SOMMAIRE

PRÉFACE

Après ses deux brochures sur l'algèbre au collège, le groupe didactique de l'IREM de Bordeaux nous propose une nouvelle publication sur les fonctions pour le collège et les débuts au lycée.

Ce groupe a une solide expérience au sein de l'IREM de Bordeaux. Dès sa première production en 1987 sur «Enseignement des mathématiques utilisant la réalité», le groupe a été très actif avec de nombreuses publications dans le cadre de l'IREM tout en maintenant une visibilité au niveau de la CII didactique, mais également de l'APMEP et du PAF par des ateliers, des stages, et des communications diverses. Initialement porté par Annie Berté, rejointe peu après par Catherine Desnavres, il comporte des enseignants passionnés, de génération et de parcours professionnel différents, qui interviennent pour certains en collège et d'autres en lycée. Cette diversité fait toute la richesse de ce groupe, qui a attiré ces dernières années plusieurs nouveaux professeurs. Il n'y a donc pas lieu de s'étonner qu'une telle dynamique appuyée d'une expérience et d'un savoir avérés – que par ailleurs ce groupe souhaite partager et communiquer – trouve un écho affirmé auprès des enseignants et des chercheurs comme le prouverait, si besoin était, le succès éditorial rencontré par ces diverses publications.

Dans la veine des brochures précédentes, ce nouveau document propose des situations expérimentées dans les classes, permettant d'aborder la notion de fonction au collège et de la consolider au lycée. Il se démarque nettement des "activités" proposées dans la plupart des manuels scolaires, ne serait ce que par une authentique mise à plat de questions trop souvent négligées : Comment aborder de telles activités ? Comment les faire vivre en classe ? Quelles sont les variables didactiques mises en jeu ? Quels prolongements pertinents peut-on envisager ? Quelles réactions des élèves sont susceptibles de se produire ? ... Et il ne s'agit pas d'en rester là. Ce document a aussi l'ambition clairement affirmée de proposer des réponses sous des formes variées : des devoirs maison qui prolongent les activités, des analyses de copies d'élèves, des activités complémentaires et des habillages différents suivant le niveau des élèves à qui l'on s'adresse. Enfin, le dernier chapitre donne des compléments pour l'enseignant. Ils sont particulièrement intéressants car ils permettent d'avoir un autre regard sur les activités qui sont proposées et en montrent aussi toute la richesse mathématique.

Les études de situations qui sont proposées dans cette brochure complètent parfaitement le document « Ressource pour la classe de seconde – fonctions » publié en accompagnement des programmes de seconde de 2009. Les méthodes : graphiques, algébriques, numériques, géométriques développées dans cet ouvrage pour aborder et justifier l'étude de fonctions permettent d'initier les élèves aux problèmes de la modélisation et d'instaurer dans la classe un vrai débat scientifique. C'est, je crois, la meilleure façon pour que les élèves puissent prendre du plaisir à faire des mathématiques, les comprennent en y mettant du sens, et enfin puissent réinvestir leur savoir dans des situations nouvelles. J'ai pris beaucoup de plaisir à lire cette brochure et à en débattre avec les membres du groupe. Je suis persuadé que les futurs lecteurs y prendront le même plaisir et souhaiteront expérimenter avec leurs élèves les situations qui y sont proposées.

Jean-Yves Boyer
Directeur de l'IREM d'Aquitaine
Le 10 septembre 2012

Introduction

Dans cette brochure consacrée à l'enseignement des fonctions au collège et en seconde, notre but est de conduire les élèves à donner du sens à la notion de fonction à travers la résolution de problèmes. Cette intention ainsi énoncée n'est pas si facile à concrétiser. Et c'est pour cela que nous avons fait le choix de préparer l'introduction de cette notion dès la $6^{ème}$.
Notre groupe est constitué d'enseignants qui travaillent en collège et en lycée, dans des établissements implantés dans des environnements différents. Toutes les séquences que nous proposons ici ont été testées à plusieurs reprises dans nos classes. Notre document pourra ainsi être utilisé par les professeurs à différents niveaux du collège ou du lycée, avec une adaptation à la classe selon des variantes que nous indiquons dans la brochure.

Nous donnons dans ce qui suit un éclairage didactique sur la notion de fonction qui permet d'avoir une vue d'ensemble de la progression selon les niveaux.
Les élèves rencontrent de nombreuses fonctions dans le cours de mathématiques bien avant la troisième et elles sont utilisées en sciences physiques et en SVT en cinquième et quatrième.
La notion de fonction n'est pas explicitement dans les programmes de mathématiques de la sixième à la quatrième mais nous utilisons la liberté que nous donne l'expression « en fonction de » qui figure dans le programme dès la sixième.

L'étude des **différents registres** dans lesquels les fonctions s'expriment (formules algébriques, programmes de calculs, tableaux de valeurs, construction et lecture de graphiques) peut être initiée tout au long du collège.
La fonction apparaît d'abord dans sa **conception procédurale :** par exemple, pour trouver l'image quand on a la valeur de la variable à partir de la formule, du graphique ou du tableau de valeurs... L'aspect **ponctuel** est ici privilégié.
En classe de troisième, la fonction apparaît comme un **outil** pour modéliser, visualiser (tableaux et graphiques) et décrire une situation (ça augmente, plus vite, moins vite, toujours pareil, ça change...). L'aspect **global** intervient alors. Il n'est cependant pas nécessaire d'attendre la troisième pour travailler cet aspect. Ainsi dans cette brochure se trouve une proposition de séquence intitulée « Le chaperon rouge » que nous utilisons dès la $6^{ème}$ pour la lecture ou le tracé d'un graphique. Le même objectif est repris avec la séquence « Karim » en seconde.

L'étude de ce qui se passe au voisinage d'un point, l'**aspect local**, est abordée assez tôt dans notre document contrairement à l'usage : étudier la variation autour d'un maximum par exemple. C'est le cas entre autres dans les séquences sur « les rectangles de périmètre constant » en 3ème et en seconde ; nous y ajoutons par ailleurs des pistes d'approfondissement pour les professeurs de première.
A partir de la troisième, le concept de fonction est nommé en tant que tel et on commence l'étude de cet **objet** (notations, vocabulaire spécifique). Une **conception structurale** des fonctions émerge alors parallèlement à la conception procédurale initiale. Par exemple dans les séquences intitulées « La bande qui se déroule », les fonctions apparaissent à la fois comme un outil pour étudier une relation de dépendance entre deux grandeurs et comme un objet d'étude (caractérisation des fonctions affines). Il s'agit d'une situation simple, d'ordre mathématique (on s'intéresse à des longueurs et à des aires qui varient) mais relativement concrète cependant. Les élèves ont le choix de la variable et des registres. Le vocabulaire est mis en place en 3ème ou réactivé en seconde (notion de variable, d'image et d'antécédent).
En seconde, la fonction se dégage du simple processus et s'intègre dans des catégories dont on peut étudier les propriétés (par exemple les fonctions croissantes) et dont on peut avoir des représentants (comme les fonctions linéaires déjà vues en troisième). La classe de seconde est aussi consacrée à explorer différents types de fonctions et en faire usage comme outil pour la résolution d'équations par exemple. La connaissance des fonctions s'enrichit d'un nouveau registre, celui des tableaux de variation qui ne sont pas abordés au collège.
Une fois que les fonctions seront acceptées comme un outil adéquat pour étudier un certain nombre de problèmes, celles-ci pourront et devront à leur tour devenir des objets d'étude. Puis la connaissance de ces objets étant approfondie, les fonctions reprendront le statut d'outils pour la résolution de problèmes plus complexes, et ainsi de suite... Nous avons voulu donner des ressources au professeur pour qu'il puisse, entretenir cette dialectique entre le statut d'outil et le statut d'objet des fonctions. Les élèves doivent acquérir des connaissances théoriques tout en étant capables de réinvestir ces connaissances dans la résolution de problèmes, de façon à ce que la notion de fonction ne leur apparaisse pas comme totalement arbitraire ou comme totalement abstraite.

L'enseignant trouvera dans ce document des ressources différentes de ce que proposent les manuels scolaires qui se limitent souvent à des « activités » introductives ou à des problèmes et exercices d'application.

Dans les « activités » des manuels, les fonctions sont présentées de façon souvent artificielle, comme prétexte pour introduire le mot fonction. L'objet existe a priori et son utilité pour répondre à certaines questions n'est pas mise en évidence. Beaucoup de manuels de 3ème se contentent de faire le tour de différents registres à travers lesquels s'exprime la notion de fonction : essentiellement les tableaux de valeurs, les graphiques et les formules algébriques, parfois le registre du langage courant et celui des programmes de calcul. Ces registres sont proposés aux élèves sans qu'une véritable question problématique y soit associée. Les élèves sont guidés par un questionnement afin de faire fonctionner ces registres sous forme de petites questions posées par le professeur. Par exemple, la variable est souvent imposée en disant : « On appellera x ... » et les graphiques rarement interprétés en terme de variation.

Ces exercices, intéressants pour travailler les techniques, ne nous semblent pas adaptés pour faire comprendre aux élèves la nature mathématique d'une fonction. Son intérêt en tant qu'outil pour résoudre des problèmes n'apparaît pas.

Un certain nombre de manuels introduit la fonction en la présentant comme une machine, dans laquelle on rentre une donnée de départ et qui produit après transformation, une autre donnée à l'arrivée. Dans un manuel, on parle d'une machine qui sert à remplir, boucher et étiqueter une bouteille ! D'autres manuels proposent des exemples de fonctions dont l'ensemble de départ est un ensemble fini, les numéros des mois associés à leur nombre de jours !

Ces deux initiatives nous paraissent provenir de louables intentions. Dans la première, l'accent est mis sur l'aspect procédural de la fonction. D'après nous, cela n'a de sens qu'après une activité mathématique effective des élèves, au cours de laquelle ils trouvent eux-mêmes une illustration, par exemple en calculant des images avec leur calculatrice. Dans la seconde, il ne s'agit pas d'un vrai problème dans lequel la fonction est un outil pour répondre à des questions.

Dans les manuels se trouvent des énoncés d'exercices d'entraînement que le professeur pourra utiliser pour consolider la maîtrise technique. Il s'y trouve aussi des problèmes intéressants mais les élèves sont trop guidés par de nombreuses questions intermédiaires, ce qui détruit leur intérêt. Nous en transformons certains et complétons par d'autres.

Pour réussir l'appropriation du problème par les élèves et le démarrage d'une réelle activité mathématique, la transmission du simple énoncé du problème ne suffit pas toujours. Mais la

solution ne consiste pas à baliser le chemin avec des questions intermédiaires. Nous avons appris de la didactique des mathématiques comment construire à partir d'un problème bien choisi une **situation d'enseignement** en introduisant parfois un matériel simple ou du moins une organisation spécifique qui permette de faire entrer les élèves dans le problème puis de favoriser l'échange et l'argumentation au sein de la classe.
La situation choisie doit être suffisamment complexe pour être réellement problématique. Le problème doit être assez concret mais pas trop artificiel : nous privilégions parfois une situation interne aux mathématiques (problèmes d'aires, de périmètres...) à une situation « issue de la vie courante » qui pourrait apparaître finalement très anecdotique. Nous évitons les « habillages » qui font croire à une pseudo-réalité et qui n'introduisent qu'une motivation superficielle des élèves, voire une distance plutôt qu'une familiarité selon l'expérience de chacun. Nous pensons que de nombreuses situations issues de la réalité comportent des difficultés de modélisation mathématique qui pourraient occulter l'intérêt des fonctions pour résoudre le problème, ou rendre leur mise en œuvre très compliquée. C'est pourquoi nous préférons partir de situations dont le contexte est relativement dépouillé et la modélisation simple. Lorsque c'est possible, nous utilisons un support matériel (ficelle, morceaux de papier...). Les élèves vont ainsi directement à l'essentiel et la simplicité du matériel permet une mise en œuvre aisée pour l'enseignant. La plupart des activités proposées peuvent faire l'objet de TICE (géométrie dynamique, tracés de courbes, utilisation du tableur, utilisation de la calculatrice...). Chaque enseignant peut ou non y avoir recours. L'objet de notre document n'est pas de fournir des activités propices aux TICE mais des activités permettant d'aborder la notion de fonction. L'utilisation des TICE est donc clairement prise comme un moyen technique supplémentaire et non comme un but en soi.

Lors d'une séquence l'élève va pouvoir progresser vers des réponses aux questions qu'il s'est lui-même posées à partir de la situation amenée par le professeur. L'élève part de ses connaissances antérieures et utilise les apports sur les fonctions que le professeur amène lorsque c'est nécessaire pour l'avancée de la résolution du problème. L'usage des mathématiques s'impose de lui-même aux élèves. Pour cela, le professeur doit faire confiance aux élèves dans leur capacité à s'investir et doit accepter de ne pas maîtriser entièrement leurs réponses et leurs stratégies. C'est la condition pour leur laisser la possibilité de se poser eux-mêmes les bonnes questions. L'enseignant est là pour les entendre et leur donner les outils pour y répondre de manière collective. Cette façon de gérer la classe n'est pas évidente pour l'enseignant quand il n'a qu'un énoncé. C'est pourquoi nous montrons dans ce document comment nous tenons compte des questions, des conjectures et des productions des élèves pour amener la classe à résoudre le problème. Nous fournissons et commentons des exemples de travaux d'élèves. Ainsi, nous donnons aux professeurs une idée de leurs difficultés et de leurs initiatives, pour lui permettre d'anticiper le déroulement de la séance. Nous espérons que, plus assurés, les enseignants seront plus confiants pour changer leur pratique.

Le professeur trouvera dans cette brochure quatre parties. Des situations que nous avons qualifiées d'**essentielles** constituent la **partie I** et d'autres que nous avons qualifiées de **complémentaires** sont dans la **partie II**. Dans la **partie III**, ce que nous avons appelé **exercices** sont de plus petites questions poursuivant le même but que les problèmes qui se trouvaient au cœur des situations des parties I et II, à savoir la construction du sens. Dans la **partie IV**, le professeur trouvera des **compléments** pour lui-même de différentes natures.

En effet, avec la pratique, certaines de nos situations nous ont paru essentielles pour la construction du sens ; le professeur devrait les utiliser en priorité. Ensuite, s'il a une petite marge de temps, il peut utiliser quelques-unes des situations complémentaires. Toujours dans les parties I et II, ces situations sont parfois suivies immédiatement d'exercices ou de problèmes qui adoptent un point de vue voisin et peuvent servir à proposer un devoir à la maison après le développement de la situation en classe. Chacune des situations est précédée d'une fiche descriptive qui permet au professeur d'avoir une vue d'ensemble de ce qui est traité.

Les exercices de la partie III ne sont pas des exercices au sens usuel, pour un entraînement à la technique, qui seraient à résoudre du jour pour le lendemain. Les situations et exercices proposés dans l'ensemble des parties I, II et III, donnent tous matière à une réflexion sur le sens. Ils sont conçus pour conduire une séquence en classe, ce qui permet d'en retirer toute la richesse du fait des échanges. Néanmoins, le professeur qui hésite à se lancer, pourra éventuellement se servir de certaines questions pour un devoir à la maison qui laisse aux élèves un peu de temps de réflexion. C'est possible, surtout pour ceux que nous avons qualifiés d'**exercices**, mais ce serait dommage pour ceux que nous avons qualifiés de **situations**.

Quant aux compléments pour le professeur, ce sont parfois des compléments mathématiques ou des indications sur un lien entre plusieurs des situations abordées.

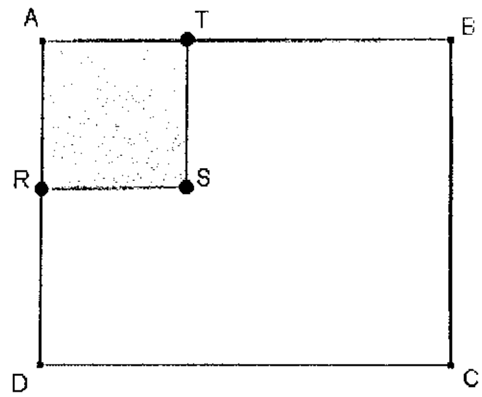
PARTIE I

Les situations essentielles

Essentielles pour la construction du sens ; le professeur devrait les utiliser en priorité.

Elles sont conçues pour conduire une séquence en classe, ce qui permet d'en retirer toute la richesse du fait des échanges.

Un carré et un rectangle.



Problème posé

Le professeur montre aux élèves la figure suivante :

« Lorsque T se déplace sur le segment [AB],

qu'est ce qui est fixe? Qu'est ce qui varie? »

La classe étudie les variations des périmètres

et des aires en fonction de la dimension variable.

