**SOMMAIRE**

**Introduction** ........................................................................................................…..2

**Vue d'ensemble des difficultés pour enseigner la trigonométrie au lycée**………………………4

**Situations essentielles** ……………………………………………………………………..10

Les clous…………………………………………………………………………………...11
Réactiver la trigonométrie de collège…………………………………………………...15
Le carré articulé…………………………………………………………………………20

**Situations complémentaires** ……………………………………………………………28

La loi de réflexion ………………. ……………………………………………………….29
La loi de Snell-Descartes………………………………………………………………..37
Chemin minimum reliant les quatre sommets d'un carré ………….……………………...45

**Exercices**…………………………………………………………………………………49

Le chapeau de clown………………………………………………………………………50
Variation d'aires
*Variation de l'aire d'un rectangle dans le quart du cercle trigonométrique*……………………..53
*Variation de l'aire d'un rectangle dans un quart de cercle puis dans un demi-cercle*……...56
Secteur angulaire…………………………………………………………………………..59
Le paravent chinois………………………………………………………………………...62
La transformation d'essai au rugby…………………………………………………… ..63
Des histoires de carrés ……………………………………………………………………64
Le cylindre coupé et la sinusoïde…………………………………………………………66

**Compléments pour le professeurs** ………………………………………………………..68

Le cosinus et le sinus, coordonnées d'un point du cercle……………………………………69
Compléments au carré articulé ……………………………………………………………72
Un carré et sa transformation avec les ombres…………………………………………….75

## INTRODUCTION

Dans cette brochure, vous trouverez d'abord, dans un premier texte de quelques pages, une vue d'ensemble des difficultés pour enseigner la trigonométrie au lycée, notamment comment faire le lien entre le collège et la seconde.

Vous trouverez ensuite des « situations » dont certaines sont qualifiées **d'« essentielles »** et d'autres de **complémentaires**. Nous avons repris le mot « situation » introduit par la didactique des mathématiques. Il s'agit de problèmes posés à partir d'un matériel simple afin que les élèves puissent facilement se les approprier. Les élèves se mettent très vite au travail, individuellement ou en groupe. Lors de la mise en commun, des échanges s'instaurent dans la classe entre les élèves et le professeur, avant l'écriture d'un bilan. Cette réelle activité mathématique peut entrer dans ce qu'on appelle aujourd'hui la démarche d'investigation.

**Les trois situations que nous avons qualifiées d'essentielles**, le sont, à notre avis, pour la construction du sens de ce que nous voulons enseigner. Elles devraient être utilisées en priorité. Elles induisent une recherche en classe qui prend place dans une progression organisée permettant de construire le cours puis de résoudre les exercices.

Le matériel est différent selon ces trois situations. Dans la situation nommée « Le clou », le matériel est évoqué mais il est très simple à imaginer : un pneu dans lequel un clou s'est enfoncé pendant qu'il roulait sur une ligne droite.

Dans la situation dont l'objectif est de réactiver les connaissances du collège, l'élève doit trouver une consigne pour reproduire un angle quelconque fourni sur papier. La reproduction doit se faire sans rapporteur et la consigne doit comporter un seul nombre donné. La contrainte très forte oblige les élèves à penser à une ligne trigonométrique de leur choix.

La situation nommée « le carré articulé » sert à introduire naturellement la fonction sinus à partir d'un vrai carré formé de quatre tiges articulées aux sommets et amené en classe par le professeur.

Dans la première et la troisième situation, les élèves sont conduits à la modélisation d'une réalité très simple vu le matériel dépouillé dont il s'agit. La seconde est inspirée de ce que les didacticiens appellent une situation de communication.

**Les situations « complémentaires »** proposées peuvent être également utilisées en classe dans la mesure du temps disponible.

Les deux premières sont en liaison avec la physique. Il s'agit des lois de la réflexion et de la réfraction. Elles font appel à l'utilisation des TICE. Pour la réflexion, le problème est d'abord posé en terme de chemin minimum pour lequel le professeur demande des conjectures. Le lien avec l'optique vient ensuite. Pour la réfraction, le professeur éveille l'intérêt avec l'observation d'une tige plongée dans l'eau. La troisième situation est encore un problème de chemin minimum. Une conjecture est demandée, infirmée par un petit matériel avec des films de savon.

Chacune de nos situations, essentielles ou complémentaires, est précédée d'une fiche descriptive très succincte permettant au professeur d'avoir une vue d'ensemble.

**Les exercices** qui suivent ces situations, ne sont pas des exercices au sens usuel, pour un entraînement à la technique, qui seraient à résoudre du jour pour le lendemain. Comme les situations précédentes, ils donnent tous matière à un retour sur le sens. Une séquence pour les traiter en classe permettra d'en retirer toute la richesse.

Les compléments pour le professeur sont essentiellement des compléments mathématiques sur les thèmes abordés dans les situations ou les exercices.

Nous ne traitons pas toutes les leçons de trigonométrie au lycée mais seulement quelques points qui nous ont paru délicats. Toutes les situations et exercices ont donné lieu à plusieurs expérimentations dans nos différentes classes, ce qui a permis d'améliorer la rédaction des questions, de donner des indications sur les réactions des élèves,leurs idées, leurs réponses, leurs productions et leurs difficultés. Nous espérons que ceci permettra au professeur de se lancer à poser ces problèmes en classe, sans trop d'incertitudes sur le déroulement de la séance, de façon à laisser les élèves chercher quelques temps, poser des questions et proposer leurs solutions.

## Vue d'ensemble des difficultés pour enseigner la trigonométrie au lycée

### I- Quelques ambiguïtés

#### 1° Qu'entendons-nous par « angles » au collège ?

Une ambiguïté s'installe dès la 4ème entre sinus ou cosinus d'un angle et sinus ou cosinus de sa mesure du fait d'une bijection implicite entre les angles saillants (aigus ou obtus) et l'intervalle de leurs mesures [0,180°]. Ces angles se mettent en place au collège, les rentrants étant plus ou moins exclus car il est sous-entendu que les angles utiles sont ceux des quadrilatères ou des triangles. Dès la 6ème, les professeurs sont cependant confrontés à l'existence des secteurs angulaires rentrants. Les élèves posent des questions quand ils possèdent certains rapporteurs qui sont des cercles entiers, ou lorsqu'ils placent des angles obtus en position d'adjacents, ou encore quand ils construisent des diagrammes circulaires pour représenter des données. En fait, les angles sont des grandeurs mesurables, qui pourraient être des classes d'équivalences de secteurs angulaires (parties du plan) superposables, mais dont la définition rigoureuse élimine les rentrants de la façon suivante : les angles sont des classes d'équivalence de paires de demi-droites de même origine. Cette définition d'un angle géométrique n'est désormais plus donnée aux élèves mais elle a cependant deux conséquences :

a- De la même façon qu'on identifie les longueurs, classes d'équivalence de segments, et leurs mesures (qui dépendent d'une unité), en écrivant AB = 5cm, on identifie les angles et leur mesure en écrivant $\widehat{xOy} = 45°$. Cependant les élèves peuvent différencier, par leur notation, le segment [AB] de sa longueur AB. Ce n'est pas le cas ici car la notation d'un secteur angulaire n'existe pas, voire c'est $\widehat{xOy}$, la même que celle d'un angle. Quant à la notation ensembliste d'une paire $\{[Ox);[Oy)\}$ elle n'est plus enseignée.

b- La définition d'un angle géométrique, qui entraîne une limitation aux secteurs saillants, permet de comprendre pourquoi, en 1ère, on décide que les mesures principales des angles orientés se situent dans l'intervalle [-180° ; 180°[ soit $[-\pi, \pi[$ alors que la priorité aurait pu être donnée aux mesures positives dans l'intervalle $[0; 2\pi[$.

#### 2° Les fonctions sinus et cosinus

Au collège, les fonctions reliant un angle ou sa mesure entre 0 et 90° et les lignes trigonométriques correspondantes restent sous-jacentes.
Sans parler de fonctions, nous avons pris soin, dans notre leçon de 4ème sur le cosinus[1], de faire sentir aux élèves que ces fonctions ne sont pas linéaires (cos 60° ≠ 2 cos 30°), ce qu'ils pensent immédiatement de façon implicite, d'autant plus que l'introduction de la trigonométrie se base sur la proportionnalité des rapports des côtés de plusieurs triangles rectangles ayant le même angle aigu, d'où une confusion possible.
Mais il n'est question de fonctions circulaires qu'à partir de la terminale.
Les professeurs de 4ème et 3ème rencontrent très souvent ceci : $\cos \widehat{xOy} = 45°$.

---

1 Aide apportée aux enseignants par la recherche en didactique. Un exemple : Enseigner le cosinus en 4ème. *Petit X,* n° 65- 2004, p. 7 à 35

C’est la conséquence des deux implicites signalés: d’une part la bijection entre les angles et leur mesure entre 0 et 180°, d’autre part une sorte de fonction cosinus sous-jacente. Les élèves en ont vaguement conscience, confondent les deux, et on arrive à cette erreur, faute d’avoir attiré leur attention sur la légitimité d’écrire $\widehat{xOy} = 45°$ donc $\cos \widehat{xOy} = \cos 45°$.
Pourquoi ne parle-t-on pas des fonctions trigonométriques plus tôt ?

Parce qu' il ne s’agit pas de la même fonction sinus selon que l’ensemble de départ est un ensemble de mesures d’angles en degrés ou bien l’ensemble $\mathbb{R}$ .
Soit un angle dont la mesure en degré vaut θ, soit $f$ la fonction qui donne le sinus de cet angle.
La courbe représentative de cette fonction $f$ sera une sinusoïde mais on ne peut pas dire avec rigueur qu’il s’agit de la représentation de la fonction sinus si l’axe est gradué en degrés.
Les fonctions sinus et cosinus ne sont pas les mêmes selon que l’angle est en degrés ou en radians.
On obtient des courbes représentatives similaires car il n’y a que l’unité sur l’axe des abscisses qui change de nom, mais du point de vue des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ , dire que 90 a pour image 1 ou que $\frac{\pi}{2}$ a cette image est différent.

Pour un même angle évalué θ° ou α radians , on a $\alpha=\frac{\pi}{180}\times\theta$ et donc la fonction $f$ qui donne le sinus de θ° se décompose de la façon suivante :

$$\theta \mapsto \theta \times \frac{\pi}{180}=\alpha \mapsto \sin\alpha=\sin\left(\frac{\theta\times\pi}{180}\right) = f(\theta)$$

Dans l’écriture ci-dessus la notation sin représente la fonction sinus ordinaire d’un angle en radian alors que $f(\theta)$ est encore le sinus de θ mais donné par une fonction $f$ différente de la fonction sinus ordinaire. De même le cosinus de θ est donné par une nouvelle fonction cosinus que l’on peut noter $g$ avec $g(\theta)= \cos\left(\frac{\theta\times\pi}{180}\right)$ où cos est la notation de la fonction cosinus ordinaire d’un angle en radian.

La fonction $f$ est donc la composée de la fonction affine $h : x \mapsto \frac{\theta\times\pi}{180}$ avec la fonction sinus.

On a alors $f'(\theta)=\frac{\pi}{180}\cos\left(\frac{\theta\times\pi}{180}\right)=\frac{\pi}{180}g(\theta)$

En notant, par abus de langage, ces deux nouvelles fonctions $f$ et $g$ par sin et cos, on aurait alors $\sin'\theta°=\frac{\pi}{180}\cos\theta°$ .

Ceci renforce bien le fait qu’il ne s’agit pas des mêmes fonctions cosinus et sinus.
Un tronçon de la courbe représentative de $f$ donne bien la variation du sinus de la variable angle orienté, si on limite les valeurs de θ entre -180° et +180° ou entre 0° et 360° car cet angle a une infinité de mesures.
Cela permet de mieux comprendre ce qui a présidé à l’écriture du programme : on ne parle pas des fonctions trigonométriques avant d’avoir le radian et les angles orientés, donc seulement en terminale.

On peut écrire 30°= $\frac{\pi}{6}$ rad, écriture licite car elle donne l'égalité des mesures d'un même angle avec deux unités différentes. Mais l'écriture sin 30°= sin $\frac{\pi}{6}$ choque, il s'agit de deux fonctions sinus différentes, une ayant pour ensemble de départ les mesures d'angles en degrés,l'autre ayant pour ensemble de départ $\mathbb{R}$ , sans référence aux angles, mais plutôt en rapport avec l'abscisse d'un point qui tourne sur un cercle de rayon 1.

**3° Qu'entendons-nous par « angles » et « sinus ou cosinus d'un angle » au lycée ?**

Au lycée, on parle de :

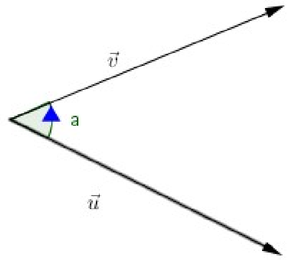
- <u>cosinus d'angles géométriques</u> compris entre 0 et 180°,

On écrit par exemple en 1$^{ère}$ S avec la formule d'Al Kashi :

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$ formule dans laquelle $\hat{A}$ désigne un angle géométrique.

- <u>cosinus et sinus d'une mesure d'angle</u> en degré pour faire le lien avec la 3$^{ème}$ mais, ensuite, on évite les degrés dès que la correspondance est faite avec les radians

Par exemple, dans la formule ci-dessus, on remplacera cos $\hat{A}$ par cos $\frac{\pi}{4}$ en passant de l'angle au nombre réel, mais en évitant cos 45°.




- <u>cosinus et sinus d'angles de vecteurs</u>. On peut lire dans les programmes de 1$^{ère}$ S : « cosinus et sinus d'angles associés à un réel *a* », la lettre *a* étant écrite dans l'angle orienté avec la flèche indiquant l'orientation de l'angle.

On écrit cos *a* mais l'écriture cos ( $\vec{u}$ , $\vec{v}$ ) est de moins en moins utilisée dans les manuels. Donc à l'angle des vecteurs ( $\overrightarrow{OI}$ , $\overrightarrow{OM}$ ), on associe sa mesure principale *a* en radian (dans l'intervalle $[ -\pi ; \pi [$ ).

Ce réel *a* est aussi la mesure de l'arc IM donc un réel associé à un point M du cercle. Dans l'écriture formelle, il s'agit toujours de la fonction ayant pour ensemble de départ $\mathbb{R}$ . Ainsi, par exemple, la phrase : « deux angles opposés ont le même cosinus », est remplacé par : « propriété des angles opposés » pour éviter au maximum de parler de cosinus d'un angle.

-<u>cosinus et sinus d'un réel</u> et alors il s'agit de fonctions de variable réelle.

L'écriture sin *x* fonctionne alors comme sin (*x*) analogue à *f*(*x*) ou ln (*x*). L'écriture cos (45°) est évitée car ce n'est pas la fonction cosinus usuelle, alors qu'on peut écrire aussi bien cos $\frac{\pi}{4}$ ou cos ( $\frac{\pi}{4}$ ).

**En conséquence pour nos élèves** nous expliquerons si possible que cos et sin ont plusieurs sens :

- soit il peut s'agir du cosinus et sinus d'un angle géométrique.
- soit il peut s'agir du cosinus et sinus de la mesure d'un angle géométrique (en degrés ou dans une autre unité)
- soit à partir de la seconde, il peut s'agir du sinus et cosinus d'un nombre réel.

## II- Comment faire le lien entre le collège et la seconde ?

En seconde, le programme prépare à l'ensemble de départ $\mathbb{R}$ pour les fonctions sinus et cosinus, toujours sans parler de fonctions, avec beaucoup d'implicite.
Le lien à faire avec la 3ème va reposer sur la possibilité d'associer les angles et les points du cercle lors du premier tour de l'enroulement dans le sens direct en partant du point I (1 ;0) dans le repère avec le cercle trigonométrique.
Il y a plusieurs problèmes théoriques pour y arriver en seconde.

**En effet, il faut associer par bijection en parcourant une seule fois le cercle** :

- un point M du cercle.

- une mesure de l'arc $\overset{\frown}{IM}$. C'est avec la mesure de l'arc qu'on repère un point sur le cercle. On mesure cet arc en prenant le rayon pour unité mais sans parler du radian, on en reste au passage entre la mesure de l'arc et les points du cercle. Si on emploie l'expression « longueur d'arc », ce sera positif donc le seul enroulement possible est direct.
L'arc peut se mesurer avec la même unité que l'angle au centre qui l'intercepte comme en géographie sur les méridiens avec des degrés, positif ou négatif, mais il faut alors orienter le cercle.

- un angle géométrique $\widehat{IOM}$ . En seconde, sans les angles orientés, on ne peut pas associer les angles avec les négatifs donc il faut tourner dans un seul sens et s'arrêter à l'angle plat, sinon il s'agit de secteur angulaire et non d'angle.

- une mesure d'angle avec le même problème si on va jusqu'à 360° car les mesures des angles géométriques s'arrêtent à 180°. Pour parler de mesure d'angle en balayant tout le cercle, il faudrait prendre la mesure dans [- 180° ; +180°[, mais on arrive à l'orientation des angles.

- un point sur la droite réelle (celle qui s'enroule), point qui coïncide avec M sur le cercle.

- l'abscisse de ce point sur la droite réelle avec le rayon pour unité ce qui donne une longueur d'arc (quand c'est positif) et une mesure d'angle au centre en radian. Si on veut parler de $\mathbb{R}$ , il faut avoir les abscisses négatives donc l'enroulement dans l'autre sens, et les arcs et les angles orientés.

En résumé : nous pouvons facilement expliquer en seconde que dans le premier quart de cercle on retrouve cosinus et sinus de l'angle ou de sa mesure (en degré) comme en 3ème par l'abscisse et l'ordonnée du point, avec les rapports et le rayon 1. Il faut prolonger cela au-delà de 90° avec le cercle entier, mais sans préciser avec quels angles. En première, on pourra revenir aux angles avec l'orientation.

De la mesure d'un arc, on passe à un nombre réel abstrait, mais comment le comprendre sans dire que l'unité étant le rayon du cercle, $\frac{\pi}{6}$, par exemple, est un rapport entre les mesures de deux longueurs faites avec la même unité (par exemple le m ou le cm). Pour cela, ce nombre, $\frac{\pi}{6}$, bien qu'étant une mesure de longueur, est un nombre abstrait.

De la mesure d'un angle comme 30°, on passe de même à un nombre réel abstrait, conséquence de la correspondance entre un angle au centre orienté ( $\overrightarrow{OI}$ , $\overrightarrow{OM}$ ) et l'arc $\overset{\frown}{IM}$ qu'il intercepte.

**III- Pourquoi avoir eu besoin d'une autre unité pour les angles et pourquoi choisir le radian?**

a- Le périmètre du cercle est proportionnel à son rayon, donc la longueur de l'arc et le rayon du cercle sont proportionnels pour un angle au centre donné. Ainsi, pour un angle au centre de mesure α en radian, la longueur de l'arc s'exprime en fonction du rayon R par α R alors que cette longueur pour θ° s'écrit $\frac{\theta \times \pi}{180} \mathrm{R}$ .

Il faut bien que les élèves comprennent que sur des cercles de rayons différents, le même angle au centre intercepte des arcs de longueurs différentes. L'intérêt du radian vient de la facilité de cette formule : longueur de l'arc = $\alpha \times \mathrm{R}$ . En y renonçant, pourrait-on choisir pour les fonctions trigonométriques un ensemble de départ qui serait l'ensemble de toutes les mesures en degrés d'angles de la forme : θ° + $360k$ $(0 \leq \theta \leq 360°$ et $k$ entier positif ou négatif) ?

Les physiciens utilisent certainement davantage les degrés.

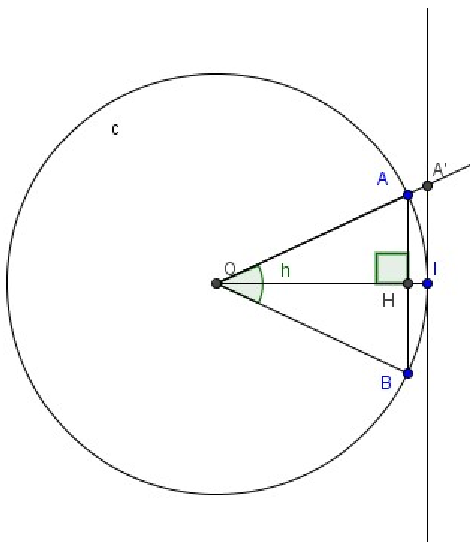
b- Ce n'est pas le cas en mathématiques. Pourquoi ?

Nous avons déjà vu précédemment que ces fonctions exigent le radian : sans cela, la dérivée de la fonction sinus ne serait pas le cosinus mais on aurait $\sin' x^{\circ} = \frac{\pi}{180} \cos x^{\circ}$ .

Reprenons le calcul de cette dérivée : on doit chercher la limite quand $h$ tend vers 0 de

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \frac{2\cos\frac{x+h+x}{2} \sin\frac{x+h-x}{2}}{h} = \frac{2\cos\frac{2x+h}{2} \sin\frac{h}{2}}{h} = \cos\frac{2x+h}{2} \times \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$$

Pour trouver cos $x$ quand $h$ tend vers 0, il faut savoir que la limite de $\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$ est 1 quand $h$ tend vers 0. Or c'est vrai quand $h$ est en radians et faux si $h$ est en degrés. Il faut pour cela que le sinus et l'angle (l'arc) soient mesurés avec la même unité. En effet :




La mesure de l'arc en degré ou en radians peut se faire avec la même unité que celle de l'angle au centre. Par exemple si l'angle au centre ( $\overrightarrow{OB}$ , $\overrightarrow{OA}$ ) mesure 50° on peut dire que l'arc intercepté AB mesure 50° (cela ne dépend pas du rayon du cercle).

L'angle ( $\overrightarrow{OB}$ , $\overrightarrow{OA}$ ) mesure $h$, l'angle ( $\overrightarrow{OI}$ , $\overrightarrow{OA}$ ) mesure $\frac{h}{2}$ , le sinus HA de cet angle se mesure sur l'axe vertical en prenant pour unité le rayon du cercle.

Voici une explication intuitive de ce qui se passe à la limite. Pour que, si $h$ devient petit, la mesure de [AB] tende vers la mesure de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ (la corde et l'arc se rapprochant)[2], il faut que la mesure de l'arc et celle de la corde soient exprimées avec la même unité à savoir le rayon du cercle.

L'angle ( $\overrightarrow{OI}$ , $\overrightarrow{OA}$ ) ou l'arc $\overset{\frown}{IA}$ mesurent $\frac{h}{2}$ et quand $\frac{h}{2}$ se rapproche de 0, le sinus de cet angle s'en rapproche de la même façon. Ce sont des nombres sans unité dans les deux cas si on se place sur un cercle de rayon R non égal à 1, car alors le sinus est un rapport et la mesure en radian de l'angle (ou de l'arc) également.

La démonstration du fait que la limite de $\dfrac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$ est égale à 1 est la suivante :

aire triangle OAI ≤ aire secteur circulaire OAI ≤ aire triangle OA'I ou encore en multipliant chaque aire par 2 : $\sin\frac{h}{2} \le \frac{h}{2} \le \tan\frac{h}{2}$

Plaçons nous dans le cas où $h>0$ , en divisant par $\frac{h}{2}$ , les deux inégalités et en multipliant en outre par cos $\frac{h}{2}$ la seconde, on obtient $\cos\frac{h}{2} \leqslant \dfrac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \leqslant 1$ .

Comme $\cos\frac{h}{2}$ tend vers 1 quand $\frac{h}{2}$ tend vers 0, on a $\lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = 1$

On démontre de façon similaire que $\lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = 1$ .

On en déduit que $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = 1$ .

C'est parce que cette limite est égale à 1 que l'on obtient la dérivée de la fonction sinus et non pas parce qu'on connaît la dérivée de la fonction sinus qu'on peut démontrer que cette limite est 1, contrairement à ce qu'il est demandé dans les programmes de TS.

$\dfrac{\sin x}{x} = \dfrac{\sin(0+x) - \sin 0}{0+x-0}$ dont la limite serait cos 0 = 1 quand $x$ tend vers 0.

2 Cf. l'origine du mot « sinus », qui signifie la poche en latin. Il s'agit de la « poche » formée entre la corde [AB] et l'arc $\overset{\frown}{AB}$. Le sinus donne la longueur de la corde quand on connaît l'arc.

# Partie I

## Les situations essentielles

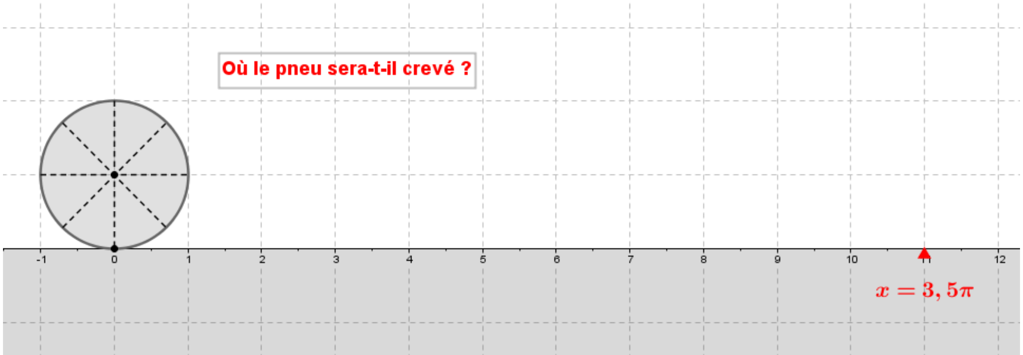
**Ces situations sont essentielles pour la construction du sens, le professeur devrait les utiliser en priorité.**
**Elles sont conçues pour conduire une séquence en classe.**

# Les clous

## Problème posé

Une équilibriste roule en ligne droite sur un monocycle à moteur et découvre à son arrivée un clou dans la gomme de son pneu. Il se demande où était le clou sur le sol.


Dans un deuxième temps, on cherche à déterminer la position du clou sur la roue si on connaît la position du clou sur la route.




## Objectifs

- introduire le déplacement sur le cercle trigonométrique en seconde
- réactivation en première S

## Notions utilisées

- périmètre d'un cercle
- valeurs exactes et approchées

**Matériel** logiciel de géométrie dynamique

**Niveau** 2nde et 1ère

# Les clous

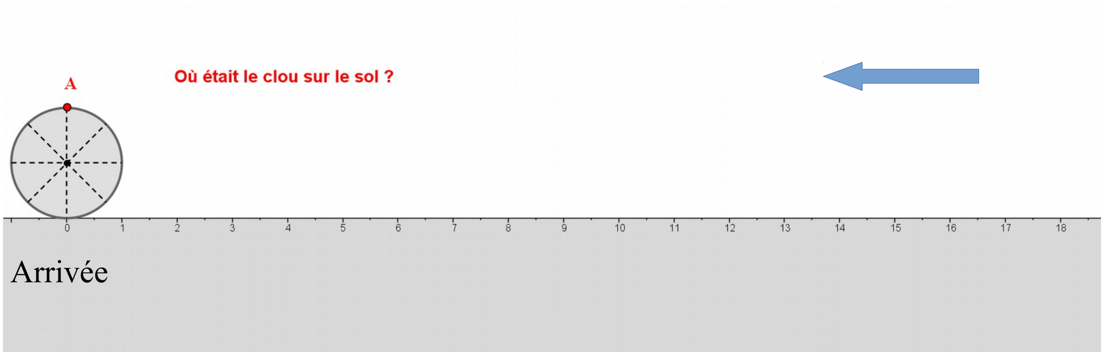
Cette situation permet d'amorcer le travail sur l'abscisse curviligne et d'introduire le déplacement sur le cercle trigonométrique.

