SOMMAIRE

Introduction

Cette brochure se compose de deux parties :

- Dans la première partie, vous trouverez d’abord, dans un texte de quelques pages, une vue d’ensemble des questions que peut se poser un enseignant lors de l’introduction de la dérivation en première. En particulier, nous évoquons le paradoxe qui consiste à introduire le nombre dérivé à partir de la tangente, tangente elle-même définie à partir du nombre dérivé et nous proposons une progression afin de contourner cet obstacle. Cette progression est composée de situations adaptables à la série et au niveau de classe.

Nous avons repris le mot « situation » introduit par la didactique des mathématiques. Il s’agit de problèmes posés à partir d’un matériel simple afin que les élèves puissent facilement se les approprier. Les élèves se mettent très vite au travail, individuellement ou en groupe. Lors de la mise en commun, des échanges s’instaurent dans la classe entre les élèves et le professeur, avant l’écriture d’un bilan. Cette réelle activité mathématique peut entrer dans ce qu’on appelle aujourd’hui la démarche d’investigation.
L’enchaînement des situations est primordial ici : elles sont articulées entre elles pour arriver à la construction de la notion de dérivée. Il est donc indispensable de conserver l’ordre proposé.

Des exercices et une activité complémentaire viennent étoffer les ressources à proposer aux élèves.

Nous avons axé notre travail sur l’introduction de la dérivation, et nous ne traitons pas ici du lien entre dérivée et variation. Cependant, les élèves ont pu déjà en faire la conjecture dans les situations proposées. Il reste à l'institutionnaliser.

- Dans une deuxième partie, nous proposons une situation permettant d’introduire la notion de limite de fonction (en l’infini et en une valeur) en terminale S. Cette situation est bâtie à partir d’un exercice de géométrie qui sert de fil rouge.

Elle est suivie d’une activité permettant d’utiliser la définition d’une limite avec une approche historique de la notion d’asymptote.

Notre objectif étant la mise en place des définitions théoriques des limites, nous ne traitons pas des opérations sur les limites.

Toutes les situations et exercices ont donné lieu à plusieurs expérimentations dans nos différentes classes. Cela a permis de faire évoluer le scénario des activités proposées et de décrire au mieux les réactions des élèves, leurs idées, leurs réponses, leurs productions et leurs difficultés.

Les fichiers GeoGebra sont disponibles sur le site de l’IREM d’AQUITAINE :
http://math-interactions.u-bordeaux.fr/Centres-de-ressources/IREM

Partie 1 : introduire la notion de dérivée en 1ère

Vue d'ensemble des difficultés pour enseigner la dérivée en 1ère

L'enseignement du concept de dérivée et de tangente comporte de nombreuses difficultés. Il nous a paru utile de lister d'abord celles que nous avons repérées, avant de proposer une réalisation possible de quelques séquences d'enseignement, non pour tout le chapitre, mais concernant certains points difficiles. Ainsi nous donnons d'abord une vue d'ensemble de ces difficultés et de nos choix didactiques qui en découlent.

1° Introduction du nombre dérivé

Comment introduire le nombre dérivé en x_0 comme limite quand h tend vers 0 du rapport $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ en donnant du sens à cette définition ?

La notion de limite d'une fonction n'est pas au programme de 1ère. Certains élèves s'étonnent car le nombre h tendant vers 0, on ne peut pas le remplacer par 0 dans la première écriture du rapport, mais dans la pratique, on le remplace après simplification.

Avant d'affronter la limite, il faut donner du sens en motivant l'introduction d'un tel rapport, et comment le faire sans se référer au coefficient directeur d'une droite ? On peut utiliser le coefficient directeur d'une sécante à la courbe, la tangente apparaissant comme la position limite de cette sécante, d'où la recherche de la limite de ce rapport appelé nombre dérivé. La définition rigoureuse de la tangente en un point vient ensuite comme étant la droite dont le coefficient directeur est égal au nombre dérivé précédemment défini en ce point.

De nombreux auteurs ont relevé ce cercle vicieux dans leurs articles. Citons par exemple Laurent Vivier : « Le problème majeur est que la notion de tangente a un statut pour le moins ambigu dans cette classe de première : les tangentes ne sont réellement définies qu'avec le nombre dérivé mais c'est un travail sur les tangentes qui permet d'introduire la dérivation [1]».

La notion de limite de droites est complètement floue, aucune topologie n'étant définie dans l'ensemble des droites et un mouvement inscrit dans le temps est introduit, comme le soulignent d'autres auteurs[2]. Certains notent que ce cercle vicieux résulte d'une transposition didactique qui « présente la tangente à la fois comme une illustration géométrique de la dérivée et comme un moyen d'introduire la dérivée[3] ».

La transposition didactique dont il est question consiste, pour le professeur, à prendre un point M_0 d'abscisse x_0 sur la représentation graphique d'une fonction f et un point M voisin de M_0 d'abscisse x_0+h . Il montre aux élèves le mouvement qui fait se rapprocher M de M_0. Il leur fait constater que la sécante (M_0M) tend vers la tangente à la courbe en M_0. Le cas d'une représentation graphique rectiligne n'est pas envisagé.

---

1 Laurent Vivier : Un milieu théorique pour la notion de tangente dans l'enseignement secondaire -*Annales de Didactique et de Sciences cognitives*, vol. 15 p. 173-199 – 2010 IREM de Strasbourg, p. 174.

2 Jean-Yves Gantois et Maggy Schneider – Laboratoire de Didactique des mathématiques- Université de Liège-Belgique : Introduire les dérivées par les vitesses. Pour qui ? Pourquoi ? Comment ?- *Petit x* n°79, p.14, ainsi que K. Balhan et M. Krysinska et Maggy Schneider - Université de Liège : Quelle définition du concept de tangente ? Pour quelles raisons ? *Repères IREM* n°101- Octobre 2015 p. 9

3 K. Balhan et M. Krysinska et Maggy Schneider dans l'article précédemment cité, p.11. Ces auteurs font référence ici la thèse d'E. Rouy

Ce procédé d'enseignement est qualifié de pratique « ostensive » par certains didacticiens et il est vivement dénigré par eux. Ce que nous proposons dans notre leçon s'en éloigne de façon significative car ce n'est pas le professeur qui « montre » le « voyage » du point M' mais les élèves qui, du fait des situations-problèmes proposées (le terril et la chute d'une bille)[4], pensent seuls à faire varier le coefficient directeur d'une droite qui coupe la courbe en deux points pour arriver à la limite[5].

Certains auteurs argumentent pour introduire la dérivée à partir des vitesses car c'est un contexte très fréquent dans les autres sciences où la variable est le temps (taux de croissance d'une population etc.). Même en mathématique on peut trouver le mot « taux de variation instantané » ce qui amène une idée de temps alors que la variable n'est pas le temps[6]. Sur le plan épistémologique, l'hypothèse que la vitesse permettrait de baser la formation du concept de dérivée, nous paraît plausible. Précisément, la situation que nous proposons sur la chute de la bille permet aux élèves de passer seuls de la vitesse moyenne, à laquelle ils pensent d'abord, à la vitesse instantanée qui leur est demandée dès le départ.

De plus, lorsqu'on donne la courbe représentative de la position d'un mobile (en mètres) en fonction du temps (en seconde), on peut légitimement questionner sur l'unité du rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Les élèves disent naturellement que ce rapport, dont l'unité est le ms^{-1}, correspond à une vitesse mais laquelle ?

Quand le mot « sécante » est prononcé par le professeur qui, dans la pratique ostensive, montre au tableau le déplacement du point, il ne signifie pas une sécante quelconque qui pourrait couper la courbe en un seul point. Il s'agit plutôt d'une sorte de « corde » comme le souligne Laurent Vivier, dans l'article précédemment cité[7]. Avec nos deux situations les élèves n'ont pas besoin de prononcer le mot « sécante ».

Derrière cette représentation de corde, avec deux points qui viennent se confondre pour donner un seul point commun entre la courbe et la droite tangente, se repère bien la conception initiale de tangente au cercle, vue en seconde et qu'il faut faire évoluer.

2° Conception de tangente à une courbe

Laurent Vivier relève quatre conceptions de la tangente, qui se forment au cours de l'enseignement[8].

- C1 : Une droite qui n'a qu'un seul point commun avec le cercle
- C2 : Une droite perpendiculaire au rayon en un point du cercle
- C3 : limite des sécantes en un point de la courbe
- C4 : droite passant par un point de la courbe dont la pente est le nombre dérivé

---

4 Voir comment ces problèmes sont développés en classe dans la suite de la brochure. Pour le problème du terril, voir un document Eduscol "1ère - analyse" paru en mars 2012.

5 Il est préférable d'éviter « l'ostention » quand on peut trouver une situation pour que les élèves arrivent au même résultat, c'est-à-dire à former une image mentale, qui sera ainsi à la fois plus solide et plus facile à enrichir si nécessaire s'ils la construisent seuls plutôt que si elle est imposée par le professeur. Ici par exemple il faudra l'enrichir dans le cas où la représentation graphique est une droite, le cas où la courbe traverse la tangente.

6 Jean-Yves Gantois et Maggy Schneider dans l'article précédemment cité p. 20

7 Laurent Vivier p. 176

8 Dans l'article précédemment cité. La définition de la tangente qui suit est donnée p. 187, et la preuve de la résistance de la conception C2 est donnée p. 178

La conception C1 doit être modifiée pour arriver à la définition suivante donnée par Laurent Vivier: « une tangente est une sécante qui forme une intersection d'ordre de multiplicité au moins 2 avec la courbe ». La conception C2 est assez résistante. Laurent Vivier cite le cas d'élèves de 1ère S qui, avant d'étudier la dérivée, conjecturent qu'on ne peut pas tracer de tangente à une courbe car il n'y a pas de rayon pour tracer la perpendiculaire. D'autres tracent un rayon imaginaire et la perpendiculaire à ce rayon. Imaginent-ils le cercle osculateur ? C'est, en un point d'une courbe, le cercle ayant pour centre le centre de courbure et pour rayon le rayon de courbure.
Le recours à l'étymologie du mot n'en sera que plus utile : *tangente* vient du mot latin *tangere* qui signifie *toucher*. Le lien avec la trigonométrie s'explique par l'évocation du bâton planté dans le sol. En dessinant dans un plan vertical, passant par le bâton et perpendiculaire au sol, le rayon de soleil qui « touche » le haut du bâton, on délimite l'ombre sur le sol. Le rapport entre la mesure du bâton et la mesure de son ombre donne la tangente de l'angle que fait ce rayon de soleil avec l'ombre.

Pour construire C1 et C2, les élèves de seconde ont pu voir, avec le cercle, deux points d'une corde qui se rapprochent l'un de l'autre jusqu'à se confondre. Ce n'est pas exactement le même mouvement que ce qui est montré au tableau dans la transposition didactique précédente dans laquelle un point reste fixe et l'autre point s'en rapproche. Dans la situation du terril, la première que nous proposons pour les 1ère S, les élèves sont amenés à conjecturer une droite passant par le sommet du bâton planté en haut du terril et par un point situé en bas du terril. Si cette droite rencontre la parabole qui figure le terril en deux points, la conjecture doit évoluer jusqu'à ce que ces deux points n'en soient plus qu'un. Il s'agit de rapprocher deux points de la parabole pour trouver la droite qui le frôle en un seul point. Les deux points bougent simultanément. En revanche dans la situation de la bille, les élèves gardent un point fixe, et l'autre s'en rapproche.

Il est facile d'essayer de trouver une méthode pour tracer la tangente en un point d'une parabole : conjecturer la place et l'équation de la tangente puis trouver l'abscisse du point de contact en cherchant un point d'intersection double par l'algèbre. Nous commençons par la parabole puis nous questionnons aussitôt après avec une fonction en x^3 pour rencontrer une tangente qui peut avoir un autre point commun avec la courbe, à la différence du cercle.

3° Nombre dérivé et fonction dérivée

Nous n'utilisons pas le mot « nombre dérivé en un point » qui nous semble une source de confusion pour les élèves dès qu'on aborde ensuite la fonction dérivée. Nous disons « coefficient directeur de la tangente en un point » dès que le mot « tangente » apparaît dans la classe. Il faut éviter les confusions entre la valeur de la dérivée en un point qui a été la notion de départ sous le vocable bizarre de « nombre dérivé », puis la fonction dérivée, à ne pas confondre non plus avec l'équation de la tangente.

4° Le local et le global

La tangente est un objet global (une droite) mais pour savoir si une droite est tangente on doit examiner le contact localement. L'enseignement doit permettre de passer dans les deux sens du global (induit par C2 par exemple) au local. Ce jeu du local au global est développé notamment par Laurent Vivier[9].

9 Voir l'article p. 181

Pour travailler cela, la technique du zoom sur le point où on veut tracer une tangente, est très importante à introduire : petit à petit la courbe vient se confondre avec la tangente et, quand on revient en arrière, elle s'en écarte à nouveau.
Ceci permet d'introduire l'approximation locale d'une fonction (approcher $f(x_0)$) par la fonction affine, donnée par l'équation de la tangente. Est-elle meilleure que l'approximation donnée par la sécante ? La question est posée dans l'article de K. Balhan et M. Krysinska et Maggy Schneider[10] .
Il s'avère que la tangente n'est pas toujours la droite qui approche le mieux la courbe. Ceci met l'accent sur le fait que la tangente est vraiment une notion locale. « Il s'agit de la meilleure approximation affine de la courbe au voisinage d'un point à condition de ne fixer à l'avance ni la longueur de l'intervalle contenant le point ni l'erreur admise dans l'approximation. Elles doivent pouvoir rester aussi petites que l'on veut ». En d'autres termes, si on fixe l'intervalle $[x_1, x_2]$ la sécante est meilleure quand x_0 est près des bornes de l'intervalle.

5°- Problématiser

Pour les élèves, problématiser avant de commencer un chapitre est important pour éveiller leur intérêt et commencer la construction du sens à long terme. Nous voyons souvent des élèves en début de terminale, qui, ayant appris à calculer des dérivées en 1[ère], ne savent plus à quoi sert cette notion. Certains ont retenu que le nombre dérivé donne le coefficient directeur de la tangente en un point, d'autres ont retenu que le signe de la dérivée donne le sens de variation de la fonction. C'est d'autant plus fréquent aujourd'hui que l'usage des TICE dispense de plus en plus de la recherche du tableau de variation que l'on dressait à partir du signe de la dérivée. La courbe est immédiatement donnée par la machine.
Ce phénomène nous semble directement lié au va et vient à faire entre le local et le global, entre ce qui se passe en un point et ce qui se passe sur un intervalle. Les élèves ont appris la définition d'une fonction croissante sur l'intervalle I sous la forme :
$\forall\ x \in \mathrm{I}\ ,\ \forall\ x' \in \mathrm{I}, \quad x \leq x' \ \Rightarrow\ f(x) \ \leq f(x')$
Le professeur ne pourrait-il pas demander, dans le cadre de la croissance stricte, $x \neq x'$ de remplacer l'implication précédente par une contrainte sur le signe d'un rapport, c'est-à-dire le signe de $\frac{f(x')-f(x)}{x'-x}$? Ceci permettait de faire le lien avec $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$. Dans le premier rapport x et x' varient tous les deux dans I, dans le second rapport l'intervalle est centré sur x_0 fixe et la variation se fait autour de x_0.

Dans la situation 1 que nous nommons « le terril », il s'agit pour un observateur au pied du terril, de trouver une place pour apercevoir un bâton planté au sommet. Les élèves pensent que l'observateur peut se mettre d'un côté ou de l'autre. Ils obtiennent ainsi deux tangentes à la parabole, avec un coefficient directeur positif pour l'une et négatif pour l'autre. Complétant cette première observation, la situation 3 « la bille » ou « la grippe » peuvent conduire à poser deux problématisations.

La première problématisation concerne la recherche du coefficient directeur de la tangente de façon plus rapide que ce qui a été fait dans le problème du terril (conjecturer une équation de droite puis vérifier algébriquement qu'elle rencontre la courbe en un point double). La seconde problématisation pourrait s'énoncer à ce niveau de la leçon et être la suivante : nous voudrions un outil qui nous permette de savoir quel est le sens de variation d'une fonction selon les intervalles avant de construire sa représentation graphique.

10 Voir l'article p. 13

Le bilan de la fin de la leçon sera alors : le signe de la dérivée nous renseigne sur les intervalles sur lesquels la fonction est croissante ou décroissante. C'est un théorème direct (si la fonction croît, alors la dérivée est positive) qu'on démontre de façon intuitive. La réciproque dont la démonstration repose sur le théorème des accroissements finis, est aussi admise intuitivement, et c'est l'outil qu'on cherchait dans cette première problématisation.

On pourrait ajouter dans la problématisation : « peut-on approcher une fonction par une fonction plus simple, et, plus précisément, linéariser autour d'un point ? ». Ceci nous paraît prématuré en classe de première. En effet, l'idée d'approximation linéaire n'est plus tellement dans l'esprit des programmes actuels. Néanmoins nous faisons remarquer aux élèves la partie principale de l'accroissement. Ainsi, dès la situation de la bille, l'accroissement est décomposé en deux parties $2h$ et h^2, avec la partie principale pour h petit qui est $2h$. Cela se traduit dans le cadre graphique et dans la cadre géométrique : d'une part avec l'accroissement de l'ordonnée d'un point d'abscisse x_0 quand l'abscisse devient $x_0 + h$ et l'accroissement de l'aire d'un carré quand le côté augmente de h. Cette décomposition de l'accroissement peut se traduire aussi dans les deux cadres pour le volume du cube.

6°- Choix des situations

Deux situations dans les documents EDUSCOL « le terril » et « la grippe »[11] ont retenu notre attention.

- celle dite « le terril » permet de faire sortir le mot « tangente » en lien avec la tangente au cercle du fait de deux points confondus.
On en donne une variante dans la progression de 1ère ES/ 1ère STMG : « l'éolienne ».

- Pour la suite, nous proposons deux possibilités : « propagation de la grippe » ou « chute de la bille ». La vitesse de propagation de la grippe convient bien aux élèves de 1ère ES.
On peut se contenter de cette situation dans ces classes sans utiliser la chute de la bille plus adaptée pour les 1ère S.

La situation du terril ne fait pas double emploi avec les deux autres. Comme nous l'avons dit plus haut, dans le problème du terril, la tangente cherchée passant par un point fixé extérieur à la courbe, les deux points de la sécante se rapprochent en bougeant tous les deux. Pour la grippe ou bien la bille, la tangente en un point donné de la courbe arrive en faisant se rapprocher de ce point d'abscisse fixe un autre point variable de la courbe.

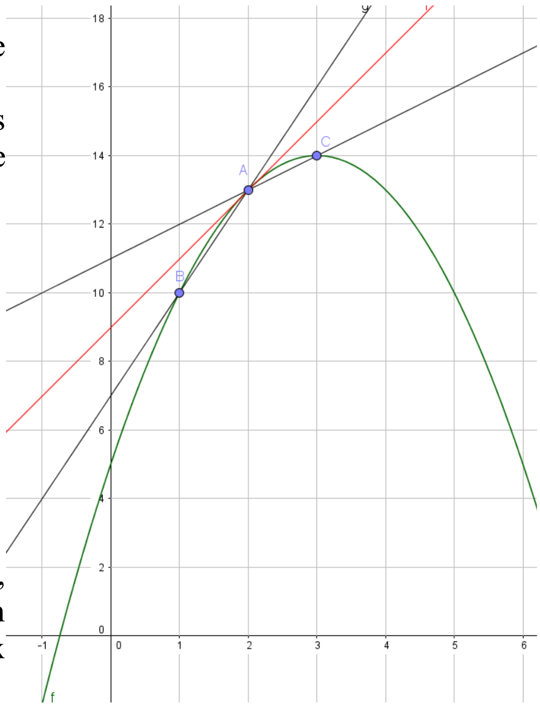
En revanche, la situation de la grippe et celle de la bille font un peu double emploi entre elles. Pour cette raison nous utilisons uniquement celle de la grippe en 1ère ES et uniquement celle de la bille en 1ère S, bien que chacune d'elles ait des inconvénients et des avantages par rapport à l'autre. Nous les signalons ici, mais nous en reparlerons dans la description du déroulement en classe .

11 Pour la problème de la grippe voir le document d'accompagnement : nombre dérivé et évolution temporelle destiné aux premières STMG(éduscol juin 2013), pour celui du terril voir le document d'accompagnement du programme de 1ère de 2001 , repris dans celui sur l'analyse en 1ère de 2012. Nous avons modifié les documents du terril et de la grippe avant de les utiliser dans nos classes.

Inconvénient de la situation de la grippe qui n'apparaît pas avec la bille :
Les abscisses sont des numéros de jours. On modélise par une fonction mais en réalité c'est une suite. Des élèves ont posé la question : « ce qui se passe en début de journée évolue-t-il en fin de journée ? ». Avec les 1ère ES, bien habitués à modéliser, cela passe cependant très bien. Mais attention aux fluctuations entre deux points. La modélisation lisse est sans doute acceptable ici, mais dans d'autres situations de mathématiques on reproche aux élèves de joindre trop hâtivement les points.... C'est pour cela qu'on a choisi d'évoquer une maladie imaginaire avec des symptômes qui permettent de dénombrer à chaque instant le nombre de nouveaux cas.
Cet inconvénient n'existe pas avec la bille où la variable temps exprimée en secondes est un réel sur l'axe des abscisses.

Intérêts de la situation de la grippe qui n'apparaît pas avec la bille **:**

- La fonction est croissante puis décroissante de sorte qu'on a l'exemple d'une pente positive, puis d'une pente négative alors que, pour la bille, cet avantage disparaît avec une fonction constamment croissante.



- Le choix de la courbe qui modélise le nombre de nouveaux cas en fonction du temps n'est pas facile.
Une parabole facilite le travail mais induit des idées fausses sur moyenne des vitesses moyennes et vitesse instantanée.

En effet si *f* est une fonction polynôme du second degré,

avec $f(x)=ax^2+bx+c$, on a :
$f(x+h)-f(x-h)=4ahx+2hb$ et $f'(x)=2ax+b$.
donc $f'(x)=\frac{1}{2}\times\frac{(f(x)-f(x-h))+(f(x+h)-f(x))}{h}$
Ainsi en prenant un intervalle centré autour de la valeur, on a directement le coefficient directeur de la tangente en faisant la moyenne des coefficients directeurs de deux sécantes.

La tangente en A à la courbe a comme coefficient directeur la moyenne des coefficients directeurs.
On a donc choisi, pour la situation de la grippe, une courbe composée de trois morceaux de paraboles. On va travailler sur un point en lequel la tangente va vérifier la propriété précédente et sur un deuxième point, qui se trouve être un point d'inflexion, avec une tangente traversante qui ne vérifie pas la propriété précédente.

Une progression pour introduire la notion de tangente en 1ère

Nous suivons la même progression sur ce chapitre quelle que soit la série.
En 1ère STMG, contrairement à ce que préconisent les programmes, nous avons choisi d'introduire d'abord la notion de tangente pour en déduire ensuite la notion de fonction dérivée. Nous pensons qu'ainsi les élèves donnent davantage de sens et comprennent plus facilement le lien entre signe de la dérivée et variation de la fonction.
Nous avons choisi d'organiser une progression en partant des conceptions des élèves et de problématiques à leur portée. Nous justifions nos choix qui dépendent étroitement de nos expérimentations en classe. L'ordre des situations que nous proposons est donc réfléchi et induit les réactions des élèves.

Situation 1 : introduire la notion de tangente

Dans les deux versions, il s'agit de trouver une droite passant par un point fixé extérieur à une parabole et tangente à cette parabole.
La version du terril est plus difficile, nous l'avons exploitée en 1ère S de deux façons différentes :
- le professeur donne l'équation de la parabole si on est en salle informatique,
- sinon les élèves trouvent l'équation seuls.

La version de l'éolienne, telle qu'elle est proposée, est plus facile et plus abordable pour les premières autres que la section S.
En salle informatique, l'équation de la parabole est donnée, les élèves lisent l'équation de la droite qu'ils conjecturent et vérifient que l'intersection avec la parabole conduit à une racine double pour l'équation. Le travail sur le paramètre disparaît. Si on veut traiter le problème en introduisant le paramètre comme dans le terril, c'est plus difficile. De plus les deux droites trouvées ne sont pas symétriques et une ne convient pas.

version 1 : le terril
Issu du document « Analyse » Eduscol (2001)

Au sommet d'un terril de 25 m de haut se trouve planté un bâton de 1 m de haut.
A quelle distance minimale du pied du terril faut-il se placer pour apercevoir le bout du bâton ?

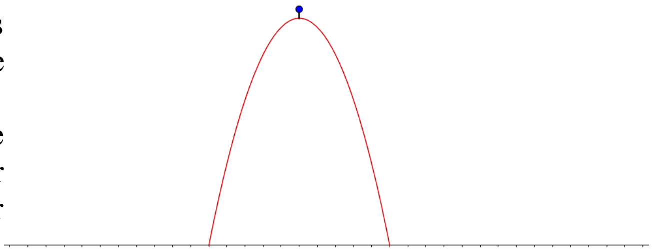
Ce problème a été testé en classes de 1ère S et 1ère ES. En devoir maison, on a rencontré l'obstacle suivant : les élèves qui se font aider par un aîné ou autre, ont traité ce problème en utilisant (sans la comprendre, et pour cause !) l'équation de la tangente à une courbe en un point, déflorant ainsi le cours à venir.
Ce problème permet d'une part de modéliser une situation, éventuellement à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, d'autre part de résoudre un problème à l'aide des résultats sur les équations du 2nd degré. Enfin, il permet à l'enseignant d'introduire la notion de tangente à une courbe.

Il peut se situer en amont du travail sur les nombres dérivés, par exemple, en application du 2nd degré.

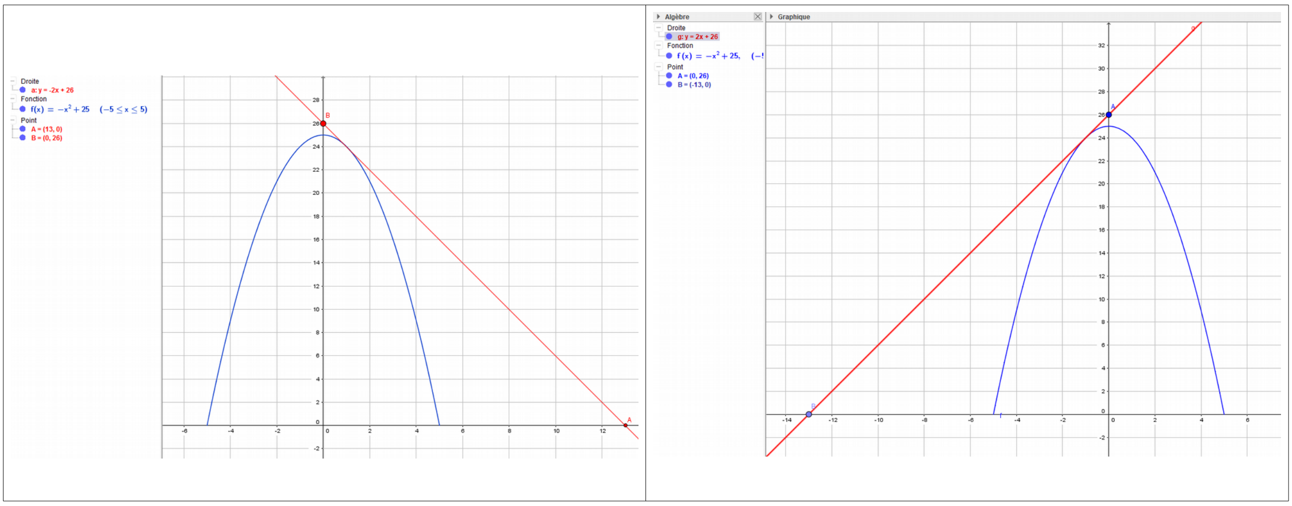
Plusieurs gestions de classe sont possibles :

- **En salle info :**

Dans un premier temps, le professeur peut laisser les élèves modéliser la situation par un croquis et les aider en dessinant un terril au tableau qu'il modélise par une parabole.
Certains élèves peuvent s'interroger sur la taille de l'observateur, on précise alors qu'il est couché pour éviter le théorème de Thalès qui ne ferait qu'alourdir le problème.



Les élèves disent : « pour que la distance soit minimale, il faut que la droite passant par le point d'observation et le sommet du bâton ait un seul point d'intersection avec la ligne de la pente de la colline. »
Les élèves remarquent que le tracé n'est pas facile et qu'on ne peut pas placer précisément le point A.
Lors du passage sur GeoGebra, les élèves interrogent le professeur car il leur manque une donnée pour tracer la parabole. C'est là que le professeur donne l'équation de la courbe : $y=-x^2+25$.
La fournir dès le début fait perdre une partie de la modélisation.
Deux figures solutions possibles : une obtenue en plaçant le point A à gauche et l'autre obtenue en plaçant le point A à droite.



Plusieurs groupes d'élèves zooment au niveau du point d'intersection de la droite et de la courbe : n'y a-t-il vraiment qu'un point d'intersection ? La droite touche-t-elle vraiment ? Ils adaptent, corrigent afin de lire ensuite une valeur de l'abscisse de A.

Trouver un seul point d'intersection apparaît vite à certains groupes comme le nœud du problème : ils écrivent alors que l'équation $-x^2+25=mx+26$ admet une unique solution.

Grâce à la fenêtre algèbre, ils conjecturent déjà laquelle.

On obtient alors $-x^2-mx-1=0$.

Un réflexe acquis en 1ère S est bien celui de calculer la valeur du discriminant dès qu'est rencontrée une équation du 2nd degré. Ici $\Delta=m^2-4$. Une seule solution est attendue donc $\Delta=0 \quad \Leftrightarrow m^2-4=0$.

La majorité des élèves conclut alors $m = 2$.

Une discussion animée s'engage au niveau des groupes car suivant les cas, la droite « monte » ou pas et ce n'est pas le résultat attendu par certains (fenêtre Algèbre de GeoGebra).

Un élève, se penchant sur l'écran du groupe voisin explique : « votre droite est tracée du côté où la fonction est croissante et son coefficient directeur est positif contrairement à notre tangente, tracée du côté où la fonction est décroissante. ».

Le mot tangente apparaît donc, aussitôt repris par l'ensemble de la classe. Quand ils le justifient, les élèves font référence au cercle en disant que c'est la droite qui « touche » le cercle en un seul point.

De plus, un lien entre croissance de la fonction et coefficient directeur vient d'être établi de manière très intuitive.

La résolution se poursuit ; on trouve l'équation de cette droite avec suivant les cas $m=2$ ou $m=-2$.

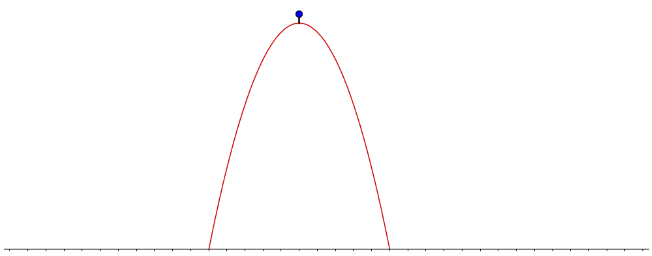
Il y a donc deux droites d'équation respective $y=2x+26$ et $y=-2x+26$.

L'ultime calcul consiste à trouver l'abscisse du point d'intersection de la droite avec l'axe des abscisses.

