de commentaires
- des productions finales d'élèves
- les fiches élèves :
  - Mathématiques : pavage / espace imaginaire
  - Arts plastiques : pavage / mise en espace artistique
    pavage / paysage imaginaire (variante non testée).

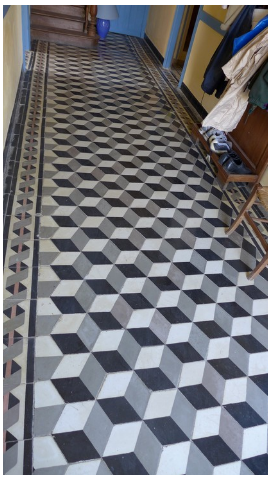
Description détaillée de la séquence et commentaires

Description de la séquence dans le cours de mathématiques

Séance 1 : Qu’est-ce qu’un pavage ?

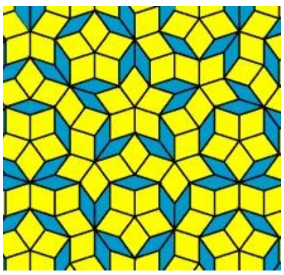
1. Projection de quelques photos

(Chaussée des Géants en Irlande du Nord, un carrelage, mosaïque de l’Alhambra de Grenade, une œuvre de M.C. Escher)



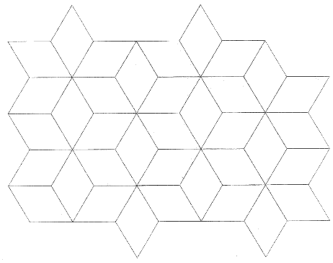
Définition du pavage : c’est la reproduction d’un motif de base (par exemple un polygone) par des transformations du plan, de manière à recouvrir le plan sans trou ni superposition.

Remarque-complément : on dit qu'un pavage du plan est périodique lorsqu’il est invariant par deux translations de vecteurs non colinéaires (par exemple un horizontal et un vertical). C'est le cas de la plupart des pavages familiers. Mais tous les pavages ne sont pas périodiques : le pavage de Penrose ci-dessous est un exemple célèbre d'un pavage non périodique, mais quasi périodique :



2. <u>Un exemple particulier de pavage</u>

Distribution de la fiche élève mathématiques « Pavage/espace imaginaire » avec le pavage et projection au tableau avec GeoGebra.



Consigne : chercher le motif de base (motif qui permet de construire le pavage à l'aide de transformations élémentaires)
Les élèves cherchent tout seuls puis mise en commun au tableau.

Plusieurs motifs sont visibles :
« cube en perspective », (les élèves parlent de « carré en 3D ») « étoile », (ou « flocon »), losange...
Certains élèves voient un diamant, une chaise, ou un escalier.
Si on visualise des motifs « non tracés », en ajoutant des segments, on a aussi un triangle équilatéral, un rectangle…
Si tous les élèves ne les voient pas, on les leur montre au tableau.

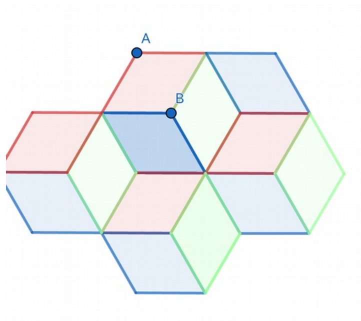
C'est la diversité de ces motifs observés, et en particulier le cube en 3D, qui sera par la suite exploitée en arts plastiques.

On commence à chercher le plus petit motif tracé nécessaire à la construction du pavage.

Séance 2 : Quelle(s) transformation(s) permet(tent) de passer d'un motif au suivant ?
Distribution de calque

Recherche de :
- symétrie(s) axiale(s),
- symétrie centrale,
- translations,
- éventuellement rotations.

On remarque au tableau que, suivant le motif considéré (reprise de la séance précédente), les transformations utilisées peuvent être différentes.
On voit que le motif de l'étoile ne fonctionne pas : il ne pave pas le plan (on obtient un trou ou une superposition).
On étudie le motif « cube en 3D » (on peut le mettre en évidence avec trois couleurs, comme c'est le cas sur la photo du carrelage). Il forme bien le pavage attendu à l'aide de translations.
Attention : l'utilisation de ces couleurs pousse à voir le pavage comme une représentation 3D, et ne simplifie pas forcément la recherche de ses propriétés géométriques.
On fait remarquer que ce motif est un hexagone formé de 3 losanges : ce n'est donc pas le motif le plus petit possible.



Certains élèves veulent utiliser les triangles équilatéraux, mais comme tous les côtés n'apparaissent pas dans le pavage, on ne sait plus ensuite lesquels garder.

On leur dit qu'on travaillera par la suite avec le losange.
Les élèves voient les rotations, les axes de symétrie interne des losanges, mais pas les symétries par rapport au côté d'un losange dans le pavage. On peut aussi faire une introduction à la translation (mais elle n'est pas vue de manière spontanée).

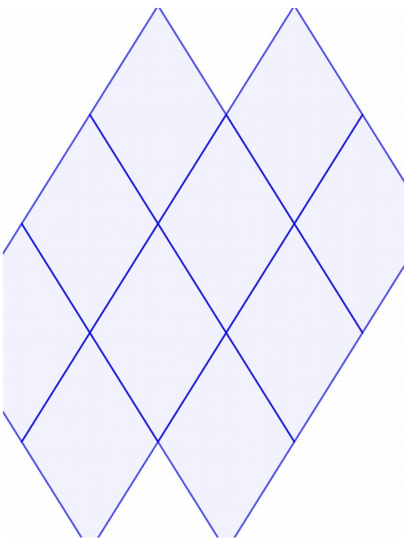
Séance 3 : **Comment reproduire le pavage ?**
On choisit de construire ce pavage avec comme motif de base le losange mis en évidence à l'étape précédente.
Question : Quelles sont les caractéristiques de ce losange ?
Les élèves pensent à la longueur du côté ; il faut mettre en évidence (avec des losanges différents) que cette seule donnée du côté ne suffit pas.
Quelle information supplémentaire ? *L'idée spontanée des élèves est de trouver une autre distance... Mais laquelle ? Et comment la déterminer ?*
Remarque : les élèves veulent tout mesurer sans calculer... Il faut leur faire comprendre que mesurer n'est pas calculer.

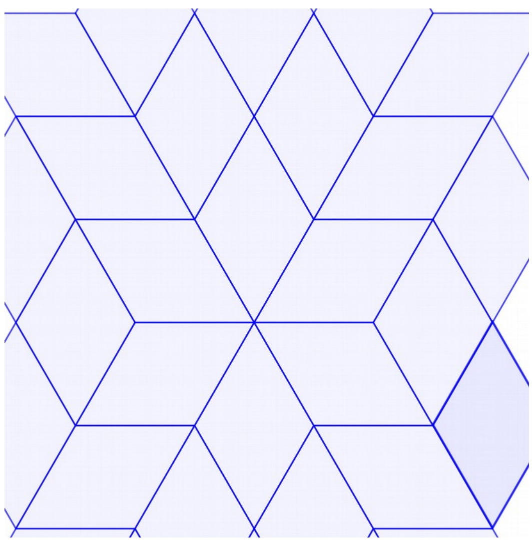
Autre idée : les angles.
Quels sont les angles du losange ?
On cherche les angles en utilisant les 6 losanges de l'étoile et les symétries du losange.
On trouve par le raisonnement 60° et 120°.

Consigne : construire un tel losange avec pour côté 3 cm *(en dessiner un avant au dos de la fiche pour s'entraîner avant de prendre la feuille de papier à dessin…).*
Indication : on peut se servir d'un triangle équilatéral.
On leur donne le choix entre compas ou rapporteur, ils préfèrent le compas.

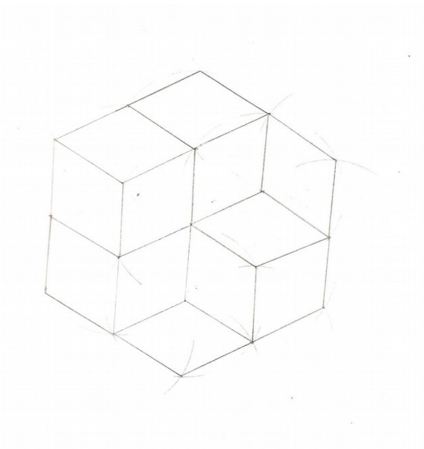
Consigne : sur une feuille de papier à dessin, construire précisément et proprement un morceau de ce pavage à partir d'un losange de côté 3 cm (13 losanges minimum).
Travail à finir à la maison si nécessaire, il sera poursuivi en arts plastiques.
***Remarque** : la taille du losange demandé ne correspond pas au modèle initial, cela permet d'éviter les stratégies de décalque.*

Attention : il y a plusieurs manières d'utiliser le losange pour paver ; il peut être intéressant de présenter différents pavages aux élèves pour discuter avec eux de ce qui les différencie. On peut par exemple compter le nombre de losanges autour de chaque sommet.
Deux exemples :



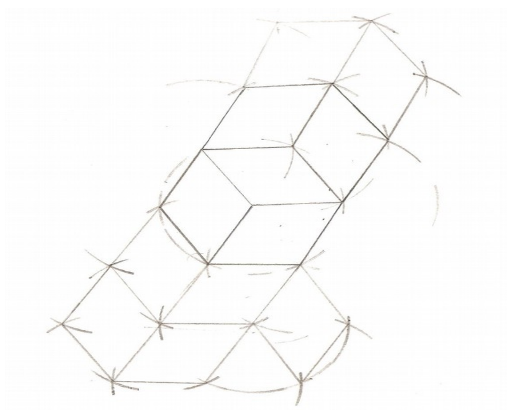


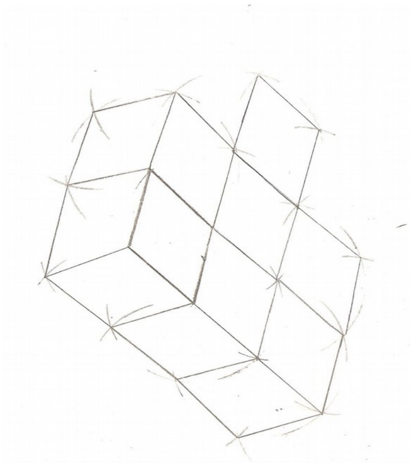
Après expérimentation, nous avons choisi de demander 13 losanges pour avoir un dessin plus utilisable en arts plastiques. Avec 12 losanges, de nombreux élèves mettent leur pavage (ici le pavage ne correspond pas au modèle) dans un hexagone.



Exemples de pavages réalisés par les élèves, ne correspondant pas au modèle

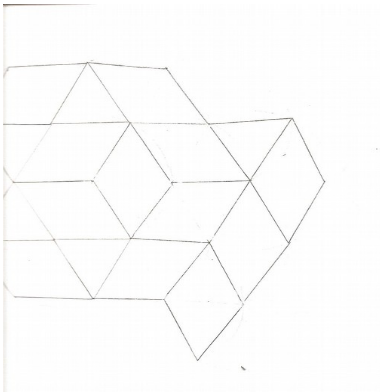
On obtient assez souvent des pavages à l'aide de losanges, mais qui ne respectent pas les symétries du pavage proposé ; notamment des « tubes de losanges » (suite de losanges translatés).

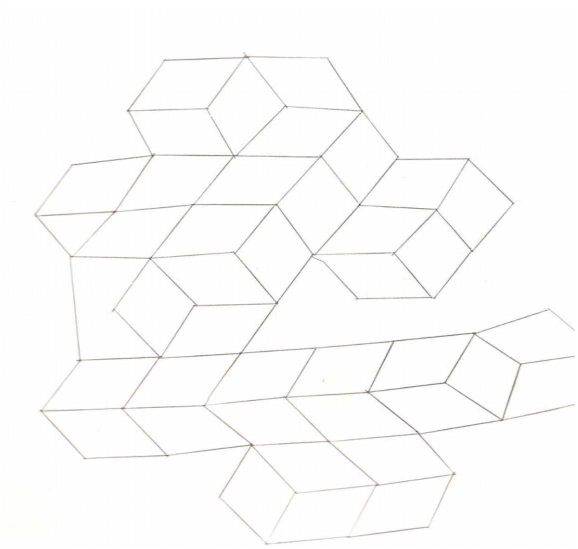




Pour ceux qui ont travaillé avec le compas pour construire d'abord tous les sommets, ce n'était pas facile de savoir quelles arêtes tracer. Les choix semblent parfois aléatoires.

Pour ceux qui ont utilisé des triangles équilatéraux, ce n'était pas facile de savoir quels côtés enlever ; certains triangles restent parfois encore à la fin.





Enfin, un élève a utilisé comme astuce la décalque du modèle (qui n'était pas à la bonne dimension)…

Il est à noter que toutes les productions des élèves, quelle que soit leur exactitude du point de vue de l'enseignant de mathématiques, se prêtaient ensuite très bien à une exploitation en cours d'arts plastiques.

Description de la séquence dans le cours d'arts plastiques

(présence de l'enseignant en mathématiques, première et dernière séances)

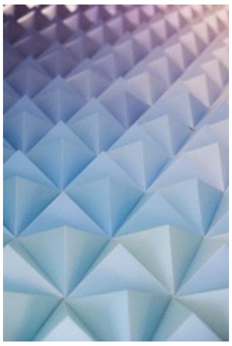
Les pavages terminés en mathématiques ont été récupérés pour le cours d'arts plastiques.
Le sujet de la séquence en arts plastiques concerne l'axe du programme du cycle 4 en classe de 5ème : « l'œuvre, l'espace, l'auteur, le spectateur », et plus précisément la présence matérielle de l'œuvre dans l'espace, la présentation de l'œuvre, l'expérience sensible de l'espace de l'œuvre.

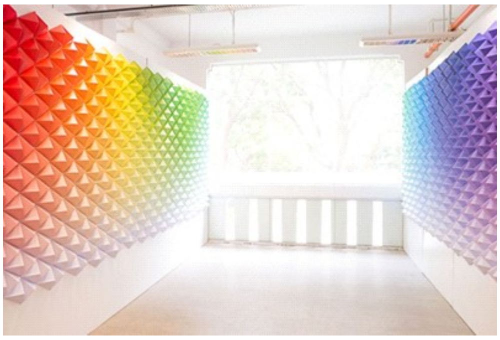
Séance 1. Première partie.
Le lien est fait avec le cours de mathématiques par la projection d'images et des échanges rapides sur les visuels proposés, sans effet modélisant :
Pavage de *la Grosse Cloche* à Bordeaux, parvis réalisé par l'artiste Danièle Justes et l'architecte Fabien Pédelaborde.

Les élèves évoquent « *des carrelages intérieurs et extérieurs, des pavés qu'on retrouve dans les parterres des maisons. On recouvre le sol avec des pièces qui ont toutes la même forme, mais pas forcément la même couleur* ».

À partir des photographies de pavages de l'Alhambra, la classe peut observer qu'on peut « *recouvrir une surface avec des pièces de mêmes formes mais qui peuvent être très compliquées* ».

