Ensembles et logique

Groupe REMSup

Année scolaire 2018-2019

• ◯ • ◯ •

Table des matières

Chapitre 1

Les ensembles

Sommaire

Préambule

Nous présentons quelques occasions de travailler les ensembles au lycée et au début d'études scientifiques post bac.

Ce sont en général des exemples de petits exercices pour donner une idée d'un type de travail. Ils sont largement adaptables.

Dans le premier paragraphe, nous nous sommes d'abord concentrés sur la compréhension de l'écriture d'un ensemble qui peut prendre diverses formes puis sur le travail de passage pour un ensemble, d'une écriture à une autre.

Viennent ensuite des exemples d'exercices sur la comparaison d'ensembles.

Les deux paragraphes suivants donnent des pistes pour mettre plus en évidence la présence d'ensembles à l'occasion de démonstrations ainsi que dans les représentations graphiques.

• ○ • ○ •

Nous partons de la définition intuitive d'ensemble comme une collection d'éléments.

On utilise couramment trois façons de décrire un ensemble,

- en donnant tous ses éléments entre accolades, on parle alors de définition ***en extension***, par exemple $\{-2, 2\}$;
- en donnant une propriété qui caractérise les éléments de cet ensemble, on parle alors de définition ***en compréhension***, par exemple $\{n \in \mathbb{Z} \mid n^2 = 4\}$;
- en donnant la façon de construire ses éléments, par exemple $\{2n \ , \ n = 1 \text{ ou } n = -1\}$.

Nous avons décidé d'adopter la notation ▷

▷ « **|** » pour la définition en compréhension, $\{x \in A \mid P(x)\}$ désigne l'ensemble des x qui sont déjà éléments de A *tels que* la condition P soit vérifiée pour ces x ;

▷ « , » lorsqu'on donne la façon de construire les éléments, $\{F(x) \ , \ x \in A\}$ désigne l'ensemble de tous les éléments qui s'écrivent sous la forme $F(x)$ *avec* x élément de A.

Remarques :

1. Dans le cas d'une définition en compréhension, il est souhaitable de privilégier l'écriture $\{x \in A \mid P(x)\}$ où l'ensemble A « ambiant » est explicitement spécifié à l'écriture $\{x \mid P(x)\}$; cela a l'avantage de lever l'ambiguïté dans certaines situations, par exemple :

$$\{x \in \mathbb{N} \mid 2x = 1\} \quad \text{et} \quad \{x \in \mathbb{R} \mid 2x = 1\}\,.$$

et encourage la démarche de rédaction « Soit $x \in A$ tel que... ».

2. Au lycée, la notation $\{x \in A \mid P(x)\}$ pourra être remplacée par $\{x \in A \text{ tel que } P(x)\}$ si l'on pense que les élèves ont du mal à comprendre le sens de la barre verticale.

Le paradoxe de Russell :

Extrait de « Cercles vicieux et paradoxes logiques », Eric Charpentier et CultureMath-IREM de Bordeaux.

(...) Dans les premières versions de la théorie des ensembles (qualifiés aujourd'hui de naïves) on pensait pouvoir toujours définir « l'ensemble X des objets x qui satisfont à la propriété P » :

$$X = \{x \mid P(x)\}.$$

Russel (1903) trouve un paradoxe en considérant « l'ensemble des ensembles qui ne sont pas éléments d'eux-mêmes » :

$$X = \{x \mid x \notin x\}.$$

Est-ce que X est élément de lui-même ? On voit que la question conduit à la contradiction : $X \in X \Leftrightarrow X \notin X$.

Zermelo résout le problème en 1908 en formulant une théorie des ensembles où la définition par compréhension est limitée aux objets d'un ensemble préexistant : pour tout ensemble A dont l'existence est déjà acquise et toute propriété définie pour les éléments de A, on peut définir l'ensemble :

$$X = \{x \in A \mid P(x)\}.$$

Dans la théorie de Zermelo, le paradoxe de Russell disparaît ; où plutôt, il devient une preuve que l'ensemble $X = \{x \in A \mid x \notin x\}$ n'est pas un élément de A : car si on suppose que $X \in A$ (et seulement sous cette supposition) on retrouve la contradiction $X \in X \Leftrightarrow X \notin X$, et la seule échappatoire est que $X \notin A$. En particulier, il n'y a pas d'ensemble de tous les ensembles (car en prenant pour A l'ensemble de tous les ensembles l'échappatoire $X \notin A$ disparaîtrait). (...)

• ○ • ○ •

I Écritures d'un ensemble. Comparaison de deux ensembles

I.1 Comprendre l'écriture d'un ensemble

Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé.

▷ ***niveau lycée*** *:* On note $E = \{M(x,y) \in \mathcal{P} \mid x = 1 \text{ et } y \in \{2,3,4\}\}$, représenter E.
Même travail pour $F = \{M(x,y) \in \mathcal{P} \mid x \in \{0,2\} \text{ et } y \in \{-1,3\}\}$.

décliné au niveau post bac *:* Représenter les ensembles suivants :

1. $\{1\} \times \{2,3,4\}$
2. $\{0,2\} \times \{-1,3\}$

• ○ • ○ •

▷ ***niveau lycée et post bac*** *:*

- Décrire l'ensemble $\{2p+1\ ,\ p \in \mathbb{N}\}$.
  Écrire d'une manière analogue l'ensemble des entiers multiples de 6.

- Soit $E = \{a^2+b^2+c^2\ ,\ (a,b,c) \in \mathbb{N}^3\}$, la proposition « *Tout entier naturel est somme de trois carrés d'entiers.* » correspond à l'égalité de E avec quel ensemble ?
  Cette proposition est-elle vraie ou fausse ?

  Remarque : *en post bac on pourra demander de traduire en terme d'égalité d'ensembles sans donner E.*

• ○ • ○ •

▷ *Il convient de mettre en évidence qu'un ensemble ne se réduit pas à la propriété qui le définit : l'ensemble est la collection « en vrac » des éléments sélectionnés par la propriété.*

niveau lycée et post bac *:* Comparer les ensembles :

$$\{n \in \mathbb{N} \mid 2^n = 1\} \quad ; \quad \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leqslant 0\} \quad ; \quad \left\{a+b\ ,\ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } a = -b\right\}.$$

• ○ • ○ •

▷ *Plus anecdotique, lorsqu'un problème met en jeu un paramètre littéral et qu'il s'agit d'écrire la solution sous forme d'ensemble, certains étudiants se trouvent très embarrassés sur la manière de gérer le paramètre.*

niveau post bac *:*

- Par exemple avec les systèmes linéaires : Soit $a \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ du système :
$$\left\{ x + y = a \right.$$
  est
$$\mathscr{S} = \{(t, a-t)\ ,\ t \in \mathbb{R}\}\ ? \quad \mathscr{S} = \{(t, a-t)\ ,\ a \in \mathbb{R}\}\ ? \quad \mathscr{S} = \left\{(t, a-t)\ ,\ (t,a) \in \mathbb{R}^2\right\}\ ?$$
  Remarque : *au niveau lycée, on pourra demander d'écrire $\mathscr{S}$ en compréhension :*
$$\mathscr{S} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = a\}$$

- Avec les équations différentielles. Soit $\omega \in \mathbb{R}_+^*$, l'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de l'équation différentielle :
$$y'' + \omega^2 y = 0$$
  est
$$\mathscr{S} = \left\{t \mapsto A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)\ ,\ (A,B) \in \mathbb{R}^2\right\}\ ? \quad \mathscr{S} = \{t \mapsto A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)\ ,\ \omega \in \mathbb{R}\}\ ?$$

• ◯ • ◯ •

I.2 Domaine de définition d'une fonction

La détermination du domaine de définition d'une fonction numérique est l'occasion la plus commune de se confronter à l'écriture d'ensembles.

Par exemple, trouver le domaine de définition D_f de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{1-x^2}$ nécessite de traduire les équivalences

$$x \in D_f \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 \neq 1 \quad \Longleftrightarrow \quad x \neq -1 \text{ et } x \neq 1$$

en égalités ensemblistes $D_f = \left\{x \in \ \mathbb{R} |\ x^2 \neq 1\right\} = \{x \in \ \mathbb{R} |\ x \neq -1 \text{ et } x \neq 1\}$ que l'on préfèrera ensuite écrire sous les formes :

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \ \text{ puis } \ D_f =]-\infty, -1[\cup]-1, 1[\cup]1, +\infty[.$$

Plus tard, dès l'entrée dans l'enseignement supérieur, le domaine de définition $D_{\tan}$ de la fonction tangente pose souvent des problèmes aux étudiants lorsqu'il s'agit de manipuler les expressions :

$$D_{\tan} = \left\{\theta \in \mathbb{R} \mid \theta \not\equiv \frac{\pi}{2} \mod \pi\right\} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left] -\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right[.$$

Plus généralement, les ensembles prennent une place incontournable dans la rédaction mathématique et il semble ainsi pertinent de voir quelques occasions de travailler ce thème au lycée et au début d'études scientifiques post-bac.

• ◯ • ◯ •

I.3 Passer d'une écriture à une autre

A l'occasion il peut être intéressant de mettre en évidence que « résoudre une équation » revient à passer de l'écriture en compréhension d'un ensemble à son écriture en extension.

niveau lycée et post bac *:*

▷ *En terminale, actuellement S spécialité et spécifique, à venir mathématiques expertes* :

- $z_n = |z_n| \mathrm{e}^{n\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$ d'image A_n avec $n \in \mathbb{N}$.
  Déterminer les valeurs de n pour lesquelles A_n est un point de l'axe des imaginaires.

  En fonction de la démarche de l'élève, les solutions sont :
  soit $S_1 = \{3 + 12k\ ,\ k \in \mathbb{N}\} \cup \{-3 + 12k\ ,\ k \in \mathbb{N}^*\}$;
  soit $S_2 = \{3 + 6k\ ,\ k \in \mathbb{N}\}$.

  On pourra faire démontrer que les ensembles S_1 et S_2 sont égaux par double inclusion

  Procéder par double-inclusion : Si $A \subset B$ et $B \subset A$ alors $A = B$

- Le plan est muni d'un repère orthonormé. Décrire l'ensemble des points $\{M(z), z \in A\}$ avec
  1. $A = \{z \in \mathbb{C} \mid z + |z| = 0\}$;
  2. $A = \{z \in \mathbb{C} \mid Im(z) = 0\}$.