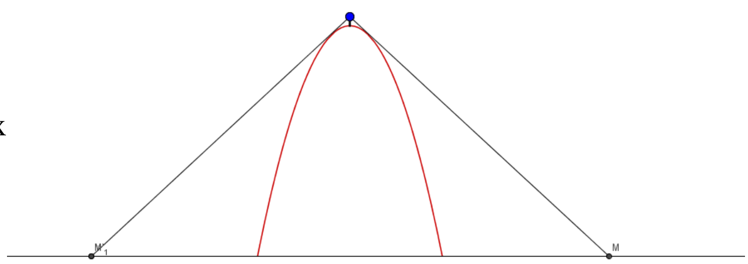
On trouve alors -13 ou 13 suivant les cas soit une distance de 13.

- **en salle de classe :**

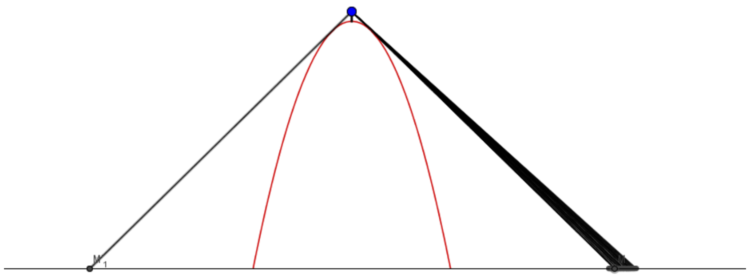
On distribue aux élèves le document :



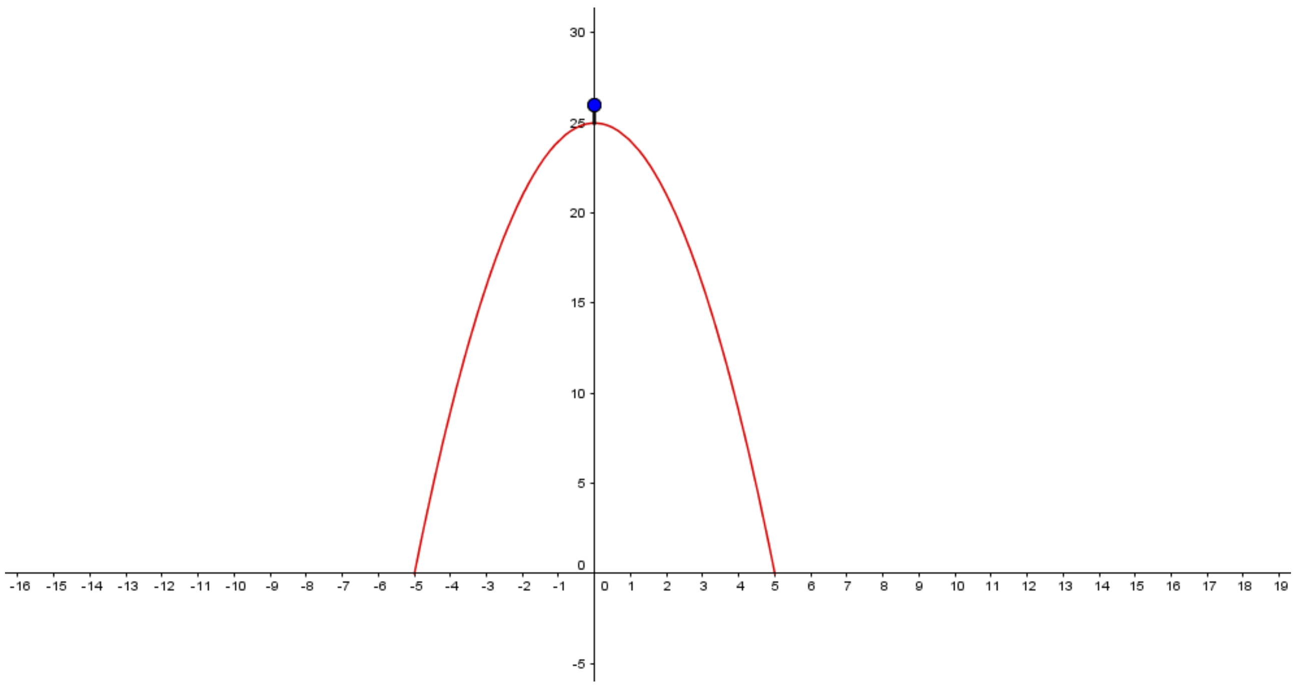
Les élèves proposent assez aisément deux solutions :



Pour que la distance soit minimale, il faut que la droite passant par le point d'observation et le sommet du bâton ait un seul point d'intersection avec la ligne de pente de la colline.
Les élèves remarquent que le tracé n'est pas facile et qu'on ne peut pas placer précisément le point M. Le professeur utilise GeoGebra (ou fait manipuler un élève) pour montrer que le placement de M n'est pas facile.



Y aurait-il plusieurs positions possibles ? Pour s'en assurer on va faire des calculs, comment peut-on procéder ? Les élèves reconnaissent une parabole, on va travailler avec son équation en se plaçant dans un repère.
Pour faciliter le travail et homogénéiser les résultats, le professeur impose le choix du repère et distribue ce graphique :



Le professeur fait travailler les élèves en groupe de deux.
Les élèves commencent par déterminer l'équation de la parabole : $y=-x^2+25$. Ce travail ne présente pas de difficultés particulières après le chapitre sur le second degré.
Ils ont plus de mal à mettre le problème en équation. On peut leur demander de reformuler le problème : « finalement on cherche les droites qui passent par le sommet du bâton et qui ont un seul point commun avec la parabole ». Il faut aussi les inciter à bien lister les données du problème :

- équation de la parabole,
- l'ordonnée à l'origine de la droite est égale à 26,
- il y a un seul point d'intersection entre la droite et la parabole.

Donc la droite a une équation de la forme $y=mx+26$.
Déterminer l'abscisse du point d'intersection de la droite et la parabole, c'est résoudre l'équation :
$-x^2+25=mx+26 \Leftrightarrow x^2+mx+1=0$.
On reconnaît une équation du second degré, dont le discriminant vaut : $\Delta = m^2-4$. L'équation a une unique solution si et seulement si $m=2$ ou $m=-2$.
On trouve donc deux droites d'équation respective $y=2x+26$ et $y=-2x+26$.

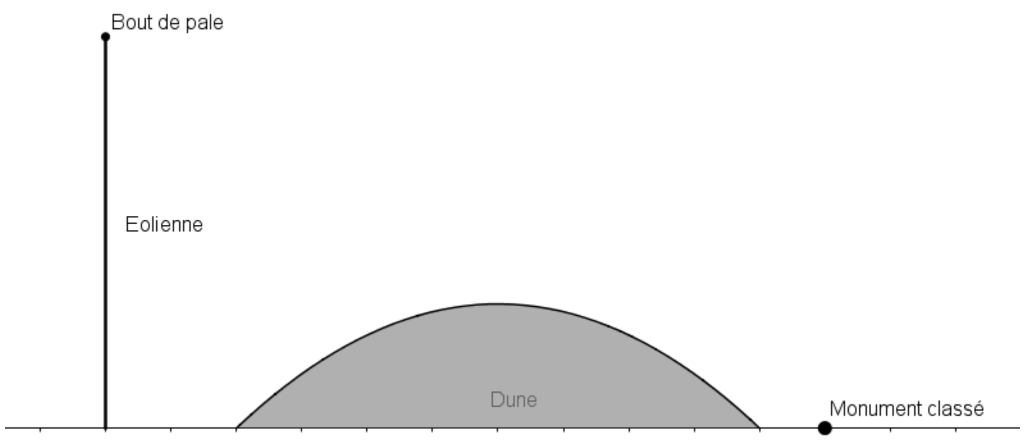
Il s'agit pour répondre au problème de départ de déterminer l'abscisse du point d'intersection de ces droites avec l'axe des abscisses, on trouve 13 et -13.

Les élèves répondent que l'observateur doit se trouver à 8 unités de longueur du pied de la colline.

Nous proposons maintenant une variante du terril mise au point par Gaspard Chevalier durant son année de stage. Elle permet aussi d'introduire la notion de tangente et a été testée en 1ère ES.

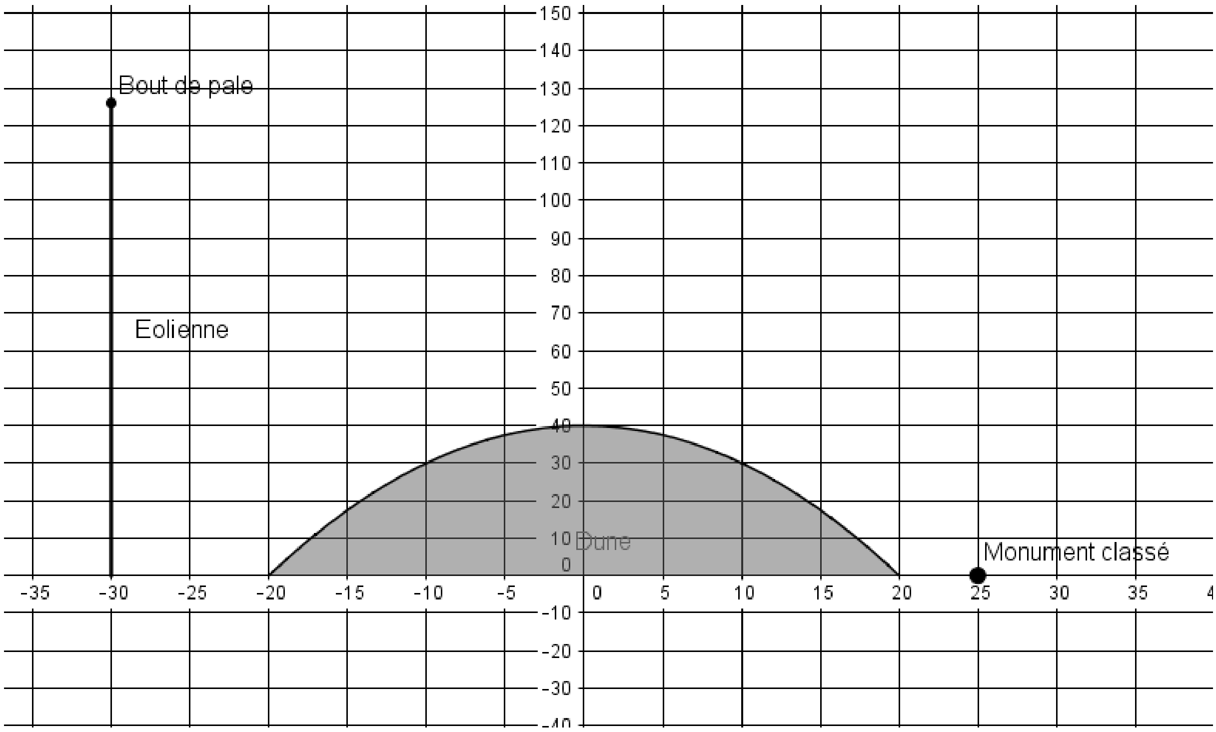
Version 2 : l'éolienne

Karine travaille sur un projet d'éolienne. Afin de maximiser les chances d'obtenir le permis de construire, elle décide que l'éolienne ne devra pas se voir depuis le parvis du monument historique se situant de l'autre côté de la dune. Quelle est la hauteur maximale du bout de la pale de l'éolienne ? (point le plus haut de l'éolienne)?



Les élèves travaillent d'abord sur papier et disent assez rapidement qu'il faut tracer la droite qui passe par le parvis du monument et qui « touche » la courbe en un seul point.

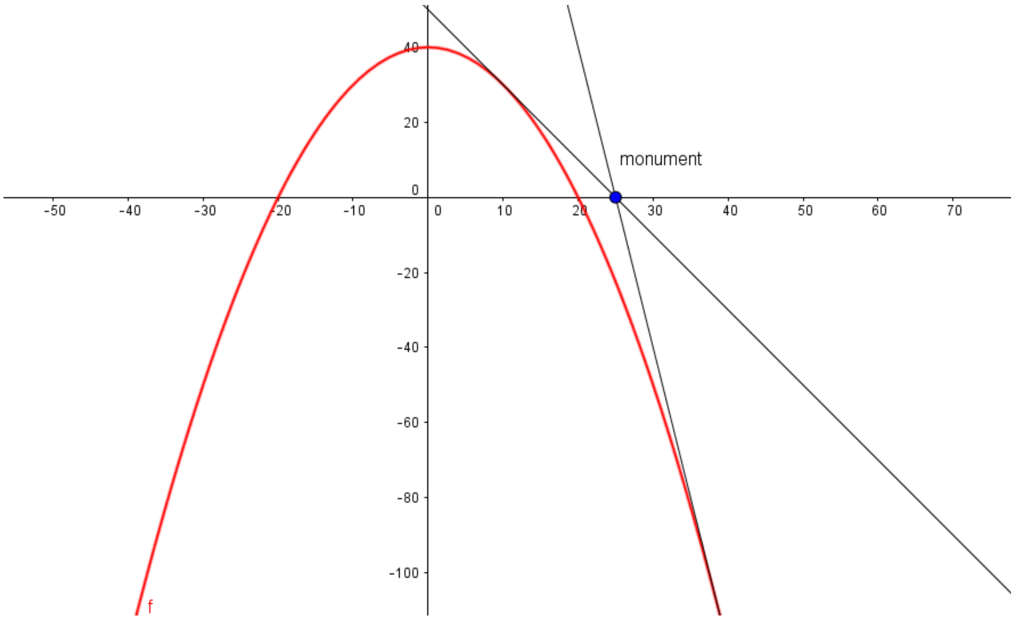
Les élèves travaillent ensuite sur GeoGebra sur lequel ils ouvrent le fichier fourni par l'enseignant.



Les élèves conjecturent la position de la droite, ce qui n'est pas chose aisée. Les élèves zooment pour s'assurer qu'il n'y a qu'un point d'intersection.
Ils déterminent l'équation de la droite à l'aide de la fenêtre Algèbre du logiciel et trouvent $y=-2x+50$.
Le professeur leur demande s'ils sont sûrs de leur équation, certains proposent de vérifier que cette droite et la parabole ont un seul point d'intersection.
Il s'agit de montrer que l'équation $-0,1x^2+40=-2x+50$ a une seule solution.
$-0,1x^2+40=-2x+50 \Leftrightarrow -0,1x^2+2x-10=0 \Leftrightarrow -0,1(x^2-20x+100)=0 \Leftrightarrow -0,1(x-10)^2=0$
on a donc bien une seule solution $x=10$.
il reste à déterminer l'intersection entre cette droite et la droite d'équation $x=-30$, soit $y=60+50=110$.
L'éolienne peut donc avoir une hauteur maximale de 110 m.

Remarques pour le professeur :

Cette situation peut aussi être utilisée en 1ère S mais les calculs sont moins faciles que pour le terril.
La droite a pour équation $y=m(x-25)$.
La parabole a pour équation $y=-0,1x^2+40$ *, on veut donc que l'équation* $mx-25m=-0,1x^2+40$ *ait une seule solution.*
$mx-25m=-0,1x^2+40 \Leftrightarrow 0,1x^2+mx-25m-40=0$
or $\Delta=m^2+4\times0,1(25m+40)=m^2+10m+16$ *, on doit donc résoudre* $m^2+10m+16=0$
on calcule le discriminant de ce nouveau trinôme
$\Delta_1=100-64=36$ *, on a donc deux solutions,* $m_1=\dfrac{-10-6}{2}=-8$ *et* $m_2=\dfrac{-10+6}{2}=-2$
On a donc deux droites possibles , T_1 *d'équation* $y=-2(x-25)$ *et* T_2 *d'équation* $y=-8(x-25)$.



La deuxième droite est éliminée puisqu'elle ne permet pas de répondre au problème.
En utilisant T_1 *, on trouve que la hauteur de l'éolienne doit être de* $-2\times(-30-25)=110$ *m.*
On peut aussi utiliser le problème du terril en 1ère ES et en 1ère STMG en la gérant de la même façon que celle exposée ci-dessus pour l'éolienne. On conjecture l'équation des droites à l'aide de GeoGebra et on vérifie qu'elles n'ont qu'un point commun avec la parabole.

En bilan de cette situation, que ce soit avec « le terril » ou avec « l'éolienne », le professeur demande comment on pourrait appeler cette droite, le mot « tangente » est déjà apparu lors de discussions informelles. Il reste maintenant à définir cette tangente, on retrouve les mêmes propositions d'élèves quelle que soit la série :

- la droite doit passer par le point,

- il n'y a qu'un point d'intersection/ça ne coupe qu'en un seul point,

- quand on zoome (pour cela utiliser le support d'un logiciel ou d'une calculatrice avec les données précédentes), la courbe et la droite se confondent ; c'est la droite indiscernable de la courbe au voisinage du point,

- la droite reste entièrement du même côté de la courbe (ne traverse pas la courbe),

- ça colle à la courbe, ça effleure la courbe.

On doit donc « affiner » cette définition « floue », c'est le rôle de la deuxième situation.

Situation 2 : affiner la définition de la tangente

1. Observer les courbes suivantes, quelle conjecture peut-on faire : tangente ou pas tangente ?

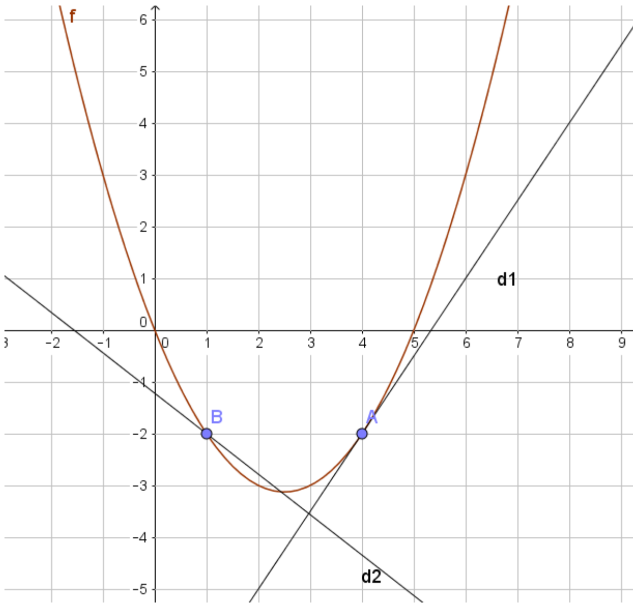


Figure 1

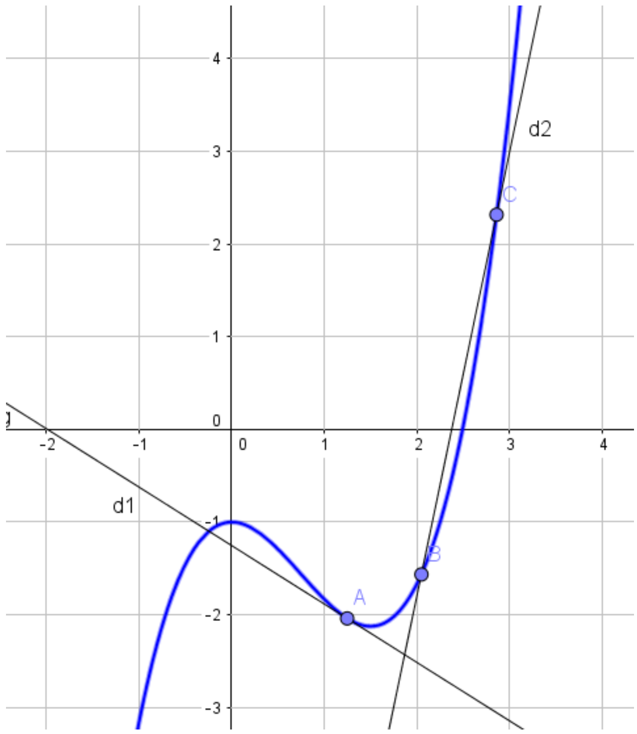


Figure 2

Figure 3

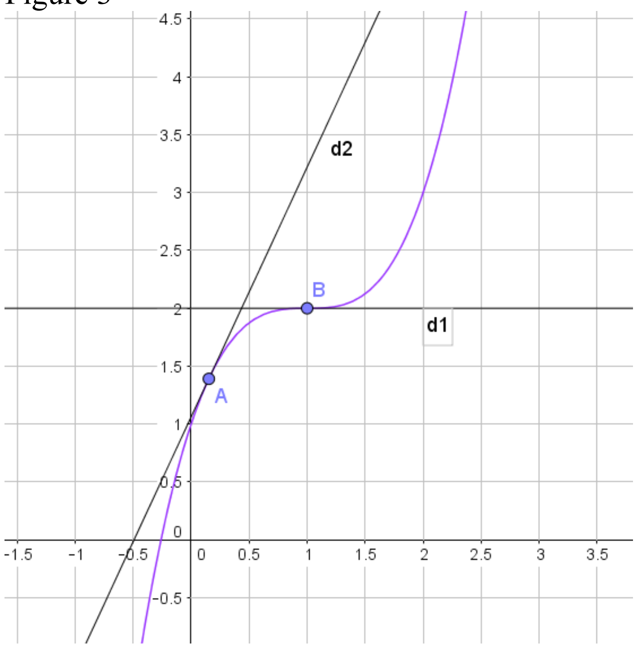
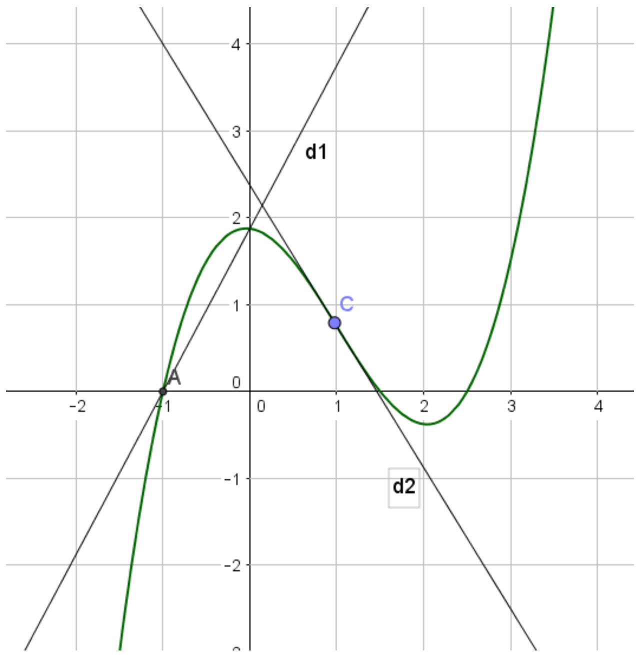


Figure 4

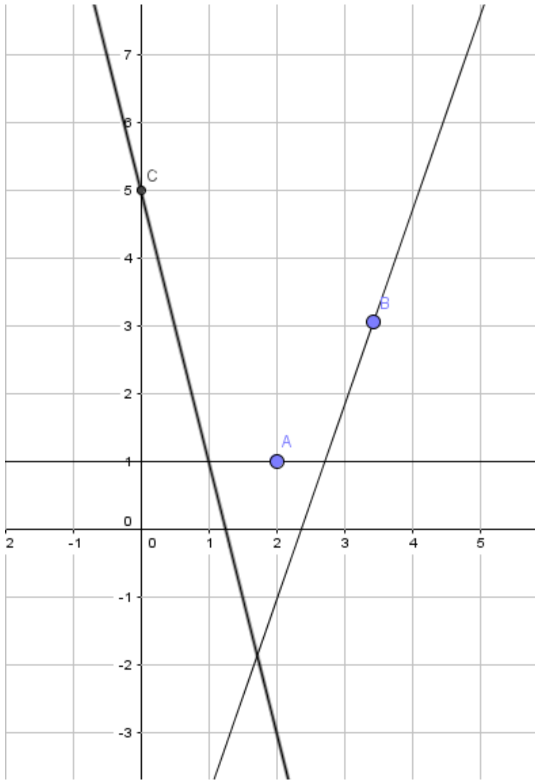


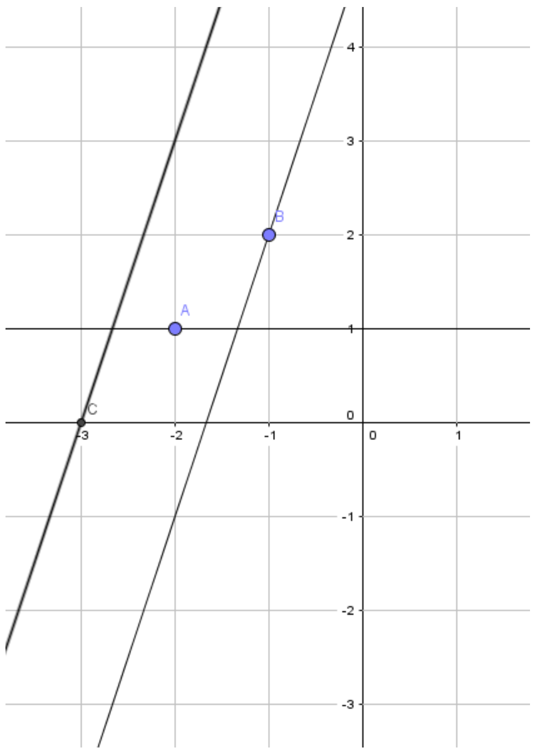
Cet exercice permet de réaffirmer que localement la courbe et sa tangente se confondent ; une discussion s'engage à propos de la droite d_1 sur la figure 2. Très vite, il est admis que la tangente est une notion locale, au voisinage d'un point : la droite peut recouper la courbe « plus loin ».

Contrairement à ce qu'on pourrait croire, les figures 3 et 4 ne font pas débat. La plupart des élèves affirment que, pour la figure 3, d_1 n'est pas une tangente car elle traverse la courbe et donnent le même argument pour dire que dans la figure 4, d_2 n'en est pas une.

Le professeur ne tranche pas et propose l'exercice suivant :

2. dans chaque cas, tracer l'allure possible d'une courbe à partir des tangentes et des points :



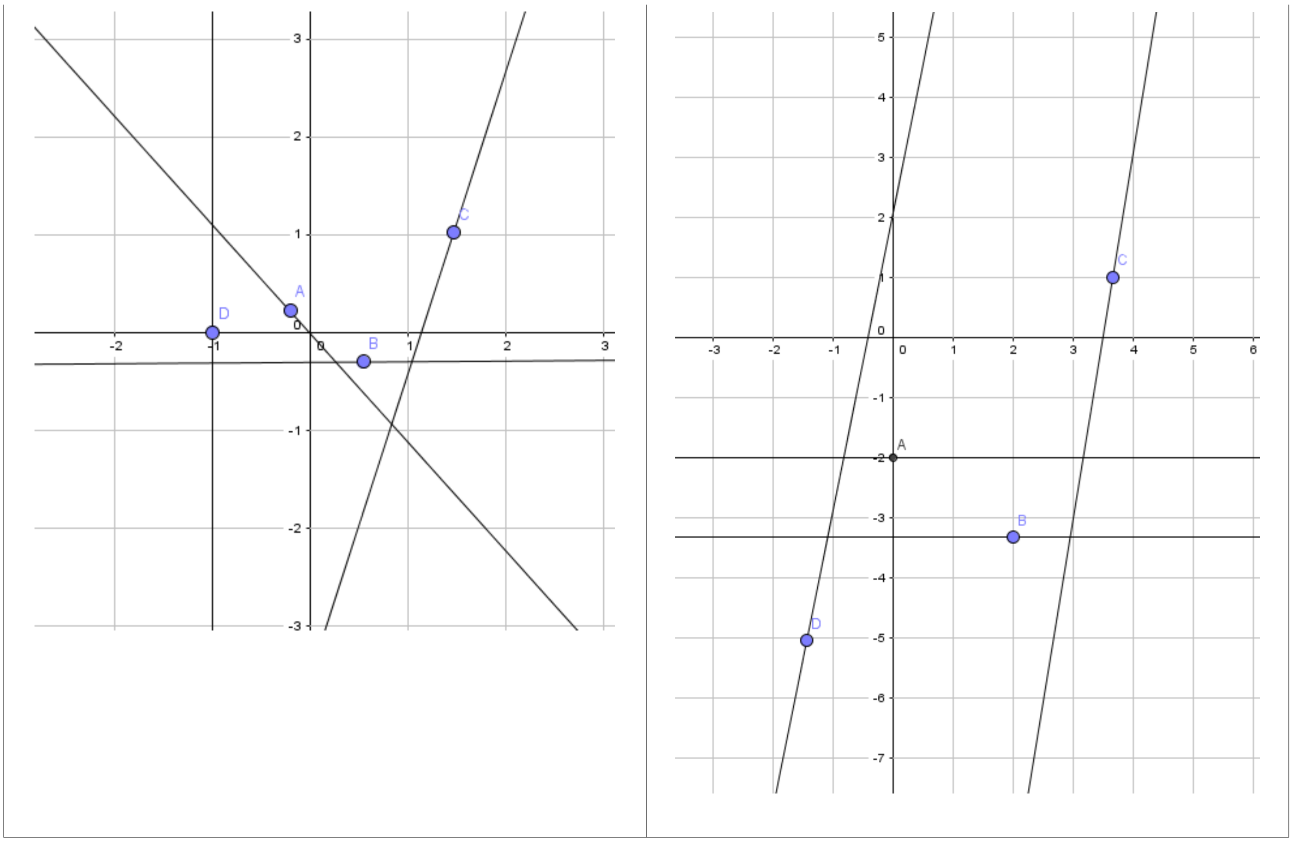


La deuxième figure fait sauter l'obstacle de l'exercice précédent car spontanément, au niveau du point A, les élèves tracent une tangente *traversante*.

On peut alors distinguer deux types de tangente : tangente *traversante* et tangente *touchante* .

Le professeur projette le document GeoGebra d'où est issue la figure 3 de l'exercice n°1, zoome autour de la tangente qui posait problème avant.

Il propose ensuite aux élèves deux autres tracés :



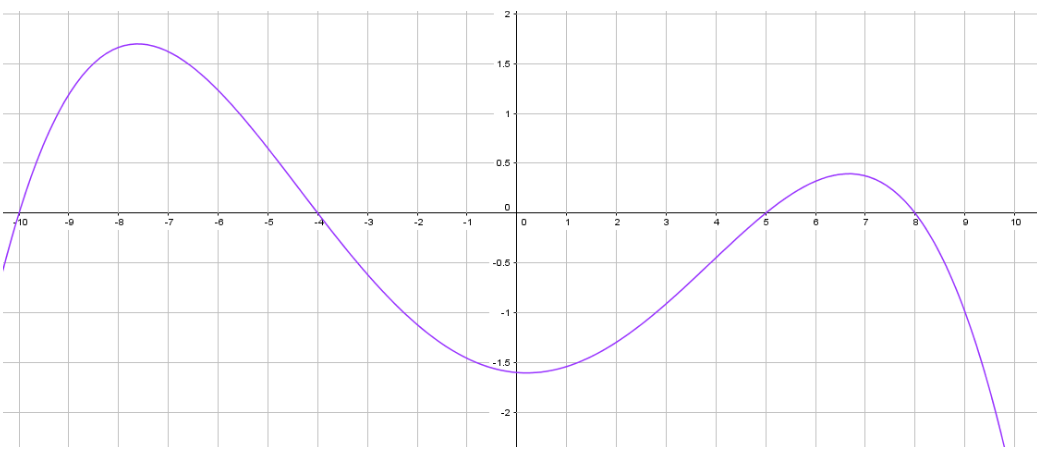
Avec cet exercice, des idées intéressantes sur le lien entre variation de la fonction et pente de la droite émergent dans la classe : « la droite est croissante donc la fonction l'est aussi ».
A cet instant de la séance, des élèves peuvent proposer une définition : la tangente à une courbe au point A est la droite passant par A qui se rapproche le plus de la courbe au voisinage du point A.