Des réalisations en volumes sont ensuite proposées :





Chromaticity. Images du Collectif Monocoque-Design, Corée du Sud, 2016

Les élèves expriment la différence entre la pensée mathématique et une réalisation artistique, et notent la nécessité d'une rigueur mathématique dans les productions données. Ils constatent « *une mise en volume et un passage de la 2D à la 3D* ». En introduisant une troisième dimension dans cet espace bi-dimensionnel, les « *pyramides pliées* » (les tétraèdres) forment l'élément de base pour paver le tableau de couleurs. Les élèves constatent « *une lumière qui rebondit sur les volumes et qui les éclaire différemment, (…), un jeu d'ombres et lumières qui change la couleur selon l'angle de vue* ».

Une œuvre de Daniel Buren finalise ce préambule.

Les deux Plateaux : 260 polygones de tailles inégales. Daniel Buren, 1985.

Les élèves parlent « de pavage qui surgit du sol, sans raison, » et soulignent « la liberté de l'artiste ».

Séance 1. Deuxième partie.
L'incitation est posée : à partir de votre pavage réalisé en cours de mathématiques, seul ou en binôme, il vous est demandé de mettre en volume ce pavage au gré de vos envies : il s'agit de choisir des éléments du pavage et de les « déplier » : celui-ci prend vie, suit un cheminement, raconte ou non une histoire.
Modalités : selon votre idée, faire un ou des patrons que vous proposent les formes de votre pavage, les revisiter (décorer, illustrer, habiller, découper, plier, déchirer, froisser…), savoir les fixer sur le support-pavage donné (colle, scotch, fil…). Si vous travaillez en binôme, choisir un pavage par groupe. <u>Celui–ci est le support de votre réalisation en volume et il participe pleinement à votre nouvelle production</u>.
Vous réaliserez un schéma explicatif de votre projet avant la réalisation finale en volume.
Inventez un titre qui exprime votre intention.

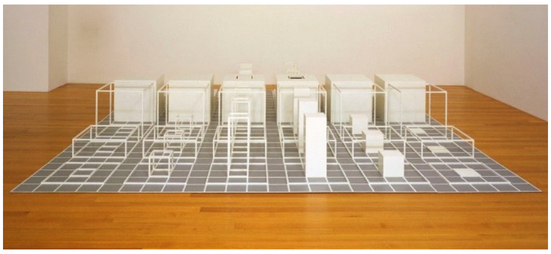
Le sujet est discuté à l'oral et le vocabulaire spécifique redéfini ; les élèves s'interrogent sur la faisabilité selon les matériaux envisagés. Il est retenu, verbalisé, et écrit que les compétences à travailler et qui seront évaluées sont :
- créer un espace en 3D à partir d'un support 2D donné,
- donner une dimension artistique au pavage,
- maîtriser les techniques choisies,
- inventer un titre en relation avec l'intention et le résultat final.

Afin de cibler les apprentissages en cours, les notions suivantes sont précisées aux élèves :
- passage de la 2D à la 3D avec une intention précise préalablement définie,
- représentation d'un espace réel ou imaginaire, figuratif ou fictif.

Fin de séance 1 et suivantes (4 séances) : Phases de réalisation

La suite de cette première séance est consacrée à la recherche de projets, par schémas sur brouillons. Trois séances d'une heure sont initialement prévues ; *les projets sont précis et pertinents, mais butent parfois sur la capacité des matériaux employés à concrétiser les idées diverses.*

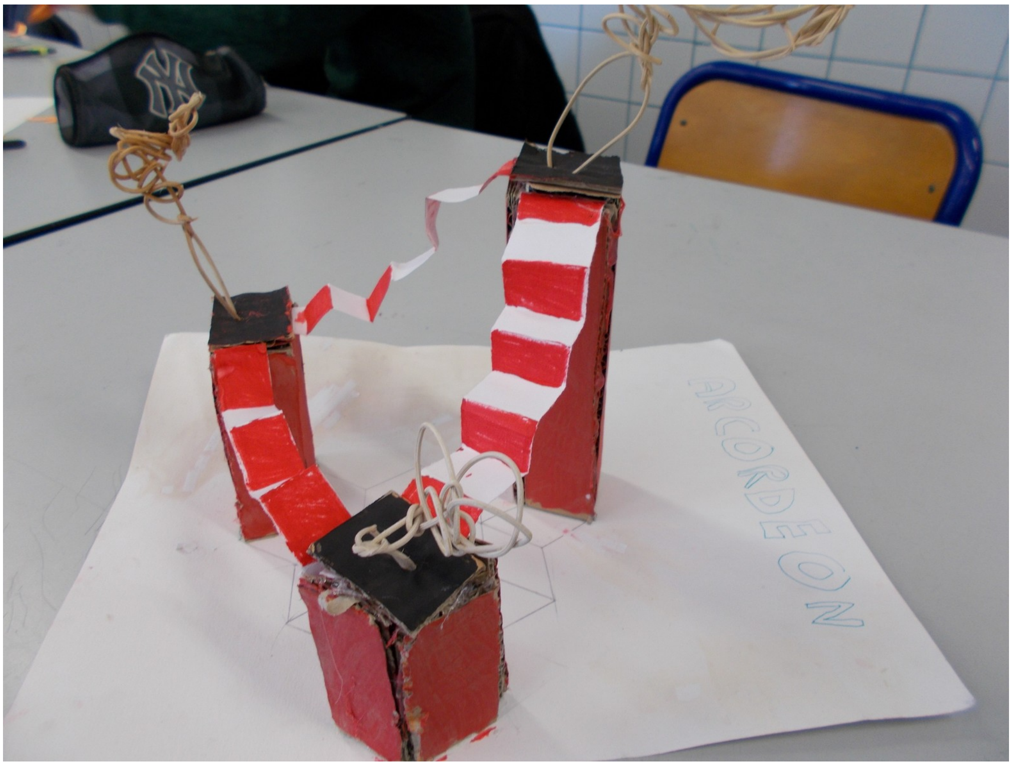
D'autres références artistiques (ci-dessous, représentées des œuvres de Daniel Buren, Arne Quinze, et Sol LeWitt) choisies en fonction des productions des élèves sont alors montrées dans un temps intermédiaire (après deux séances de réalisation) afin de redynamiser le processus de création et aussi conforter les élèves dans leurs choix : cela les amène à prendre conscience de la direction de leur démarche, créative et surréaliste, ou plus mathématique et architecturale. À cette occasion, les délimitations entre la 2D et la 3D sont revues et explicitées : certains ont fait des échos formels aux pavages originels.

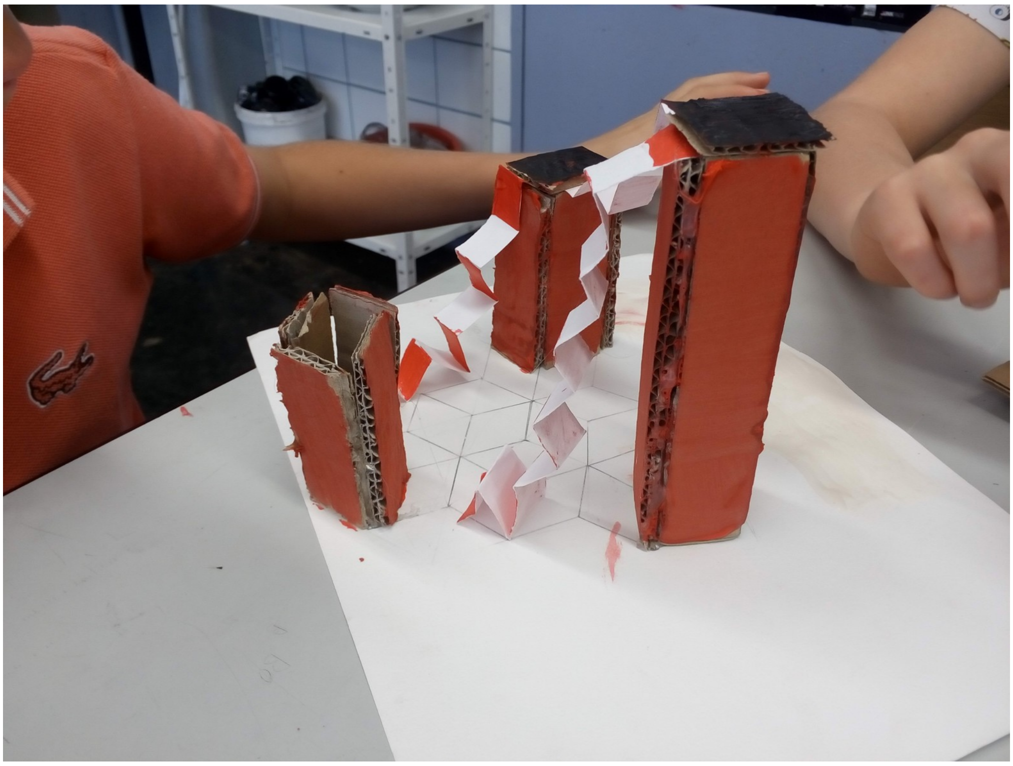


Des tendances se distinguent en effet assez vite : certains élèves restent dans des équilibres mathématiques et proposent des élévations très lisibles en relation avec l'espace et l'architecture, d'autres abordent le sujet dans une dimension narrative, enfin, d'autres groupes proposent des productions plus personnelles et surréalistes, dans la lignée des artistes Escher ou De Chirico.

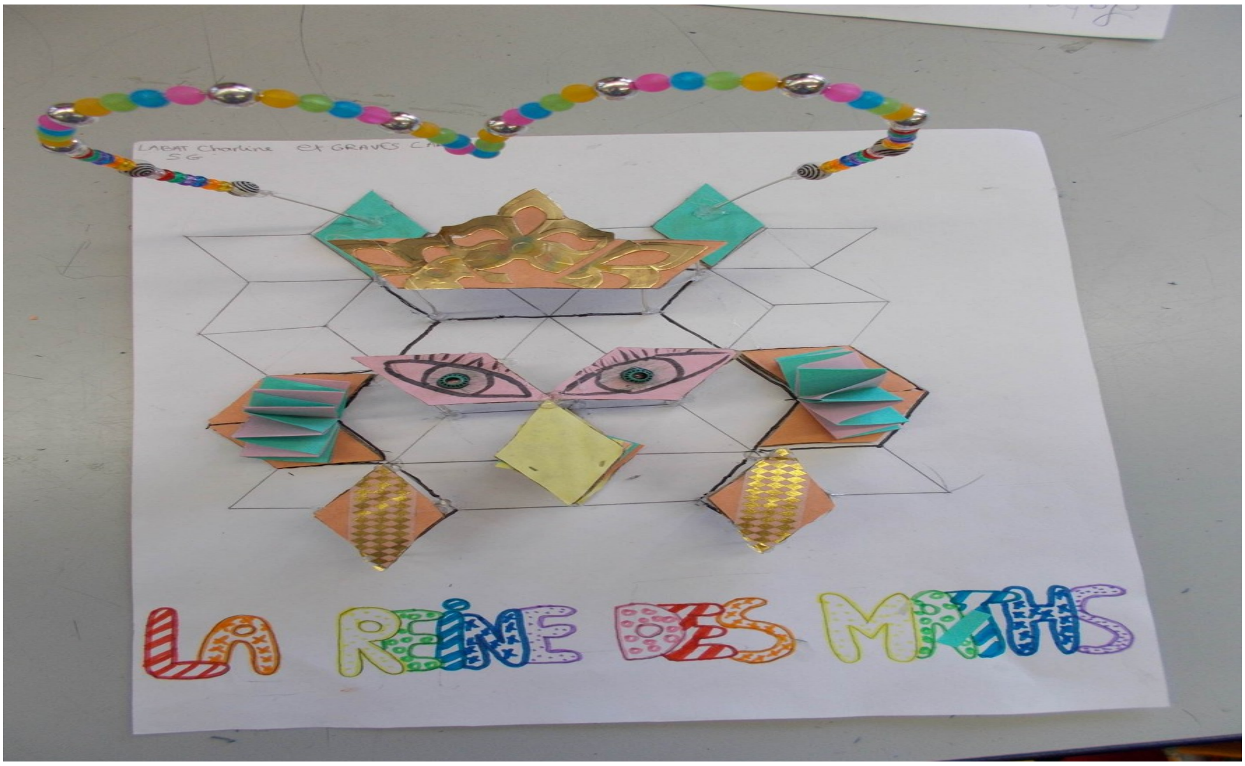
La réalisation des patrons a nécessité plus de temps que prévu, dans la volonté d'aboutir à un travail de qualité pour être à la hauteur de leurs ambitions : une séance supplémentaire est donc accordée à la finalisation, en présence du professeur de mathématiques qui se met « à la disposition des élèves » et participe à la conception des productions dans divers groupes de travail.