**<u>Étape 1 :</u>**

Une équilibriste roule en ligne droite sur un monocycle à moteur et découvre à son arrivée un clou dans la gomme de son pneu. Dubitatif, il se demande où se trouvait le clou.

Données : - la roue a un rayon de 1dm
- le point A est le point du pneu où le clou a été retrouvé.

A quelle distance de l'arrivée se trouvait le clou sur le sol ?
*La graduation de la droite est en dm.*




La question n'a rien d'évident pour les élèves et plusieurs propositions apparaissent dans la classe :

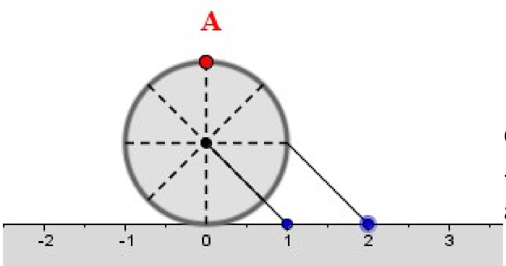



figure 1

Certains font la construction ci-contre (figure 1), en disant : « il y a 4 rayons pour aller jusqu'à A, donc le clou se trouvait à 4 dm de la ligne d'arrivée ».

D'autres font celle-là, en précisant que la roue a parcouru 2 dm depuis son point de crevaison et répondent que le clou était placé à 2 dm de l'arrivée .

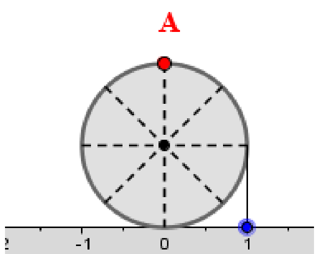



figure 2

D'autres encore calculent le demi-périmètre mais travaillent avec les valeurs approchées et donnent comme réponse 3,15 ou 3,14 .
Enfin, une minorité trouve $\pi$ .

Cependant, dans chaque cas la plupart des élèves sont convaincus que la roue aurait pu faire un tour supplémentaire après avoir été touchée par le clou et qu'il y a plusieurs solutions possibles.
Ainsi pour le 1er groupe, la roue parcourant 8 dm, « puisqu'il y a 8 rayons dans la roue », le clou peut être situé à 4 dm, 12 dm, 20 dm... de l'arrivée. Quant au second groupe, il propose 2 dm, 6 dm, 10 dm...

Après discussion dans la classe, on obtient les réponses attendues : $\pi+2\pi$ , $\pi+4\pi$ , $\pi+6\pi$ ...
Les élèves ont parfois besoin de visualiser la situation construite à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.

**Bilan : A tout point (de crevaison) de la roue, on peut associer une infinité de clous (nombres) sur la route. La distance entre deux clous consécutifs est toujours égale à 2π.**

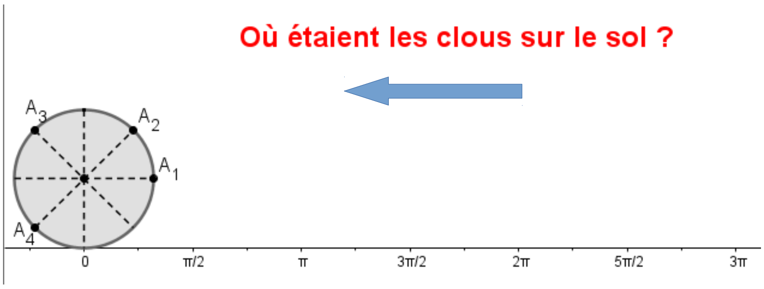
**Étape 2:**
Cette fois la roue a été entièrement réparée. L'équilibriste peut reprendre son entraînement.
Malheureusement il restait un clou sur la route à l'abscisse $x=3{,}5\times\pi\approx 10{,}996$ dm.
Où le clou va-t-il percer le pneu de la roue ? Indiquer la réponse sur la figure ci-dessous qui représente la roue à sa position de départ.
*La graduation de la droite est en dm.*


Les élèves ont moins de difficultés à trouver la bonne réponse que dans la première étape. L'erreur la plus fréquemment rencontrée provient du fait que les élèves partent dans le mauvais sens et propose comme solution le point diamétralement opposé au résultat.
L'intérêt de cette question réside surtout dans les justifications données par les élèves, elle permet d'amorcer le travail de placement d'un point sur le cercle trigonométrique.
Ainsi les élèves écrivent : $3{,}5\pi=2\pi+\pi+0{,}5\pi$ et disent : « on doit faire un tour et un demi-tour et un quart de tour ». On trouve aussi $3{,}5\pi=3\pi+0{,}5\pi$ ou encore $3{,}5\pi=2\pi+6\times\frac{\pi}{4}$ , car ils ont remarqué que $\frac{\pi}{4}$ est la longueur d'un huitième d'un tour.

**Bilan : A tout clou (nombre) de la route, on peut associer un unique point (de crevaison) sur la roue.**

Exercices :

1. On a représenté la roue d'un véhicule par un cercle de rayon 1. Les points $A_1$, $A_2$, $A_3$ et $A_4$ représentent quatre points de crevaison. Où étaient les clous sur la route qui ont perforé le pneu en $A_1$, $A_2$, $A_3$ et $A_4$ ?




2. Trois clous sont placés sur la route. Où vont-ils perforer la roue ? Indiquez les points de crevaison sur la roue .


3. On place sur la route un clou à une abscisse $x$ . Indiquez sur la figure ci-contre :

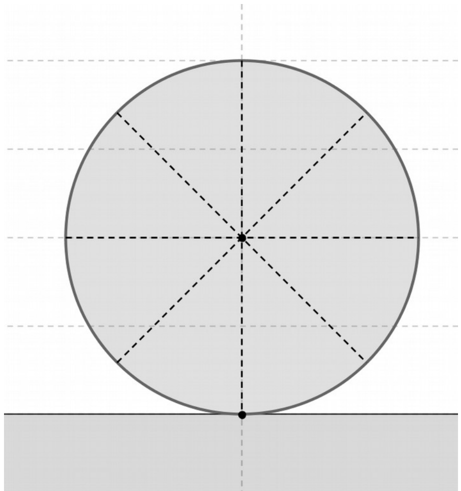
a. Le point de crevaison A lorsque $x=11\pi$ .

b. Le point de crevaison B lorsque $x=8{,}5\pi$ .

c. Le point de crevaison C lorsque $x=57\pi$ .

d. Le point de crevaison D lorsque $x=\dfrac{3}{8}\pi$

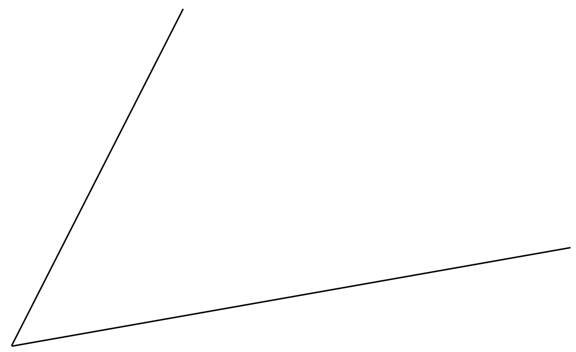
e. Le point de crevaison E lorsque $x=\dfrac{15}{8}\pi$ .



# Réactiver la trigonométrie de collège

**Problème posé**

Le professeur demande aux élèves d'écrire une consigne qui permet de reproduire cet angle et qui n'utilise qu'un seul nombre .



**Objectifs**

- réactiver les formules trigonométriques vues au collège
- faire le lien entre le cosinus d'un réel et les formules trigonométriques vues au collège

**Notions utilisées**

- formules trigonométriques dans un triangle rectangle
- statut de nombre

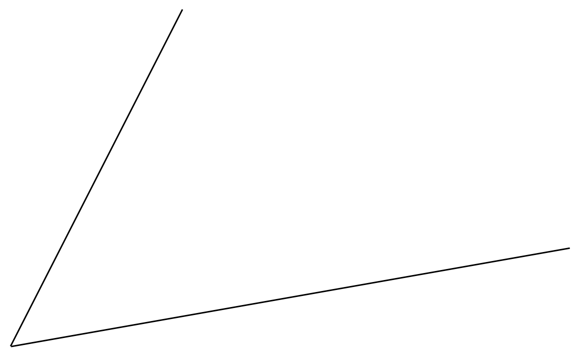
**Niveau** 2nde

# Réactiver la trigonométrie de collège

Cette situation permet de revoir les formules trigonométriques et de faire le lien avec le cosinus et le sinus d'un réel.

Après avoir défini le cercle trigonométrique et y avoir placé des points , on donne la définition du cosinus et du sinus d'un réel $x$ comme l'abscisse et l'ordonnée du point qui correspond à $x$ sur le cercle trigonométrique avant de démarrer cette situation. Elle permet de faire le lien entre longueur d'arcs et angle sans avoir besoin du radian.

**<u>Étape 1 :</u>** [3]



Vous avez à votre disposition une équerre et une règle . Vous n'avez pas droit à la calculatrice . Vous devez écrire une consigne n'utilisant qu'un seul nombre et qui permet à un élève de reproduire cet angle sans avoir de rapporteur.

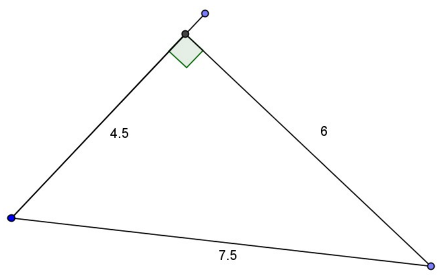
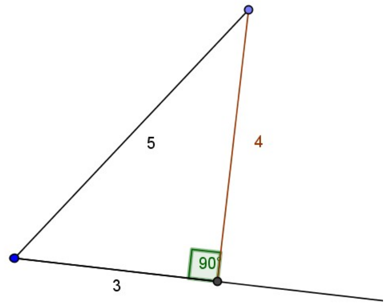
*Remarques :*

*La contrainte d'un seul nombre empêche les élèves d'utiliser la mesure des côtés d'un triangle quelconque, ou des deux côtés d'un triangle isocèle ou rectangle.*
*Certains élèves ont du mal à démarrer, le professeur peut leur demander d'écrire un message avec trois nombres, ils pensent alors à la construction d'un triangle. Le professeur leur suggère ensuite d'écrire un message contenant deux nombres, les élèves pensent à construire un triangle rectangle, ce qui les oriente vers la trigonométrie.Le professeur peut par exemple dire aux élèves de se rappeler ce qu'ils ont vu en 4ème et 3ème sur les angles.*

*Pour mettre en œuvre cette situation, on peut partager la classe en deux groupes. On donne à chaque groupe deux angles différents, échanger les messages puis vérifier la validité des consignes.*

3 Voir article dans Petit x n°65 , enseigner le cosinus en 4ème, groupe didactique des maths , IREM d'Aquitaine

Selon la projection utilisée, il vient deux types de message avec trois possibilités suivant la ligne trigonométrique choisie.

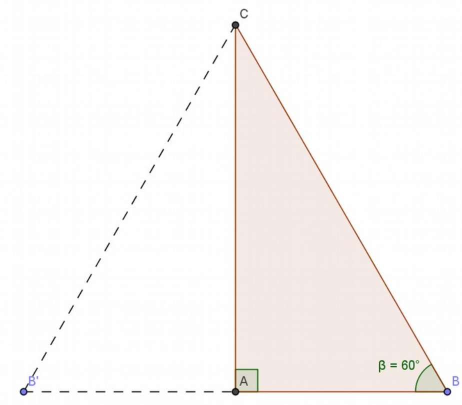
| | |
|---|---|
|   |   |
| 1. Tracer un angle dont le cosinus est $\frac{4,5}{7,5}$<br>2. Tracer un angle dont le sinus est $\frac{6}{7,5}$<br>3. Tracer un angle dont la tangente est $\frac{6}{4,5}$ | 1. Tracer un angle dont le cosinus est $\frac{3}{5}$<br>2. Tracer un angle dont le sinus est $\frac{4}{5}$<br>3. Tracer un angle dont la tangente est $\frac{4}{3}$ |

**<u>Étape 2 :</u>**

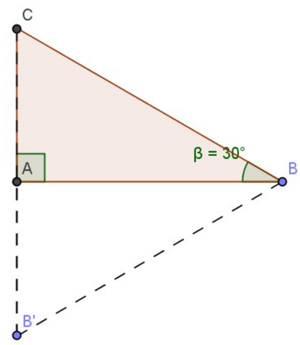
1. Déterminer le cosinus et le sinus d'un angle de 60°.
2. Déterminer le cosinus et le sinus d'un angle de 30°.
3. Déterminer le cosinus et le sinus d'un angle de 45°.

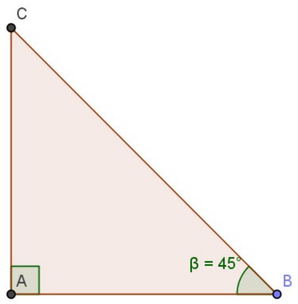
1. les élèves pensent au triangle équilatéral pour l'angle de 60° et ensuite, tracent une hauteur pour appliquer le théorème de Pythagore.

On a alors $\cos 60° = \frac{1}{2}$ et $\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ en utilisant les propriétés du triangle équilatéral.



2. La même configuration permet de montrer que
$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin 30° = \frac{1}{2}$ .




3. Le théorème de Pythagore appliqué à ce triangle rectangle isocèle implique que $\cos 45° = \sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

Il s'agit maintenant de faire le lien avec le cosinus et le sinus d'un angle vu en 3ème.
Il faut donc associer des angles et des arcs de cercle.

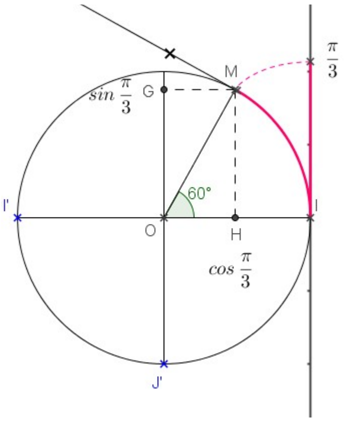
| |
|---|
| **<u>Question :</u>** on demande aux élèves de placer le point qui correspond à $\frac{\pi}{3}$ sur le cercle trigonométrique. |

Les élèves de manière instinctive tracent un angle de 60° pour répondre à la question. Ils expliquent naturellement qu'un arc de longueur $\frac{\pi}{2}$ correspond à un angle de 90° donc qu'un arc de longueur $\frac{\pi}{3}$ correspond à un angle de 60°.

On peut aussi à cette occasion retravailler la construction des polygones réguliers qui sont vues en troisième.

Il est temps d'admettre que la longueur de l'arc est proportionnelle à la mesure de l'angle.

| Longueur de l'arc sur le cercle trigonométrique | $\pi$ | $2\pi$ | $\frac{\pi}{3}$ |
|---|---|---|---|
| Angle | 180° | 360° | 60° |



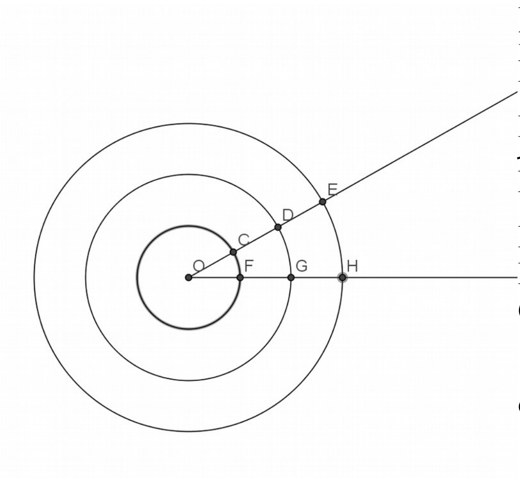

On retrouve que cos 60°= OH où H est le projeté orthogonal de M sur (OI) car OM =1 soit $\cos 60^{\circ} = x_{\mathrm{M}}$ et de même on montre que $\sin 60^{\circ} = y_{\mathrm{M}}$ .

Le calcul de $\cos 60\,°$ et de $\cos\frac{\pi}{3}$ conduisent au même résultat.

Le calcul de $\sin 60\,°$ et de $\sin\frac{\pi}{3}$ conduisent au même résultat.

Exercices : 1. Placer sur le cercle trigonométrique les points qui correspondent aux nombres $\frac{4\pi}{3}$ ; $\frac{-5\pi}{3}$ ; $\frac{\pi}{6}$ ; $\frac{-5\pi}{6}$ …

2. Placer le point M sur le cercle trigonométrique tel que la longueur de l'arc $\overset{\frown}{\mathrm{IM}}$ vaut 1.




Ici s'achève le travail exigible en seconde. En 1ère S, on introduit une nouvelle unité de mesure des angles : le radian. Le périmètre du cercle est proportionnel à son rayon.

La longueur de l'arc de cercle $\overset{\frown}{\mathrm{GD}}$ est le double de celle de $\overset{\frown}{\mathrm{FC}}$. La longueur de $\overset{\frown}{\mathrm{HE}}$ est le triple de celle de $\overset{\frown}{\mathrm{FC}}$.

La longueur de l'arc est proportionnelle au rayon du cercle. L'angle au centre qui définit les trois arcs est le même. Considérons le rapport entre la longueur de l'arc et le rayon

du cercle : $\alpha = \frac{\overset{\frown}{FC}}{R} = \frac{2\,\overset{\frown}{FC}}{2\,R} = \frac{3\,\overset{\frown}{FC}}{3\,R}$

$\alpha$ est la mesure en radians de l'angle, on la définit par $\alpha = \frac{l}{\mathrm{R}}$ où $l$ est la longueur de l'arc intercepté par l'angle.

Dans le cas du cercle trigonométrique on a R=1 donc $\alpha = l$ .
La mesure en radians d'un angle est donc un rapport de longueurs et on définit 1 radian comme étant la mesure d'un angle au centre qui intercepte un arc de longueur 1 sur le cercle trigonométrique.

# Le carré articulé

**Problème posé**

On réalise un « carré » articulé en assemblant quatre bandes de carton de même longueur (1 dm) articulées au moyen d'attaches parisiennes. Le professeur montre deux positions du carré articulé et demande aux élèves si les deux quadrilatères ont la même aire.
La classe étudie les variations de l'aire.

**Objectifs**

- introduction de la fonction sinus sur $[0;\pi]$
- lien entre sinus d'un angle et sinus d'un réel

**Notions**

- aire d'un losange
- sinus d'un angle aigu dans un triangle rectangle
- radian
- fonction trinôme du second degré

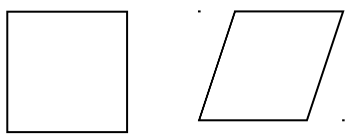
**Matériel**

- un carré articulé
- logiciel de géométrie dynamique

**Niveau** $\quad$ T$^{ale}$ S

# Le carré articulé

**<u>Étape 1 :</u>** Le professeur montre deux positions du carré articulé



et demande aux élèves si ces deux quadrilatères ont la même aire.

Les avis des élèves sont relativement partagés.

Certains disent qu'ils ont la même aire parce que les quatre côtés gardent la même longueur.
D'autres justifient l'égalité des aires en parlant de compensation : « ce qu'on perd d'un côté, on le gagne de l'autre ».

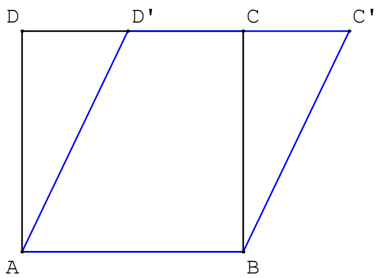
Le professeur ne fait pas expliciter dans un premier temps la conception erronée sous-jacente à cette réponse (voir plus loin). Il ne donne pas son avis et se contente de recueillir l'éventail des réponses.

D'autres élèves réfutent ces assertions en disant que ces aires ne peuvent pas être égales puisque si on aplatit complètement le « carré », on arrive à une aire nulle.

D'autres encore se rappellent de la formule qui donne l'aire d'un parallélogramme et disent que la hauteur du parallélogramme variant et le côté restant fixe, l'aire ne peut que varier.

Il arrive que des élèves proposent de calculer pour des cas particuliers et la plupart du temps ils suggèrent de s'intéresser au cas où l'angle vaut $\frac{\pi}{4}$ . Encouragés par le professeur, ils trouvent alors que l'aire vaut $\frac{\sqrt{2}}{2}$ dm². Elle n'est donc pas égale à l'aire du losange dans le cas où l'angle est $\frac{\pi}{2}$ .

Le professeur demande aux élèves qui avaient parlé de compensation de justifier leur réponse. Ces élèves font alors le schéma suivant :




Ils expliquent que les triangles ADD' et BCC' ont la même aire donc les quadrilatères ABCD et ABC'D' ont eux aussi la même aire.

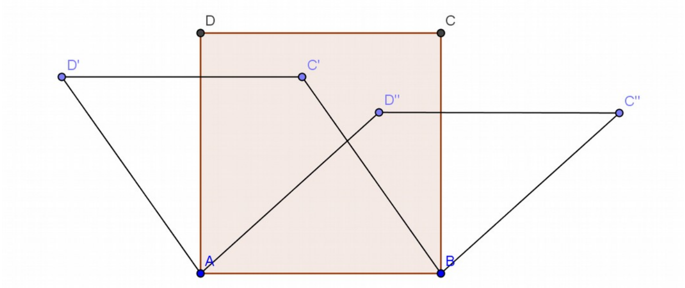
Nous pouvons faire l'hypothèse que cette figure apparaît ici car elle est familière aux élèves.

Ils l'ont utilisée quand ils ont appris la formule de l'aire du parallélogramme.

Les autres élèves réagissent assez vite et font remarquer que dans le cas du carré articulé AD = AD' ce qui n'est pas le cas sur ce schéma.
Il n'est pas inutile alors de demander la nature de ces quadrilatères pour s'assurer que tous les élèves ont bien vu que ce sont des losanges.

Le professeur pourrait faire remarquer dès le début qu'il s'agit d'un losange, ce que nous n'avons pas fait, car il n'est pas immédiat ensuite qu'ils voient ce losange comme un parallélogramme particulier pour le calcul de l'aire.

D'autant plus que certains ont peut-être appris une formule spéciale pour l'aire du losange à partir des diagonales (formule que peu retiennent) mais qui contribue à séparer le losange du parallélogramme en ce qui concerne le calcul de l'aire. Attirer l'attention sur le losange dès le début suffit pour que les élèves ne pensent plus au parallélogramme et, faute de se rappeler la formule spéciale pour le calcul de l'aire du losange, ils se contentent de l'aire du carré, car on part d'un carré. Dans ce cas l'argument du côté constant pour justifier l'aire constante devient plus fréquent (aire = côté x côté).
En seconde nous avons trouvé une élève qui persistait à soutenir que l'aire d'un parallélogramme se calculait avec le produit des mesures des deux côtés prétextant que c'était le cas pour l'aire d'un rectangle. La justification pour l'aire du rectangle vient du quadrillage et cette élève disait que si on « penche » le rectangle, le quadrillage penche de la même façon sans que le nombre de carreaux change! En fait ceci n'est pas une simple anecdote. L'interrogation de cette élève « faible » mérite réflexion. Il s'agit en fait d'un paradoxe relatif à l'infini. Il existe une bijection entre les points du carré et les points du losange (carré « penché ») et pourtant les aires sont différentes (voir compléments pour le professeur).
Le professeur suggère aux élèves de réaliser un schéma traduisant plus exactement la transformation et on obtient :

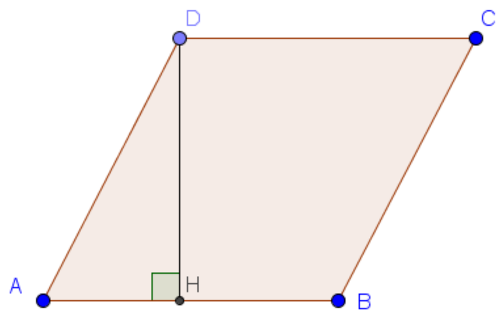



Le professeur relance le questionnement en proposant aux élèves de s'intéresser à la variation de l'aire de ces losanges.

Les élèves sont convaincus que, pour des raisons de symétrie, l'aire est maximale pour le carré. Elle est d'abord nulle, elle croît puis décroît et redevient nulle.

| |
|---|
| **<u>Étape 2 :</u>** Le professeur demande aux élèves de choisir une variable pour faire un graphique représentant la variation de l'aire . |

Dans les classes où des élèves ont proposé de calculer l'aire dans un cas particulier le choix de l'angle arrive rapidement.
La plupart du temps, les élèves font trois propositions : la plus fréquente est la mesure de l'angle mais on trouve aussi la hauteur et plus rarement la longueur de la diagonale.



On s’intéresse d’abord au choix de la hauteur :

L’aire du losange ABCD est : $DH \times AB = DH$ .

La variation de l’aire est donc la même que la variation de la hauteur. Choisir la hauteur comme variable n’est donc pas très intéressant d’autant plus que la hauteur varie de 0 à 1 dans un premier temps puis de 1 à 0 dans un deuxième temps : on cherche une variable qui augmente tout au long du mouvement.
Il y en a deux :

- la longueur DB de la diagonale qui varie de 0 à 2
- la mesure de l’angle $\widehat{DAB} = \alpha$.

Le professeur demande pour l’instant d’étudier l’aire en prenant α comme variable. Reste à déterminer l’intervalle dans lequel elle varie. Les élèves n’ont pas de difficulté à donner comme réponse l’intervalle [0 ; $\pi$ ].

Remarque :

Si on choisissait comme variable $x=\frac{DB}{2}$ , on aurait :

- la fonction $f$ définie sur [0;1] par $f(x)=2\sqrt{1-x^2}$ si on s’intéresse à la longueur de la diagonale [AC]
- la fonction $g$ définie sur [0;1] par $g(x)=2x\sqrt{1-x^2}$ si on s’intéresse à l’aire.

On ne peut pas choisir la longueur de la diagonale [AC] comme variable car elle commence par décroître à partir de 2 pour atteindre son minimum pour le carré et croître à nouveau jusqu’à 2.