Nouvelle définition « floue » intuitive :

La tangente à une courbe au point d'abscisse *a* est la droite passant par A(*a* ; *f*(*a*)) qui se rapproche le plus de la courbe au voisinage du point A ou encore localement autour du point A.

3. Tracer des droites pouvant être tangentes à cette courbe aux points indiqués dans le tableau :

Point	A	B	C	D
Abscisse	-9	-2	-1	0



Cet exercice permet de faire émerger l'idée que l'abscisse du point ne suffit pas à tracer précisément la tangente.

Beaucoup d'élèves ne sont pas satisfaits de leurs tracés de tangentes, faits « au pif » bien qu'ils aient suivi la définition trouvée.

On s'interroge alors sur ce qui pourrait fixer cette droite. Deux propositions émergent :

- trouver un autre point : proposition vite écartée,

- connaître le coefficient directeur de cette tangente.

On pourra alors « fixer » cette tangente et en « fixer » la définition.

Pour tracer précisément la tangente à une courbe on a besoin de déterminer son coefficient directeur.

Situation 3 : Déterminer le coefficient directeur de la tangente

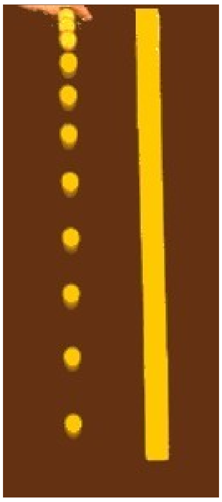
Étape 1 : de la sécante à la tangente

Nous proposons deux versions de cette étape 1, la première version : « la bille » est plus adaptée aux élèves de 1èreS, STL et STI. Étant donné que les élèves des autres sections ne font quasiment plus de sciences physiques, nous avons donc réfléchi à une autre situation, la deuxième version : « la grippe », beaucoup plus axée sur la lecture graphique et nécessitant moins de calculs.

version 1 : la bille

Pour ces séquences, les questions sont à donner les unes après les autres. C'est le débat dans la classe qui permet de répondre à chacune d'entre elles et de faire émerger la notion de fonction dérivée. Le cours se déroule donc sous la forme de questions-réponses et il ne faut pas dévoiler l'ensemble des questions au risque de fausser le déroulement de la séance.

La chronophotographie est le terme historique qui désigne une technique photographique qui permet de prendre une succession de photos à intervalles réguliers permettant d'étudier le mouvement en décomposé de l'objet photographié. A l'aide de cette technique on a pu prendre les mesures nécessaires à l'étude de la chute d'une bille lâchée, sans vitesse initiale, du haut d'une tour qui mesure 122,5m.



On a obtenu les données suivantes :

Temps (s)	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Distance parcourue (en m)	**4,9**	**19,6**	**44,1**	**78,4**	**122,5**

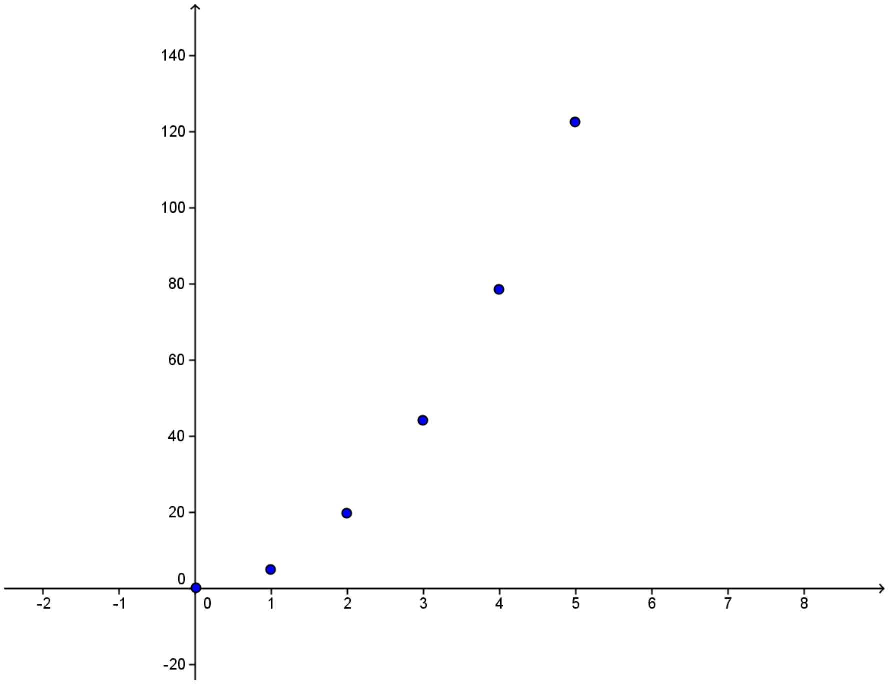
1. Placer les points sur un graphique (on mettra en abscisse le temps et en ordonnée la distance parcourue par la bille). Conjecturer la nature de la courbe obtenue et déterminer son équation.

2. Calculer la vitesse moyenne de la bille sur le parcours.

3. Calculer la vitesse moyenne entre 0s et 1s, entre 1s et 2s… et compléter le tableau suivant :

Temps	Entre 0s et 1s	Entre 1s et 2s	Entre 2s et 3s	Entre 3s et 4s	Entre 4s et 5s
Vitesse moyenne					

1. Notons P la courbe. On obtient le graphique suivant :



On conjecture une parabole de sommet l'origine et on trouve $d=4{,}9t^2$.

Il est parfois nécessaire de clarifier ce que représente ce graphique et lever une confusion éventuelle entre trajectoire de la bille (a priori rectiligne) de sa loi de mouvement représentée ci-dessus.

2. Calculer la vitesse moyenne de la bille sur le parcours.

On obtient $\frac{122{,}5-4{,}9}{4}=29{,}4\,ms^{-1}$.

3. Calculer la vitesse moyenne entre 0s et 1s, entre 1s et 2s…

On obtient :

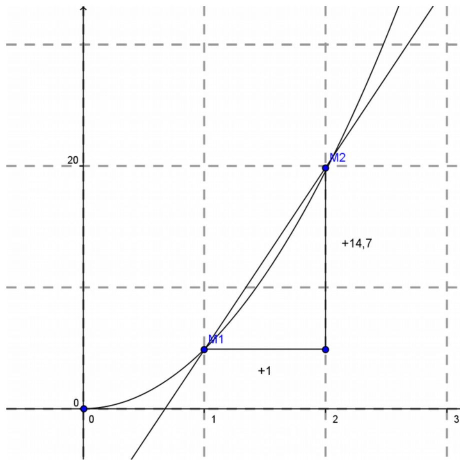
Temps	Entre 0s et 1s	Entre 1s et 2s	Entre 2s et 3s	Entre 3s et 4s	Entre 4s et 5s
Vitesse moyenne en $m.s^{-1}$	4,9	14,7	24,5	34,3	44,1

On remarque que les vitesses moyennes ne sont pas constantes et augmentent : il y a une accélération.

Le professeur questionne alors les élèves :

« Pour calculer la vitesse moyenne entre 1s et 2s , on a calculé $\frac{19{,}6-4{,}9}{2-1}$, que représente ce calcul sur le graphique de la courbe ? ».

Graphiquement cette vitesse moyenne représente le coefficient directeur de la sécante $(M_1 M)$.



Le dialogue entre professeur et élèves se poursuit :

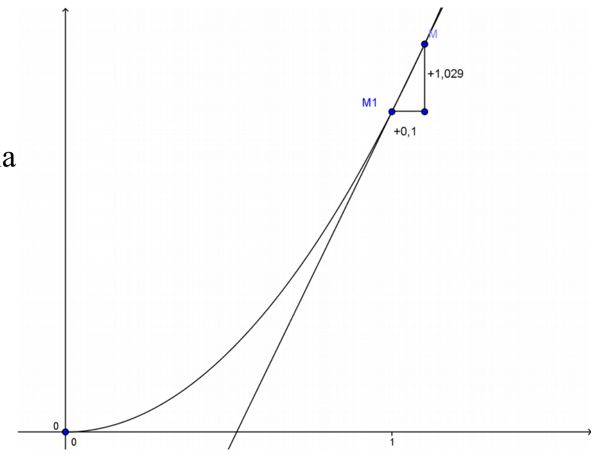
« On a vu que la vitesse moyenne sur un intervalle de 1s n'est pas constante sur l'ensemble du parcours. A-t-on exactement la vitesse à l'instant t=1s ? Comment pourrait-on s'en approcher ? ».

Des élèves proposent de recommencer avec des intervalles de temps plus petits soit en calculant la vitesse moyenne sur [0,9;1] soit sur [1;1,1]. Aucun ne nous a encore proposé de calculer la vitesse moyenne sur un intervalle centré en 1. Ceci est peut-être induit par la question précédente.

Temps en s	1	1,1
Distance parcourue en m	4,9	5,929

La vitesse moyenne est $\frac{5{,}929-4{,}9}{1{,}1-1}=10{,}29\ ms^{-1}$

On fait le lien avec le coefficient directeur de la sécante :



En travaillant sur l'intervalle [1;1,1] (ou [0,9;1]), on n'a toujours pas la vitesse instantanée à l'instant 1s. On doit encore réduire l'amplitude de l'intervalle :

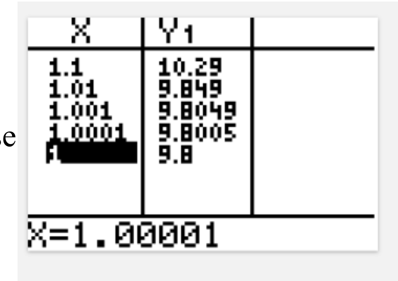
Temps en s	1	1,01
Distance parcourue en m	4,9	4,99849

La vitesse moyenne est $\dfrac{4{,}99489-4{,}9}{1{,}01-1}=9{,}849\,ms^{-1}$

Le professeur incite les élèves à faire à nouveau le lien avec le coefficient directeur de la sécante à la courbe et montre à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique que le point M se rapproche du point M_1 .

Sur l'intervalle [1;1,001], la vitesse moyenne est $\dfrac{4{,}9098049-4{,}9}{1{,}001-1}=9{,}8049\,ms^{-1}$.

Les élèves peuvent proposer de faire afficher la table de valeurs de la fonction v définie par $v(t)=\dfrac{4{,}9t^2-4{,}9}{t-1}$:



On conjecture que plus t se rapproche de 1 plus la vitesse se rapproche de 9,8.

Le logiciel de géométrie dynamique permet d'arriver au cas limite où le point M se retrouve sur le point M_1 et on reconnaît la tangente à la courbe.
On conjecture que le coefficient directeur de cette droite est 9,8 soit à partir du travail précédent soit en utilisant le logiciel.

Version 2 : la grippe

Pour construire cette situation nous sommes partis de l'énoncé proposé dans le document d'accompagnement 1ère STMG de juin 2013. Il s'agissait d'étudier la propagation de l'épidémie de grippe en 2009 à partir du tableau de valeurs suivant :

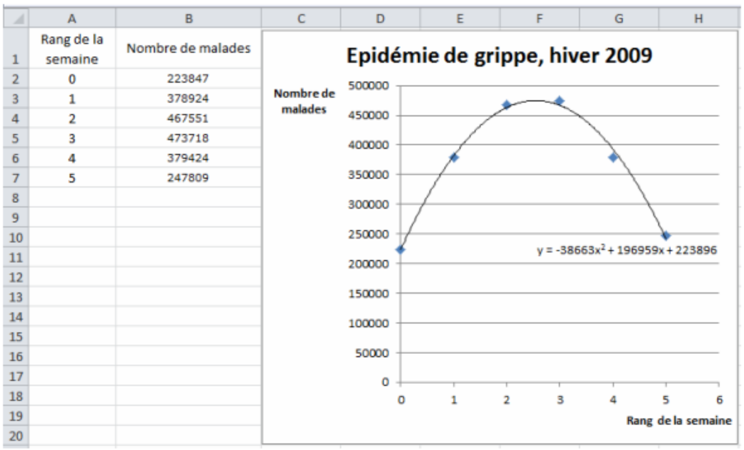
Exemple d'énoncé :

Le réseau Sentinelles fournit les chiffres suivants pour l'épidémie de grippe de l'hiver 2009.

Semaine	46	47	48	49	50	51
Rang de la semaine	0	1	2	3	4	5
Nombre de cas	223 847	378 924	467 551	473 718	379 424	247 809

Données réseau Sentinelles, INSERM, UPMC

que l'on modélise par une courbe :



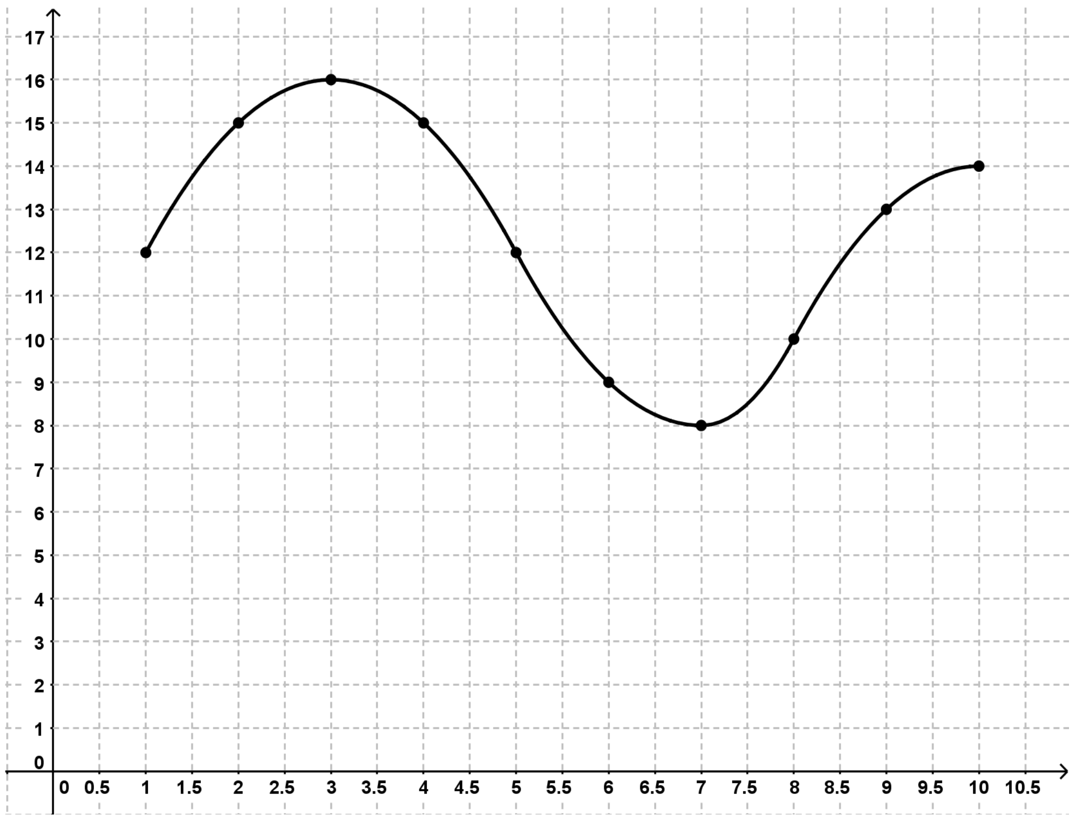
On considère la fonction f définie sur [0 ; 5] par $f(x) = -38\,663x^2 + 196\,959x + 223\,896$.

Comme nous l'avons expliqué dans l'introduction, cette approche nous gênait du fait de son caractère discret. Nous avons donc choisi de travailler sur une planète imaginaire où l'on pourrait instantanément mesurer le nombre de nouveaux cas.

Les élèves sont mis par groupe de deux, l'enseignant distribue une première feuille avec l'énoncé de l 'activité, la courbe associée et les premières questions qui permettent de s'approprier cette courbe. Il laisse travailler les groupes en autonomie pendant une dizaine de minutes.

Une nouvelle maladie frappe les habitants de la planète Pandora. Dès qu'ils sont infectés, les habitants (qui sont habituellement d'une couleur bleue) deviennent blancs. Inquiet, le ministre de la santé demande qu'une enquête de terrain soit immédiatement réalisée, pour étudier la propagation de la maladie et ainsi pouvoir répondre aux questions des journalistes.

Au bout de 11 jours, les médecins reviennent avec une courbe, modélisant le nombre de millions de nouveaux cas en fonction du temps, exprimé en jours.



Que devra répondre le ministre de la santé, si on lui pose les questions suivantes:

1. Combien y a-t-il eu de nouveaux cas le 5ème jour ?

---

2. Peut-on dire qu'il y a deux malades en plus, entre le 7ème et le 8ème jour ?

--

3. La maladie a-t-elle régressé entre le 3ème et le 7ème jour ?

---

4. Résumer par une phrase simple l'évolution de la maladie entre le 1er et le 10ème jour.

Volontairement, les axes de la courbe ne sont pas légendés afin que les élèves comprennent qu'ils étudient un nombre de « nouveaux cas » en fonction du « temps ». Par ailleurs, l'axe du temps est volontairement gradué de 0,5 en 0,5 pour inciter les élèves à passer du discret « nombre de jours » au continu (demi journée, heures, minutes, secondes …).

La première question permet aux élèves de comprendre l'énoncé et les coordonnées des points de la courbe.

La deuxième question est plus difficile. Certains élèves répondent : « oui, car il y a deux nouveaux malades de plus » mais très vite d'autres élèves expliquent : « non, car les points de la courbe représentent les « nouveaux malades », donc il y a 10 nouveaux cas en plus ».

La troisième question permet de faire comprendre aux élèves qu'ils ont sous les yeux une courbe de « vitesse » de propagation de la maladie et non celle des effectifs du nombre de malades.
La majorité des groupes pense que la maladie a régressé car il y a moins de nouveaux cas. Il faut donc préciser que « régresser » signifie « moins de malades en tout » et ici on ne connaît pas le nombre total de malades, de personnes guéries, etc... On ne connaît que le nombre de nouveaux cas.
Certains groupes disent alors que la maladie n'a pas régressé mais « qu'elle a progressé plus lentement », ou « qu'elle a évolué moins vite ». Cette question permet de faire émerger la notion de vitesse de propagation.
Quelques groupes restent sur le fait que « la maladie a régressé car les nouveaux cas sont moins nombreux » mais ils comprennent que la maladie « se propage toujours mais moins vite ».

1. Combien y a-t-il eu de nouveaux cas le 5ème jour ?

il y a eu 12 nouveaux cas le 5ème jour

2. Peut-on dire qu'il y a deux malades en plus, entre le 7ème et le 8ème jour ?

non il y a 10 malade en plus car on parle de nouveaux malades les effectifs ne se cumule pas.

3. La maladie a-t-elle régressée entre le 3ème et le 7ème jour ?

elle a effectivement régréssè car les nouveaux cas du maladies sont moins nombreuse mais elle se propage toujours mains vites.

La 4ème question permet d'attirer l'attention des élèves sur les deux parties de courbe où la maladie « se propagent plus vite ». Les élèves précisent alors : « Du 1er au 10ème jour, la maladie a constamment progressé. Du 1er au 3ème jour, elle a progressé considérablement ; du 3ème au 7ème jour, la progression a été moins rapide ; enfin, du 7ème au 10ème jour, elle a progressé rapidement à nouveau. »

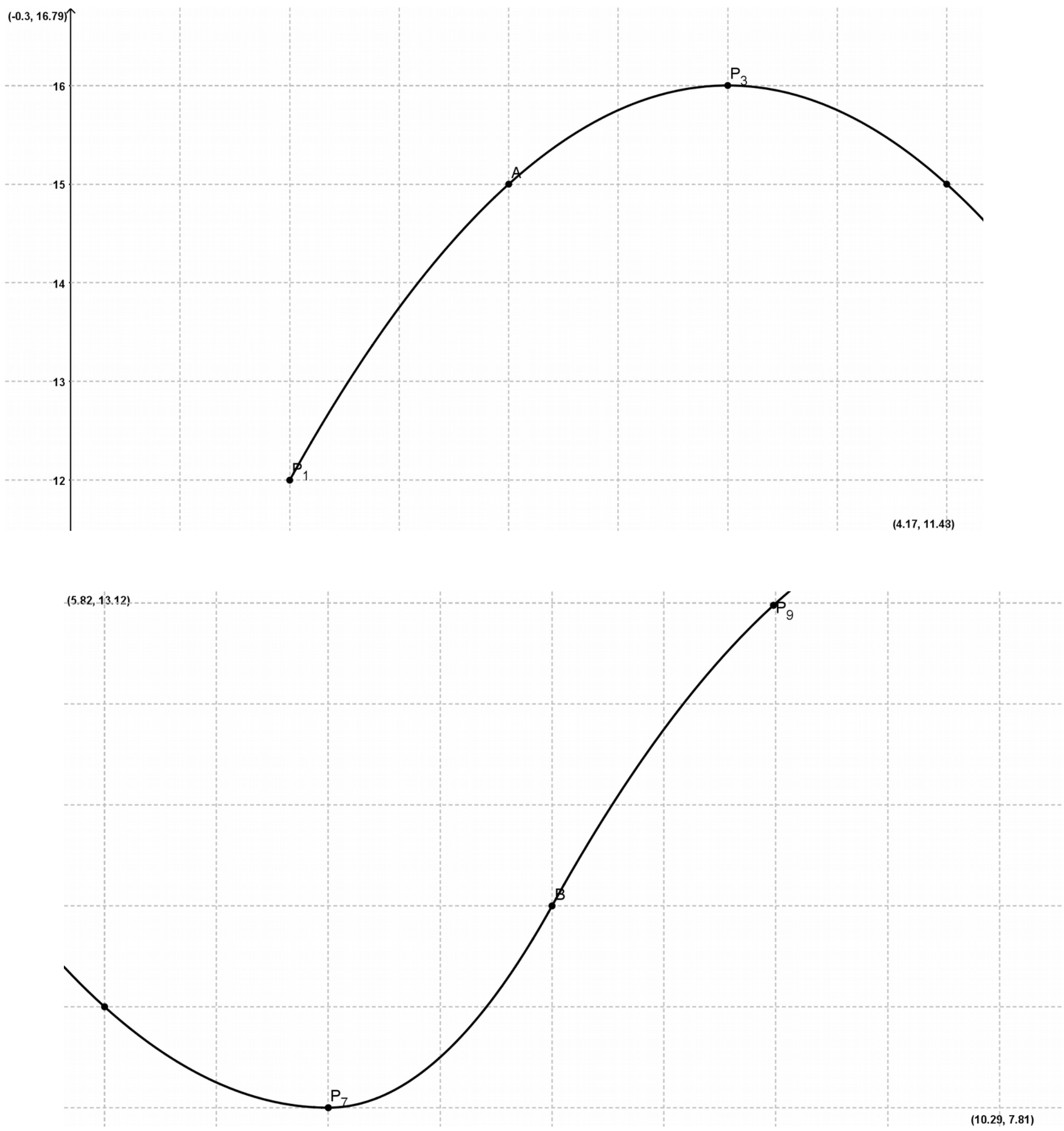
4. Résumer par une phrase simple l'évolution de la maladie entre le 1er jour et le 10ème jour.

La maladie progresse lentement mais touche chaque jour un peu de personnes Du 1ier au 3ème jour elle a progresée considérablement puis elle a faiblie jusqu'au 7ème jour pour progressee fortement jusqu'au 10ème jour

On en arrive alors à la question centrale de la situation :

« L'épidémie a-t-elle progressé plus vite le 2ème jour ou le 8ème jour ? »

Certains élèves parlent de « pente de la courbe » en disant : « il faudrait voir où la courbe est plus pentue », d'autres disent plutôt : « il faudrait savoir où la courbe monte le plus vite, ou encore où la fonction croît le plus vite », d'autres voudraient comparer les « écarts entre les jours ».
On a donc besoin de visualiser ce qui se passe autour des points de la courbe d'abscisse 2 et 8.
Le professeur fait travailler les élèves par deux en leur distribuant le document suivant qui donne les zooms de la courbe autour du point A d'abscisse 2 et du point B d'abscisse 8. Il leur demande de répondre à la question posée en argumentant leur résultat.
Pour faciliter la lisibilité de la courbe, les points dessinés correspondent au 1er jour, au 2ème jour (point A), au 3ème jour etc. En effet quand on zoome , on ne voit plus l'axe des abscisses.



Grâce à ces agrandissements, l'enseignant incite les élèves :

- à ne plus regarder les ordonnées des points mais à se focaliser davantage sur les « accroissements ».
- à considérer l'évolution de l'épidémie sur un intervalle de temps inférieur à une journée.

On laisse alors travailler les groupes pendant 15 minutes. Le professeur passe dans les rangs pour prendre connaissance du travail effectué et ainsi organiser le passage des groupes à l'oral, car l'ordre d'intervention est important.

Certains groupes se contentent de dire que la courbe semble monter plus vite autour de B et concluent alors que l'épidémie se propage plus vite le 8ème jour que le 2ème. Le professeur leur demande alors s'ils peuvent estimer ces vitesses de propagation.

De nombreux groupes commencent par faire un tableau de valeurs de la fonction :

t en jours	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nombre de nouveaux cas	12	15	16	15	12	9	8	10	13	14

mais font ensuite des calculs différents.

Il peut arriver que certains calculent des taux d'évolution :

$\frac{15-12}{12}=25\ \%$ et $\frac{10-8}{8}=25\%$. En effet la formule $\frac{V_A-V_D}{V_D}$ est très prégnante en 1ère ES et 1ère STMG.

Le nombre de nouveaux cas a augmenté de 25 % entre le 1er et le 2ème jour et de 25 % également entre le 7ème et le 8ème jour. Les élèves concluent que l'épidémie s'est propagée à la même vitesse le 2ème jour et le 8ème jour.

Ou encore $\frac{16-15}{15}\approx 6{,}7\ \%$ et $\frac{13-10}{10}=30\%$

Le nombre de nouveaux cas a augmenté d'environ 6,7% entre le 2ème et le 3ème jour et de 30 % entre le 8ème et le 9ème jour. Les élèves concluent que l'épidémie se propage plus vite le 8ème jour et commettent une erreur puisque les ensembles de référence sont différents.

Le professeur doit rappeler à l'ensemble de la classe qu'il a demandé une vitesse. Or une vitesse de propagation doit donner le nombre de nouveaux cas obtenus pour un intervalle de temps donné. Ce qui n'est pas le cas dans le calcul d'un taux d'évolution.
Cette intervention permet de clarifier la notion de vitesse.

La majorité des groupes font les calculs suivants :

15 – 12 = 3 ; Le nombre de nouveaux cas a augmenté de 3 entre le 1er et le 2ème jour.
10 – 8 = 2 ; le nombre de nouveaux cas a augmenté de 2 entre le 7ème et le 8ème jour.
Donc l'épidémie se propage plus vite le 2ème jour.

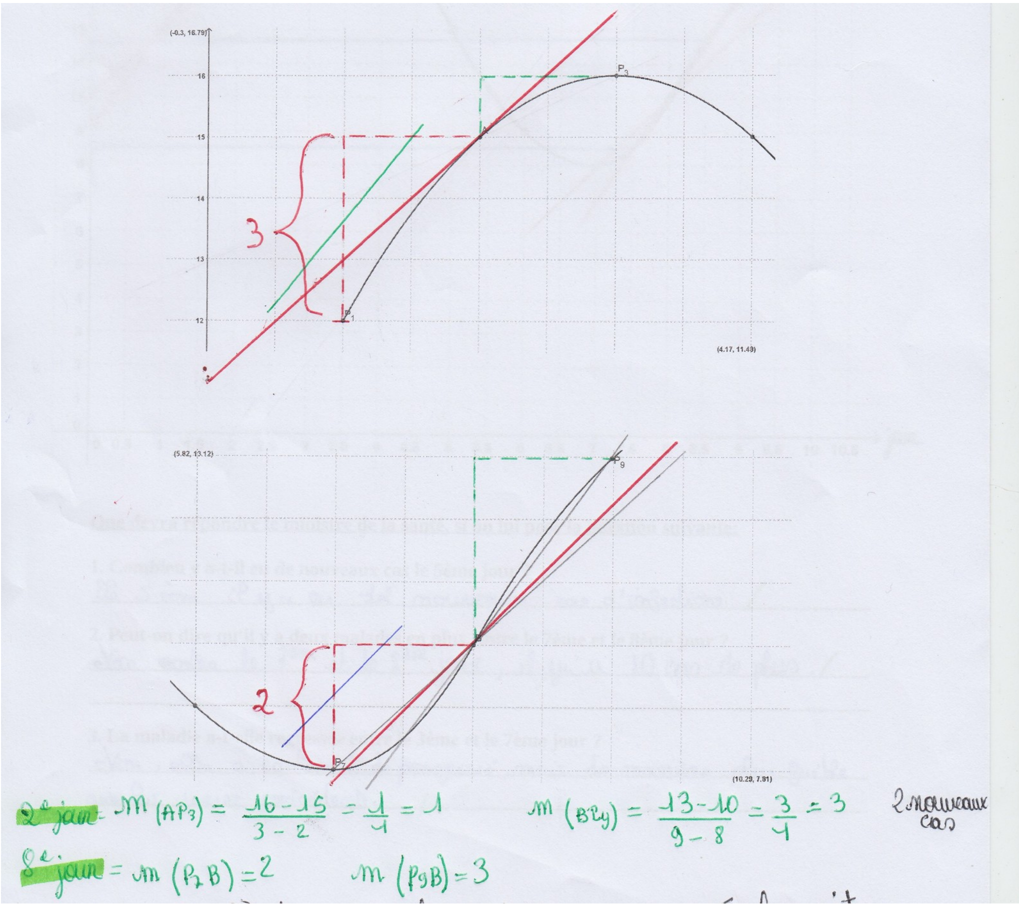
Ou
16 – 15 = 1 ; Le nombre de nouveaux cas a augmenté de 1 entre le 2ème et le 3ème jour.
13 – 10 = 3 ; le nombre de nouveaux cas a augmenté de 3 entre le 8ème et le 9ème jour.
Donc l'épidémie se propage plus vite le 8ème jour.

Ou
16 – 12 = 4 ; Le nombre de nouveaux cas a augmenté de 4 au cours du 2ème jour.
13 – 8 = 5 ; le nombre de nouveaux cas a augmenté de 5 au cours du 8ème jour.
Donc l'épidémie se propage plus vite le 8ème jour.

Comme pour la bille, aucun élève ne nous a proposé de déterminer l'augmentation du nombre de nouveaux cas entre le 1er et le 3ème jour pour estimer la vitesse de propagation le 2ème jour lors de la mise en commun.
Si cette proposition apparaît dans la classe, le professeur pourra l'exploiter.