- On considère les sous-ensembles de $\mathbb{R}$, $E = \{x \in]0; +\infty[\ \mid\ \ln(x) < 7\}$ et $F = \{x \in \mathbb{R} | x < \mathrm{e}^7\}$.

1. Écrire E et F sous-forme d'intervalles.
2. Les ensembles E et F sont-ils égaux ?

- Dans $\mathbb{R}$, on considère le sous-ensemble $E = \left\{2u + 3v\ ,\ (u, v) \in \mathbb{Z}^{*2}\right\}$

1. E contient-il des éléments ?
2. De quel ensemble de nombres, E est-il un sous-ensemble ?
3. E admet-il un plus petit élément ?

Variante : a et b sont des entiers naturels premiers entre eux.
On peut considérer $E = \left\{au + bv\ ,\ (u, v) \in \mathbb{Z}^2\right\} \cap \mathbb{N}^*$.

- *Avec un peu de combinatoire :* On note E l'ensemble des listes (x_1, x_2, x_3, x_4) dont les éléments x_i sont égaux à 0 ou 1. Décrire les ensembles suivants :

$$A = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in E \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4\}\ \ ;\ \ B = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in E \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2\}$$

$$C = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in E \mid x_1x_2x_3x_4 = 0\}\ \ ;\ \ D = \{(x, 1 - x, x, 1 - x)\ ,\ x \in \{0, 1\}\}$$

`Réponses proposées :` « `l'ensemble des listes de` E `contenant autant de` 0 `que de` 1 » ; « `l'ensemble des listes de` E `contenant au moins un zéro` » ; « `le singleton` $\{(1, 1, 1, 1)\}$ » « $\{(0, 1, 0, 1), (1, 0, 1, 0)\}$ ».

• ◯ • ◯ •

▷ *Equations et inéquations en seconde*

- On considère les deux équations

$$(E_1) \quad x^2 = 3x \qquad \text{et} \qquad (E_2) \quad 2x - 6 = 0$$

1. Résoudre les deux équations dans $\mathbb{R}$ et écrire les ensembles de solutions S_1 et S_2 des deux équations.
2. S_1 et S_2 sont-ils égaux ?

- On considère l'équation $(E_5) : x + \sqrt{1 - x^2} = 1$. On note (S_5) l'ensemble des solutions réelles de (E_5).

  S_5 est-il égal à $\{0, 1\}$ ou à $\{-1, 0, 1\}$?

- Écrire comme intervalles ou réunions d'intervalles les sous-ensembles de $\mathbb{R}$ suivants. Faire un dessin.

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 1| \leqslant 2\} \qquad B = \{y \in \mathbb{R} \mid |y + 1| > 3\}$$
$$C = \{z \in \mathbb{R} \mid z^2 + z \leqslant 6\} \qquad D = \{w \in \mathbb{R} \mid \tfrac{w+1}{w-2} \leqslant 0\}$$

Aide : *Il serait « efficace » de considérer le complémentaire de B.*

• ◯ • ◯ •

▷ *Avec les équations de droites*

Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère.

1. Soient les ensembles $D = \{M(x, y) \in \mathcal{P} \mid y = 2x + 1\}$ et $D_1 = \{M(t, 2t + 1) \in \mathcal{P}\ ,\ t \in \mathbb{R}\}$, montrer que $D = D_1$.
   Quelle est sa nature géométrique ? Le représenter.

2. Soit $D_2 = \{M(\frac{s-1}{2}, s) \in \mathcal{P}\ ,\ s \in \mathbb{R}\}$. Indiquer si D_2 a un lien avec D. (*inclusion, égalité ?*)

3. Soit $D_3 = \{M(t^2, 2t^2+1) \in \mathcal{P}\ ,\ t \in \mathbb{R}\}$. Indiquer si D_3 a un lien avec D (*inclusion, égalité ?*) et le représenter.

Une adaptation possible post-bac : Le plan est muni d'un repère orthonormé.

1. Soient les ensembles $D = \{M(x,y) \in \mathcal{P} \mid y = \cos(x)\}$ et $D_1 = \{M(t, \cos(t))\ ,\ t \in \mathbb{R}\}$, montrer que $D = D_1$ et le représenter.

2. Soit $D_2 = \{M(x+2\pi, \cos(x)) \in \mathcal{P}\ ,\ x \in \mathbb{R}\}$. Indiquer si D_2 a un lien avec D. (*inclusion, égalité ?*)

3. Soit $D_3 = \{M(\arccos(y), y) \in \mathcal{P}\ ,\ y \in [-1,1]\}$. Indiquer si D_3 a un lien avec D (*inclusion, égalité ?*) et le représenter.

• ○ • ○ •

I.4 Comparer deux ensembles

Comme vu dans le paragraphe précédent, passer d'une écriture à une autre nécessite de comparer deux ensembles pour montrer qu'ils sont égaux. Nous mettons ici des exemples qui insistent plus sur la comparaison en tant que telle (*inclusion, égalité*).

▷ ***niveau lycée et post bac*** : *Equations et inéquations*

- On considère l'équation

$$(E_3) \quad 2x = \sqrt{x^2+1}$$

  On considère l'ensemble écrit en compréhension $E = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = \frac{1}{3}\}$ et S_3 l'ensemble de solutions de (E_3).

  1. Quels sont les éléments qui composent l'ensemble E ?
  2. Laquelle de ces trois propositions est correcte : $S_3 \subset E$, $E = S_3$ ou $E \subset S_3$?

- On considère l'inéquation à résoudre dans $[-\pi;\pi]$ et S_4 l'ensemble de solutions sur cet intervalle,

$$(E_4) \quad 1 - 2\sin(x) \geqslant 0$$

  On considère l'ensemble $F = [0; \frac{\pi}{6}] \cup [\frac{5\pi}{6}; \pi]$

  1. F et S_4 sont-ils égaux ?
  2. L'un est-il inclus dans l'autre ?

• ○ • ○ •

▷ ***niveau lycée et post bac*** : *Avec les fonctions trigonométriques*

- On a demandé à l'élève λ et à l'élève μ de résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation trigonométrique suivante :

$$\cos(x) + \sin(x) = 1.$$

Ceux-ci ont proposé les démarches suivantes :

Pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\cos\left(a-\frac{\pi}{4}\right) &= \cos(a)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+\sin(a)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos(a)+\sin(a))\end{aligned}$$

Partant de ce constat on écrit :

$\cos(x)+\sin(x)=\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ d'où :

$$\begin{aligned} & \cos(x)+\sin(x)=1\\ \iff & \sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=1\\ \iff & \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}=\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\\ \iff & \left\{\begin{array}{ll} & x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\\ \text{ou} & x-\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{4}+2k'\pi, k'\in\mathbb{Z}\end{array}\right.\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions cherché est donc :

$$\left\{\frac{\pi}{2}+2k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{2k'\pi \mid k'\in\mathbb{Z}\right\}$$

Copie de l'élève λ

On élève au carré :

$$\begin{aligned} & \cos(x)+\sin(x)=1\\ \iff & (\cos(x)+\sin(x))^2=1\\ \iff & \underbrace{\cos^2(x)+\sin^2(x)}_{=1}+2\sin(x)\cos(x)=1\\ \iff & 2\sin(x)\cos(x)=0\\ \iff & \sin(x)=0 \text{ ou } \cos(x)=0\end{aligned}$$

Or $\cos(x)=0 \iff x=\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$,
et $\sin(x)=0 \iff x=k'\pi, k'\in\mathbb{Z}$.

On obtient l'ensemble des solutions :

$$\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{k'\pi \mid k'\in\mathbb{Z}\right\}$$

Copie de l'élève μ

1. Les deux solutions sont incompatibles, pourquoi ? *Il y a donc au moins un des deux élèves qui a fait une erreur.*
2. Étudier les raisonnements des deux élèves et corriger la ou les erreurs. Préciser l'ensemble des solutions attendu.

• ○ • ○ •

- Soient $A=\{x\in\mathbb{R} \mid \cos(x)=1\}$ et $B=\{x\in\mathbb{R} \mid \sin(x)=0\}$.
  1. A t-on $A\subset B$, $B\subset A$?
  2. Mêmes questions pour $C=\{2k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$ et $D=\{k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$.
  3. Lequel des ensembles C ou D est égal à A ?
  4. Lequel des ensembles C ou D est égal à B ?

• ○ • ○ •

▷ *En lien avec les représentations graphiques :*

Dans $\mathbb{R}^2$, on considère les ensembles $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y\geqslant 0\}$ et $F=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | xy\geqslant 1,\ x\geqslant 0\}$.

1. F est-il inclus dans E ?
2. F et E sont-ils égaux ?
3. Représenter graphiquement E et F.
4. On considère l'ensemble $G=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid xy=1\right\}$ déterminer l'ensemble $F\cap G$.

• ○ • ○ •

II Travailler la démonstration avec les ensembles

▷ *En classe de première pour conjecturer et en terminale pour démontrer.*

Soit la suite (u_n) définie par : pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1 - \dfrac{1}{u_n}$ et $u_0 = 2$.
On considère les deux ensembles $V = \left\{-1, \frac{1}{2}, 2\right\}$ et $E = \{u_n\ ,\ n \in \mathbb{N}\}$.

1. Prouver que $V = E$.

Une solution

Les calculs des quatre premiers termes donnent $u_1 = \dfrac{1}{2}$, $u_2 = -1$, $u_3 = 2$.

▷ Soit $a \in V$. D'après les premiers termes, il est évident que $a \in E$ et donc $V \subset E$.

▷ Soit $a \in E$, a est un terme de la suite (u_n). On constate que u_0, u_1 et u_2 sont des éléments de V et pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+3} = 1 - \dfrac{1}{u_{n+2}} = 1 - \dfrac{1}{1 - \frac{1}{u_{n+1}}} = -\dfrac{1}{u_{n+1} - 1} = \ldots = u_n$.
À partir de là, on « escroque » les élèves ou on met en place un **raisonnement par récurrence** qui renvoie cet exercice en classe de Terminale en prouvant que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{3n} = 2$, $u_{3n+1} = \dfrac{1}{2}$ et $u_{3n+2} = -1$ ou plus précisément, on démontre :

$$\mathcal{P}(n)\ :\ u_n \in V$$

avec une disjonction de cas.
On prouve donc que $a \in V$ et $E \subset V$.
En vertu de la démonstration par double inclusion, $V = E$.