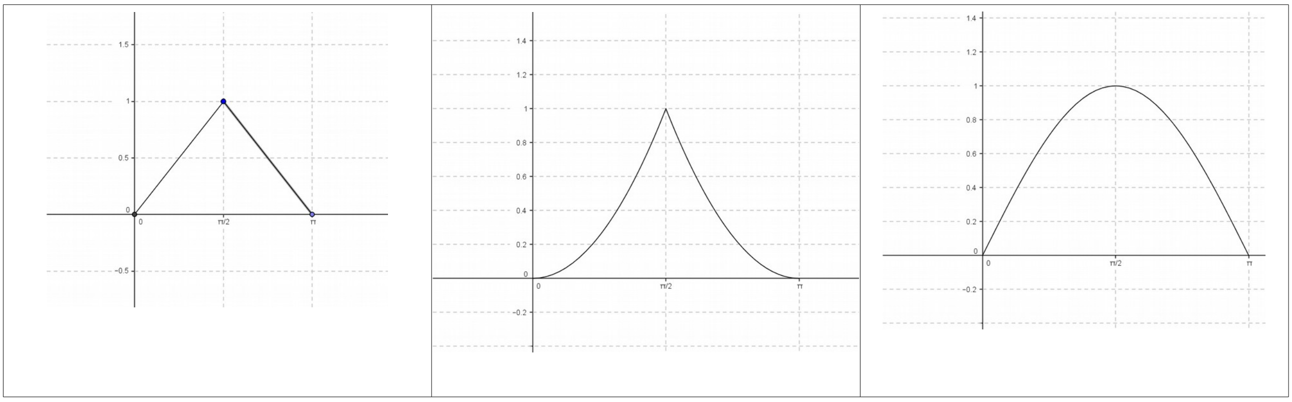
Devoirs à la maison :

- L’étude des variations de $\frac{AC}{2}$ conduit à prendre comme variable $\frac{\alpha}{2}$ et on obtient alors l’étude des variations de la fonction $f(\alpha)=\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ .

- Le professeur peut demander l’étude des variations de la longueur AC ou de l’aire en prenant comme variable DB ou sa moitié.

**Étape 3 :** Le professeur demande aux élèves de conjecturer la représentation graphique de la fonction qui, à la mesure de l’angle, associe l’aire du losange.

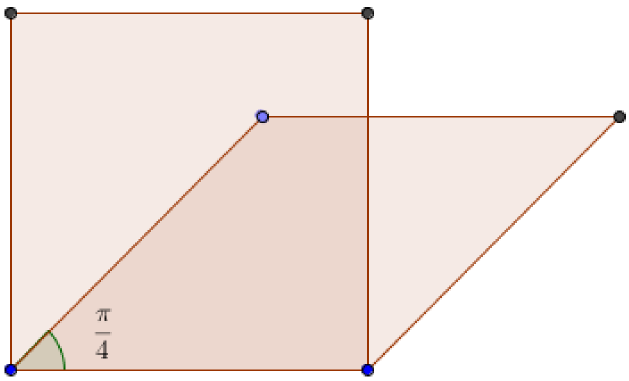
On obtient dans la classe les trois propositions suivantes :



Il reste à choisir entre ces trois propositions.

Les élèves suggèrent de tester sur des valeurs particulières, ils commencent par examiner le cas où l'angle vaut $\frac{\pi}{4}$ .

Ils calculent la hauteur ( théorème de Pythagore ou côté d'un carré de diagonale 1).




Dans ce cas, l'aire vaut $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ dm². Or le premier graphique donne une valeur de 0,5 dm² tandis que le second graphique donne une valeur inférieure à 0,5 dm² or $\frac{\sqrt{2}}{2}>0{,}5$ , on peut donc éliminer les deux premiers graphiques.

Examinons le troisième graphique.
Les élèves tracent la représentation graphique en utilisant des valeurs particulières de $\alpha$ , ils obtiennent l'allure de la troisième courbe et disent qu'il s'agit d'une parabole.
On suppose donc qu'il existe trois réels uniques $a$ , $b$ et $c$ tels que cette parabole ait pour équation $y=ax^2+bx+c$ . Il arrive que des élèves remarquent que cette fonction a pour expression $f(x)=\sin x$ d'après les calculs qu'on a pu faire plus tôt. Dans ce cas là le professeur précise que l'on souhaite savoir si la représentation graphique de la fonction sinus est une parabole.
Pour déterminer $a$ , $b$ et $c$ les élèves utilisent deux méthodes :
- la résolution d'un système avec les valeurs particulières que l'on connaît :
$f(\pi)=0$ , $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$ et $f(0)=0$ .

On obtient

$$\begin{cases} c=0 \\ \frac{\pi^2}{4}a+\frac{\pi}{2}b=1 \\ \pi^2 a+\pi b=0 \end{cases}$$ et pour finir $f(x)=\frac{-4}{\pi^2}x^2+\frac{4x}{\pi}$ .

- la formule de l'abscisse du sommet de la parabole : $\frac{-b}{2a}=\frac{\pi}{2}$ donc $b=-\pi a$

en utilisant une des équations précédentes, on obtient $f(x)=\frac{-4}{\pi^2}x^2+\frac{4x}{\pi}$ .

Or on a vu que l'image de $\frac{\pi}{4}$ est $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $f(\frac{\pi}{4})=0{,}75\neq\frac{\sqrt{2}}{2}$ donc l'expression trouvée n'est pas la bonne !

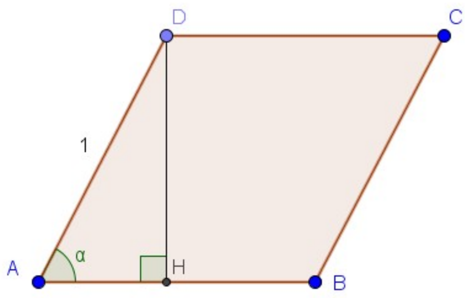
Remarque : pour simplifier les calculs, on peut changer la graduation sur l'axe des abscisses en prenant comme unité la mesure de l'angle droit , ainsi
$f(0)=0$ , $f(1)=1$ et $f(2)=0$ , le système est alors beaucoup plus simple :

$$\begin{cases} c=0 \\ a+b=1 \\ 4a+2b=0 \end{cases}$$ et on obtient $f(x)=-x^2+2x$ .

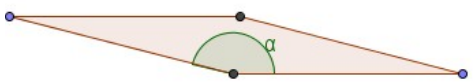
On disqualifie cette formule de la même façon en utilisant l'image de $\frac{\pi}{4}$ que l'on compare à $f(0{,}5)$ .

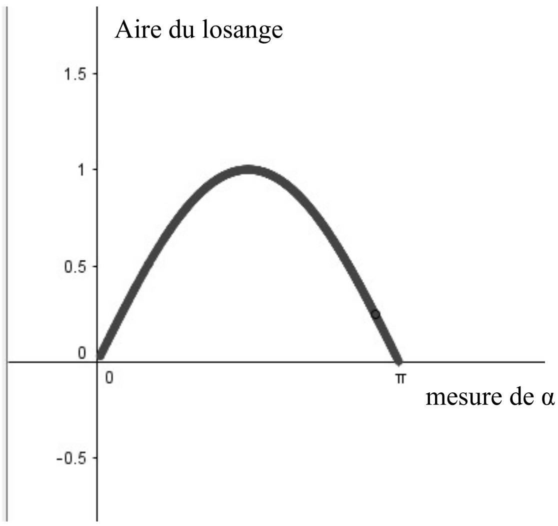
Le professeur intervient pour préciser que cette courbe est un morceau de sinusoïde et on a $f(\alpha)=\sin(\alpha)$ pour $\alpha\in[0;\pi]$ .

En effet : $f(\alpha)=\text{Aire}_{\text{ABCD}}=\text{DH}=\sin\alpha$



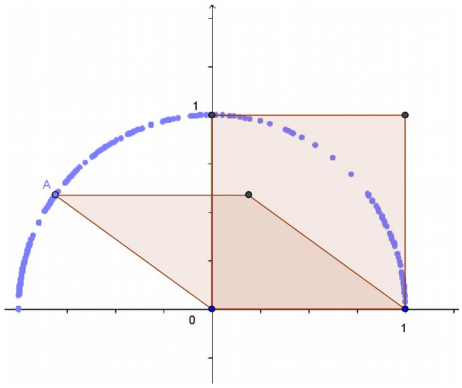

L'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique permet de visualiser la courbe qui donne l'aire du losange en fonction de la mesure de l'angle :



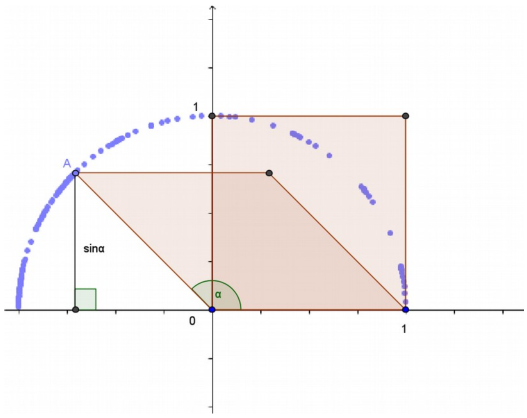



**Étape 4 : lien avec le cercle trigonométrique**

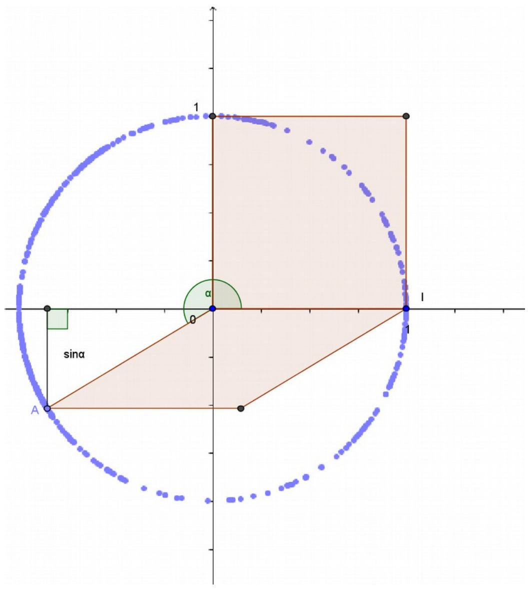
En utilisant le menu Trace dans un logiciel de géométrie dynamique, on obtient la trace de A :
Le point A se déplace sur le demi-cercle de centre O et de rayon 1.



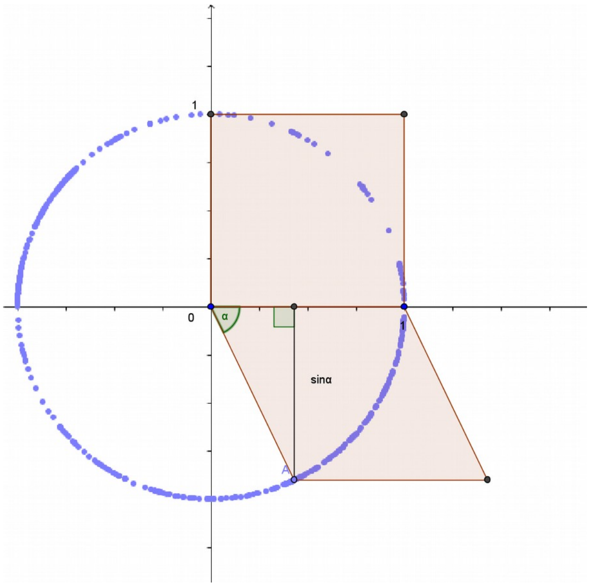

On remarque que le sinus de l'angle $\alpha$ correspond ici à la hauteur du losange donc à l'ordonnée du point A puisque OA=1. On retrouve donc la définition du sinus d'un réel dans un cercle trigonométrique.




On peut continuer la « course naturelle » du point A pour $\alpha\in[\pi;2\pi]$ et on retrouve le cercle trigonométrique.



On peut aussi partir dans le sens indirect en revenant au carré articulé et on obtient :



# Partie II

# Les situations complémentaires

# Loi de la réflexion sur le miroir plan

**Problème posé**

Soient A et B deux points et une droite $(xy)$.
Je veux partir de A, toucher la droite $(xy)$ en un point M et repartir en passant par B de sorte que le trajet AM+MB soit minimum.
Déterminer la position du point M.


**Objectifs**

- travail interdisciplinaire avec les sciences physiques
- expérimenter en mathématiques

**Notions**

- formules trigonométriques dans un triangle rectangle
- utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique
- étude des variations d'une fonction
- utilisation de la dérivée

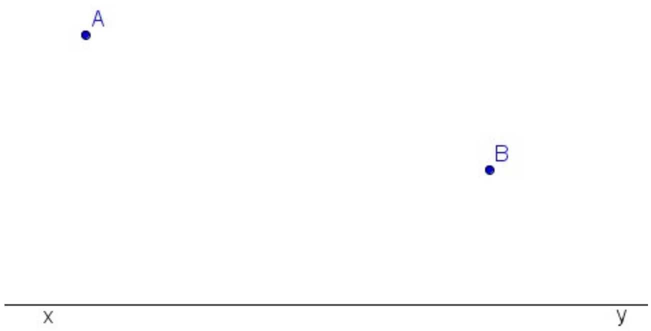
**Niveau** 2nde, 1ère et Tale

# Loi de la réflexion sur le miroir plan

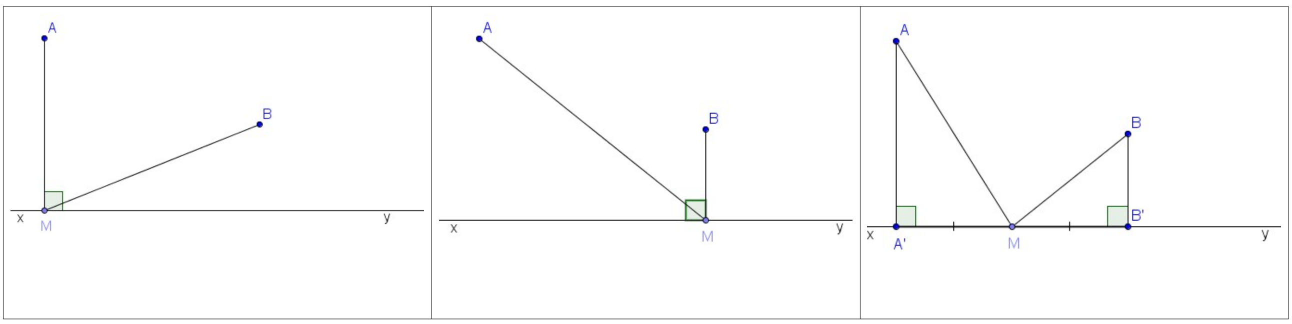
*- Il s’agit d’optimiser le temps de trajet de la lumière entre deux points pour trouver les deux lois connues ( loi de réflexion et de réfraction).*
*C’est un apport interdisciplinaire math -physique car en physique cette loi est admise en seconde sans démonstration .*
*- En seconde, les élèves peuvent  trouver l’expression algébrique des deux fonctions dont ils ne savent pas dresser le tableau de variation. Ils peuvent les programmer sur une machine graphique et voir l’allure des courbes qui confirmera le minimum conjecturé.*
*- En première ,la détermination de la dérivée se fera à l'aide d'un logiciel de calcul formel.*
*De plus, le professeur de mathématiques peut en tirer l’enseignement suivant : faute de pouvoir étudier à la main le signe de la dérivée d’une fonction $f$ , il n’est pas inutile de savoir trouver une valeur de la variable qui annule cette dérivée. En effet, s’il y a un minimum, alors nécessairement la dérivée de $f$ s’annule en ce point. C’est une condition nécessaire (mais non suffisante) pour avoir un minimum.  La dérivée de la fonction cube s'annule en 0, cependant elle n'a pas de minimum.*

**<u>Étape 1 :</u>**

Soient A et B deux points et une droite $(xy)$ . Je veux partir de A, toucher la droite $(xy)$ en un point M et repartir en passant par B de sorte que le trajet AM+MB soit minimum. Conjecturer la position du point M.

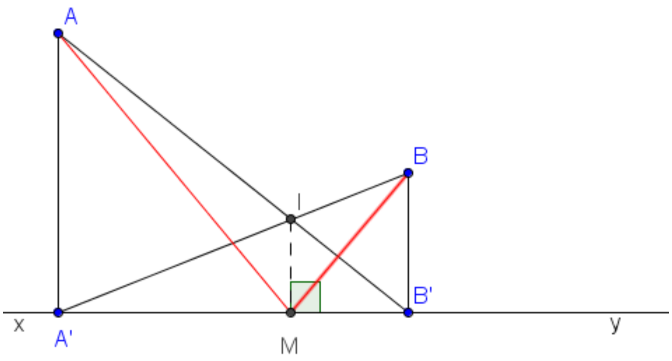


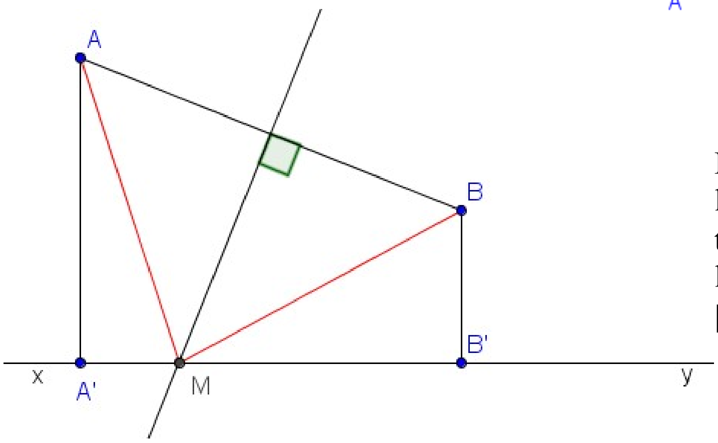

Trois premières hypothèses sont émises rapidement dans la classe :




L'idée du milieu de [A'B'] est la première chez certains. Chez d'autres, elle vient du fait qu'il n'y a pas de raison de privilégier la première ou la deuxième conjecture, d'où cette troisième conjecture.

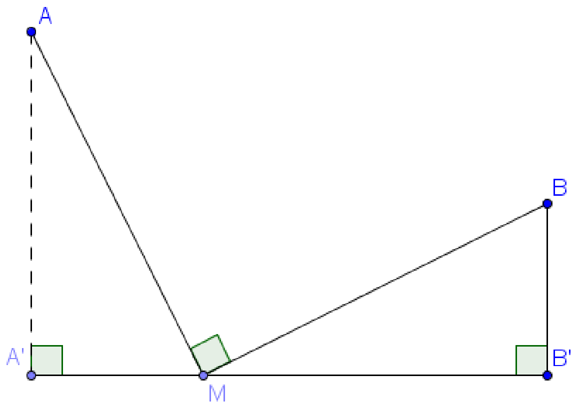
Avec cette même réflexion, certains ont l'idée de placer le point M comme projection sur $(xy)$ de l'intersection I de (AB') et (A'B). C'est donc une quatrième conjecture.




Les élèves proposent d'autres conjectures : le point M serait le point de $(xy)$ tel que le triangle AMB soit isocèle donc à l'intersection de $(xy)$ et de la médiatrice de [AB].

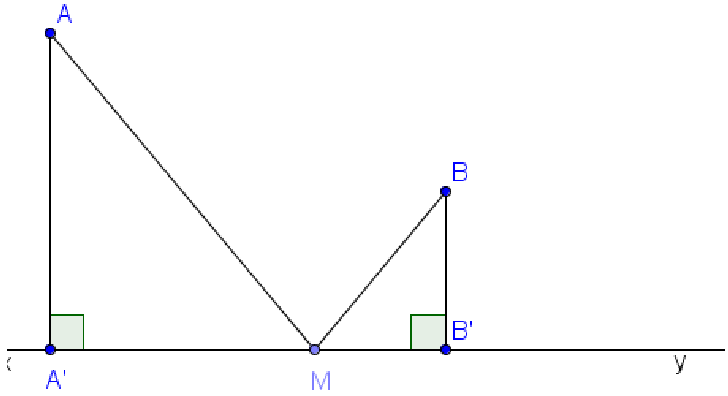
Le point M serait placé de telle sorte que le triangle AMB soit rectangle en M :




D'autres encore pensent que le point M serait le point de la droite $(xy)$ tel que AA'M et BB'M aient la même aire.

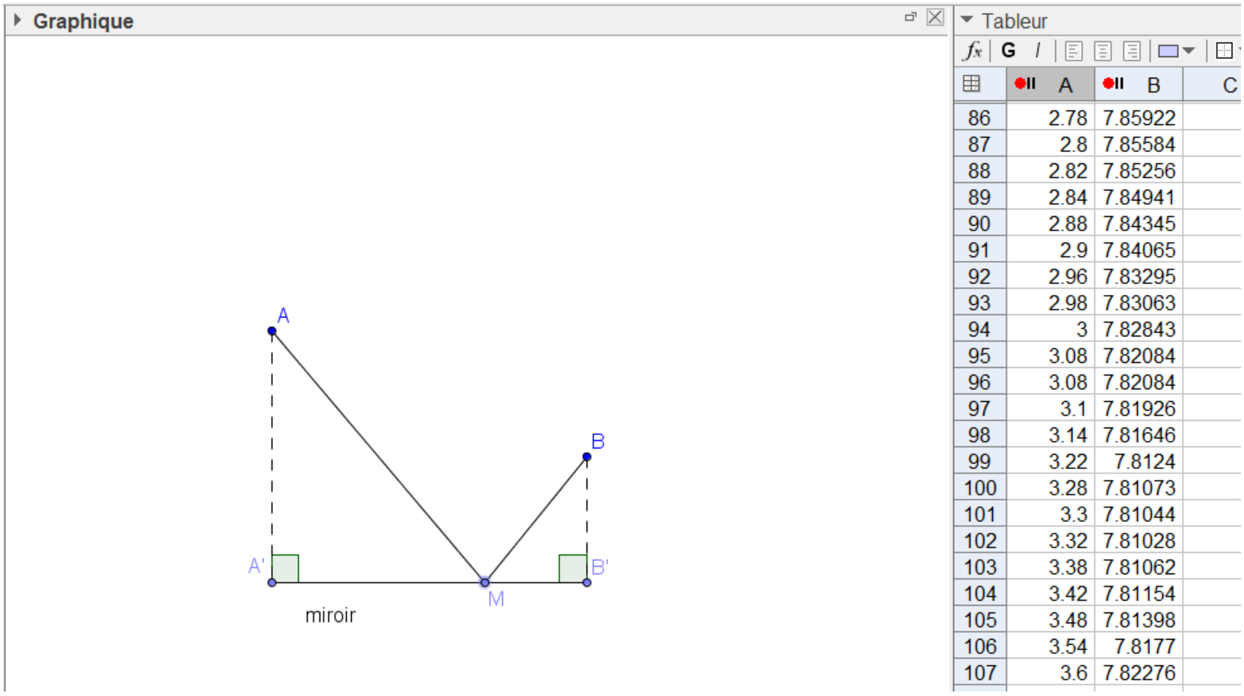
Le professeur propose alors aux élèves de conforter ou non leur conjecture en passant à l'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique.

**Étape 2 :** Conjecturer la position du point M sur [A'B'] pour que le trajet AM+MB soit minimal à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique .
On prendra AA'=4 , BB'=2 et A'B'=5.




Les élèves sont en groupes de deux ou trois. Ils ont à leur disposition des ordinateurs équipés d'un logiciel de géométrie dynamique.

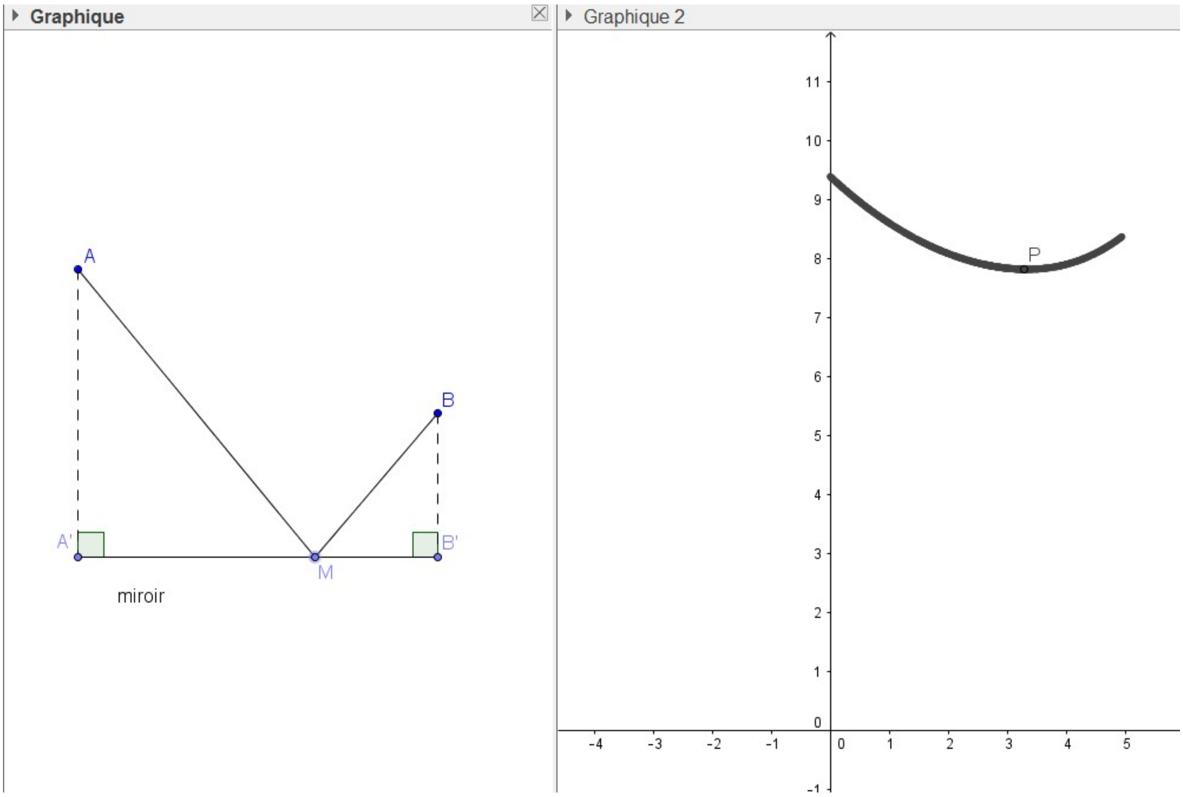
- Utilisation du tableur associé à GeoGebra .




| | A | B | C |
|---|---|---|---|
| 86 | 2.78 | 7.85922 | |
| 87 | 2.8 | 7.85584 | |
| 88 | 2.82 | 7.85256 | |
| 89 | 2.84 | 7.84941 | |
| 90 | 2.88 | 7.84345 | |
| 91 | 2.9 | 7.84065 | |
| 92 | 2.96 | 7.83295 | |
| 93 | 2.98 | 7.83063 | |
| 94 | 3 | 7.82843 | |
| 95 | 3.08 | 7.82084 | |
| 96 | 3.08 | 7.82084 | |
| 97 | 3.1 | 7.81926 | |
| 98 | 3.14 | 7.81646 | |
| 99 | 3.22 | 7.8124 | |
| 100 | 3.28 | 7.81073 | |
| 101 | 3.3 | 7.81044 | |
| 102 | 3.32 | 7.81028 | |
| 103 | 3.38 | 7.81062 | |
| 104 | 3.42 | 7.81154 | |
| 105 | 3.48 | 7.81398 | |
| 106 | 3.54 | 7.8177 | |
| 107 | 3.6 | 7.82276 | |

On obtient que AM+MB est minimum pour $A'M \approx 3{,}32$ .

- On peut aussi utiliser le graphique 2 pour faire afficher le point P qui a pour coordonnées $\left(\mathrm{A}'\mathrm{M} ; \mathrm{AM}+\mathrm{MB}\right)$.