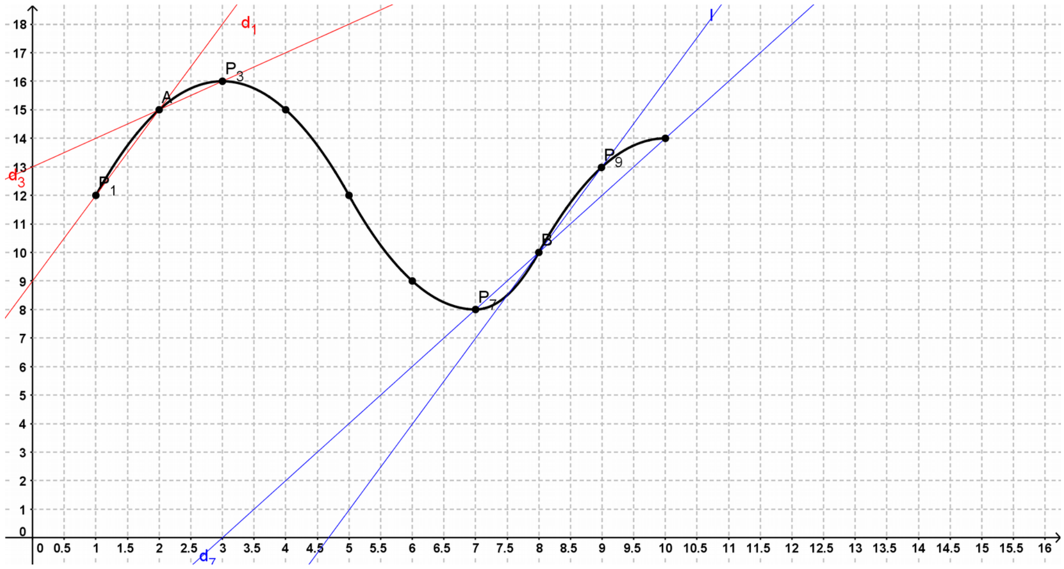
Le professeur demande aux élèves s'ils ont calculé une vitesse et s'ils peuvent visualiser sur le graphique ce que représentent leurs différents calculs.

Les élèves disent assez facilement qu'ils ont calculé des coefficients directeurs de droites.



Ils ont effectivement calculé une vitesse : la vitesse de propagation des nouveaux cas par jour.

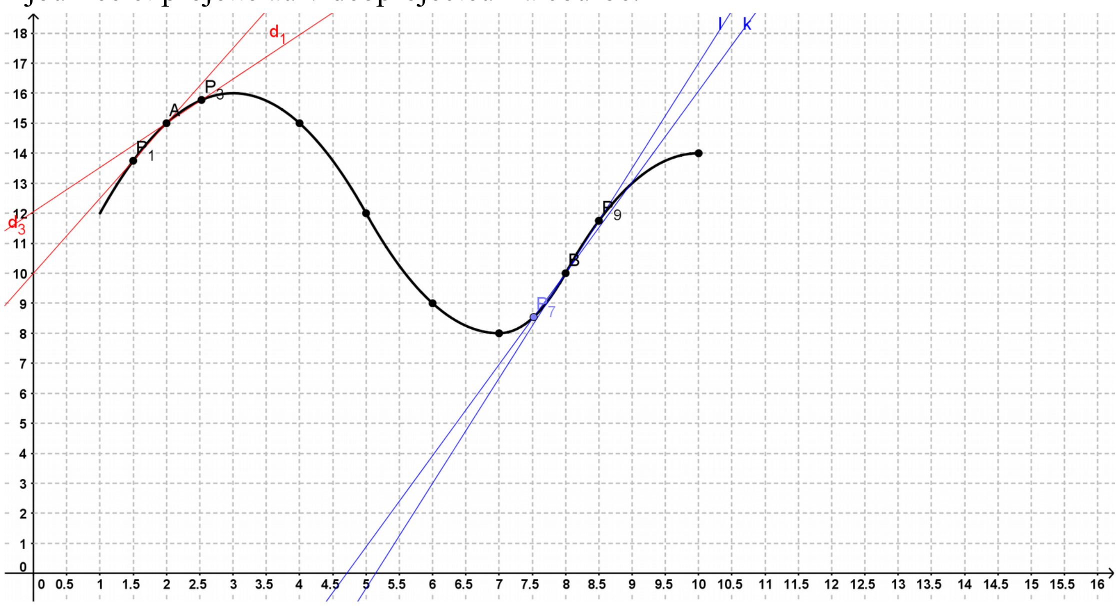
Le professeur vidéoprojette la courbe sur GeoGebra.



L'enseignant fait alors un résumé de ce que tous les groupes ont dit :

Entre le 1er et le 2ème jour, la vitesse est de 3 nouveaux cas par jour, et, entre le 2ème et le 3ème jour, la vitesse est de 1 nouveaux cas par jour.
Entre le 7er et le 8ème jour, la vitesse est de 2 nouveaux cas par jour, et, entre le 8ème et le 9ème jour, la vitesse est de 3 nouveaux cas par jour.
Pour essayer de se départager, pourrait-on <u>précisément</u> estimer la vitesse de propagation le 2ème jour d'une part et le 8ème jour d'autre part ?

Des élèves proposent de faire la moyenne des deux vitesses et disent alors :
2 nouveaux cas lors du 2ème jour et 2,5 nouveaux cas lors du 8ème jour donc c'est le 8ème jour.
Le professeur fait alors le parallèle entre vitesse instantanée et vitesse moyenne sur la route :
« si entre 8h et 9h vous avez roulé, en moyenne, à 90km/h puis entre 9h et 10h à une vitesse de 70km/h, est-ce que à 9h vous rouliez exactement à 80km/h ? ».
A nouveau le doute s'installe….
Certains élèves disent alors qu'il faut « se rapprocher du point A et du point B ».
Le professeur peut leur demander d'essayer de quantifier la vitesse moyenne de propagation par demi-journée et projette au vidéoprojecteur la courbe.

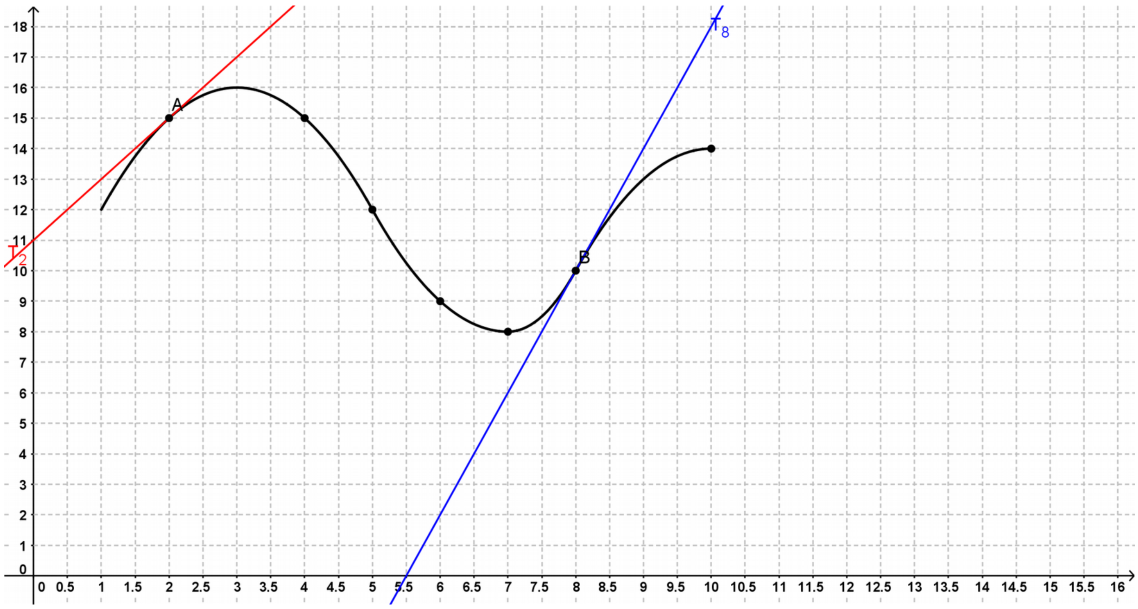


La suite de l'activité se fait de façon dialoguée avec les élèves :

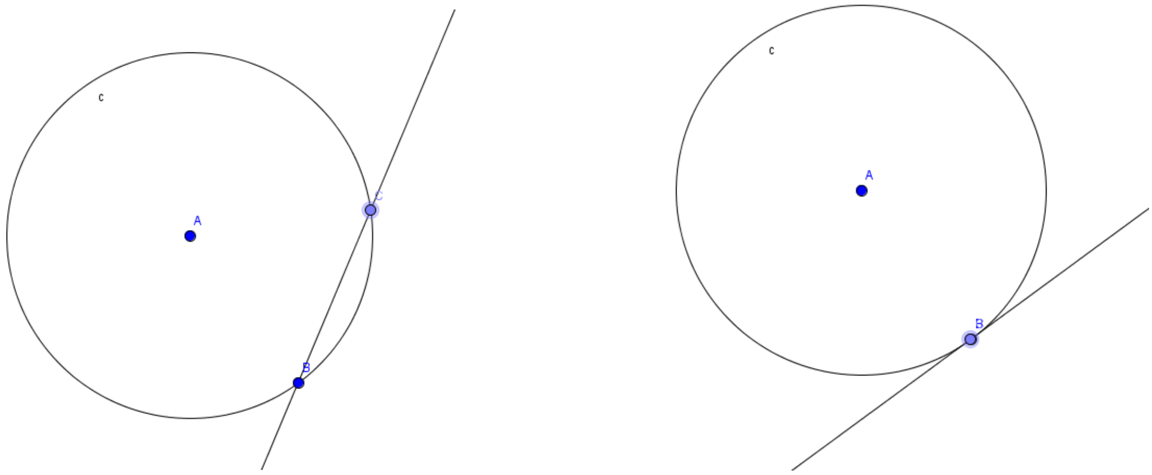
Le professeur utilise GeoGebra pour montrer à la classe qu'en fait, on trace successivement des sécantes (AP_i) en essayant de rapprocher P_i du point A.
La fenêtre Algèbre montre que « le coefficient directeur de cette sécante se rapproche de 2 lorsque le point P_i se rapproche de A. »
Ce coefficient directeur permet donc « d'évaluer la pente de la courbe au point A ».
On montre aux élèves qu'on aurait obtenu le même résultat en considérant un point P_i d'abscisse supérieure à celle de A.
On refait le même travail autour du point B : « on peut estimer que la vitesse de propagation le 8ème jour est de 4 nouveaux cas par jour. »

On conclut donc : « La vitesse de propagation est donc plus élevée le 8ème jour que le 2ème jour ».

En laissant au tableau la figure avec les deux droites, les élèves disent également que « l'on voit bien que la droite T_8 est plus pentue que la droite T_2 ».



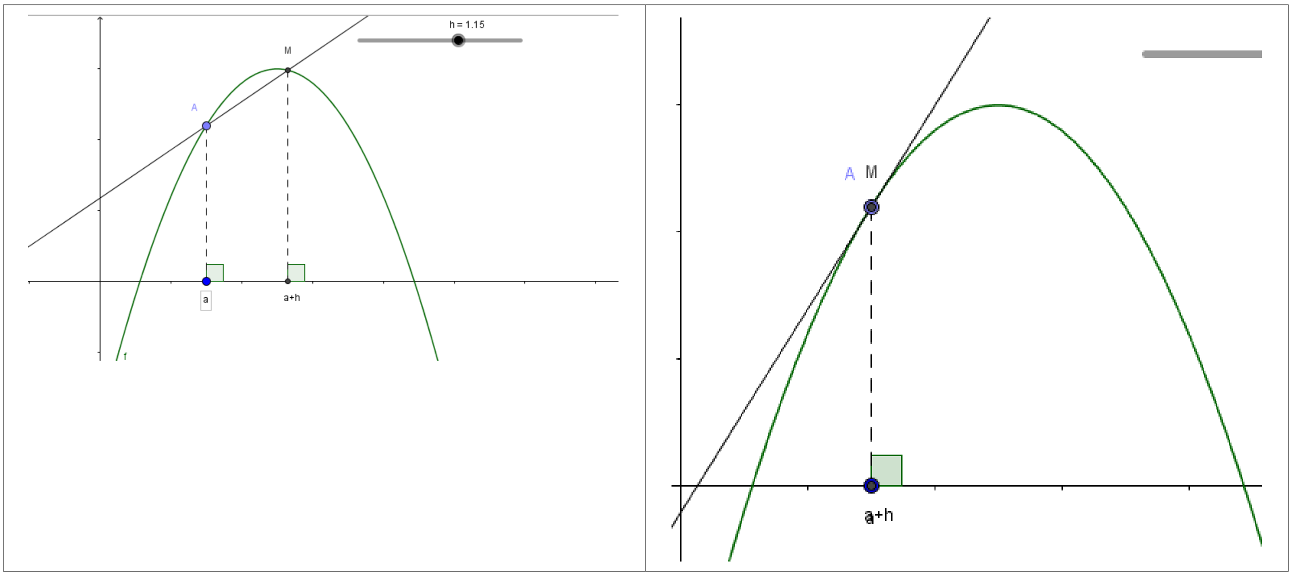
Quelle que soit la version utilisée, la bille ou la grippe, le professeur fait alors le lien avec la tangente au cercle en utilisant une corde .



On déplace le point C vers le point B de la corde et on arrive à la tangente au cercle en B qui n’a qu’un point commun avec le cercle .

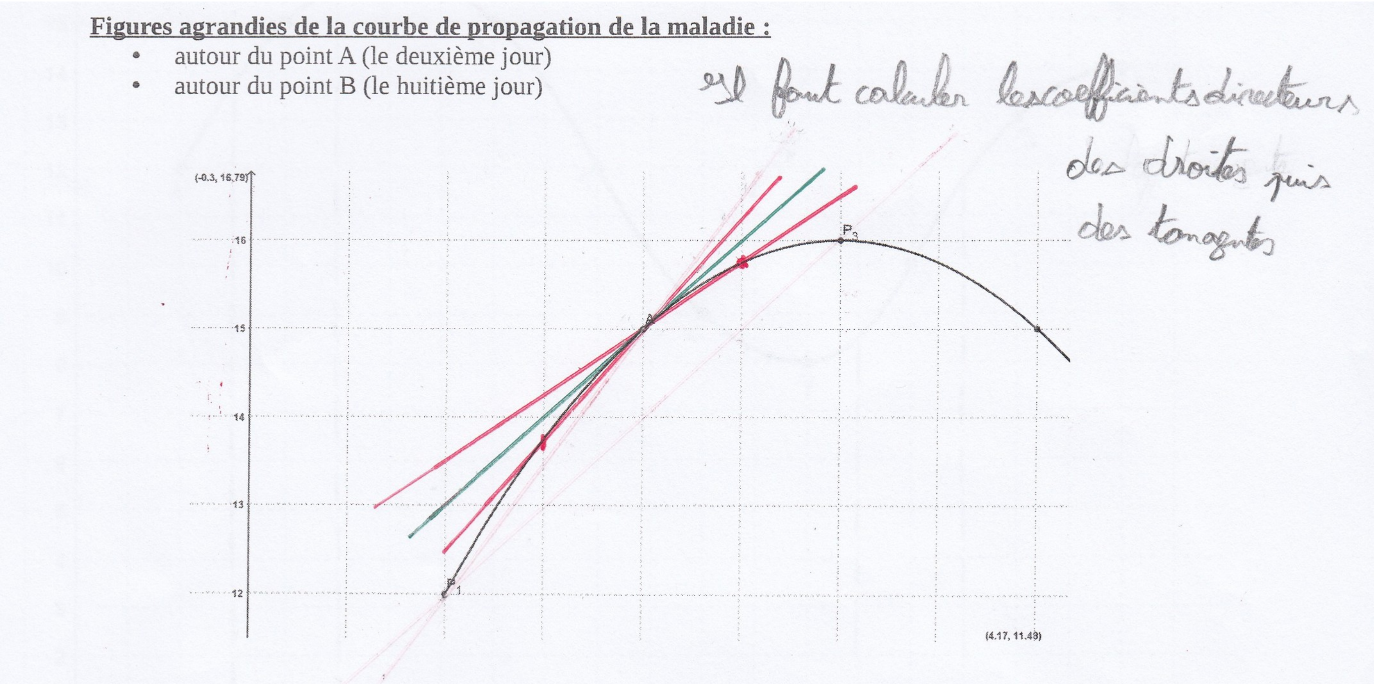
En bilan, le professeur définit la tangente et le taux d'accroissement d'une fonction :
Soit f une fonction, A le point de C_f d’abscisse a et M le point de C_f d’abscisse $a+h$; la tangente à C_f en A est la droite vers laquelle tend la droite (AM) quand M tend vers A.

Le coefficient directeur de la droite (AM) est par définition $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$. Ce nombre s'appelle le taux d'accroissement de la fonction f entre a et $a+h$.



Remarque pour le professeur :

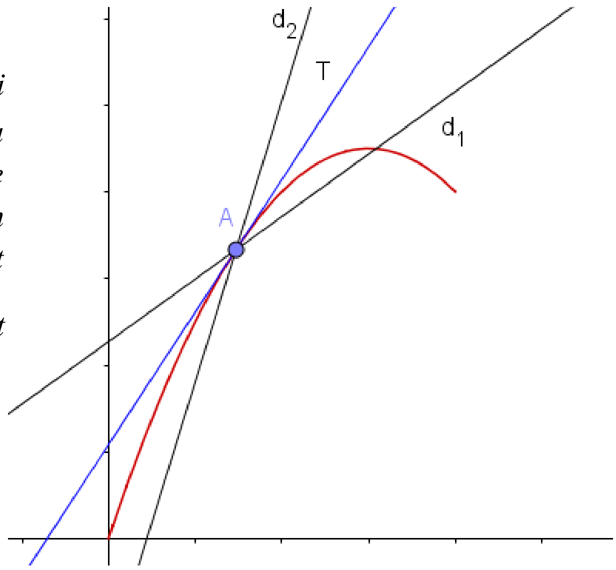
A la suite de la situation sur la grippe, un élève a proposé la construction suivante pour la tangente : il explique avoir tracé les bissectrices des angles formés par les sécantes.



Cette construction est évidemment fausse mais l'idée est intéressante.

En effet, Chilov[12], mathématicien russe, a défini la tangente au point A de la courbe d'une fonction f comme la droite T menée à partir du point A telle que la courbe, en s'approchant de A, pénètre dans tout angle au sommet A contenant T et y reste aussi petit que soit cet angle.

Chilov imagine un étau formé par les droites d_1 et d_2 qui enserrent la tangente et la courbe dans un voisinage du point A et, cet étau, il peut le resserrer autant qu'il le souhaite. On démontre que cette droite tangente selon Chilov est bien la droite qui passe par A et de coefficient directeur m tel que $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=m$ où a est l'abscisse du point A.



12 Quelle définition du concept de tangente ? Pour quelles raisons ? Balhan K. - Krysinska M. - Schneider M.Ladimath, Université de Liège

Étape 2 : dérivabilité

On propose après l'étape 3 une version plus adaptée aux élèves de 1ère STMG (p 37).

Pour faciliter les calculs, on va utiliser la fonction carré et déterminer l'équation de la tangente à la courbe au point A(1 ; 1).
On reprend l'idée de l'introduction en démarrant par la détermination du coefficient directeur d'une sécante (AM).
Cette séance est à illustrer avec un logiciel de géométrie dynamique où on rapproche le point M du point A.

On considère le point A(1 ; 1) et le point M d'abscisse 1+h deux points de la courbe représentative de la fonction carré.

1. Déterminer le coefficient directeur de la droite (AM).

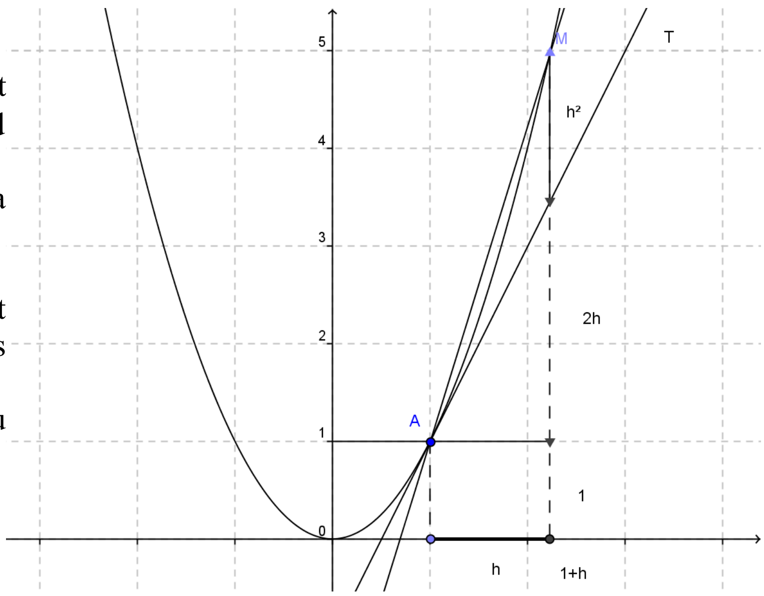
Le coefficient directeur de (AM) est $\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\frac{1+2h+h^2-1}{h}=h+2$, c'est aussi le taux d'accroissement de la fonction f en 1. Lorsque M se rapproche de A, h se rapproche de 0 et donc le coefficient directeur de (AM) de 2. Plus h est petit, plus $h+2$ se rapproche de 2.

Commentaire pour le professeur : on reconnaît ici la formule de Taylor ou le développement limité d'une fonction, notion centrale en analyse :
$f(1+h)-f(1)=hf'(1)+\frac{h^2}{2}f''(1)+\ldots$ *(termes en h^3 , puis h^4... ce qui peut ne pas finir pour une fonction qui n'est pas polynôme). La dérivée première est toujours le coefficient du terme de premier degré en h. Ce terme est la partie principale de l'accroissement de la fonction c'est-à-dire ici au point 1 la partie principale de la différence* $f(1+h)-f(1)$.

Bilan : on dit que $\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$ tend vers 2 quand *h* tend vers 0. On peut introduire la notation avec les limites : $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=2$ **.**

On obtient ce graphique qui permet de visualiser ce qu'on a déterminé par le calcul.

$h^2=(h+1)^2-(2(h+1)-1)$, c'est donc l'écart entre la tangente et la droite (AM) qui tend vers 0 lorsque h tend vers 0.
On remarque que l'accroissement de la fonction se décompose en deux parties :
$2h$ et h^2.
$2h$ est la partie la plus importante de cet accroissement car h^2 est inférieur à $2h$ dès que h est assez petit.
On retrouve également la valeur du coefficient directeur $\frac{2h}{h}=2$.



2. Déterminer le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point $B(3;9)$ puis au point $C(-1;1)$.

On procède de la même manière et on obtient que :

- Coefficient directeur de la tangente en B :

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2+6h}{h}=6$$

- Coefficient directeur de la tangente en C

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2-2h}{h}=-2$$

3. Déterminer le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point $M(a;a^2)$.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2+2ah}{h}=2a$$

Cette formule s'illustre graphiquement :

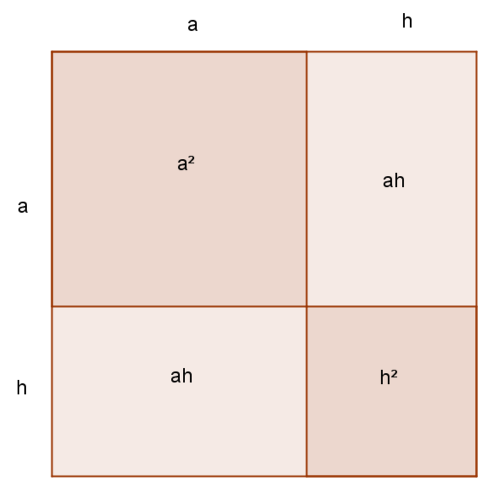
h^2 est l'écart entre la tangente et la droite (AM) qui tend vers 0 lorsque h tend vers 0.

On y retrouve le coefficient directeur de la tangente : $\frac{2ah}{h}$.

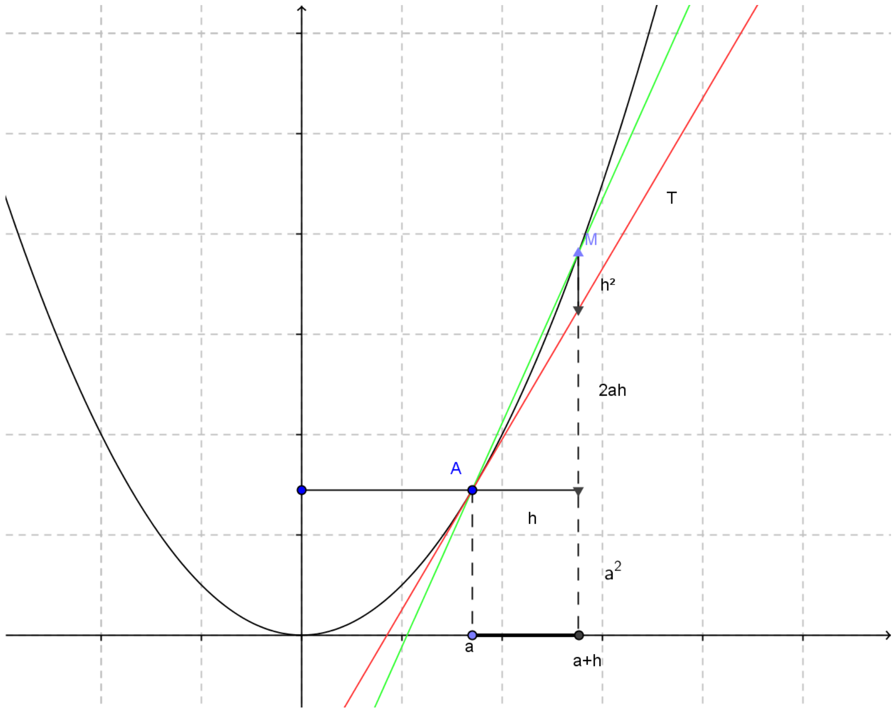
On remarque que l'accroissement de la fonction se décompose en deux parties : $2ah$ et h^2.

$2ah$ est la partie la plus importante de cet accroissement car h^2 est inférieur à $2ah$ dès que h est assez petit.

On a une illustration géométrique...



et une illustration graphique :



Le professeur généralise le résultat à l'ensemble des fonctions et écrit en bilan :

On dit qu'une fonction f est dérivable en un réel a où la fonction est définie si et seulement si le nombre $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ tend vers un réel quand h tend vers 0. Ce nombre est le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f au point $\mathrm{A}(a, f(a))$.

Nous avons volontairement choisi de ne pas introduire la notation $f'(a)$ source de confusions.
En effet, c'est une notation fonctionnelle qui nous paraît prématurée tant que la notion de fonction dérivée n'a pas été abordée.

Exemples :

1. Si l'on a choisi comme étape 1, la bille, on demande aux élèves de justifier le résultat obtenu lors de l'introduction de ce chapitre à savoir que la vitesse instantanée de la bille à l'instant $t=1s$ est 9,8 $m.s^{-1}$.

d est la fonction définie par $d(t)=4{,}9t^2$

$$\frac{d(1+h)-d(1)}{h}=\frac{4{,}9(h^2+2h+1)-4{,}9}{h}=4{,}9h+9{,}8 \text{ et } \lim_{h\to 0} 4{,}9h+9{,}8=9{,}8$$

On retrouve donc bien le résultat conjecturé.

2. La fonction f définie par $f(x)=x^3$ est-elle dérivable en 2 ?

3. La fonction f définie par $f(x)=\sqrt{x}$ est-elle dérivable en 0 ?

Le calcul de la limite est difficile mais il ne faut pas hésiter à utiliser un tableau de valeurs pour conjecturer la valeur de la limite de $\frac{1}{\sqrt{h}}$ quand h tend vers 0.

Il est indispensable de rencontrer des fonctions non dérivables en un point au risque de penser qu'elles le sont toutes.

Étape 3 : fonction dérivée

On a étudié la fonction carré définie par $f(x)=x^2$, on a vu que le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a vaut $2a$.

On a donc le tableau de valeurs suivant :

x	1	2	3	-1	a
Coefficient directeur de la tangente en x	2	4	6	-2	$2a$

On définit la fonction qui à chaque réel x associe le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f au point de coordonnées $(x, f(x))$.

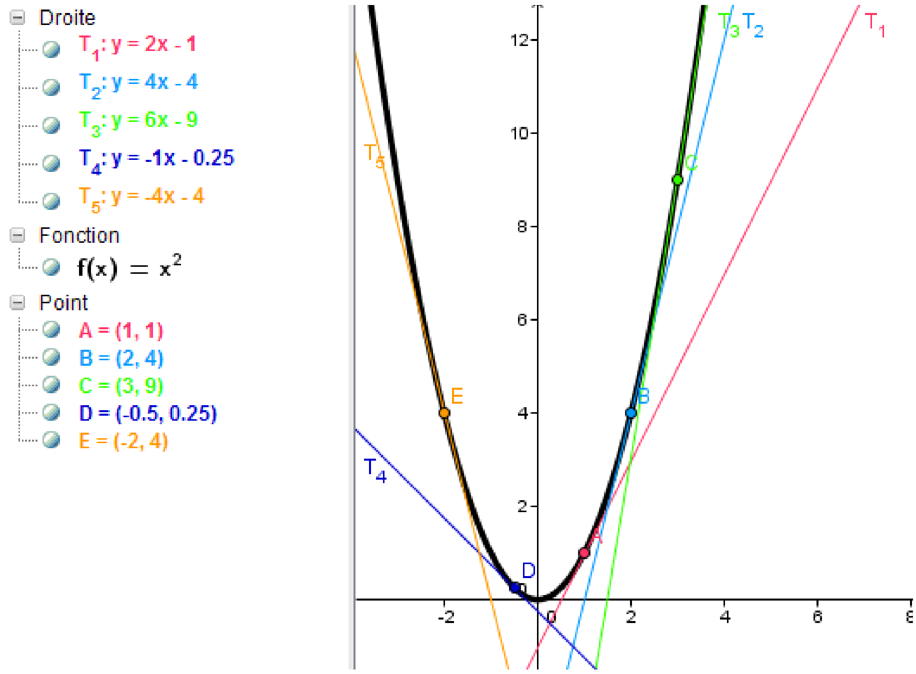
D'une manière générale : soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, on associe à chaque réel x de I, où la fonction est dérivable, le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse x. On définit ainsi une fonction appelée fonction dérivée de la fonction f que l'on note f'.

Si $f(x)=x^2$ pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=2x$ pour tout réel x.

En 1ère STMG, on remplace les étapes 2 et 3 par cette version :

Les élèves travaillent sur GeoGebra : on trace la courbe d'équation $y=x^2$ et on place plusieurs points sur la courbe au choix de l'élève de façon à compléter le tableau suivant :

x						
$f(x)$						
Coefficient directeur de la tangente						



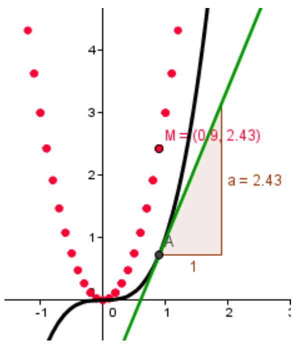
Les élèves, pour compléter la dernière ligne, vont tracer les tangentes en ces points et lire leurs coefficients directeurs.
On pourra alors établir une conjecture en observant la première et la dernière ligne du tableau.

On conjecture que le coefficient directeur de la tangente au point $\mathrm{A}\left(x_0 ; y_0\right)$ vaut $2x_0$.

On explique aux élèves que pour chaque fonction que l'on sera amené à étudier, on aura une formule qui nous donnera le coefficient directeur de la tangente et on institutionnalise la définition suivante :

On s'intéresse à la fonction qui à chaque valeur de x associe le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse x lorsqu'il existe. Cette fonction s'appelle la fonction dérivée de f et se note f'.