PRODUCTIONS FINALES DES ÉLÈVES

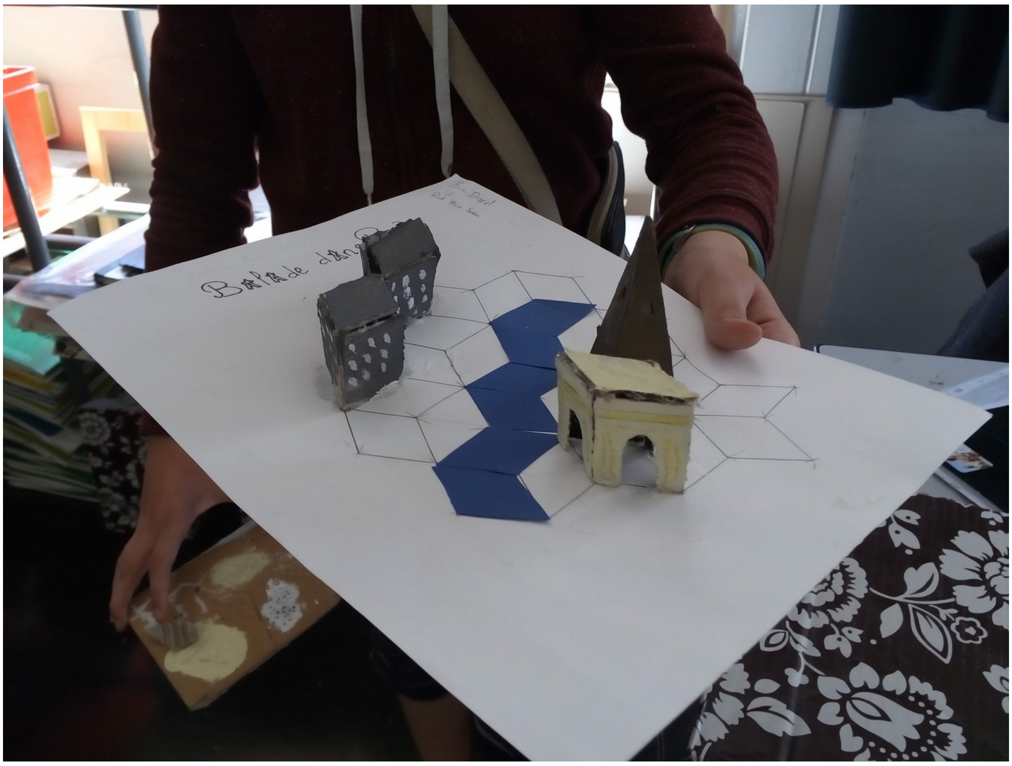




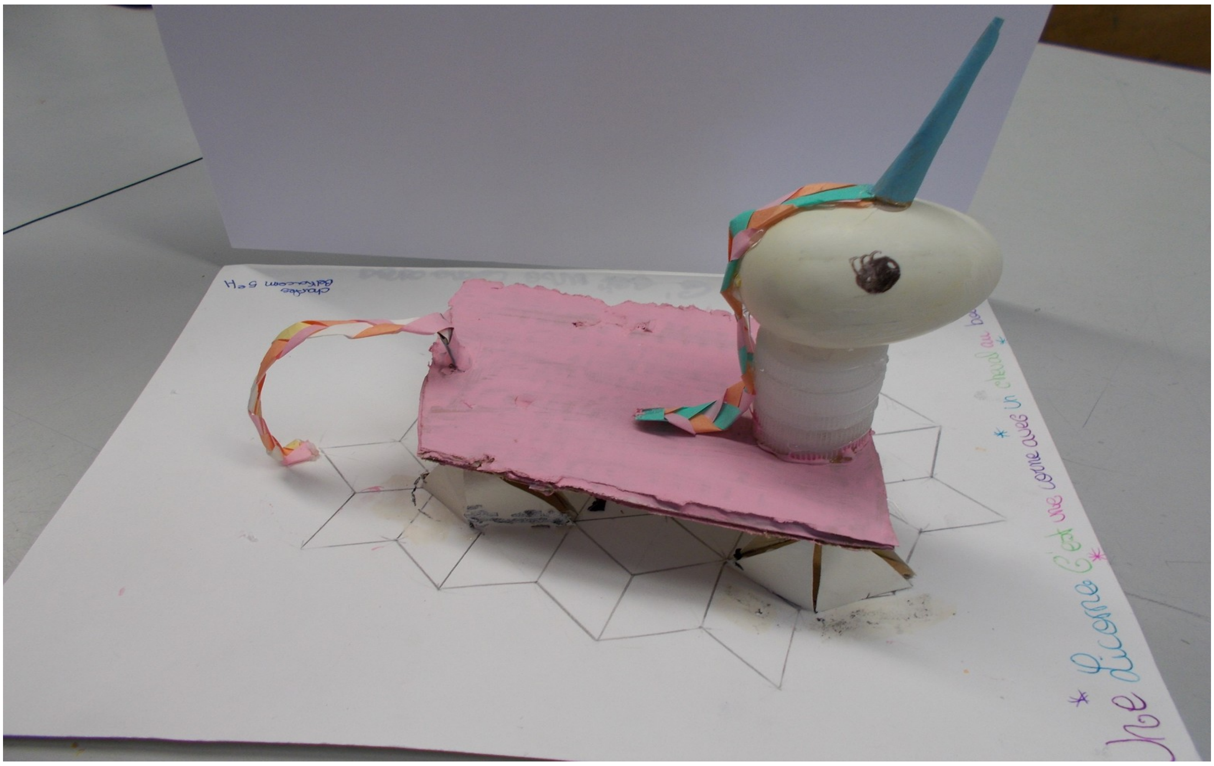
Jungle festive



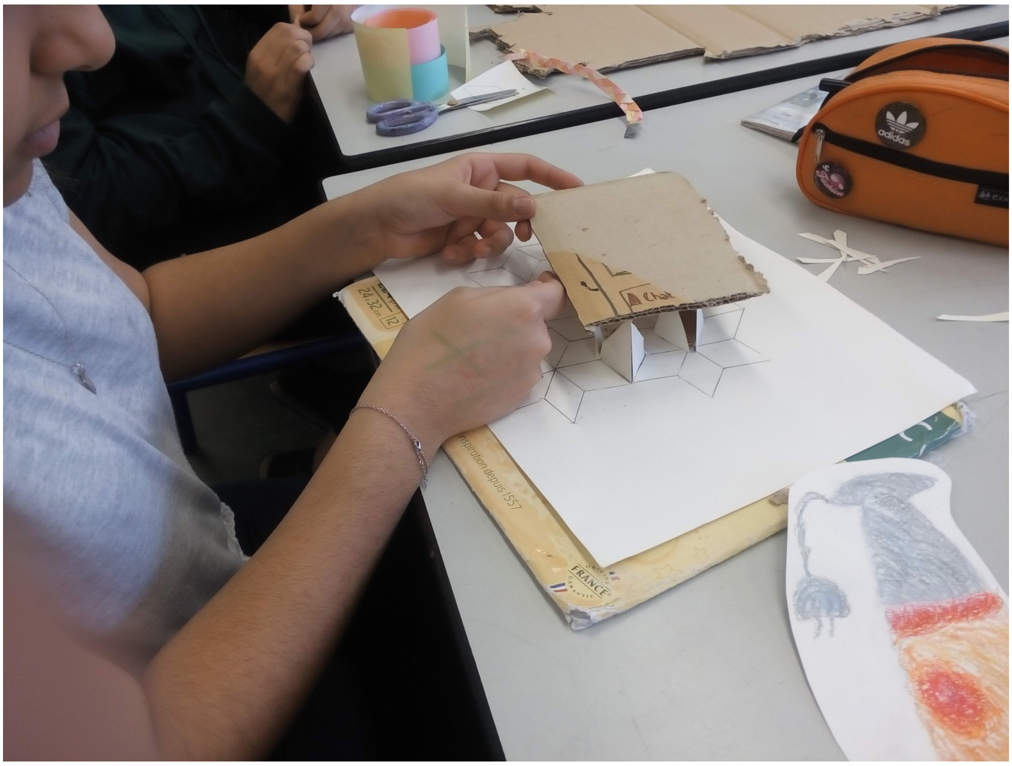
La Reine des Maths

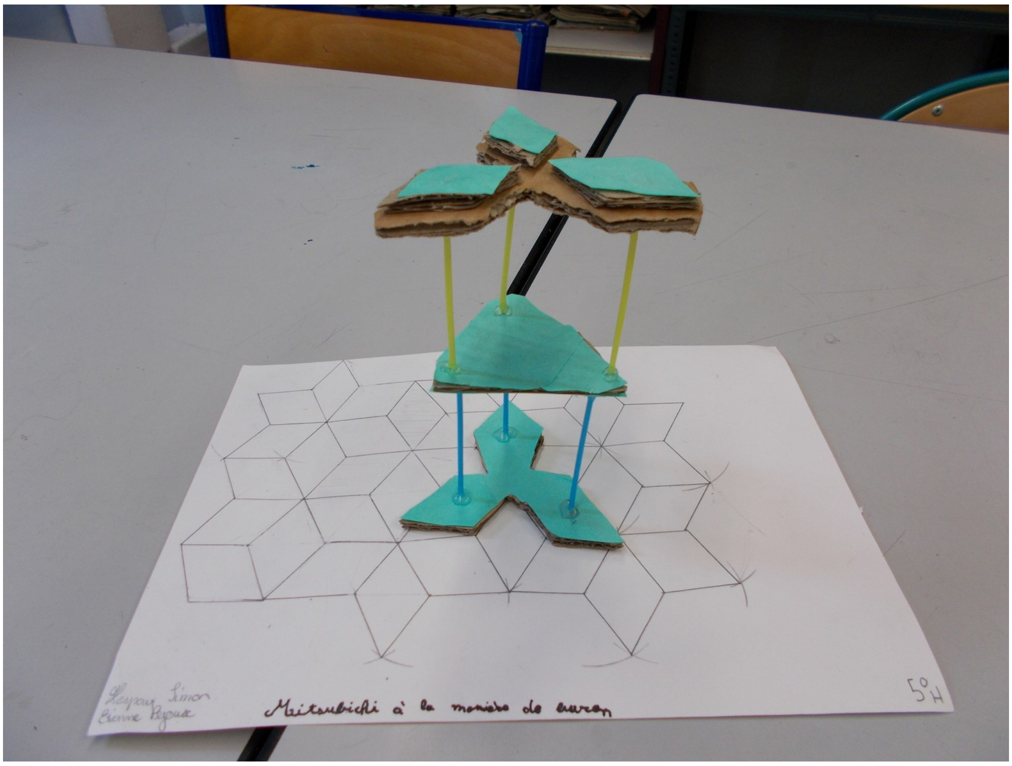


Balade à Paris



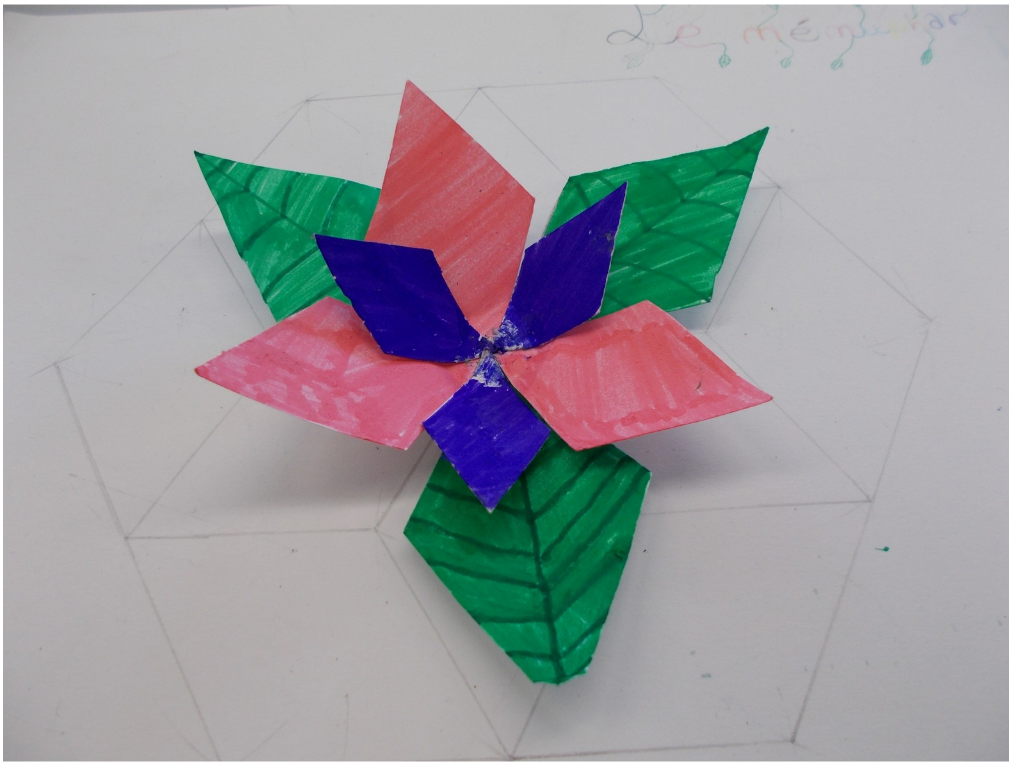
La licorne



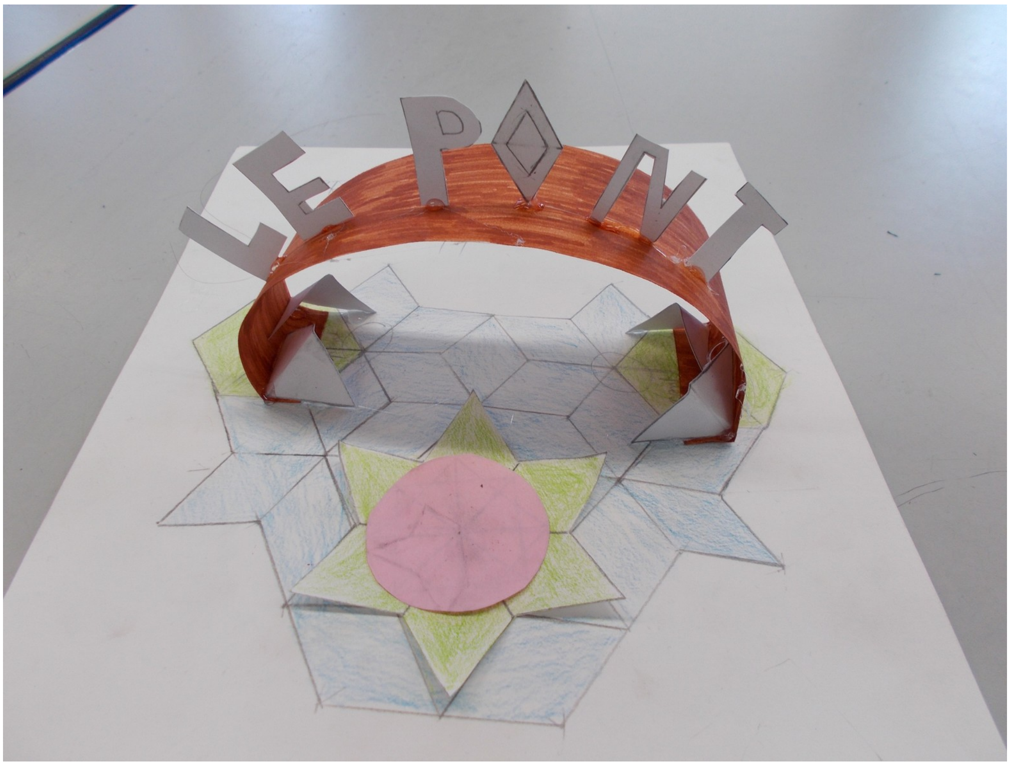


Mitsubishi d'après Buren

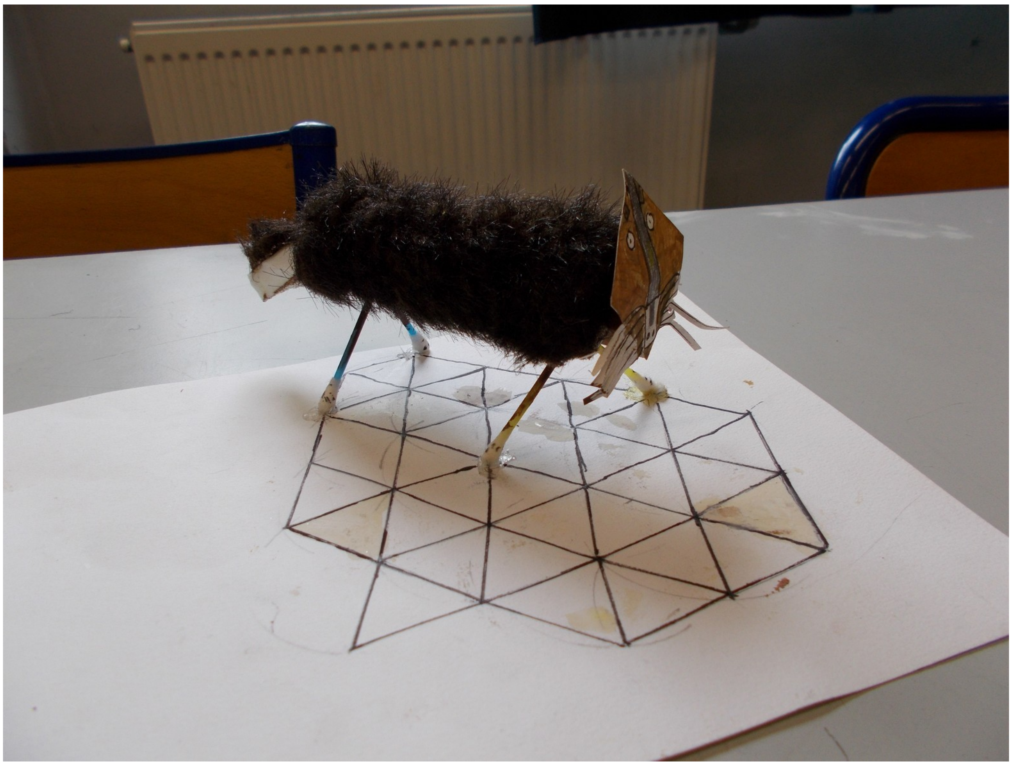
Le jardin des fleurs



Sans titre

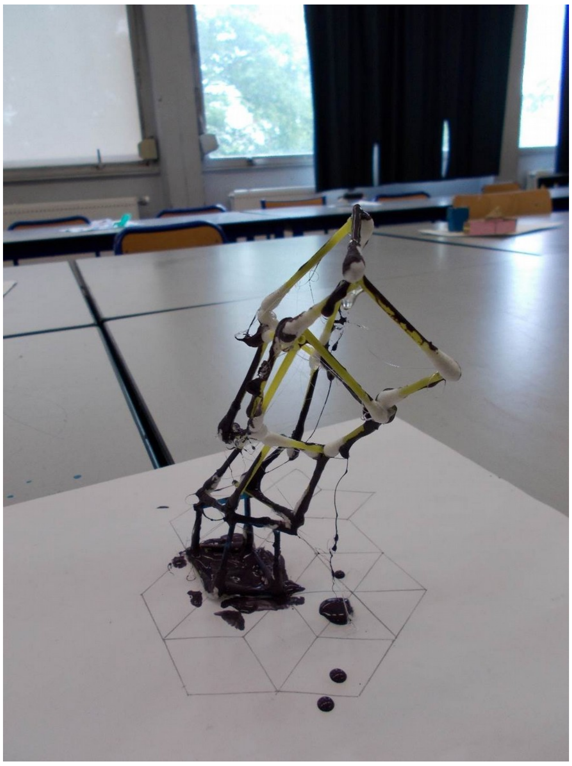


Le pont

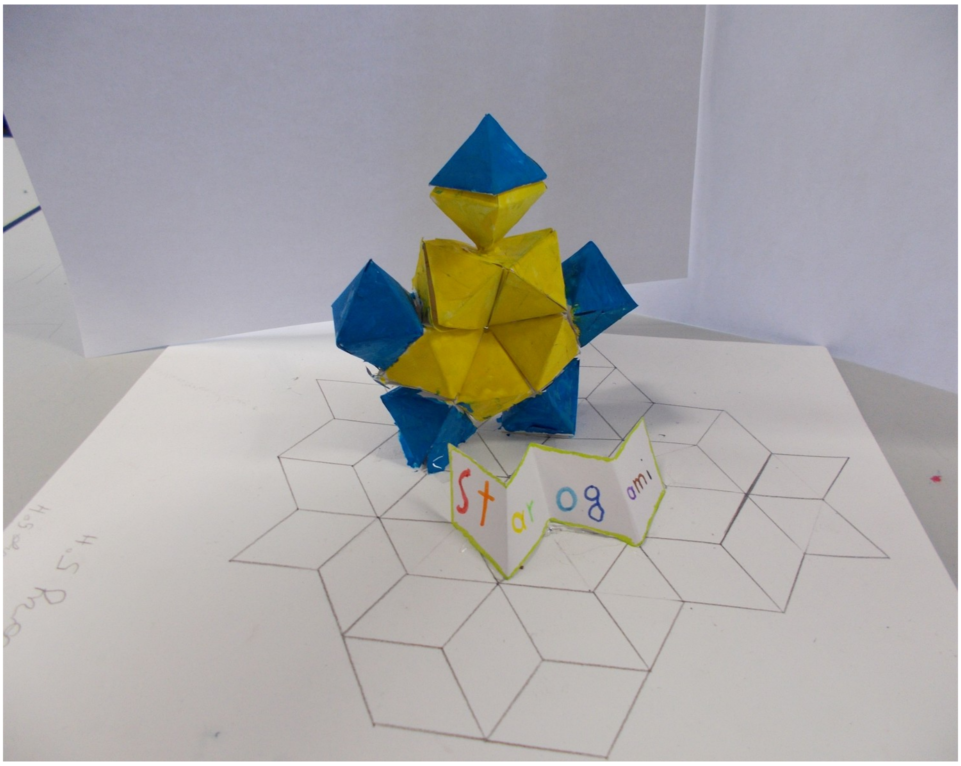


Le rongeur

Il était une fois en forêt



La tour de Pise détruite



Starogami

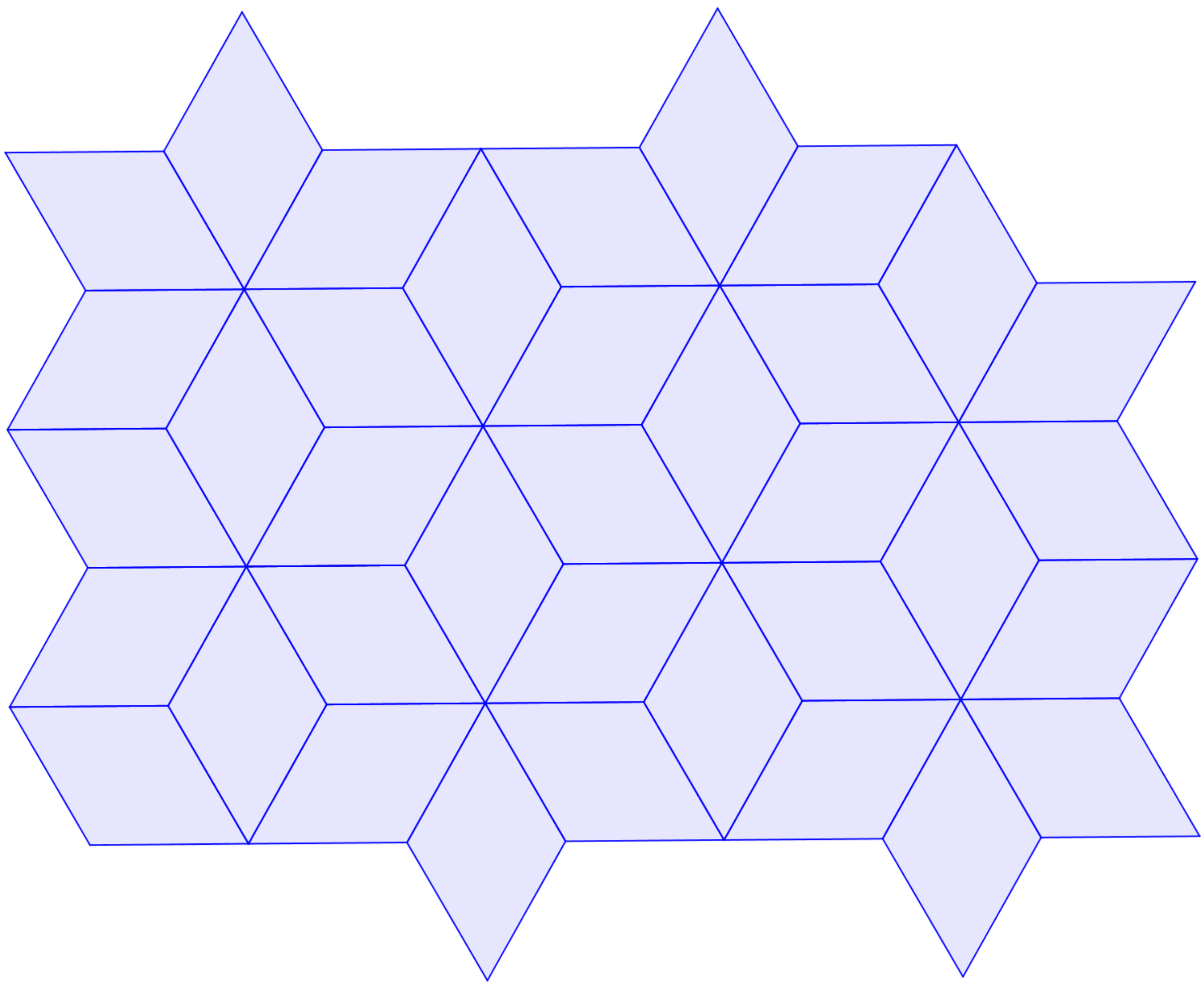
Pavage : fiche élève mathématiques

Définition *: un pavage est la reproduction d'un motif de base (par exemple un polygone) par des transformations du plan, de manière à recouvrir le plan sans trou ni superposition.*

Voici un pavage :

1. Quel motif a pu servir de base à ce pavage ?

2. Quelles transformations peut-on utiliser pour passer d'un motif à l'autre ?



Pavage / Mise en espace artistique : fiche élève arts plastiques

Vous disposez d'un pavage réalisé en cours de mathématiques.
Mettez en volume ce pavage au gré de vos envies : il s'agit de choisir des éléments du pavage et de les « déplier » : celui-ci prend vie, suit un cheminement, raconte ou non une histoire.

Modalités :
Selon votre idée, faites un ou des patrons que vous proposent les formes de votre pavage, revisitez-les (décorez-les, illustrez-les, habillez-les, découpez-les, pliez-les…),fixez-les sur le support-pavage donné (colle, scotch, fil…). Celui-ci est le support de votre réalisation en volume.
Vous réalisez un plan rapide et explicatif de votre envie ou de votre idée avant réalisation finale en volume.
Inventez un titre qui exprime votre intention.

Compétences à travailler et à évaluer :

- Créer un espace en 3D à partir d'un support 2D donné.
- Imaginer à partir de la structure du pavage.
- Maîtriser les techniques choisies.
- Inventer un titre en relation avec l'intention et le résultat final.

À retenir :

- Passage de la 2D à la 3D avec une intention précise préalablement définie.
- Représentation d'un espace réel ou imaginaire, figuratif ou fictif.

Problématique :

Comment exploiter une structure mathématique qui devient source d'expressivité ?

Liaisons aux programmes d'arts plastiques :

- La construction, la transformation de la structure donnée, les interventions, le détournement, ouvrent les questions et les opérations relatives au montage, au point de vue, à l'hétérogénéité et à la cohérence.
- Passage fluide de la 2D à la 3D.
- Narration visuelle.
- Processus de création mené du plan à la réalisation.