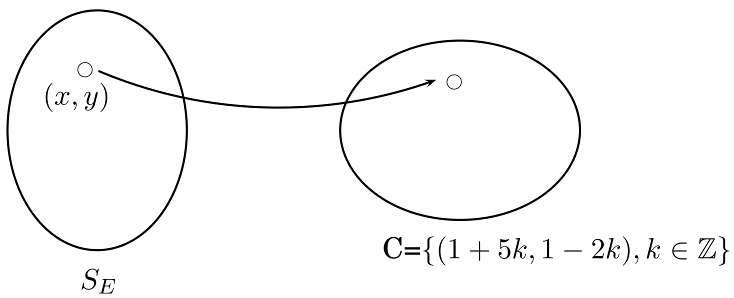
2. Que traduit l'égalité $V = E$ pour les termes de la suite (u_n) ?

• ○ • ○ •

▷ ***niveau lycée terminale, actuellement S spécialité, à venir mathématiques expertes*** *:*
Analyse-synthèse pour trouver un ensemble de solutions
Déterminer les couples d'entiers relatifs (x, y) solutions de $2x + 5y = 7$ (E) (*équation diophantienne*)

Une solution

On note S_E l'ensemble des solutions de (E).



(suite)

ANALYSE ▷ Soit $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ une solution de (E). (légitimée par le le théorème de Bézout)
On parvient, moyennant l'utilisation du théorème de Gauss, à démonter que $(x, y) = (1 + 5k, 1 - 2k)$ avec $k \in \mathbb{Z}$ On a prouvé que $S_E \subset C$.

SYNTHÈSE ▷ Soit un couple d'entiers de la forme $(x, y) = (1 + 5k, 1 - 2k)$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
On a $2x + 5y = 2(1 + 5k) + 5(1 - 2k) = 2 + 10k + 5 - 10k = 7$,
donc $\forall k \in \mathbb{Z}, (1 + 5k, 1 - 2k)$ est solution de (E). On a prouvé que $C \subset S_E$.

• ○ • ○ •

III Ensembles et représentations graphiques

▷ ***niveau lycée et post bac** : Les représentations graphiques ne sont pas vues par les élèves ou étudiants comme des ensembles. Le but des exercices qui suivent est d'essayer de leur faire prendre conscience de cela.*
Dans ce qui suit le plan $\mathcal{P}$ est supposé muni d'un repère orthogonal.

- Le tableau ci-dessous peut donner lieu à des exercices du type « une forme est donnée, trouver l'autre » ou à de petites questions à ajouter dans des exercices déjà existants. Il pourra aussi être intéressant de demander des représentations graphiques.

Langage ensembliste	Langage géométrique ou algébrique
$D = \{M(x, y) \in \mathcal{P} \mid y = -2x + 1\}$	La droite D d'équation $y = -2x + 1$
$D = \{M(x, -2x + 1) \in \mathcal{P}\ ,\ x \in \mathbb{R}\}$	La droite D d'équation $y = -2x + 1$
$E = \{M(x, y) \in \mathcal{P} \mid y = \sqrt{x}\}$	La courbe représentative de la fonction racine carrée
$E = \{M(x, \sqrt{x}) \in \mathcal{P}\ ,\ x \in [0, +\infty[\}$	La courbe représentative de la fonction racine carrée
$E = \{M(x, \sqrt{x}) \in \mathcal{P}\ ,\ x \geqslant 0\}$	La courbe représentative de la fonction racine carrée
$E = \{M(x, y) \in \mathcal{P} \mid x \in [-1, 2] \text{ et } y = x^2\}$	La courbe représentative de la fonction carré sur $[-1, 2]$
$E = \{M(x, x^2) \in \mathcal{P}\ ,\ x \in [-1, 2]\}$	La courbe représentative de la fonction carré sur $[-1, 2]$
$E = \{M(x, x^2) \in \mathcal{P}\ ,\ -1 \leqslant x \leqslant 2\}$	La courbe représentative de la fonction carré sur $[-1, 2]$
$A(121, 11) \in \{M(x, y) \in \mathcal{P} \mid y = \sqrt{x}\}$	$\sqrt{121} = 11$
$A \in \{M(x, y) \in \mathcal{P} \mid x \leqslant -1 \text{ et } y \in \mathbb{R}\}$	A a une abscisse inférieure ou égale à -1
$A \in]-\infty, -1] \times \mathbb{R}$	A a une abscisse inférieure ou égale à -1
$A \in \{M(x, y) \in \mathcal{P} \mid -1 \leqslant x \leqslant 2\}$	A a une abscisse comprise entre -1 et 2
$A \in \{M(x, y) \in \mathcal{P} \mid -1 \leqslant x \leqslant 2\}$	A est entre les droites d'équations $x = -1$ et $x = 2$
$B \in \{M(x, y) \in \mathcal{P} \mid x \in \mathbb{R} \text{ et } y \geqslant -1\}$	B a une ordonnée supérieure ou égale à -1
$B \in \mathbb{R} \times [-1, +\infty[$	B a une ordonnée supérieure ou égale à -1
$B \in \{M(x, y) \in \mathcal{P} \mid x \in \mathbb{R} \text{ et } y \geqslant -1\}$	B est au dessus de la droite d'équation $y = -1$
$N(a, b) \in \{M(x, y) \in \mathcal{P} \mid y \geqslant x^2\}$	$N(a, b)$ est au dessus de la courbe représentative de la fonction carré (il existe un point de la courbe de même abscisse que N et dont l'ordonnée est inférieure à celle de N)

• ○ • ○ •

- *Un autre type d'exercice qui peut être décliné pour arriver aux domaines d'intégration :*

  On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 1$.

  1. Dire si les points $A(-1, 2)$, $B(3, 5)$, $C(5, 0)$, $D(0, 5)$
     - sont sur la courbe représentative de f ;
     - s'ils ne sont pas dessus, préciser s'ils sont au-dessus ou en-dessous.
  2. Quel est le complémentaire de l'ensemble $E = \{M(x, y) \in \mathcal{P} \mid y > x^2 + 1\}$?
  3. Compléter : l'ensemble des points compris entre l'axe des abscisse et la courbe représentative de f est $\{M(x, y) \in \mathcal{P} \mid \ldots\}$.
  4. Représenter l'ensemble $\{M(x, y) \in \mathcal{P} \mid x \notin [-1, 2]\}$. L'écrire comme une union ou une intersection de deux demi-plans.
  5. Représenter l'ensemble $\{M(x, y) \in \mathcal{P} \mid x \in [-1, 2]\}$. L'écrire comme une union ou une intersection de deux demi-plans.
  6. Compléter : l'ensemble des points délimités par les droites d'équation $x = -1$, $x = 2$, l'axe des abscisses et la courbe représentative de f est $\{M(x, y) \in \mathcal{P} \mid \ldots\}$.
  7. Compléter : l'ensemble des points délimités par les droites d'équation $x = -1$, $x = 2$, la droite d'équation $y = 2x$ et la courbe représentative de f est $\{M(x, y) \in \mathcal{P} \mid \ldots\}$.
  8. Compléter : l'ensemble des points délimités par les droites d'équation $x = -1$, $x = 2$, la droite d'équation $y = 2x + 1$ et la courbe représentative de f est $\{M(x, y) \in \mathcal{P} \mid \ldots\}$.

• ○ • ○ •

- *Exercice qui peut être décliné avec un travail algorithmique*

  1. Expliquer ce que fait l'algorithme ci-dessous :
```
def position(x,y):
  a=x**2+1
  if y==a:
    return "sur la courbe"
  else:
    if y>a:
      return "au dessus de la courbe"
    else:
      return "en dessous de la courbe"
```
  2. Ecrire un programme qui permette de décider si un point $M(x, y) \in \mathcal{P}$ est ou n'est pas dans l'ensemble des points compris entre l'axe des abscisse et la courbe représentative de f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 1$.
  3. Ecrire un programme qui permette de décider si un point $M(x, y) \in \mathcal{P}$ est ou n'est pas dans l'ensemble des points délimités par les droites d'équation $x = -1$, $x = 2$, la droite d'équation $y = 2x + 1$ et la courbe représentative de f.

• ○ • ○ •

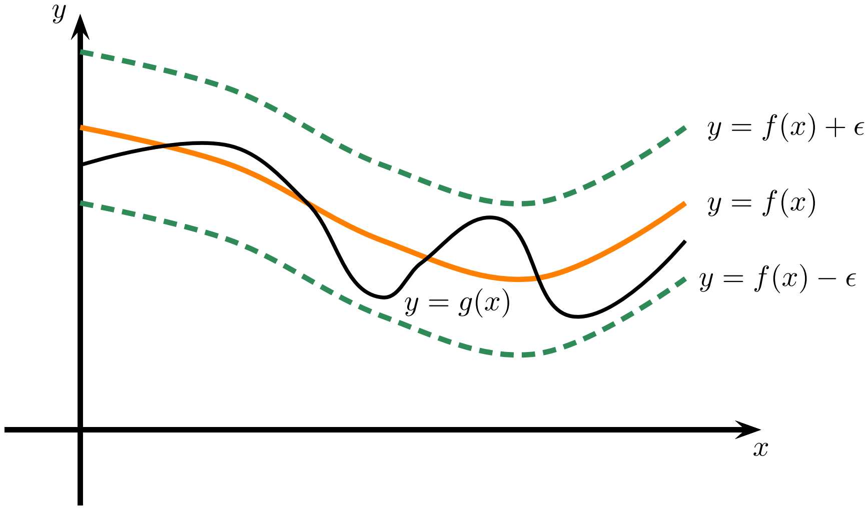
▷ ***niveau post bac*** *: Du dessin à la démonstration... En passant par un ensemble*
En analyse réelle de nombreuses définitions et démonstrations s'appuient sur un dessin d'une région autour du graphe d'une fonction.