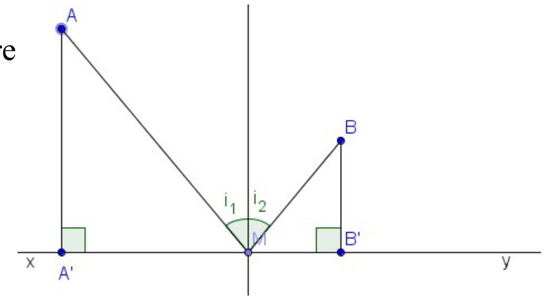



Dans les deux cas, l'ordinateur donne $\mathrm{A}'\mathrm{M} \approx 3{,}3$, donc $\mathrm{B}'\mathrm{M} \approx 1{,}7$. Ceci invalide les trois premières conjectures et les deux dernières.

Certains élèves essaient de trouver l'expression d'une fonction.
La première difficulté est le choix de la variable. Le texte doit les inciter à poser $\mathrm{A}'\mathrm{M} = x$. On a $0 \leqslant x \leqslant 5$. La longueur du trajet est $f(x) = \sqrt{x^2+16} + \sqrt{(5-x)^2+4}$.
Les élèves utilisent alors GeoGebra ou la calculatrice pour conjecturer le minimum de cette fonction.
On constate cependant une erreur récurrente qui consiste à penser que AM+MB est minimum si AM²+BM² est minimum. Certains élèves étudient alors la fonction $f$ définie sur [0;5] par $f(x) = x^2+16+(5-x)^2+4$ et trouvent évidemment une réponse erronée ( $x=2{,}5$ ), loin de la conjecture établie par GeoGebra.

Le professeur précise qu'on va utiliser les sciences physiques pour nous aider à résoudre ce problème.

**<u>Étape 3 :</u>** Un rayon laser part du point A , frappe un miroir et est réfléchi en direction du point B. La lumière prend le chemin le plus court en temps. Comme le rayon incident et le rayon réfléchi sont tous les deux dans l'air, sa vitesse est la même et donc elle suit le chemin le plus court en longueur.



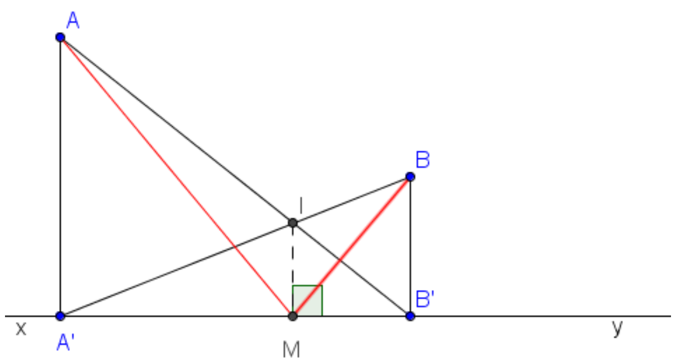

Certains élèves peuvent penser à la loi de réflexion vue en sciences physiques :
*M est le point de [A'B'] tel que l'angle* $i_1$ *que fait le rayon incident avec la perpendiculaire au miroir et l'angle* $i_2$ *que fait le rayon réfléchi avec cette même droite ont la même mesure.*

Ce qui implique que les angles $\widehat{AMA'}$ et $\widehat{BMB'}$ ont la même mesure.

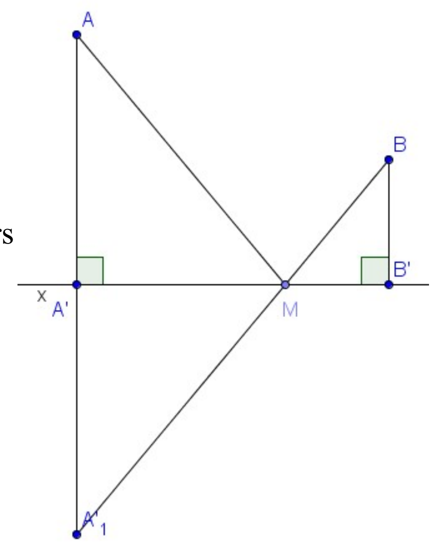
Cette égalité d'angles ne leur permettra pas forcément de placer le point M sauf s'ils pensent à la trigonométrie :

$i_1 = i_2$ donc $\widehat{AMA'} = \widehat{BMB'}$ par conséquent $\tan(\widehat{AMA'}) = \tan(\widehat{BMB'})$ ,
soit $\frac{AA'}{A'M} = \frac{BB'}{B'M}$ et donc $\frac{A'M}{B'M} = \frac{AA'}{BB'}$ soit $\frac{A'M}{5 - A'M} = 2 \Leftrightarrow A'M = 10 - 2A'M \Leftrightarrow A'M = \frac{10}{3}$ .

On peut valider la quatrième conjecture :

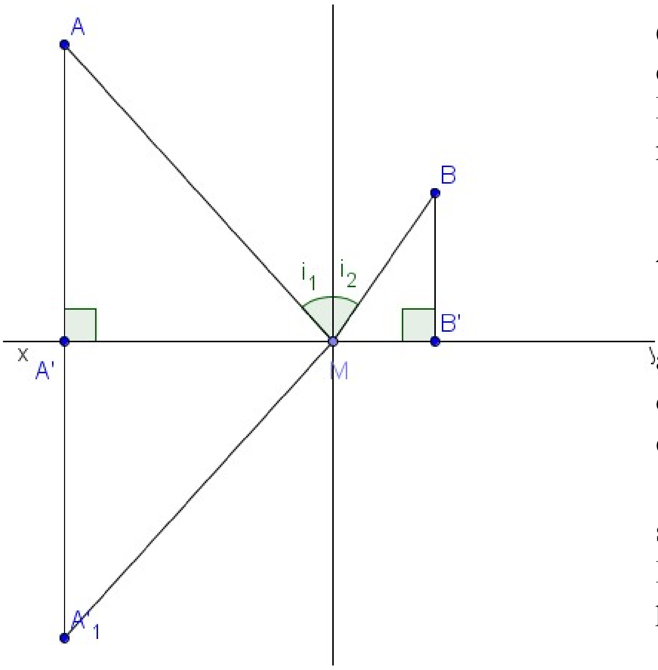



En utilisant le théorème de Thalès dans les triangles IAA' et IBB', on obtient $\frac{AA'}{BB'} = \frac{IA'}{IB}$ or $\frac{AA'}{BB'} = 2$ donc IA'=2 IB, par conséquent A'B=3IB et $IA' = \frac{2}{3} A'B$ .
En utilisant le théorème de Thalès, dans les triangles A'MI et A'B'B, on a alors $\frac{A'M}{A'B'} = \frac{A'I}{A'B}$ soit $A'M = \frac{2}{3} A'B' = \frac{10}{3}$ .



Certains élèves pensent à construire le symétrique du point A par rapport à la droite $(xy)$ :
En effet, en utilisant l'inégalité triangulaire on peut placer le point M est donc l'intersection de la droite (A'B') et la droite $(A'_1B)$ .
Les triangles AA'M et BB'M sont semblables, de même que les triangles $AA'M$ et $A'A'_1M$ .
On a donc bien l'égalité des angles et l'égalité des rapports :
$\frac{A'M}{B'M}=\frac{AA'}{BB'}$ .
Cela revient donc à minimiser $A'_1M+MB$ .

Généralisons maintenant ce résultat et démontrons la loi de réflexion :




On réalise la démonstration en cours dialogué avec la classe .
Le professeur introduit le symétrique $A'_1$ de A par rapport à (A'B').

$AM+MB=A'_1M+MB$ or d'après l'inégalité triangulaire, on a $A'_1M+MB\geqslant A'_1B$ .
$A'_1M+MB$ est donc minimum pour $A'_1$ , M et B alignés. On a alors $\widehat{A'_1MA'}=\widehat{BMB'}$ car ce sont deux angles opposés par le sommet. De plus $AMA'_1$ est un triangle isocèle en M donc $\widehat{AMA'}=\widehat{A'MA'_1}$ et donc $\widehat{AMA'}=\widehat{BMB'}$ , soit $i_1=i_2$ .
La longueur minimum du trajet entre A et B, s'obtient pour $i_1=i_2$ .

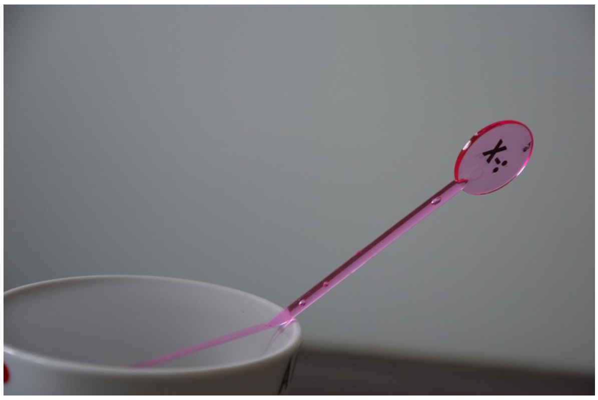
En première et en terminale, on peut retrouver cette condition à l'aide d'une fonction en posant :
$AA'=a \qquad BB'=b \qquad A'B'=c$ et $A'M=x$
$f(x)=\sqrt{x^2+a^2}+\sqrt{(c-x)^2+b^2}$ pour $0\leqslant x\leqslant c$ et donc
$$f'(x)=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+a^2}}-\frac{2(c-x)}{2\sqrt{(c-x)^2+b^2}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}-\frac{(c-x)}{\sqrt{(c-x)^2+b^2}}$$
Le signe de la dérivée n'est pas facile à étudier. En terminale on peut utiliser le théorème des valeurs intermédiaires pour justifier l'existence d'une valeur de $x$ qui annule $f'(x)$ .
En effet $f'$ est continue sur $[0;c]$ , $f'(0)<0$ et $f'(c)>0$ donc il existe au moins une valeur de $x$ dans $[0;c]$ qui annule $f'$ .
La dérivée s'annule donc au moins une fois et la fonction commence par être décroissante puis finit par être croissante.
La dérivée ne peut pas s'annuler plus d'une fois et changer de signe une autre fois car la condition nécessaire et suffisante pour l'annulation est $\frac{A'M}{AM}=\frac{B'M}{BM}$ donc pour $\cos(\frac{\pi}{2}-i_1)=\cos(\frac{\pi}{2}-i_2)$ et comme ces angles sont compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ , on a $i_1=i_2$ .

Ceci équivaut à la similitude des deux triangles AA'M et BB'M donc au fait que le point M pour lequel se produit le minimum est unique puisque c'est celui qui divise le segment [A'B'] dans le rapport $\frac{a}{b}$ .

*L'intérêt de cette  situation réside dans :*

- *la recherche d'un problème avec de nombreuses conjectures,*
- *le recours aux TICE pour en éliminer certaines,*
- *l'insuffisance des valeurs approchées trouvées,*
- *la possibilité de changement de cadre ( cadre géométrique puis fonctionnel).*

# La loi de Snell-Descartes



**Problème posé**
Le touilleur dans l'eau semble être brisé au niveau de la surface . Pourquoi ?
C'est le phénomène de réfraction. En première et en terminale on va montrer que la condition $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$ est nécessaire où $n_1$ et $n_2$ sont les indices de réfraction, $i_1$ l'angle d'incidence et $i_2$ l'angle de réfraction.
En seconde les élèves peuvent vérifier cette formule pour des valeurs numériques données.

**Objectifs**

- travail interdisciplinaire avec les sciences physiques
- manipuler des formules

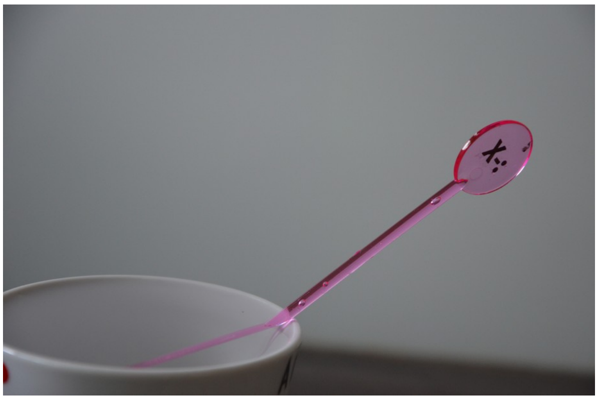
**Notions**

- vitesse
- formules trigonométriques dans un triangle rectangle
- utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique
- étude des variations d'une fonction
- utilisation de la dérivée

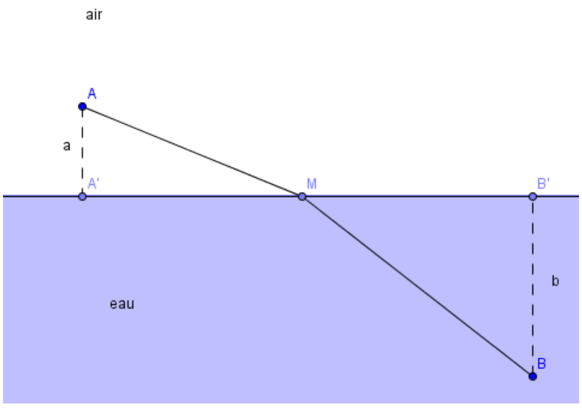
**Niveau** 2$^{nde}$ , 1$^{ère}$ et T$^{ale}$

# La loi de Snell-Descartes

Le touilleur dans l'eau semble être brisé au niveau de la surface . Pourquoi ?



La lumière ne se déplace pas à la même vitesse dans l'air (vitesse $v_1 \simeq 300$ m/µs ) et dans l'eau (vitesse $v_2 \simeq 226$ m/µs ). C'est pour cette raison que le trajet entre A et B ne se fait pas en ligne droite car la lumière suit le trajet le plus court en temps et non en longueur.



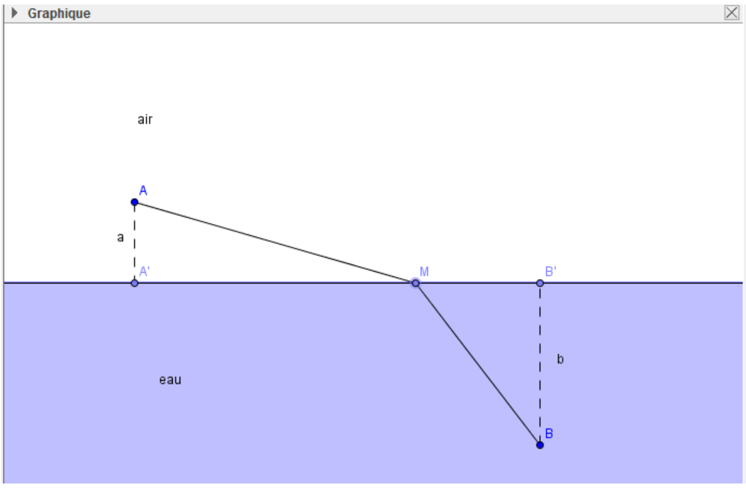

On a $AA' = a = 1\,m$ ; $BB' = b = 2\,m$ et $A'B' = c = 5\,m$ .

**Étape 1 :** Conjecturer la position du point M sur [A'B'] pour que le trajet AM+MB soit le plus rapide.

Le temps de trajet du rayon est $\frac{AM}{v_1} + \frac{BM}{v_2}$ .

Les élèves sont en groupes de deux ou trois. Ils ont à leur disposition des ordinateurs équipés d'un logiciel de géométrie dynamique mais aussi leur calculatrice de façon à leur laisser le choix de la méthode.

Solution 1 : Les élèves peuvent utiliser le tableur intégré à GeoGebra. On peut, par exemple, faire afficher dans la colonne A la longueur A'M et dans la colonne B la valeur de $\frac{AM}{300} + \frac{BM}{226}$ .

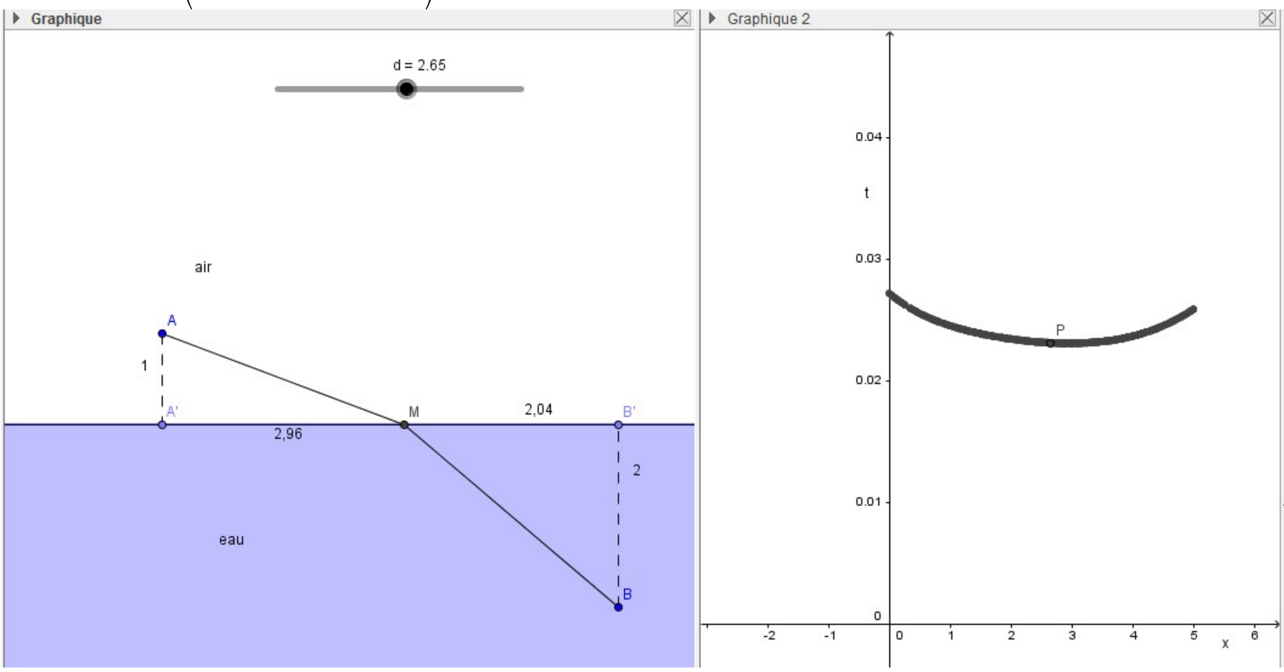



Tableur

| | A | B |
|---|---|---|
| 148 | 2.6866666667 | 0.023086868 |
| 149 | 2.7 | 0.0230839584 |
| 150 | 2.7133333333 | 0.0230811847 |
| 151 | 2.74 | 0.0230760484 |
| 152 | 2.7666666667 | 0.0230714655 |
| 153 | 2.7933333333 | 0.0230674429 |
| 154 | 2.8066666667 | 0.0230656438 |
| 155 | 2.8333333333 | 0.0230624748 |
| 156 | 2.8733333333 | 0.0230588081 |
| 157 | 2.8866666667 | 0.0230578795 |
| 158 | 2.9 | 0.0230570995 |
| 159 | 2.9266666667 | 0.0230559891 |
| 160 | 2.94 | 0.0230556609 |
| 161 | 2.9533333333 | 0.0230554854 |
| 162 | 3.0066666667 | 0.0230563328 |
| 163 | 3.02 | 0.0230569377 |
| 164 | 3.06 | 0.0230597147 |
| 165 | 3.1 | 0.0230639608 |

On conjecture alors que le trajet le plus court est obtenu pour $\mathrm{A'M} \approx 2{,}95\,m$ .

Solution 2 : on peut aussi utiliser le graphique 2 pour faire afficher le point P qui a pour coordonnées $\left(\mathrm{A'M}\,;\dfrac{\mathrm{AM}}{300}+\dfrac{\mathrm{BM}}{226}\right)$ .



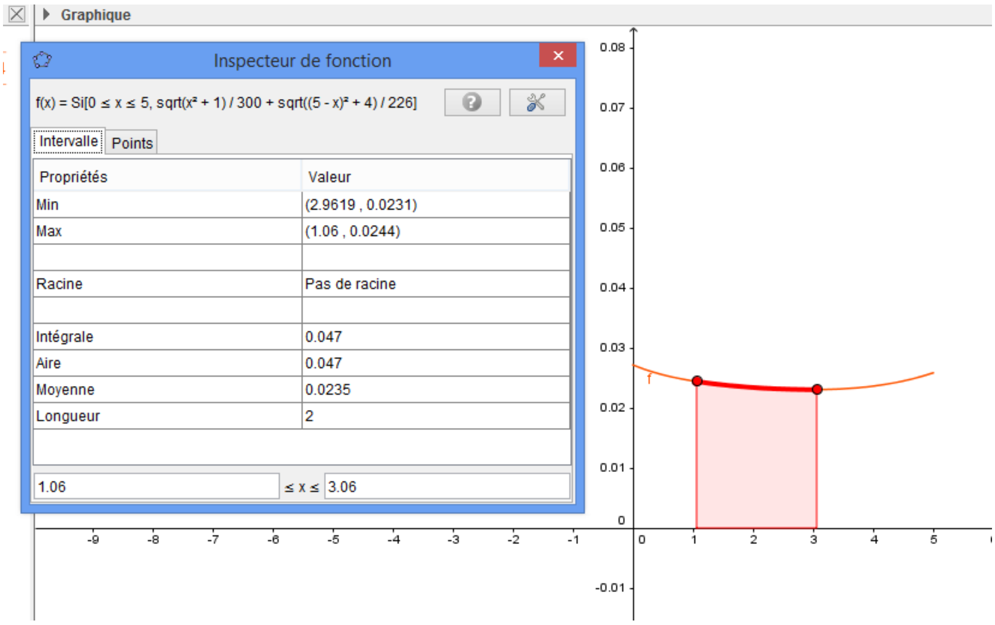

On conjecture que le trajet est le plus rapide pour $\mathrm{A'M} \approx 3$ .

Solution 3 : certains élèves essaient de trouver l'expression d'une fonction. La première difficulté est le choix de la variable. Le texte doit les inciter à poser $\mathrm{A'M} = x$ . On a $0 \leqslant x \leqslant 5$ .

Le temps du trajet du rayon est $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{300} + \dfrac{\sqrt{(5-x)^2+4}}{226}$ .

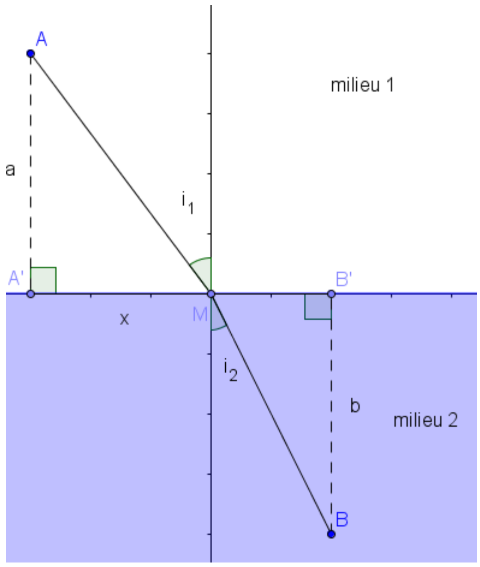
Les élèves utilisent alors GeoGebra ou la calculatrice pour conjecturer la minimum de cette fonction.

Avec l'inspecteur de fonction de GeoGebra, on obtient :




On conjecture que le minimum de la fonction est obtenue pour $x \approx 2{,}96$ **.**

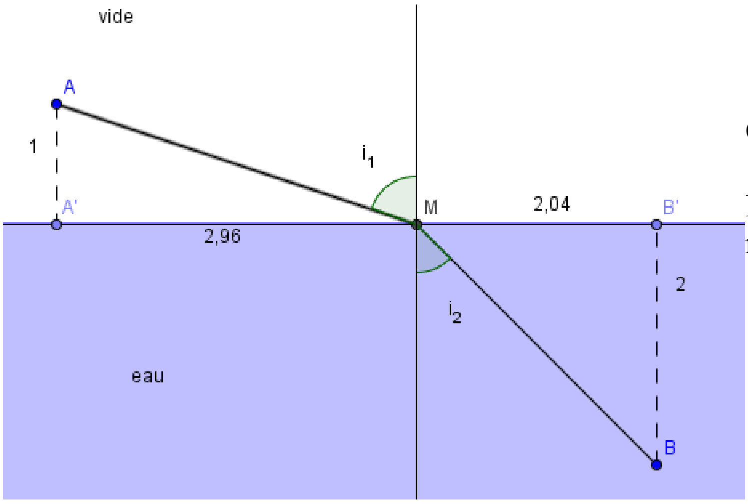
**Étape 2 :** René Descartes ( 1596-1650) a cherché à traduire le phénomène de réfraction par une loi qui relie l'angle d'incidence $i_1$ (angle que fait le rayon incident avec la perpendiculaire à la surface de séparation) et l'angle de réfraction $i_2$ (angle que fait le rayon réfracté avec la perpendiculaire). Il a trouvé que les sinus des angles de réfraction et d'incidence qui sont liés par une relation de proportionnalité.




C'est la loi de Snell-Descartes : $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$ , où $n_1$ et $n_2$ sont les indices de réfraction des milieux.

On a $n = \frac{c}{v}$ , où $c$ est la vitesse de la lumière dans le vide et $v$ la vitesse de la lumière dans le milieu.

Dans le cas de l'eau, on a $n = 1{,}33$ , pour le vide on a $n \approx 1$ .
Vérifier la loi de Snell-Descartes dans le cas de l'étape 1.




On prend $x \approx 2{,}96$ .

En utilisant la trigonométrie dans le triangle rectangle, on trouve aisément que

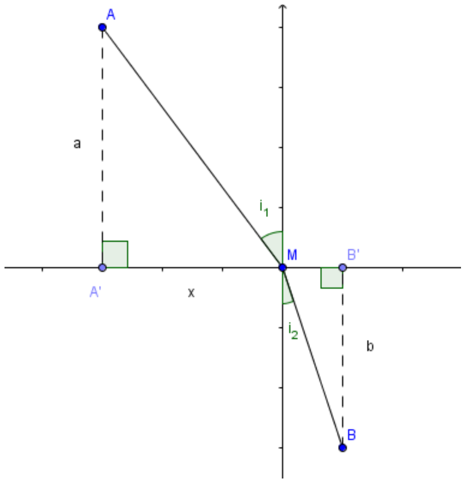
$\sin i_1 = \dfrac{2{,}96}{\sqrt{1+2{,}96^2}} \approx 0{,}95$ et

$1{,}33 \times \sin i_2 = \dfrac{2{,}04}{\sqrt{2{,}04^2+2^2}} \times 1{,}33 \approx 0{,}95$ .

**Étape 3 ( pour les 1ère S et Tale S) : Comment retrouver la formule de Snell-Descartes dans le cas général ?**

1. Exprimer le temps du trajet en fonction de $a$ , $b$ , $c = \mathrm{A'B'}$ , $x$ , $v_1$ et $v_2$ .

2. La fonction $f$ a-t-elle un minimum ? En déduire le lien entre la loi de Snell-Descartes exprimant les distances $a$ et $b$ en fonction de $\mathrm{i}_1$ et $\mathrm{i}_2$ .




On a $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+a^2}}{v_1} + \dfrac{\sqrt{(c-x)^2+b^2}}{v_2}$ pour $x \in [0;c]$ .

On cherche donc le minimum de cette fonction .

$f$ est dérivable sur $[0;c]$ et on a

$$f'(x) = \frac{1}{v_1} \times \frac{2x}{2\sqrt{x^2+a^2}} - \frac{1}{v_2} \times \frac{2(c-x)}{2\sqrt{(c-x)^2+b^2}} = \frac{1}{v_1} \times \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} - \frac{1}{v_2} \times \frac{(c-x)}{\sqrt{(c-x)^2+b^2}} .$$

Évidemment on ne demandera pas cette dérivée en première qui sera alors donnée par un logiciel de calcul formel.