Objectifs possibles

- Introduction des fonctions en 3ème
- Réinvestissement en 2nde
- Prolongement en 1ère

Notions utilisées

- Aire et périmètre du carré, du rectangle et de l'hexagone
- Tableau de valeurs
- Représentation graphique
- Repérage dans le plan
- Théorème de Thalès
- Notion de fonction (vocabulaire et notation)

Matériel

- Logiciel dynamique de géométrie
- Logiciel ou calculatrice graphique pour tracer des courbes

Niveau 3ème ou 2nde ou 1ère

Fonctions rencontrées

$x \longmapsto 4x$ $\quad x \longmapsto x^2$ $\quad x \longmapsto 30$ $\quad x \longmapsto 54 - x^2$

Un carré et un rectangle

Cette situation convient bien pour une classe de 3ème comme situation d'introduction à la notion de fonction. Les étapes 1, 2 et 3 peuvent même être abordées plus tôt. Nous proposons des devoirs maison en 2nde et 1ère comme prolongement.

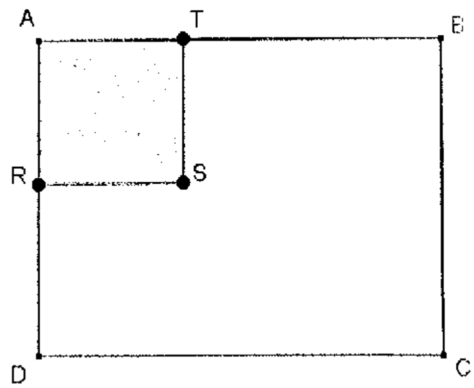
Tous les élèves peuvent s'investir dans cette situation car les notions nécessaires pour démarrer sont simples. Cependant les confusions encore fréquentes entre périmètre et aire sont à prendre en compte.

Étape 1 :

Pour se familiariser avec la situation

Le professeur montre aux élèves une figure avec les consignes ci-dessous.

ABCD est un rectangle
de dimensions AB = 9 cm et AD = 6 cm.



T est un point appartenant à [AB].
Construire le carré ATSR avec R appartenant à [AD].

1- Placer T de telle sorte que AT = 2 cm.
Calculer le périmètre et l'aire du carré ATSR puis de l'hexagone RSTBCD.

2- Mêmes questions lorsque AT = 5,1 cm.

Le professeur incite les élèves à faire une figure en vraie grandeur au moins pour la première question : cela permet de bien voir le rôle déterminant du point T dans la construction de la figure et pour la suite. Tous les élèves font la figure pour la première question et certains (les plus en difficulté) font aussi celle de la deuxième question.

Pour le calcul, un nombre non négligeable d'élèves a besoin d'un rappel sur périmètre et aire. Le périmètre de l'hexagone pose tout de même problème à certains : « c'est le périmètre du rectangle moins le périmètre du carré »... Erreur récurrente souvent observée dans ce type d'activité dès la sixième. Une correction rapide est organisée pour expliciter clairement les calculs à faire en particulier pour le périmètre de l'hexagone.
En général, peu d'élèves, à ce stade, remarquent que le périmètre de l'hexagone est le même dans les deux cas.

Étape 2 :

Repérer les éléments qui varient selon la place du point T

Le professeur demande à la classe : « Lorsque T se déplace sur le segment [AB], qu'est-ce qui est fixe, qu'est-ce qui varie ? ».

Certains élèves ont du mal à comprendre ce qu'on leur demande : l'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique est utile pour qu'ils visualisent bien la situation. Le professeur veille à ne pas « approcher » le point T des deux positions « limites » pour ne pas anticiper sur une réflexion que les élèves devront avoir dans les étapes suivantes.

Après un court temps de travail individuel, le professeur organise une mise en commun avec un bilan au tableau sur deux colonnes.

Dans « ce qui est fixe », apparaissent dans un premier temps, les points A, B, C et D, le rectangle, ses dimensions, son périmètre et son aire.

Dans « ce qui varie », apparaissent dans un premier temps, les points R, S et T, le carré ATSR, son périmètre et son aire. Rarement, apparaît la diagonale du carré.
Seuls quelques uns pensent à parler de l'hexagone, ses dimensions qui varient, son aire et aussi son périmètre.

Quelques élèves mettent en doute la variation du périmètre en se référant à la première étape. Dès lors, un grand nombre d'élèves décrète sans plus de vérification que ce périmètre est fixe même s'ils trouvent ça « bizarre » ! Pour entretenir ce doute et pour les inciter à aller vers une preuve, le professeur montre à nouveau la figure dynamique (avec les mêmes précautions) pour leur confirmer que l'hexagone « bouge » et que ses dimensions varient... Un débat s'installe. Le professeur demande à chacun d'expliciter ses arguments par écrit.
Certains choisissent une nouvelle valeur de AT et refont le calcul, il faut discuter à nouveau sur le fait que ce calcul ne constitue pas une preuve en mathématiques. D'autres se lancent dans une explication confuse, même s'ils ont compris ce qui se passe et tentent une démonstration « générale ». Peu d'élèves aboutissent finalement à l'une des deux méthodes suivantes, reprises au tableau :

- écrire le périmètre en fonction des longueurs des segments :
  RS + ST + TB + BC + CD + DR= AT + RA + TB + BC + CD + DR= AB + BC + CD + DA,
  ce qui donne le périmètre du rectangle.

- écrire le périmètre en fonction de x en ayant posé AT = x ce qui donne :

$$x + x + 9 - x + 6 + 9 + 6 - x = 30.$$

Le professeur ajoute donc à « ce qui est fixe » le périmètre de l'hexagone.

Étape 3 :

Tableaux et représentations graphiques

Le professeur annonce aux élèves qu'ils vont construire des tableaux de valeurs des périmètres du carré ATSR et de l'hexagone RSTBCD pour différentes positions du point T, pour ensuite les représenter sur des graphiques.

<u>TABLEAUX:</u>

Pour chacun des deux polygones, il s'agit de compléter un tableau de valeurs de leur périmètre en choisissant dix valeurs différentes de x.

Le professeur propose d'emblée la notation $P(x)$ dans le tableau dans le but d'engager une discussion sur le sens de cette notation.

x										
$P(x)$										

x										
$P'(x)$										

Dans la discussion, les élèves comprennent que, dans la notation P(x), « x est forcément la longueur AT », « que tout dépend de x puisque c'est la position de T » et « que P est le périmètre qui dépend de la valeur de x ».

Le professeur précise alors que l'on note P le périmètre du carré et P' celui de l'hexagone.

Par exemple, on peut écrire P(2) = 8 cm ce que l'on explicite par une phrase « le périmètre du carré lorsque x vaut 2, est 8 cm ». De même avec P'(2) = 30 cm.

Le professeur peut demander alors le sens et la valeur de P(5,1) et P'(5,1) (valeur pour laquelle les calculs ont été faits à l'étape 1).

Quelques élèves font remarquer que la notation ne va pas pour l'hexagone puisque le périmètre est fixe et ne dépend donc pas de x. Le professeur répond que l'on peut écrire P'(x) = 30 pour « toutes les valeurs de x » sans préciser davantage les valeurs de x en question.

Il est probable qu'aucune discussion sur les valeurs « possibles » de x n'ait lieu à ce stade du travail. Dans ce cas, le professeur n'aborde pas la question.

Certains élèves peuvent être bloqués par le fait d'avoir à choisir des valeurs de x. Le professeur montre encore avec précaution la figure dynamique sur laquelle s'affiche la valeur de x. Cela suffit pour que ces élèves se lancent.

Des élèves font figurer dans le tableau du périmètre du carré des valeurs trop grandes pour la situation. Le professeur peut leur demander de réaliser la figure pour une de ces valeurs. Tenter la construction de la figure suffit à lancer la réflexion sur les valeurs possibles de x.

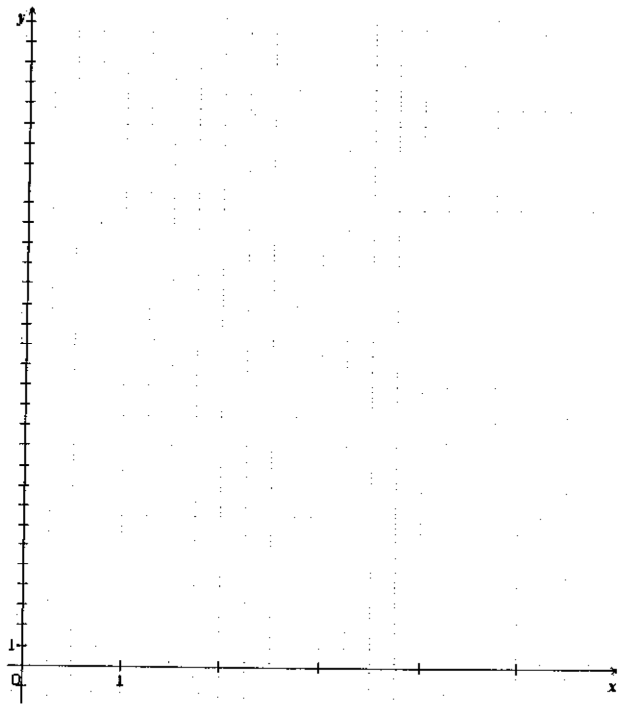
Si les valeurs choisies ne sont pas rangées dans l'ordre croissant, la compréhension de la variation du périmètre sera rendue plus difficile. Les élèves qui prennent des valeurs régulièrement espacées peuvent plus facilement faire des conjectures sur les accroissements des images.

Lors de la correction, le professeur décide de compléter les tableaux en sollicitant tour à tour des élèves. Ainsi, les valeurs écrites ne sont ni ordonnées ni régulièrement espacées et la variation de la fonction n'est pas évidente. Les élèves qui ont ordonné leurs valeurs ont alors des remarques et des conjectures à faire.

Certains posent la question de 0 et de 6. D'autres élèves répondent de façon convaincante pour 0 : « T est confondu avec A, le carré se réduit à un point, son périmètre vaut 0 et l'hexagone est devenu le rectangle ». Pour x = 6, aucun problème pour le carré mais l'hexagone pose problème, en particulier, pour le périmètre (ils pensent que ce n'est plus 30 mais 18 cm...). Le professeur leur montre qu'une partie de l'hexagone est aplatie et que le périmètre est toujours 30 pour 5,9. Au cas limite on peut admettre que, pour évaluer le périmètre, on part d'un sommet et on revient au même sommet après avoir fait le tour de sorte qu'on passe deux fois sur le segment de longueur 6.

La question de savoir s'il s'agit de tableaux de proportionnalité est posée à la classe. Les élèves y répondent en utilisant des arguments vus dans les classes précédentes (coefficient de proportionnalité, produits en croix, propriétés de linéarité).

REPRÉSENTATIONS GRAPHIQUES:



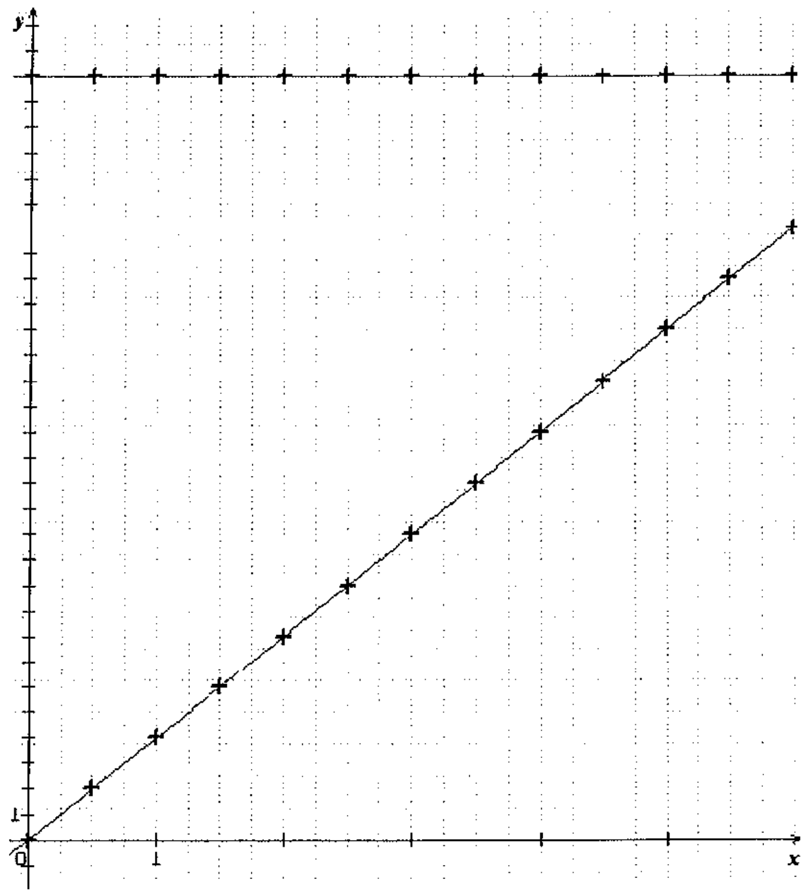
Après un bref rappel collectif du vocabulaire (repère orthogonal, coordonnées, abscisse, ordonnée), les élèves placent les points. Certains relient leurs points, d'autres non. Le professeur demande aux premiers s'ils peuvent « justifier » cet alignement, ils le font à peu près correctement en faisant référence à leurs connaissances sur la proportionnalité.

Il est intéressant de faire remarquer que deux élèves qui n'ont pas pris les mêmes valeurs ont cependant la même demi-droite. Certains le vérifient parfois par transparence.

Le professeur montre ensuite « ses » propres tableaux et graphiques et effectivement, en plaçant d'autres points dans les mêmes conditions, on continuerait d'obtenir des points alignés. On peut légitimement les relier. On le prouvera plus tard.

x	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6
P(x)	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24

x	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6
P'(x)	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30



Étape 4 :

Variation des deux aires

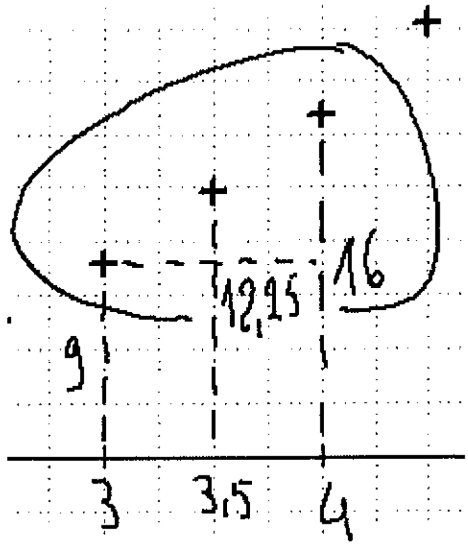
Pour chacun des deux polygones, compléter un tableau de valeurs de leur aire en choisissant dix valeurs différentes de x.

x										
$A(x)$										

x										
$A'(x)$										

Quelques élèves ont du mal à démarrer, la confusion aire-périmètre persiste, il faut les aider. Certains élèves ont du mal à calculer l'aire de l'hexagone car « on ne connaît pas la formule » !
A l'aide des tableaux, la « non proportionnalité » des deux situations est mise en évidence.
Sur les graphiques, la « non proportionnalité » est aussi facilement observée en opposition avec le périmètre du carré.
Quelques élèves évoquent les variations des aires. Les aires varient bien en fonction de la position du point T et donc de la valeur de x : « augmentation » de l'une, pendant que l'autre « diminue ».
Pour les graphiques, la réponse majoritaire est : « les points ne sont plus alignés ». Mais quelques-uns pensent que « certains points sont alignés ».

En prenant trois points que les élèves pensent alignés, le professeur prouve que ce n'est pas le cas, en sollicitant la classe. Le repère n'étant pas normé, la démonstration peut se faire en utilisant le théorème de Thalès et un raisonnement par l'absurde.



$$\frac{0,5}{1} \neq \frac{3,25}{7}$$

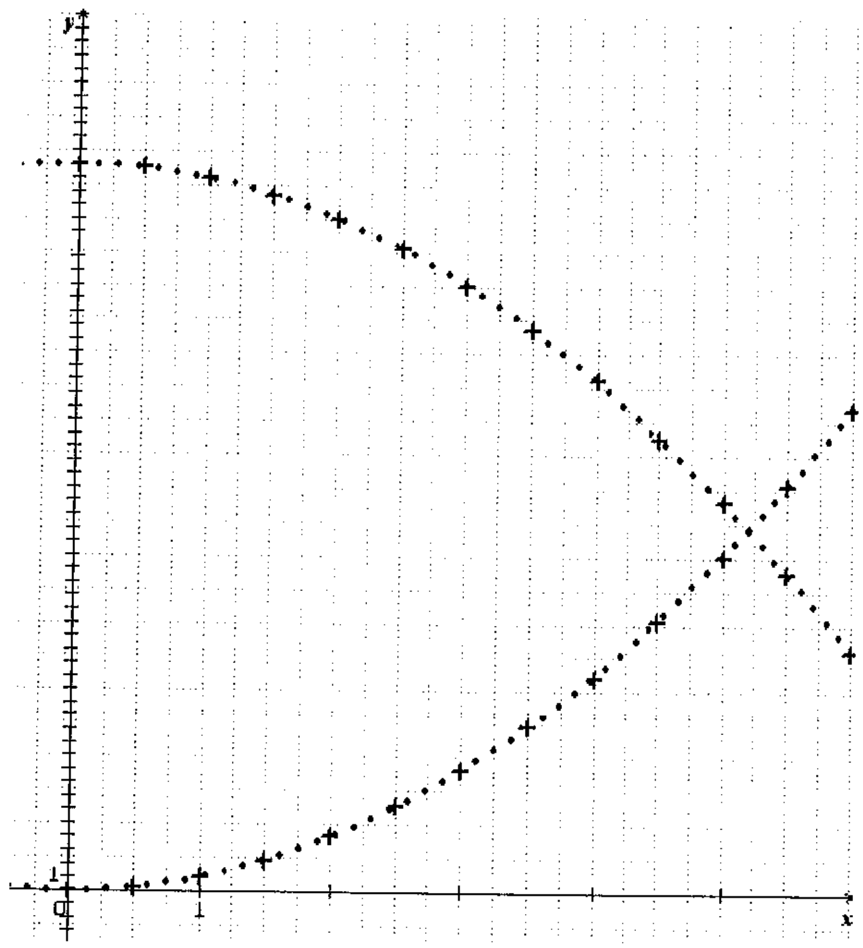
Cela réussit aussi à convaincre ceux qui ont relié les points par des segments... Si on plaçait de plus en plus de points, on pourrait les relier, mais pas par des segments !