Références artistiques :






Buren

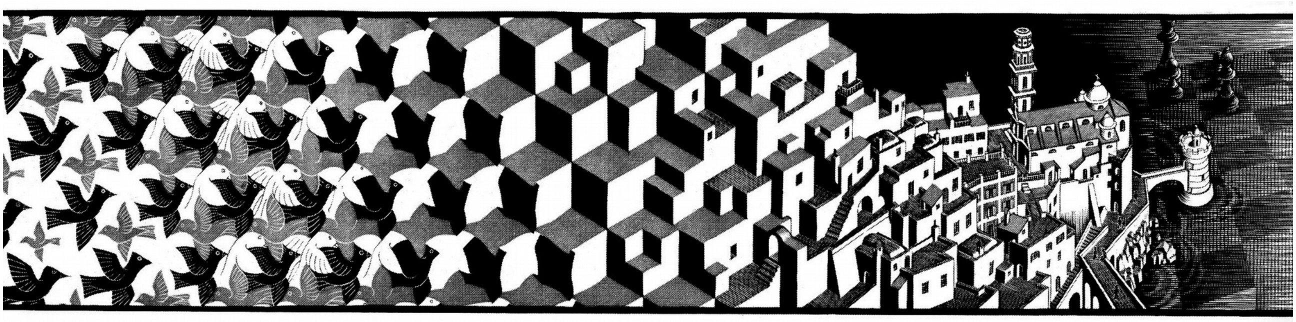
Sol LeWitt

Mondrian

Autres réalisations :



Variante arts plastiques non testée :



Extrait de Metamorphosis I
Gravure sur bois. 1937. **M. C. Escher** 19,5 x 90,8 cm

<table>
<tr><th>4ème</th><th>PAVAGE/PAYSAGE IMAGINAIRE</th></tr>
<tr><td colspan="2">Vous disposez d’un pavage réalisé en cours de mathématiques.
Transformez ce pavage en un monde imaginaire.

Vous réaliserez un patron, à l’échelle 1 du losange ayant servi de base pour le patron. Vous pourrez ainsi, en vous servant de ce patron, agrandir votre pavage (sans être obligé cette fois d’en respecter les règles de rotation).
Il ne s’agit pas simplement d’ajouter quelques éléments décoratifs mais de modifier, détourner ce pavage pour en faire votre monde imaginaire personnel.
Vous inventerez un titre exprimant votre intention.</td></tr>
<tr><th colspan="2">Compétences à travailler et à évaluer</th></tr>
<tr><td colspan="2">- conserver certains éléments du pavage d’origine.
- modifier, s’approprier la structure du pavage.
- représenter un monde imaginaire.
- maîtriser les techniques choisies.
- inventer un titre en relation avec les intentions.</td></tr>
<tr><th colspan="2">À retenir</th></tr>
<tr><td colspan="2">Paysage : 1. Genre artistique. 2. Représentation d’un site ou d'un espace réel ou imaginaire, figuratif ou non figuratif, par la peinture, le dessin, la photographie, etc...</td></tr>
<tr><th colspan="2">Problématique</th></tr>
<tr><td colspan="2">Comment l’utilisation puis le détournement d’une structure mathématique peut-elle être source d’expressivité ?</td></tr>
<tr><th colspan="2">Dans les programmes en arts plastiques</th></tr>
<tr><td colspan="2">La ressemblance : le rapport au réel et la valeur expressive de l'écart en art ; les images artistiques et leur rapport à la fiction, notamment la différence entre ressemblance et vraisemblance.
Le dispositif de représentation : l'espace en deux dimensions (littéral et suggéré), la différence entre organisation et composition.
La narration visuelle : mouvement et temporalité suggérés ou réels.
La création, la matérialité, le statut, la signification des images : les différences d'intention entre expression artistique et communication visuelle.</td></tr>
</table>

Autour d’une œuvre de Charles Chirinian

Niveau : de CM2 à 5ème

Descriptif rapide : Réalisation d'un tableau composé de 4 « modules » et calcul du nombre total de combinaisons possibles.

Cette activité a été faite :

- en 5ème avec un professeur d’arts plastiques et sans professeur d’arts plastiques
- dans plusieurs classes de CM2 et 6ème avec le professeur de la classe et un membre du groupe.