Quelques exemples *: les nombreuses définitions de limite ; les sommes de Riemann ; la définition de convergence uniforme ; une démonstration de la propriété : « si une fonction est continue, positive et d'intégrale nulle alors la fonction est nulle »...*

Peu d'étudiants voient une courbe représentative d'une fonction comme un ensemble du plan ce qui complique grandement les questions où il s'agit de traduire l'appartenance d'un point (de son abscisse, de son ordonnée) à une zone délimitée par un graphe de fonction.

Quelques exemples d'exercices :

- *Vers la définition de convergence uniforme.*
  La fonction f est définie sur un intervalle I, sa courbe représentative est donnée dans le graphe ci-dessous.
  Comment décrire l'ensemble des points du plan délimité par les courbes en pointillés ?
  Quelle propriété de la fonction g est illustrée dans ce graphe ?



Réponses : L'ensemble délimité par les courbes en pointillés peut s'écrire :

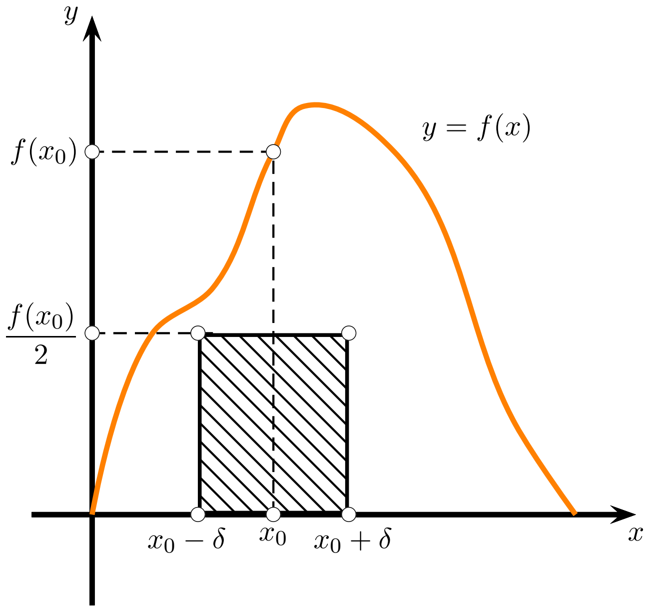
$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in I \text{ et } f(x) - \varepsilon \leqslant y \leqslant f(x) + \varepsilon\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in I \text{ et } |y - f(x)| \leqslant \varepsilon\}.$$

La fonction g vérifie : $\forall x \in I,\ f(x) - \varepsilon \leqslant g(x) \leqslant f(x) + \varepsilon$

• ○ • ○ •

- *En lien avec la propriété des fonctions continues, positives, d'intégrale nulle.*

  Décrire l'ensemble H des points de la zone hachurée ci-dessous.



Réponse :

$$H = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x - x_0| \leqslant \delta \text{ et } 0 \leqslant y \leqslant f(x_0)/2\right\}$$

• ○ • ○ •

Chapitre 2

Les quantificateurs au lycée

Sommaire

Préambule

Dès la classe de seconde, il est spécifié dans les programmes que les élèves apprennent en situation à lire et écrire des propositions contenant une quantification universelle ou existentielle. Nous proposons ici des exercices en lien avec les notions du programme qui permettent de travailler plus spécifiquement les quantificateurs.

I En Seconde

I.1 Le calcul littéral

Le calcul littéral permet de faire prendre conscience des quantificateurs souvent implicites.

Comment regrouperiez-vous ces égalités ?

(1) $2(x-3)^2+4=2x^2-12x+22$ (2) $4x^2-2x+7=4x^2+5$ (3) $x^2+4x-9=(x+2)^2+1$
(4) $3x+5=2(1-2x)+7x+3$ (5) $(x+1)^2+1=1$ (6) $7x+8=2x+3$

Commentaires ▷

Il s'agit ici de travailler le statut du signe « = » et de différencier identité et équation.
Les élèves adoptent plusieurs stratégies :

- Certains regroupent (1), (2), (3) et (5) « parce qu'il y a des x^2 ». Le professeur peut en profiter pour parler d'expressions du 1er degré et d'expressions du second degré.
- La plupart voit ces égalités comme des équations et cherchent à les résoudre mais (1), (3) et (4) leur posent des problèmes quant à la conclusion.
- D'autres, plus rares, disent que pour la (1) et la (4), « c'est vraiment égal » mais que la (3) est fausse.

La mise en commun permet de clarifier tout ça :
Comme la majorité des élèves a cherché à résoudre des équations, on part dans cette voie et on met en place les quantificateurs.

La résolution de (1) et (4) permet d'écrire des phrases du type :
« Pour n'importe quelle valeur de x, on a , $2(x-3)^2+4=2x^2-12x+22$ » ou encore « pour tout réel x, $2(x-3)^2+4=2x^2-12x+22$ ».

(2), (5) et (6) ne sont pas vraies pour toutes les valeurs de x , par contre il existe des valeurs de x pour lesquelles elles sont vraies.

(3) est une égalité fausse ; il n'existe aucune valeur de x telle que $x^2+4x-9=(x+2)^2+1$.

• ○ • ○ •

Bilan : On considère les deux égalités suivantes dans lesquelles x est un réel :
(1) $3x+5=2(1-2x)+7x+3$
(2) $3x+5=2x+3$

▷ L'égalité (1) est vraie pour n'importe quelle valeur réelle du nombre x , on écrit : « pour tout réel x , $3x+5=2(1-2x)+7x+3$ » ou encore « quelque soit le réel x , $3x+5=2(1-2x)+7x+3$ ». Cette égalité est une identité.

« pour tout » et « quelque soit » sont appelés des quantificateurs universels.

▷ **Il existe un réel x tel que l'égalité (2) est vraie.** $3x + 5 = 2x + 3$ **est une équation. « il existe » est appelé quantificateur existentiel.**

• ○ • ○ •

Commentaires (suite) ▷

Il faut expliquer aux élèves que le signe « = » peut avoir plusieurs statuts selon la consigne demandée et qu'alors la résolution du problème ne se fera pas de la même façon.

Lorsqu'on demande de résoudre $2(x-3)^2 + 4 = 2x^2 - 12x + 22$, on cherche s'il existe des valeurs de x telles que $2(x-3)^2 + 4 = 2x^2 - 12x + 22$ et on cherche à les déterminer toutes.

$\boxed{2(x-3)^2 + 4 = 2x^2 - 12x + 22 \text{ est une } \textbf{équation}.}$

Lorsqu'on demande de prouver que pour tout réel x, $2(x-3)^2+4 = 2x^2-12x+22$, il ne s'agit pas de résoudre une équation.

$\boxed{2(x-3)^2 + 4 = 2x^2 - 12x + 22 \text{ est une } \textbf{identité}.}$

• ○ • ○ •

EXERCICE 1 Reformuler les énoncés suivants en faisant apparaître les quantifications.

1. f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2(x-3)^2 + 4$.
2. L'équation $f(x) = 2x + 5$ a-t-elle des solutions dans $\mathbb{R}$?
3. Résoudre l'équation $f(x) = 2x + 5$.

(d'après ressources pour la classe de seconde -notations et raisonnement mathématiques- juillet 2009)

`Réponses :`

1. Pour tout réel x , $f(x) = 2(x-3)^2 + 4$.
2. Existe-t-il des réels x tels que $f(x) = 2x + 5$?
3. Déterminer les réels x tels que $f(x) = 2x + 5$.

• ○ • ○ •

EXERCICE 2 Ces égalités ou ces inégalités sont-elles vraies ou fausses ?

1. $(x+2)^2 = x^2 + 4x + 4$.
2. $(a+2)^2 = 4$.
3. $5t + 3 > 3t - 7$.
4. $x^2 + 1 > 0$.
5. $(b-1)^2 - 3 = b^2 - 2b$.

(d'après site académie de Strasbourg)

Commentaires ▷

L'objectif est de lancer un débat dans la classe, on veut arriver à ce que les élèves disent : « ça dépend des cas » et à ce qu'ils reformulent ainsi la question : « dans quels cas ces égalités ou ces inégalités sont-elles vraies ou fausses ? ».

Ainsi, dans la question 2) $(a+2)^2 = 4$, on ne peut pas décider si cette égalité est vraie ou fausse. Il manque les quantificateurs, on a alors deux énoncés possibles :
- « tout réel a, $(a+2)^2 = 4$ », qui est faux.
- « il existe un réel a tel que $(a+2)^2 = 4$ », qui est vrai.

• ◯ • ◯ •

Bilan : Les quantificateurs existentiels et universels sont indispensables : le sens de ces égalités varie en fonction du quantificateur de la variable.
On peut définir alors ce qu'est une proposition en mathématique : c'est un énoncé qui est soit vrai soit faux.
$(a+2)^2 = 4$ **n'est pas une proposition par contre « tout réel a, $(a+2)^2 = 4$ » et « il existe un réel a tel que $(a+2)^2 = 4$ » sont deux propositions mathématiques.**

• ◯ • ◯ •

EXERCICE 3 Les phrases suivantes sont-elles des propositions ? Si non, les modifier de sorte qu'elles en soient une.

(1) « pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x+1 = x$ »
(2) « il existe un réel x tel que $x = 2x - 3$ »
(3) « pour tout n un entier naturel, $2^n + 2$ est pair. »
(4) « $f(x) = 3x - 5$ »
(5) « il existe des parallélogrammes qui ont leurs diagonales perpendiculaires. »

• ◯ • ◯ •

Commentaires ▷

La phrase 4 dépend d'une variable et n'est pas quantifiée, ce n'est donc pas une proposition.
Quand on veut introduire une variable représentant un élément quelconque d'un ensemble, on utilise souvent « soit ».
Par exemple, si l'on considère un réel quelconque x , on peut écrire : « Soit $x \in \mathbb{R}$ ».
Cela signifie qu'on peut mettre n'importe quel réel à la place de x. On peut donc aussi utiliser le quantificateur universel : « Pour tout x de $\mathbb{R}$ ».

On utilise aussi « Soit » quand on veut introduire une variable représentant un élément spécial d'un ensemble. Mais on précise quelle est la propriété spéciale vérifiée par cet élément en utilisant « tel que ... ». Par exemple : « Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x \geqslant 3$ ».