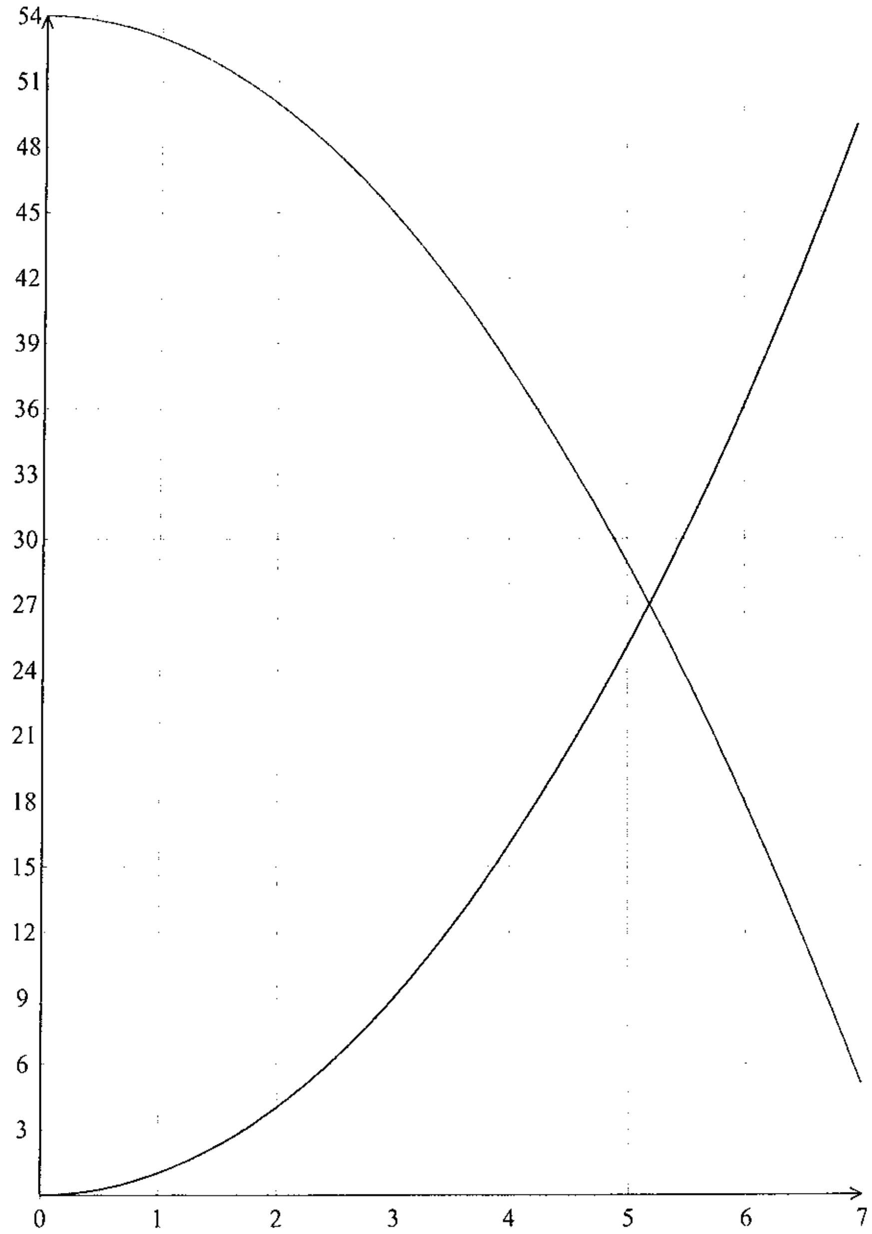
Le professeur présente la construction dynamique des courbes réalisées avec la fonction « Trace » pour finir de convaincre les élèves que si on place beaucoup de points, le graphique est une courbe. Le professeur demande alors de relier les points avec le plus de soin possible, par une « ligne courbe ».

On revient à ce moment-là sur les « augmentations » et « diminutions » évoquées plus haut : des élèves avaient parlé, dans l'étude des périmètres, « d'augmentation régulière » du périmètre du carré lorsque x « augmente ». Peut-on dire la même chose ici des « augmentations » et « diminutions » des aires ? La réponse est immédiate et quasi générale : ce n'est pas le cas ici.
Le professeur fait observer les accroissements des images pour expliciter davantage les qualifications utilisées « régulier », « pas régulier » et leur dit que cela sera étudié en détail plus tard.

Le professeur pose la question suivante : « Sur le graphique représentant les variations des aires, un point est particulier. Lequel ? »

La réponse est quasi unanime : « c'est le point d'intersection des deux courbes ».




54
51
48
45
42
39
36
33
30
27
24
21
18
15
12
9
6
3
0
1
2
3
4
5
6
7

Le professeur demande ensuite de lire sur le graphique les coordonnées de ce point, et de dire quelles sont les informations que donnent ces deux nombres pour le problème.
Après un court temps de réflexion, tous savent lire les coordonnées mais beaucoup butent sur l'interprétation de ces nombres. Il est nécessaire de revenir à la figure dynamique avec affichage des valeurs des aires et également à la construction dynamique des courbes.

Les valeurs légèrement différentes obtenues par la lecture des coordonnées, montrent qu'une lecture graphique ne peut être qu'approximative.

Le professeur demande comment obtenir les coordonnées exactes de ce point ?
Certains élèves trouvent facilement l'ordonnée 27 par un raisonnement sur la moitié de l'aire du rectangle : 9 x 6 = 54 et 54 : 2 = 27.
Le calcul de l'abscisse pose problème. Rares sont ceux qui arrivent à écrire l'équation $x^2 = 27$. *Et encore plus rares sont ceux qui pensent à poser l'équation* $54 - x^2 = x^2$
donc $2x^2 = 54$ *donc* $x^2 = 27$.
Si le chapitre sur les racines carrées n'est pas fait, les élèves passent par l'utilisation de la touche racine carrée pour obtenir une valeur qui ne pourra être qu'approchée (provisoirement !) de la solution positive de cette équation.

C'est la raison essentielle pour laquelle nous avons choisi en 3ème de partir d'un carré tracé dans un rectangle d'aire 54 et non tracé dans un autre carré de côté 6 par exemple. Ce choix de la variable didactique permet de montrer l'utilité de l'outil graphique.

Étape 5 :

Bilan

Pour finir, collectivement, le professeur annonce que l'étude de ce problème a conduit la classe à utiliser quatre fonctions.
Il explique que, ce que l'on appelle « fonction », est un processus qui, à un nombre de départ fait correspondre un nombre d'arrivée. Il l'explicite en utilisant la notation de la flèche sur les

exemples rencontrés dans le problème. Il demande aux élèves d'écrire quelques « associations » à partir des tableaux de valeurs des problèmes, et de les traduire par une phrase en rapport à la situation, par exemple : « 2,5 $\mapsto$ 10, lorsque x vaut 2,5 le périmètre... ». Pour cela, les quatre fonctions rencontrées sont nommées de façons différentes.

Pour faire expliciter les expressions littérales, il termine par $x \mapsto$ ... pour chacune des quatre fonctions. Il fait le lien avec la notation $P(x)$ et fait écrire par exemple pour le carré : $P(x) = 4x$.

Il évoque le caractère particulier de la fonction en jeu dans le cas de l'hexagone en écrivant quelques associations. Il introduit le mot de fonction constante.

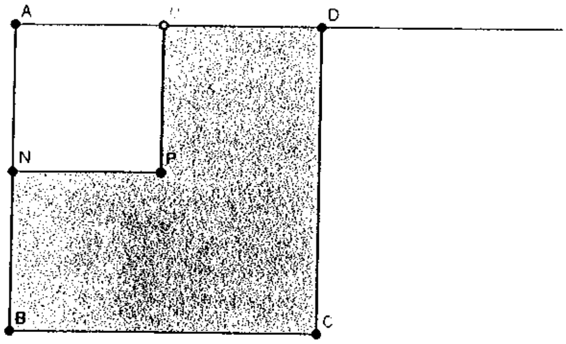
Les termes « image » et « antécédent » peuvent être introduits et utilisés sur quelques exemples.

Il fait remarquer que tableaux et graphiques permettent de « visualiser » les variations de ce que l'on étudie (périmètres ou aires) en fonction d'un nombre qui varie aussi (ici, la position du point T « exprimée » par la valeur de x) et introduit le mot « variable » pour désigner x.

Il demande aux élèves s'ils n'ont pas déjà utilisé des fonctions sans le savoir... Certains font alors référence aux programmes de calculs.

Avant de faire une évaluation sur la notion de fonction, l'étude d'autres situations du même type est indispensable.

Devoir maison – seconde



ABCD est un carré de côté 6 cm. M est un point de la demi droite [AD), on construit le point N de la demi-droite [AB) tel que AM = AN et le point P tel que AMPN est un carré.
On pose AM = x.

Partie A :

1. a. Faire une figure dans le cas où $x = 2$ cm.
   b. Calculer l'aire et le périmètre de l'hexagone MPNBCD.

2. a. Faire une figure dans le cas où $x = 8$ cm.
   b. Calculer l'aire et le périmètre de l'hexagone MPNBCD.

Partie B : étude du périmètre de l'hexagone MPNBCD.

Dans cette partie M peut être placé n'importe où sur la demi-droite [AD).

1. On note $p(x)$ le périmètre de l'hexagone MPNBCD. Donner l'expression de $p(x)$ suivant les valeurs de x.
2. Tracer la représentation graphique de la fonction p.
3. Pour quelle(s) valeur(s) de x le périmètre de l'hexagone est-il égal au double de celui du carré ABCD ?

Partie C : étude de l'aire de l'hexagone MPNBCD.

Dans cette partie M peut être placé n'importe où sur la demi-droite [AD).

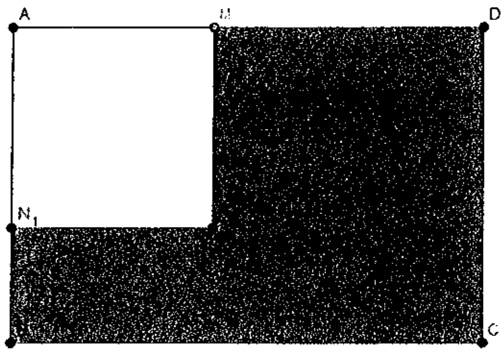
1. On note $a(x)$ l'aire de l'hexagone MPNBCD. Donner l'expression de $a(x)$ suivant les valeurs de x.
2. Tracer la représentation graphique de la fonction a.
3. a. Pour quelle(s) valeur(s) de x l'aire de l'hexagone est-elle égale au double de celle du carré ABCD ?
   b. Pour quelle(s) valeur(s) de x l'aire de l'hexagone est-elle égale à 11 cm² ?

Devoir maison – Première S

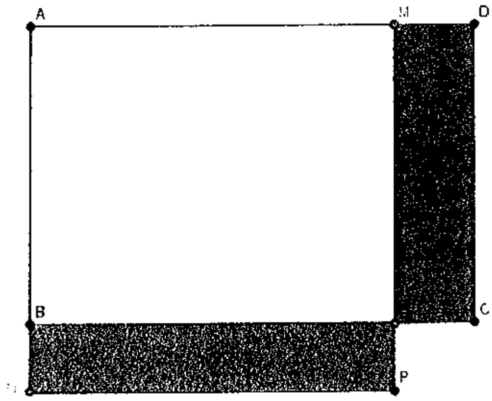
ABCD est un rectangle tel que AB = 9 cm et AD = 6 cm . M est un point de la demi-droite [AD), on construit le point N de la demi-droite [AB) tel que AM = AN et le point P tel que AMPN est un carré.

On pose AM = x .

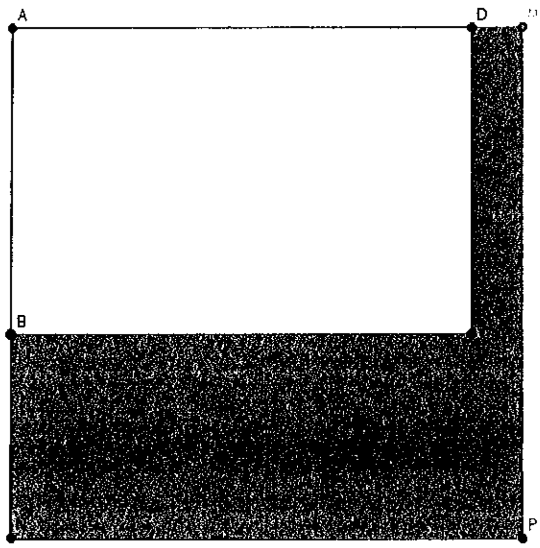
On obtient les figures suivantes :



$0 \leq x \leq 6$



$6 < x \leq 9$



$x > 9$

1. Soit f la fonction qui à x associe l'aire de la surface coloriée en gris.
   Exprimer $f(x)$ et représenter graphiquement cette fonction.
2. Déterminer x pour que l'aire de la surface coloriée en gris fasse 100 cm².
3. Déterminer x pour que l'aire de la surface coloriée en gris fasse 30 cm².

<u>**Éléments de correction pour les deux devoirs**</u>

1- Devoir de seconde : le carré de côté x est superposé à un carré de côté 6.

Partie A :

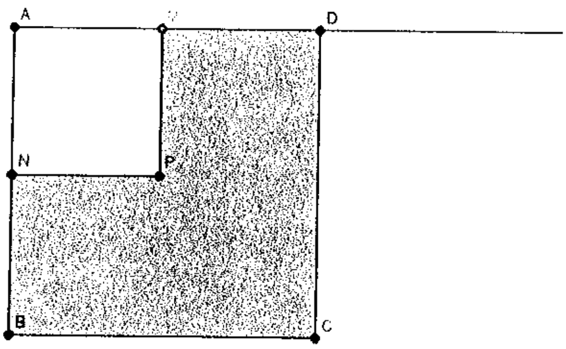


Figure 1

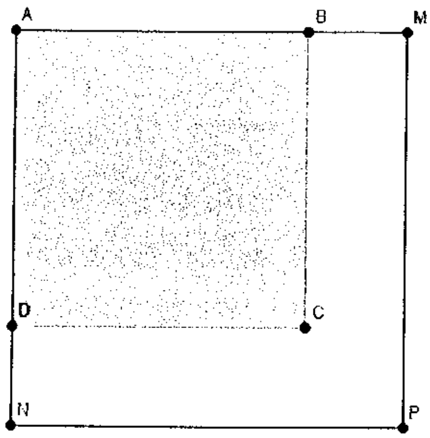


Figure 2

Partie B : Périmètre de l'hexagone.

Si M est sur le segment [AD] le périmètre de MPNBCD est constant, égal à celui du carré de côté 6. On peut le prouver géométriquement (voir ce qui se passe dans une classe de collège) et aussi par le calcul.

Ce périmètre augmente dès que M est hors du segment [AD]. Il est alors égal à celui d'un carré de côté x. Là encore on peut le montrer géométriquement ou par le calcul :

$p(x) = 2(x - 6) + 2x + 12 = 4x$.

On obtient pour représenter les variations du périmètre, une fonction affine par morceaux :

Si $0 \leq x \leq 6$, $p(x) = 24$ et si $x > 6$, $p(x) = 4x$.

Partie C : Aire de l'hexagone.

Si $0 \leq x \leq 6$ (comme dans la figure 1), aire MPNBCD $= 36 - x^2$. C'est un nombre positif.

Si $x > 6$ (comme dans la figure 2), $36 - x^2$ est un nombre négatif, mais sa valeur absolue est toujours égale à l'aire de l'hexagone MPNBCD.

$A(x) = |36 - x^2|$ donne l'aire positive de l'hexagone pour tout x positif.

La notion de valeur absolue n'est pas indispensable ici.