Le signe de la dérivée n'est pas facile à étudier. En terminale on peut utiliser le théorème des valeurs intermédiaires pour justifier l'existence d'une valeur de $x$ qui annule $f'(x)$.
En effet $f'$ est continue sur $[0;c]$, $f'(0)<0$ et $f'(c)>0$ donc il existe au moins une valeur de $x$ dans $[0;c]$ qui annule $f'$.
On ne peut pas étudier le signe de cette dérivée mais on peut écrire la condition nécessaire pour qu'elle s'annule en changeant de signe et donc pour qu'il se produise un minimum.

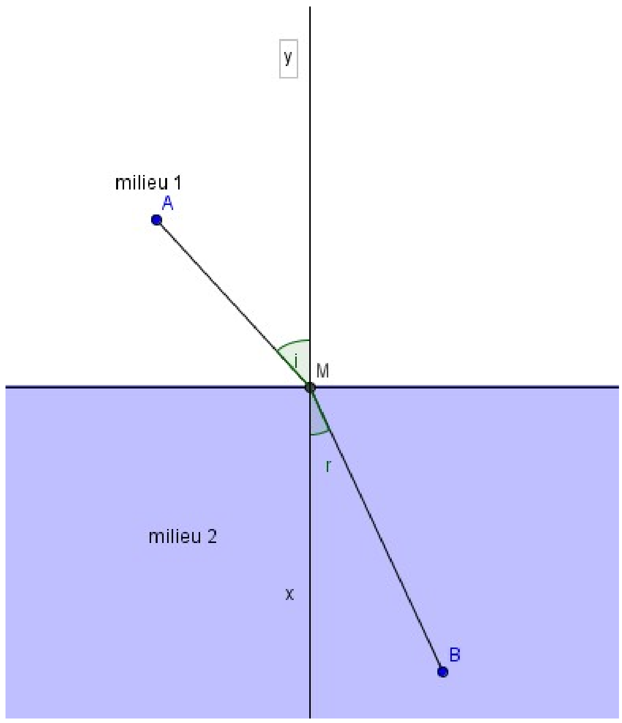
$$\frac{1}{v_1}\times\frac{x}{\text{AM}}-\frac{1}{v_2}\times\frac{(c-x)}{\text{BM}}=0 \text{ soit}$$

$$\frac{1}{v_1}\times\frac{\text{A'M}}{\text{AM}}=\frac{1}{v_2}\times\frac{\text{B'M}}{\text{BM}}\Leftrightarrow n_1\cos\left(\frac{\pi}{2}-i_1\right)=n_2\cos\left(\frac{\pi}{2}-i_2\right)\Leftrightarrow n_1\sin i_1=n_2\sin i_2\,.$$

**Étape 4** : Pourquoi voit-on le bâton cassé quand on le plonge dans l'eau ?

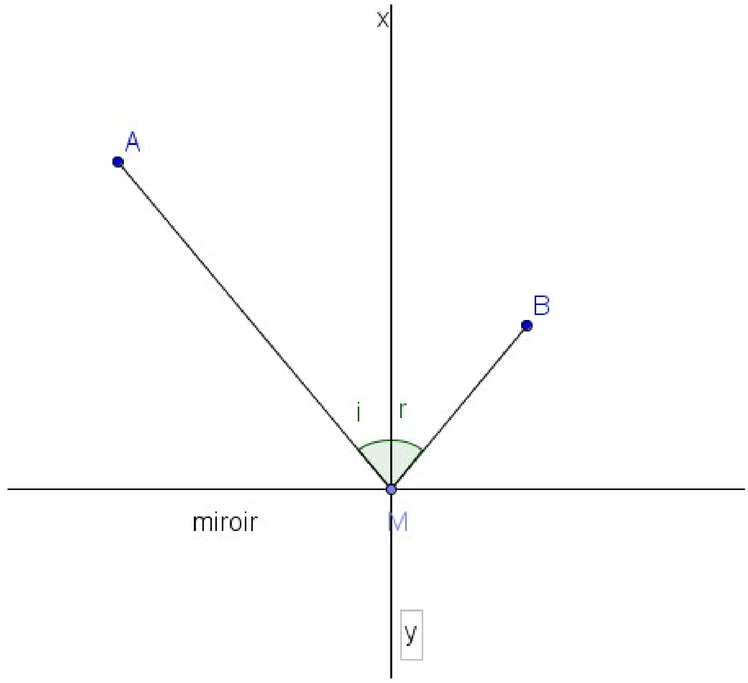
## I. Trajet d'un rayon :

L'indice $n$ d'un milieu est défini par $n=\frac{c}{v}$ avec $v$ la vitesse de la lumière dans ce milieu.



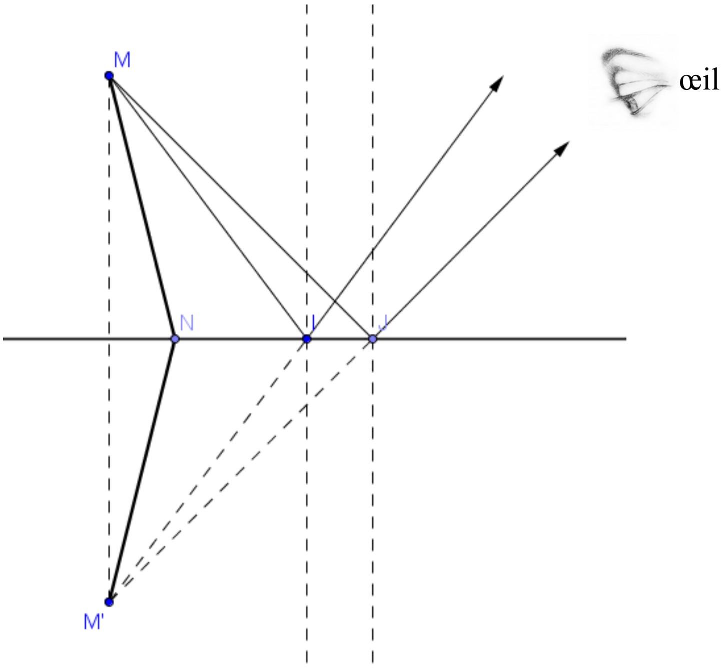

Soit le rayon (AM) qui touche le plan de l'interface en M et qui repart suivant (MB) avec (AM) dans le milieu 1 et (BM) dans le milieu 2.
Soit $(xy)$ la normale en M au plan de l'interface. Le dessin se fait dans un plan vertical contenant la normale.
Dans deux milieux différents, les vitesses sont $v_1$ et $v_2$ et la loi de Snell-Descartes est $n_1\sin \mathrm{i}=n_2\sin r$ avec i mesure de l'angle formé par (AM) et $(xy)$ et $r$ mesure de l'angle formé par (BM) et $(xy)$.
Si $v_1>v_2$ alors $n_1<n_2$ donc $\sin \mathrm{i}>\sin r$ donc $\mathrm{i}>r$ puisque i et $r$ sont dans $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

Dans le cas de la réflexion sur le miroir, le rayon incident est réfléchi sans changer de milieu donc $n_1 = n_2$ et donc $\sin i = \sin r$ donc $i = r$ . L'angle d'incidence et l'angle de réflexion ont la même mesure et on a deux symétrie : une par rapport à la normale et une par rapport au plan du miroir.



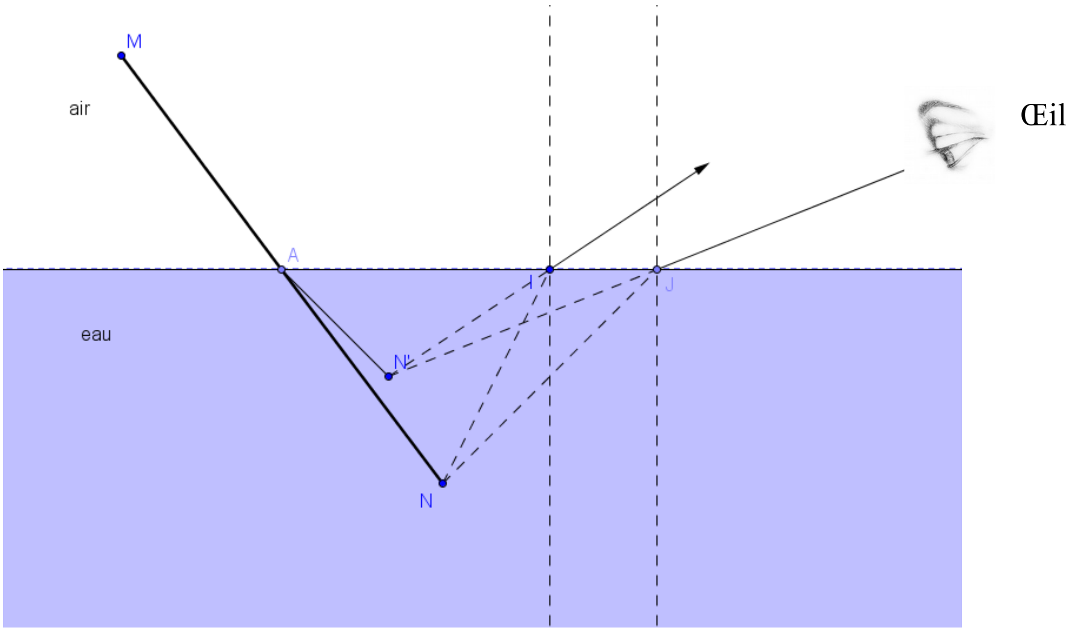

**II Que se passe-t-il pour l'image d'un bâton [MN] ?**

**1. le bâton devant un miroir :**
Le bâton touche le miroir en N, le point N est sa propre image. Soit M' l'image du point M. En supposant que l'alignement est conservé pour les points images, l'image de [MN] sera [M'N].



Nous voyons les objets parce qu'ils nous envoient des rayons dans les yeux. Soient deux rayons issus de M et qui frappent le miroir respectivement en I et J.
Les rayons issus de M et qui entrent dans l'oeil semblent provenir du point M' symétrique du point M de sorte que l'observateur voit le bâton dans le miroir en [M'N], symétrique de [MN].

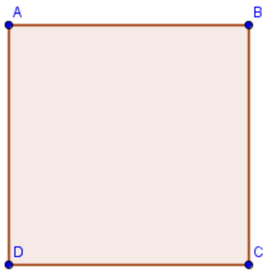
**2. Le bâton en partie immergé :**




Le bâton [MN] rencontre l'eau au point A de sorte que l'observateur verra la partie hors de l'eau [MA] puis l'image de la partie dans l'eau soit l'image de [AN].
Le point A est sa propre image . Soit N' l'image du point N, en supposant que l'alignement est conservé par les points images, l'image de [AN] sera [AN']. L'observateur verra le bâton formé par deux parties [MA] et [AN'].
Dans l'expérience, l'observateur voit la partie du bâton qui se trouve dans l'eau comme redressée.

# Chemin minimum reliant les quatre sommets d’un carré

## Problème posé




ABCD est un carré de côté a. Déterminer le chemin le plus court pour relier les quatre points A, B, C, D.

## Objectifs

- valider ou invalider des conjectures
- expliquer un phénomène réel et observable

## Notions

- fonctions trigonométriques
- fonction du type $\sqrt{u}$
- étude des variations d'une fonction
- utilisation de la dérivée

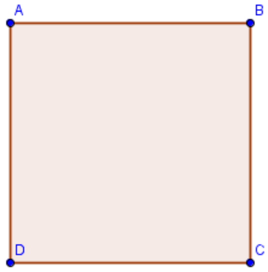
**Niveau** T^ale^

## Chemin minimum reliant les quatre sommets d'un carré

*- Les élèves font des conjectures. Une leur paraît exacte mais elle ne se vérifie pas expérimentalement. Trouver le minimum d'une fonction est nécessaire pour l'invalider.*
*- Nous pouvons réaliser l'expérience devant les élèves avec un film de savon, ce qui est important pour motiver l'étude : les mathématiques servent à expliquer des phénomènes réels et observables.*
*- On trouve des hexagones non réguliers qui pavent le plan (avec des angles de 120°) ce qui peut être rapproché du pavage avec des hexagones réguliers (alvéoles des abeilles).*

**Étape 1 :**

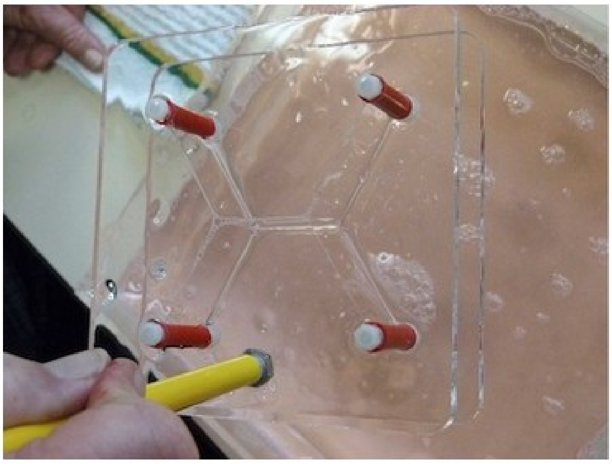
ABCD est un carré de côté a. Déterminer le chemin le plus court pour relier les quatre points A, B, C, D.



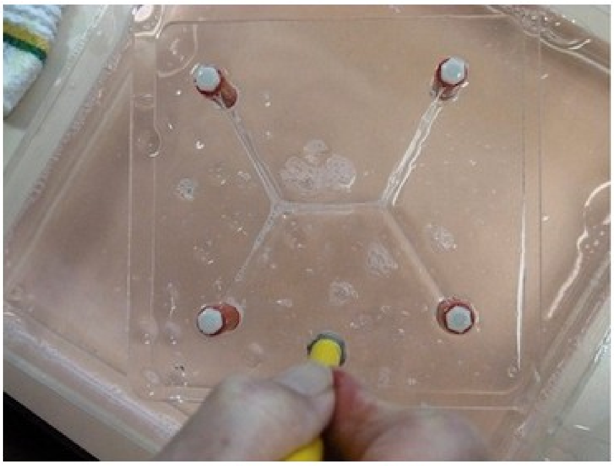

Les élèves proposent
- soit les quatre côtés du carré ce qui donne $4a$
- soit les diagonales ce qui donne $2a\sqrt{2}$

Avec l'inégalité triangulaire ou en comparant 4 = $2\times 2$ et $2\sqrt{2}$ soit 2 et $\sqrt{2}$ , on conclut que pour relier les sommets, les diagonales sont plus courtes. Les élèves pensent alors qu'il n'est pas possible de trouver une façon plus économique de relier les sommets.

**Étape 2 :** Le professeur montre le matériel : Deux plaques de plexiglas identiques trouées aux quatre sommets d'un carré et quatre tiges métalliques pour relier les plaques.
Quand on va plonger ce matériel dans une bassine d'eau savonneuse, un film de savon va relier les tiges de sorte que la longueur totale du film soit minimale. Voici le résultat [4].



Solution pour 4 points.

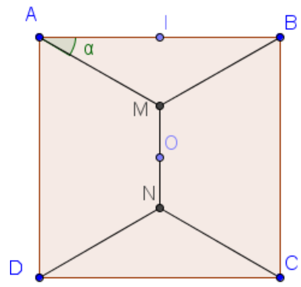


Solution pour 4 points.

4 http://images.math.cnrs.fr/Mathematiques-savonneuses.html

Les élèves sont surpris que le savon n’ait pas suivi les diagonales.Il faut vérifier que le trajet suivi par le savon est effectivement plus court mais on ne connaît pas la place des nœuds. Donc il faut choisir une variable et chercher le minimum d’une fonction.

On peut remarquer en examinant le calcul précédent qu’on n’enlève rien à la généralité de la démonstration en fixant la longueur du côté du carré, que ce soit $a$ ou 1 ou 2 ou 3.
On va prendre 2 pour simplifier les calculs.




Avec deux nœuds ainsi disposés, trouver la place du point M qui donne le trajet minimum.
On peut étudier deux fonctions selon le choix de la variable :

- soit on pose IM = $x$ avec $0 \leqslant x \leqslant 2$
- soit on pose $\widehat{IAM} = \alpha$ avec $0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$

Dans les deux cas on cherche la longueur du trajet : 4AM + 2MO , elle est donnée par une fonction de $x$ ou une fonction de α.

Le signe de la dérivée est aussi facile à trouver pour l'une que pour l'autre de ces fonctions. Le calcul de la dérivée peut se faire avec un logiciel de calculs formels notamment pour la fonction de variable $\alpha$ .

Avec la variable $x$ :

$AM = \sqrt{1+x^2}$ avec $x \geqslant 0$ donc la longueur du trajet est $f(x) = 4\sqrt{1+x^2} + 2 - 2x$
on retrouve bien $f(1) = 4\sqrt{2}$ quand M et N sont en O.

$f'(x) = \frac{4 \times 2x}{2\sqrt{1+x^2}} - 2 = \frac{4x - 2\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}$ donc $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 2x > \sqrt{1+x^2}$

c’est à dire quand $4x^2 > 1 + x^2 \Leftrightarrow 3x^2 > 1 \Leftrightarrow x > \frac{\sqrt{3}}{3}$ car $x \geqslant 0$ .

La fonction va décroître jusqu’à $f(\frac{\sqrt{3}}{3}) = 2(\sqrt{3}+1)$ .

| $x$ | $0$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | | $2$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | – | 0 | + | |
| $f(x)$ | 6 ↘ | $2\sqrt{3}+2$ | ↗ | $4\sqrt{5}-2$ |

Pour vérifier que cette longueur est inférieure à celle des diagonales soit $4\sqrt{2}$, il faut comparer $2\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}+1$, soit par encadrement, soit en comparant leurs carrés $4+2\sqrt{3}<8$ car $\sqrt{3}<2$.

<u>Avec la variable $\alpha$ avec</u> $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$

$\frac{AI}{AM}=\cos\alpha$ donc $AM=\frac{1}{\cos\alpha}$ et $IM=\tan\alpha$ donc la longueur du trajet est

$f(\alpha)=\frac{4}{\cos\alpha}+2-2\tan\alpha$ avec $\alpha\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ donc $f'(\alpha)=\frac{4\sin\alpha}{\cos^2\alpha}-\frac{2}{\cos^2\alpha}=\frac{4\sin\alpha-2}{\cos^2\alpha}$

$f'(\alpha)$ est donc du signe de $4\sin\alpha-2$.

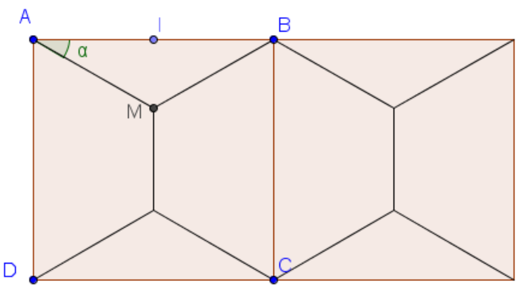
$4\sin\alpha-2\geqslant 0\Leftrightarrow\sin\alpha>\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{\pi}{6}<\alpha<\frac{\pi}{2}$, d'où le tableau de variations de la fonction :

| $x$ | $0$ | | $\frac{\pi}{6}$ | | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | ‖ |
| $f(x)$ | ‖ | ↘ | $2\sqrt{3}+2$ | ↗ | ‖ |

On retrouve la place du point M qui conduit au minimum car $\tan\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

En conclusion, le chemin décrit par le savon est donc le plus court.

<u>Complément:</u> si on duplique le carré plusieurs fois on obtient un pavage avec des hexagones non réguliers ayant des angles de 120°.




$AM=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ et $MN=2\,MO=2-2\frac{2\sqrt{3}}{3}=\frac{6-2\sqrt{3}}{3}$

$2\sqrt{3}>3$ donc $6-2\sqrt{3}<3$ donc $AM>MN$, l'hexagone n'est donc pas régulier.

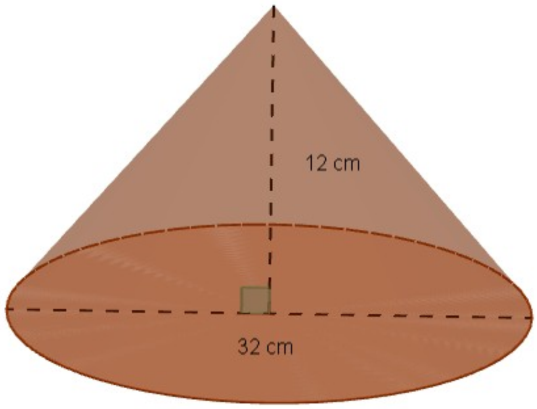
**On ne peut donc pas faire de rapprochement avec les alvéoles des abeilles. En revanche le point M est le point de Fermat- Steiner du triangle AOB.**

# Partie III

# LES EXERCICES

# Le chapeau de clown

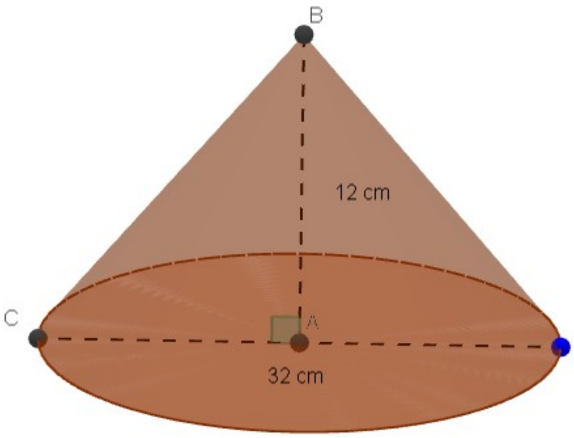
Niveau : 2nde



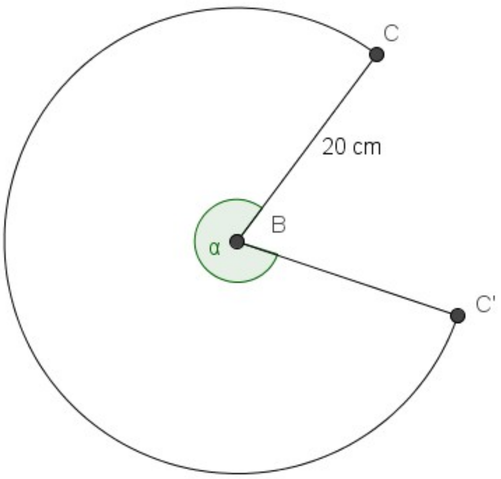

On souhaite réaliser des chapeaux à l'aide de papier cartonné. Ces chapeaux ont une forme conique et les dimensions indiquées ci-dessus.

1. Réaliser un patron qui permet de faire ce chapeau en respectant les dimensions données.
2. On dispose d'une feuille de format A0 pour réaliser ces chapeaux. Combien peut-on en réaliser ?

1. Réalisation d'un patron :




ABC est un triangle rectangle, d'après le théorème de Pythagore : $BC^2=12^2+16^2=400$ donc BC=20 cm.




Le patron a la forme d'un morceau de disque de rayon 20 cm, il faut déterminer l'angle $\alpha$. Le périmètre du disque de base du cône est $\pi \times 32$, c'est la mesure de l'arc $\overset{\frown}{CC'}$.

La longueur de l'arc est proportionnelle à l'angle :

| | | |
|---|---|---|
| angle | 180° | $\alpha$ |
| arc | $20\pi$ | $32\pi$ |

Donc $20\pi\alpha=180\times32\pi\Leftrightarrow\alpha=\dfrac{180\times32}{20}=288°$ , d'où le patron.

2. On dispose d'une feuille de format A0 pour réaliser ces chapeaux. Combien peut-on en réaliser ?

On détermine l'aire du patron, l'aire est proportionnelle à l'angle :

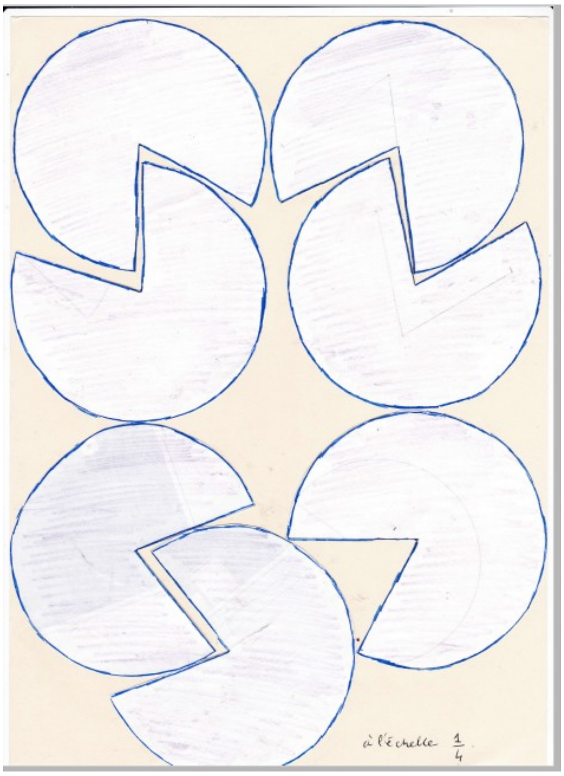
| | | |
|---|---|---|
| angle | 360° | 288° |
| aire | $400\pi$ | $a$ |

Donc $360a=288\times400\pi\Leftrightarrow a=\dfrac{288\times400\pi}{360}\approx1005{,}31$ cm².

Une feuille de format A0 a une aire de 1 m² = 10000 cm² or $\dfrac{1000}{\dfrac{288\times400\pi}{360}}\approx 9{,}95$ .

On pourra donc réaliser au plus neuf patrons de chapeaux sur cette feuille sans tenir compte de l'encombrement.

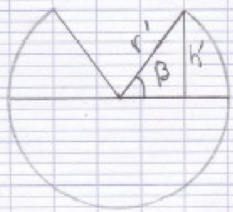
Voilà deux propositions d'élèves :



2) le cercle ($\mathscr{C}'$) entre dans un carré de côté égal au diamètre c'est à dire 40 cm

- La largeur A0 est de 84,1 cm et peut donc contenir 2 colonnes

- La hauteur A0 est de 118,9 cm




$$\beta = \frac{180 - \alpha}{2} = \frac{180 - 72}{2} = 54^\circ$$

Or $\sin(\beta) = \frac{h'}{r'}$

$h' = r' \times \sin(54^\circ)$

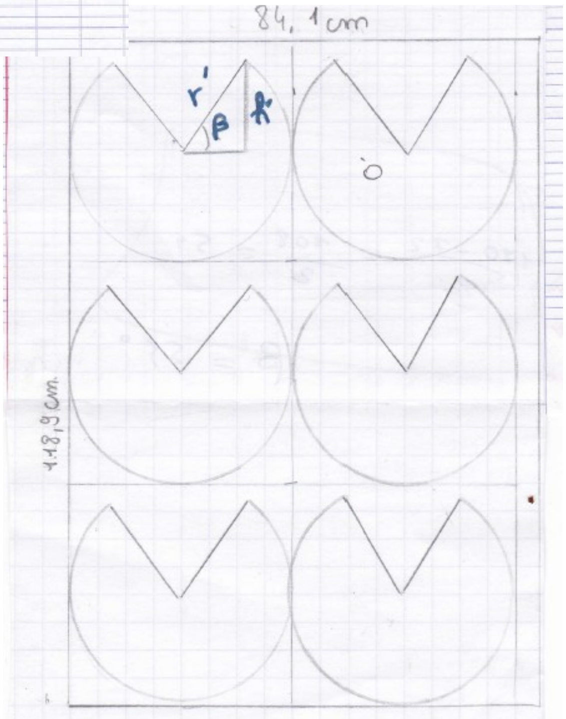
$\simeq 16,2$ cm

Donc $r' + h' \simeq 36,2$ cm

On peut donc faire rentrer en hauteur

$\frac{118,9}{36,2} \simeq 3,2$ -> on arrondit à l'unité : 3

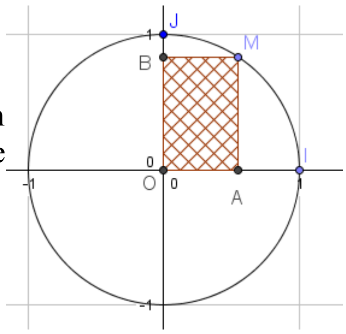
On peut donc faire rentrer 3 patrons sur la hauteur pour un total de 6 patrons (2 colonnes x 3 lignes de patrons)



# Variation de l’aire d’un rectangle dans un quart du cercle trigonométrique

Niveau : TS

Un point M se déplace dans le sens direct sur l'arc $\overset{\frown}{IJ}$ . Il se projette en A et B sur les axes. Étudier les variations de l’aire du rectangle OAMB.