Il faut préciser aux élèves que l'expression « Soit a un nombre réel » est souvent utilisée en début de preuve. Elle signifie :
- une nouvelle variable , a, est introduite et elle désignera un réel dans la suite (présentation de variable) ;
- cette variable devra être considérée comme universellement quantifiée dans les propositions où elle intervient par la suite.

La phrase 4 permet de justifier la donnée de l'ensemble de définition d'une fonction, on pourrait écrire : « pour tout réel x , $f(x) = 3x - 5$ ». Malgré tout, cette phrase mathématique n'est toujours pas une proposition puisqu'elle n'a pas de valeur « booléenne » (vraie ou fausse)

EXERCICE 4 Ambiguïté des pronoms : « un », « les ».

Reformuler ces propositions en utilisant des quantificateurs :

1. « Le carré d'un réel est un nombre positif. »
2. « Tout rectangle est un parallélogramme. »
3. « Un rectangle a un angle droit. »
4. « Les parallélogrammes ont les diagonales qui se coupent en leur milieu. »
5. « Il existe un réel dont le carré vaut 2. »

Solution :

1. « Pour tout réel x, $x^2 \geqslant 0$. »
2. « Quelque soit le rectangle $ABCD$, $ABCD$ est un parallélogramme. »
3. « Quelque soit le rectangle $ABCD$, $ABCD$ a un angle droit. »
4. « Quelque soit le parallélogramme $ABCD$, $[AC]$ et $[BD]$ se coupent en leur milieu. »
5. « Il existe au moins un réel dont le carré vaut 2. »

Commentaires ▷

On peut ainsi mettre en évidence la pluralité des sens du mot « un » dans le langage courant, et donc la nécessité de le préciser en mathématiques.
En voici quelques-uns :

- Le chiffre, le nombre ;
- L'article ou le pronom indéfini : un, au moins un, un parmi d'autres, tout.

I.2 Les vecteurs

Les vecteurs permettent de poursuivre le travail.

EXERCICE 5 Soient A et B deux points du plan, dans quels cas les égalités sont-elles vraies ? Le cas échéant ajouter une quantification pour en faire des propositions vraies.

1. $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{AB}$ 2. $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{0}$ 3. $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{0}$ 4. $AM+MB=AB$

(d'après site académie de Strasbourg)

Solution :

1. Pour tous points du plan A, B et M, $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{AB}$.
2. Pour tous points du plan A, B et M tels que M est le milieu de $[AB]$, $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{0}$. Ce qui donne :
   Pour tous points du plan A, B, il existe un point M du plan tel que, $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{0}$.
3. Pour tous points du plan A, B et M tels que A et B sont confondus, $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{0}$. Ce qui donne :
   Pour tout point A du plan, il existe un point B du plan tel que pour tout point M du plan, $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{0}$.
4. Pour tous points du plan A, B et M tels que M est sur le segment $[AB]$, $AM+MB=AB$. Ce qui donne :
   Pour tous points du plan A, B, il existe un point M du plan tel que, $AM+MB=AB$.

Commentaires ▷

> La définition de la colinéarité de deux vecteurs permet l'utilisation des quantificateurs.
> $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires signifie, lorsque $\overrightarrow{v}\neq\overrightarrow{0}$, qu'il existe un réel k tel $\overrightarrow{u}=k\overrightarrow{v}$.
> la proposition « il existe un réel k tel que $\overrightarrow{u}=k\overrightarrow{v}$ » est vraie si et seulement si elle est vraie pour au moins une valeur de k et on peut travailler la négation d'une proposition :
> « il n'existe pas de réel k tel que $\overrightarrow{u}=k\overrightarrow{v}$ » autrement dit « pour tout réel k, $\overrightarrow{u}\neq k\overrightarrow{v}$. »

• ○ • ○ •

I.3 Les fonctions

L'étude des **variations d'une fonction** et l'utilisation du tableau de variations.

EXERCICE 6 Le tableau de variation ci-dessous est celui d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-2;6]$. En exploitant les informations données, justifier pour chacune des propositions suivantes, si elle est vraie ou fausse.

x	-2		3		4		6
Variations de f	0	↗	5	↘	-2	↗	3

1. Il existe un nombre réel de l'intervalle $[-2;6]$ qui a une image par f strictement inférieure à 0 ;
2. Pour tout x de $[-2;6]$, $f(x)\geqslant 0$;

3. Tous les nombres réels de l'intervalle $[-2;6]$ ont une image par f strictement inférieure ou égale à 5 ;
4. Il existe un réel x dans l'intervalle $[-2;6]$ tel que $f(x) \geqslant 0$;
5. Pour tout x de $[-2;3]$, $f(x) \geqslant 0$;
6. Il existe un réel x dans l'intervalle $[-2;6]$ tel que $f(x) < 0$;
7. Il existe un réel x dans l'intervalle $[-2;3]$ tel que $f(x) < 0$.

(d'après ressources pour la classe de seconde -notations et raisonnement mathématiques- juillet 2009)

Commentaires ▷

Avec les propositions 5) et 7) on peut travailler la négation d'une proposition :

« Pour tout x de $[-2;3]$, $f(x) \geqslant 0$ » donc « il n'existe pas de réel dans $[-2;3]$ tel que $f(x) < 0$ ».

L'utilisation, en fin d'année, de la définition d'une fonction strictement croissante (ou strictement décroissante) sur un intervalle permet d'amorcer la rédaction d'une proposition universelle.
Pour prouver que f est strictement croissante sur I, il s'agit de prouver que pour tout réel a et b de I tels que $a < b$, alors $f(a) < f(b)$.
On revient à l'utilisation du « Soit ». Ainsi on écrira :

Soit a et b deux réels tels que $a < b$, on montrera alors que $f(a) < f(b)$ et on conclura : « pour tout réel a et b de I tels que $a < b$, alors $f(a) < f(b)$ », par définition, f est strictement croissante sur I.

• ○ • ○ •

II En Première

→ **Les fonctions**

EXERCICE 7 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x + 3 + \frac{2}{x}$.
Vrai ou faux ?

1. Il existe un nombre réel x tel que $f'(x) = 0$.
2. Pour tout réel $x \neq 0$, $f'(x) \geq 0$.
3. Il existe un réel $x \neq 0$ tel que $f'(x) = \frac{1}{4}$.
4. Il existe un intervalle sur lequel f est décroissante.
5. Pour tout réel x, $f'(x) \leq 100$

d'après Hyperbole 1ère S, Nathan 2011

• ○ • ○ •

→ **Les suites** permettent de poursuivre le travail entrepris en seconde notamment l'infirmation d'une proposition universelle.

EXERCICE 8 Sens de variation des suites

1. Soit (u_n) la suite définie par $u_n = (n-10)^2 + 2$ pour tout entier n. Ces inégalités sont-elles exactes ?
   (a) $u_2 < u_1$
   (b) $u_{11} < u_{10}$
   (c) $u_{n+1} < u_n$

Commentaires ▷

La dernière inégalité permet de provoquer un débat car aucune précision sur n n'est donnée. Cette question n'a de sens que si on précise le quantificateur.
La proposition « il existe un entier n tel que $u_{n+1} < u_n$ » est vraie et n'a besoin que d'un exemple pour être vérifiée. (puisque $u_2 < u_1$)
La proposition : « pour tout entier naturel n, $u_{n+1} < u_n$ » est fausse (puisque $u_{11} > u_{10}$), on peut donc conclure que la suite (u_n) n'est pas strictement décroissante.
Cet exercice permet de rappeler que des cas particuliers ne prouvent pas une proposition universelle.

2. Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 & = & 2 \\ u_{n+1} & = & u_n^2 - u_n + 1 \text{ pour tout entier } n \end{cases}$
   Ces inégalités sont-elles exactes ?
   (a) $u_1 > u_0$
   (b) $u_3 < u_2$
   (c) $u_4 < u_5$
   (d) $u_n > u_{n+1}$

Commentaire ▷

On est amené à prouver que $u_n \leq u_{n+1}$ (et même ici $u_n < u_{n+1}$) pour tout entier naturel n.

3. Les suites suivantes sont-elles monotones ?
   (a) (u_n) définie par $u_n = n + \frac{1}{n}$ pour tout entier naturel $n \geq 1$
   (b) : (v_n) définie par $\begin{cases} v_0 & = & 1 \\ v_{n+1} & = & \frac{1}{v_n} + 1 \text{ pour tout entier naturel } n \end{cases}$

Commentaire ▷

la suite (u_n) est croissante mais la suite (v_n) n'est pas monotone.

• ○ • ○ •

EXERCICE 9 Nature des suites.

1. Soit (u_n) la suite définie par $u_n = 2n^2 - n - 2$ pour tout entier naturel n. Les affirmations sont-elles vraies ou fausses ?
   (a) Pour tout entier n, $u_{n+1} \neq u_n + 1$
   (b) Il existe un entier n tel que $u_{n+1} = u_n + 1$
   (c) Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + 1$
   (D'après Déclic-1ère S Hachette-avril 2011)

Commentaire ▷

a) et c) sont fausses, on a $u_1 = u_0 + 1$ donc b) est vraie.

2. Les suites suivantes sont-elles arithmétiques ?
   (a) Pour tout entier n, $u_n = 3 - 5n$.
   (b) Pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = v_n + n$ et $v_0 = 1$.

(c) Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = 2n^4 - 12n^3 + 22n^2 - 10n + 1$

Commentaires ▷

> *Pour le c). on a $u_0 = 1$, $u_1 = 3$, $u_2 = 5$ et $u_3 = 7$, donc si on fait calculer les premiers termes aux élèves ils conjectureront que la suite est arithmétique. Or $u_4 = 57$; ce qui infirme la conjecture. Il est encore utile en 1ère de montrer des situations où induire une propriété* ***universellement quantifiée*** *à partir de valeurs particulières est inexact.*

3. Les suites suivantes sont-elles géométriques?
   (a) $u_n = 2^{n+1} - 2^n$ pour tout entier naturel n.
   (b) $v_n = n^3 + 5n + 6$ pour tout entier naturel n.