La réponse attendue est simplement :

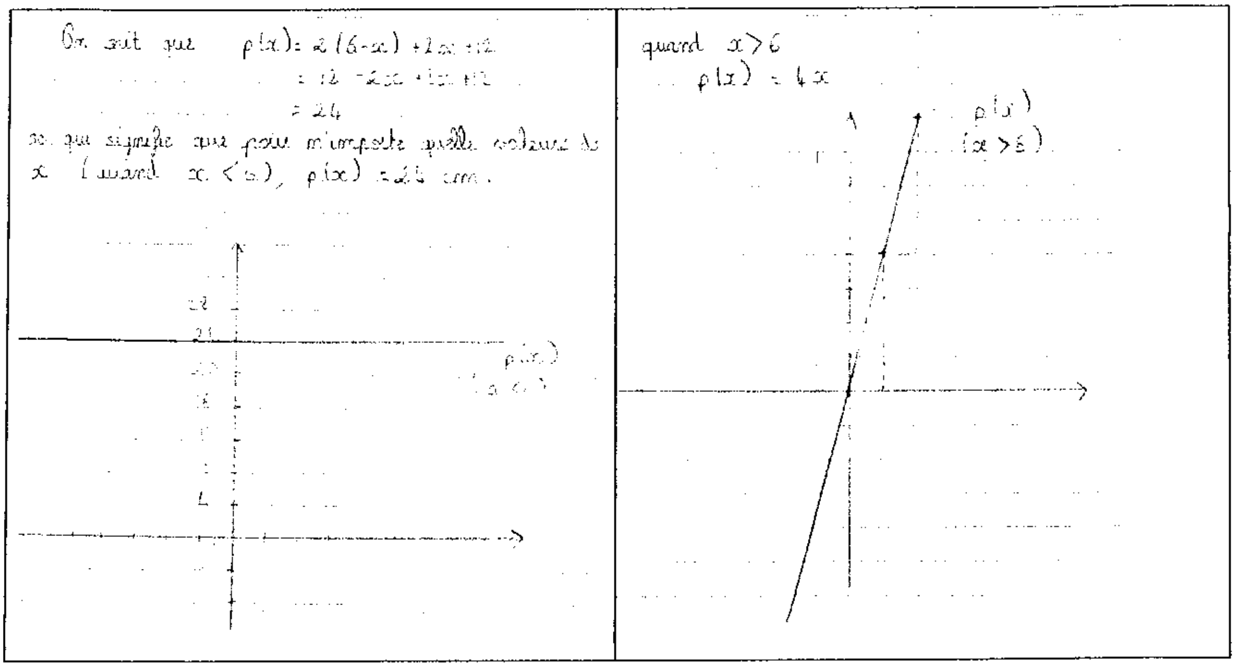
Si $0 \leq x \leq 6$, $A(x) = 36 - x^2$ et si $x > 6$, $A(x) = x^2 - 36$.

La représentation graphique se compose de deux morceaux de parabole.

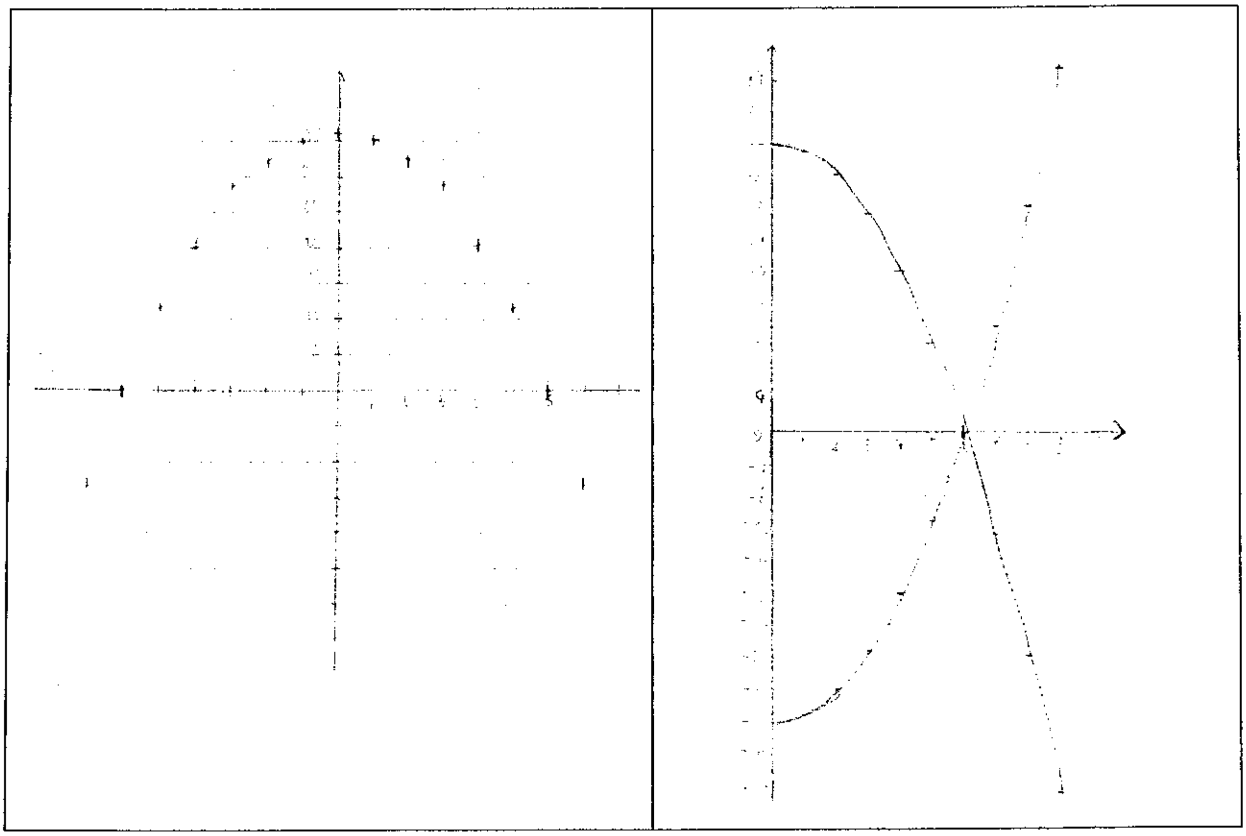
Quelques productions d'élèves :

La première difficulté pour les élèves est de comprendre qu'on a une seule fonction avec des expressions algébriques différentes suivant les valeurs de x :

Pour le périmètre, on trouve ce type d'erreur :



Et pour l'aire :



2- Devoir de 1ère S : le carré de côté x est superposé à un rectangle de dimensions 6 et 9.

Si $0 \leq x \leq 6$, l'aire de MBCDNP est $54 - x^2$.

Si $x \geq 9$, l'hexagone MBCDNP est tout entier à l'extérieur du rectangle. Son aire est : $x^2 - 54$.

En 1ère S, il peut être intéressant (mais non indispensable) de signaler la fonction

$A(x) = |54 - x^2|$ pour $0 \leq x \leq 6$ et pour $x \geq 9$.

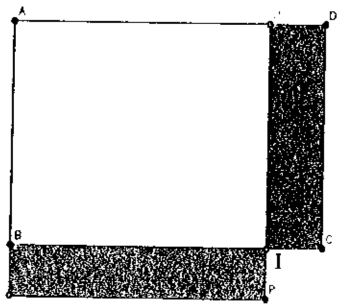


Figure 3 : $6 < x < 9$

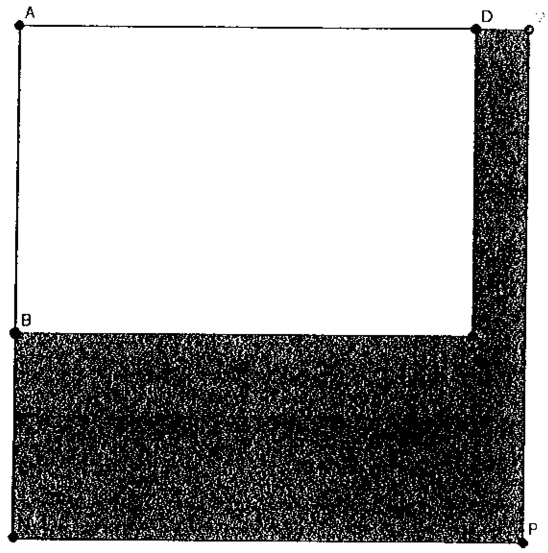


Figure 4 : $x \geq 9$

Pour compléter le graphique, il suffit de chercher quelle fonction donne l'aire du polygone formé des deux rectangles dans le cas $6 < x < 9$:

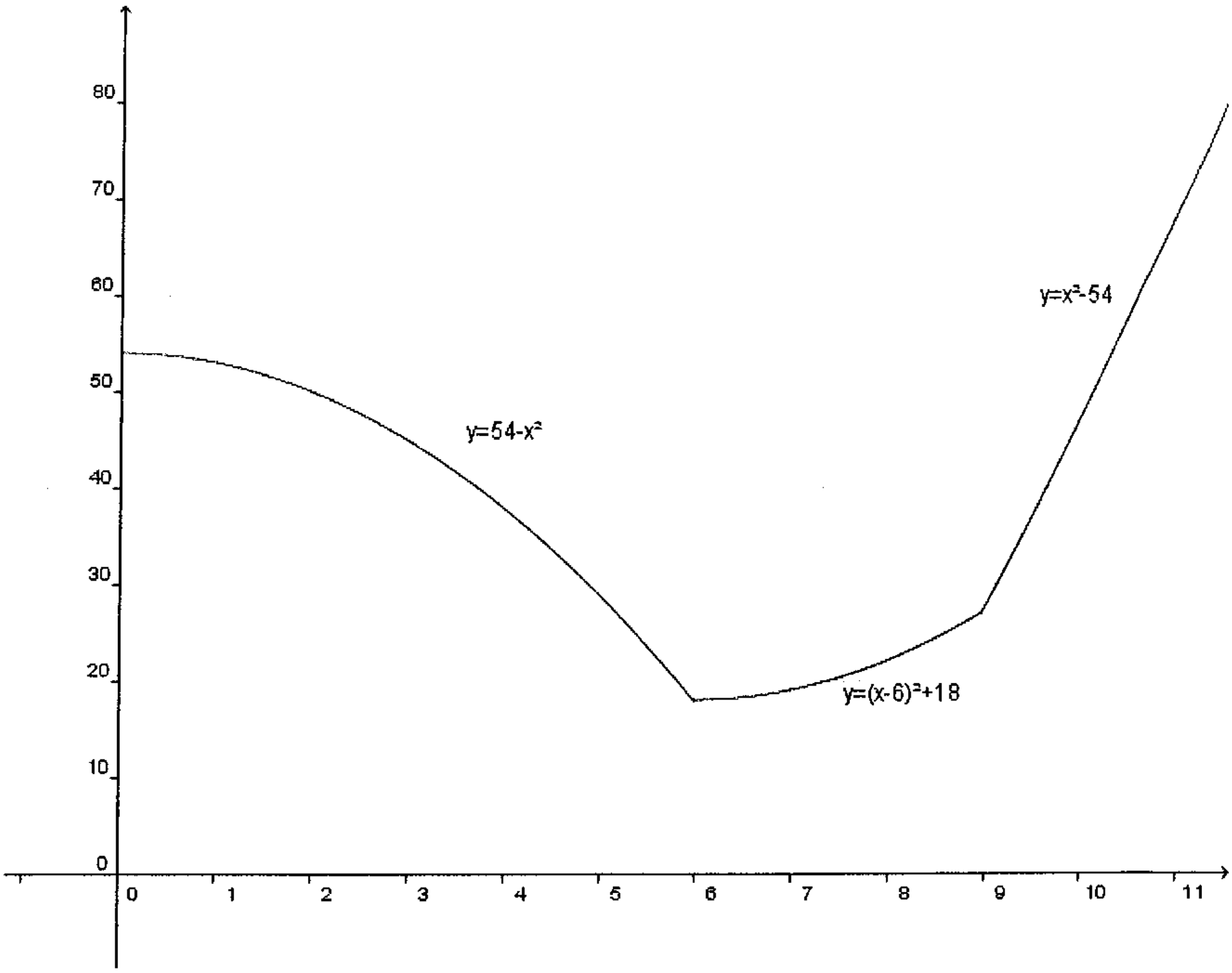
aire MDCI + aire BIPN = $(9 - x) + x\,(x - 6) = x^2 - 12\,x + 54 = (x - 6)^2 + 18$

On peut alors représenter les variations de la fonction avec trois arcs de parabole :

pour $0 \leq x \leq 6$, $A(x) = 54 - x^2$,

pour $6 < x < 9$, $A(x) = x^2 - 12\,x + 54 = (x - 6)^2 + 18$,

pour $x \geq 9$, $A(x) = x^2 - 54$.

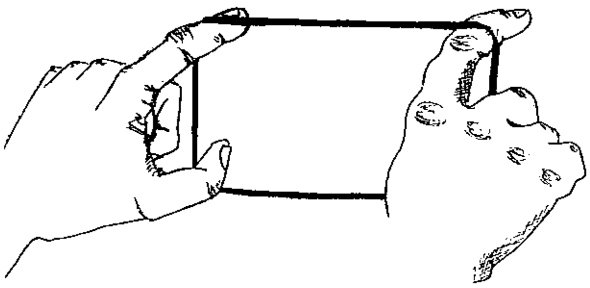


Nous avons choisi les nombres 100 et 30 de façon à obtenir une équation ayant une solution et une autre ayant plusieurs solutions.

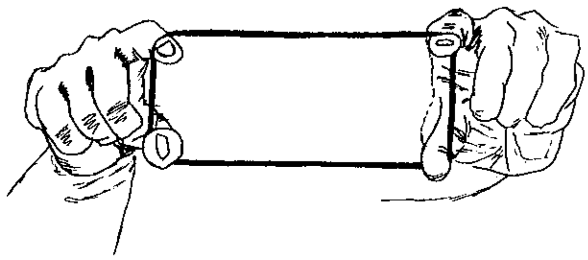
Variation de l'aire de rectangles de périmètre constant

Problème posé

Le professeur utilise une ficelle dont il a noué les deux extrémités. À l'aide des doigts, en écartant l'index et le pouce, il forme des rectangles de même périmètre, environ 40 cm et demande à la classe : « *en passant d'un rectangle à l'autre, qu'est-ce qui change et qu'est-ce qui reste constant*[1] ? »



Ce que fait le professeur.



Ce que voit l'élève.

Objectifs possibles

En troisième :

- introduction des fonctions affines et linéaires
- lecture d'un extremum graphiquement.

En seconde :

- retour sur les fonctions affines et linéaires
- vérification de l'existence d'un extremum algébriquement.

En première :

- étude des variations d'une fonction et recherche d'un extremum.

Notions utilisées

Aire et périmètre d'un rectangle.
Repérage dans le plan.
Notion de fonction et représentation graphique.

Matériel

Ficelle nouée.
Logiciel ou calculatrice graphique pour tracer des courbes.

Niveau

Le début de la situation en 3$^{\text{ème}}$. Son intégralité en seconde ou première.

Fonctions rencontrées

$x \mapsto 20 - x$ en 3$^{\text{ème}}$ et seconde et $x \mapsto -x^2 + 20x$ en seconde et première.

---

[1] D'après Emma CASTELNUOVO, *Matematica numeri e figure* (tome 1), édition la Nuova Italia (1989) et Annie BERTE, *Mathématiques du collège au lycée*, édition Nathan Pédagogie (1996).
Dessins de Laure DESNAVRES.

Variation de l'aire de rectangles de périmètre constant

Cette situation débute par une question posée aux élèves. À cette même question posée de la sixième à la première S, les élèves proposent des réponses présentant bien des points communs.

Après l'étape 1, le développement de la séquence continue dans toutes ces classes. Mais il sera alors différent car cette situation vise des objectifs spécifiques selon les niveaux. Nous le signalons au fur et à mesure. Nous conseillons cependant au professeur de lycée de lire ce qui est dit dans les parties spéciales au collège et inversement.

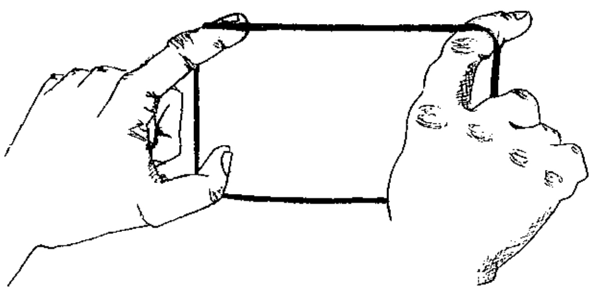
Étape 1:

Présentation du problème

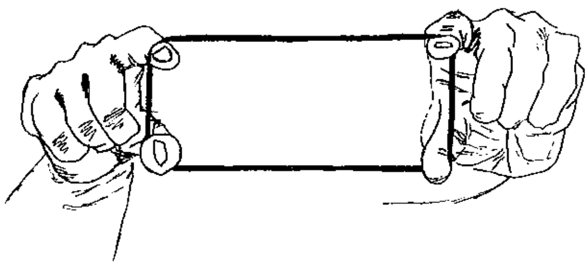
Le professeur utilise une ficelle dont il noue les deux extrémités. A l'aide des doigts, en écartant l'index et le pouce, il forme deux rectangles de même périmètre.