Adaptation possible en 2nde dans le cadre des TP informatiques.

Objectifs (CM2/collège) :

Mathématiques	**Arts Plastiques**
- Reconnaître des figures géométriques. - Analyser une figure complexe. - Suivre ou écrire un programme de construction. - Construire des figures. - Effectuer un calcul « combinatoire ».	- Aller vers l’abstraction.

Durée :

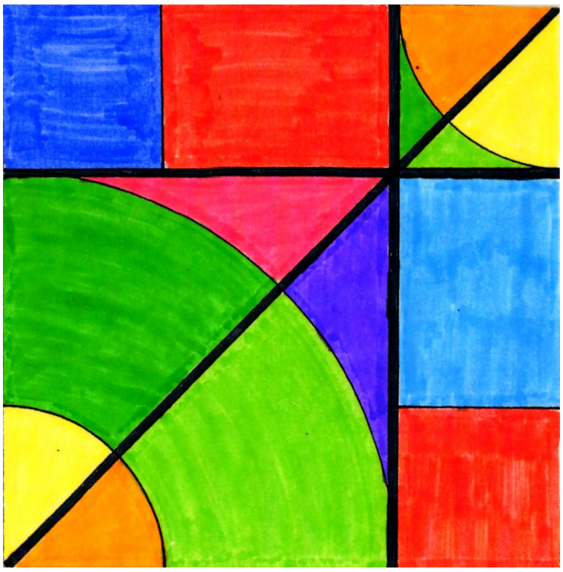
Mathématiques : 2 h-3 h	**Arts Plastiques** : 2 h

Prérequis :

Mathématiques	**Arts Plastiques**
Symétries axiale et centrale.	

Matériel :

- photocopies en noir et blanc du tableau,
- papier calque,
- éventuellement plastifieuse et scotch aimanté.



Module effectué par un élève.

Dans ce dossier, vous trouverez :

- une présentation de l’artiste et ses œuvres,
- la description de l’activité menée dans une classe de 5ème avec un professeur d’arts plastiques,
- la description de l’activité menée dans une classe de 5ème dans le cadre de la semaine des mathématiques (sans professeur d’arts plastiques),
- les différentes annexes (1 à 5) pour la classe de 5ème,
- la description de l’activité menée dans plusieurs classes de 6ème à CM2,
- les différentes annexes (6 à 9) pour la classe de CM2.

Présentation de l'artiste Charles CHIRINIAN et de son œuvre

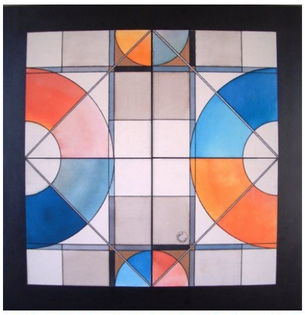
Né à Paris, de parents arméniens immigrés, il se passionne dès l'âge de 14 ans pour le dessin et la peinture qu'il exerce régulièrement, bénéficiant des conseils de deux artistes peintres. Après des études d'architecture à l'Ecole des Beaux-Arts de Paris, dont il sort diplômé en 1970, il exerce sa profession dans de grands bureaux d'architectes parisiens, puis en tant qu'indépendant. En 1984, il s'installe avec sa famille en Suisse, à Nyon, sur les rives du lac Léman, et c'est en urbaniste qu'il poursuit sa carrière au Service du Développement Territorial du Canton de Vaud jusqu'en 2011.

Parallèlement à l'architecture et à l'urbanisme, et pendant toutes ces années, il n'a jamais cessé de peindre. Ses recherches l'ont conduit à une peinture abstraite géométrique et colorée, qui s'apparente à l'art constructif, notamment à l'art concret zurichois, et à l'art cinétique.

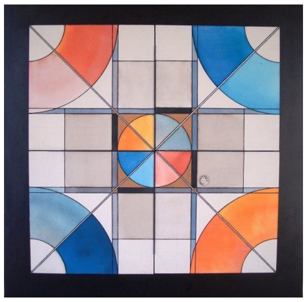
Projet soutenu

Dès 2000, il invente un concept de tableau fait de plusieurs panneaux juxtaposés qui peuvent être intervertis et orientés (tournés) différemment dans la composition géométrique. Ce principe, qu'il nomme « tableau à combinaisons », a été inspiré par deux constats sur la nature : chaque espèce des éléments vivants de la nature (plantes, animaux, humains) est régie par de mêmes principes géométriques d'organisation et de croissance. Or, tous les individus d'une espèce sont différents même s'ils sont semblables par leur aspect. D'autre part, un paysage naturel ou urbain change en fonction des saisons, du temps et de l'heure de la journée (démonstration de Claude Monet par la série de la cathédrale de Rouen et la série des meules).

L'idée a été de créer des tableaux modifiables en de nombreuses variantes. On offre ainsi à l'amateur d'art la possibilité de faire varier le tableau suivant les multiples « combinaisons » conçues par le peintre.



Pour un tableau à quatre panneaux, on obtient 6144 combinaisons différentes ou tableaux différents (soit un tableau différent chaque jour pendant plus de 16 ans). Pour un tableau à neuf panneaux, on a la possibilité de faire plus de 2 milliards de combinaisons différentes.



Dans cette affiche, on trouve un tableau constitué de 9 modules identiques.

Son travail a été exposé à la Galerie d'Art Junod à Nyon de juin à septembre 2013.

Texte issu de : *Galerie Junod ; Fondation-engelberts.org*

Travail sur un tableau de Charles Chirinian avec une classe de 5ème en co-intervention avec le professeur d'arts plastiques.

Ce travail a été préparé avec le professeur d'arts plastiques de la classe.

En mathématiques, l'œuvre choisie permet de reconnaître des figures géométriques de base mais fait aussi intervenir les symétries axiales et centrales. De plus, elle permet d'introduire la combinatoire sur un cas « concret » : le nombre de tableaux différents possibles.

Pré-requis : vocabulaire géométrique de base,
symétrie axiale (vue en sixième),
éventuellement, symétrie centrale (chapitre traité précédemment en cours).

En arts plastiques, l'œuvre choisie a permis de revenir sur le vocabulaire et d'introduire le travail sur les notions de composition et de rythme en prolongeant par l'étude de « la série des arbres » réalisée par Piet Mondrian.

1ère séance (en co-intervention avec le professeur d'arts plastiques)

1. Distribution des photocopies en noir et blanc (annexe 1)

Le nom de l'artiste est écrit au tableau.

Durant 10 minutes les élèves commencent à décrire l'œuvre au brouillon.

Les 10 minutes suivantes, ils ont droit en plus au papier calque et aux ciseaux pour affiner leur description. *(Un élève est allé à la fenêtre pour plier et voir par transparence).*

La distribution de papier calque à ceux qui voulaient a généré de nouvelles « pistes ».
Finalement tous les élèves ont pris le papier calque, ce qui a permis de plier, couper, « faire tourner » (la rotation n'est pas encore connue en 5ème).

La majorité des élèves a trouvé un axe de symétrie, certains ont vu deux axes de symétrie, très peu ont trouvé les quatre « modules » répétés. Le bord noir les a peut-être gênés.

2. Distribution du tableau (annexe 2)

Vocabulaire mathématique	Vocabulaire « arts plastiques »

Durant 5 minutes, les élèves « classent » dans le tableau les mots de leur description.

3. Passage à l'oral

Description puis retour sur vocabulaire avec « correction » du tableau.

Étaient attendus : diagonale, carré, cercle, arc de cercle, symétrie…
valeurs (pour distinguer les nuances de gris)…

Réponses obtenues : axe de symétrie, quart de cercle, carré, rond, triangles, diagonales. Ces mots ont été classés dans la colonne « mathématiques » par les élèves mais pas dans celle d'arts plastiques. (Les deux professeurs étaient présents mais on était en heure de mathématiques de l'emploi du temps des élèves…)
Le mot « valeurs » n'est pas apparu.

Le vocabulaire commun aux 2 matières a été positionné « à cheval » sur les 2 colonnes.

Nous avons aussi entendu : loupe, pizza dans une boîte, rond-point, salle à manger…
Donc, en bas du tableau, les élèves ont rajouté « interprétation » et on a travaillé sur la différence entre interprétation et description d'une œuvre (ou d'une figure mathématique : différence entre ce qui est certain et ce que l'on voit).

A la fin de la mise en commun, nous avons projeté l'œuvre en couleur.

4. Distribution du programme de construction (annexe 3)
A faire (à la maison) pour le cours de mathématiques suivant.

Ce dessin demande de la précision et l'à-peu-près se remarque très vite, notamment à l'intersection des diagonales.

Possibilité de le construire avec GeoGebra (voir annexe 5, programme de construction disponible sur https://www.geogebra.org/classic/pqm9rv6c).
Ce travail a pris 1 heure.

En cours d'arts plastiques

Le professeur a distribué des photocopies de modules vierges **(annexe 4)** et a travaillé les textures, les motifs…
Chaque élève a mis en couleur quatre modules et a donc obtenu son « tableau ».

2ème séance en mathématiques : à l'oral

Calcul du nombre de « tableaux » différents obtenus avec 4 modules.
En premier est apparu le besoin de calculer le nombre de positions des lettres (création d'un arbre des possibles : on est arrivé à : $4 \times 3 \times 2 \times 1$)

A	B
C	D

Ensuite, on compte en faisant "tourner" la lettre A… puis B…
D'où le résultat : $4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4$
(Les élèves ont effectué ce calcul sans calculatrice)

On a ensuite calculé pendant combien d'années on aurait un tableau différent en le changeant chaque jour.

Les travaux des élèves ont été plastifiés et aimantés, ce qui a permis de les afficher sur une armoire en salle de mathématiques et de modifier la composition quand ils le souhaitaient.
A la fin de l'année, certains ont souhaité garder leur travail.

Détail et prolongement du travail en arts plastiques

Une fois accompli le travail en binôme **mathématiques / arts plastiques**, nous avons présenté à la classe en cours d'arts plastiques certains travaux de **Piet Mondrian** dont la « **série des arbres** » datée de 1911.
Nous avons comparé cette série avec la série de **« l'arbre de vie »** réalisée par **Gustav Klimt.**

Pour illustrer le glissement de la figuration à l'abstraction, nous avons observé chaque reproduction des tableaux pour comprendre comment les formes figuratives de départ devenaient progressivement abstraites (projection au tableau des œuvres sélectionnées).

Un cours a été distribué sur **l'art abstrait et l'art figuratif** avec projection d'œuvres de **Kasimir Malevitch, Vassili Kandinsky, Paul Klee, Victor Vasarely,** etc...
Les définitions d'abstrait et de figuratif ont été commentées et collées dans le cahier d'arts plastiques.

Les élèves sont entrés dans la partie plus pratique du cours : le travail donné à partir des reproductions des modules de Charles Chirinian.

Chaque élève avait à sa disposition quatre **modules en noir et blanc** et différents médiums (aquarelle, pastels secs, gouache, feutres, crayons de couleur, encres colorées etc) : voir la figure vierge distribuée aux élèves (**annexe 4)**.

Il s'agissait de mettre ses modules en couleur en tirant parti de quelques mots-clefs écrits au tableau :

- contrastes simultanés de couleur
- camaïeu
- opacités / transparence.

Les techniques étaient choisies librement en fonction des effets escomptés.
Les productions ont été ensuite affichées et commentées une fois achevées.

L'évaluation a tenu compte de la qualité de la maîtrise technique et de la pertinence des médiums choisis (en fonction des effets recherchés mais aussi de la qualité des supports et de la surface à colorer).

Cette séquence a été prolongée par une séquence ayant pour objet **la composition.**

Des papiers collés de formes diverses (découpés de façon arbitraire) ont été fabriqués et collés sur une feuille papier dessin en travaillant autour de trois expressions clefs : « Libre circulation », « Entassés dans un coin », « Remplie à ras-bord. »

Autre exemple de séquence sur C. Chirinian en 5ème

J'ai testé cette séquence avec une classe de 5ème dans le cadre de la Semaine des mathématiques, sans intervention d'un enseignant d'arts plastiques.

J'ai projeté les deux œuvres de la présentation (**annexe 1**) et je leur en ai distribué les reproductions.
Les élèves devaient décrire les œuvres qu'ils avaient sous les yeux.
Nous avons ensuite rempli ensemble le tableau de description.
Les élèves n'ont rempli que des mots mathématiques, lorsque je leur ai demandé de remplir également la colonne arts plastiques, ils ont juste parlé des couleurs (il est vrai que j'ai entrepris l'activité toute seule, sans collègue d'arts plastiques).
Nous avons ensuite cherché ensemble comment les tableaux étaient construits.

Très vite, une élève a trouvé les quatre carrés identiques, mais il a été plus difficile d'arriver à ce que tout le monde les voie.

Certains ont ensuite découpé pour passer d'un tableau à l'autre en déplaçant les 4 « modules ».
On s'est alors posé la question : *Combien y a-t-il de possibilités d'obtenir des tableaux différents avec ces 4 « modules » ?*
Je leur ai demandé d'y réfléchir et on a ensuite compté ensemble.
Ils ont d'abord pensé à faire tourner chaque module sur lui-même, ce qui donne 4^4 possibilités.

On a ensuite construit un arbre pour compter en fonction de la place de chacun : $4 \times 3 \times 2 \times 1$
Ce qui donne 1 tableau différent par jour pendant plus de 16 ans.

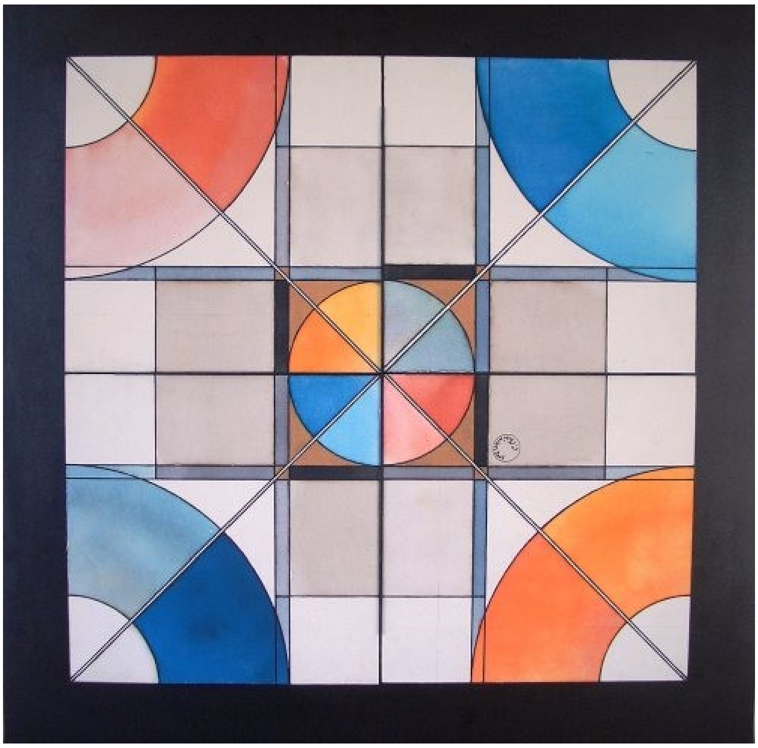
On a ensuite regardé comment était fait un module, et je leur ai distribué le programme de construction pour en réaliser un chacun, le projet étant de le finir, le colorier et s'en servir pour construire 7 tableaux différents (au moins) à exposer pour la soirée portes ouvertes du collège en fin d'année.
La majorité des élèves ont fait assez facilement la figure (bien qu'ils manquent de précision pour la position de plusieurs points). Ils avaient tous déjà tracé des figures de ce type (avec « La géométrie pour le plaisir »).