Commentaires ▷

> *Pour le b). on a $v_0 = 6$, $v_1 = 12$, $v_2 = 24$ et $v_3 = 48$, donc si on fait calculer les premiers termes aux élèves ils conjectureront que la suite est géométrique. Or $v_4 = 90$; ce qui infirme la conjecture.*

• ○ • ○ •

→ Les questions de compréhension des notions

EXERCICE 10 Quelle propriété énonce chacune de ces expressions?

1. (f désigne une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$). Il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leq M$.
2. ($\vec{u}$ et $\vec{v}$ désignent deux vecteurs.) Il existe un réel λ tel que $\vec{u} = \lambda\vec{v}$.
3. (u désigne une suite). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq u_n$.
4. (f désigne une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$). Il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = 0$.

• ○ • ○ •

EXERCICE 11 Exprimer à l'aide de quantificateurs les propriétés suivantes :

1. (f désigne une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs réelles). f est strictement croissante sur I.
2. (u désigne une suite). La suite u n'est pas croissante sur $\mathbb{N}$.
3. (f désigne une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs réelles). f admet un minimum sur I.
4. (f désigne une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs réelles). f est constante sur I.

• ○ • ○ •

→ Géométrie analytique

EXERCICE 12 Dans un repère, D est la droite d'équation $8x - 2y + 4 = 0$.
Vrai ou faux?

1. Pour tout point $M(x; y)$ de D, $y = 4x + 2$.
2. Il existe un point $A(u; v)$ de D tel que $u = v$.
3. $B(0; 2)$ et $\vec{w}\begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}$
   Pour tout point M de D, il existe un réel k tel que $\vec{BM} = k\vec{w}$.
4. Pour tout point $M(x; y)$ de D, $y \geq x$.

(d'après Hyperbole-1ère S Nathan-2011)

• ○ • ○ •

Commentaires ▷

> *Pour 2. et 4. on fait la supposition que la réponse sera cherchée de façon algébrique. Une fois cela fait, on pourra en demander une traduction graphique.*

III En Terminale

→ **Les limites**

EXERCICE 13 u est la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = n^2 + 2$.
Vrai ou faux ?

1. Il existe un entier naturel n_0 tel que $u_{n_0} > 100$.
2. Pour tout entier naturel n, $u_n < 10^{10}$.
3. Il existe un entier N tel que pour tout entier $n \geq N$, $u_n > 10^6$.

• ○ • ○ •

EXERCICE 14 u est une suite convergente de limite l.
Vrai ou faux ?

1. Pour tout entier naturel n, $l - 10^{-1} < u_n < l + 10^{-1}$,
2. Il existe deux nombres réels m et M tels que pour tout entier naturel n, $m \leq u_n \leq M$

(d'après Hyperbole-TS Nathan-2012)

• ○ • ○ •

Sources :
Logique, raisonnements mathématiques et Situations de Recherche pour la Classe (SiRC) - Groupe de recherche de l'IREM de Grenoble
Ressources pour la classe de seconde : Notations et raisonnement mathématiques- juillet 2009
Site académie de Strasbourg

Chapitre 3

Exercices : OU et ET, union et intersection

Sommaire

Préambule

Nous proposons ici des exercices permettant de travailler les notions de logique : **ET/OU** et faire le lien avec union et intersection d'ensembles. Conformément aux préconisations des programmes de lycée, il nous paraît nécessaire de « prévoir des temps où les concepts sont étudiés » et donc de donner aux élèves des définitions claires. Nous avons choisi d'utiliser une typographie différente pour les distinguer du « et/ou » du langage courant.

Les notions **ET/OU** impliquent la reconnaissance de ce qu'est une proposition mathématique qu'il convient de distinguer d'une propriété, d'un événement ou d'un ensemble.

Le groupe « Logique, raisonnements mathématiques et Situations de Recherche pour la Classe » de l'IREM de Grenoble écrit :

Extrait ▷

> « *Un événement est, selon le contexte, un fait (en histoire), ou le résultat d'une expérience aléatoire (en statistique), ou encore une occurrence d'information (en informatique), etc.. Ce ne sont pas des propositions. Une propriété est une caractéristique que l'on peut attribuer à un objet ; par exemple, dans l'ensemble Q des quadrilatères du plan, « avoir deux angles droits » est une propriété qui caractérise un sous-ensemble de Q. Une propriété n'est pas une proposition (au sens logique du terme), mais elle permet de construire des propositions. Ainsi, « tout quadrilatère qui a deux angles droits est un rectangle » est une proposition (fausse). Cette proposition est vraie sur le sous-ensemble des parallélogrammes*. »

En probabilité, un événement est un ensemble mais par abus de langage, il est souvent défini par une proposition. Au lycée, les concepts **ET/OU** sont souvent introduits au cours du chapitre des probabilités, en parallèle avec les notions d'intersection et d'union d'ensembles au risque de renforcer la confusion entre proposition et ensemble. Ainsi la notation doit être réservée au complémentaire de l'ensemble P et non pas à la négation de la proposition P qui s'écrit « non P ».

I Introduire ET/OU

I.1 Définition de ET/OU

▷ Pour x et y deux réels, $(x; y)$ désigne les coordonnées d'un point du plan rapporté à un repère. On considère les deux propositions suivantes :

- P_1 : « $x = 2$ »
- P_2 : « $y > 3$ »

1. Compléter le tableau suivant en indiquant à chaque fois si la proposition est vraie ou fausse :

Point $(x; y)$	P_1	P_2
$A(2; 1)$		
$B(-1; 3)$		
$C(2; 5)$		
$D(-5; 7)$		

2. Pour quels point a-t-on « $x = 2$ » et « $y > 3$ » ?
3. Pour quels point a-t-on « $x = 2$ » ou « $y > 3$ » ?
   (D'après Math'x, 2nde, 2019)

Définitions

- ⋆ L'énoncé « P_1 ***ET*** P_2 » est une nouvelle proposition. La proposition « P_1 ***ET*** P_2 » est vraie uniquement quand P_1 et P_2 sont toutes les deux vraies.
- ⋆ L'énoncé « P_1 *OU* P_2 » est une nouvelle proposition. La proposition « P_1 *OU* P_2 » est vraie uniquement quand au moins une des deux propositions est vraie.

Remarque :

1. Le *OU* mathématique est donc un *ou inclusif* alors que le « ou » du français courant est un *ou exclusif*.
2. « P_1 *OU* P_2 » est fausse uniquement quand P_1 et P_2 sont toutes les deux fausses.

I.2 Utiliser ET/OU

a et b deux réels, trouver les conditions sur a et b pour que :

- $a + b = 0$?
- $a - b = 0$?
- $a \times b = 0$?
- $a^2 + b^2 = 0$?

Commentaires ▷

On écrit les conjectures :

- Si $a + b = 0$ alors $a = -b$ c'est-à-dire a et b sont opposés.
- Si $a - b = 0$ alors $a = b$.
- Si $a \times b = 0$ alors $a = 0$ OU $b = 0$.
- Si $a^2 + b^2 = 0$ alors $a = 0$ ET $b = 0$.

Démontrons les deux dernières conjectures, les deux premières étant évidentes pour des élèves de 2ndes :

▷ Montrons que, pour tous réels a et b, si $a \times b = 0$ alors $a = 0$ OU $b = 0$.
Si $a \neq 0$, alors on peut diviser l'égalité $a \times b = 0$ par a et on obtient $b = 0$
Si $a = 0$ la propriété est démontrée.
On a donc prouvée que lorsque $a \times b = 0$ alors $a = 0$ ou $b = 0$ ou les deux.
C'est l'occasion de retravailler le *ou* en mathématiques qui est non exclusif.

▷ Si $a^2 + b^2 = 0$ alors $a^2 = -b^2$, c'est-à-dire a^2 et b^2 sont opposés. Mais comme ils sont tous les deux positifs, on obtient $a^2 = 0$ et $b^2 = 0$, d'où $a = 0$ et $b = 0$.

Le professeur demande : "Que pensez-vous de la réciproque de ces implications ? Sont-elles vraies ?"

Bilan : soit a et b deux réels

- Si $a + b = 0$ alors $a = -b$
  Si $a = -b$ alors $a + b = 0$.
  On dit que "$a + b = 0$" **équivaut** à "$a = -b$".

- Si $a - b = 0$ alors $a = b$
  Si $a = b$ alors $a - b = 0$.
  On dit que "$a - b = 0$" **équivaut** à "$a = b$".

- Si $a \times b = 0$ alors $a = 0$ OU $b = 0$
  Si $a = 0$ OU $b = 0$ alors $a \times b = 0$.
  On dit que "$a \times b = 0$" **équivaut** à "$a = 0$ OU $b = 0$".

- Si $a^2 + b^2 = 0$ alors $a = 0$ ET $b = 0$
  Si $a = 0$ ET $b = 0$ alors $a^2 + b^2 = 0$.
  On dit que "$a^2 + b^2 = 0$" **équivaut** à "$a = 0$ ET $b = 0$".

Commentaires ▷

> Ce travail peut aussi être l'occasion d'amorcer la négation d'une proposition en demandant par exemple aux élèves :
> Que peut-on dire de a et b lorsque $a \times b \neq 0$?
> Si $a \times b \neq 0$ alors $a \neq 0$ ET $b \neq 0$...

II Du langage formalisé au langage ensembliste

II.1 ET et la notion d'intervalles

▷ x est un réel ; on considère les deux propositions suivantes :

- P_1 : "$x \leqslant 2$"
- P_2 : "$x \geqslant 0$".

1. Compléter le tableau suivant en indiquant à chaque fois si la proposition est vraie ou fausse :

	P_1	P_2	P_1 ET P_2	P_1 OU P_2
$x = 3$				
$x = -1$				
$x = 1$				
$x \in [0, 2]$				

$[0, 2] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 2 \text{ ET } x \geqslant 0\}$

`Bilan` : $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b \text{ ET } x \geq a\}$

II.2 Des doubles inégalités : une amorce de l'intersection

x est un nombre réel.

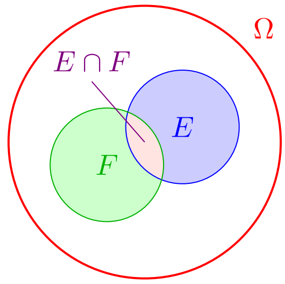
1. Résoudre $-x + 7 < 3x - 1 < 2x + 9$.
2. Résoudre $2x + 1 < 3x + 2 < x - 4$.