Il est possible de prendre une ficelle mesurant environ 40 cm, voire moins. L'enseignant peut prendre la longueur de ficelle qui convient le mieux pour la manipulation. Il ne communique pas dès le départ cette longueur aux élèves.

L'enseignant forme deux rectangles de formes assez voisines, sans se rapprocher d'un rectangle très aplati pour l'instant.



Ce que fait le professeur.



Ce que voit l'élève.

Première question à la classe : « *en passant d'un rectangle à l'autre, qu'est-ce qui change et qu'est-ce qui reste constant ?* »

- Les élèves disent que la longueur et la largeur changent.

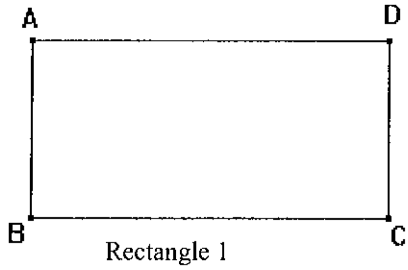
- La classe tombe d'accord sur le fait que les rectangles ont le même périmètre qui est la longueur de la ficelle.
- Des questionnements quant à l'aire de ces deux rectangles apparaissent…

À propos de l'aire, certains élèves disent :
- ils ont la même aire parce qu'ils ont le même périmètre.
- ils ont la même aire parce que cela se « compense », « ce que l'on perd d'un côté, on le gagne de l'autre ».

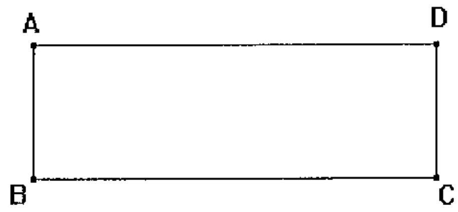
Cette réponse est presque unanime en 6ème et 5ème. Elle est moins majoritaire en 3ème et en seconde. En 1ère, même en S, il y a encore quelques élèves qui sont de cet avis.

➢ Le premier argument utilisant « le même périmètre » est important. Les élèves de 6ème et 5ème l'expriment facilement et cela permettra ensuite au professeur de revenir sur le fait que aire et périmètre sont deux grandeurs différentes.
Cela peut venir des formules qui sont amalgamées par certains élèves qui les confondent pour les calculs.
Cela peut avoir une origine plus « physique ». On peut voir des élèves de 6ème qui justifient la conservation de l'aire en disant : « la surface n'a pas pu partir puisque c'est toujours la même ficelle qui l'entoure ».
D'autre part deux figures fondamentales, le carré et le cercle, contribuent à construire un modèle implicite très fort. Deux carrés ou deux cercles de même périmètre ont la même aire. Bien sûr dans ce cas ils sont isométriques. Mais le modèle de la liaison entre aire et périmètre se renforce du fait que pour le carré ou le cercle, plus le périmètre est grand, plus l'aire est grande et inversement. C'est le cas aussi pour deux triangles équilatéraux ou plus généralement deux polygones semblables. En effet quand une figure varie en restant semblable à elle-même, aire et périmètre varient dans le même sens.

➢ Le second argument des élèves est la compensation. La compensation des variations des dimensions entre longueur et largeur assure la conservation du périmètre. Certains élèves transposent cette idée pour l'aire.



Rectangle 1



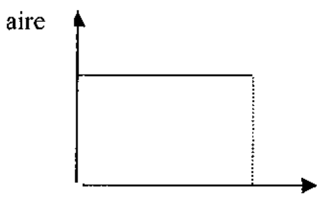
Rectangle 2

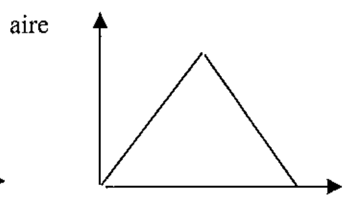
Même s'ils ont du mal à l'exprimer, nous avons compris que ces élèves imaginent qu'en passant du rectangle 1 au rectangle 2, la dimension AB a diminué, ce qui a fait perdre une partie de l'aire « par un aplatissement vers le haut » mais la dimension AD a augmenté de sorte qu'on a retrouvé l'aire perdue « par un étirement vers la droite ».

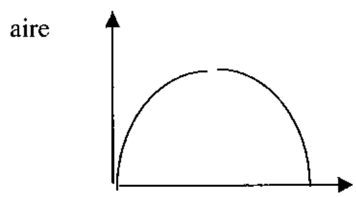
En seconde et en première (pas au collège en général) certains élèves pensent au cas limite, pour dire qu'ils doutent que l'aire soit constante. Dans ce cas le professeur fait le geste avec la ficelle pour que tous les élèves comprennent ce que dit leur camarade, mais sans commentaires. Le professeur fait exprimer les différentes opinions sans prendre parti.

Nous avons vu que certains élèves sont persuadés que l'aire reste constante.
Leurs arguments leur semblent si forts que certains disent : « *mais ce n'est pas possible ! L'aire reste toujours constante et tout d'un coup, quand on arrive au rectangle plat, elle devient nulle !* ».

Dès la classe de seconde, le professeur peut leur demander de conjecturer l'allure d'un graphique donnant la variation de l'aire en fonction de la dimension horizontale. Cette question, posée avant de leur avoir fourni une valeur précise pour le périmètre, donc avant qu'ils pensent à faire des calculs, suscite selon les élèves trois sortes de dessins :







Parfois en troisième, souvent au lycée, certains élèves demandent au professeur quelle est la longueur de la ficelle pour faire le calcul de l'aire pour différents rectangles. D'autres prennent une longueur particulière. Le professeur leur répond qu'il vaut mieux prendre la même longueur pour toute la classe.

Étape 2, version collège :

Une dimension est fonction de l'autre

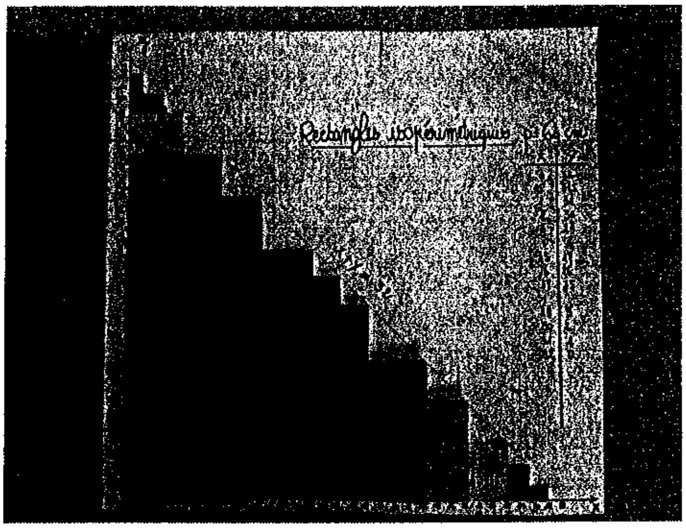
Le professeur indique 18 cm comme longueur de la ficelle et demande aux élèves de dessiner 7 rectangles qui ont pour périmètre 18 cm.

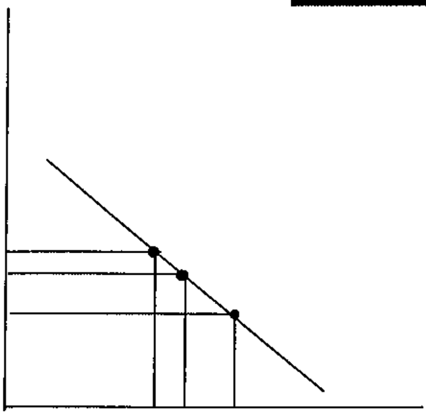
Les élèves trouvent facilement trois rectangles : 7 cm sur 2 cm, 6 cm sur 3 cm, et 5 cm sur 4 cm. Certains hésitent un peu pour dessiner celui de 8 cm sur 1 cm car il est assez loin du rectangle habituel (« trop long ! »).
Pour trouver ces dimensions, certains élèves n'utilisent pas le demi-périmètre de 9 cm. Ils choisissent une dimension (4 cm par exemple) puis calculent l'autre ainsi :
$4 + 4 = 8$, $18 - 8 = 10$ et $10 : 2 = 5$
Le professeur peut signaler à la classe que certains élèves font un calcul plus rapide :
$9 - 4 = 5$

Le passage aux décimaux pour trouver d'autres rectangles n'est pas immédiat pour tous les élèves. Pour obliger les élèves à utiliser les décimaux, le professeur a choisi un demi-périmètre pas trop grand et demande la production d'un nombre suffisant de rectangles. Penser au carré, de côté 4,5 cm, peut leur permettre de passer aux décimaux à condition de savoir que le carré est un rectangle. Le professeur peut en profiter pour revenir sur la définition du rectangle.

Lors du tracé des rectangles, un papier quadrillé est commode pour les angles droits. Contrairement à ce qu'on pourrait croire le papier quadrillé 0,5 cm sur 0,5 cm n'aide pas nécessairement les élèves à penser à des dimensions comme par exemple 3,5 cm. Le professeur peut laisser les élèves libres de choisir leur papier.

En sixième, le professeur demande aux élèves de découper les sept rectangles et de les rassembler en les superposant avec un sommet commun par ordre croissant d'une de leurs dimensions ; on obtient alors l'alignement du quatrième sommet.

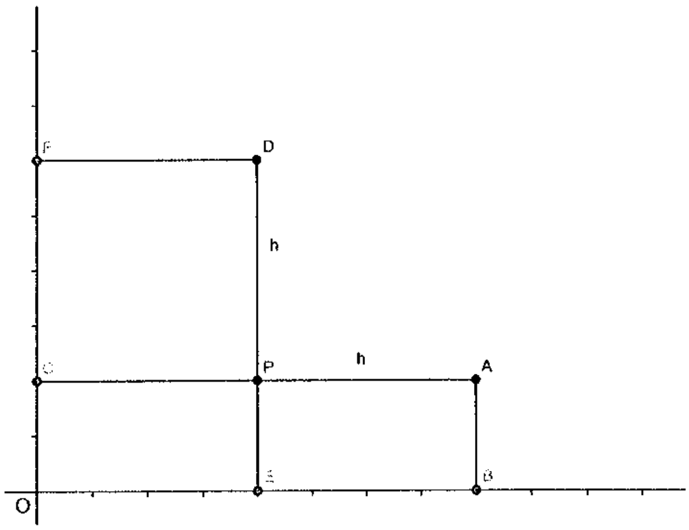




Au-delà de la sixième, pour éviter les découpages, le professeur peut demander de dessiner les rectangles de façon à ce qu'ils aient tous un angle droit commun et de mettre en couleur le quatrième sommet. Les élèves remarquent que les sommets des rectangles sont alignés.

Pourquoi obtient-on cet alignement ?

La preuve suivante peut être donnée par le professeur de cinquième voire de sixième en faisant le raisonnement avec une valeur particulière pour h (1 cm, puis 2 cm, puis 0,5 cm) pour que les élèves comprennent que cet alignement est toujours réalisé.



Les deux rectangles OCAB et OFDE ont pour périmètre 18.

On a donc FD + DE = 9 et CA + AB = 9.

Si on enlève h à une des dimensions d'un rectangle, on doit rajouter h à l'autre dimension pour obtenir un rectangle de même périmètre.

Donc si AC = FD + h, AB = DE – h, sur la figure ci-dessus, on a DP = AP = h

Le triangle DPA est isocèle et rectangle, donc la droite (AD) forme un angle de 45° avec l'horizontale.
Ce raisonnement est valable pour tous les rectangles, donc les quatrièmes sommets sont alignés sur la même droite faisant un angle de 45° avec l'horizontale.

Le professeur demande aux élèves de rassembler dans un tableau les différentes dimensions des rectangles.

Dans les tableaux des élèves les valeurs dans la première ligne ne seront pas nécessairement classées par ordre croissant ou décroissant.

Les élèves discutent sur la possibilité de mettre dans le tableau à la fois par exemple les dimensions (1,8) et (8,1). Ils remarquent, avec les rectangles découpés ou dessinés, qu'ils peuvent placer la plus petite dimension horizontalement ou verticalement d'autant que les deux possibilités s'obtiennent avec la ficelle.
Le professeur ne doit pas hésiter à refaire le mouvement.

Le professeur peut esquisser le tableau ainsi :

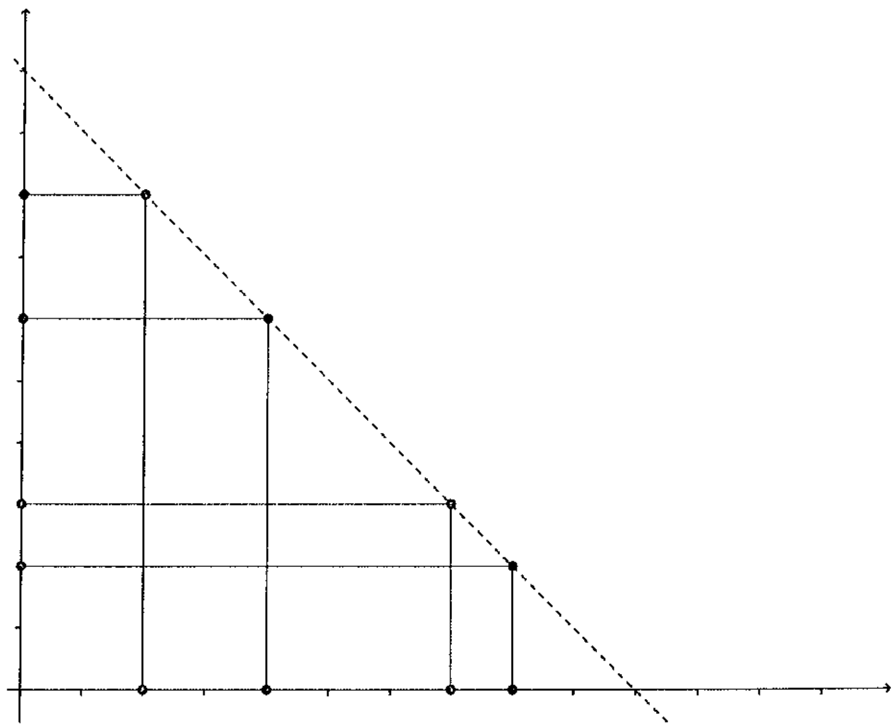
	1								
	8								

Ceci permettra de comprendre que dans le tableau il ne faut pas appeler la première ligne « longueur » et la seconde « largeur », ce qui d'ailleurs ne convient pas pour le carré, mais plutôt « première dimension » et « seconde dimension » ou encore x et y.

À partir de la cinquième, la recherche des différents rectangles peut s'énoncer comme la résolution du problème suivant : « **Trouver deux nombres x et y tels que $x + y = 9$** ».
Il s'agit de tester une égalité pour différentes valeurs des lettres (initiation à l'algèbre).
Il s'agit aussi d'une équation à deux inconnues qui a une infinité de solutions.

Le professeur propose aux élèves de placer toutes les valeurs sur un graphique

On aboutit à :



Ceci peut permettre d'introduire en collège les axes de coordonnées.

Sur un des axes on a la mesure d'une des dimensions x du rectangle et sur l'autre axe la mesure de l'autre dimension y. On retrouve les rectangles dessinés au début.

Quand on donne une valeur à x on peut trouver y, car $y = 9 - x$.

Le professeur peut introduire la notion de fonction comme « programme de calcul » qui à tout nombre x associe son « image » $9 - x$.

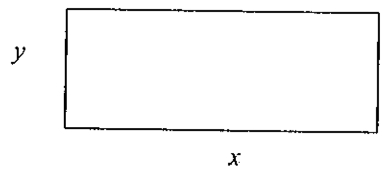
En troisième, il peut introduire la notation : $4 \mapsto 5$; $1 \mapsto 9$; puis $x \mapsto 9 - x$

Étape 2, version lycée :

Une dimension est fonction de l'autre

Le professeur indique 40 cm comme longueur de la ficelle et demande aux élèves d'écrire la relation entre les deux dimensions.

Le professeur peut choisir une longueur de ficelle plus grande que 18 cm et divisible par 4 de sorte que la mesure du côté du carré soit un entier. Il n'y a plus à ce stade à attirer l'attention des élèves sur les décimaux.
L'objectif est ailleurs pour les élèves de seconde : il s'agit de travailler sur la représentation graphique de la fonction de second degré et la recherche d'un maximum. Quelques calculs algébriques avec la forme canonique du trinôme sont nécessaires, cette situation vient donc après l'étude de la fonction carrée. Il est préférable d'avoir des nombres entiers et simples pour que les élèves puissent faire ces calculs sans difficultés inutiles.



Les élèves obtiennent $x + y = 20$.

Il faut alors choisir la variable « principale » et exprimer une des dimensions en fonction de l'autre : $y = 20 - x$.
Ils retrouvent une fonction affine dont le professeur demande la représentation graphique, sachant que ces fonctions ont déjà été vues en troisième et éventuellement révisées au lycée.