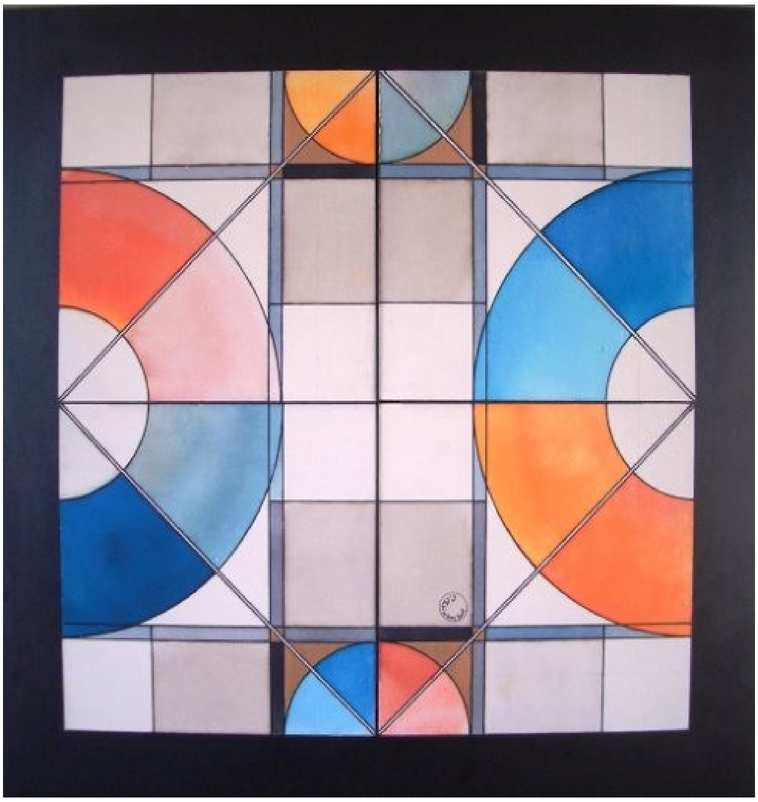
Certains l'ont fini chez eux, il y en a même un qui en a fait 4.
Je leur ai ensuite rendu ensuite leur figure (avec des figures photocopiées pour ceux qui n'avaient pas une figure assez précise) afin de les mettre en couleurs avant les vacances de Pâques.

Cette activité a pris 3 heures ; il faut en compter une de plus pour mettre en couleurs (ce qui peut être fait en partie chez eux).

Annexes

Annexe 1 : Photocopies distribuées aux élèves (en noir et blanc) (classe de 5ème)





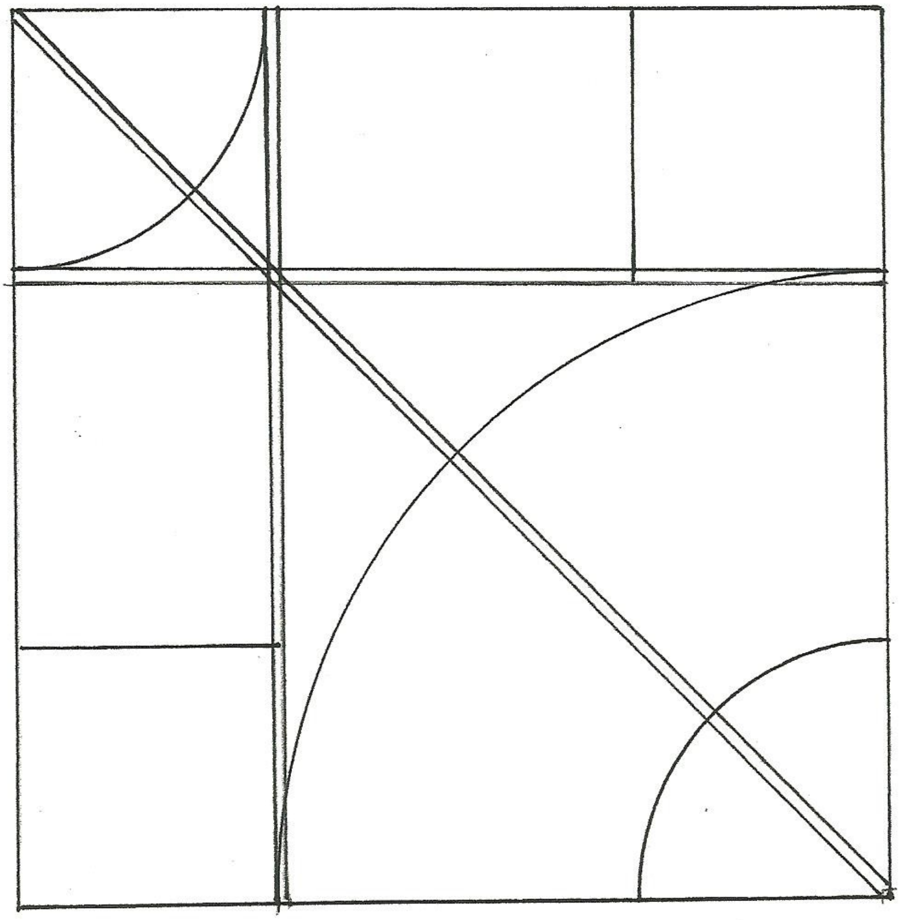
Annexe 2 : Tableau à compléter

Vocabulaire mathématique	Vocabulaire « arts plastiques »

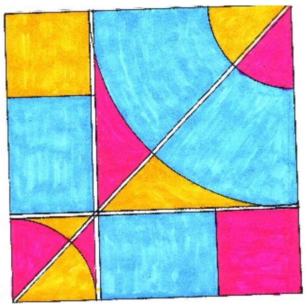
Annexe 3 : Programme de construction à la règle et au compas d'un module de C. Chirinian.

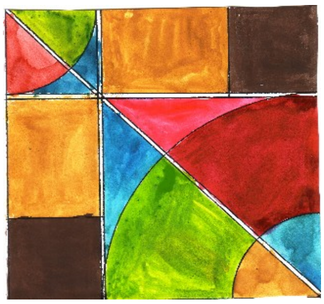
Construire un carré ABCD de 12 cm de côté.
Sur [AB], placer A' tel que AA' = 1 mm
placer M tel que AM = 82 mm
placer N tel que AN = 85 mm.
Sur [BC], placer E tel que BE = 35 mm
placer O tel que BO = 82 mm
placer P tel que BP = 85 mm
placer C' tel que BC' = 119 mm..
Sur [CD], placer C'' tel que CC'' = 1 mm
placer T tel que DT = 35 mm
placer R tel que DR = 82 mm
placer Q tel que DQ = 85 mm.
Sur [AD], placer A'' tel que AA'' = 1 mm.
placer W tel que AW = 82 mm
placer U tel que AU = 85 mm.
Tracer [MR] puis y placer F tel que MF = 35 mm.
Tracer [OW] puis y placer G tel que WG = 35 mm.
Tracer [A'C'] et [A''C''].
Tracer [NQ], [PU], [TG] et [EF].
A l'intérieur du carré ABCD, tracer :
l'arc de cercle de centre A et de rayon 35 mm
l'arc de cercle de centre A et de rayon AN
l'arc de cercle de centre C et de rayon PC.
Effacer le nom des points.

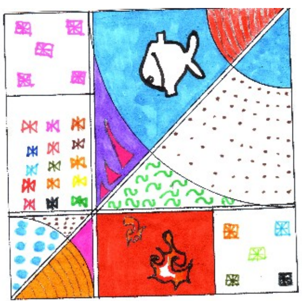
Annexe 4 : Module de C. Chirinian :



Exemples de productions d'élèves

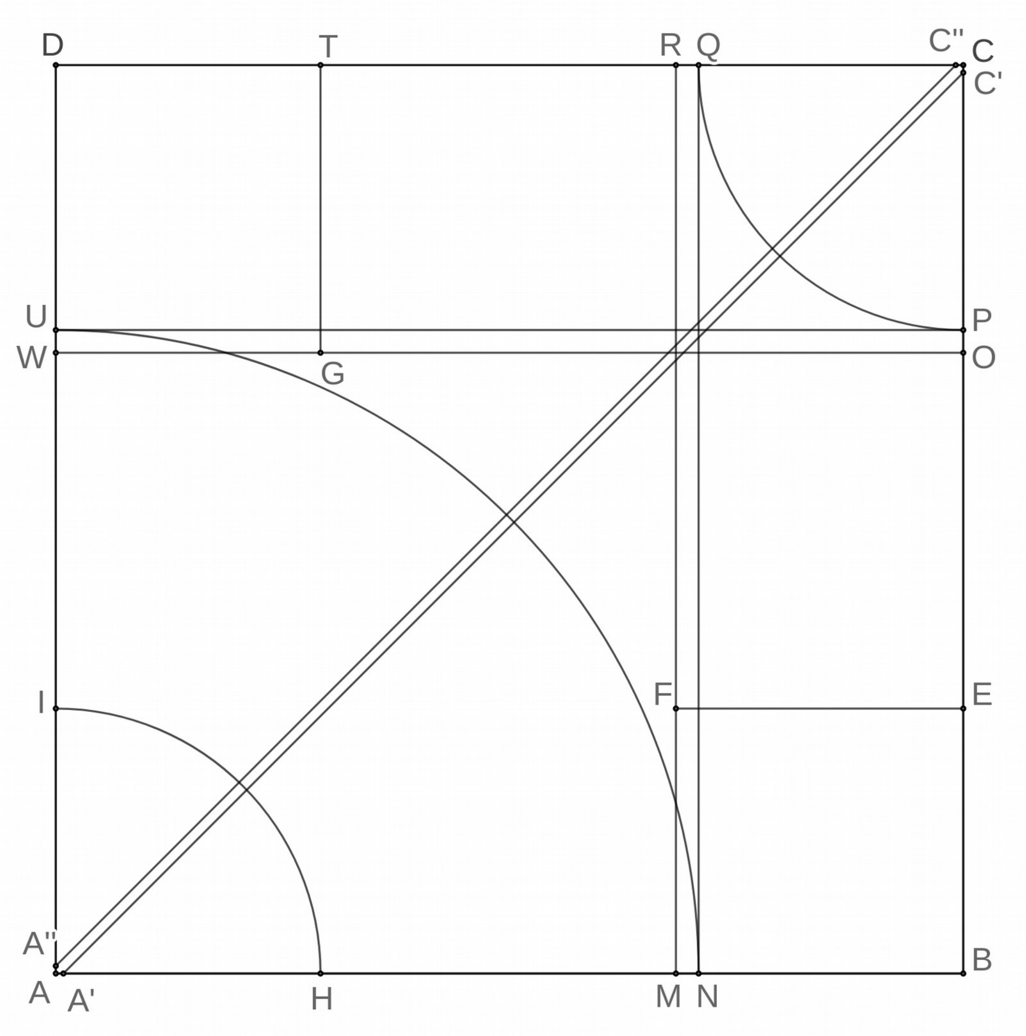






Annexe 5

Le programme GeoGebra https://www.geogebra.org/classic/pqm9rv6c permet de faire varier les points A', M, N et E.



Activité en CM2 : d'après une œuvre de Charles Chirinian

Objectifs

- distinguer les registres de vocabulaire : géométrie ; arts plastiques ; autre
- repérer symétrie axiale et autres transformations (en langage courant : retourner, demi-tour, faire tourner, faire glisser)
- construction à partir d'un programme, ou bien écrire un programme de construction puis la réaliser
- initiation à la combinatoire, au dénombrement
- utilisation de multiples ou d'une division euclidienne

Matériel

1 feuille de brouillon par groupe
1 photocopie de tableau de classement du vocabulaire par élève
1 photocopie des œuvres en noir et blanc par élève

à disposition :
ciseaux, calque, calculatrice
1 feuille de papier blanc (ou quadrillé, ou contenant le carré de départ) par élève

Activité testée dans plusieurs classes de CM2 et 6ème
par une animatrice de l'IREM qui y a fait deux interventions
à partir d'une version simplifiée du tableau de Chirinian (voir annexe 6)

1ère séance (1h 15min)

Petite introduction : l'artiste Charles Chirinian en quelques mots.

Projection au tableau : découverte des deux œuvres en couleurs **(annexe 6).**
Le mot tableau est rapidement devenu un problème car on parle du tableau de Chirinian, du tableau de la classe, du tableau de vocabulaire. Nous avions donc convenu avec les élèves de dire œuvre pour parler des tableaux de Chirinian.

Question : *Quels mots pourraient vous permettre de décrire ces œuvres ?*
Chaque groupe les écrit (sur la feuille de groupe).

> Beaucoup de mots mathématiques, quelques-uns d'arts plastiques, quasiment pas d'autres.

Distribution du tableau de classement du vocabulaire : remplissage par chaque élève mais en travail de groupe **(annexe 7).**

Puis tentative de faire faire à l'oral une description de l'une ou l'autre des œuvres --->
descriptions compliquées et pas très précises ; on va donc essayer de comprendre comment ils sont fabriqués.

> Nous avons d'abord fait une description à l'aide des mots artistiques (très floue !) ; puis à l'aide des mots mathématiques : les élèves cherchaient à mettre côte à côte tous les mots, mais sans réelle organisation.

Distribution des photocopies des trois œuvres en noir et blanc (annexe 8).

Observez de près les trois œuvres proposées, vous avez le droit de bricoler sur ces photocopies : tracez, découpez, décalquez, pliez, tout ce que vous voulez...

Chaque groupe écrit ses remarques sur la feuille commune.

Au début les élèves sont frileux, n'osent pas trop découper autre chose que le contour de la figure, certains tracent des axes de symétrie, certains découpent finalement chaque figure géométrique (les rectangles, les quarts de disques etc...)
Puis certains disent il y a 4 morceaux pareils, mais sur une même œuvre sans voir d'une œuvre à l'autre.
Certains ont vu 4 modules triangulaires, d'autres carrés, la comparaison sur les 3 œuvres a permis de choisir les modules carrés.

Mise en commun :
Affichage de la page en couleur :
faire sortir les 4 modules et les transformations (symétrie axiale, faire tourner, retourner, glisser, demi-tour).

Conclusion : pour construire une œuvre, il suffit de construire 4 modules géométriques identiques (avec des variations de couleurs éventuellement).
Chirinian nomme ce concept de tableau : tableau à combinaisons.
L'amateur d'art qui achète une telle œuvre, a ainsi la possibilité de le faire varier suivant son humeur en choisissant les combinaisons qu'il veut.