Pour conjecturer la dérivée de la fonction cube, on a procédé ainsi :
Programme de construction :
- A est le point de la courbe de la fonction cube de coordonnées (x_A ; $f(x_A)$). A varie sur la courbe.
Ce point se crée à l'aide d'un curseur



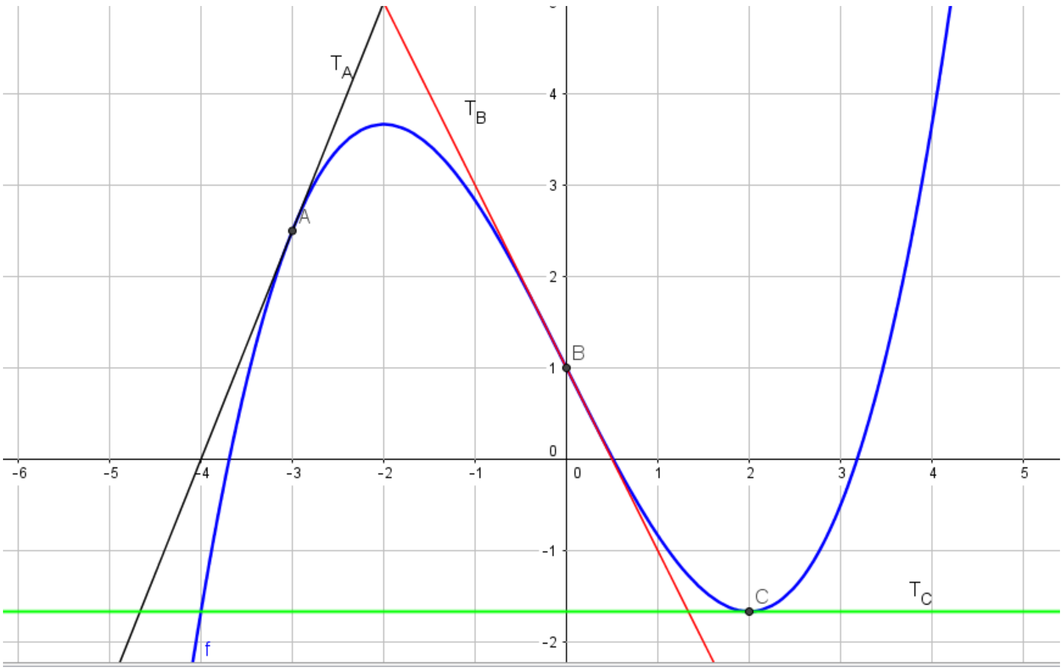
- M est le point de coordonnées (x_A ; a) où a est la pente de la tangente à la courbe au point A.
- on affiche la « trace » de M

On conjecture facilement que la dérivée de la fonction cube est la fonction carré à un coefficient multiplicateur près, coefficient que l'on trouve en remarquant que le point de cordonnées (1 ; 2) appartient à la courbe de la fonction dérivée.

Situation 4 : utiliser ces nouvelles définitions et ces nouvelles notations

On commence par des lectures graphiques pour travailler la notation mais aussi faire émerger le lien entre signe de la dérivée et variation de la fonction.

Exercice n°1 : On a tracé la courbe de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dans le repère ci-dessous. T_A , T_B et T_C sont respectivement les tangentes à la courbe de f en A, B et C.



a. Déterminer par lecture graphique $f(-3)$, $f(0)$, $f'(-3)$, $f'(0)$ et $f'(2)$.

b. Quel est le signe de $f'(x)$ sur [-2;0] ?

Exercice n°2 : Soit f une fonction définie sur [-1;4] telle que

x	-1	0	2	3	4
$f(x)$	1,5	4	0	-0,5	4
$f'(x)$	5,5	0	-2	1,5	8

Tracer dans un repère une courbe possible pour *f*.

Exercice n°3 : On considère un fonction *f* définie par le tableau de variations ci-dessous.

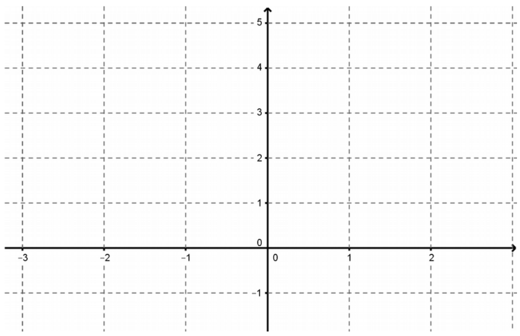
x	-2		4
Variations de f	-1	$\nearrow$	5

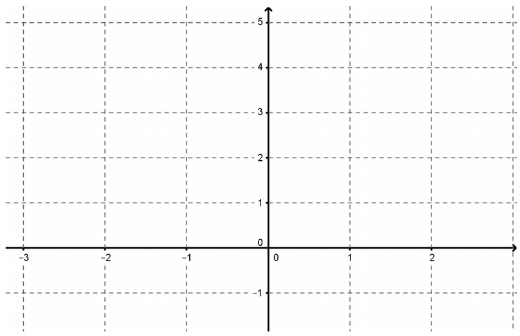
a. Tracer dans le repère 1 une courbe possible pour *f*.

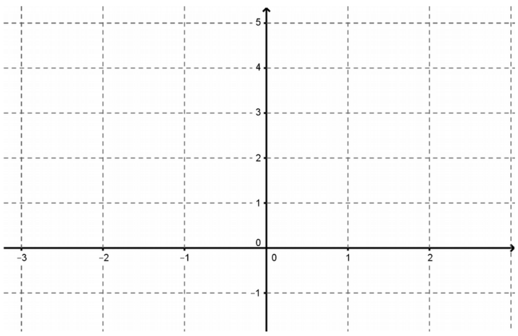
b. On suppose que $f'(-2)=\frac{1}{2}$ et $f'(4)=2$ .Tracer dans le repère 2 une courbe possible pour *f*.

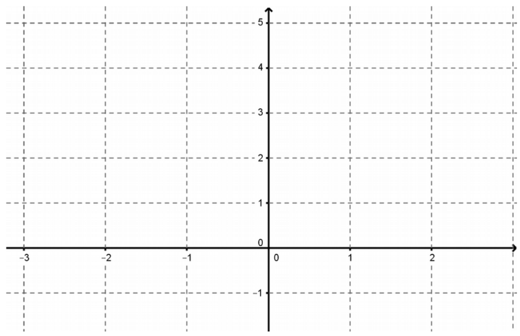
c. On suppose qu'il existe un réel a de [-2;4] tel que $f'(a)=0$.
Tracer dans le repère 3 une courbe possible pour *f*.

d. On suppose qu'il existe un réel a de [-2;4] tel que $f'(a)<0$ .Tracer dans le repère 4 une courbe possible pour f .





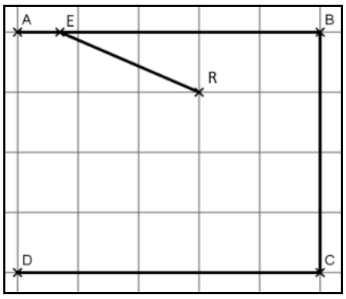




La question d) n'a pas de solution et permet d'amorcer le lien entre signe de la dérivée et variation.

Situation complémentaire : l'escargot

La figure ci-contre représente un potager rectangulaire de longueur 5m et de largeur 4m.
Dans ce potager se trouve un magnifique radis noté R. Un escargot noté E fait le tour du grillage protégeant le potager en suivant son bord. Il part de A, passe par B, par C puis arrive en D. On note x la distance parcourue par l'escargot depuis le point A puis $f(x)=\text{RE}$ (la distance entre l'escargot et le radis).
Conjecturer le tableau de variation de la fonction f.
Tracer une allure de la représentation graphique de la fonction f.



NIVEAU : 1$^{\text{ère}}$ S, T$^{\text{ale}}$ S (éventuellement en fin de 2$^{\text{nde}}$)
Compétences mathématiques : modéliser, représenter, calculer, raisonner, communiquer
En première, cette situation pourra être une situation « fil rouge » qui permettra :

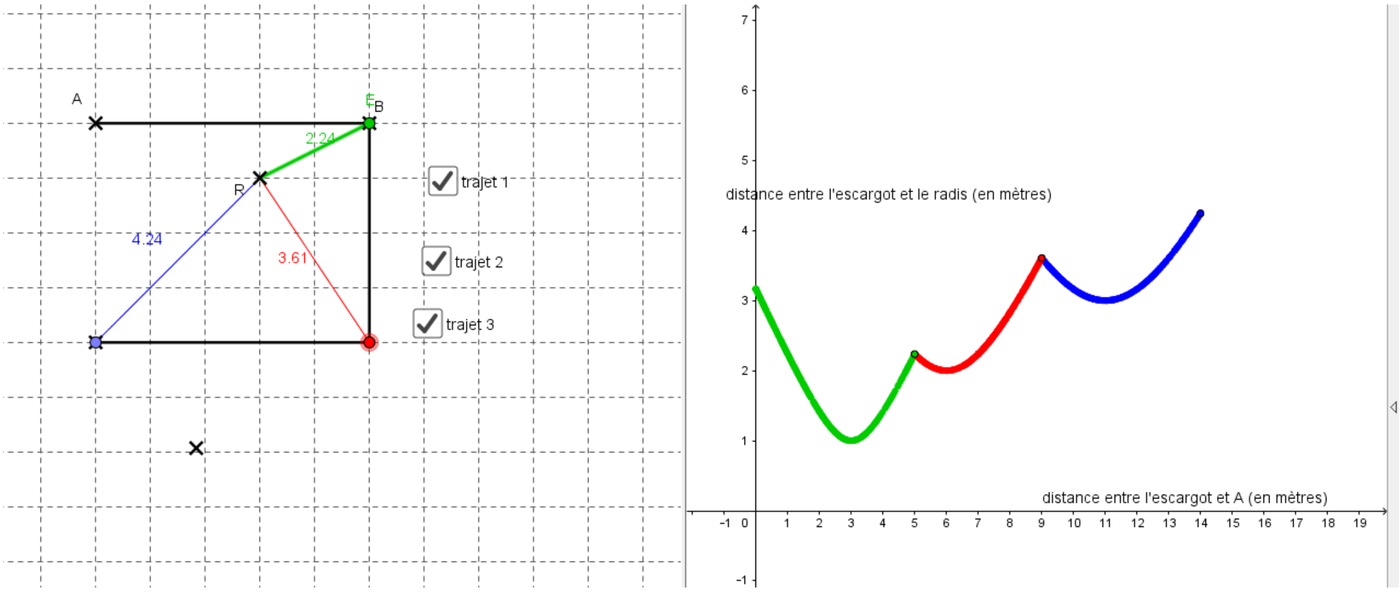
- De réactiver la notion de variation d'une fonction dès le début de l'année. La situation met en évidence une fonction définie par morceaux. On pourra en déterminer l'expression algébrique et établir un tableau de valeurs grâce à un algorithme.
- De raisonner et de démontrer lors de l'étude des variations des fonctions composées du type $\sqrt{u}$ en 1$^{\text{ère}}$ S.
- D'illustrer graphiquement la non-dérivabilité d'une fonction en certains points.

Les élèves travaillent en binôme, ils n'ont pas accès à un ordinateur mais peuvent utiliser leur calculatrice.
Les élèves rencontrent d'emblée les difficultés suivantes : comprendre comment x varie (on n'est pas sur un axe comme dans la plupart des situations déjà rencontrées), comment RE, soit $f(x)$, varie et quelle grandeur est associée à quelle autre.
Cette activité présente un changement de contrat pour les élèves : en seconde, les variations se déterminent essentiellement par conjecture à l'aide de la représentation graphique de la fonction ou bien par propriété lorsque l'on rencontre des fonctions affines, des fonctions polynômes du second degré ou autres fonctions de référence. Ici, les élèves doivent conjecturer les variations en s'appuyant sur la situation géométrique, ce qui n'est pas une démarche naturelle. Souvent, les élèves restent bloqués devant la consigne puis réagissent en des termes tels que « Ah mais on a le droit ? » dès lors que l'enseignant incite à s'appuyer sur la géométrie et à observer les grandeurs concernées par les variations de la variable x.
Quelques pistes pour débloquer les élèves :

- Demander de déterminer des valeurs telles que $f(0)$, $f(3)$, …et de positionner les points E associés à ces images.
- Demander aussi l'ensemble des valeurs prises par x : ce sera l'occasion de définir ou rappeler l'ensemble de définition de la fonction.

Les élèves conjecturent facilement les variations mais dressent un tableau incomplet. En particulier, $f(0)$ et $f(14)$ ne sont pas souvent déterminés.
Un tableau de valeurs est alors bienvenu. On peut demander à chaque binôme d'élèves de calculer une image différente du nombre choisi par les camarades de la table voisine afin d'avoir un tableau le plus exhaustif possible. Ce sera par ailleurs l'occasion de retravailler la différence entre valeur exacte et valeur approchée.
L'allure de la courbe entraîne des discussions et des procédures diverses. On peut questionner : « les morceaux sont-ils des morceaux de paraboles ? ».

En admettant que $f(3)$ est un minimum local, certains élèves justifient, souvent de manière numérique, des égalités telles que $f(2)=f(4)$ comme validation de la branche parabolique. Mais symétrique signifie-t-il parabolique ?
Un point collectif est effectué et l'allure de la courbe est validée par la trace d'un point mobile sur un logiciel de géométrie dynamique.



En première, on attend des élèves « l'expression algébrique » de la fonction. Les élèves perçoivent assez facilement que la fonction doit être définie par morceaux et déterminent 6 expressions distinctes :

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{(3-x)^2+1} \text{ si } 0\le x\le 3\\ \sqrt{(x-3)^2+1} \text{ si } 3\le x\le 5\\ \quad etc \dots \dots\end{cases}$$

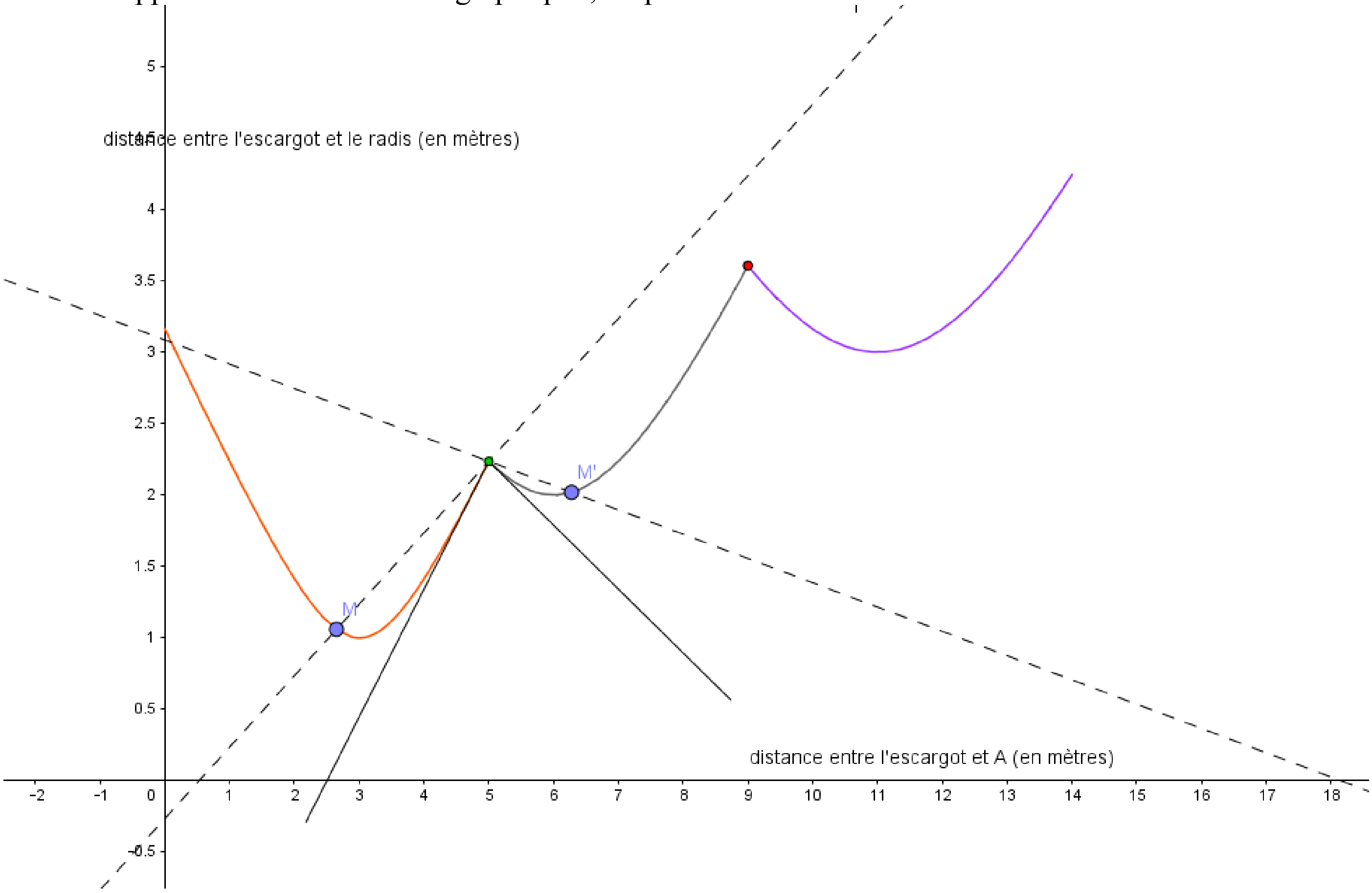
Les élèves, souvent, n'en restent pas à cette expression de la fonction et développent :
$\sqrt{(3-x)^2+1}=\sqrt{3^2-6x+x^2+1}=\sqrt{x^2-6x+10}$ pour $0\le x\le 3$
Puis $\sqrt{(x-3)^2+1}=\sqrt{x^2-6x+3^2+1}=\sqrt{x^2-6x+10}$ pour $3\le x\le 5$.
Enfin, ils constatent avec surprise l'égalité des deux expressions.
Un travail peut être réalisé à cette occasion sur les égalités du type : $(3-x)^2=(x-3)^2$
L'erreur récurrente $\sqrt{(3-x)^2+1}=(3-x)+1$ permet aussi de revenir sur : $\sqrt{a+b}\neq\sqrt{a}+\sqrt{b}$ $(a>0 \text{ et } b>0)$.
Et on obtient :

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{(x-3)^2+1} \text{ si } 0\leqslant x<5\\ \sqrt{(x-6)^2+4} \text{ si } 5\leqslant x<9\\ \sqrt{(x-11)^2+9} \text{ si } 9\leqslant x\leqslant 14\end{cases}$$

Enfin, on peut revenir sur la question de la branche parabolique. L'expression algébrique de la fonction infirme l'hypothèse initiale des élèves puisque $f(x)$ ne s'exprime pas sous la forme ax^2+bx+c .

On emploie ici le terme « parabole » au sens de la représentation graphique d'une fonction polynôme du second degré.

En première S, en reprenant cette activité en cours d'année, on démontrera les variations, à l'occasion de l'étude des variations des fonctions composées du type $\sqrt{u}$.
Ces démonstrations pourront aussi être réalisées en T^ale S après la donnée de la formule donnant la dérivée de $\sqrt{u}$.
Après la mise en place de la notion de dérivabilité en 1ère S, on reprendra cet exercice pour illustrer la non dérivabilité en certains points.
On s'appuie sur une illustration graphique ; on peut s'en contenter en 1^ère S.



En T^ale S, ou selon le niveau de la classe en 1^ère S, on termine en montrant que le taux d'accroissement ne tend pas vers la même limite selon que l'on considère la limite à droite ou à gauche.

Si $h<0$, $\dfrac{f(5+h)-f(5)}{h}=\dfrac{\sqrt{h^2+4h+5}-\sqrt{5}}{h}=\dfrac{h+4}{\sqrt{h^2+4h+5}+\sqrt{5}}$ en utilisant l'expression conjuguée.

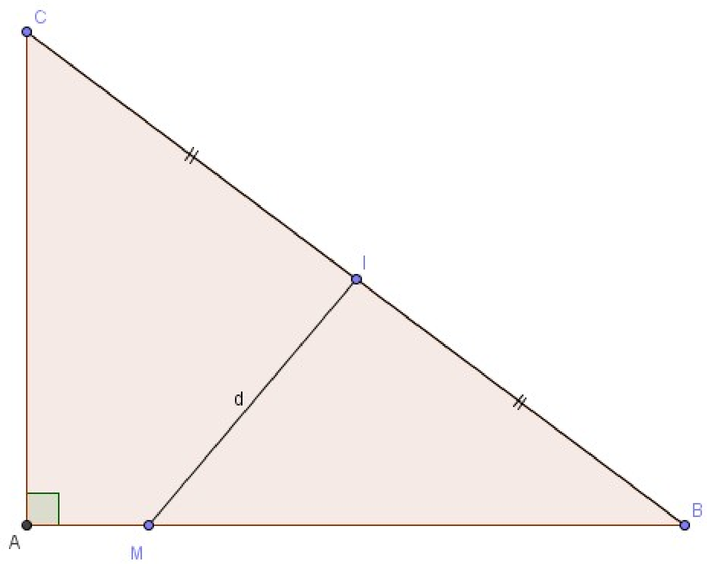
Si $h>0$, $\dfrac{f(5+h)-f(5)}{h}=\dfrac{\sqrt{h^2-2h+5}-\sqrt{5}}{h}=\dfrac{h-2}{\sqrt{h^2-2h+5}+\sqrt{5}}$.

on a donc $\lim\limits_{\substack{h\to0\\h<0}}\dfrac{f(5+h)-f(5)}{h}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ et $\lim\limits_{\substack{h\to0\\h>0}}\dfrac{f(5+h)-f(5)}{h}=\dfrac{-1}{\sqrt{5}}$.

Les deux limites n'étant pas égales, la fonction n'est pas dérivable en 5.
On recommence le même travail en 9.

Dans notre brochure IREM parue en 2012 : « Les fonctions du collège jusqu'en seconde » nous proposons une situation similaire (page 185) qui peut aussi se prolonger au-delà de la seconde comme nous l'indiquons. Il s'agit d'un point qui se déplace sur les côtés d'un triangle. Le graphique donne également une fonction par morceaux mais au lieu de trois parties d'hyperbole comme dans « l'escargot », il s'agit de deux parties d'hyperbole et de deux segments. Cette situation peut servir de devoir maison, voire de contrôle si la situation de l'escargot a été traitée en classe.

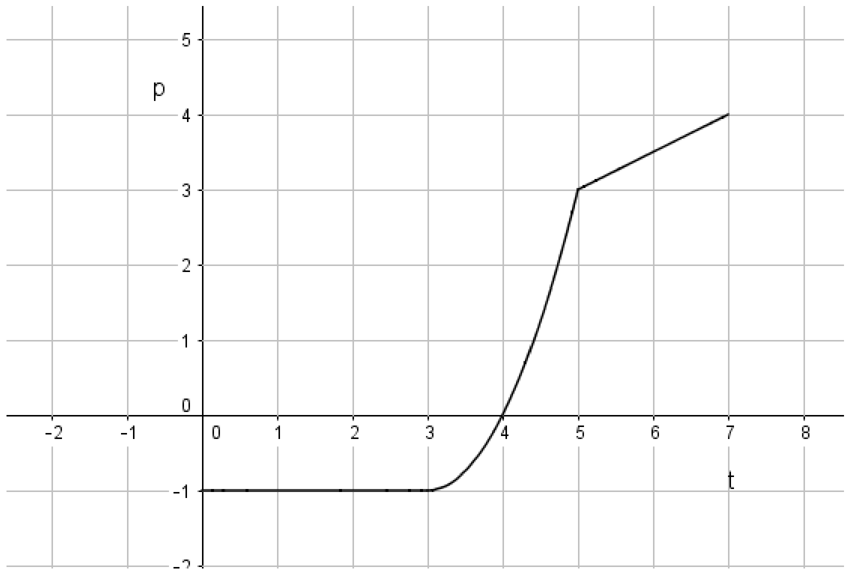
ABC est un triangle rectangle en A tel que AB = 4 et AC = 3.
I est le milieu de l'hypoténuse [BC].
Un point mobile M se déplace en restant sur les côtés, de A vers B, de B vers C puis de C vers A.
On note x la distance qu'il a parcourue à partir de A.
On considère la fonction f définie par : $f : x \mapsto$ IM.
Sans chercher à exprimer explicitement $f(x)$, dresser le tableau de variation de f.



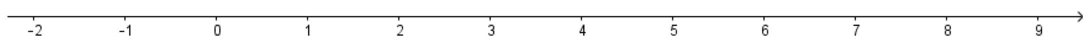
Applications : dérivées et cinématique (1ère S/STL/STI)

Ces trois exercices sont tirés de l'article : « Introduire la dérivée par les vitesses : pour qui ? Pourquoi ? Comment ? » de J.Y. Gantois et M.Schneider (Petit x n°79). Ils permettent de réutiliser le lien entre vitesse et dérivée.

1. On considère une particule P qui se déplace sur un axe orienté. Sa position p (en cm) en fonction du temps t (en secondes) est donnée par le graphique suivant :



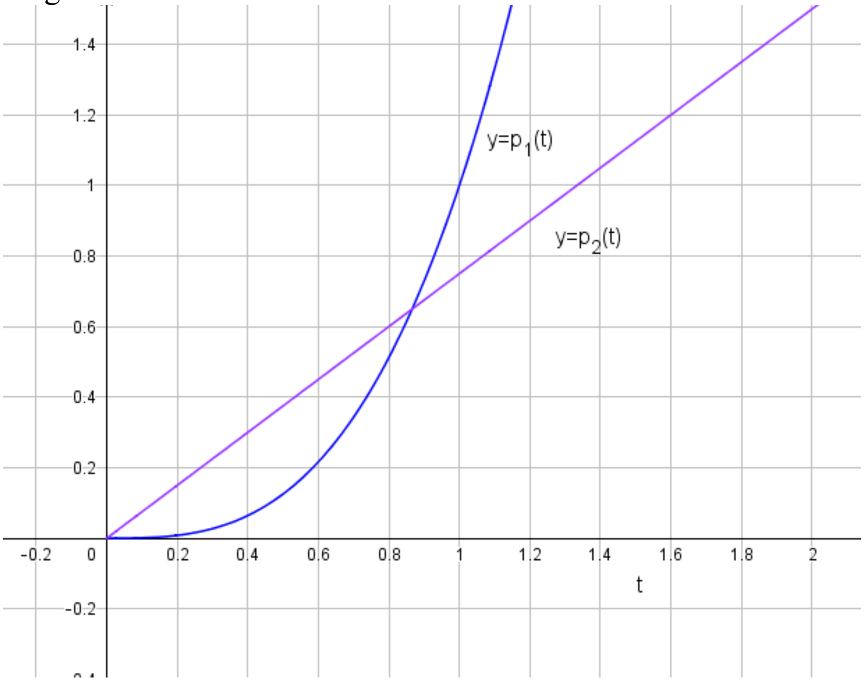
Décrire le déplacement de la particule sur l'axe orienté dans l'intervalle de temps [0;7].



La particule se trouve sur l'abscisse -1 et y reste pendant 3 secondes. Entre la 3ème et la 5ème seconde, elle se déplace jusqu'à l'abscisse 3. Entre la 5ème et la 7ème seconde, elle se déplace jusqu'à l'abscisse 4.

Cet exercice permet de différencier, si besoin, le mouvement de la particule de la loi de mouvement. Il peut entraîner d'autres questions : quelle est la vitesse de la particule dans l'intervalle de temps [0;3] ? dans l'intervalle de temps [5;7] ?Le mouvement est-il uniforme sur [3;5] ?

2. On considère deux particules P_1 et P_2 qui se déplacent sur un axe orienté. Leurs positions respectives p_1 et p_2 (en cm) en fonction du temps (t en secondes) sont données par les graphiques de la figure suivante.



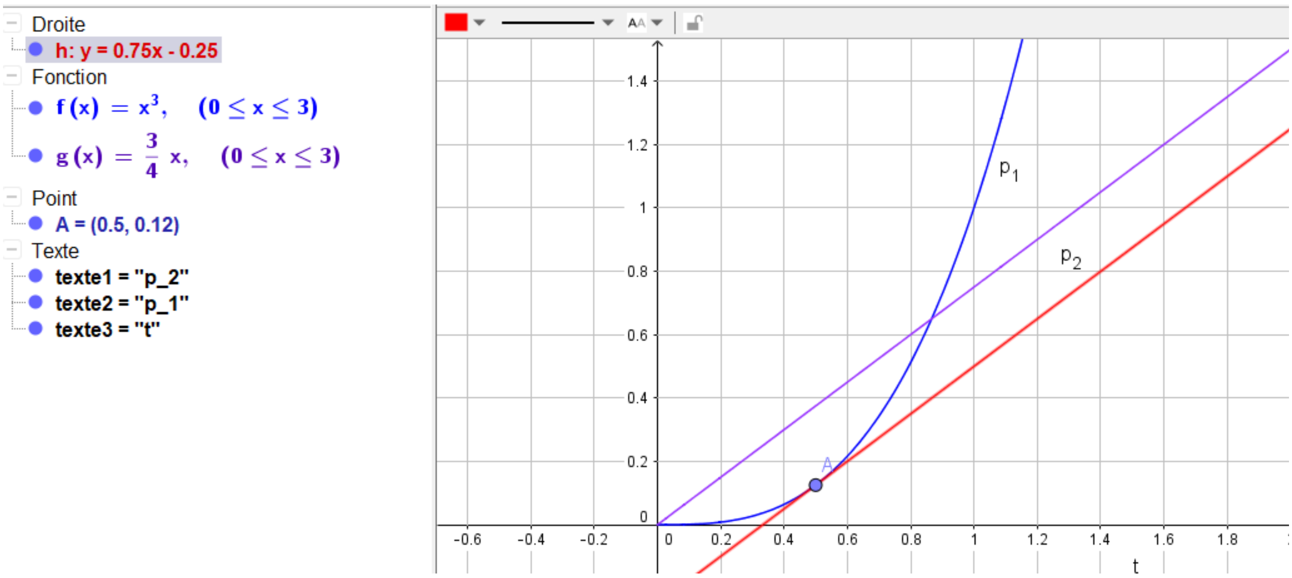
Les fonctions correspondantes sont : $p_1(t)=t^3$ et $p_2(t)=\frac{3}{4}t$.

A quel moment les deux particules ont-elles la même vitesse ?

Cet exercice utilise l'interprétation cinématique de la dérivée et peut être une des premières applications une fois mises en place les formules de dérivation des fonctions usuelles.
Il peut aussi se traiter graphiquement à l'aide, par exemple, d'un logiciel de géométrie dynamique.