Le professeur fait remarquer que dans le domaine d'étude de la fonction $0 \leq x \leq 20$, la représentation est un segment de droite. En prenant un point quelconque sur ce segment et en cherchant ses coordonnées par projection sur les axes, on dessine un des rectangles de ficelle.

Étape 3:

Variation de l'aire des rectangles

1) Maintenant, tout le monde est-il bien convaincu que l'aire varie ?

Au collège comme au lycée, dès que les élèves ont choisi des valeurs particulières pour les dimensions, ils peuvent se rendre compte par le calcul que l'aire des rectangles n'est pas constante.

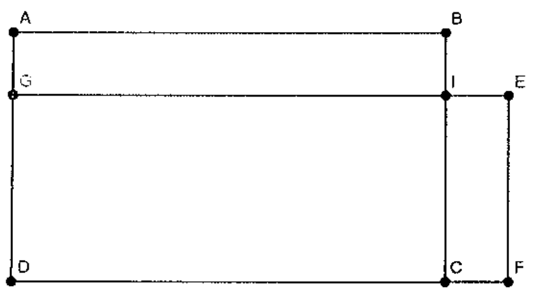
Nous avons vu que certains élèves au collège sont persuadés que l'aire reste constante, pour deux raisons :

- La première raison est l'amalgame aire et périmètre en sixième surtout.

Pour remédier à cette confusion entre les deux grandeurs, il est important que des élèves de sixième voient, s'ils ne l'ont pas expérimenté suffisamment à l'école élémentaire, qu'avec « la même ficelle », on peut entourer une surface très petite  ou plus grande si on tend davantage la ficelle.

- La seconde raison est l'idée de la compensation. Jusqu'en seconde, voire au-delà, cette idée est très forte. Pour argumenter, parfois les élèves peuvent proposer eux-mêmes un dessin avec deux rectangles superposés comme ils l'ont fait avec les découpages ou les dessins précédents.

S'ils ne le font pas le professeur fait lui-même le dessin et les élèves comprennent que les parties grisées n'ont pas la même aire.



Il n'y a pas de compensation car
BI = IE et EF < AB

Plus le rectangle GEFD va « s'aplatir », plus la différence entre AB et EF sera grande et donc plus l'aire deviendra petite.

Il arrive parfois qu'un élève propose un rectangle de 20 cm (ou 9 cm selon la donnée du périmètre) sur 0 cm : c'est un segment qui a 40 cm (18 cm) de périmètre quand on en fait le tour ! Le professeur montre effectivement qu'on y arrive en poursuivant le mouvement avec la ficelle. Ce segment peut être qualifié de rectangle aplati comme on peut parler de parallélogramme aplati ou de triangle aplati dans d'autres situations. Ainsi, à la limite, l'aire est devenue nulle.

Pour expliciter l'idée de limite, le professeur peut proposer un rectangle de 19,9 cm (ou 8,9 cm) sur 0,1 cm. Les élèves pensent alors au rectangle de 19,99 cm (ou 8,99 cm) sur 0,01 cm et ainsi de suite et progressent vers le cas limite.

Une autre façon d'aller vers le cas limite est de demander aux élèves de trouver le rectangle qui a la plus petite aire.

2) Quel rectangle a l'aire la plus grande ?

Le professeur peut donner une ficelle à chaque élève afin qu'il réalise lui-même l'expérience. La manipulation de la ficelle par le professeur ou par eux-mêmes permet aux élèves de conjecturer que c'est le carré.

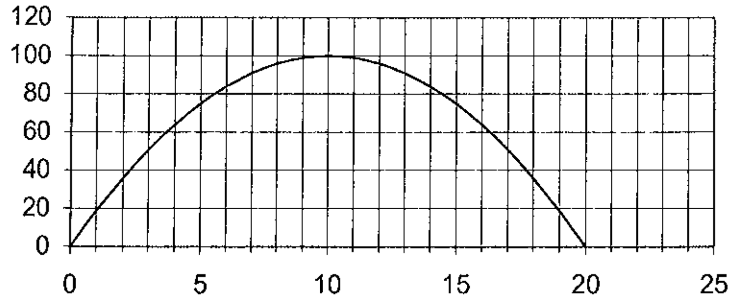
L'aire croît puis décroît. Si on admet la continuité de la variation de l'aire, on conjecture qu'elle diminue à mesure que le rectangle s'aplatit. C'est le carré qui est le « moins plat ». On peut remarquer la symétrie des positions par rapport à la position du carré. De ce fait, il semble « évident », vue la symétrie du phénomène, que l'aire soit maximale pour le carré.

Après l'expression de la conjecture, certains élèves disent qu'on pourrait s'en rendre compte avec un graphique donnant la variation de l'aire. Le professeur souligne qu'il faut préciser la variable, par exemple la même dimension déjà utilisée pour le graphique précédent.

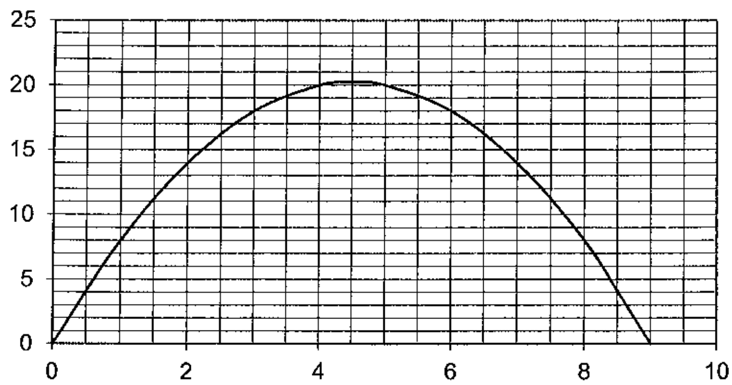
3) Représenter graphiquement la variation de l'aire.

Les élèves font le graphique point par point en ayant construit un tableau des valeurs de l'aire. *Ils peuvent utiliser celui obtenu lors de l'étape 2 en rajoutant une troisième ligne pour l'aire. Le professeur ou les élèves peuvent préférer un deuxième tableau indépendant.*

- Avec un périmètre de 40 cm



- Avec un périmètre de 18 cm



Les élèves de collège relient souvent les points par des segments de droite. Par exemple s'ils ont relié les points de coordonnées (3, 18) et (4, 20) par un segment, le professeur leur montre que le point d'abscisse 3,5 qui a pour ordonnée 19,25 n'est pas sur ce segment.
En collège, le professeur peut faire dessiner le graphique sur le papier quadrillé des cahiers ordinaires car avec des abscisses dont la partie décimale est 0,5 comme 3,5 ou 4,5, la valeur de l'aire a une partie décimale de 0,25. Or justement les carreaux sont subdivisés en 4 par les lignes des cahiers.
Le tracé d'un segment peut arriver notamment pour joindre les points (4 ; 20) et (5 ; 20) mais la plupart des élèves comprennent qu'il se passe sans doute autre chose entre ces deux points.
Il semble bien que le maximum de l'aire de 20,25 est obtenu pour 4,5. Avec un retour à la ficelle, ils font remarquer que c'est donc le carré qui a l'aire maximale (si une des dimensions est 4,5 l'autre aussi).

Une fois le graphique terminé, le professeur peut donner des exercices de lecture graphique et en troisième, introduire la notion d'antécédent. Chaque nombre compris entre 0 et 20,25 a deux antécédents. Les élèves remarquent l'axe de symétrie de la courbe, qui correspond aux rectangles symétriques précédemment dessinés.

Au lycée, la lecture du maximum pour $x = 10$ est immédiate. L'enjeu n'est plus la lecture graphique mais la preuve.

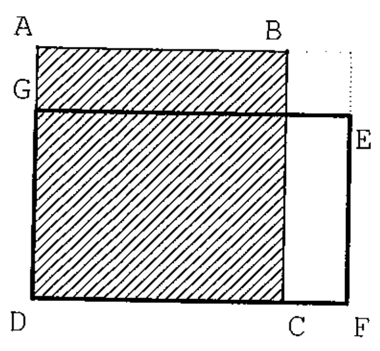
4) Prouver que le carré a l'aire la plus grande.

Avec le tableau de valeurs, et le graphique, la conjecture s'est renforcée. Comment la prouver ?

Dès la sixième, le professeur peut prolonger les remarques faites par l'observation de la ficelle en revenant au dessin des rectangles superposés qui montrait qu'il n'y avait pas compensation.

La perte d'aire est d'autant plus grande que le rectangle est plus « plat » c'est à dire « plus loin du carré », à mesure que la différence entre les dimensions est la plus grande.
D'où l'idée de refaire un dessin en partant cette fois du carré pour montrer que, quand on le transforme en rectangle aussi bien vers le haut que vers le bas, dans les deux cas l'aire diminue.

On superpose un carré ABCD et un rectangle non carré GEFD.



On montre qu'on ne peut que perdre de l'aire en passant du carré au rectangle. Pour ne pas changer le périmètre en partant du carré, on augmente un côté de h et on diminue l'autre du même h. De ce fait on obtient dans le coin un carré de côté h dont l'aire h^2 représente l'aire que l'on perd en passant du carré au rectangle.
Donc pour que l'aire soit maximale, il faut que $h = 0$ et donc que le rectangle reste carré.

En sixième :

Le professeur fait ce raisonnement pas à pas en donnant à h plusieurs valeurs particulières.

En troisième :

Cette démonstration peut se traduire ainsi sous la forme algébrique :

Quel que soit h, l'aire du rectangle s'écrit : $(a + h)(a - h) = a^2 - h^2$ et il faut que $h = 0$ pour avoir l'aire maximale. Cette aire maximale est celle du carré soit a^2.

Dès la troisième, le professeur peut éventuellement faire démontrer l'égalité

$(x + y)^2 - (x - y)^2 = 4\,xy$.

Puis avec des questions progressives à propos d'un rectangle de dimensions variables, on peut arriver à comprendre que si le demi-périmètre $x + y$ est constant alors l'aire xy est maximale si $x - y = 0$.

Dans une classe de seconde, confronté à cette preuve, un élève avait dit qu'il ne comprenait plus rien car si la somme $x + y$ est constante, la différence aussi doit être constante car une différence c'est aussi une somme puisque $x - y = x + (-y)$.

À partir de la seconde :

Les élèves expriment l'aire en fonction d'une seule inconnue et obtiennent :

$$A(x) = x \times y = x \times (20 - x) = -x^2 + 20x$$

Pour démontrer que 100 est un maximum, il y a différentes possibilités.

a) <u>En utilisant la conjecture du maximum égal à 100 :</u>

- Chercher le signe de la différence $100 - (-x^2 + 20x) = 100 + x^2 - 20x = (x - 10)^2$
  Cette différence est toujours positive ou nulle d'où la conclusion.

- Ou bien résoudre l'inéquation $-x^2 + 20x \leq 100$ et on aboutit à $-x^2 + 20x - 100 \leq 0$, c'est-à-dire $-(x - 10)^2 \leq 0$ qui est vraie pour toutes les valeurs de x.

b) <u>Sans utiliser la conjecture :</u>

- Sans exiger la forme canonique, le professeur demande aux élèves de démontrer que $A(x) = 100 - (x - 10)^2$ et d'en tirer les conclusions sur le maximum.

- Ou bien les élèves doivent eux-mêmes trouver la forme canonique avec un éventuel coup de pouce du professeur.

Ainsi $A(x) = -(x - 10)^2 + 100 = 100 - (x - 10)^2$.

À partir de là, ils peuvent démontrer que le maximum 100 est atteint lorsque $x = 10$.

Sachant que $x + y = 20$, ils obtiennent aussi $y = 10$ et donc le carré.

Les élèves peuvent aussi prouver la symétrie de la parabole par rapport à l'axe d'équation $x = 10$, ce qui rejoint la symétrie constatée en fabriquant les rectangles avec la ficelle.

Étape 4 :

Devoir à la maison pour le lycée (seconde)

1ère partie :

On considère un carré de côté 10 cm.

1) a) On diminue un côté de 1 cm et on augmente l'autre de 1 cm. Tracer le rectangle obtenu.

   b) On augmente un côté de 2,5 cm et on diminue l'autre de 2,5 cm. Tracer le rectangle obtenu.

   c) On diminue un côté de la longueur de votre choix et on augmente l'autre de la même longueur de votre choix. Tracer le rectangle obtenu.

   Qu'ont en commun tous ces rectangles ? Qu'ont-ils de différent ?

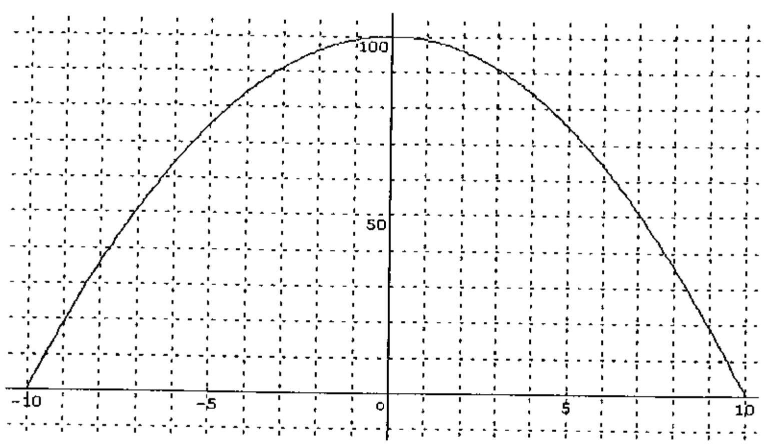
2) On note x la valeur que l'on ajoute à un des côtés et que l'on retranche à l'autre. Montrer que l'aire $f(x)$ du rectangle obtenu est égale à $100 - x^2$.

3) Est-ce que calculer $f(-1)$ a du sens du point de vue du problème géométrique ?

4) On considère la fonction $f : x \mapsto 100 - x^2$

   f représente l'aire d'un rectangle de côté x. Quel est dans ce cas l'ensemble de définition de cette fonction ?

Voici la courbe représentative de f pour $x \in [-10 ; 10]$



5) Déterminer graphiquement les valeurs de x pour lesquelles $f(x) = 96$. Retrouver ce résultat par le calcul. En déduire les dimensions a et b d'un rectangle de demi-périmètre 20 et d'aire 96.

2ème partie :

Problème : « *Trouver les dimensions d'un rectangle d'aire 96 et de demi- périmètre 20.* »

Les babyloniens ont légué des centaines de tels problèmes dans plus de 300 tablettes d'argile. La méthode babylonienne pour résoudre ce problème consiste à opérer sur les nombres en suivant les instructions énumérées par le scribe :
1) Diviser par 2 le demi- périmètre : $20 \div 2 = 10$
2) Élever au carré : $10^2 = 100$
3) Retrancher l'aire donnée 96 à 100 : $100 - 96 = 4$
4) Extraire la racine carrée : 2
5) La longueur est $10 + 2 = 12$ et la largeur est $10 - 2 = 8$.

a) Appliquer ce programme de calcul pour trouver les dimensions d'un rectangle d'aire 51 et de demi-périmètre 20.

b) Appliquer ce programme pour trouver deux nombres dont le produit est 105 et la somme 22.

c) La tablette babylonienne ne donne que le programme sans dire comment il a été trouvé ni si ce programme va toujours donner le bon résultat. Expliquer, en vous aidant des notations de la première partie, pourquoi il conduit au résultat exact quand le demi-périmètre est 20 et l'aire donnée quelconque inférieure à 100.

d) À quelle condition sur la somme donnée S et le produit donné P, peut-on trouver les deux nombres ?

3ème partie :

Dans son ouvrage « *L'Arithmétique* », Diophante se propose de résoudre le problème général suivant : « trouver deux nombres dont la somme et le produit sont des nombres donnés ». Pour cela il introduit une inconnue qu'il appelle « arithme ».

Voilà ce qu'il écrit :

« Proposons que la somme des nombres forme 20 unités et que leur produit forme 96 unités. Que l'excédent des nombres soit 2 arithmes. Dès lors, puisque la somme des nombres est 20 unités, si nous divisons en deux parties égales, chacune des parties sera la moitié de la somme, ou 10 unités. Donc si nous ajoutons à l'une des parties et si nous retranchons de l'autre partie, la moitié de l'excédent des nombres, c'est-à-dire 1 arithme, il s'établit de nouveau que la somme des nombres est 20 unités et que leur excédent est 2 arithmes. En conséquent, posons que le plus grand nombre est l'arithme augmenté de 10 unités qui sont la moitié de la somme des nombres ; donc le plus petit nombre sera 10 unités de moins 1 arithme et il s'établit que la somme des nombres est 20 unités et que leur excédent est 2 arithmes.

Il faut aussi que le produit des nombres forme 96 unités. Or leur produit est 100 unités moins 1 carré d'arithme ce que nous égalons à 96 unités, et l'arithme devient 2 unités. En conséquence, le plus grand nombre sera 12 unités et le plus petit sera 8 unités, et ces nombres satisfont la proposition. »

1) La solution donnée par Diophante concerne une somme et un produit particulier. Lesquels ?