Fin de la première séance

<u>2ème séance</u> (1h 15min)

Reprise en quelques phrases de ce qu'on a vu la veille...

a) Construction
Vous ferez vous-mêmes vos propres œuvres à la manière de Chirinian. Pour cela, chaque élève construira un module.
Quelles sont les étapes ?

Prévoir d'afficher seulement un module, parce que extraire mentalement le module de l'œuvre complète a été un peu compliqué pour certains élèves.

Travail en commun de la classe :
les élèves proposent, j'écris les étapes au tableau, en faisant au fur et à mesure un dessin à main levée...

La construction sera faite ultérieurement lors d'une 3ème séance avec l'enseignante de la classe.

Cela a induit des discussions sur :
- carré-losange-rectangle
- la nécessité de nommer les points remarquables de la figure (sommets, points intermédiaires sur les côtés, la diagonale...)
- les longueurs des « morceaux » de côté du carré : il a été difficile de faire sortir le mot « tiers » alors que certains l'avaient écrit, mais comme il n'était pas de nature géométrique pour eux, ils ne pensaient pas qu'il était utile. Certains avaient écrit « tiers » en pensant au quart de cercle
- quart de cercle et demi-cercle, et pour la description de l'étape, formulation à l'aide de centre et rayon.

Quand la plupart des élèves ont compris qu'on est en train d'écrire un programme de construction, je leur dis que le programme complet leur sera donné au moment de faire la construction.

b) Dénombrement

Distribution de 4 modules plastifiés (faits par d'autres élèves dans un test précédent) identiques dans les tracés mais de coloriages différents.

Question :
Grâce à ces 4 modules, comment obtient-on des tableaux différents ?

Quelques élèves viennent au tableau montrer en déplaçant ou en pivotant les 4 modules plastifiés.

Question : *Combien de tableaux différents peut-on obtenir avec 4 modules disposés en carré ?*
Recherche en groupe ; écrire sur la feuille commune votre méthode de comptage.

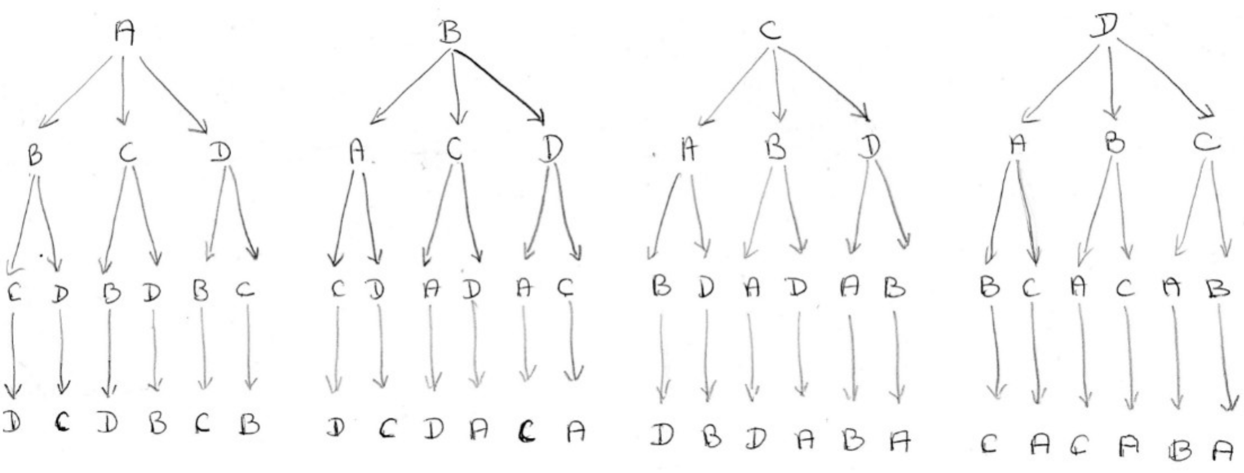
Enthousiasme général, et activité maximale !! Quelques réflexions d'élèves :
« ah c'est facile ! »
« ce n'est pas possible, il y en a à l'infini ! Mais non, ça va forcément s'arrêter !! »
« est-ce qu'on a le droit de reprendre ceux que vous nous avez donnés ? »
« au bout d'un moment on ne sait plus ceux qu'on a déjà faits... »
« il faut s'organiser »
« on peut compter sans vraiment les faire »

Mise en commun :
---> à partir des propositions de méthodes de comptage, aboutir au calcul global à faire à la calculatrice.

Dans les différents groupes, sont sorties les idées suivantes :
nommer les 4 modules pour identifier leurs positions,
pour chaque module, pivoter donne 4 possibilités.
On peut échanger les positions des modules et compter combien de possibilités de positions.

Il peut y avoir discussion sur l'opération adéquate : multiplication ou addition ? Parfois 4 + 4 + 4 + 4 au lieu de 4 x 4 x 4 x 4, ou même 4 + 3 + 2 + 1 au lieu de 4 x 3 x 2 x 1.

On a construit au tableau un début d'arbre des possibilités, et grâce à leurs différentes idées et ce début d'arbre, ils ont assez facilement trouvé le début du calcul, ensuite je les ai laissés écrire le calcul complet et le faire à la calculatrice par groupe (ce qui n'a pas été immédiat!!)



$4\times4\times3\times4\times2\times4\times1\times4$ 6 144 tableaux différents avec 4 modules !

Il ne restait que 5 minutes, et avec l'enseignante de la classe nous nous disions que nous allions nous arrêter là, quand un élève a dit : « de toute façon, on n'aurait pas eu le temps de les faire tous ces tableaux, il y en a trop ! »
Bonne question !
Du coup, nous n'avons pas vraiment répondu à celle-là, mais j'ai posé la question prévue d'un tableau par jour… et elle a été résolue très vite !
Certains ont posé la division, mais ne savaient pas la faire, d'autres à la calculatrice ont obtenu un nombre décimal et ont donné naturellement la partie entière comme réponse, d'autres ont ajouté successivement plusieurs fois 365 jusqu'à approcher 6144, d'autres ont cherché les multiples de 365 de manière raisonnée, fois 10, puis fois 20, puis fois 15, etc...

Question : *Si on change de tableau chaque jour, ça permet d'en avoir un différent pendant...*

Recherche en groupe (tâtonnement avec les multiples de 365 par exemple) durant 10 minutes.
Réponse : pendant presque 17 ans !!!!

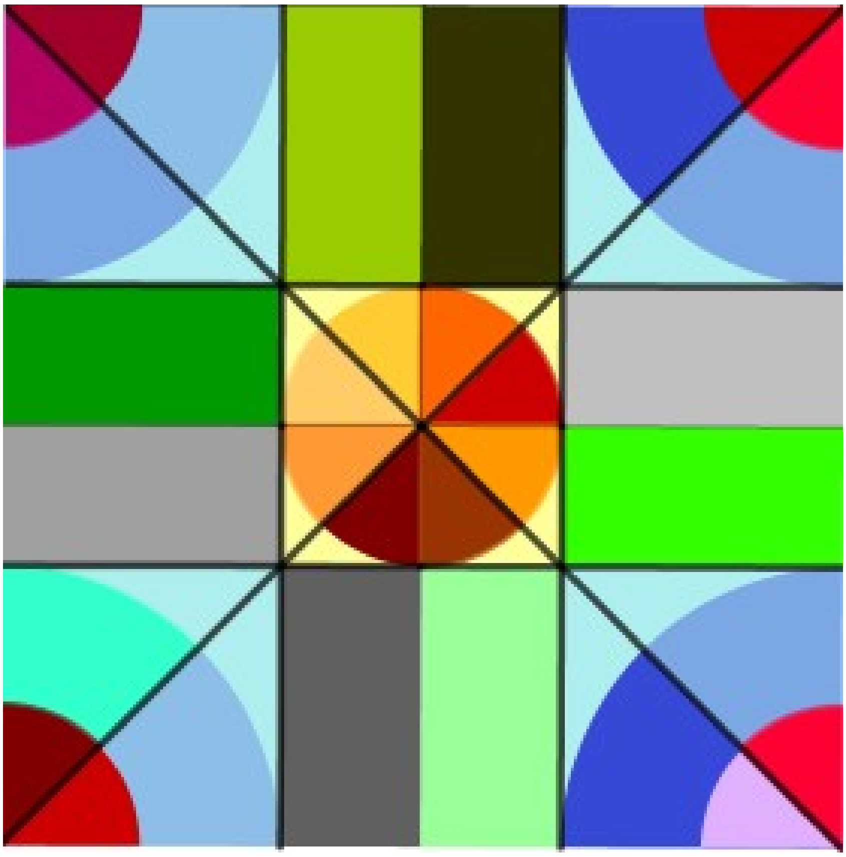
3ème séance avec uniquement l'enseignante de la classe

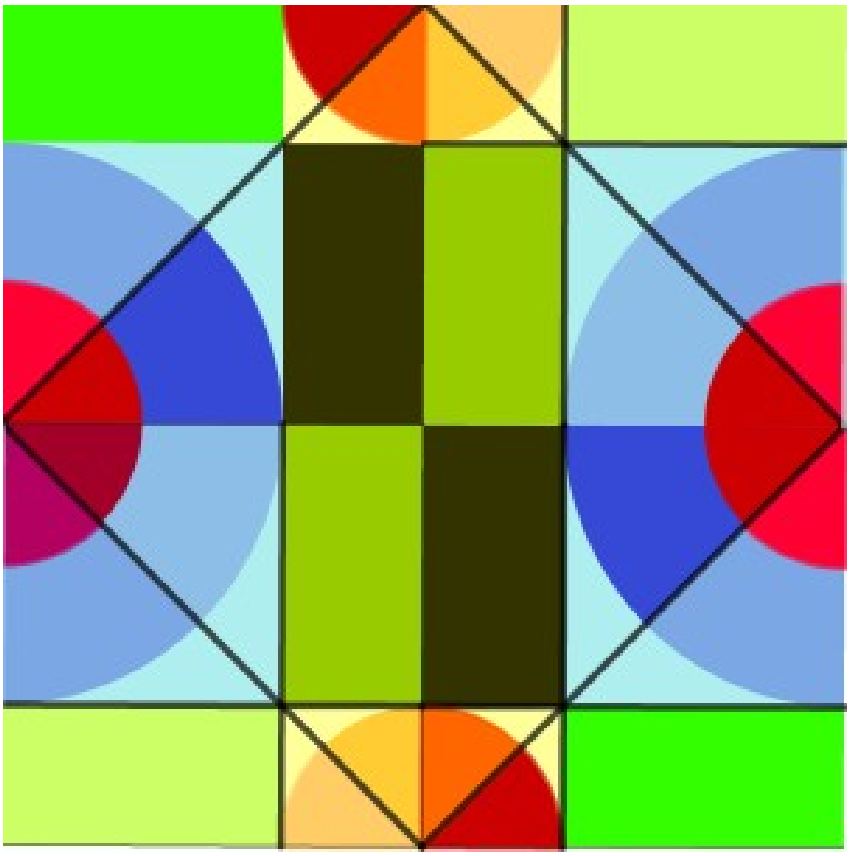
Tracés (voir programme de construction en annexe 9), coloriages, affichage.
Dans une précédente expérimentation, le professeur avait fait afficher les modules sur une armoire métallique (plastifiés et bande aimantée collée au dos) pour que les élèves puissent aller les modifier (en changeant les positions des modules), en entrant ou sortant de classe.

Petit bilan de ressenti : tous les élèves sans exception ont été très enthousiastes et actifs.
L'enseignante de la classe était ravie de ces deux séances où les élèves ont beaucoup réfléchi, argumenté entre eux, même pour certains qui d'habitude sont plutôt en difficulté ou en retrait etc... Elle a beaucoup apprécié qu'ils puissent réutiliser ce qu'ils ont appris (vocabulaire, nature des figures géométriques, sens de la multiplication, division ou multiples) dans un contexte décalé.
Nous pensions qu'1h15 sans pause allait être un peu long en terme de concentration, mais finalement ça n'a posé aucun problème, ils n'ont pas décroché (à part à un moment pour un groupe qui pensait avoir fini, mais dès qu'on les a relancés, ils ont repris l'activité jusqu'à la fin).

Annexes travail fait en CM2 et 6ème

Annexe 6 : *Page projetée aux élèves de CM2 en début de séance*





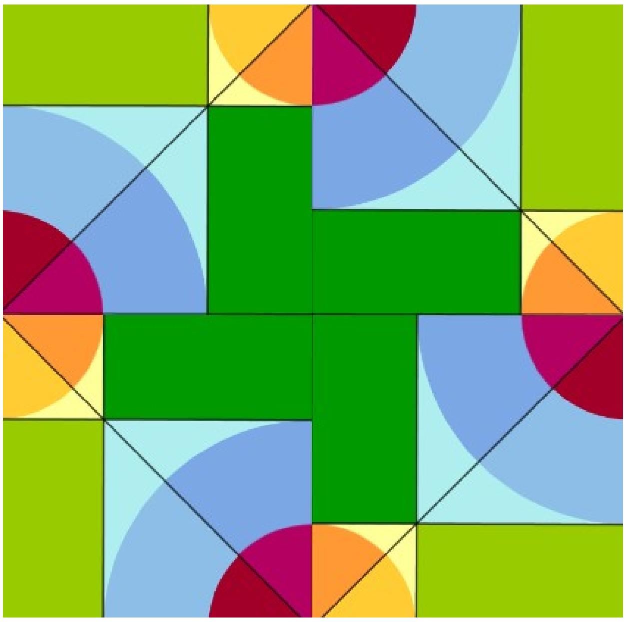
Annexe 7 : *Tableau classement vocabulaire.*

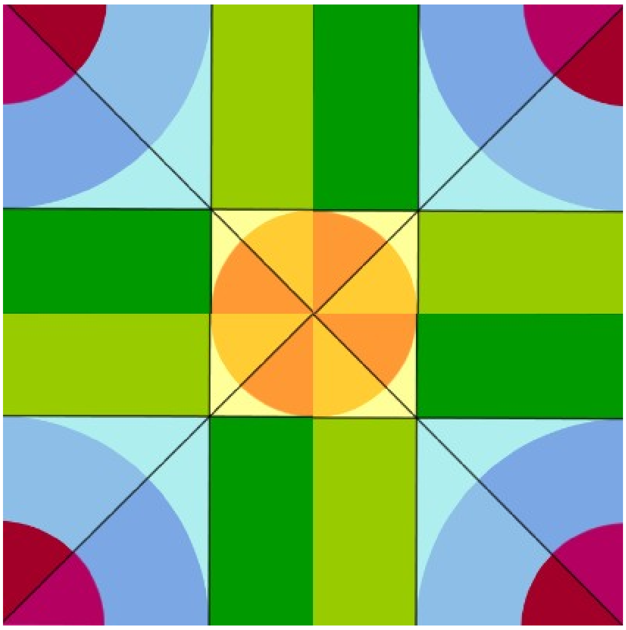
Vocabulaire **mathématique**	Vocabulaire **artistique**	Autre vocabulaire