Les élèves disent que l’aire du rectangle est nulle quand M est en I, puis elle augmente. Elle doit diminuer ensuite car elle est à nouveau nulle quand M est en J.
Ils conjecturent l’existence d’un maximum pour le carré.

Les élèves proposent trois variables :
- soit $\alpha=(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM})$ avec $0\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$ ,
- soit $OB=x$ avec $0\leq x\leq 1$,
- soit OA que l'on exclut puisque OA décroît lorsque M se déplace de I vers J.

**1- En prenant la mesure $\alpha$ de l'angle pour variable**

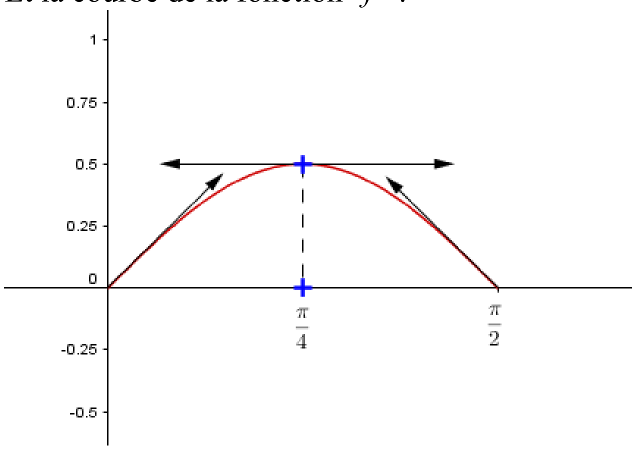
aire OAMB = $f(\alpha)=\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{2}\sin 2\alpha$ .

$f'(\alpha)=\cos 2\alpha$ avec $0\leq 2\alpha\leq\pi$

D’où le tableau de variation :

| $\alpha$ | $0$ | | $\frac{\pi}{4}$ | | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(\alpha)$ | 1 | + | 0 | – | -1 |
| $f(\alpha)$ | 0 | ↗ | $\frac{1}{2}$ | ↘ | 0 |

Et la courbe de la fonction $f$ :



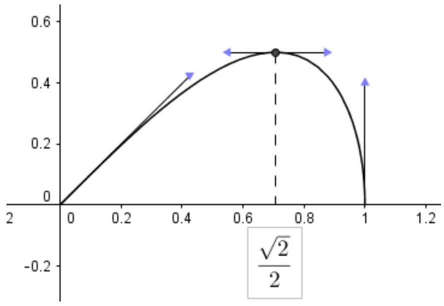
**2- En prenant l'ordonnée de M pour variable :**
g est la fonction qui à l'ordonnée $x$ de M associe l'aire du rectangle OAMB.

$g(x)=x\sqrt{1-x^2}$ et $g'(x)=\sqrt{1-x^2}-\dfrac{2x^2}{2\sqrt{1-x^2}}=\dfrac{1-x^2-x^2}{\sqrt{1-x^2}}=\dfrac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}=\dfrac{(1-x\sqrt{2})(1+x\sqrt{2})}{\sqrt{1-x^2}}$

Remarque : Quand le point M est en J, la dérivée n'est pas définie avec la fonction de variable $x$ alors qu'elle était définie avec la fonction de variable $\alpha$ .

| $x$ | $0$ | | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | $1$ | $+$ | $0$ | $-$ | $\|\|$ |
| $g(x)$ | $0$ | $\nearrow$ | $\frac{1}{2}$ | $\searrow$ | $0$ |

Et la courbe de la fonction $g$ :




**Bilan :** L'aire est maximale lorsque $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$ ou encore lorsque $OB=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ .

**Remarques :**

- ***Peut-on continuer à faire tourner le point M sur le cercle ?***

*Avec la variable $x$ c'est impossible car $x$ se met en décroître. C'est ce qui arrive dans la situation du carré articulé quand les élèves veulent prendre la hauteur comme variable pour exprimer l'aire du losange.*
*On a vu dans le cas du carré articulé qu'il est possible de continuer à étudier la variation de l'aire en prenant l'angle pour variable. Il en est de même ici. On peut continuer le tableau de variation par exemple avec $0\leqslant\alpha\leq\pi$ et prolonger la sinusoïde.*
*Les valeurs de la fonction deviennent alors négatives. C'est acceptable en considérant l'aire comme algébrique.*
*Si on veut conserver une aire positive, il faudrait étudier la fonction $f(\alpha)=\left|\dfrac{1}{2}\sin(2\alpha)\right|$ .*

- ***Influence de l'énoncé du problème sur le choix de la variable***

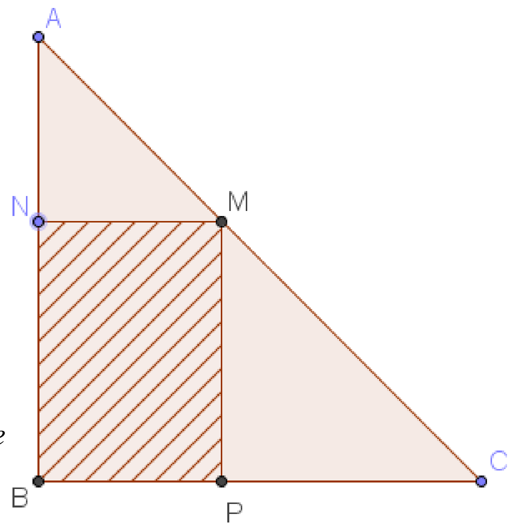
*Le fait de partir du cercle trigonométrique, et de surcroît de donner un sens au déplacement du point M sur le cercle, influence le choix de la variable :*
*– cela favorise le choix d'une mesure d'angle orienté entre 0 et $\dfrac{\pi}{2}$ ;*

*– si l'élève préfère prendre une mesure de longueur, le choix $\mathrm{OB}=x$ est naturel car $x$ varie de 0 à 1 lors du déplacement de M.*

*Le professeur peut poser le problème ainsi : Un point M se déplace sur un quart de cercle de rayon 1. Étudier comment varie l'aire du rectangle AMBO au cours de ce déplacement .*

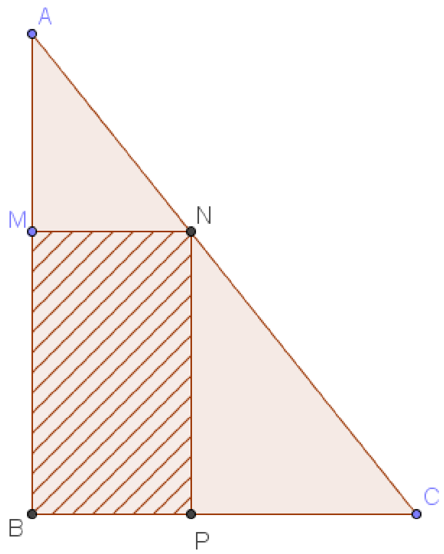
*Il est possible alors que la variable attachée à l'angle arrive moins souvent. Certains élèves, souhaitant appeler $x$ l'abscisse de M, imaginent le point M descendant sur l'arc de J à I ce qui permet d'avoir l'abscisse $x$ qui varie de 0 à 1.*

*Dans une brochure précédente, nous proposons une autre situation pour étudier la variation de l'aire d'un rectangle, intitulée : « Le rectangle qui bouge dans le triangle »[5] . Il s'agit d'un rectangle à l'intérieur d'un triangle rectangle et non à l'intérieur d'un quart de cercle.*




*Si le point M se déplace sur l'hypoténuse [AC] d'un triangle rectangle isocèle comme dans la figure ci-contre (AB = BC = 1), une certaine analogie apparaît, même si la mesure d'un angle n'est plus une variable pertinente.*

*La variation de l'aire du rectangle est analogue, avec une aire maximale pour le carré, que ce soit le point M qui bouge ou que ce soit un des points N ou P, entraînant M.*
*En imaginant le point M qui descend de A vers C, ou le point P allant de B vers C, la variable BP = $x$ est intéressante. En orientant la droite (BC) dans le sens de B vers C, l'abscisse $x$ de M, varie de - ∞ à + ∞ quand M décrit toute la droite (AC).*
*Conserver une aire positive introduit une fonction qui s'exprime avec une valeur absolue*
$f(x)=|x(1-x)|$ .




*Dans la brochure précédemment citée, nous avons posé le problème avec un point M qui se déplace sur le côté [AB] d'un triangle rectangle tel que AB = 10 et BC = 8 comme dans la figure ci-contre, de sorte que les élèves proposent comme variable soit AM= $x$ soit BM = $x$. Il s'agissait, en 3ème ou en seconde, de faire utiliser le théorème de Thalès pour calculer les dimensions du rectangle en fonction de $x$.*

*En résumé : Que le point M varie sur un cercle ou sur le côté d'un triangle, le professeur doit déterminer l'énoncé du problème selon ses choix didactiques, car cet énoncé influencera les élèves dans le choix de la variable.*

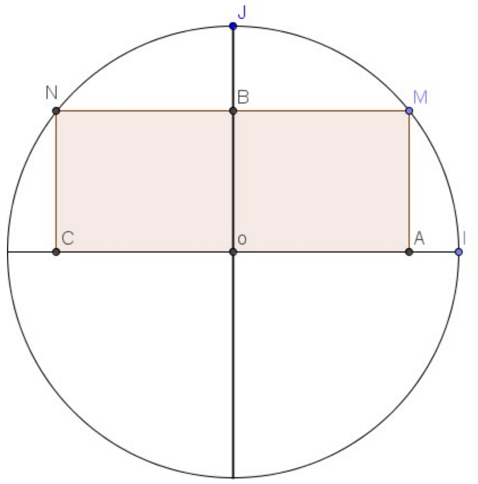
5 Les fonctions du collège jusqu'en seconde, Groupe didactique de l'IREM d'Aquitaine, 2012, p. 66 à 87

## Variation de l’aire d’un rectangle dans un demi-cercle

*Cet exercice est proposé en terminale.*

1. Le point M se déplace sur un quart de cercle de rayon 1. Étudier la variation de l’aire du rectangle AMNC.

2. Étudier la variation de l’aire du rectangle AMNC quand M se déplace sur le demi-cercle entier.




Pour la première question, les élèves comprennent que l’aire varie de 0 à 0 en passant par un maximum. Il est possible qu’ils conjecturent que ce maximum se produise quand AMNC est un carré, mais cette fois la conjecture est fausse.

Pour la deuxième question, les élèves disent qu’un maximum est atteint deux fois, et conjecturent que cela se produit soit quand AMNC est un carré, soit quand le rectangle AMBO est un carré.

Pour étudier la variation de l'aire quand M décrit le demi-cercle, les élèves peuvent également proposer deux variables :

- soit la mesure de ( $\overrightarrow{OA}$ , $\overrightarrow{OM}$ ) = $\alpha$ avec $0 \leq \alpha \leq \pi$

- soit $\overline{OA} = x$ en orientant la droite et avec $-1 \leq x \leq 1$

**1- En prenant la mesure α de l’angle pour variable**

aire AMNC= $f(\alpha) = \begin{cases} 2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha \text{ pour } 0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2} \\ -2\sin\alpha\cos\alpha \text{ pour } \frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \pi \end{cases}$

D’où le tableau de variation en acceptant une aire algébrique ou sinon en prenant la fonction

$f(\alpha) = |\sin 2\alpha|$ ce qui donne les deux maxima pour $x = \frac{\pi}{4}$ et $x = \frac{3\pi}{4}$ , soit une aire maximale de $\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$ .

| $\alpha$ | $0$ | | $\frac{\pi}{4}$ | | $\frac{\pi}{2}$ | | $\frac{3\pi}{4}$ | | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(\alpha)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(\alpha)$ | $0$ | $\nearrow$ | $1$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $1$ | $\searrow$ | $0$ |

C’est donc la seconde conjecture qui est exacte. D’où les questions suivantes :

a. À quel moment le rectangle AMNC est-il un carré ?

En limitant le déplacement de M au quart de cercle, l’autre moment se déduira par symétrie.

b. Comparer l’aire de ce carré avec l’aire maximale trouvée.
Il s’agit de résoudre l’équation $\sin\alpha = 2\cos\alpha$ donc $\tan\alpha = 2$.
On obtient une valeur approchée de l’angle.
AMNC est un carré donc AM = 2OA, on a $5OA^2 = 1$, d’où OA = $\frac{\sqrt{5}}{5}$.
L’aire de ce carré est $2\times\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 = \frac{4}{5}$. Elle est effectivement inférieure au maximum trouvé.

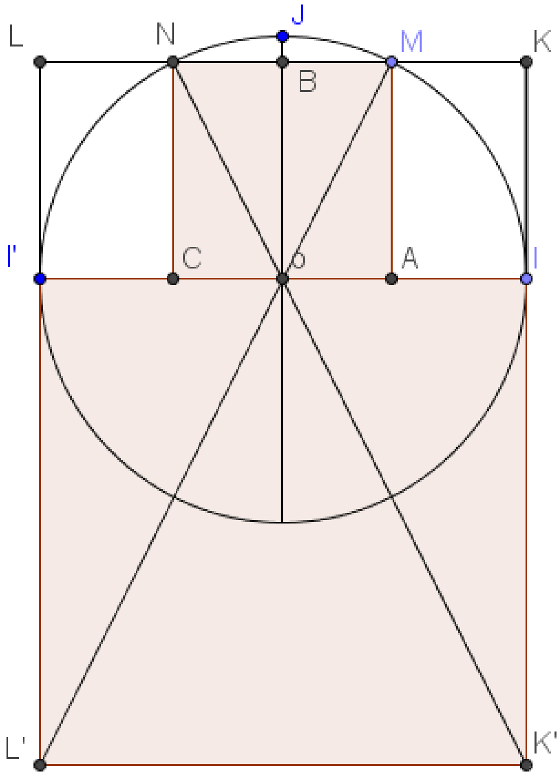
**2- En prenant l’ordonnée de M pour variable**

Il faudrait étudier la fonction $f(x) = |2x\sqrt{1-x^2}|$ qui atteint deux fois son maximum pour $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $x = \frac{-\sqrt{2}}{2}$.
Pour trouver à quel moment le rectangle AMNC est un carré en limitant le déplacement de M au quart de cercle, la variable $x$ devient maintenant une inconnue.
La résolution de l'équation $2x = \sqrt{1-x^2}$ donne $4x^2 = 1 - x^2 \Leftrightarrow 5x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

**3- Passage au cadre géométrique pour trouver le carré et quatre rectangles d’or**

En construisant n’importe quel carré ayant pour axe de symétrie (OJ) et dont deux sommets consécutifs sont sur la droite (I I’), par exemple le carré II’L’K’, une homothétie de centre O permet de construire le carré cherché AMNC.
Les points M et N s’obtiennent à l’intersection du cercle et des droites (OL’) et (OK’).

On trouve $OK' = \sqrt{5}$, comme OM=1, cette homothétie donne le côté du carré $AM = \frac{2}{\sqrt{5}}$.



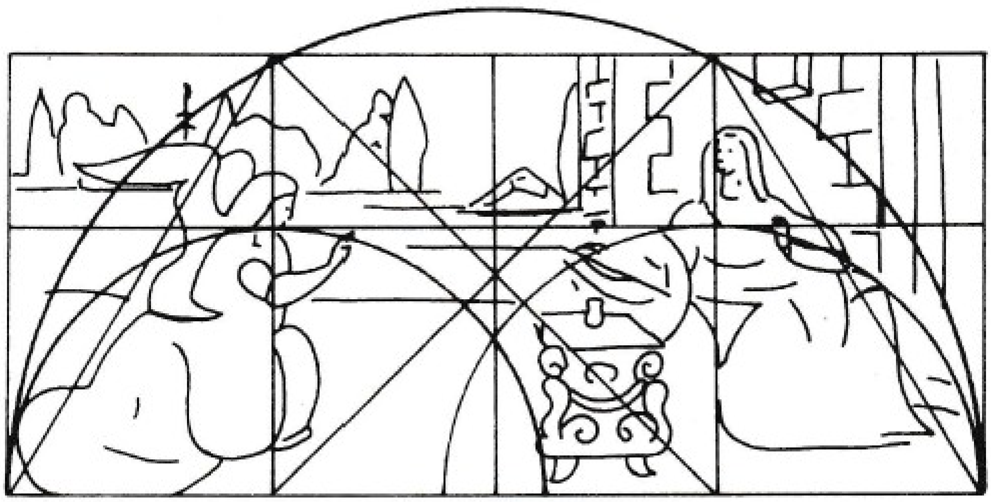


donc $CN = \frac{2}{\sqrt{5}}$ et $CI = 1 + \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}}$ ,

d'où le rapport $\frac{CI}{CN} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Ce calcul permet de vérifier que les rectangles NKIC et MAI'L sont des rectangles d'or qui se décomposent en un carré MACN et deux autres rectangles d'or MKIA et NCI'L

Cette figure géométrique permet de décrypter plusieurs tableaux de peintres[6] comme, par exemple, l'Annonciation de Léonard de Vinci .



Léonard de Vinci (1452-1519), *Annonciation.*

6 Mathématique du collège au lycée, Annie Berté, Nathan Pédagogie, 1998, p. 132-137

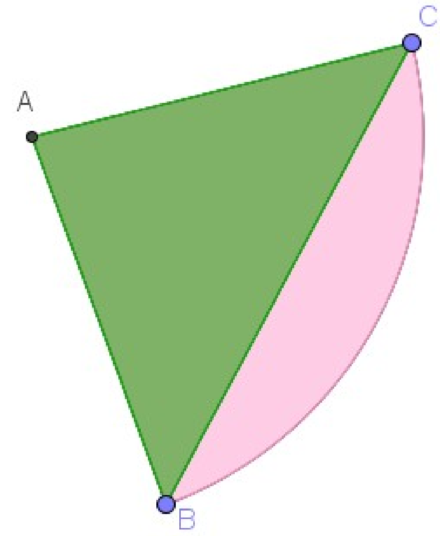
## Secteur angulaire

Niveau : TS

On considère la figure ci-contre, sur laquelle l'angle du secteur angulaire varie Son centre est le sommet du triangle isocèle ABC de côté 1.

Les aires des deux parties peuvent-elles être égales?

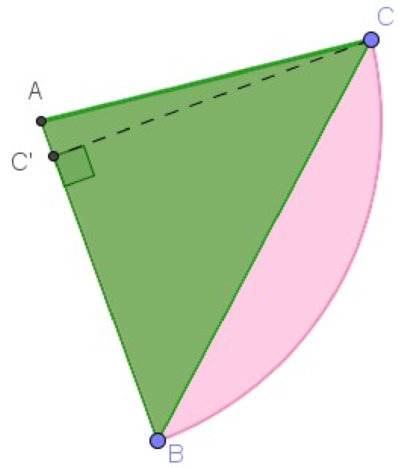
D'après Odyssée TS




<u>choix de la variable:</u>

On note $x$ la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ , $x$ est compris entre 0 et $\pi$ radians (quelques rares élèves prennent la distance CB comme variable mais ont du mal à aboutir).

Le rayon du cercle est 1 donc l'aire du secteur angulaire est $\frac{x}{2}$ (formule revue précédemment).




**1ère méthode**

On utilise la hauteur CC' issue de C par exemple pour le triangle ABC.

L'aire du triangle ABC est $\frac{AB\times CC'}{2}=\frac{1\times\sin x}{2}=\frac{\sin x}{2}$.

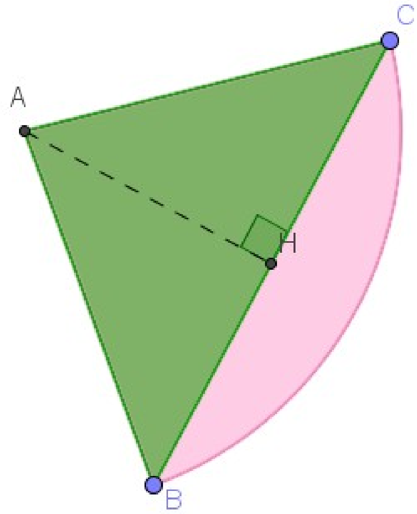
**2$^{ème}$ méthode**

On considère H le milieu de [AB] et les deux triangles rectangles ABH et ACH.

La droite (AH) est la bissectrice du triangle isocèle ABC donc la mesure de l'angle $\widehat{BAH}$ est $\frac{x}{2}$.

L'aire du triangle ABC est le double de l'aire du triangle ABH c'est-à-dire

$$2\times\frac{AH\times HB}{2}=\frac{2\cos\frac{x}{2}\times\sin\frac{x}{2}}{2}=\frac{\sin(2\times\frac{x}{2})}{2}=\frac{\sin x}{2}.$$




**3$^{ème}$ méthode possible (**non utilisée par les élèves)

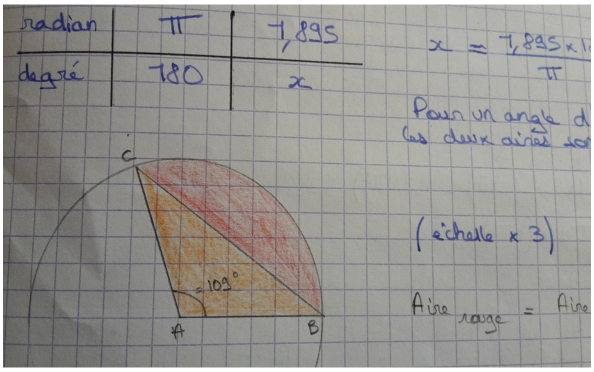
L'aire du triangle ABC est, d'après la "loi des sinus ", $\frac{1}{2}\times AB\times AC\times\sin x=\frac{\sin x}{2}$.

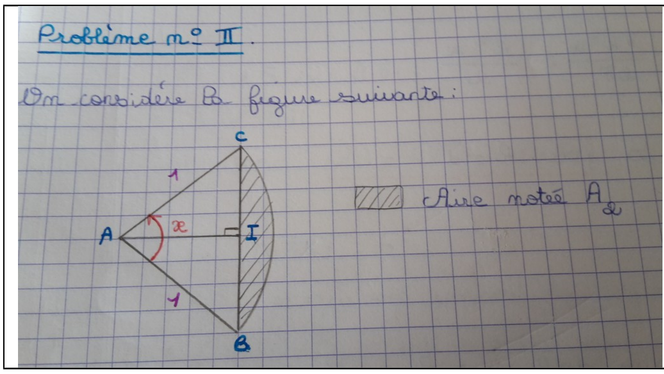
L'aire colorée en rose est égale à la différence entre celle du secteur angulaire et celle du triangle c'est-à-dire $\frac{x}{2}-\frac{\sin x}{2}$.

Pour que les deux aires soient égales, il reste donc à résoudre $\frac{x}{2}-\frac{\sin x}{2}=\frac{\sin x}{2}\Leftrightarrow x-2\sin x=0$.

Pour cela on étudie la fonction *f* définie par $f(x)=x-2\sin x$ et on utilise le théorème des valeurs intermédiaires .

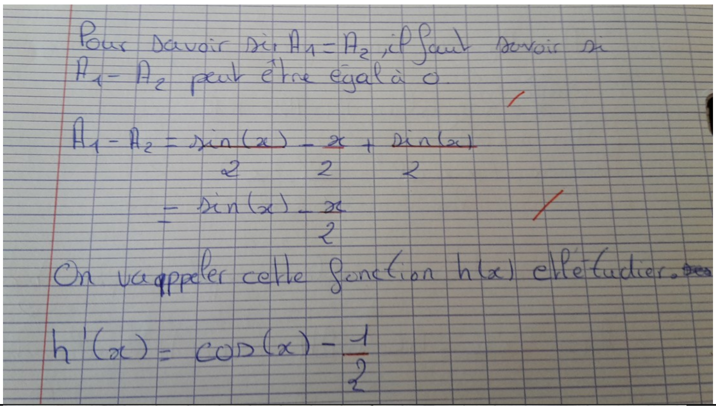
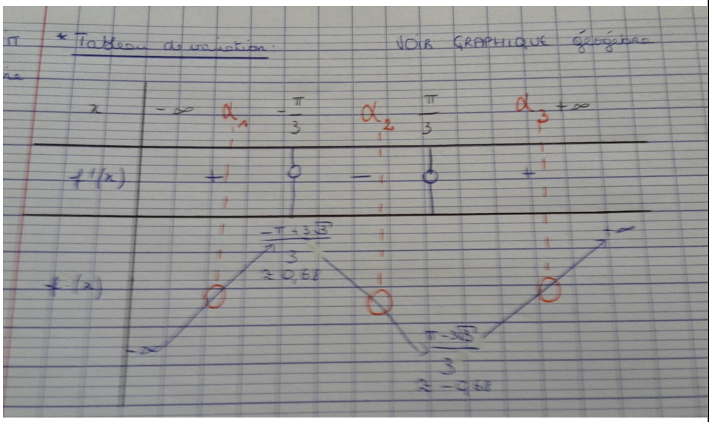
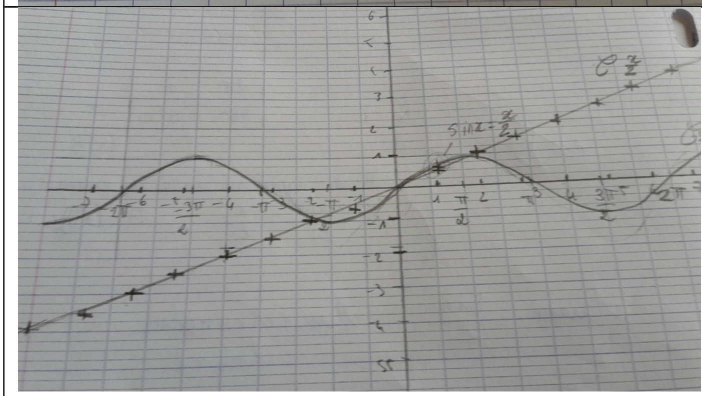
La solution est ensuite approchée par balayage et $x\approx 1{,}895$ rad (environ 109 °).