Commentaires ▷

> Pour la première question, on obtient $-x + 8 < 3x < 2x + 10$ et donc les élèves sont amenés à traduire cet encadrement par un système d'inégalités :
> $(3x > -x + 8)$ ET $(3x < 2x + 10)$ qui équivaut à $(x > 2)$ ET $(x < 10)$, c'est-à-dire $x \in]2, 10[$.
>
> Pour la seconde question, on obtient $2x - 1 < 3x < x - 6$ soit :
> $(3x > 2x - 1)$ ET $(3x < x - 4)$ qui équivaut à $(x > -1)$ ET $(x < -2)$, cette double inéquation n'a pas de solution.
>
> C'est l'occasion d'introduire la notion d'intersection de deux ensembles.
> $]2; +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$ et $]-\infty; 10[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < 10\}$.
> $]2; 10[= \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2 \text{ ET } x < 10\}$, on note $]2; 10[=]2; +\infty[\cap]-\infty; 10[$.

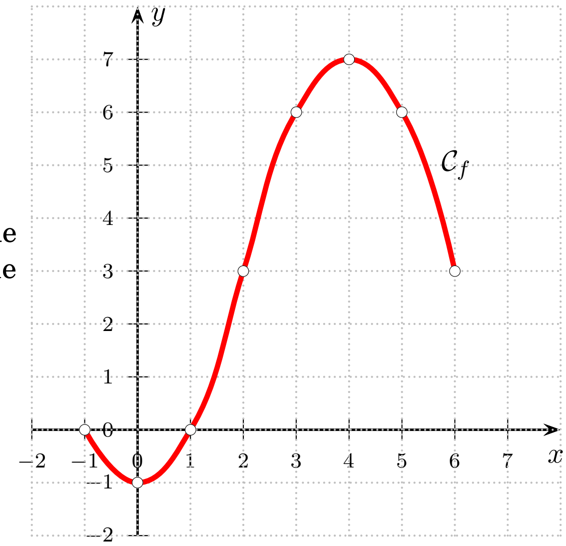
Définition
Soient E et de F deux parties d'un ensemble Ω. On appelle intersection de E et de F, l'ensemble des éléments de Ω appartenant à la fois à E et à F.

$$E \cap F = \{x \in \Omega \mid x \in E \textbf{ ET } x \in F\}$$



II.3 Des inéquations pour introduire l'union

On donne ci-contre, C_f la représentation graphique d'une fonction f définie sur $[-1;6]$. Donner l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \leq 6$.

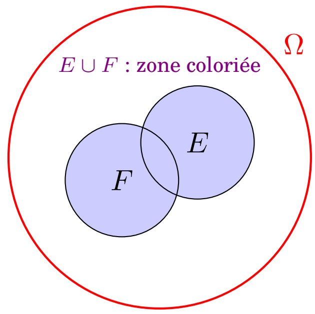


Développement ▷

On obtient :
$\{x \in [-1;6] \mid f(x) \leq 6\} = \{x \in [-1;6] \mid x \leq 3 \text{ OU } x \geq 5\}$
$[-1;3] = \{x \in [-1;6] \mid x \leq 3\}$ et $[5;6] = \{x \in [-1;6] \mid x \geq 5\}$.
On note : $\{x \in [-1;6] \mid x \leq 3 \text{ OU } x \geq 5\} = [-1;3] \cup [5;6]$

Définition
Soient E et de F deux parties d'un ensemble Ω. On appelle union de E et de F, l'ensemble des éléments de Ω appartenant à au moins un des deux ensembles. C'est-à-dire appartenant à E OU appartenant à F.

$$E \cup F = \{x \in \Omega \mid x \in E \textbf{ OU } x \in F\}$$



Remarque : Il faut mettre en garde sur l'automatisme « je vois union donc c'est un OU » avec l'exemple suivant $A \cup B = \emptyset$ qui équivaut à $A = \emptyset$ ET $B = \emptyset$.

• ○ • ○ •

II.4 Travailler les notions

▷ Compléter le tableau

A	B	$A \cap B$	$A \cup B$
$\{15; 0; -\sqrt{2}; 1; \sqrt{3}; -5\}$	$\{\frac{-15}{3}; 0; -1; \sqrt{4}\}$		
$\mathbb{N}$	$[-2; 1]$		
$[-2; 1]$	$]0; 5[$		
$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$		

▷ Compléter le tableau

Inégalités	Intervalles	Représentation graphique de l'ensemble auquel appartient x
	$x \in [2; +\infty[$	
$x \geq 5$ **OU** $x \leq -1$		
	$x \in]-\infty; 2] \cup [3; +\infty[$	
$x > 1$ **ET** $x \leq 7$		
	$x \in [-2; 1]$	

• ○ • ○ •

III La négation de ET/OU

▷ Un sac contient 10 jetons numérotés de 1 à 10 indiscernables au toucher. On choisit au hasard un jeton et on gagne si son numéro est pair ou si son numéro est un multiple de 3.

1. Quel est l'univers de l'expérience ?
   `Réponse :` $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

2. On note x le numéro du jeton tiré. *On considère les deux propositions*
   - P_1 : « x est pair ».
   - P_2 : « x est un multiple de 3 ».

   et *les ensembles suivants* :
   - $A = \{x \in \Omega \mid x \text{ est pair}\}$.
   - $B = \{x \in \Omega \mid x \text{ est un multiple de } 3\}$.

   Compléter le tableau suivant.

Ensemble	Complémentaire	Proposition	Négation de la proposition
$A = \{2, 4, \ldots\}$	$\Omega \setminus A = \overline{A} = \{\ldots\}$	x est pair	
$B = \{\ldots\}$	$\Omega \setminus B = \{\ldots\}$	x est multiple de 3	
$C = A \cap B = \{\ldots\}$	$\Omega \setminus C = \{\ldots\}$	P_1 **ET** P_2	
$D = A \cup B = \{\ldots\}$	$\Omega \setminus D = \{\ldots\}$	P_1 **OU** P_2	

Le passage à la notion d'ensemble facilite la négation des propositions :
« P_1 **ET** P_2 » et « P_1 **OU** P_2 ».

3. On veut modéliser cette expérience à l'aide d'un algorithme. Parmi les quatre algorithmes proposés, quels sont ceux qui répondent au problème ?

```python
from random import randint
def simulation():
    x=randint(1,10)
    if x%2!=0 or x%3!=0:
        return "perdu"
    else:
        return "gagné"
```
Algo 1

```python
from random import randint
def simulation():
    x=randint(1,10)
    if x%2==0 or x%3==0:
        return "gagné"
    else:
        return "perdu"
```
Algo 2

```python
from random import randint
def simulation():
    x=randint(1,10)
    if x%2==0 and x%3==0:
        return "gagné"
    else:
        return "perdu"
```
Algo 3

```python
from random import randint
def simulation():
    x=randint(1,10)
    if x%2!=0 and x%3!=0:
        return "perdu"
    else:
        return "gagné"
```
Algo 4

Bilan :

- P_1 et P_2 sont deux propositions.
  La négation de « P_1 ET P_2 » est « non P_1 OU non P_2 »
  La négation de « P_1 OU P_2 » est « non P_1 ET non P_2 »
- A et B sont deux ensembles.
  $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
  $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

▷ Dans une urne il y a des boules rouges et des vertes. On tire une boule dans l'urne, on regarde sa couleur et on la remet dans l'urne. On tire alors une seconde boule et on regarde sa couleur.

- *On considère les événements* :
  - A : « la première boule est rouge » ;
  - B : « la seconde boule est rouge ».

Compléter le tableau suivant en vous inspirant de la première ligne.

Evénement	Langage courant	Langage formalisé utilisant les connecteurs ET / OU	Langage ensembliste
R	les deux boules tirées sont rouges	la première boule est rouge et la seconde est rouge	$A \cap B$
V		la première boule n'est pas rouge et la seconde n'est pas rouge	
événement contraire de R			
S			$A \cup B$
T		la première boule n'est pas rouge et la seconde n'est pas rouge	
événement contraire de S			

▷ On lance un dé rouge et un dé vert bien équilibrés dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
On lit les numéros sortis sur les faces supérieures.

- *On considère les événements* :
  - A : « le résultat du dé rouge est pair » ;
  - B : « le résultat du dé vert est pair ».

Compléter le tableau suivant :

Langage courant	Langage formalisé utilisant les connecteurs ET/OU	Langage ensembliste	Événement contraire en langage courant à l'aide d'une phrase affirmative
Les résultats des deux dés sont pairs			
		$\overline{A} \cap \overline{B}$	
	le résultat du dé rouge est pair ET le résultat du dé vert est impair		
		$\overline{A} \cup B$	

• ○ • ○ •

Chapitre 4

Comparaisons de rédactions ROC lycée et université

Sommaire

• ○ • ○ •

Préambule

Les rédactions sont en général assez proches. En L1 (*licence première année*), pour les limites, on se réfère plus systématiquement à la définition avec les quantificateurs, et on raisonne moins explicitement en terme d'intervalle. On a aussi plus tendance à écrire des formules, et un peu moins à faire des phrases. (typiquement, « un certain rang » donne « $\exists N$ tel que »)

I Un théorème de comparaison

Théorème 1 Soit (u_n) et (v_n) deux suites définies sur $\mathbb{N}$.
Si, à partir d'un certain rang, $v_n \geq u_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$

Démonstration Terminale ▷

Soit un nombre réel A.
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, donc l'intervalle $[A, +\infty[$ contient tous les termes de la suite u à partir d'un certain rang que l'on note n_1. On a donc pour tout $n \geq n_1$, $u_n \geq A$.
A partir d'un certain rang, que l'on note n_2, on a $v_n \geq u_n$.
Ainsi si on note N le plus grand des rangs n_1 et n_2, alors pour tout $n \geq N$, on a : $v_n \geq u_n \geq A$.
On en déduit que l'intervalle $[A, +\infty[$ contient tous les termes de la suite (v_n) à partir du rang N.
Et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$

• ○ • ○ •

Démonstration L1 ▷

La rédaction précédente serait tout à fait correcte en L1. Mais l'enseignant écrirait peut-être plutôt :
On suppose d'une part qu'il existe un entier N_1 tel que pour tout $n \geq N_1, v_n \geq u_n$, et d'autre part que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. On cherche à démontrer $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$, c'est-à-dire $\forall A > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, v_n > A$.
Soit $A > 0$. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, il existe par définition un entier N_2 tel que $\forall n \geq N_2, u_n > A$.
On pose alors $N = \max(N_1, N_2)$. On a bien $\forall n \geq N, v_n \geq u_n > A$. . On a donc bien montré $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

II Limite des suites géométriques

Théorème 2 Soit q un nombre réel. Soit $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite géométrique de raison q.

q	$q \leq -1$	$-1 < q < 1$	$q = 1$	$q > 1$
$\lim\limits_{n\to+\infty} q^n$	pas de limite	0	1	$+\infty$

Démonstration Terminale ▷

Dans le cas où $q > 1$

Prérequis : Pour tout entier naturel n et a réel strictement positif, on a $(1+a)^n \geq 1+na$ (inégalité de Bernoulli), à démontrer.