Vocabulaire **mathématique**	Vocabulaire **artistique**	Autre vocabulaire

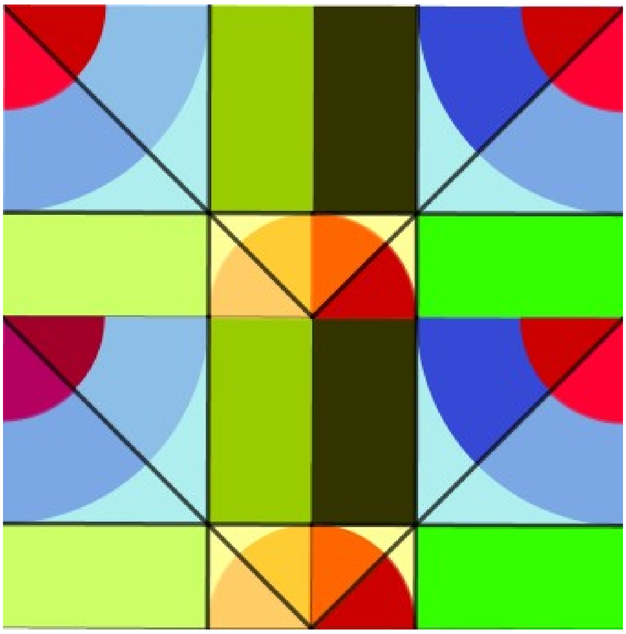
Vocabulaire **mathématique**	Vocabulaire **artistique**	Autre vocabulaire

Annexe 8 : Page distribuée aux élèves





D'après une
œuvre
de
Charles
CHIRINIAN

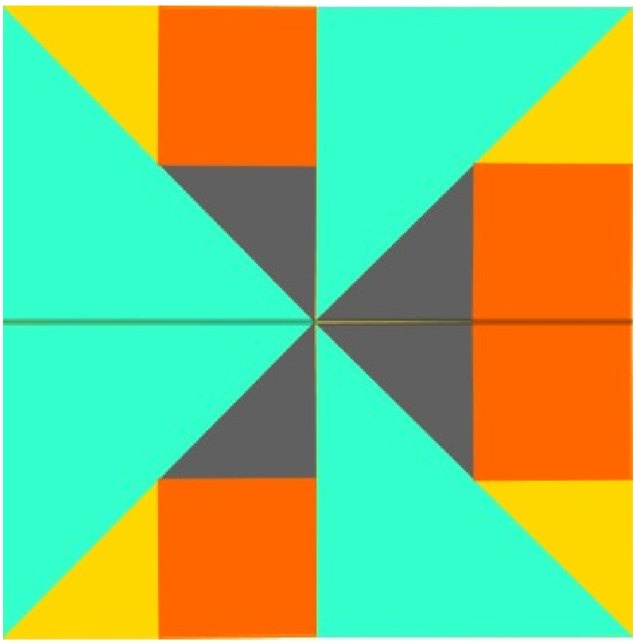


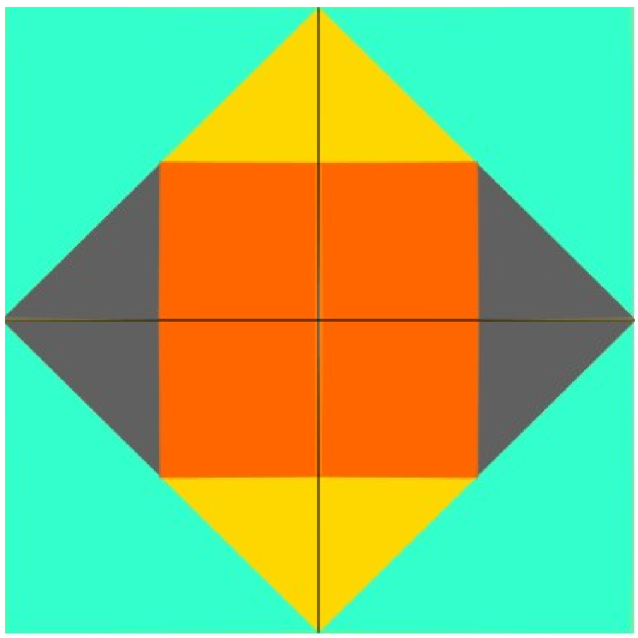
Annexe 9 : *Programme (simplifié) de construction pour le module d'un tableau d'après C. Chirinian*

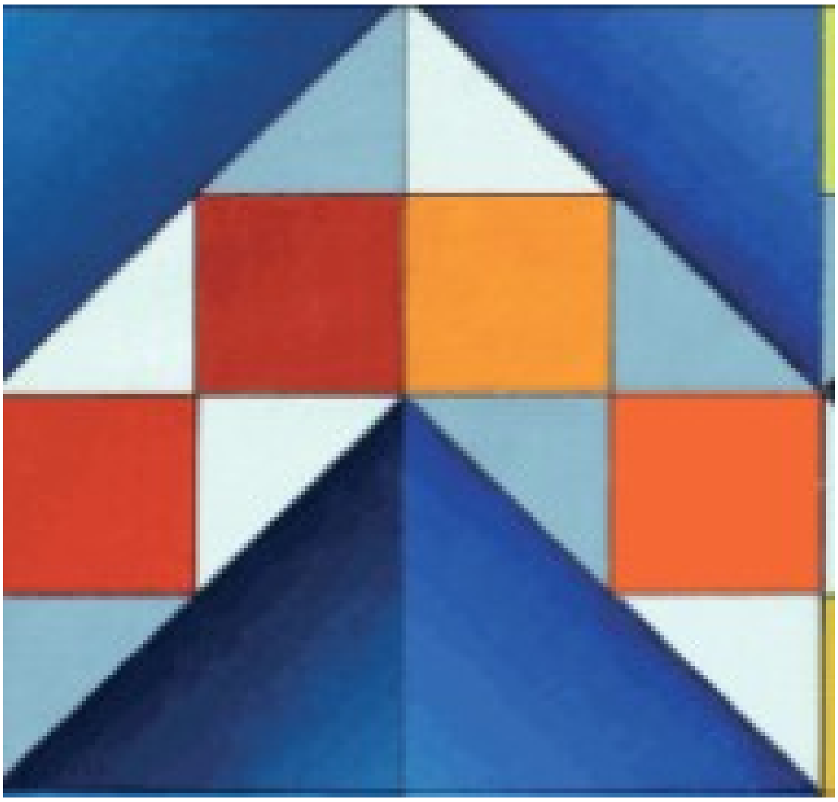
Construire un carré ABCD de 12 cm de côté.
Partager chaque côté en 3 parts égales.
Marquer sur ces repères de tiers, dans l'ordre, les points E et F sur le côté [AB], G et H sur le côté [BC], I et J sur le côté [CD] et K et L sur le côté [DA].
Tracer un quart de cercle de centre A en prenant pour le rayon le premier tiers de AB.
En gardant le même rayon (la même ouverture de compas), tracer un quart de cercle de centre C.
Tracer un quart de cercle de centre A passant par F et K.
Tracer les segments [FI] et [HK] et la diagonale [AC].

On peut aussi donner juste les deux premières phrases pour qu'ensuite les élèves s'inspirent du modèle.

Annexe 10 : Autres exemples d'œuvres de Charles Chirinian (non expérimentées), également susceptibles d'être exploitées en classe.







Lexique

Ces définitions de mots d’usage courant ne prétendent pas être universelles.

Mathématiques	Arts Plastiques
Solide	
(substantif) Euclide : « est solide ce qui possède longueur et largeur et profondeur, et la limite d'un solide est une surface » Dictionnaire : Figure (ou objet) à trois dimensions, limitée par une surface fermée, à volume mesurable. On confond en général le solide et la surface qui le délimite.	Terme peu ou pas utilisé comme substantif. Parfois comme adjectif (qualité physique). Figure à trois dimensions, limitée par une surface fermée, à volume mesurable.
Volume	
Grandeur qui mesure l' « occupation » d'un objet dans l'espace. En cycle 3, souvent en lien avec la contenance d'un objet.	Objet dont on peut faire le tour.
Espace	
Peu utilisé en tant que tel en collège. Apparaît dans l'expression « géométrie dans l'espace ». Dans le secondaire, l’espace est toujours tridimensionnel.	L'espace peut être bidimensionnel ou tridimensionnel, il peut être un espace littéral ou suggéré, il peut être matériel ou immatériel, il peut être réel ou virtuel.
Plan	
Surface contenant entièrement toute droite joignant deux de ses points. Un plan est une surface plate illimitée, munie de notions d’alignement, d’angle et de distance, et dans laquelle peuvent s’inscrire des points, droites, cercles et autres figures planes usuelles. Il sert ainsi de cadre à la géométrie plane, (Wikipédia).	1. Photo et cinéma, taille des plans : Plan d'ensemble : paysage ou cadrage très large. Plan général : sujet dans son environnement. Plan moyen : personnages en pied. Plan américain : cadrage à mi-corps. Plan rapproché, serré : personnages cadrés à la hauteur des épaules, ou surface du corps ou proportions d'un objet équivalentes. Gros plan, très gros plan : parties de plus en plus détaillées du sujet. 2. Les différents plans d'une image : chacune des surfaces planes, perpendiculaires à la direction du regard (généralement verticales), représentant les profondeurs, les éloignements dans une scène réelle ou figurée en perspective (dessin, peinture, photo, cinéma).

Profondeur	
N'a pas de sens particulier en mathématiques. Un pavé est caractérisé par sa largeur, sa longueur et sa hauteur.	Suggestion d'un espace à trois dimensions sur un support qui n'en a que deux. Profondeur rendue par la perspective, le trompe-l'œil, par la couleur. Perspective, profondeur d'un paysage.
Représentation	
Exemple : Représentation graphique d'une fonction. Un des moyens de comprendre un objet ou une notion.	Représenter c’est présenter une nouvelle fois ; c’est donc donner à voir à travers des moyens plastiques notre réalité. La représentation est liée à la figuration ; celle-ci peut être réaliste, idéale, imaginaire…

Bibliographie-webographie

Livres

- Francisco Martin Casalderrey, *La mystification des sens : l'art sous le regard des mathématiques* (Éditions Le monde est mathématique)
- Philippe Comar, *La perspective en jeu* (Éditions Gallimard)
- Dennis Favennec, *Douce perspective* (Éditions Ellipses)
- Jean-Claude Fozza, *Petite fabrique de l'image* (Éditions Magnard)
- Philippe Mignon, *Les secrets d'un miroir* (Éditions Actes Sud Junior)
- Erwin Panofsky, *La perspective comme forme symbolique* (Éditions de Minuit)
- Vitruve *: les dix livres de l'architecture* (Éditions Errance)

Revues

- Les Cahiers de Science et Vie *:*
  - *n° 55 février 2000 : Ce que les Grecs ont inventé*
  - *n° 59 octobre 2000 : Les grandes inventions de la géométrie*
  - *n° 71 octobre 2002 : Le monde des mille et une nuits ; le génie arabe*
- Revue Tangente *:*
  - *Hors Série n° 23 : Maths et arts plastiques : géométrie de la création*
  - *Hors Série n° 35 : Les transformations : de la géométrie à l'art*
- Revue Hypercube *Février-Mars 2002 : La perspective dans la poche avec le Kangourou !*
- *Le monde des pavages. Les voir et les faire. ACL, Les éditions du Kangourou*

Quelques sites web et références en ligne

- La camera obscura et l'évolution des idées « lumineuses » *:*
  www.cdsp.qc.ca › FichesAccompagnement_ModuleCameraObscura
- À propos de Charles Chirinian :
  http://www.fondation-engelberts.org/soutiens-recents/peinture/charles-chirinian-peintre/
- À propos de Georges Rousse *: https://www.georgesrousse.com/*
- À propos de Felice Varini *:http://www.varini.org/*
- À propos des flipbooks : *http://www.flipbook.info/*

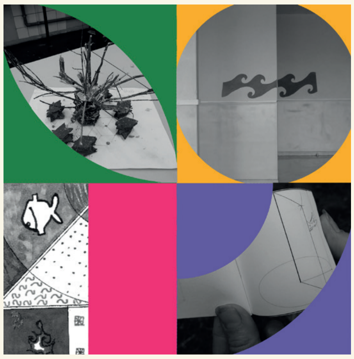
Pour suivre nos activités

- La page du groupe sur le site de l'IREM d'Aquitaine
  https://math-interactions.u-bordeaux.fr/IREM/Groupes/Arts-et-mathematique

- **N'hésitez pas à nous contacter ! *irem.aquitaine@u-bordeaux.fr***

DE L'ART ET DES MATHEMATIQUES DANS NOS CLASSES.

Des activités où les mathématiques sont sources d'expression créatrice...



Brochure du groupe Arts et Mathématiques de l'IREM d'Aquitaine 2020

Cette brochure est l'aboutissement de six années de travail conjoint entre collègues de mathématiques et d'arts plastiques du groupe Arts et Mathématiques de l'IREM d'Aquitaine. Ce groupe cherche à créer des ponts entre ces deux disciplines. Les échanges autour de nos pratiques ont été fructueux. Nos différentes approches nous ont en particulier permis de créer des liens entre expressivité et rationalité.

Cette brochure commence par deux présentations, mathématique et historique, sur la perspective, puis regroupe des activités qui exploitent un travail en cours de mathématiques et d'arts plastiques.

Les thèmes mathématiques abordés sont très divers : ils vont de l'étude des différentes perspectives au dénombrement en passant par le théorème de Thalès, les pavages et les transformations du plan. En arts plastiques, c'est l'occasion de parler de l'histoire de la perspective, d'art contemporain, d'œuvres in situ, de flipbook, de cinéma, etc...
Ces activités ont été testées dans différentes classes de collège et certaines en primaire. Les consignes, le déroulement et les réactions des élèves sont décrits de façon précise.
Les élèves ont réalisé un flipbook, des œuvres d'une grande sensibilité à partir de constructions mathématiques, des expositions in situ dans leur établissement, et ont utilisé un perspectographe. Ils nous ont montré que les mathématiques peuvent être source d'expressivité.
Vous trouverez dans la brochure des exemples de leurs productions, mathématiques et artistiques.
La qualité de leurs réalisations a été motivante pour les élèves autant que pour nous !

Auteurs de la brochure : Marie-Line Chabanol, Dominique Frin, Anne Mongaston, Jean-Charles Pourtier, Suzanne Tison.
Ont également collaboré à cette brochure : Christine Castéran, Thomas Darriet, Catherine Desnavres, Denis Favennec, Nelly Faure, Mahmoud Khiari, Josiane Lorblanché, Cathy Souladié, Karine Szabo-Detchart, Isabelle Thévenon.
Couverture : Andréa Harcourt

Mots-clés : arts plastiques, histoire de l'art, œuvres d'arts, perspectographe, perspective, flipbook, pavages, théorème de Thalès, proportionnalité, collège.

ISBN : 978-2-85633-070-8
EAN : 9782856330708

Unité de formation **Mathématiques et interactions**

université de BORDEAUX

IREM AQUITAINE