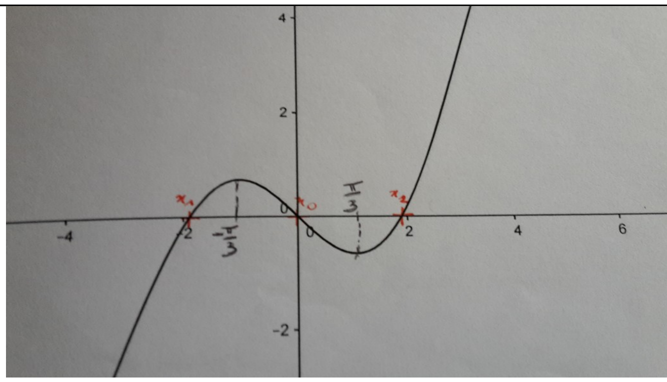


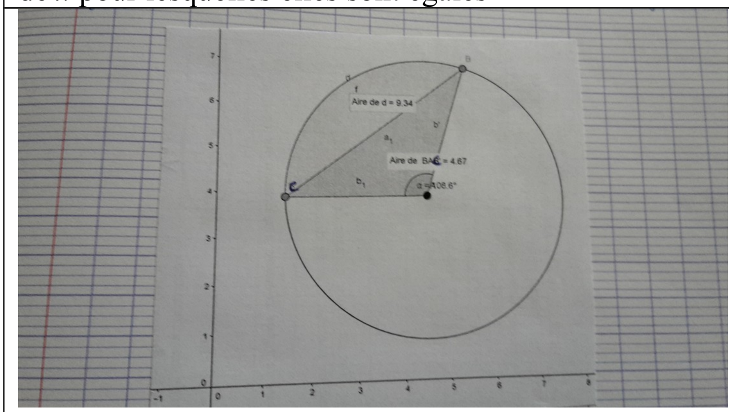

<table>
<tr>
<td>


</td>
<td>Ici et comme dans une grande partie des cas c'est la mesure de l'angle qui est choisie comme variable mais une élève a choisi la distance CB comme variable et n'a pas abouti.</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>Certains arrivent à expliciter les fonctions, à modéliser le problème


</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>

Avec les deux aires représentées et les valeurs approchées de *x* pour lesquelles elles sont égales</td>
<td>

Ou la différence entre les deux aires pour déterminer la ou les valeurs pour lesquelles elle s'annule.</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>Approche de la solution avec GEOGEBRA</td>
</tr>
</table>

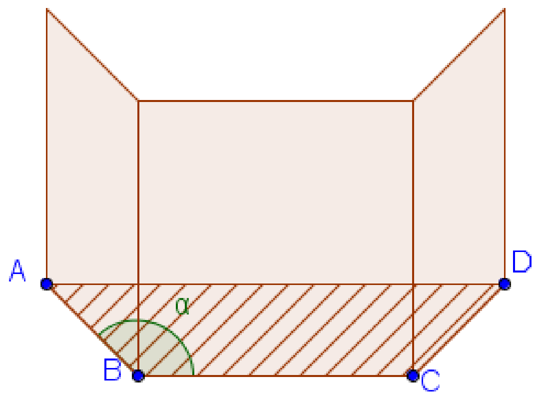
Ce problème a permis aux élèves d'étudier une fonction trigonométrique dans une situation concrète.

# Le paravent chinois

( d'après banque IGEN)

Niveau : TS

Un paravent chinois se compose de 3 panneaux rectangulaires de même dimension.
Ce paravent découpe sur le sol un trapèze isocèle *ABCD*, de bases [*AD*] et [*BC*], appelé *polygone de sustentation*. On a AB=BC= CD = 1 mètre




Pour quelle valeur de l'angle $\widehat{ABC}$ le polygone a-t-il une aire maximale ?

On note $\alpha=\widehat{ABC}$, on a $0\leqslant\alpha\leqslant\pi$ et l'aire du trapèze ABCD est $f(\alpha)=(1-\cos(\alpha))\sin(\alpha)$
$f$ est dérivable sur $[0;\pi]$ et
$f'(\alpha)=\sin(\alpha)\times\sin(\alpha)+\cos(\alpha)(1-\cos(\alpha))=\sin^2(\alpha)+\cos(\alpha)-\cos^2(\alpha)=1-2\cos^2(\alpha)+\cos(\alpha)$

soit $f'(\alpha)=(1-\cos(\alpha))(2\cos(\alpha)+1)$

or $1-\cos(\alpha)\geqslant 0$ pour tout $\alpha$ et $2\cos(\alpha)+1\geqslant 0$ pour $\alpha\in\left[0;\frac{2\pi}{3}\right]$, d'où le tableau de variations de la fonction :

| $x$ | $0$ | | $\frac{2\pi}{3}$ | | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $0$ | $\nearrow$ | $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ | $\searrow$ | $0$ |

L'aire est donc maximale pour $\alpha=\frac{2\pi}{3}$.

# La transformation de l'essai au rugby

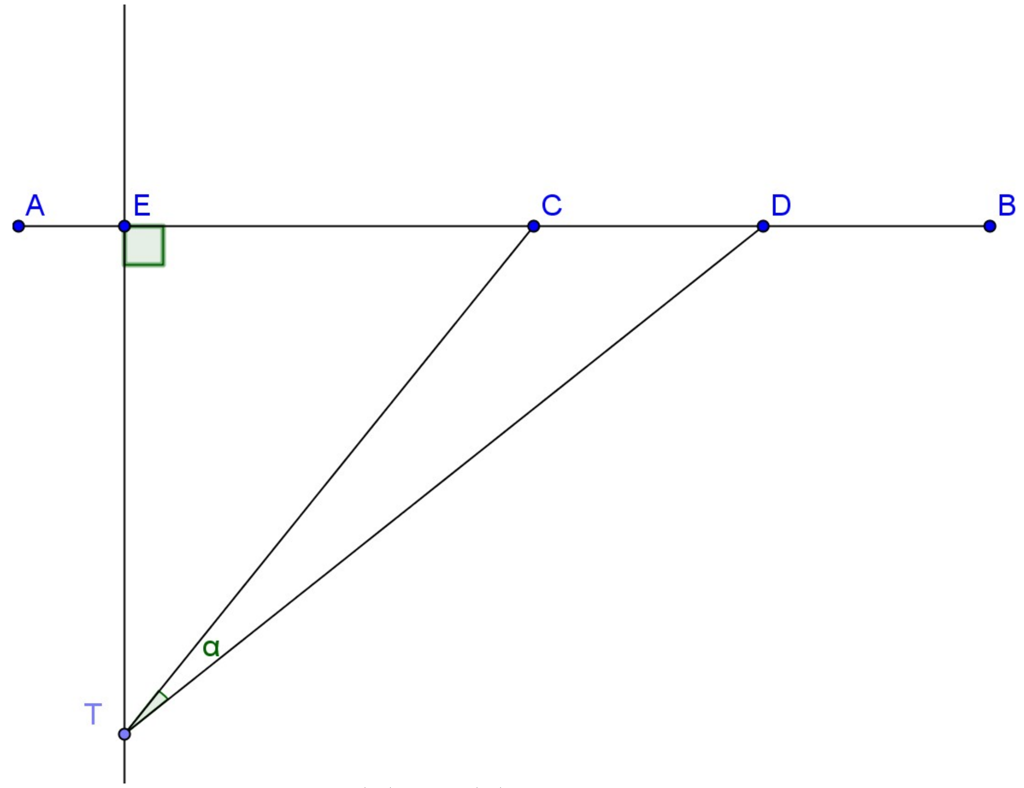
(D'après Olympiade de Mathématiques- Académie de Paris -2003)

Niveau : TS

Prérequis : étude de la fonction tangente sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$ pour pouvoir utiliser le fait que $\tan\alpha$ est maximal lorsque $\alpha$ est maximal.

Au rugby, où le tireur doit-il poser son ballon pour « s' ouvrir » au maximum l'angle de but ?

Sur le schéma ci-dessous , le segment [AB] représente la ligne d'essai, les poteaux de buts sont représentés par les points C et D. On sait que CD=5,6 m . Un essai a été marqué en E à 10 m du poteau C . Transformer cet essai consiste à tirer d'un point de son choix situé sur la perpendiculaire en E à (AB) et à faire passer le ballon entre les poteaux . On admettra que le point T, point idéal de tir, est le point de la perpendiculaire pour lequel l'angle $\widehat{CTD}$ est maximum .

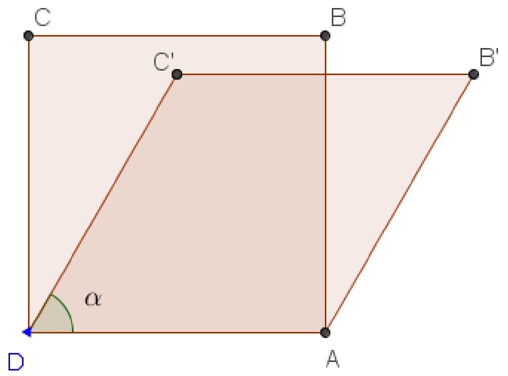



1. Montrer que $\tan(a-b)=\dfrac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a)\tan(b)}$ où $a$ et $b$ sont deux réels de $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$

2. On pose $x=\mathrm{TE}$ , déterminer l'expression de $\tan\left(\widehat{CTD}\right)$ ) en fonction de $x$ et conclure.

# Des histoires de carrés

## 1. Carré articulé :

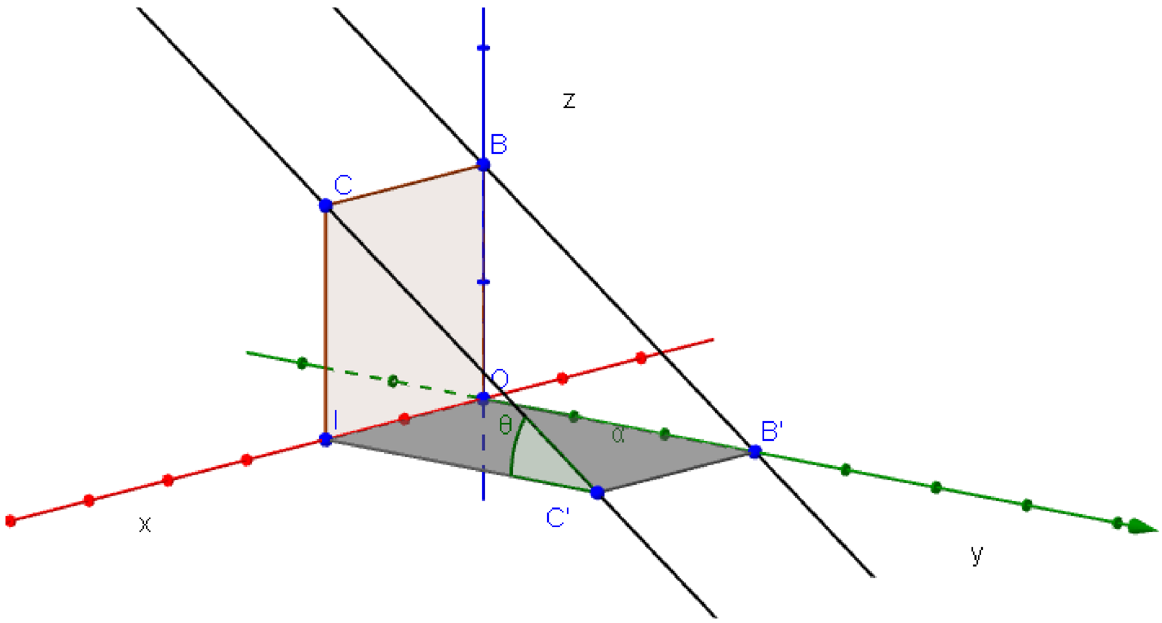



On considère le « carré articulé » ABCD, trouver les coordonnées de C' et B' en fonction de $\alpha$ dans le repère (D, $\overrightarrow{DA}$ , $\overrightarrow{DC}$ ). $\alpha$ varie de 0 à $\pi$ .

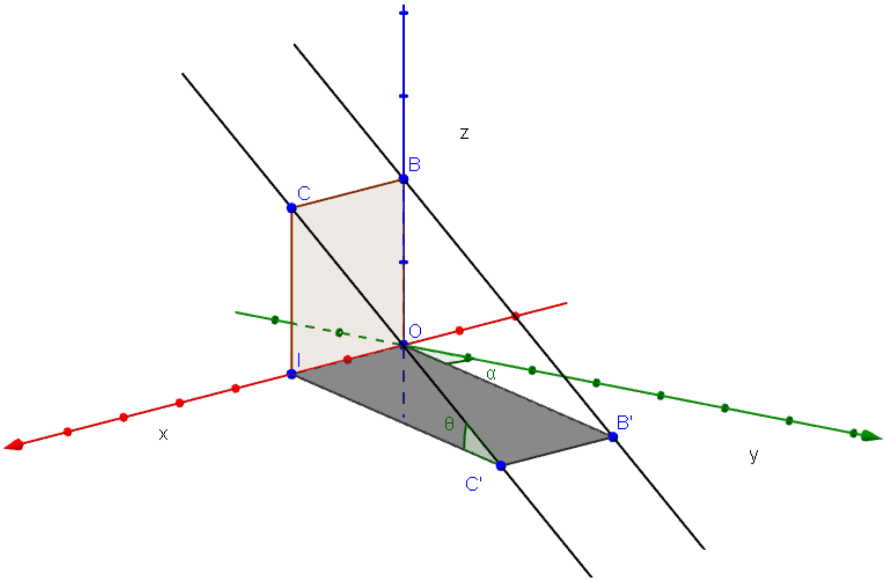
On a $C'(\cos\alpha;\sin\alpha)$ et $B'(1+\cos\alpha;\sin\alpha)$ .
Pour $\alpha=0$ ou $\pi$ , le losange est un segment et pour $\alpha=\frac{\pi}{2}$ , le losange est un carré.

## 2. Carré au soleil :

Les




rayons du soleil font un angle θ avec le plan $(xOy)$ . Le plan déterminé par le rayon (BB') et l'axe (OB) est le plan $(yOz)$ .




Quand le carré est placé au soleil, on ne peut pas agir sur l'angle θ qui dépend de la hauteur du soleil dans le ciel, mais on peut agir sur l'angle α en faisant pivoter le carré de carton autour de la verticale (OB). Les axes $(\mathrm{O}\,x)$ et $(\mathrm{O}\,y)$ tournent en restant dans le plan horizontal alors que $(\mathrm{O}\,z)$ ne bouge pas, de sorte que le plan déterminé par un rayon (BB') et l'axe $(\mathrm{O}\,z)$ va faire un angle α avec le plan $(y\mathrm{O}z)$. Dans le premier cas de figure, $\alpha$ vaut 0.

Question : Le carré IOBC a pour côté 1. Déterminer les coordonnées de C' et B' en fonction de θ et de α.

$\frac{-\pi}{2}\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$ et $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$, on a $\mathrm{OB}'=\frac{1}{\tan\theta}$ et le point B' se projette sur les axes $(\mathrm{O}\,x)$ et $(\mathrm{O}\,y)$ d'où les coordonnées suivantes :

$\mathrm{B}'\left(\frac{\sin\alpha}{\tan\theta};\frac{\cos\alpha}{\tan\theta};0\right)$.

On obtient les cas particuliers suivants en remplaçant les lignes trigonométriques par leurs valeurs selon les mesures des angles :

- pour $\theta=\frac{\pi}{2}$, il est midi, le soleil est à la verticale, l'ombre est le segment [OI].
- Pour $\theta=0$, l'ombre est infinie, le soleil est couché.
- Pour $\theta=\frac{\pi}{4}$, l'ombre est le losange vu avec le carré articulé.

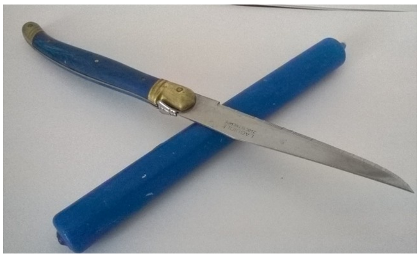
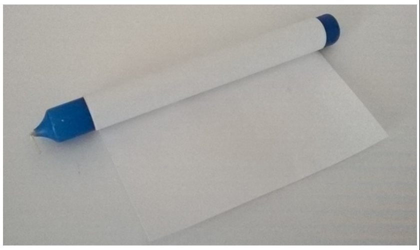
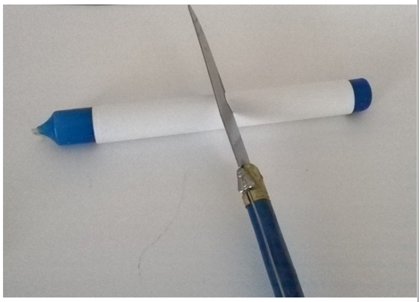
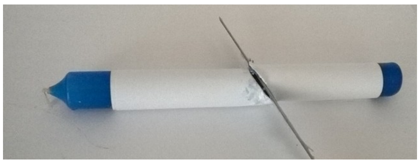
On retrouve les cas particuliers selon la valeur de α, mais dans le carré articulé, α peut ne pas être orienté( il varie de 0 à $\pi$ ) alors que pour l'ombre il s'agit de son complémentaire qui varie de $\frac{-\pi}{2}$ à $\frac{\pi}{2}$.

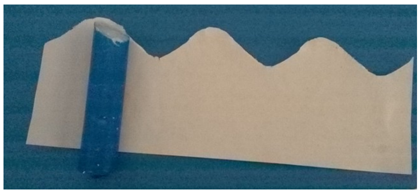
- Pour $\alpha=0$ , quelque soit θ, l'ombre est un rectangle.
- Pour $\alpha=\frac{-\pi}{2}$ ou $\alpha=\frac{\pi}{2}$, le parallélogramme est un segment plus ou moins long.

## Découpage et sinusoïde

Niveau : TS

Matériels nécessaires :
- une bougie ou un rouleau de papier carton épais
- une feuille de papier
- un couteau

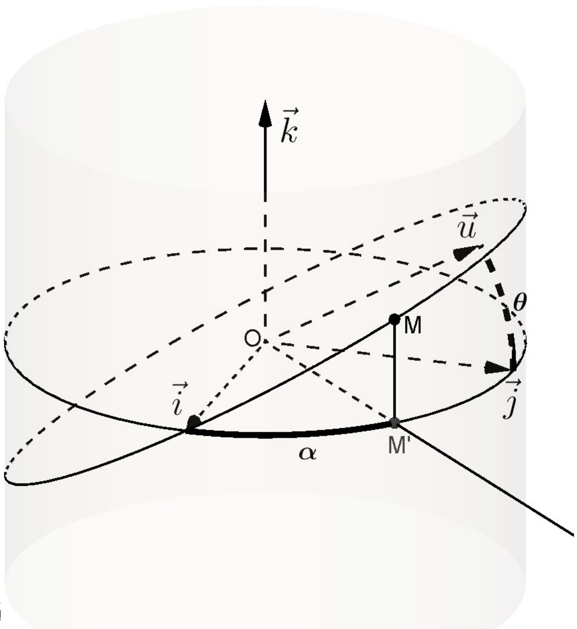







« Il est facile de faire cette expérience : j'entoure une bougie d'une feuille de papier et je coupe en biseau avec un couteau bien affûté. La section de la bougie est une ellipse ; si je déroule la feuille – que c'est bizarre ! – apparaît la sinusoïde. »

Emma CASTELNUOVO et Mario BARRA
Mathématiques dans la réalité – édition CEDIC- 1980
Paru sous le titre : Matematica nella realità, éd. Boringhieri- Turin-1976

Une démonstration :
On coupe un cylindre d'axe $(O;\vec{k})$ et de rayon 1 par un plan *P* qui fait un angle θ avec le plan *x*O*y*.
Ce plan *P* est donc dirigé par $\vec{i}$ et le vecteur $\vec{u}$ tel que $\vec{u}=\cos\theta\,\vec{j}+\sin\theta\,\vec{k}$ .




Équation paramétrique du plan *P* :
Soit M un point de coordonnées (*x* ; *y* ; *z*) dans le repère (O ; $\vec{i}$ ; $\vec{j}$ ; $\vec{k}$ ) Ainsi, $\overrightarrow{OM}=x\,\vec{i}+y\,\vec{j}+z\,\vec{k}$ .
M ∈ *P* ⇔ Il existe deux réels X et Y tels que $\overrightarrow{OM}=X\vec{i}+Y\vec{u}$
M ∈ *P* ⇔ Il existe deux réels X et Y tels que $\overrightarrow{OM}=X\vec{i}+Y(\cos\theta\,\vec{j}+\sin\theta\,\vec{k})$

On obtient la représentation paramétrique du plan *P* suivante (de paramètres X et Y) :

$$\begin{cases} x = \mathrm{X} \\ y = \mathrm{Y}\cos\theta \\ z = \mathrm{Y}\sin\theta \end{cases}$$

L'intersection de ce plan P avec le cylindre d'équation $x^2 + y^2 = 1$ est l'ellipse d'équation $\mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2\cos^2\theta = 1$ dans le repère (O, $\vec{i}$ , $\vec{u}$ ) .
Si M' est un point du cercle unité du plan $(\mathrm{O}; \vec{i}, \vec{j})$ alors il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que M' a pour coordonnées $(\cos\alpha ; \sin\alpha ; 0)$ dans le repère (O; $\vec{i}$ ; $\vec{j}$ ; $\vec{k}$ ) .
M' est la projection sur $(\mathrm{O}; \vec{i}, \vec{j})$ d'un point M de l'ellipse dont les coordonnées ($x$ ; $y$ ; $z$) dans le repère $(\mathrm{O}; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ vérifient

$$\begin{cases} x = \mathrm{X} \\ y = \mathrm{Y}\cos\theta \\ z = \overline{M'M} \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} x = \mathrm{X} = \cos\alpha \\ y = \mathrm{Y}\cos\theta = \sin\alpha \\ z = \overline{M'M} = Y\sin\theta \end{cases}$$

Donc $\mathrm{Y} = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\theta}$ et $z = \overline{\mathrm{M'M}} = \sin\alpha \times \tan\theta$
Ceci montre que la courbe obtenue en déroulant le papier est la sinusoïde représentative de la fonction $\alpha \longmapsto \tan\theta \times \sin\alpha$, où le paramètre $\tan\theta$ dépend de la façon dont on a incliné le couteau.

# Partie IV

# Les compléments pour le professeur

## Des compléments mathématiques sur les différentes situations proposées.

# Le cosinus et le sinus, coordonnées d'un point du cercle

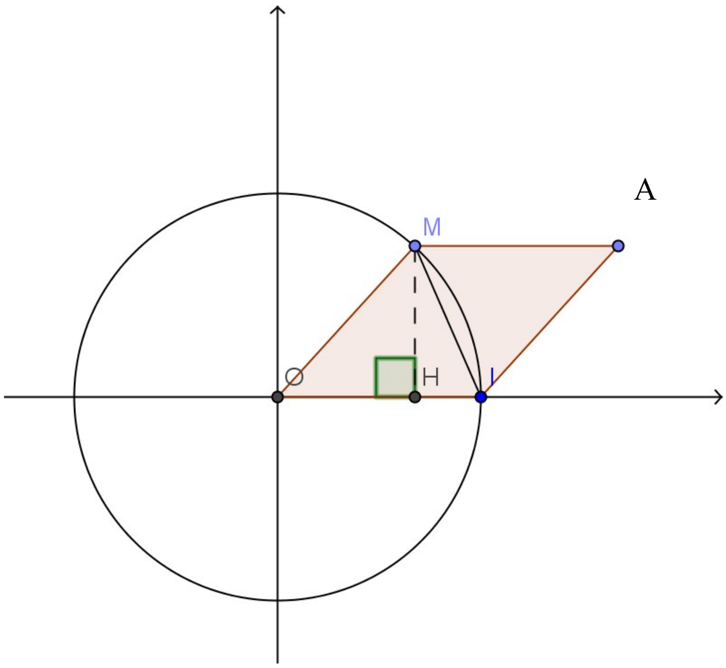
## 1° Les coordonnées d'un point du cercle ou d'un point de l'hyperbole

Un point M se déplace sur le cercle de rayon R=1 (ellipse particulière avec $a = b = 1$ dans l'équation $\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1$) et un point M se déplace sur l'hyperbole équilatère ( hyperbole particulière avec $a = b = 1$ dans l'équation $\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}=1$), les deux sont bien sûr des coniques.

### a- Cas du cercle :

L'équation du cercle de rayon 1 est
$X^2+Y^2 = 1$.
L'équation du demi cercle supérieur est
$Y=\sqrt{1-X^2}$ et celle du demi-cercle inférieur est
$Y=-\sqrt{1-X^2}$.

M ($X$, $Y$) est sur le cercle, $x$ est <u>la mesure en radians de l'angle</u> orienté ( $\overrightarrow{OI}$ , $\overrightarrow{OM}$ )
avec $X=\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ et
$Y=\sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$ , on a bien
$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.



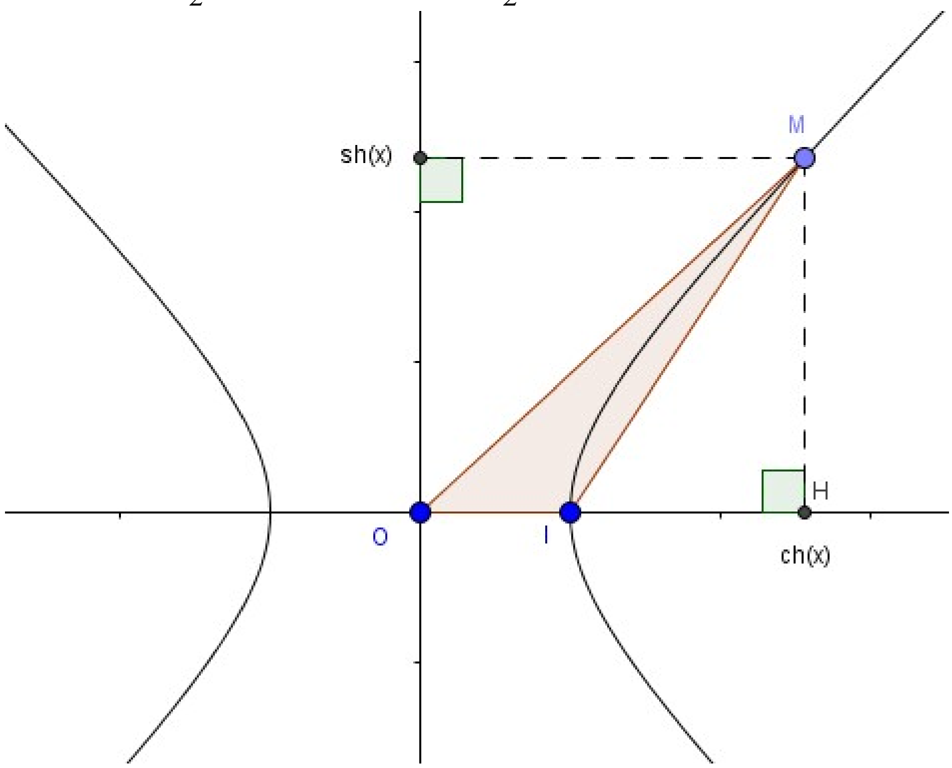

- la mesure de l'aire du parallélogramme OIAM est $\sin x$ = HM et la mesure de l'aire du triangle OMI est la moitié soit $\frac{\sin x}{2}$.
- la mesure de l'arc orienté $\overset{\frown}{IM}$ est $x$ et la mesure de <u>l'aire du secteur circulaire découpé sur le cercle</u> par cet angle est $\frac{x}{2}$ $(0 \leqslant x \leqslant \pi)$.