2) Cette solution vous parait-elle facile à comprendre à la première lecture ?
Pourtant nous allons voir qu'il y a un grand progrès entre ce que dit le scribe babylonien et ce que dit Diophante qui est plus près de nous.

3) En appelant a et b les deux nombres et x l'inconnue qu'il appelle l'Arithme, traduire avec nos notations les trois extraits suivants :
   - « que l'excédent des nombres soit 2 Arithmes » (l'excédent veut dire la différence entre le grand et le petit) ;
   - « le plus grand nombre est 1 Arithme augmenté de 10 unités » ;
   - « le plus petit nombre sera 10 unités moins 1 Arithme ».

4) À partir de la traduction de ces phrases, terminer la solution du problème en suivant la méthode de Diophante.

5) Pouvez-vous expliquer en quoi la solution de Diophante traduit un progrès mathématique par rapport à la solution du scribe babylonien ?
6) Citez quelques outils mathématiques que vous voyez dans nos solutions pour résoudre des problèmes et que n'avait pas Diophante.

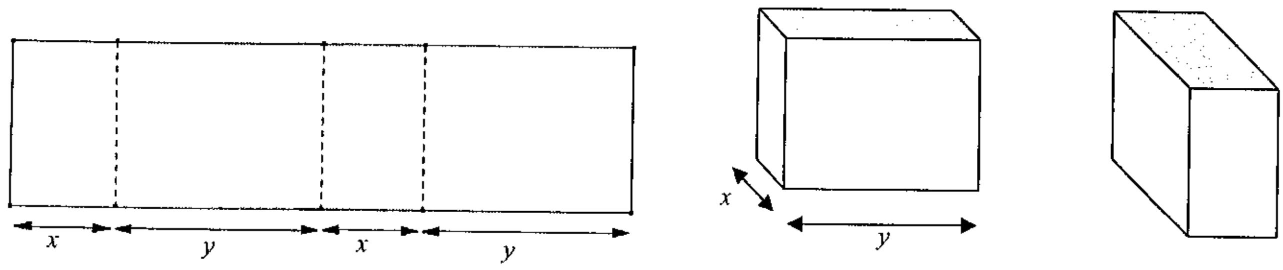
Recherche :
Trouver des renseignements sur le peuple babylonien : à quelle période vivait-il ? Dans quelle région du monde ? Quelles étaient les richesses de cette civilisation ?

Remarques :
La première partie met en évidence qu'un autre choix de la variable dans le problème de la ficelle aurait permis d'obtenir une expression plus simple de l'aire.
En appelant a le côté du carré, l'aire du rectangle $A(x) = (a+x)(a-x) = a^2 - x^2$.
C'est l'inconnue que choisit Diophante.
C'est le même calcul que nous avons donné plus haut pour exprimer algébriquement la démonstration géométrique du maximum à partir du dessin du carré pour les élèves de collège.

La forme canonique du trinôme (pour $a = 10$*) est* $A(x) = 100 - (x-10)^2$
Avec un changement de variable, $X = 10 - x$, *on obtient ainsi une fonction paire*
$f(X) = 100 - X^2$, *ce qui revient à une translation de la courbe représentant la fonction A.*

Exercice d'application

1) Des boîtes à base rectangulaire sont toutes faites avec la même feuille rectangulaire pour fabriquer leur surface latérale. Les dimensions de cette feuille sont par exemple 40 et 10.

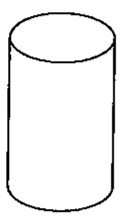


Pour cela, on plie le rectangle selon quatre plis comme indiqué en pointillés sur le dessin

Ces boîtes, toutes réalisées avec la même feuille pour leur surface latérale, ont-elles le même volume ? Sinon, étudier ses variations à l'aide des variations d'une fonction.

On retrouve le problème précédent avec $x + y = 20$

2) Et si on réalise une boîte cylindrique en prenant cette feuille comme surface latérale, la boîte obtenue aura-t-elle le même volume que les boîtes précédentes ou qu'une des boîtes précédentes ?



On peut faire le lien avec le fait que les boîtes de conserve sont souvent cylindriques.

Prolongements et compléments

Cette situation très riche peut être utilisée à de nombreux niveaux au collège et au lycée, d'autant plus qu'elle se poursuit comme nous allons le voir par le problème des rectangles d'aire constante qui aboutit à deux représentations graphiques d'hyperboles.

A- Plusieurs notions mathématiques importantes pourront être reprises plus tard

1-Cette situation permet de remarquer avec des élèves plus grands que la fonction qui, à la dimension x associe la dimension y, est la même que celle qui associe la dimension y à la dimension x.
Ceci signifie que la fonction est sa propre réciproque. Cette propriété se traduit par une symétrie par rapport à la bissectrice des axes.

2- Quand les élèves ont fait le tour de la question, ils sont persuadés qu'il n'y a pas de discontinuité quand l'aire devient nulle : on a une fonction continue et on étudie ses variations entre deux points où elle s'annule (pour 0 et pour 9). Comme elle n'est pas constante, elle passe au moins par un extremum entre ces deux points et comme les valeurs sont toujours positives, il y a donc au moins un maximum.
Même si ce bilan n'est pas explicité complètement par le professeur, nous allons voir que certains élèves de seconde ont construit un modèle assez fort pour s'en servir dans un autre contexte (voir la situation dite « des haricots verts »).

B- Un problème géométrique dans le plan

Nous donnons en annexe de cette brochure, le détail de ce qui suit avec les démonstrations.

1-Avec la même ficelle, peut-on réaliser une figure plane d'aire plus grande que le carré ?
Le professeur de troisième peut proposer aux élèves de comparer l'aire d'un triangle équilatéral, l'aire d'un carré, l'aire d'un hexagone régulier et l'aire d'un cercle, tous de même périmètre. Il est commode de prendre pour ce périmètre la valeur 6, mais on peut comprendre

que le résultat sera le même si le périmètre est $6a$. Le cercle a l'aire la plus grande, puis vient l'hexagone, puis le carré, puis le triangle.

2- Quels sont les polygones réguliers qui pavent le plan ?

Une démonstration accessible au collège conduit à étudier la croissance d'une suite (fonction particulière). Les variations de cette fonction associée à l'examen des diviseurs de 360 permet de conclure facilement que ce sont les triangles équilatéraux, les carrés et les hexagones réguliers qui pavent le plan.

Ceci permet de comprendre la forme des alvéoles des abeilles qui obtiennent le plus de place possible avec le minimum de cire.

C- Retour sur la variation de l'aire des rectangles pour le professeur

Pour les élèves, nous avons montré géométriquement et algébriquement que le maximum de l'aire se produisait pour le carré.

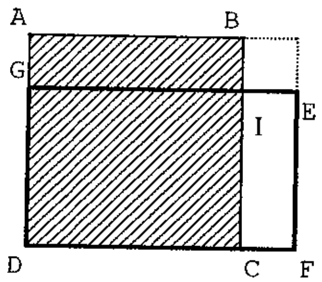


Figure 1

Nous avons vu qu'on ne pouvait que diminuer l'aire en passant du carré de côté a à un rectangle. En effet, pour que le périmètre du carré reste constant on augmente un côté de h et on diminue l'autre du même h. On perd l'aire du rectangle ABIG et on gagne celle du rectangle IEFC. Même si h est petit par rapport à a la compensation n'est pas tout à fait réalisée. On obtient dans le coin un carré de côté h dont l'aire h^2 représente l'aire que l'on perd en passant du carré au rectangle.

Donc pour que l'aire soit maximale il faut que $h = 0$ et donc que le rectangle reste carré.

Ceci se retrouve algébriquement :

Quel que soit h, l'aire du rectangle s'écrit : $(a + h)(a - h) = a^2 - h^2$ et il faut donc que $h = 0$ pour avoir l'aire maximale qui est a^2.

Ces deux arguments (géométrique et algébrique) montrent que l'aire maximale est celle du carré (et c'est à cela que nous nous sommes limités avec les élèves de collège ou de seconde) mais en fait on peut aller plus loin. La variation d'aire est petite si on reste au voisinage du carré (de part et d'autre de $x = a$ avec h petit positif ou négatif) mais que se passe-t-il si on envisage une petite variation autour d'une position très différente du carré ?

Au lieu de passer du carré à un rectangle voisin, passons d'un rectangle éloigné du carré (comme ABCD dans la figure 2) (AB > BC) à un autre rectangle GEFD voisin de ABCD (même variation h que dans la figure 1 avec EF < BC).

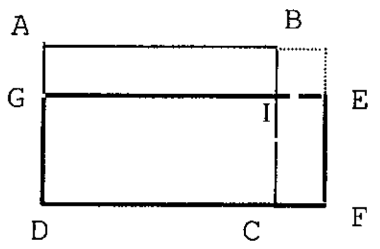


Figure 2

La compensation des aires se fait beaucoup moins bien car cette fois l'aire de ABIG (AB × h) est bien supérieure à l'aire de IEFC (EF × h) du fait que EF < BC < AB. Ceci provient de la différence entre les deux dimensions AB et BC du rectangle de départ ABCD.

Les dimensions du rectangle ABCD sont AB = x et BC = y. Les deux variables x et y sont liées par la relation $x + y = a$.

Les dimensions de GEFD sont $x + h$ et $y - h$

Dans la configuration dessinée qui est celle que le professeur montre au début (un rectangle dont la plus grande dimension x est horizontale) on se place quand $x > a$.

Dans ce cas : Aire perdue = aire ABIG = hx Aire gagnée = aire IEFC = $h(y - h) = hy - h^2$

Bilan de la variation : $h\,y - h^2 - h\,x$

Retrouvons ceci algébriquement.

La variation de l'aire s'écrit en ordonnant par rapport aux puissances de h :

$A(x+h) - A(x) = (x + h)(y - h) - xy = h\,(y - x) - h^2$

Pour h petit par rapport aux dimensions des rectangles, la partie principale de la variation de l'aire (terme de degré 1 en h) est proportionnelle à la différence $y - x$ et sera donc d'autant plus grande que le rectangle de départ sera loin du carré.

Ainsi, à mesure qu'on s'éloigne du carré, la variation de l'aire est de plus en plus rapide. En d'autres termes quand on commence avec x petit et y grand et que x augmente, la pente de la tangente à la courbe représentant la variation de l'aire est très forte et positive. Cette pente diminue jusqu'à s'annuler quand $x = y$, puis elle devient négative quand $x > y$ et de plus en plus négative à mesure que x augmente et y diminue.

On trouve ces informations

- soit en calculant directement $A(x+h) - A(x)$ avec la seule variable x

- soit en dérivant la fonction qui donne l'aire : $A(x) = 20x - x^2$ et en appliquant la formule de Taylor

$$A(x+h) - A(x) = 20(x+h) - (x+h)^2 - 20x + x^2 = 2h(10-x) - h^2 = hA'(x) + \frac{h^2}{2}A''(x)$$

En raisonnant de même avec la partie principale de l'accroissement et le signe de la dérivée de la fonction A soit $A'(x) = 2(10 - x)$, on voit avec la seule variable x ce qui se passe autour de $x = 10$ et quand x s'éloigne de 10.
Le calcul de la dérivée seconde, bien qu'inutile ici car la variation de la dérivée est évidente, ($A''(x) = -2$) confirme que la pente de la tangente à la courbe ne cesse de décroître à mesure que x augmente.

Mais avec cette écriture de la dérivée, que ce soit $20 - 2x$ ou $2(10 - x)$, rien ne rappelle ce qui ressortait de la représentation géométrique précédente. On ne voit pas du premier coup d'œil que le coefficient de h s'écrit $y - x$ et que c'est donc la différence plus ou moins grande entre y et x qui est directement reliée à la compensation plus ou moins grande des aires de deux rectangles quelconques entre deux positions voisines.
Il faut écrire : $A'(x) = 2(10 - x) = 20 - 2x = x + y - 2x = y - x$
ou encore directement comme nous l'avons fait : $(x + h)(y - h) - xy = h(y - x) - h^2$

Comme nous l'avons dit, quand le professeur manipule la ficelle devant les élèves au tout début de la séquence, il est préférable qu'il prenne deux rectangles voisins pas trop loin du carré.

Remarquons que la partie principale de la différence entre les aires de deux rectangles voisins (différence entre des mesures de dimension 2 en liaison avec le degré 2 de la fonction) est $y - x$, différence entre des mesures de dimension 1 liée au degré 1 de la fonction dérivée.

Nous retrouverons ceci dans la situation dite « Volume de la boîte ». Cette fois la fonction sera l'expression d'un volume, donc de degré 3. Entre deux positions voisines c'est une différence entre deux aires (degré 2 de la dérivée) qui permettra de suivre l'évolution des variations du volume. Cf. les compléments pour le professeur à la suite de cette situation.

Variation du périmètre de rectangles d'aire constante

Problème posé

Le professeur fait construire plusieurs rectangles de même aire 36 cm².

Les élèves étudient les variations d'une dimension en fonction de l'autre.

Ils cherchent le rectangle qui a le plus petit périmètre.

Objectifs possibles

En troisième :

- **Introduction d'une fonction non affine**
- Lecture graphique d'un extremum
- Expliciter l'expression d'une fonction à partir d'une relation géométrique

En seconde :

- Prolongement de la fonction inverse
- Vérification algébrique de l'existence d'un extremum

En première :

- **Étude des variations d'une fonction et recherche d'un extremum (optimisation)**

Notions utilisées

- Aire et périmètre d'un rectangle
- Repérage dans le plan

Matériel

- Un logiciel de géométrie et traceur de courbe (facultatif)
- Calculatrice graphique (facultatif)

Niveau

Troisième, seconde ou première

Fonctions rencontrées :

- $x \mapsto \dfrac{36}{x}$
- $x \mapsto 2(x + \dfrac{36}{x})$

Variation du périmètre de rectangles d'aire constante

La situation des rectangles de périmètre constant se prolonge par celle des rectangles d'aire constante. Dans ce cas, leur périmètre est-il constant également ? C'est encore une fois l'occasion de prolonger le travail sur la distinction entre aire et périmètre.
Au premier abord, les élèves pensent que le carré a le périmètre le plus long en référence à la situation précédente. Le professeur dit qu'on va voir s'il en est ainsi.

Le début peut être utilisé au collège de la 6$^{\text{ème}}$ à la 3$^{\text{ème}}$.
L'ensemble du problème peut être abordé au lycée :

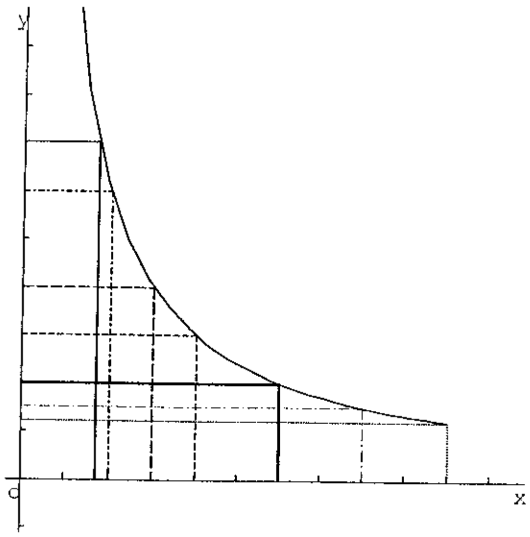
- en seconde comme prolongement de l'étude de la fonction inverse,
- en première comme étude d'une fonction avec optimisation.

Étape 1 :
Étude d'une dimension en fonction de l'autre.
Dessiner 7 rectangles différents ayant une aire de 36 cm².

Les élèves constatent rapidement que le produit des dimensions doit faire 36 cm².
Les élèves de collège retrouvent la même difficulté que dans la situation sur les rectangles de même périmètre : l'idée d'utiliser les nombres décimaux.
Certaines dimensions sont faciles à trouver : 9 sur 4 ; 18 sur 2 ; 12 sur 3.
Le choix de 36 permet d'obtenir facilement le carré de côté 6 cm.

La classe de collège travaille à nouveau avec une équation à deux inconnues $a \times b = 36$.

Le professeur demande aux élèves de rassembler les rectangles découpés ou dessinés en les superposant avec un sommet commun dans l'ordre croissant d'une des dimensions :



Une fois les rectangles superposés, les élèves remarquent que les sommets extérieurs semblent former un arc. L'enseignant leur demande s'ils reconnaissent une courbe.

Certains élèves pensent que cette courbe est un arc de cercle.

Il est intéressant de leur montrer que, contrairement à un arc de cercle, cette courbe ne se referme pas. Elle se rapproche toujours de plus en plus des axes.

Pour les convaincre, le professeur peut leur demander de trouver la largeur du rectangle de longueur 10 cm puis 20 cm , 50 cm...

Les élèves remarquent rapidement que si une dimension varie l'autre également et qu'il y a un lien entre les deux. Lequel ?

Le professeur propose l'idée d'un repère et reformule la question ainsi : « quel est le lien entre les dimensions y et x de chacun des rectangles ? ».