Il s'agit de résoudre $p_1'(t)=p_2'(t) \Leftrightarrow 3t^2=\frac{3}{4} \Leftrightarrow t^2=\frac{1}{4} \Leftrightarrow t=\frac{1}{2}$ car $t \geqslant 0$

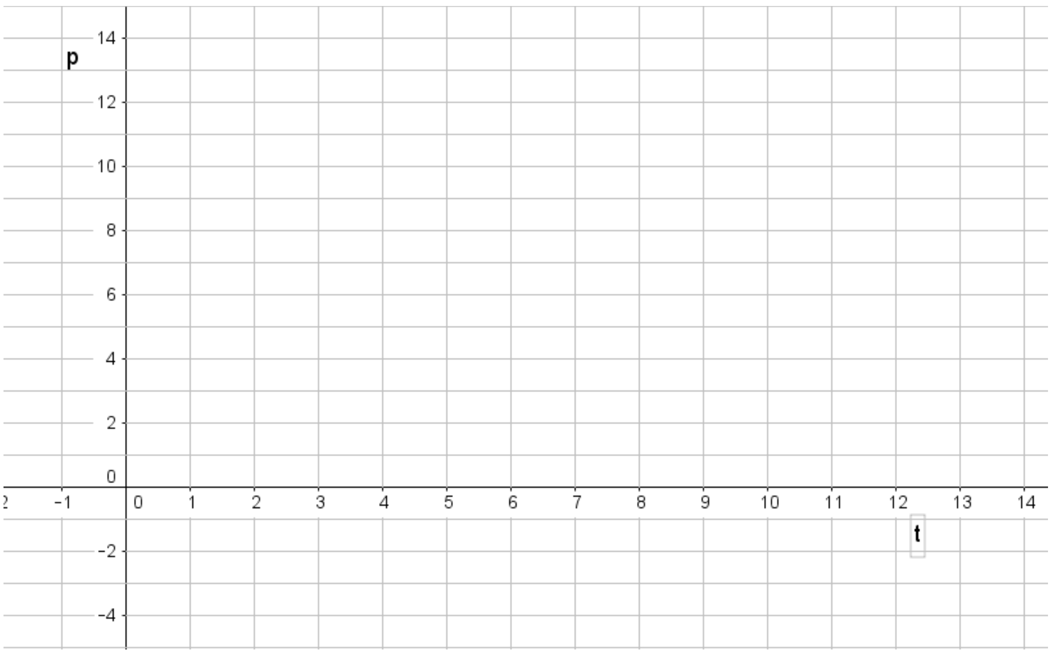
A l'instant 0,5 s, les particules ont donc la même vitesse.



3. On considère un mobile qui se déplace sur un axe orienté, où l'unité est le centimètre, pendant 11 s.

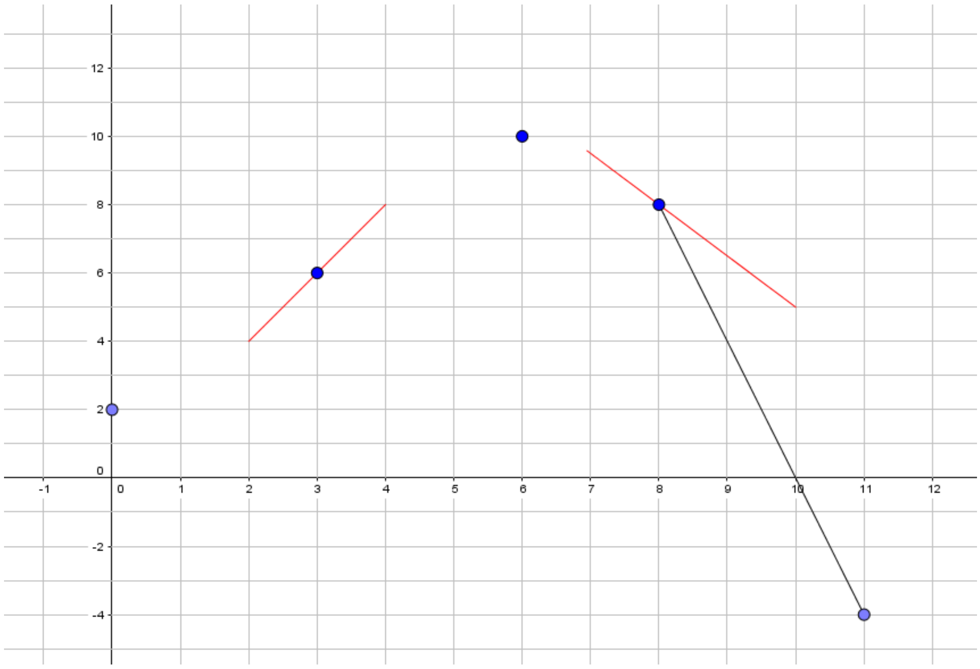
Il démarre à l'instant $t=0$ de la position $p=2$. Il accélère jusqu'à la position $p=6$ qu'il occupe à l'instant $t=3$ où sa vitesse instantanée vaut 2 $cm.s^{-1.}$. Sa vitesse diminue jusqu'à l'arrêt qui se produit à l'instant $t=6$, à la position $p=10$. Il fait alors marche arrière et atteint la position $p=8$ à l'instant $t=8$ où sa vitesse instantanée est de $-2{,}5\,cm.s^{-1}$. Sa vitesse devient alors constante et vaut $-4\,cm.s^{-1}$.

a. Décrire dans le repère ci-dessous la position p du mobile sur l'axe orienté en fonction du temps t.



b. Où se trouve le mobile au bout de 11 secondes ?

Avec les renseignements du texte, on obtient le graphique suivant. Il reste ensuite à tracer une courbe passant par les points et ayant pour tangentes les segments rouges.

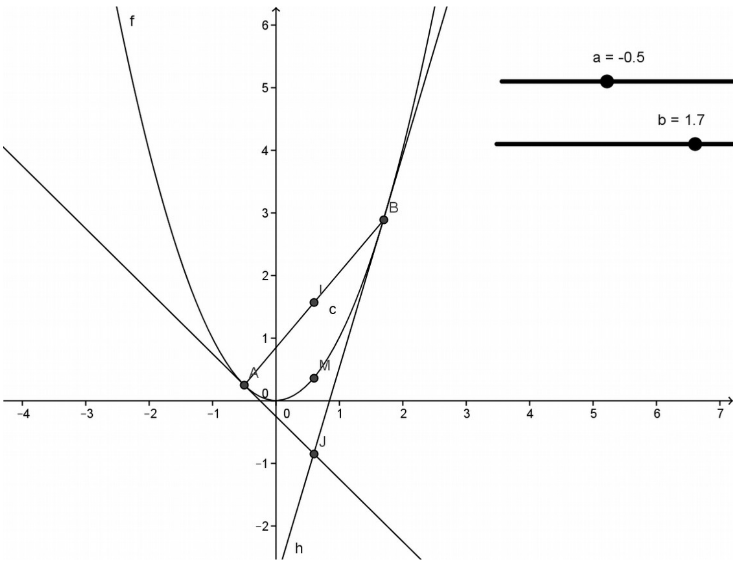


Le mobile se trouve à -4 à l'instant 11 s.

Applications : histoires de paraboles

Ces exercices permettent de mettre en évidence des propriétés de la parabole et de ses tangentes et de les faire démontrer.
Les deux premiers ont été posés en devoir maison, les derniers peuvent faire l'objet d'un travail en classe.

Exercice 1 : milieux et intersection de tangentes



Soit *P* la parabole d'équation $y = x^2$ dans un repère orthonormal (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$)
On désigne par A et B deux points distincts appartenant à la parabole *P* d'abscisses respectives *a* et *b*.
Les résultats demandés dépendent donc de a et de b et seront donnés en fonction de a et b.

1. Faire une figure à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique (GeoGebra) que vous compléterez au fur et à mesure de l'exercice. Utiliser des curseurs pour *a* et *b*.

2. Déterminer des équations des tangentes en A et B à la parabole *P* et les tracer sur votre figure.

3. On note I le milieu de [AB] et J le point d'intersection des tangentes T_A et T_B précédentes.
a. Quelle conjecture peut-on faire sur le milieu M de [IJ] ?
b. La prouver (on pourra déterminer les coordonnées des points I, J et M en fonction de *a* et *b*).

<u>Complément :</u>
4. Prouver que la tangente à la parabole *P* au point M est parallèle à la droite (AB).

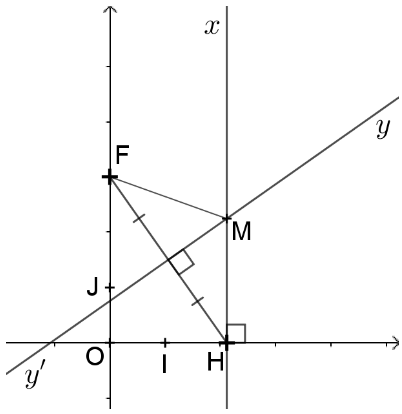
Exercice 2 : foyer et tangente

Les célèbres miroirs ardents d'Archimède, qu'il aurait utilisés pour brûler les vaisseaux attaquant Syracuse, auraient été fabriqués par juxtaposition de miroirs hexagonaux (à la façon des ballons de football d'aujourd'hui) afin d'obtenir une forme concave assimilable à un paraboloïde de révolution.

Cet exercice va nous permettre de comprendre et d'expliquer ce phénomène.

1. Qu'est-ce qu'un paraboloïde ?

2. Le plan est muni d'un repère orthonormal (O ; I; J).
Le point F a pour coordonnées (0 ; 3).
À tout point H de (OI), on associe le point M, point d'intersection de la droite passant par H et perpendiculaire à (OI) avec la médiatrice du segment [FH].



a) À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, réaliser la figure ci-contre et faire afficher la trace du point M lorsque H se déplace sur (OI).

b) Quelle est la nature du triangle MFH ?

c) Montrer que le point M décrit une parabole de sommet $S\left(0;\frac{3}{2}\right)$ lorsque H se déplace sur (OI).

Le point F s'appelle le foyer de cette parabole.

Indication : Appeler (*x ; y*) les coordonnées de M et exprimer *y* en fonction de *x*.

d) Réciproquement, démontrer que si M est un point de la parabole d'équation $y=\frac{x^2+9}{6}$ alors MF = MH où H désigne le point d'intersection de (OI) avec la droite passant par M et perpendiculaire à (OI).

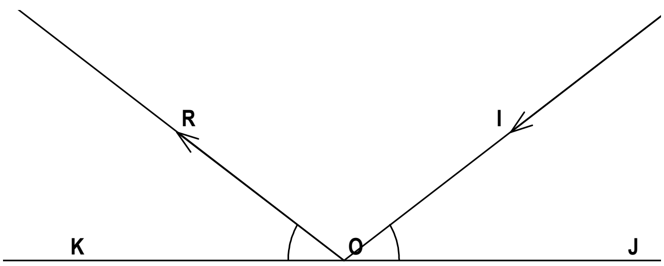
On a ainsi démontré que l'ensemble des points M est la parabole *P* d'équation $y=\frac{x^2+9}{6}$.

Tracer cette parabole *P*.

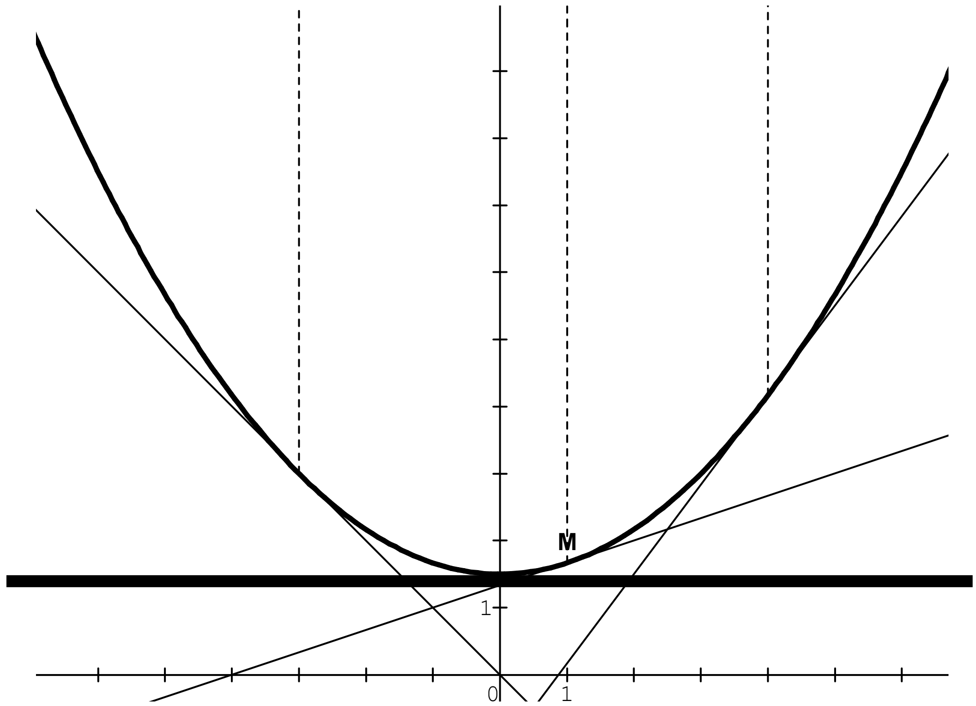
3. a) Montrer qu'en tout point $M_0(x_0;y_0)$ la tangente à la parabole *P* au point M_0 est la médiatrice de $[FH_0]$ avec $H_0(x_0;0)$.

b) Démontrer que les angles $\widehat{xM_0y}$ et $\widehat{FM_0y'}$ ont la même mesure.

4. On admet que lorsqu'un rayon incident (IO) est réfléchi par un miroir plan [KJ] en [OR], alors l'angle d'incidence $\widehat{IOJ}$ a la même mesure que l'angle de réflexion $\widehat{KOR}$.



Considérons une parabole en « fil de miroir ». Pour obtenir un miroir parabolique, il suffit d'imaginer cette parabole « qui tourne autour de son axe ». On pose un miroir parabolique sur le sol. Les rayons du soleil sont assimilés à des droites toutes parallèles à son axe. On prend un point M quelconque sur le miroir parabolique et on considère la section du miroir par un plan passant par le point M et contenant l'axe du paraboloïde. On obtient le schéma ci-dessous dans lequel on a tracé trois rayons représentés par les demi-droites marquées en tirets et on a tracé les tangentes à la parabole aux trois points, intersections de la parabole avec les rayons du soleil.

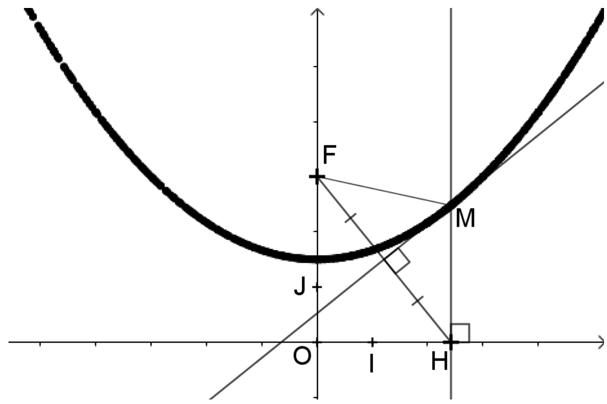


a) Au point M la parabole se comporte comme sa tangente en fil de miroir en ce point. Tracer sur le schéma ci-dessus les rayons réfléchis aux trois points représentés.
Que remarque-t-on ? Justifier cette conjecture en utilisant les questions précédentes.

b) En quoi cela explique-t-il le fonctionnement des miroirs ardents d'Archimède ? Donner d'autres applications de cette propriété de la parabole.

Quelques éléments de correction

2. a) avec Geogebra , on obtient :



M semble décrire une parabole.

b) M est un point de la médiatrice de [FH] donc MF=MH, MFH est donc isocèle en M.
c) Soit $(x\ ;\ y)$ les coordonnées de M. $\mathrm{H}(x;0)$ et $\mathrm{F}(3;0)$ on a MF = MH donc MF² = MH²
soit $x^2+(y-3)^2=y^2 \Leftrightarrow x^2+y^2-6y+9=y^2 \Leftrightarrow y=\frac{x^2+9}{6}$.

Les coordonnées de M vérifient l'équation $y=\frac{x^2+9}{6}$. On reconnaît une équation d'une parabole, dont le sommet a pour abscisse $x_S=0$ et pour ordonnée $y_S=\frac{9}{6}=\frac{3}{2}$.

Donc M décrit une parabole de sommet $\mathrm{S}\left(0;\frac{3}{2}\right)$ lorsque H se déplace sur (OI) .

d) Réciproquement si M est un point de la parabole d'équation $y=\frac{x^2+9}{6}$ alors $\mathrm{M}\left(x;\frac{x^2+9}{6}\right)$

donc $\mathrm{MF}^2=x^2+\left(\frac{x^2+9}{6}-3\right)^2=x^2+\left(\frac{x^2-9}{6}\right)^2=x^2+\frac{x^4-18x^2+81}{36}=\frac{x^4+18x^2+81}{36}=\left(\frac{x^2+9}{6}\right)^2$

MH²= $\left(\frac{x^2+9}{6}\right)^2$ car $\mathrm{H}(x;0)$ donc MF² = MH² et MF=MH.

On a ainsi démontré que l'ensemble des points M est la parabole *P* d'équation $y=\frac{x^2+9}{6}$.

3) a)

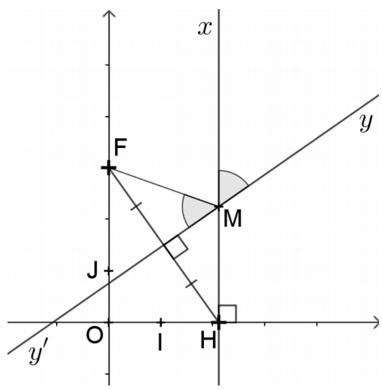
Soit f la fonction définie par $f(x)=\frac{x^2+9}{6}$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x)=\frac{2}{6}x=\frac{x}{3}$.

La tangente à la parabole *P* en $\mathrm{M}_0(x_0;y_0)$ a donc pour équation $y=\frac{1}{3}x_0x+p$

or la tangente passe par $\mathrm{M}_0(x_0;y_0)$ donc $\frac{x_0^2+9}{6}=\frac{1}{3}x_0^2+p \Leftrightarrow p=\frac{9-x_0^2}{6}$. Ainsi, T : $y=\frac{1}{3}x_0x+\frac{9-x_0^2}{6}$

Soit K le milieu de $[\mathrm{FH}_0]$. On a $\mathrm{K}\left(\frac{x_0}{2};\frac{3}{2}\right)$, l'égalité $\frac{1}{3}x_0\times\frac{x_0}{2}+\frac{9-x_0^2}{6}=\frac{9}{6}=\frac{3}{2}$ montre que les coordonnées de K vérifient l'équation de T donc la tangente passe par le milieu de $[\mathrm{FH}_0]$.
On a vu que M_0 est aussi un point de la médiatrice de $[\mathrm{FH}_0]$.
T est donc la médiatrice du segment $[\mathrm{FH}_0]$.

b) $\mathrm{FM}_0\mathrm{H}_0$ est un triangle isocèle en M₀,
$(y'y)$ est la médiatrice de $[\mathrm{FH}_0]$ donc $\widehat{\mathrm{FM}_0y'}=\widehat{y'\mathrm{M}_0\mathrm{H}_0}$
or $\widehat{y'\mathrm{M}_0\mathrm{H}_0}=\widehat{x\mathrm{M}_0y}$ car ils sont opposés par le sommet
donc les angles $\widehat{x\mathrm{M}_0y}$ et $\widehat{\mathrm{FM}_0y'}$ ont la même mesure.



4) a) On remarque que tous les rayons réfléchis passent par le foyer F.
On vient de voir que quelque soit la position de M_0 sur la parabole, les angles $\widehat{x\mathrm{M}_0y}$ et $\widehat{\mathrm{FM}_0y'}$ ont la même mesure.
$\widehat{x\mathrm{M}_0y}$ représente l'angle d'incidence et $\widehat{\mathrm{FM}_0y'}$ l'angle de réflexion.
b) Les rayons du soleil sont réfléchis en un même point, ils sont donc concentrés au foyer.
Cette propriété est utilisée pour les fours solaires et les antennes paraboliques où les ondes reçues sont concentrées en un point de réception : « la tête de parabole ».

Dans le « sens inverse », si on émet des rayons lumineux au foyer, ils sont projetés parallèlement à l'axe de symétrie de la paraboloïde. On peut l'utiliser par exemple pour des phares de voiture.

Exercice 3 : parabole enveloppe de ses tangentes

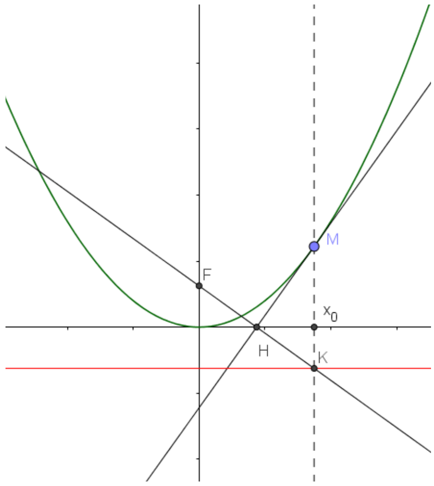
En 1ère S :

On considère la parabole *P* d'équation $y=ax^2$ où *a* est un réel.

a. Démontrer que la tangente T en tout point $\mathrm{M}(x_0 ; y_0)$ de *P* coupe l'axe des abscisses au point H d'abscisse $\dfrac{x_0}{2}$.

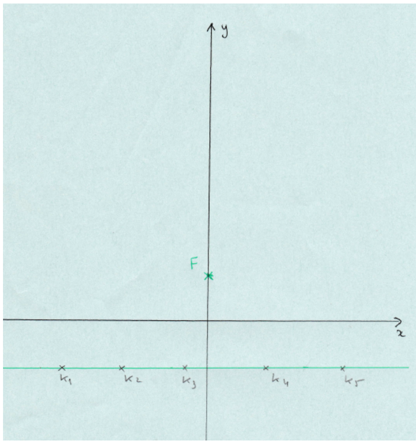
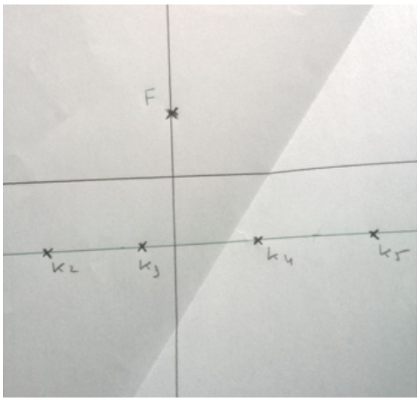
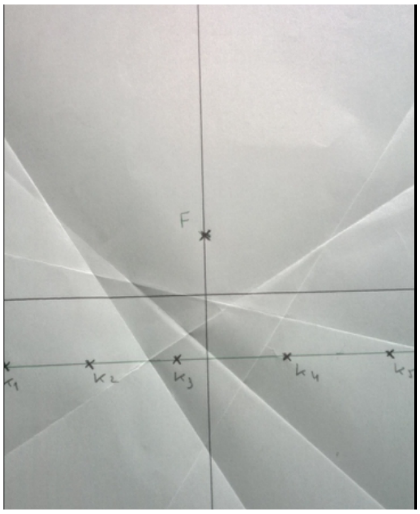
b. Soit le point $\mathrm{F}\left(0 ; \dfrac{1}{4a}\right)$ et le point K d'abscisse x_0 sur (FH).
Montrer que la tangente T est la médiatrice de [FK].

c. Quand le point M varie, montrer que le point K reste sur une droite parallèle à l'axe des abscisses d'équation $y=-\dfrac{1}{4a}$ (directrice de la parabole).

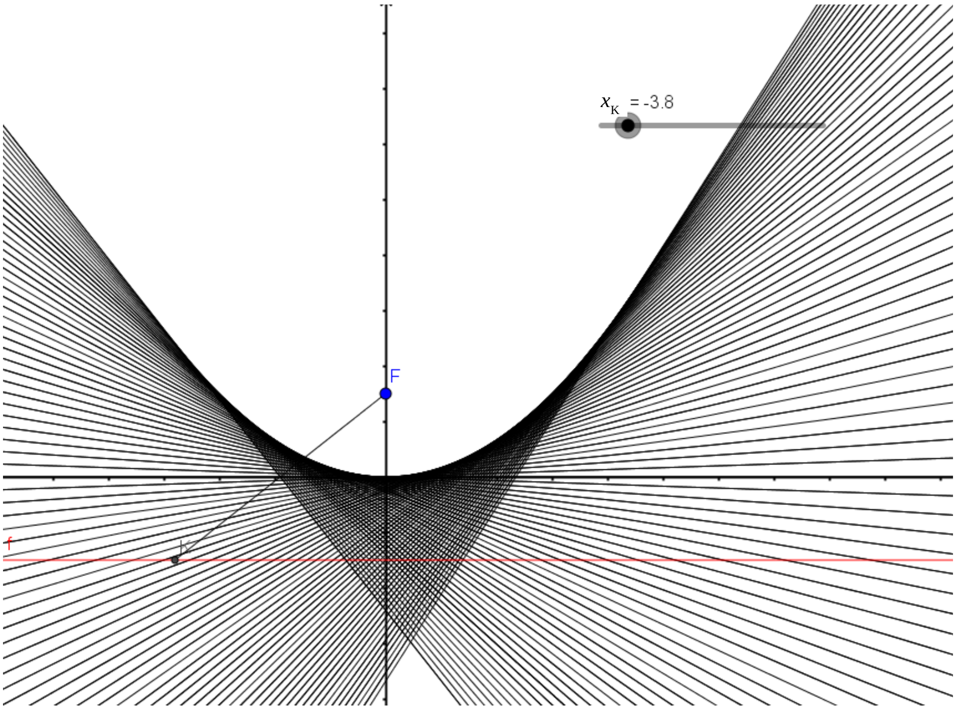


Application : réaliser une parabole à partir de l'enveloppe de ses tangentes

Par pliage : on matérialise toutes ces tangentes par des plis en fixant plusieurs positions du point K sur la directrice de la parabole et en pliant selon la médiatrice de [FK] :
On place dans un repère le point $\mathrm{F}\left(0 ; \dfrac{1}{4a}\right)$ et on trace la droite d'équation $y=-\dfrac{1}{4a}$.

 On place plusieurs points $\mathrm{K_i}$ sur la droite d'équation $y=-\dfrac{1}{4a}$.	 Ensuite par transparence on fait coïncider le point F et le point $\mathrm{K_i}$ et en pliant on obtient la médiatrice de $[\mathrm{FK_i}]$ soit la tangente à la parabole passant par le point M d'abscisse $x_{\mathrm{K_i}}$.	 On recommence pour obtenir l'enveloppe des tangentes.

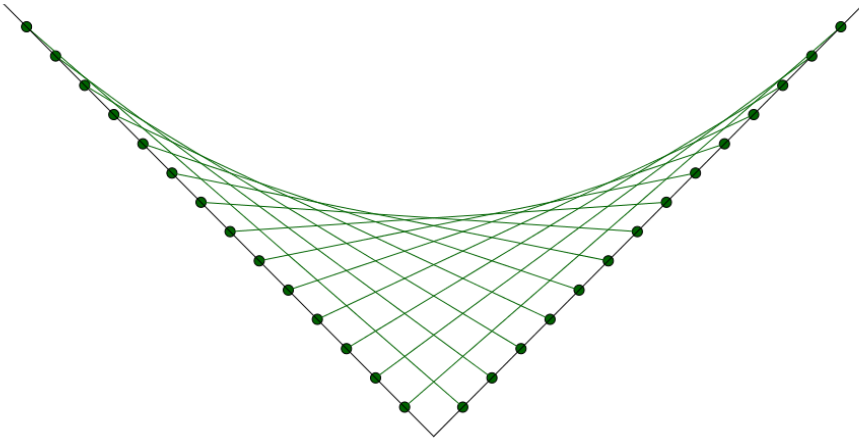
Avec un logiciel de géométrie dynamique :
On utilise un curseur pour définir l'abscisse x_K du point K puis on affiche la trace des médiatrices de [FK] lorsque K varie sur la droite d'équation $y=-\frac{1}{4a}$.



> **En Terminale S :**
> On part dans l'autre sens, l'objectif étant cette fois de faire écrire une équation d'une famille de droites dépendant d'un paramètre *m* puis de montrer que ces droites sont toutes tangentes à la même parabole.
> Prise d'initiative :
> On considère la droite D d'équation $y=-1$ et le point $F(0;1)$.
> Soit $K(2m;-1)$ un point de la droite D. Existe-t-il une parabole symétrique par rapport à l'axe des ordonnées ayant pour tangentes les médiatrices de [FK] ?

Une équation de la médiatrice de [FK] est $y=m(x-m)$.
Les paraboles symétriques par rapport à l'axe des ordonnées ont une équation de la forme $y=ax^2$ où *a* est un réel.
Il s'agit donc déterminer s'il existe un réel *a* tel que pour tout réel *m*, l'équation $ax^2=m(x-m)$ ait une seule solution dans $\mathbb{R}$.
En effet une droite est tangente à une parabole si et seulement si elle n'a qu'un point d'intersection avec la parabole.
$ax^2=m(x-m)\Leftrightarrow ax^2=mx-m^2\Leftrightarrow ax^2-mx+m^2=0$
Cette équation a une seule solution si et seulement si le discriminant est nul.
or $\Delta=m^2-4am^2$
$m^2-4am^2=0\Leftrightarrow m^2(1-4a)=0$
donc pour tout réel *m*, $\Delta=0\Leftrightarrow 1-4a=0\Leftrightarrow a=\frac{1}{4}$.

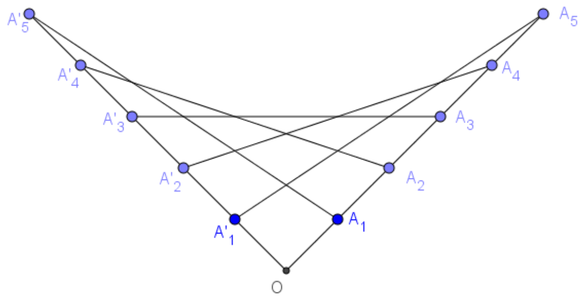
Exercice 4 : tableau de fils tendus [13]



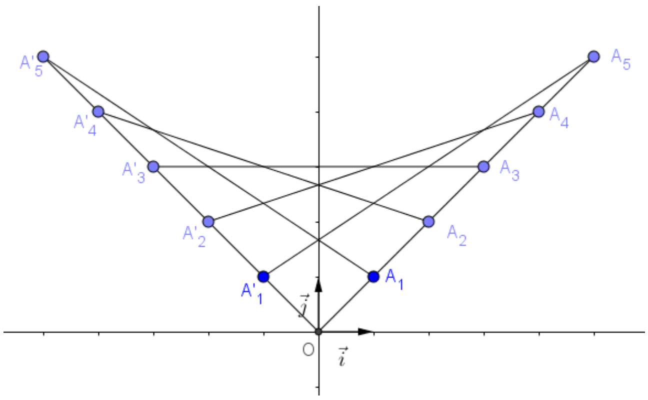
On place des points à intervalles réguliers sur deux demi-droites perpendiculaires et on les relie comme indiqué dans la figure ci-dessus. Il s'agit de montrer que tous les segments matérialisent les tangentes à une même parabole.

1. Cas particulier : avec 5 points

On dispose les points A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 et A'_1, A'_2, A'_3, A'_4, A'_5 à intervalles réguliers sur deux demi-droites perpendiculaires.



On se place dans le repère orthonormé (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$) tel que la demi-droite de sommet O et de vecteur directeur $\vec{j}$ soit la bissectrice de $\widehat{A'_1OA_1}$ avec $A_1(1;1)$.



$OA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = A_4A_5 = OA'_1 = A'_1A'_2 = A'_2A'_3 = A'_3A'_4 = A'_4A'_5$

a) Pour tout entier naturel *k* compris entre 1 et 5, déterminer une équation de la droite $(A_k A'_{6-k})$.

b) Montrer que pour tout entier naturel *k* compris entre 1 et 5, la droite $(A_k A'_{6-k})$ est tangente à la parabole d'équation $y=\frac{1}{12}x^2+3$.