Démonstration du prérequis
Soit la suite (u_n) définie par : pour tout n, $u_n = (1+a)^n - (1+na)$ où a est un réel strictement positif.
On étudie son sens de variation :

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - u_n &= (1+a)^{n+1} - (1+(n+1)a) - [(1+a)^n - (1+na)] \\ &= (1+a)^n[(a+1)-1] - a \\ &= a[(1+a)^n - 1]\end{aligned}$$

Or $a > 0$ et $1+a > 1$; de ce fait $(1+a)^n > 1$
Ainsi pour tout entier n, $u_{n+1} - u_n > 0$, donc la suite (u_n) est croissante.
Son premier terme est $u_0 = 0$ donc tous ses termes sont positifs : pour tout n , $u_n \geq 0$ soit $(1+a)^n \geq (1+na)$
(on peut aussi faire ou preuve de l'inégalité de Bernoulli par récurrence)
Fin de la démonstration du prérequis

On suppose que $q > 1$, alors on peut poser $q = a+1$ avec $a > 0$.
$q^n = (1+a)^n \geq 1+na$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty}(1+na) = +\infty$ car $a > 0$.
Donc, d'après le théorème de comparaison, $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = +\infty$..

• ○ • ○ •

Démonstration L1 ▷

Pour le prérequis (qu'on appellerait *Lemme*)

On aurait tendance à utiliser le binôme de Newton, pour le réinvestir :
pour $n \geq 2$, $(1+a)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k = 1+na+\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}a^k \geq 1+na$ car a est positif donc tous les termes de la somme sont positifs.
La suite est identique à la démonstration de Terminale.

• ○ • ○ •

III Des propriétés sur les suites

Propriété 1 Soit (u_n) une suite croissante définie sur $\mathbb{N}$.
Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$ avec L réel, alors la suite (u_n) est majorée par L.

Démonstration Terminale ▷

Supposons que (u_n) n'est pas majorée par L. Il existe donc $p \in \mathbb{N}$, tel que $u_p > L$. Alors l'intervalle ouvert $]L-1, u_p[$ contient L.
Comme (u_n) est croissante, $u_n \geq u_p$ pour $n > p$. Donc si $n > p$, alors $u_n \notin]L-1, u_p[$.
Or, par hypothèse, $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = L$. Donc l'intervalle $]L-1, u_p[$ contient tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang.
Ce qui est contradictoire.
Ainsi la suite (u_n) est majorée par L.

• ○ • ○ •

Démonstration L1 ▷

Là encore, la rédaction précédente serait tout à fait correcte. Mais l'enseignant écrirait peut-être plutôt :

Par l'absurde. On suppose que la suite (u_n) n'est pas majorée par L, donc qu'il existe un entier p tel que $u_p > L$.
La suite (u_n) étant croissante, on a quel que soit $n \geq p$, $u_n \geq u_p$, donc $u_n - L \geq u_p - L$.
De plus $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = L$, donc par définition :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N}, n \geq N_1 \Rightarrow |u_n - L| < \epsilon$$

Prenons $\epsilon = u_p - L$. ϵ est bien strictement positif.
Il existe donc un entier N_1 tel que pour tout $n \geq N_1, |u_n - L| < u_p - L$.
Pour $n \geq \max(p, N_1)$, on a donc $u_p - L \leq u_n - L < u_p - L$ ce qui est impossible.

• ○ • ○ •

Théorème 3
- Si une suite croissante est non majorée alors elle tend vers $+\infty$.
- Si une suite décroissante est non minorée alors elle tend vers $-\infty$.

Démonstration Terminale ▷

Premier point : Soit un réel a.
Comme (u_n) n'est pas majorée, il existe un entier p tel que $u_p > a$.
La suite (u_n) est croissante donc pour tout $n > p$, on a $u_n \geq u_p$.
Donc pour tout $n > p$, on a $u_n > a$.
Et donc à partir d'un certain rang p, tous les termes de la suite appartiennent à l'intervalle $]a, +\infty[$.
On en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

Démonstration analogue dans le cas d'une suite décroissante non minorée.

• ○ • ○ •

Démonstration L1 ▷

Soit (u_n) une suite croissante non majorée. On veut démontrer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ c'est-à-dire :

$$\forall A > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_1, u_n > A$$

Soit A un réel strictement positif. (u_n) n'étant pas majorée, elle n'est pas majorée par A, donc il existe un entier N tel que $u_N > A$. (u_n) étant croissante, on a

$$\forall n \geq N, u_n \geq u_N > A$$

On a donc bien démontré $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

• ○ • ○ •

IV Croissance comparée

Théorème 4 Croissance comparée exp **et puissance.**

Soit n un entier strictement positif. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\exp(x)}{x^n} = +\infty$.

Démonstration Terminale ▷

On commence par démontrer que pour tout réel strictement positif x, $\dfrac{\exp(x)}{x} > \dfrac{x}{2}$.

Pour cela on introduit la fonction f qui à tout réel x associe $f(x) = \exp(x) - \dfrac{x^2}{2}$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $x \mapsto \exp(x) - x$.
f' est positive sur $\mathbb{R}$ car $\exp(x) > x$ (on peut étudier la fonction $x \mapsto \exp(x) - x$ sur $\mathbb{R}$ pour s'en convaincre) pour tout x réel, f est donc croissante sur $\mathbb{R}$. Or $f(0) = 1$.
On en déduit donc que pour tout réel x strictement positif, $f(x) > 0$ et donc que pour tout réel x strictement positif, $\dfrac{\exp(x)}{x} > \dfrac{x}{2}$.
Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{2} = +\infty$, l'utilisation du théorème de comparaison permet de conclure que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\exp(x)}{x} = +\infty$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > 0$, $\dfrac{\exp(x)}{x^n} = \dfrac{1}{n^n}\left(\dfrac{\exp(\frac{x}{n})}{\frac{x}{n}}\right)^n$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{n} = +\infty \\ \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{\exp(X)}{X} = +\infty\end{array}\right\} \begin{array}{c}(composition) \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\exp(\frac{x}{n})}{\frac{x}{n}} = +\infty \\ \lim\limits_{Y\to+\infty} \dfrac{1}{n^n} Y^n = +\infty\end{array} \left.\vphantom{\begin{array}{c}a\\a\\a\end{array}}\right\} \begin{array}{c}(composition) \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\exp(x)}{x^n} = +\infty\end{array}$$

• ○ • ○ •

Démonstration L1 ▷

On peut faire de même en L1.
Une autre preuve qui est souvent donnée, se base sur le fait que $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$. On écrit pour tout $x > 0$ et tout entier n, $\frac{e^x}{x^n} = e^{x(1-n\frac{\ln x}{x})}$. Puis on termine avec les compositions de limites.

V Théorème du toit

Théorème 5 d et d' sont deux droites parallèles, P et P' deux plans distincts tels que d (respectivement d') est contenue dans P (resp. dans P'). Si P et P' sont sécants alors leur droite d'intersection Δ est parallèle à d et d'.

Démonstration Terminale ▷

On raisonne par l'absurde.
On suppose P et P' sécants et que Δ n'est pas parallèle à d et d'.
On note $\vec{u}$ un vecteur directeur de Δ et $\vec{v}$ un vecteur directeur de d et d'.
Δ et d ne sont pas parallèles, alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ (qui ne sont pas colinéaires) sont des vecteurs directeurs de P. Δ et d' ne sont également pas parallèles, donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs directeurs de P'.
P et P' ont des vecteurs directeurs en commun et devraient donc être parallèles. On aboutit ainsi à une contradiction, ce qui prouve que Δ et d sont parallèles.

• ◯ • ◯ •

Démonstration L1 ▷

On ne fait essentiellement pas de géométrie affine avant la L2. On parle d'algèbre linéaire au deuxième semestre de première année. En terme d'algèbre linéaire le théorème du toit s'énoncerait différemment. Une version possible est donnée ci-dessous. Il est donné en exercice en L1, mais dans une version plus générale en dimension n. Il serait certainement profitable avec les étudiants de semestre 2 de mettre les deux énoncés à côté pour comprendre en quoi il s'agit du même résultat. Il est à noter que les deux preuves sont du même coup rédigées très différemment.
A noter aussi, parmi les différences lycée-université, que les vecteurs ne prennent assez vite plus de flèche...

• ◯ • ◯ •

Théorème 6 Soit u un vecteur non nul de $\mathbb{R}^3$, et P et P' deux plans vectoriels distincts de $\mathbb{R}^3$ contenant u. Alors $P \cap P' = \mathbb{R}u$.

Démonstration L1 ▷

$P \cap P'$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Déterminons sa dimension d. $d \leq 2$ puisque $P \cap P'$ est inclus dans P qui est de dimension 2.
$P \cap P'$ contient le vecteur u qui est non nul, donc $d \geq 1$.
Montrons par l'absurde que $d \neq 2$.
Deux sous-espaces vectoriels inclus l'un dans l'autre et de même dimension sont égaux.
Donc si $d = 2$, on a alors $P \cap P' = P$ et $P \cap P' = P'$. Or $P \neq P'$, c'est donc impossible.
Donc $P \cap P'$ est de dimension 1. Puisque $\mathbb{R}u \subset P \cap P'$, on a bien $\mathbb{R}u = P \cap P'$.

• ○ • ○ •