Dans le cas du cercle comme dans celui de l'hyperbole équilatère présenté ci-dessous, pour les aires, on peut convenir qu'elles seront positives si on se trouve au dessus de l'axe des abscisses et négatives (opposées) si on se trouve en dessous de l'axe.

### b - Cas de l'hyperbole équilatère :

L'équation de l'hyperbole est $X^2-Y^2=1$ .
On se limite à X > 0 donc à la seule branche à droite.
Équation de la demi branche supérieure : $Y=\sqrt{X^2-1}$ avec $X > 1$
et celle de la demi branche inférieure : $Y=-\sqrt{X^2-1}$ avec $X > 1$.

Si on pose $X = \text{ch}\,(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ et $Y = \text{sh}\,(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, on a bien $\text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x) = 1$ .




Le point M ($X$,$Y$) est sur l'hyperbole et OI = 1 .
La mesure de l'aire du triangle OMI est $\dfrac{\text{MH}}{2} = \dfrac{\text{sh}(x)}{2}$ .
La mesure de l'aire de la portion de plan limitée par [OI], [OM] et l'hyperbole (un secteur hyperbolique) est $\dfrac{x}{2}$ qui va de 0 à + ∞ pour la partie supérieure (voir démonstration page suivante).
Ici $x$ n'est pas un angle ni la mesure d'un angle. On parlera des fonctions sin, cos, sh, et ch d'un réel et pas d'un angle. Cette variable $x$ peut donc s'interpréter dans les deux cas comme le double de l'aire d'un secteur .

**2° Limite quand la variable *x* tend vers 0**

L'aire du secteur circulaire ou hyperbolique est $\dfrac{x}{2}$ et elle tend vers 0 quand $x$ tend vers 0.

L'aire du triangle OMI qui est soit $\dfrac{1}{2}$ sin $x$ dans le cas du cercle, soit $\dfrac{1}{2}$ sh ($x$) dans le cas de l'hyperbole, tend vers l'aire du secteur correspondant.

La limite quand $x$ rend vers 0 de $\dfrac{\frac{\sin x}{2}}{\frac{x}{2}}$ est celle de $\dfrac{\sin x}{x}$ soit 1.

On peut remarquer le lien intéressant entre l'aire du carré articulé ( voir situation 3), l'aire de sa moitié, le triangle OIM et l'aire du secteur. Le carré articulé a bien sa place dans une leçon de trigonométrie.

De même la limite quand $x$ rend vers 0 de $\dfrac{\frac{\operatorname{sh}(x)}{2}}{\frac{x}{2}}$ est celle de $\dfrac{\operatorname{sh}(x)}{x}$ soit 1.

**3° Pour les curieux : démonstration de l'aire du secteur d'hyperbole**

On va avoir besoin des formules suivantes :

sh $(2x)$ = 2ch $(x)$ sh$(x)$ qui représente deux fois l'aire du triangle OMH.

$2\operatorname{sh}^2(x) = \operatorname{ch}(2x)-1$ pour calculer par une intégrale l'aire sous l'hyperbole limitée par (MH) et l'axe des abscisses. En retranchant cette aire à celle du triangle OMH, on a l'aire cherchée.

Les deux démonstrations des formules sont à la portée d'un élève de terminale :

$$2\operatorname{ch}(x)\operatorname{sh}(x)=2\times\frac{e^x+e^{-x}}{2}\times\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{2}=\operatorname{sh}(2x)$$

$$2\operatorname{sh}^2(x)=2\times\frac{(e^x-e^{-x})^2}{2}=\frac{e^{2x}+e^{-2x}-2}{2}=\operatorname{ch}(2x)-1$$

On doit calculer l'aire par $\displaystyle\int_1^{X_0}\sqrt{X^2-1}\;dX$

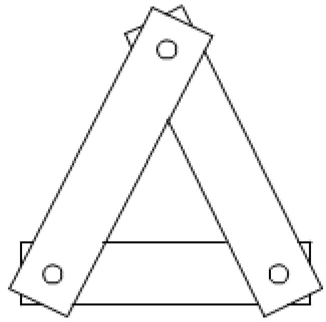
Un changement de variable est nécessaire.
On pose $X=\operatorname{ch}(x)$ donc $d\,X=\operatorname{sh}(x)dx$ On peut prendre $X_0=\operatorname{ch}(x_0)$
et on a $\sqrt{X^2-1}=Y=\operatorname{sh}(x)$
Si $1\le X\le X_0$ alors $1\le \operatorname{ch}(x)\le \operatorname{ch}(x_0)$ donc $0\le x\le x_0$

$$\int_1^{X_0}\sqrt{X^2-1}\;dX=\int_0^{x_0} sh^2(x)dx=\int_0^{x_0}\frac{ch(2x)-1}{2}dx=\left[\frac{sh(2x)}{4}-\frac{x}{2}\right]_0^{x_0}=\frac{sh(2x_0)}{4}-\frac{x_0}{2}=$$
$$\frac{ch(x_0)sh(x_0)}{2}-\frac{x_0}{2}$$

Donc l'aire du secteur est : $\dfrac{\operatorname{ch}(x_0)\operatorname{sh}(x_0)}{2}-\left(\dfrac{\operatorname{ch}(x_0)\operatorname{sh}(x_0)}{2}-\dfrac{x_0}{2}\right)=\dfrac{x_0}{2}$ .

## Compléments au carré articulé

### 1- Utilisation du triangle en architecture



Le losange, pas plus que n'importe quel quadrilatère, n'est déterminé par la longueur de ses côtés. Un quadrilatère ainsi constitué de tiges articulées de longueurs fixes se déformerait de même. Il ne serait déterminé que si on fixait la longueur d'une diagonale ou la mesure d'un angle.
Ce n'est pas le cas pour le triangle qui est complètement déterminé par la longueur des trois côtés. Si trois tiges articulées forment un triangle, il n'y a aucune déformation possible, d'où l'utilisation du triangle pour les constructions (tréteaux).

### 2-Discussion à propos de l'aire du losange

Certains élèves disent que l'aire du losange ne varie pas car c'est le produit des mesures de ses côtés en confondant avec l'aire du rectangle.

### a- Calcul de l'aire du rectangle par le produit des dimensions

Dans une de ces classes, le professeur était revenu sur la justification du calcul de l'aire du rectangle par le produit des dimensions car ce résultat, que l'on a l'habitude de considérer comme évident, ne l'est pas du tout.

<u>Si les dimensions sont entières</u>, on imagine un quadrillage avec des carrés d'aire unité. C'est un acquis de l'école primaire. Mais peu de professeurs reviennent sur la question quand les dimensions ne sont pas entières. On généralise comme s'il s'agissait d'une évidence.
<u>Si les dimensions sont décimales</u>, il faut imaginer un quadrillage plus serré.
Par exemple si les dimensions sont 4,6 cm et 3,2 cm, le nombre de $mm^2$ est $46 \times 32$ . On divise par 100 pour convertir le résultat en $cm^2$ ce qui revient à effectuer le produit des deux nombres 4,6 et 3,2 avec la technique habituelle.
<u>Si les dimensions sont rationnelles et non décimales</u>, par exemple $\frac{7}{5}$ et $\frac{3}{4}$ on peut imaginer un quadrillage avec des rectangles dont les côtés mesurent $\frac{1}{5}$ et $\frac{1}{4}$ de l'unité. Les deux fractions sont alors conçues comme 7 fois $\frac{1}{5}$ et 3 fois $\frac{1}{4}$ . Dans le rectangle dont on cherche l'aire, il y en a $7 \times 3 = 21$. Dans le carré unité il y en a $5 \times 4 = 20$. Et donc en prenant pour unité d'aire ce carré, l'aire du rectangle est $7 \times 3$ divisé par $5 \times 4$ ce qui correspond bien au produit des deux fractions.
On peut aussi imaginer un rectangle de dimensions 7 et 3, d'aire 21 qui contient 20 fois le rectangle dont on cherche l'aire. Les deux fractions sont alors conçues comme le quotient de 7 par 5 et de 3 par 4. Le calcul de l'aire avec cette conception des fractions redonne encore la division de 21 par 20.

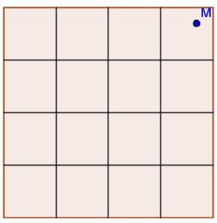
Si une des dimensions est irrationnelle, ou si les deux le sont, la formule donnant l’aire du rectangle est le résultat d’un passage à la limite sur un quadrillage, un irrationnel étant la limite d’une suite convergente de rationnels.

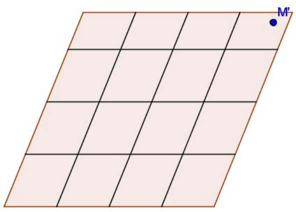
**b- La bijection entre les surfaces et un paradoxe de l’infini**[7]

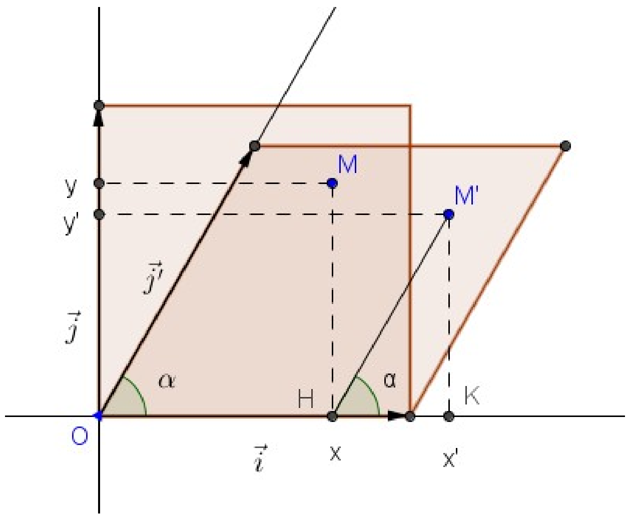
Après cette explication, une élève a eu la réflexion suivante : mais enfin quand vous penchez le carré, votre quadrillage, vous l’avez toujours ! Pour que tous les élèves comprennent l’objection de leur camarade, le professeur a repris le carré articulé mais cette fois avec un quadrillage de fines baguettes.

On voit alors qu’il était sous-entendu que le nombre d’unités d’aire est toujours identique (produit des dimensions) même si ces unités d’aire sont cette fois de petits losanges.

Le problème se ramène à l’aire d’un des petits carrés du quadrillage qui deviennent des losanges mais on imagine bien qu’on peut à nouveau quadriller ces petites unités jusqu’à arriver … à des points. Une mathématisation s’impose car il y a une bijection entre les deux surfaces.
Si on prend un point M à l'intérieur du carré, il a une image M' dans le losange.
On prend pour représentants des vecteurs de base les côtés du carré de départ. Dans ce repère, le point M a des coordonnées $x$ et $y$. Quelles sont les coordonnées de l'image M'?




Si on prend pour nouveau repère les côtés du losange, c'est à dire du "carré penché", le point M' a exactement les mêmes coordonnées que M dans le repère initial. C'est la caractéristique des transformations affines, à cause de la linéarité de l'application : $f(x\vec{i}+y\vec{j})=xf(\vec{i})+yf(\vec{j})$
On cherche les coordonnées de M' dans le repère initial, et non dans le repère transformé.
HM = HM' = $y$ donc les projections de HM' sont HK= $y\cos\alpha$ et KM= $y\sin\alpha$
Les coordonnées de M' sont: $x' = x + y\cos\alpha$ et $y' = y\sin\alpha$ .

7 Cf. *Mathématiques du Collège au Lycée,* Annie Berté, Nathan Pédagogie, 1996

On peut aussi chercher directement la matrice de l'application linéaire:

$\vec{i}$ est invariant et $\vec{j'}$ a pour composantes cos α et sin α d'où la matrice: $\begin{pmatrix} 1 & \cos\alpha \\ 0 & \sin\alpha \end{pmatrix}$

Son déterminant sin α n'est pas nul ce qui prouve qu'on a bien une bijection.
Ce déterminant donne le facteur par lequel les aires sont multipliées. Effectivement c'est sin α.

Nous avons deux surfaces, l'intérieur du carré et l'intérieur du losange, qui se correspondent points par points par une bijection. Il y a donc autant de points dans l'une comme dans l'autre, mais les aires ne sont pas les mêmes. C'est un des paradoxes de l'infini.
On a d'autres occasions de rencontrer ce paradoxe: par exemple deux segments parallèles peuvent se correspondre par une bijection points à points (homothétie) sans pour autant avoir la même longueur.
Plus paradoxal encore, la fonction tangente met en bijection un intervalle de $\mathbb{R}$ , $\left]\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ avec $\mathbb{R}$ tout entier.

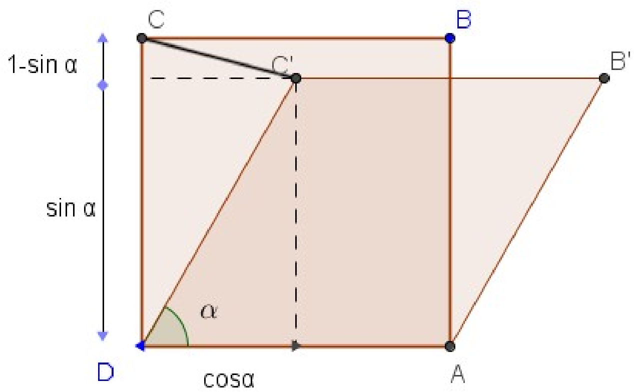
**c- L'étirement de l'élastique**

Supposons un axe élastique sur lequel on marque une origine O et des points M, M',… d'abscisses *x*, *x*'…..positives. Quand on étire ou rétrécit l'élastique en bloquant le point O, toutes les abscisses des points M sont multipliées par un facteur constant. Ces abscisses deviennent $y$ telles que $y = \alpha x$. Il s'agit de la fonction linéaire en dimension 1. Elle est bijective si α différent de 0. Les longueurs sont agrandies si α >1 ou rétrécies si α <1 ;
Revenons à notre transformation du carré en losange. Nous avons trouvé la matrice de l'application linéaire qui est une matrice triangulaire, donc les valeurs propres sont 1 et sin α sur la diagonale.

Le premier vecteur propre est $\vec{i}$ associé à la valeur 1.

L'autre a des composantes *x* et *y* telles que
$x\,(1 - \sin\alpha) + y\cos\alpha = 0$.
Ses composantes sont $\sin\alpha - 1$ et cos α .

Il est visible sur le dessin. C'est le vecteur $\overrightarrow{CC'}$ .

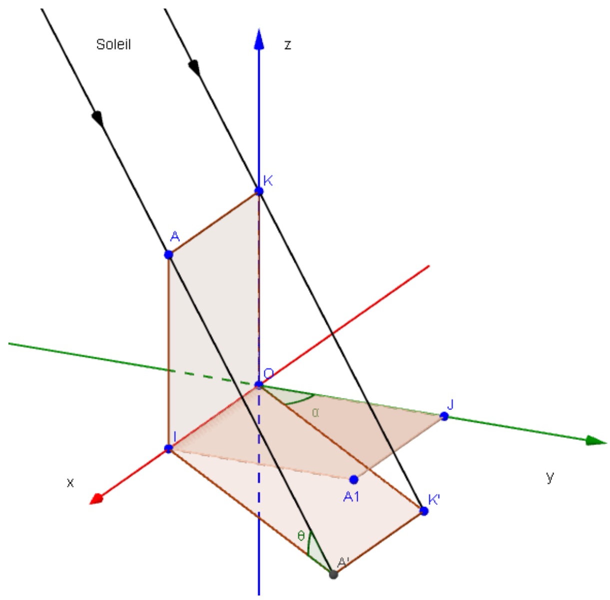



Il s'agit donc d'une affinité de base (CD) et de direction (CC').
Dans la base des vecteurs propres la matrice de l'application devient $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin\alpha \end{pmatrix}$ .

On peut imaginer un carré ABCD dessiné sur une toile élastique et que l'on étire dans la direction $\overrightarrow{CC'}$. Il se transforme en AB'C'D. Cette fois ce sont les aires et non les longueurs qui sont multipliées par un facteur fixe (ici sin α <1, déterminant de la matrice).
Nous allons examiner maintenant une autre transformation affine du carré unité voisine de celle subie par le carré articulé.

# Un carré et sa transformation avec les ombres

## a- Ombre donnée par le soleil




Le carré est placé verticalement. C'est OIAK. Son ombre est OIA'K'.

Les rayons de soleil font un angle θ avec le sol et le plan vertical qui contient leur direction fait un angle α avec le plan (zOy) avec
$0° \leq \theta \leq 90°$ et $-90° \leq \alpha \leq 90°$.
Ce problème dans l'espace peut se ramener au plan. Il suffit de rabattre le carré OIAK sur le plan (xOy) . Ce rabattement est le carré $OIA_1J$.

L'angle α peut être changé en faisant pivoter le carré autour de (Oz). On change ainsi la forme de l'ombre. C'est un parallélogramme plus ou moins aplati sur l'axe des abscisses.

L'application affine bijective qui associe à chaque point du carré $OIA_1J$ un point du carré OIA'K' est voisine de celle que nous venons de voir avec le carré articulé. On s'y ramène exactement quand θ = 45°. Sinon les côtés OK' et IA' sont plus longs ou moins longs que le côté du carré de départ selon la valeur de θ.

Pour trouver la matrice, on cherche les composantes des transformés des vecteurs $\overrightarrow{OI}=\vec{i}$ et $\overrightarrow{OJ}=\vec{j}$
$\vec{i}$ est invariant, $\overrightarrow{OJ}$ devient $\overrightarrow{OK'}$ dont les composantes sont $\operatorname{cotan}\theta \sin\alpha$ et $\operatorname{cotan}\theta \cos\alpha$ .

D'où la matrice : $\begin{pmatrix} 1 & \operatorname{cotan}\theta \sin\alpha \\ 0 & \operatorname{cotan}\theta \cos\alpha \end{pmatrix}$ .

Comparons avec la transformation trouvée dans la séquence du carré articulé :
- l'angle α est le complémentaire du précédent, d'où l'inversion entre sinus et cosinus dans les composantes
- la multiplication par cotan θ produit l'étirement ou le rétrécissement du parallélogramme

$$\begin{cases} x' = x + y \operatorname{cotan}\theta \sin\alpha \\ y' = \quad y \operatorname{cotan}\theta \cos\alpha \end{cases} .$$

Si θ = 90° on a un segment, c'est [OI].
Si θ = 0, l'ombre est infinie, c'est le soir, le soleil est couché.
Si θ = 45° on retrouve le carré articulé qui se transforme en losange.
Si α = 0, quelque soit θ , on a un rectangle.
Si α = - 90° ou α = 90°, on a un segment plus ou moins long selon la valeur de θ.

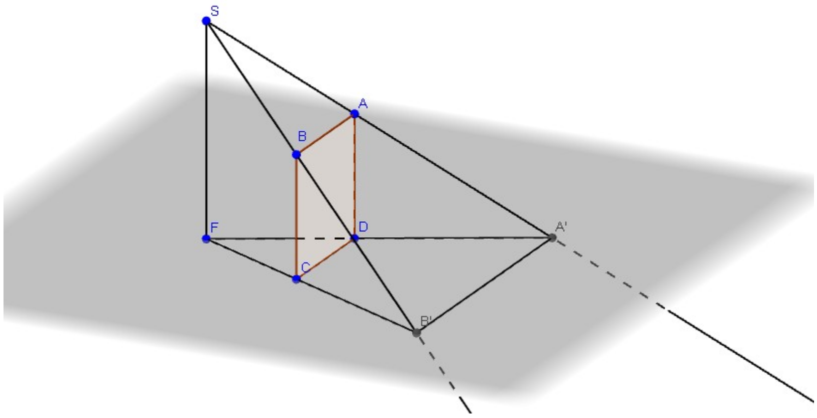
Comme dans la transformation du carré articulé, nous pouvons chercher les vecteurs propres. Ce sont le vecteur $\vec{i}$ qui est invariant et un vecteur de composantes, $\begin{pmatrix} \operatorname{cotan}\theta \sin\alpha \\ \operatorname{cotan}\theta \cos\alpha - 1 \end{pmatrix}$ : c'est le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{A_1 A'}}$.

Il s'agit encore d'une affinité, « étirement » dans la direction du vecteur propre trouvé.

### b- Ombre donnée par une lampe

Pour dessiner l'ombre du carré donné par la lampe S, comme nous avions fait avec l'ombre au soleil, nous plaçons le carré perpendiculaire au sol.
Les rayons [SA) et [SB) atteignent le sol en A' et B'.
Nous traçons [A'B'] avec (A'B') //(AB) car (AB) est parallèle à (CD) donc au plan du sol

Par conséquent (AB) et (A'B') ne se coupent pas, sinon (AB) aurait un point commun avec le plan du sol.




Les plans (SA'D) et (SB'C) sont tous les deux perpendiculaires au plan du sol. Ils se coupent selon une droite passant par S et orthogonale au plan du sol.

Soit F le pied de la perpendiculaire au sol passant par S. Ce point F appartient aux deux plans. C'est donc l'intersection des droites (DA') et (CB').
Pour la perspective, F c'est le point de fuite.

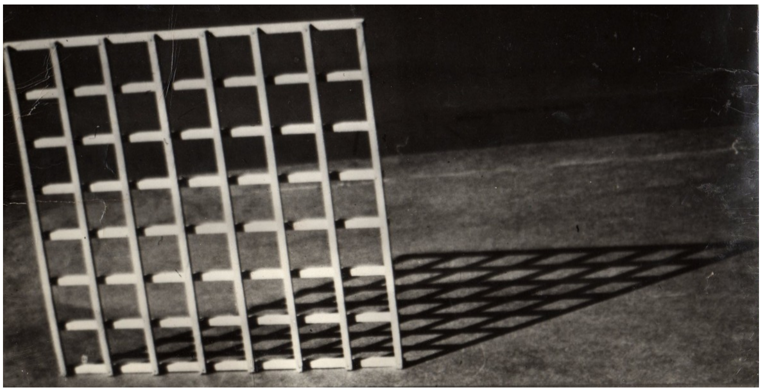
Qu'est-ce qui change avec l'ombre donnée par le soleil?

Certaines droites parallèles dans le carré ne sont plus parallèles dans l'ombre. Si nous regardons une longue route rectiligne plantée d'arbres, nous voyons les bords de la route qui se rapprochent au lieu de rester parallèles, et les arbres ont l'air de plus en plus serrés dans le lointain. Une bonne expérience consiste à regarder le paysage derrière une fenêtre et à dessiner au feutre sur la fenêtre le contour des choses telles que nous les voyons. C'est ce qu'on appelle la perspective. Notre œil joue cette fois le rôle du point S.

**c- Ombre d'un quadrillage**

Supposons maintenant que nous partagions le carré dont nous observons l'ombre avec des baguettes parallèles aux côtés, de façon à réaliser un quadrillage comme nous l'avons vu dans la situation du carré articulé.

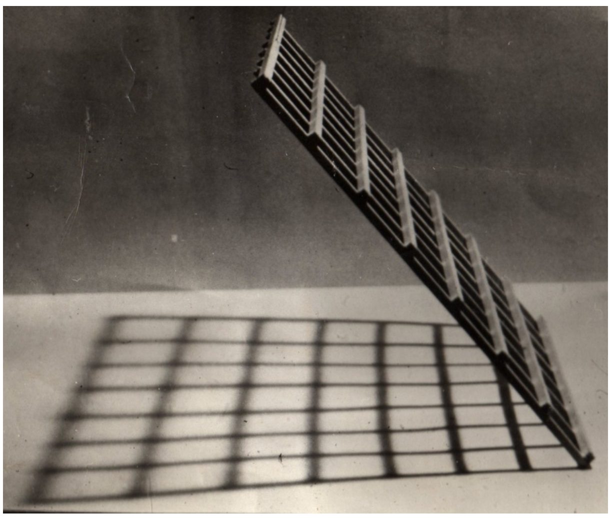
Pour le carré placé au soleil :



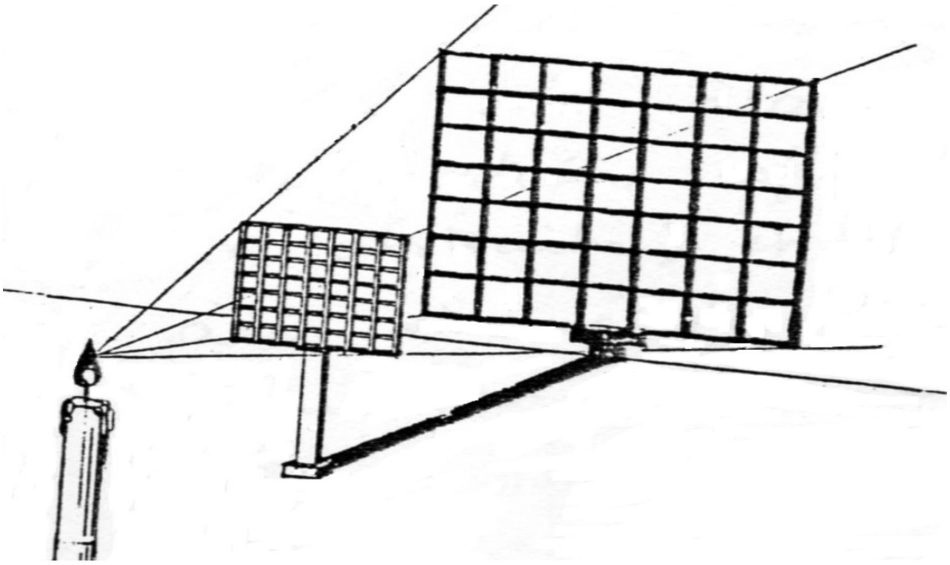
On vérifie la conservation des rapports sur une même direction en passant du quadrillage à son ombre, par exemple avec les 7 petites carrés on vérifie la conservation des rapports comme $\frac{1}{7}$ ou $\frac{2}{7}$ etc..

Le quadrillage avec des carrés devient sur l'ombre un quadrillage par des parallélogrammes tous isométriques entre eux comme dans l'expérience du carré articulé. La seule différence c'est que si θ n'est pas égal à 45°, les petits parallélogrammes ne sont plus des losanges. Ils sont plus ou moins étirés ou raccourcis.

Pour le carré placé devant une lampe



Les carrés ne sont plus des parallélogrammes dans l'ombre mais des trapèzes qui deviennent de plus en plus grands à mesure qu'on s'éloigne.



L'ombre du carré donné par la lampe sur un mur parallèle au plan du carré, donnerait une homothétie entre le carré et son ombre.
La transformation affine est bien un cas particulier de la transformation homographique.

Bibliographie :

Mathématique du collège au lycée, Annie Berté, Nathan Pédagogie ( 1996)

Petit x n°65 , Irem de Grenoble ( 2004)

Tangente hors série n°23 ( juillet 2005)

La Mathématique dans la réalité, Emma Castelnuovo et Mario Barra, Edition CEDIC, 1980, publié auparavant sous le titre de Matematica nella realita,Turin, 1976.

Les mathématiques de tous les jours  par Michel SOUFFLET édition VUIBERT- 2009

Documents d'accompagnement des programmes de mathématiques de collège : grandeurs et mesures au collège (octobre 2007)