13 D'après « Mathématique du collège au lycée, Annie Berté, Nathan pédagogie, 1996 »

a) $A_k(k;k)$ et $A'_{6-k}(k-6;6-k)$ donc la droite $(A_k A'_{6-k})$ a pour équation $y=\frac{k-3}{3}x+2k-\frac{k^2}{3}$.

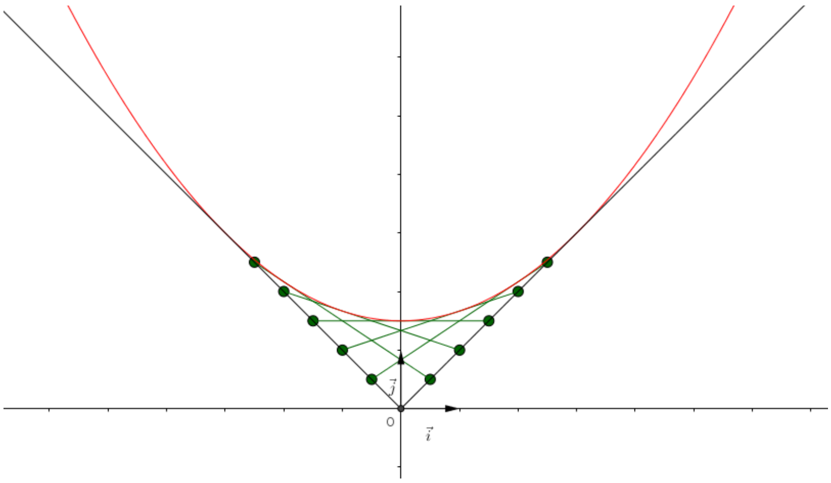
b) Il s'agit de montrer que l'équation $\frac{k-3}{3}x+2k-\frac{k^2}{3}=\frac{1}{12}x^2+3$ a une seule solution.

En effet une droite est tangente à une parabole si et seulement si elle n'a qu'un point d'intersection avec la parabole.

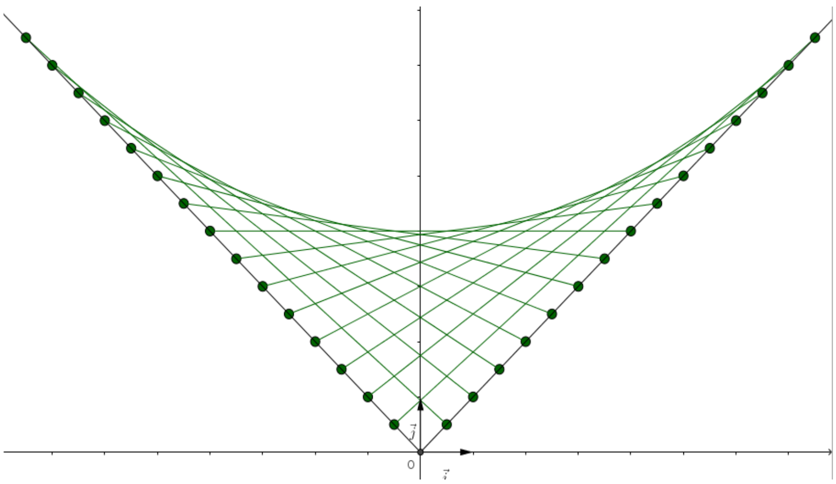
Or $\frac{k-3}{3}x+2k-\frac{k^2}{3}=\frac{1}{12}x^2+3 \Leftrightarrow \frac{1}{12}x^2-\frac{k-3}{3}x-2k+\frac{k^2}{3}+3=0$

on calcule le discriminant : $\Delta=\left(\frac{k-3}{3}\right)^2-4\times\frac{1}{12}\times\left(-2k+\frac{k^2}{3}+3\right)=\frac{k^2-6k+9}{9}+\frac{2}{3}k-\frac{1}{9}k^2-1=0$

On a donc montré que les droites $(A_k A'_{6-k})$ sont des tangentes de la parabole d'équation $y=\frac{1}{12}x^2+3$.



2. Généralisation : Soit un entier naturel $n\geqslant 1$.



a) Pour tout entier naturel compris k entre 1 et n, on considère les points $A_k(k;k)$ et $A'_k(-k;k)$. Déterminer une équation de la droite $(A_k A'_{(n+1)-k})$.

b) Montrer que pour tout entier naturel $n\geqslant 1$ et tout entier naturel k compris entre 1 et n, la droite $(A_k A'_{(n+1)-k})$ est tangente à la parabole d'équation $y=\frac{1}{2(n+1)}x^2+\frac{n+1}{2}$.

a) $A_k(k;k)$ et $A'_{n+1-k}(k-(n+1);n+1-k)$ donc $(A_k A'_{(n+1)-k})$ a pour équation :

$$\frac{n+1-2k}{-(n+1)}=\frac{y-k}{x-k}\Leftrightarrow y=\frac{2k-(n+1)}{n+1}x-\frac{2k^2}{n+1}+2k$$

b) On résout :

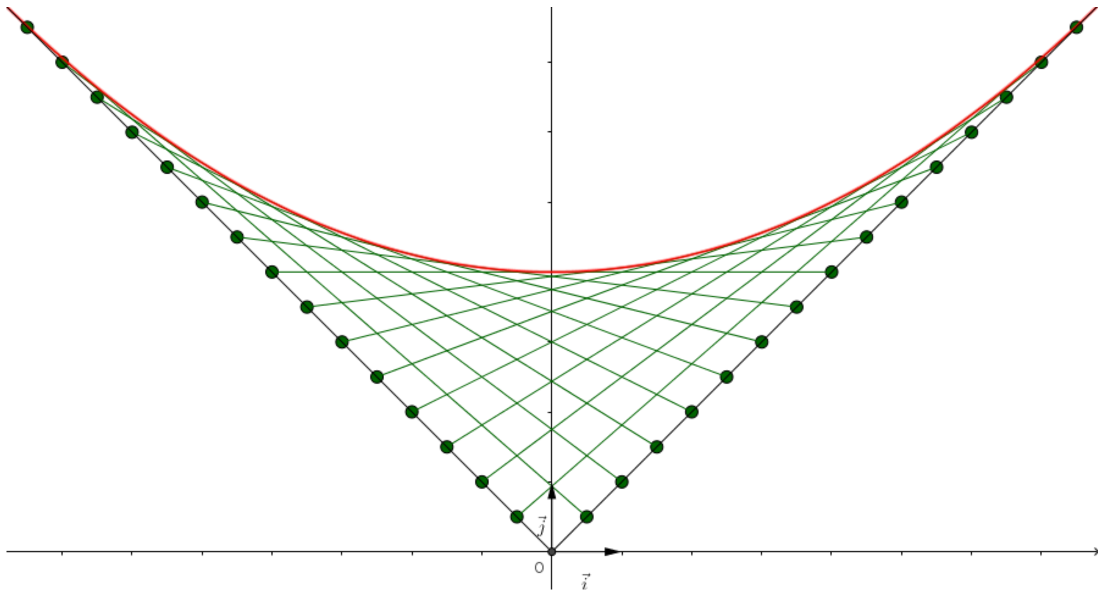
$$\frac{1}{2(n+1)}x^2+\frac{n+1}{2}=\frac{2k-(n+1)}{n+1}x-\frac{2k^2}{n+1}+2k\Leftrightarrow\frac{1}{2(n+1)}x^2-\frac{2k-(n+1)}{n+1}x+\frac{2k^2}{n+1}-2k+\frac{n+1}{2}=0$$

En effet une droite est tangente à une parabole si et seulement si elle n'a qu'un point d'intersection avec la parabole.

On calcule le discriminant de cette équation :

$$\Delta=\frac{1}{(n+1)^2}(4k^2+(n+1)^2-4k(n+1)-4k^2+4k(n+1)-(n+1)^2)=0$$

La droite $(A_k A'_{(n+1)-k})$ a un seul point d'intersection avec la parabole, elle est donc tangente à la parabole.



Applications : histoires d'hyperboles

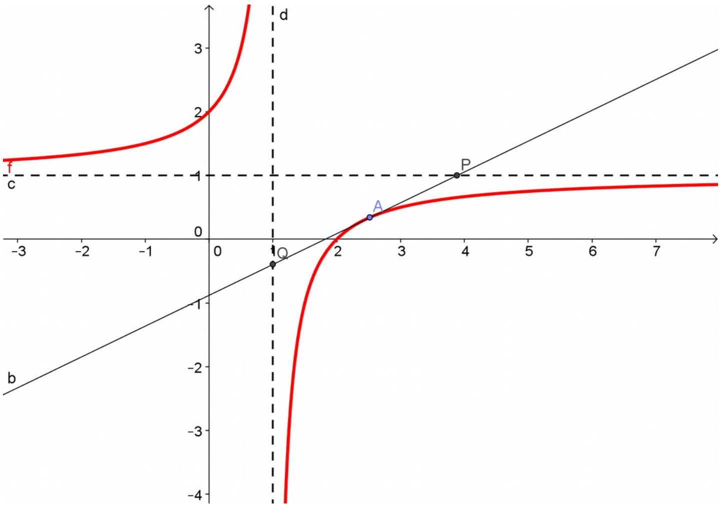
Partie A : avec une tangente

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\frac{x-2}{x-1}$.

Tracer avec un logiciel de géométrie dynamique la courbe représentative de f que nous noterons *H*. Soit A un point de *H* d'abscisse a . On note T_A la tangente en A à *H*.

a) Déterminer une équation de T_A en fonction de a .

b) Cette droite coupe les asymptotes de *H* en deux points P et Q. Montrer que A est le milieu du segment [PQ].



Partie B : Avec une sécante

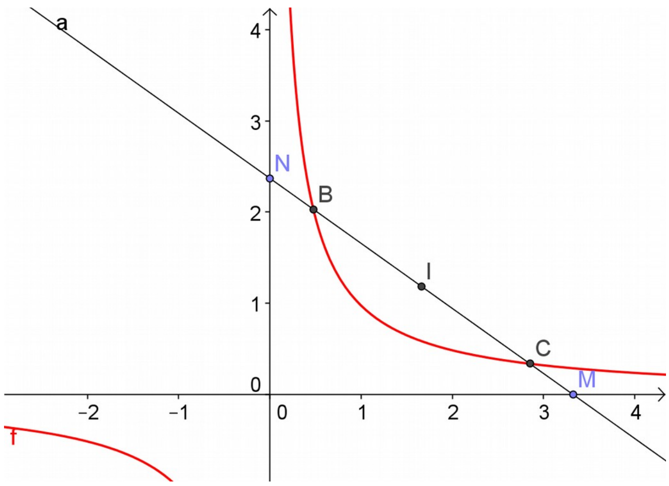
Construire la courbe représentative de la fonction inverse.

Placer un point M sur l'axe des abscisses et un point N sur l'axe des ordonnées.

On appelle *D* la droite (MN).

Déplacer M et N afin que la droite *D* coupe la courbe en deux points B et C.

Construire les milieux des segments [MN] et [BC]. Quelle conjecture peut-on faire? Démontrer cette conjecture.

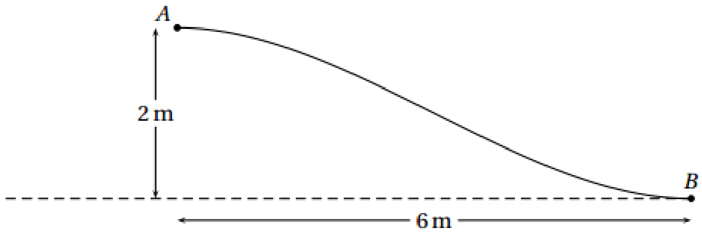


Applications : toboggan

Cet exercice provient du site http://perpendiculaires.free.fr/ et a été posé en devoir maison en 1ère S. Il permet de travailler la notion de tangente mais aussi d'utiliser la valeur absolue.

Une entreprise fabrique des toboggans. Elle reçoit la commande d'une municipalité pour construire un toboggan respectant les contraintes suivantes :

- le toboggan ne doit pas présenter d'angle ;
- le départ se fait à une altitude de 2 m ;
- la longueur « hors tout » est de 6 m ;
- au départ et à l'arrivée le toboggan doit être horizontal.



L'entreprise est chargée de trouver une solution dont le profil sera donné par la courbe d'une fonction b .

Partie A

1. Choisir un repère orthonormé et donner les coordonnées de A et B dans ce repère.

2. La première des contraintes que doit respecter le toboggan peut se traduire par : « f est dérivable sur son domaine de définition ». On notera alors f' sa fonction dérivée.

3. Traduire les autres contraintes à l'aide de f et de f'.

4. Pour des raisons techniques, l'entreprise ne peut fabriquer que des toboggans dont le profil vérifie une équation du type $y=ax^3+bx^2+cx+d$.

a) La première contrainte est-elle vérifiée ?

i. b) Déterminer les valeurs de a , b , c et d pour que toutes les contraintes soient vérifiées.

Partie B

Dans un repère orthonormé, on appelle pente du toboggan la fonction $g(x)=|f'(x)|$ où f est la fonction décrivant le profil du toboggan.

1. Déterminer l'expression de $g(x)$ sans valeurs absolues.

2. L'entreprise décide d'installer une barre de renfort verticale là où la pente est maximale.

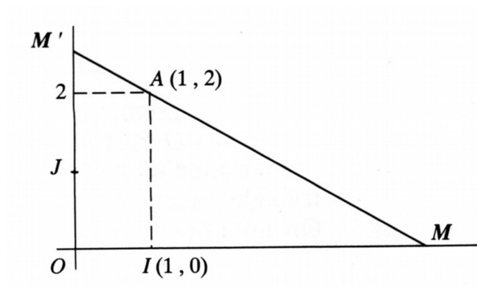
a) Déterminer en quel(s) point(s) la pente est maximale.

b) En déduire la position et la taille de la barre de renfort.

Partie 2 : introduire la notion de limites de fonctions en Terminale

Une progression pour introduire la notion de limites de fonctions

On se place dans un repère orthonormé (O ; I, J).
Soit A le point de coordonnées (1 ; 2).
À chaque point M (x ; 0) de l'axe (Ox) tel que $x > 1$,
on associe le point M'(0 ; y) de l'axe (Oy) de façon que les points A, M et M' soient alignés.



Cet exercice est issu du manuel de la collection Terracher (maths analyse en 1ère S- 1998) et sert de fil rouge à la leçon sur les limites.

Nous avons choisi de démarrer par la recherche de la limite en l'infini qui arrive naturellement après le travail sur les suites.

Étape 1 « limite finie en l'infini »
Si M s'éloigne de I que peut-on dire de la longueur OM' ? Justifier.

Puisque OM = x, on détermine l'expression de la longueur OM', notée y, en fonction de x, en utilisant le théorème de Thalès (ou des triangles semblables ou une homothétie).

On obtient $y=\frac{2x}{x-1}$.

Remarque : On peut également travailler en géométrie analytique.
La colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{AM}$ *et* $\overrightarrow{AM'}$ *conduit à* $(y-2)(x-1)=2$ *ou encore*
$y=2+\frac{2}{x-1}=\frac{2x}{x-1}$.
Mais, si l'on veut déterminer une équation de la droite (AM), un problème de notations se pose. En effet on ne peut pas noter x l'abscisse de M et y l'ordonnée de M' si on note selon les usages x et y les coordonnées d'un point courant de (AM) .
L'équation réduite de la droite (AM) est $y=\frac{-2}{\mathrm{OM}-1}x+2+\frac{2}{\mathrm{OM}-1}$.
En posant OM = t, on obtient $OM'=\frac{2t}{t-1}$.
En demandant aux élèves d'étudier la longueur OM' plutôt que l'ordonnée du point M', on évite ainsi le recours aux équations de droites pour privilégier l'utilisation de la géométrie non repérée.

Les élèves disent que le point M' descend, se rapproche de 2 et font quelques calculs en utilisant la formule trouvée précédemment pour y.

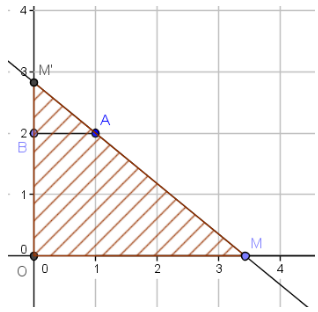
x	10	100	1000	10000
y	2,2222	2,0202	2,0020	2,0002

La longueur semble en effet se rapprocher de 2 et même peut-être "atteindre" 2 selon certains élèves.

On peut leur demander s'il est possible de se rapprocher aussi près qu'on le souhaite de la valeur 2.

Si l'on considère l'écart entre y et 2, cela revient à se demander si cet écart peut être aussi proche de 0 que l'on veut pour une valeur de x suffisamment grande.

$$y-2=\frac{2x}{x-1}-2=\frac{2}{x-1}$$



Soit B le point de coordonnées (0;2).
L'expression $\frac{2}{x-1}$ est égale à la longueur BM' qui devient de plus en plus proche de 0 lorsque OM devient de plus en plus grand.
Grâce à cette illustration géométrique, les élèves sont convaincus que y ne peut pas valoir 2, cela signifierait que B=M', ce qui est impossible par construction.

Peut-on rendre cet écart aussi proche de 0 que l'on veut, par exemple plus petit que 10^{-3} ?
$\frac{2}{x-1}<10^{-3}\Leftrightarrow x-1>2\times10^{3}\Leftrightarrow x>2\times10^{3}+1$, étant donné que $x-1>0$.
D'une manière générale, quel que soit l'entier naturel p :
$$\frac{2}{x-1}<10^{-p}\Leftrightarrow x-1>2\times10^{p}\Leftrightarrow x>2\times10^{p}+1$$
On peut donc rendre $\frac{2}{x-1}$ aussi proche de 0 que l'on veut dès que x est suffisamment grand.
Remarque : les élèves peuvent utiliser un tableur ou un algorithme pour donner le seuil à partir duquel y est inférieur à 2 plus une petite quantité donnée.

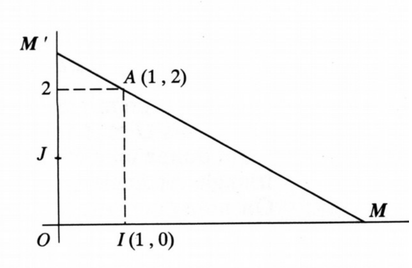
***Bilan : La longueur étant aussi proche de 2 que l'on souhaite pour x suffisamment grand, on dit qu'elle a pour limite 2 lorsque x tend vers* +∞*. On note* $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x-1}=2$.**

<u>Représentation graphique</u> :
Les élèves réalisent le graphique représentant y en fonction de x et donnent avec l'enseignant l'interprétation du résultat trouvé.

La courbe représentative s'approche au plus près de la droite d'équation $y=2$.
On dit que la droite d'équation $y = 2$ est asymptote horizontale à la courbe.

Étape 2 « limite infinie en un réel »
Si M se rapproche de I, que peut-on dire de la longueur OM' ?

Les élèves disent que le point M' va s'éloigner de plus en plus et font quelques calculs :



x	1,1	1,05	1,01	1,001	1,0001	1,00001	$1+10^{-6}$		
y	22	42	202	2002	20002	200002	2000002		

La distance OM' semble devenir de plus en plus grande.

Certains élèves disent même qu'elle peut aller jusqu'à l'infini...Un débat peut s'installer sur cette idée.
On peut alors demander si cette distance peut être aussi grande que l'on veut, par exemple supérieure à 10^3 pour M suffisamment proche de I ? supérieure à 10^6, à 10^p ?

$$\frac{2x}{x-1} > 10^3$$

$$\Leftrightarrow \quad 2x > 10^3(x-1) \text{ car } x-1>0$$

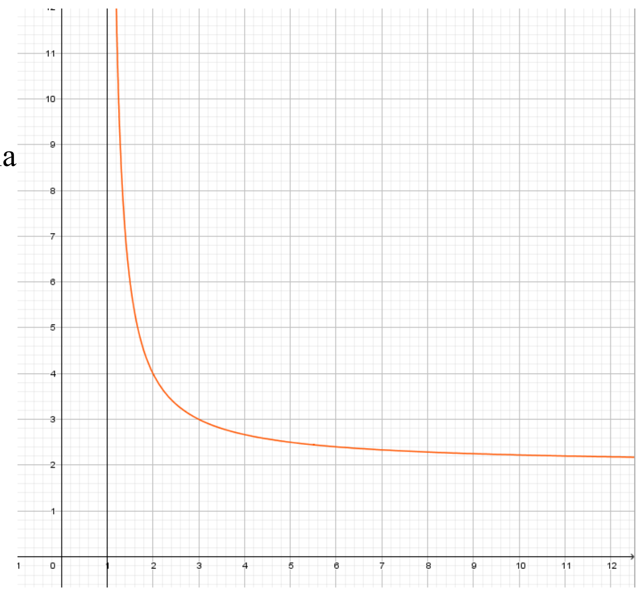
$$\Leftrightarrow \quad 10^3 > (10^3-2)x \quad \Leftrightarrow x < \frac{10^3}{10^3-2} \quad \text{or} \quad \frac{10^3}{10^3-2} = \frac{10^3-2}{10^3-2} + \frac{2}{10^3-2} \approx 1+0{,}002$$

On peut recommencer avec d'autres puissances de 10.

Bilan : La longueur OM' étant aussi grande qu'on le veut pour x suffisamment proche de 1, on dit qu'elle a pour limite $+\infty$ lorsque x tend vers 1.

On écrit : $\lim\limits_{x \to 1} \frac{2x}{x-1} = +\infty$

Interprétation graphique :
Les élèves reprennent la courbe représentant la longueur OM'en fonction de OM.

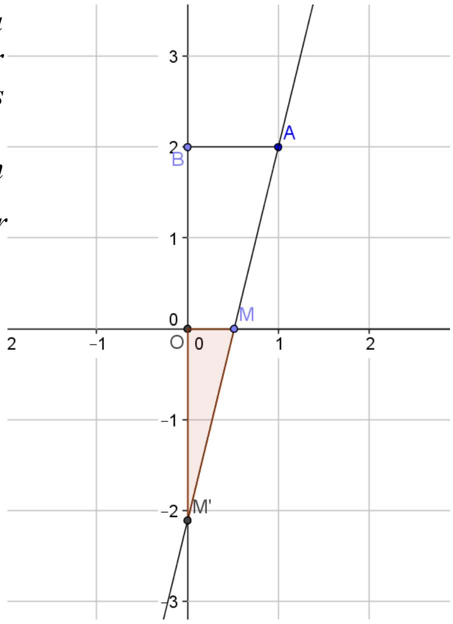


On peut interpréter graphiquement les résultats trouvés et parler d'asymptote verticale.

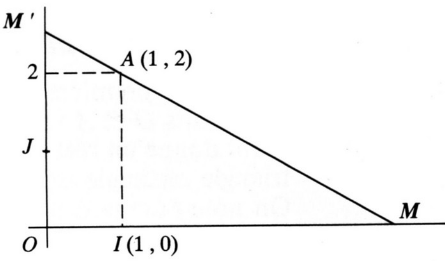
Bilan : La courbe représentative s'approche au plus près de la droite d'équation x = 1 on dit que cette droite est une asymptote verticale à la courbe C.

Remarque (voir compléments pour le professeur I) : Pour une notation correcte, il faudrait écrire $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} \frac{2x}{x-1}=+\infty$.

Pour parler de limite à droite et de limite à gauche, on pourra demander ce qui se passe lorsque le point M se rapproche de I par la gauche et introduire la notation. Certains élèves posent d'ailleurs la question.
Si on considère la longueur OM', dans cette configuration, on obtient que $\mathrm{OM}'=\frac{2x}{1-x}$ *pour* $0\leqslant x<1$ *, on peut donc alors définir* $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} \frac{2x}{1-x}$ *et montrer de la même façon que* $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} \frac{2x}{1-x}=+\infty$.



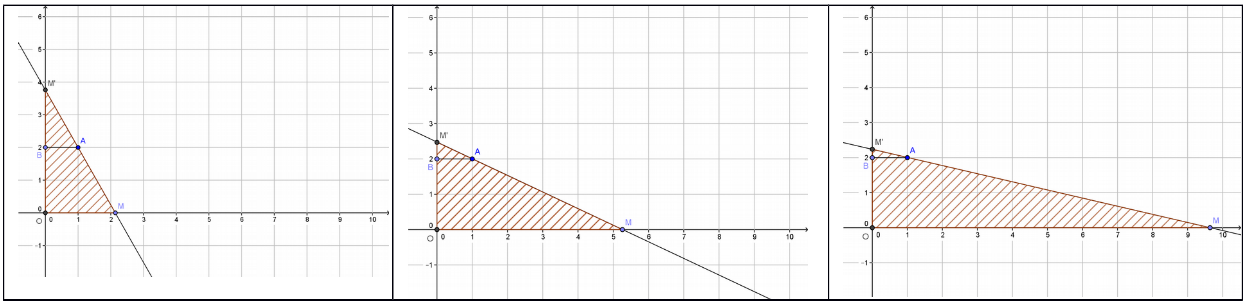
Étape 3 « limite infinie en l'infini ».
On s'intéresse à l'aire du triangle OMM' lorsque le point M se déplace sur l'axe des abscisses (on a toujours $x_M>1$). Que devient cette aire lorsque OM devient de plus en plus grand ?



Après une rapide discussion dans la classe, les élèves, confortés par l'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique, répondent que l'aire devient de plus en plus grande.

Voici deux points de vue : le premier, plus complet, permet d'arriver à la notion d'asymptote oblique, le deuxième permet de traiter le problème plus rapidement.

1[er] point de vue :

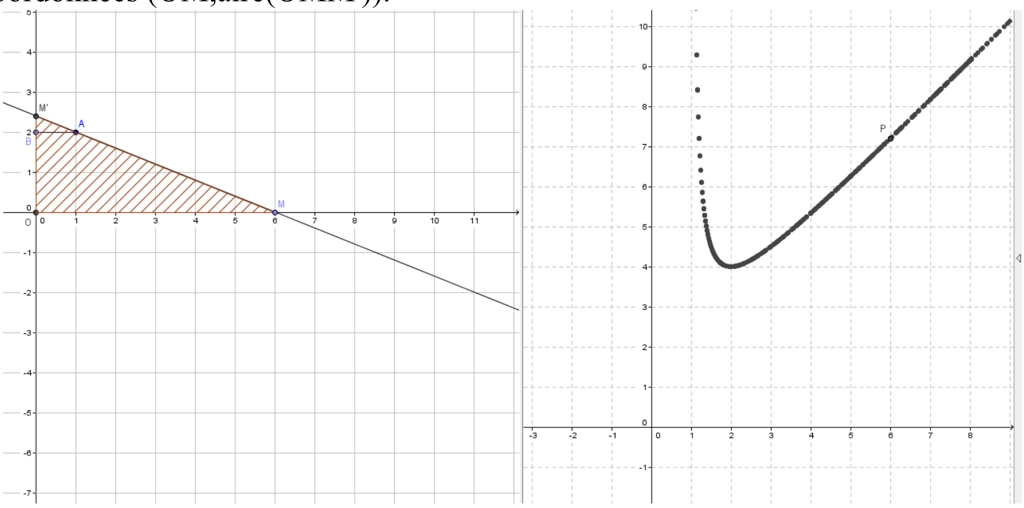


Le professeur doit inciter les élèves à regarder de plus près cette aire : l'aire du triangle OMM' est la somme de l'aire du triangle ABM' et de celle du trapèze OMAB.

On peut donc en conclure que :

- L'aire du triangle OMM' est toujours plus grande que celle de l'aire du trapèze OMAB.
- Lorsque M s'éloigne de O, M' se rapproche de B et l'aire du triangle ABM' devient de plus en plus petite et donc l'aire du triangle OMM' devient de plus en plus proche de celle du trapèze OMAB.

On peut enrichir le graphique en faisant tracer, dans une seconde fenêtre l'ensemble des points de coordonnées (OM,aire(OMM')).



On va donc étudier la fonction f qui à OM associe l'aire du triangle OMM'.

1. Exprimer l'aire du triangle OMM' en fonction de x et compléter le tableau de valeurs suivant :

x	10	100	1000	10000
$f(x)$				

On obtient que $f(x)=\frac{x^2}{x-1}$ pour $x>1$.

x	10	100	1000	10000
$f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$	11.111	101.01	1001	10001

Les calculs semblent donc confirmer la conjecture.

2. Montrer que la fonction f est strictement croissante sur $[2;+\infty[$.

Un rapide calcul de la dérivée permet de justifier les variations sur $[2;+\infty[$, on a en effet $f'(x)=\dfrac{x(x-2)}{x-1}$.

3. Exprimer l'aire du trapèze OMAB en fonction de x puis comparer $x+1$ et $f(x)$. Interpréter ce résultat.

L'aire du trapèze est égale à $\dfrac{(x+1)\times 2}{2}=x+1$.

$$f(x)-(x+1)=\frac{x^2}{x-1}-(x+1)=\frac{x^2-x^2+1}{x-1}=\frac{1}{x-1}$$

Donc pour tout $x>1$, $f(x)>x+1$.

On retrouve donc, par le calcul, que l'aire du triangle OMM' est toujours plus grande que celle du trapèze.

Peut-on rendre l'aire du triangle OMM' aussi grande que l'on veut ?

4. Déterminer A un réel tel que pour tout $x>\mathrm{A}$, $f(x)>10^3$.

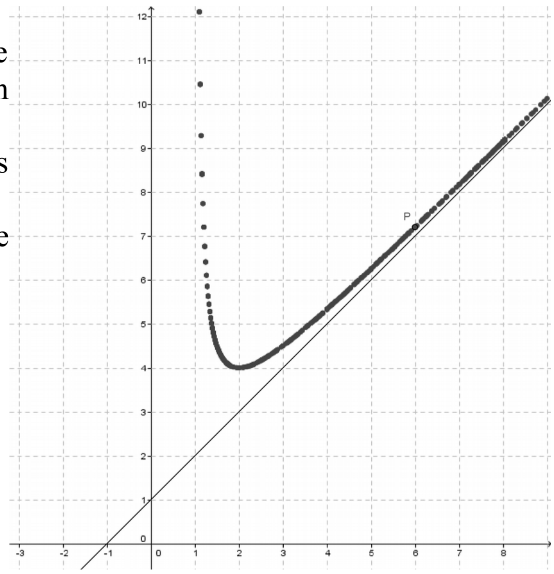
si $x>10^3$ alors $f(x)>f(10^3)$ car f est strictement croissante sur $[2;+\infty[$,
or $f(10^3)>10^3+1$ donc pour tout $x>10^3$, $f(x)>10^3$.
On peut recommencer le même travail avec 10^p où p est un entier naturel.

Bilan : Quel que soit l'entier naturel p, il existe un réel A= 10^p **tel que pour tout** $x>\mathrm{A}$ **,** $f(x)>10^p$ **.**
On peut donc rendre $f(x)$ **aussi grand que l'on veut si l'on choisit** x **suffisamment grand. On dit que la limite de** f **en** $+\infty$ **est égale à** $+\infty$ **. On note** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ **.**

5. Complément : notion d'asymptote oblique (hors programme).

En reprenant le tracé de la courbe représentative de f , les élèves disent qu'à l'infini elle ressemble à une droite.

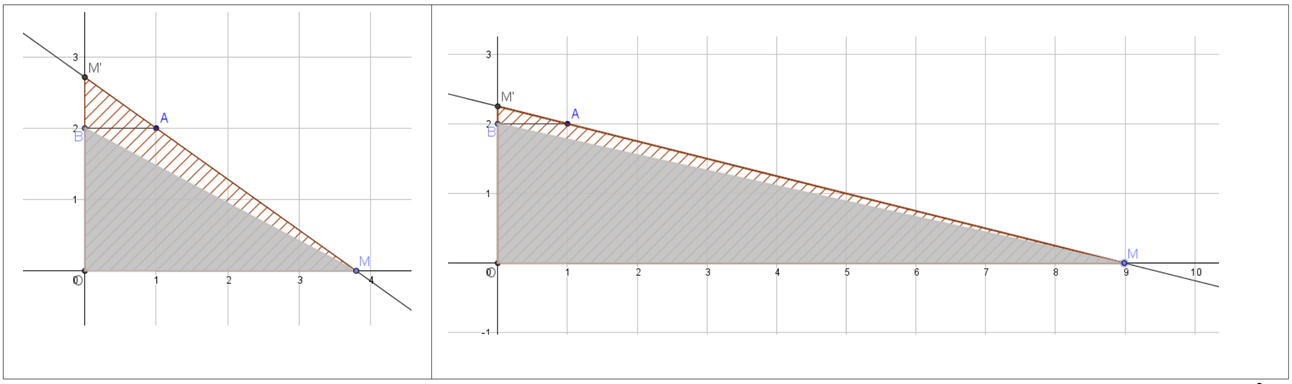
Il faut alors reprendre le travail fait en début de séance en se basant sur l'interprétation géométrique.
On a vu que l'aire de OMM' se rapproche de plus en plus de l'aire du trapèze OMAB qui vaut $x+1$.
On trace la droite d'équation $y=x+1$ sur le graphique de la fonction.



On a vu que $f(x)-(x+1)=\dfrac{1}{x-1}$.

Comment interpréter graphiquement ce résultat ?
On mesure l'écart entre la courbe représentative de f et la droite d'équation $y=x+1$.
On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x-1}=0$, on peut donc rendre cet écart aussi proche de 0 que l'on veut dans la mesure où l'on choisit x suffisamment grand. On dit que la droite d'équation $y=x+1$ est asymptote à la courbe de f en l'infini.

<u>2ème point de vue :</u>



On va étudier la fonction f qui à OM associe l'aire du triangle OMM', on obtient que $f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$ pour $x>1$.
L'aire du triangle OMM' est supérieure à celle du triangle OMB or l'aire du triangle OMB vaut x , on a donc $f(x)\geqslant x$ pour tout $x>1$.
De manière évidente, pour tout $x>10^p$, $f(x)>10^p$.

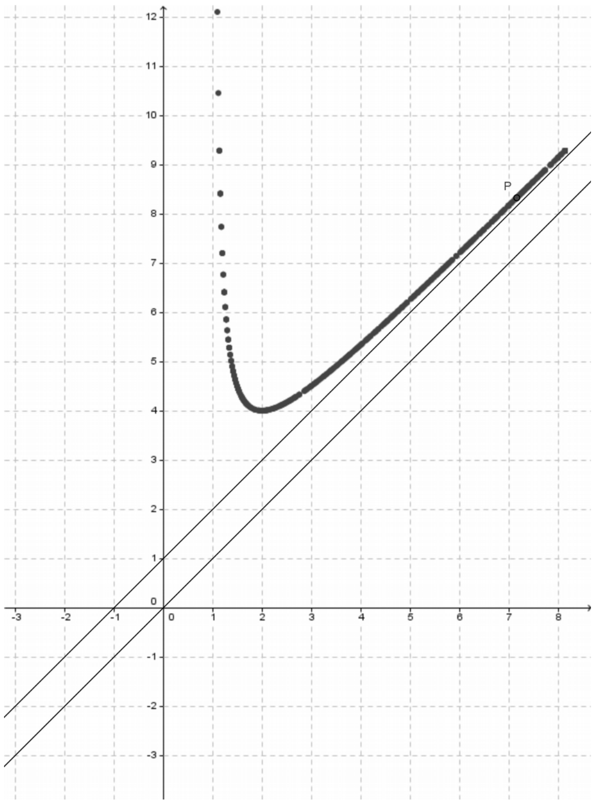
La définition de la limite est donc immédiate ,

Bilan : Quel que soit l'entier naturel p, il existe un réel A= 10^p tel que pour tout $x > A$, $f(x) > 10^p$.

On peut donc rendre $f(x)$ aussi grand que l'on veut si on choisit x suffisamment grand. On dit que la limite de f en $+\infty$ est égale à $+\infty$. On note $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

On peut demander aux élèves ce qu'ils pensent de l'aire du triangle BMM'. On peut s'attendre à ce que certains pensent que cette aire est constante.

L'aire du triangle BMM' est égale à $f(x) - x = \frac{x^2}{x-1} - x = \frac{x^2 - x^2 + x}{x-1} = \frac{x}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}$,
cette aire n'est donc pas constante.
C'est aussi l'occasion de réinvestir le travail fait dans l'étape 1.
$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x-1} = 0$ donc l'aire du triangle M'BM tend vers 1 lorsque M s'éloigne de I. L'écart entre l'aire du triangle OMM' et celle du triangle BMM' tend donc vers 1 lorsque x tend vers $+\infty$, ce que l'on peut visualiser à l'aide de la courbe de la fonction qui donne l'aire du triangle OMM'.



En fait la fonction g définie pour tout $x > 1$ par $g(x) = x$, qui donne l'aire du triangle OMB, est équivalente à la fonction f en l'infini.
f et g sont équivalentes en l'infini et ce n'est pas pour autant que leur différence est constante ou tend vers 0.
En revanche, si l'on note h la fonction définie sur $]1; +\infty[$ par $h(x) = x + 1$, f et h sont équivalentes en l'infini et leur différence tend vers 0.

Compléments pour le professeur : introduction de la notion de limite

I- Compléments concernant l'étape 1 : limite à gauche et à droite

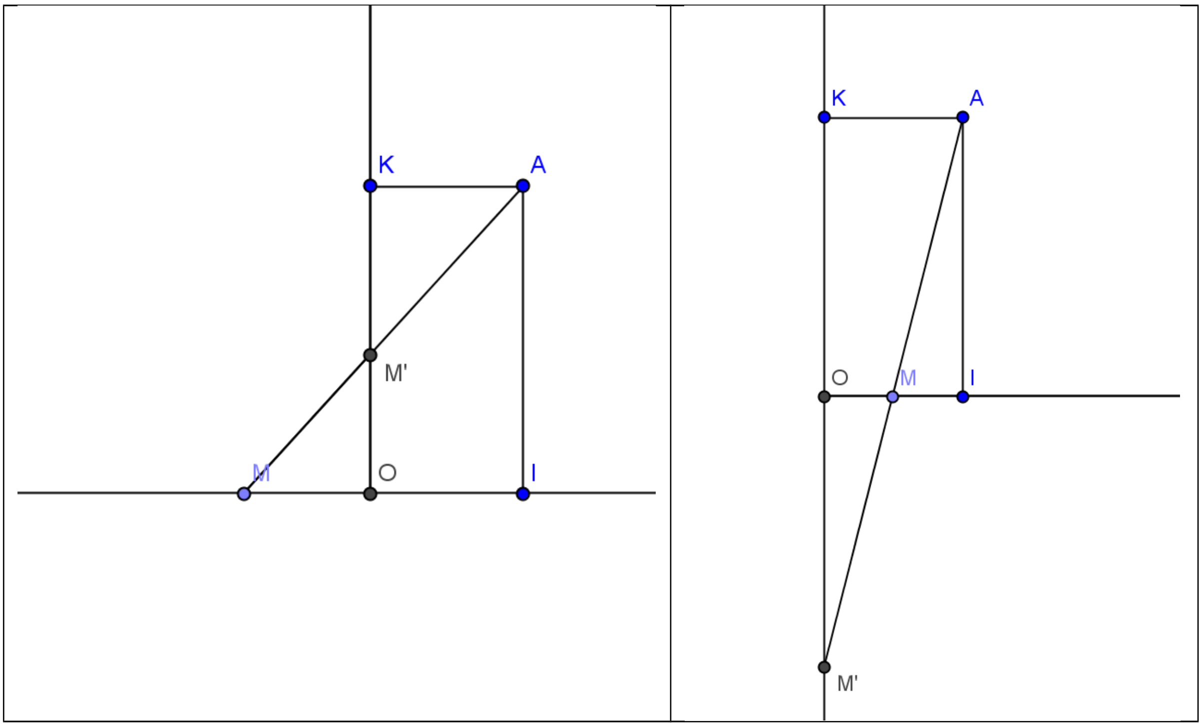
À la fin de l'étape 1 nous sommes arrivés à : $\lim_{x \to 1} \frac{2x}{x-1} = +\infty$.

Nous avons vu que ceci est acceptable quand il est bien écrit que le domaine de définition de la fonction est l'intervalle $]1;+\infty[$.

Quand on envisage des valeurs de x inférieures à 1, nous avons: $\lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \frac{2x}{x-1} = +\infty$.

Pour parler de limite à droite et de limite à gauche on pourra demander ce qui se passe lorsque le point M se rapproche de I par la gauche et introduire cette notation.

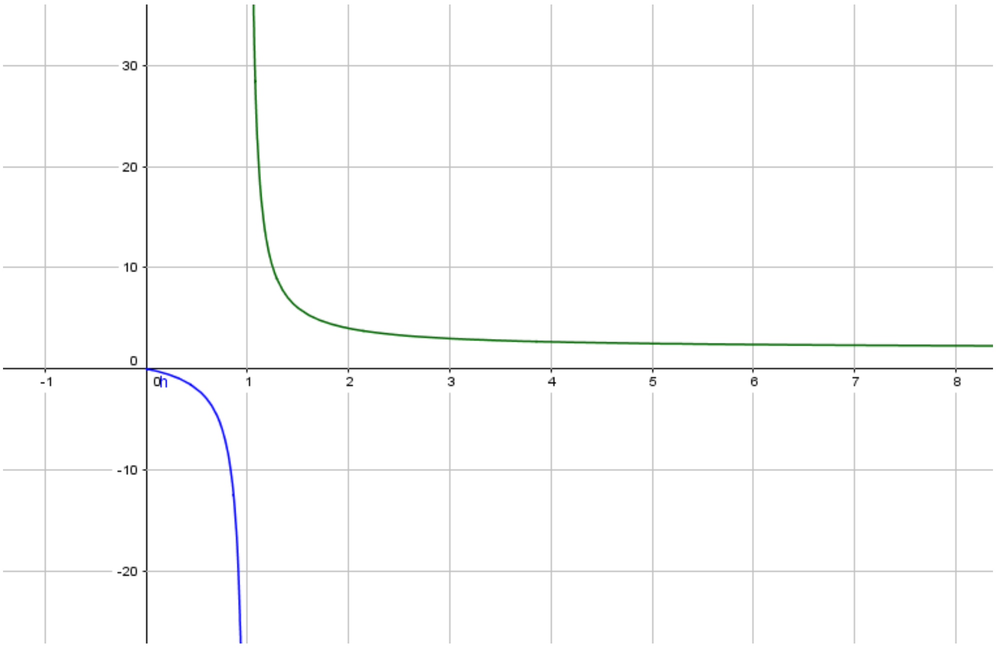
En effet il est possible d'imaginer que la droite passant par A pivote davantage de sorte que le point M décrive l'axe des abscisses privé de I, ce qui entraîne le déplacement de M' sur l'axe des ordonnées privé du point K (0 ; 2).



Dans l'étape 1, nous avons posé la question en termes de variation de la longueur OM'. Dans ce cas, l'ordonnée y du point M' est positive et donc égale à cette distance OM'. Les élèves trouvent la longueur OM' avec le théorème de Thalès, par exemple, ou en écrivant que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AM'}$ sont colinéaires.

La méthode avec les vecteurs colinéaires convient pour toutes les positions de M. En gardant la notation x pour son abscisse et en notant y l'ordonnée de M', on obtient $y = \frac{2x}{x-1}$.

Il y a ainsi une seule expression algébrique de la fonction dans $\mathbb{R}$ et une limite différente à gauche et à droite de 1. La limite quand x tend vers 1 par valeurs supérieures est $+\infty$. Cette limite devient $-\infty$ quand x tend vers 1 par valeur inférieures.
La représentation graphique de la fonction dans l'intervalle $[0,+\infty[$ se compose de la première branche d'hyperbole équilatère déjà tracée pour $x > 1$ et de la partie de le seconde branche de cette hyperbole comprise entre l'axe des ordonnées $x = 0$ et l'asymptote $x = 1$ que l'on peut tracer en bleu.

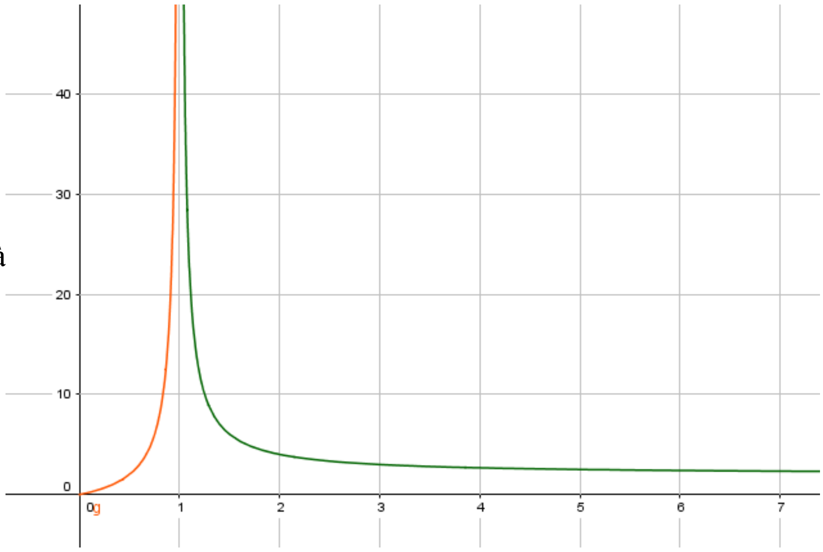


Dans cet intervalle, on peut continuer l'étude de la variation de la longueur OM' (et non l'ordonnée algébrique de M'), en posant $OM' = f(x)$.

Dans ce cas : si $x > 1$, $f(x) = \dfrac{2x}{x-1}$ et si $0 \leqslant x < 1$, $f(x) = \dfrac{2x}{1-x}$ ou encore $f(x) = \left|\dfrac{2x}{x-1}\right|$ pour tout $x \geqslant 0$.

Cette fonction a la même limite qui est $+\infty$ à gauche et à droite de 1.
On peut écrire cette fois en toute rigueur : $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = +\infty$

La représentation graphique de cette fonction se compose de la première branche d'hyperbole équilatère déjà tracée pour $x > 1$ et de la symétrique par rapport à l'axe des abscisses de la partie tracée en bleu.



II- Diverses fonctions que l'on peut étudier

Le professeur pourra choisir d'étudier d'autres grandeurs.

Par exemple en se limitant à $x > 1$:

IM = $x - 1$;

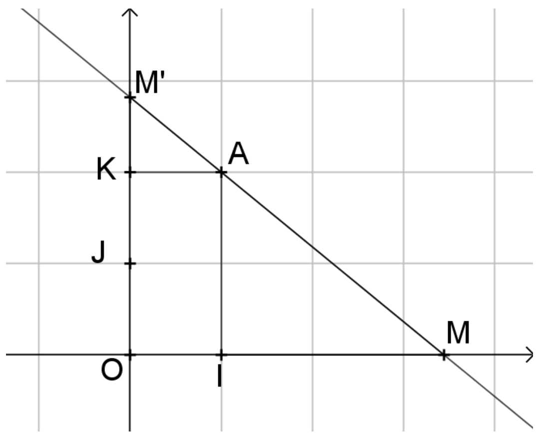
AIM et AKM' sont deux triangles semblables donc

$KM' = \frac{2}{x-1}$;

OM' = $\frac{2x}{x-1} = 2 + \frac{2}{x-1}$;

AM = $\sqrt{(x-1)^2 + 4}$;

AM' = $\sqrt{\frac{4}{(x-1)^2} + 1}$;



aire AIM = $x-1$; aire AKM' = $\frac{1}{x-1}$; aire MKM' = 1 + $\frac{1}{x-1}$, avec aire AKM = 1 ;

aire trapèze KAMO = x + 1; aire OMM' = $\frac{x^2}{x-1} = x + 1 + \frac{1}{x-1} = 2 + x - 1 + \frac{1}{x-1}$.

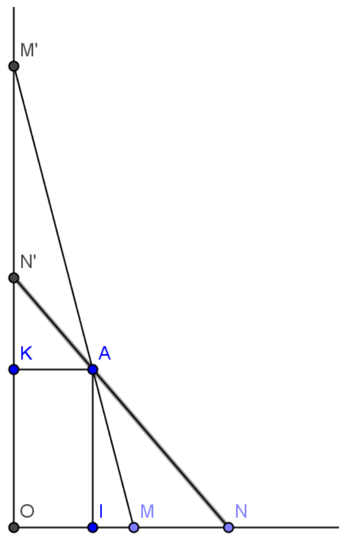
Il peut choisir les questions pour les élèves selon l'objectif et le niveau.

La variation de AM et AM' peut être intéressante en terminale (AM se rapproche IM quand M s'éloigne). On le retrouve algébriquement par la différence $\sqrt{(x-1)^2+4} - (x-1)$ qui s'écrit $\frac{4}{\sqrt{(x-1)^2+4} + x - 1}$ et graphiquement avec une asymptote oblique d'équation $y = x - 1$.

L'intérêt cette situation repose sur le jeu de cadres : cadre géométrique, algébrique, analytique et graphique.

Il y a cohérence entre le cadre géométrique (relation géométriques entre ces grandeurs) et le cadre algébrique des calculs mais aussi cohérence entre les limites qui peuvent être conjecturées par la variation des grandeurs géométriques et les démonstrations de ces limites par l'analyse.

III - Comment interpréter géométriquement les variations de l'aire dans l'étape 3 ?



Dans l'étape 3 nous avons étudié les variations de l'aire du triangle OMM' pour $x > 1$.

Nous avons noté cette fonction f et nous conservons cette notation.

$f(x) = \frac{x^2}{x-1} = x + 1 + \frac{1}{x-1}$

Cette aire se décompose en deux parties :

aire du trapèze OMAK = x +1 et aire du triangle M'KA = $\frac{1}{x-1}$.

Quand x devient très grand, l'aire du triangle M'KA devient négligeable devant l'aire du trapèze OMAK qui est x+1, ce qui permet de comprendre l'existence de l'asymptote oblique même hors programme.

D'après ce que nous avons vu à l'étape 3, quand x varie de 1 à $+\infty$, l'aire commence par être très grande quand x est près de 1, décroît jusqu'à 2 puis croît à nouveau jusqu'à l'infini.
Le calcul de la dérivée le confirme (si les élèves savent le faire, par exemple en terminale):

$$f'(x) = 1-\frac{1}{(x-1)^2}$$

$$f'(x)\geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{1}{(x-1)^2}\leqslant 1 \Leftrightarrow (x-1)^2\geqslant 1 \Leftrightarrow x(x-2)\geqslant 0 .$$

La fonction est donc strictement décroissante sur]1;2] et strictement croissante sur $]2;+\infty[$.

Interprétation géométrique de ces variations de l'aire :

<u>1-Décomposition de l'aire du triangle OMM' en trois parties</u>

Aire OMM' = aire rectangle OIAK + aire AIM + aire AKM' $= 2+(x-1)+\frac{1}{x-1}$

Quand le point M s'éloigne du point I, à mesure que x augmente, l'aire du triangle AIM augmente tandis que l'aire du triangle AKM' diminue.

Or le produit de ces deux aires est constant égal à $(x-1)\times\frac{1}{x-1}$ =1.

Pour que la somme de deux nombres x et y de produit constant soit minimale, il faut qu'ils soient égaux. Le plus rapide pour prouver ce résultat connu est d'écrire $(x+y)^2=4xy+(x-y)^2$
Si xy est constant, le minimum de $x+y$ aura lieu si $x-y=0$ soit $x = y$.[14]

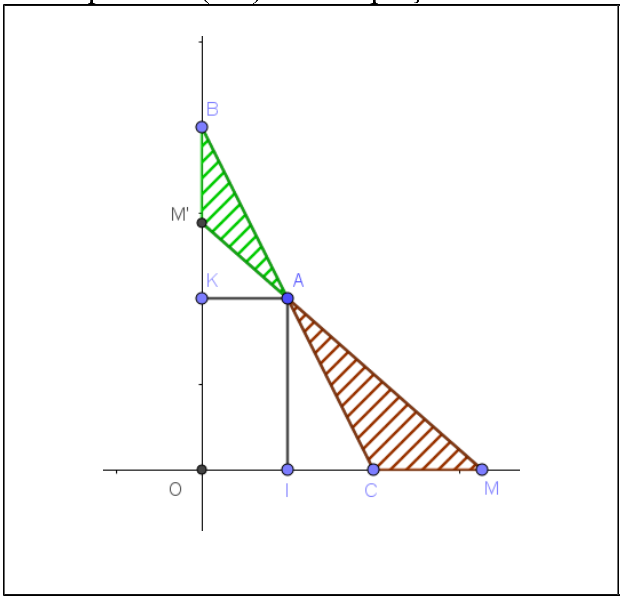
L'égalité des aires des deux triangles se produit une fois, quand les triangles sont isométriques
Si $AK=IM$ donc si $OM=2$ soit si $x = 2$.

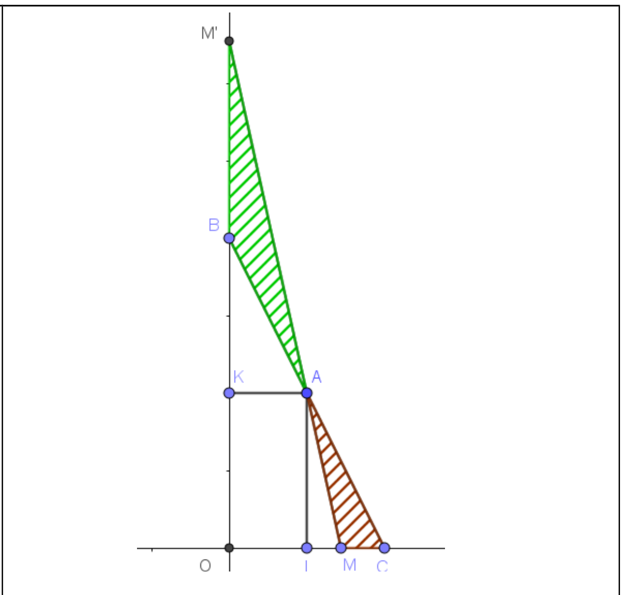
On peut le vérifier par l'algèbre: aire AIM = aire AKM $\Leftrightarrow x-1=\frac{1}{x-1} \Leftrightarrow (x-1)^2=1 \Leftrightarrow x(x-2)=0$

soit x =2.

<u>2- Examen de ce qui se passe de part et d'autre de la valeur $x = 2$</u>

Soient les points B(0,4) et C(2,0). On évalue l'aire gagnée ou l'aire perdue toujours en partant de cette position (BC) et en déplaçant M d'un côté ou de l'autre.





14 « périmètre des rectangles de même aire » p 53, brochure IREM d'AQUITAINE : « les fonctions du collège jusqu'en seconde » parue en 2012.

Si $x > 2$ aire gagnée = aire AMC = $x-2$ aire perdue = aire AM'B = $1-\frac{1}{x-1}=\frac{x-2}{x-1}$

Si $x < 2$ aire perdue = aire AMC = $2-x$ aire gagnée = aire AM'B = $\frac{1}{x-1}-1=\frac{2-x}{x-1}$

si $x>2$ alors $x-1>1$ donc l'aire gagnée est plus grande que l'aire perdue.
si $1<x<2$ alors $x-1<1$ donc l'aire gagnée est toujours plus grande que l'aire perdue.

Ceci prouve que l'aire minimale se produit bien pour $x = 2$ quand M est en C et M' en B.

3- Explication non seulement du minimum mais aussi du sens de variation

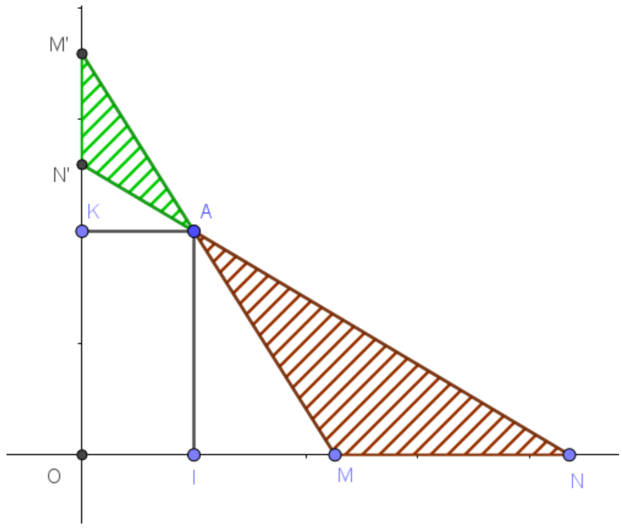
Entre la position de M et celle de M', on gagne l'aire du triangle AMN et on perd l'aire du triangle AM'N'.

On pose MN=h et x devient $x + h$.
Le point M' se déplace en N' avec $M'N'=k$.

On évalue sans orientation avec $h > 0$ et $k > 0$:

aire AMN= $\frac{1}{2}(\mathrm{AI}\times\mathrm{MN})=\mathrm{MN}=h$ = aire gagnée

aire AM'N' $=\frac{1}{2}(\mathrm{AK}\times\mathrm{M'N'})=\frac{1}{2}\mathrm{M'N}=\frac{1}{2}k$ =aire perdue



Pour que la compensation soit parfaite, il faudrait que $k = 2h$ (ceci vient du fait que les hauteurs des deux triangles sont dans le rapport 2, donc pour avoir la même aire les bases doivent être dans le même rapport).

$$k=M'N'=OM'-ON'=\frac{2}{x-1}-\frac{2}{x+h-1}=\frac{2h}{(x-1)^2+h(x-1)} .$$

or $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}(x-1)^2+h(x-1)=0$ et $(x-1)^2+h(x-1)>0$.

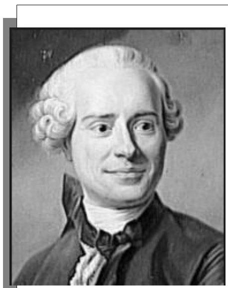
donc il existe un réel ε tel que pour tout $x\in]1;1+\varepsilon[$, $0<(x-1)^2+h(x-1)<1$.

Par conséquent, pour tout $x\in]1;1+\varepsilon[$, $k>2h$ ou encore $\frac{1}{2}k>h$.

Donc sur $]1;1+\varepsilon[$, on perd plus qu'on ne gagne, par conséquent l'aire du triangle OMM' diminue, la fonction est décroissante.
Le processus s'inversera pour la valeur de x telle que $(x-1)^2+h(x-1)=1$.
Pour h petit, ceci revient à $(x-1)^2=1$ soit $x = 2$.

Applications : asymptote oblique

Ce devoir maison est tiré d'une activité proposée dans le manuel de TS collection Indice (Bordas, 2012) .



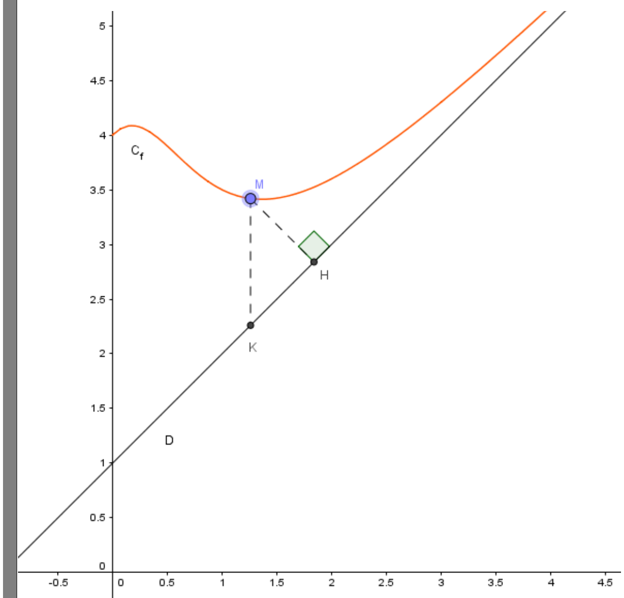
Dans son encyclopédie méthodique (1784), Jean Le Rond D'Alembert donne la définition d'une asymptote.

Qu'eſt-ce donc qu'une *aſymptote* en général ? C'eſt une ligne, qui étant indéfiniment prolongée, s'approche continuellement d'une autre ligne auſſi indéfiniment prolongée, de manière que ſa diſtance à cette ligne ne devient jamais zéro abſolu, mais peut toujours être trouvée plus petite qu'aucune grandeur donnée.

1. Qui était Jean Le Rond D'Alembert ?
2. Tracer à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique ou à la calculatrice la courbe de la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=\frac{x^3+x^2+x+4}{x^2+1}$ et la droite D d'équation $y=x+1$.
Conjecturer la position relative de la courbe et de la droite. Démontrer cette conjecture.

D'après Jean Le Rond D'Alembert, une droite est une asymptote à une courbe donnée lorsque la distance entre la courbe et la droite devient aussi petite que l'on veut. Nous allons utiliser cette définition pour montrer que D est asymptote à la courbe de f .
3. Jean Le Rond D'Alembert définit ainsi la distance entre une courbe et une droite :

DISTANCE, ſ. f. (*Géom. & Phyſiq.*) ce mot ſignifie proprement *le plus court chemin qu'il y a entre deux points, deux objets*, &c. Donc la *diſtance* d'un point à un point, eſt toujours une ligne droite tirée entre ces deux points, puiſque la ligne droite eſt la plus courte qu'on puiſſe mener d'un point à un autre. Par la même raiſon, la *diſtance* d'un point à une ligne, eſt une perpendiculaire menée de ce point à cette ligne.



a) Soit M un point de C_f d'abscisse x et H le projeté orthogonal de M sur la droite D, d'après Jean Le Rond D'Alembert, MH est la distance entre le point M et la droite D.
On considère le point K de la droite D qui a la même abscisse que le point M.
Comparer MH et MK.
b) Montrer que quelque soit l'entier naturel p , il existe un réel A tel que pour tout $x > \mathrm{A}$, $\mathrm{MK} < 10^{-p}$. Que peut-on en déduire pour la distance MK ? Et pour la distance MH ?
c) Quelle interprétation graphique peut-on en déduire ?

Bibliographie

- Laurent Vivier : Un milieu théorique pour la notion de tangente dans l'enseignement secondaire -*Annales de Didactique et de Sciences cognitives*, vol. 15 p. 173-199 – 2010 IREM de Strasbourg

- Jean-Yves Gantois et Maggy Schneider – Laboratoire de Didactique des mathématiques- Université de Liège- Belgique : Introduire les dérivées par les vitesses. Pour qui ? Pourquoi ? Comment ?- *Petit x* n°79

- K. Balhan et M. Krysinska et Maggy Schneider - Université de Liège : Quelle définition du concept de tangente ? Pour quelles raisons ? *Repères IREM* n°101- Octobre 2015

- Annie Berté - Mathématiques du collège au lycée – Nathan Pédagogie-1996

- Brochure n° 97 IREM université Paris Diderot- Autour de la notion de dérivée en classe de première scientifique - mai 2015

- document d'accompagnement : nombre dérivé et évolution temporelle destiné aux premières STMG(éduscol juin 2013)

- document d'accompagnement du programme de 1ère en analyse : 2001 et 2012