En prenant x et y comme dimensions les élèves peuvent exprimer une dimension en fonction de l'autre :

$x \times y = 36$ donc $y = \dfrac{36}{x}$

En seconde, quand le professeur a traité auparavant la fonction inverse, les élèves peuvent reconnaître une hyperbole. Le lien entre x et y est ainsi établi et justifie la position des sommets qui a été constatée.

Le professeur fait remarquer la symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Les élèves ont déjà remarqué que, pour que l'aire reste constante, « plus une des dimensions est petite plus l'autre est grande » allant même jusqu'à tendre vers l'infini lorsque la première se rapproche de zéro, « rectangle de plus en plus plat ».
Le professeur introduit (ou les élèves retrouvent) l'asymptote à l'hyperbole.
Les asymptotes d'équations $x = 0$ et $y = 0$ sont en accord avec la symétrie de la courbe, précédemment constatée et justifiée par la formule.

Étape 2 :

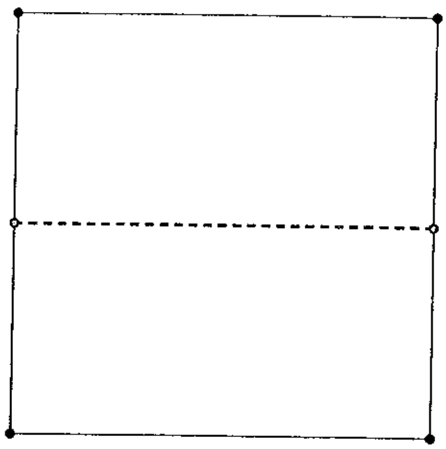
Étude de la variation du périmètre

Lors de leurs différentes constructions de rectangles, les élèves ont trouvé des périmètres différents et sont arrivés à la conclusion que le périmètre n'est pas constant.

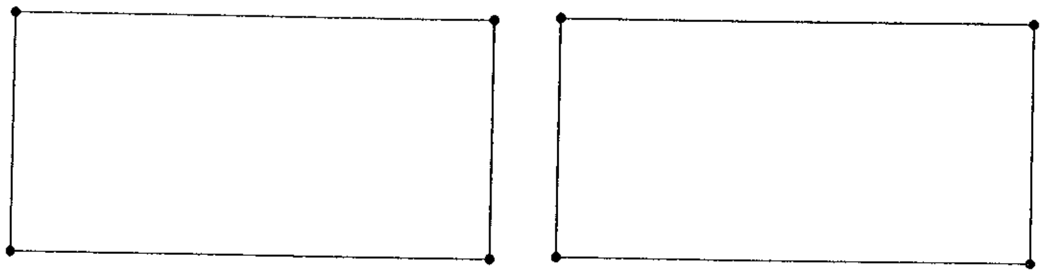
A partir de leurs calculs, certains conjecturent même qu'il y a un rectangle de périmètre minimal : le carré. Il reste à le prouver...

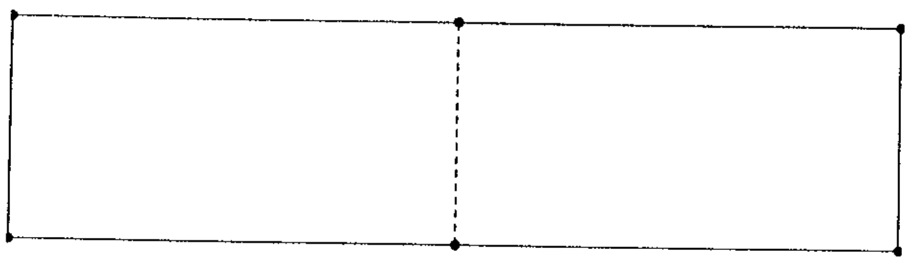
Au collège :
Le professeur peut se contenter d'une explication physique : « pour la même aire, plus c'est compact plus le périmètre est petit ! »

En effet, il est possible de partir d'un carré de côté 6 et de demander aux élèves de faire des découpages pour obtenir un rectangle qui aura alors nécessairement la même aire.



Si on le coupe une première fois en deux :
« pour le périmètre, on gagne 6 et on perd 3 ».





On peut réitérer cette opération.
On prend le rectangle d'aire 36 cm², on le coupe encore en deux dans le sens de la largeur. En mettant les morceaux bout à bout, on obtient un rectangle de même aire mais pas de même périmètre. Les bords le long desquels on a coupé font augmenter le périmètre.
Les différents découpages ne font qu'augmenter le périmètre puisque le périmètre augmente davantage qu'il ne diminue à chaque « coup de ciseaux ».

Les élèves disent alors : « plus on coupe, plus on rajoute du périmètre » ou encore « plus le rectangle est fin et long et plus le périmètre est long ».
Ce découpage les aide à se convaincre que le carré a le plus petit périmètre.

Au lycée :

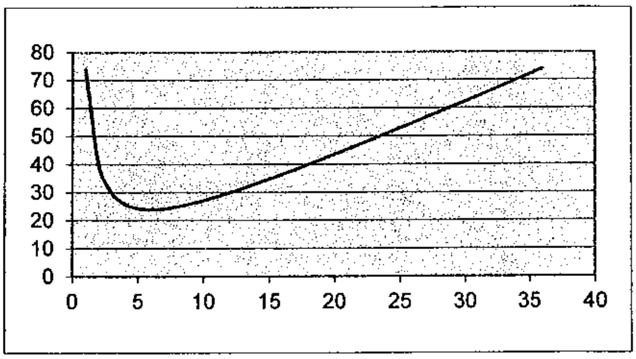
Les élèves qui ont conjecturé l'existence d'un minimum ayant pour valeur 24 peuvent faire un tableau de valeurs et représenter la fonction p définie par :

$$p(x) = 2(x + \frac{36}{x}).$$

Sa représentation graphique est une branche d'hyperbole (avec pour asymptotes les droites d'équation $y = 2x$ et $x = 0$.

Il reste à étudier le signe de la différence pour démontrer l'existence du minimum constaté sur le graphique.

$$\begin{aligned} p(x) - 24 &= 2(x + y) - 24 \\ &= 2(x + \frac{36}{x}) - 24 \\ &= \frac{(2x^2 - 24x + 72)}{x} \\ &= \frac{2(x^2 - 12x + 36)}{x} \\ &= \frac{2(x-6)^2}{x} \end{aligned}$$



Ainsi $p(x) - 24 \geq 0$ d'où la conclusion $p(x) \geq 24$.

De plus $p(6) = 24$.

Donc le périmètre admet bien un minimum qui vaut 24 et qui correspond à un côté de 6, c'est à dire au carré.

Dans l'expression du périmètre : $p(x) = 2(x + \frac{36}{x}) = 2x + \frac{72}{x}$.

Quand x devient très grand, le terme $\frac{72}{x}$ devient négligeable devant $2x$ de sorte que la courbe se rapproche de la droite d'équation $y = 2x$.

Le professeur fait remarquer que le périmètre des rectangles devient celui d'un rectangle de plus en plus long, aplati sur un segment de longueur x.

Quand x est très petit, c'est le terme $2x$ qui devient négligeable devant $2 \times \frac{36}{x} = 2y$ qui devient très grand.

Le périmètre des rectangles devient celui du rectangle de plus en plus long, aplati sur un segment vertical de longueur y.

Remarque : les élèves peuvent également étudier le demi-périmètre ce qui « économise » le facteur 2.

En première S :

Les élèves ont appris à utiliser la dérivée pour étudier les variations d'une fonction.

$$p(x) = 2(x + y) = 2(x + \frac{36}{x})$$

$$p'(x) = 2 - \frac{72}{x^2} = \frac{2(x-6)(x+6)}{x^2}$$

x	0		6		$+\infty$
$x-6$		-	0	+	
$x+6$		+	0	+	
$p'(x)$		-	0	+	
$p(x)$	$+\infty$	↘	24	↗	$+\infty$

Le périmètre est une fonction décroissante pour des valeurs de x comprises entre 0 et 6 puis croissante.

Il admet un minimum 24 pour $x = 6$ ce qui correspond bien au carré de côté 6 cm.

La recherche des limites quand x tend vers 0 puis vers l'infini et celle des asymptotes peuvent enrichies des remarques ci-dessus, qui pouvaient aussi être éventuellement faites en seconde.

Conclusion et prolongements

Pour les deux situations sur les rectangles de même périmètre ou de même aire

Les deux situations comportent une modélisation de la réalité, mais le matériel est si simple, si dépouillé, que la modélisation est aisée pour les élèves. Dans la première situation on passe de rectangles matériels de ficelle à des rectangles de papier, puis à des rectangles dessinés qui deviennent des rectangles abstraits. Dans la situation des rectangles de même aire, on commence plus vite par des rectangles de papier puis on passe aux rectangles abstraits.

Après avoir utilisé l'une ou l'autre de ces deux situations, le professeur peut montrer l'application des résultats trouvés pour résoudre un problème d'optimisation (voir les alvéoles des abeilles en conclusion de la situation précédente).

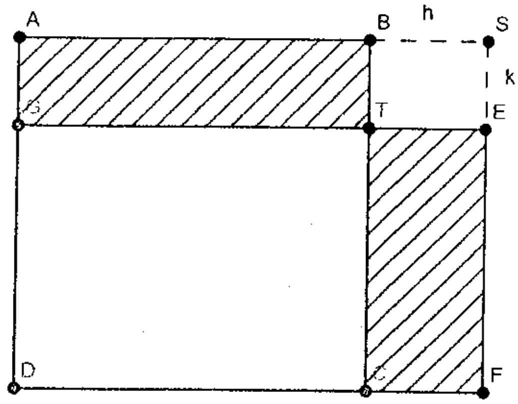
Pour la situation des rectangles de même aire

Comme la précédente, cette situation très riche peut être utilisée à de nombreux niveaux au collège et au lycée.

1- Comme dans le cas des rectangles de même périmètre, il est possible que des élèves remarquent que la fonction qui, à la dimension x associe la dimension y, est la même que celle qui associe la dimension y à la dimension x.
Ceci signifie que cette fonction est sa propre réciproque et cette propriété se traduit par une symétrie par rapport à la première bissectrice des axes.

2- **Pour comprendre que le carré est le rectangle de périmètre minimum pour une aire donnée** un dessin où on superpose un carré ABCD et un rectangle non carré GEFD est encore utilisable

Le dessin montre que les rectangles ABTG et TEFC doivent avoir la même aire car, a étant la longueur du côté du carré ABCD, l'aire de l'un représente ce que l'on perd soit $(a \times k)$ et l'aire de l'autre ce que l'on gagne soit $(a - k) \times h$.

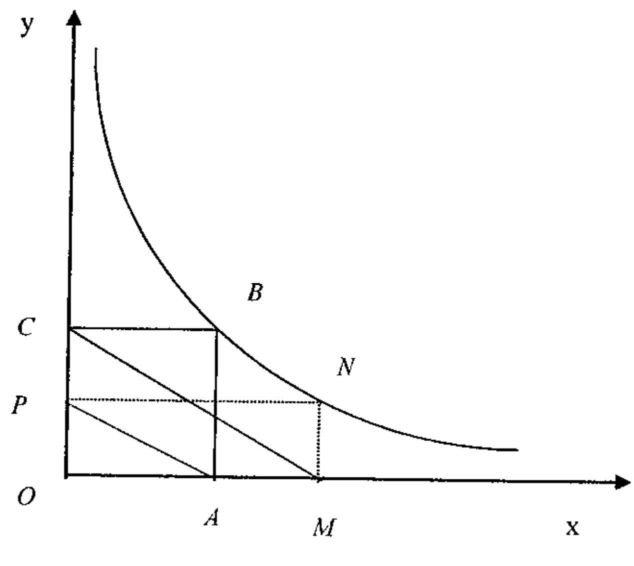


Or FE < AB $(a - k < a)$. Donc il faut que h soit plus grand que k.
En effet si h était plus petit que k la diminution d'aire serait plus grande que l'augmentation.

Mais alors il est évident qu'en passant du carré à n'importe quel rectangle le périmètre augmente : on augmente plus que l'on ne diminue la somme des dimensions.

Donc c'est le carré qui a le périmètre minimum.

3- Au collège cette situation peut conduire à une application intéressante du théorème de Thalès.



Soit le carré OABC d'aire 36 de côté OA = OC = 6 et le rectangle OMNP de même aire.

Le professeur trace les droites (CM) et (PA) et il demande aux élèves une conjecture et sa démonstration.

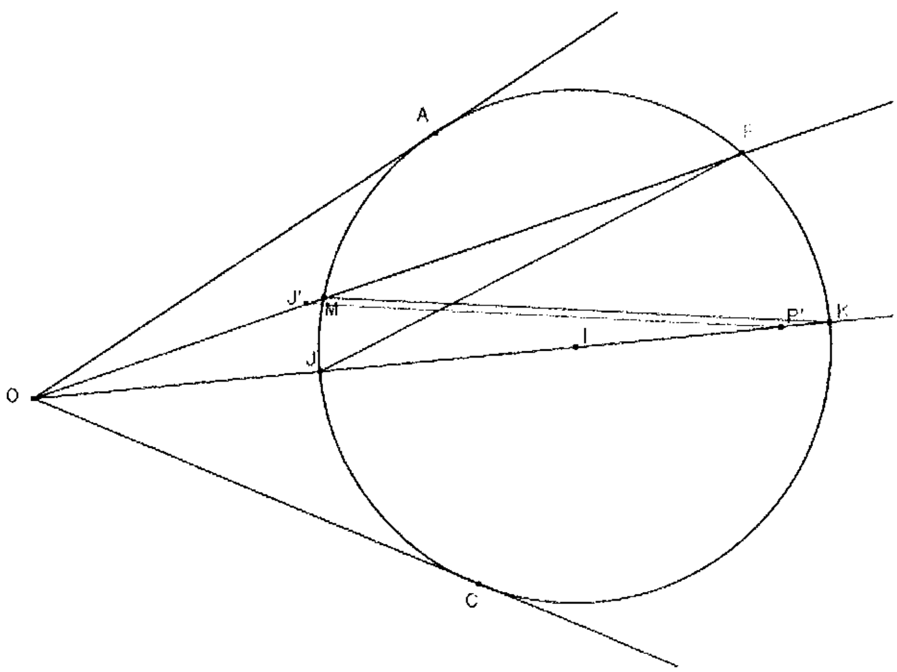
La conjecture du parallélisme est aisée.

Pour la démonstration, on écrit l'égalité des aires $OA \times OC = OM \times OP$

Cette égalité équivaut à l'égalité : $\frac{OA}{OM} = \frac{OP}{OC}$ qui entraîne le parallélisme des droites.

Une autre façon de procéder serait d'utiliser la réciproque. On oublie provisoirement le problème des rectangles de même aire. Le professeur demande aux élèves de construire les axes Ox et Oy et un carré OABC d'aire 36. A partir d'un point M variable sur Ox, on détermine un point P sur Oy en traçant la parallèle à (MC) passant par A. On termine le rectangle OMNP. Les différents points N ainsi déterminés se trouvent tous sur une courbe, qui se superpose à celle que l'on a tracé précédemment avec les rectangles d'aire 36. Pourquoi ?

4- Au lycée, le professeur peut relier cette situation à la puissance d'un point par rapport à un cercle. Au collège il est possible d'établir un lien mais sans traiter la question dans sa généralité en utilisant seulement les théorèmes de Thalès et de Pythagore.



Sur chacun des côtés d'un angle on place un point A et un point C tels que OA = OC = 6
Le cercle de centre I est tangent aux deux côtés de l'angle en A et C. On trace une sécante variable au cercle qui le coupe en M et P

On trace un graphique qui débute comme le précédent par les deux axes orthogonaux et le carré OABC de côté 6.
On place plusieurs points N qui ont pour coordonnées OM = x et OP = y. Tous ces points N se trouvent sur une courbe qui coïncide avec le graphique qui donne une dimension en fonction de l'autre pour des rectangles d'aire constante. Pourquoi ?

Si la puissance d'un point par rapport à un cercle n'est pas connue, on peut tout de même traiter ici le cas particulier de cette figure où le point O est extérieur au cercle. On démontre d'abord que $OM \times OP = OJ \times OK$.
Pour cette démonstration on peut utiliser les triangles semblables OPJ et OMK, mais s'ils ne sont pas disponibles, on peut utiliser le théorème de Thalès.
On place J' sur (OM) tel que OJ' = OJ et P' sur (OK) tel que OP'= OP.
Les angles$\widehat{MPJ}$ et $\widehat{MKJ}$ sont égaux car ils interceptent le même arc.
Les angles $\widehat{MPJ}$ et $\widehat{JP'J}$ sont égaux par symétrie orthogonale.
Donc $\widehat{MKJ}$ = $\widehat{JP'J}$, d'où le parallélisme des droites (MK) et (J'P') qui permet d'appliquer le théorème de Thalès : $\frac{OJ'}{OM} = \frac{OP}{OK}$. Donc : $OM \times OP = OJ \times OK$.

$OJ \times OK = (OI - R)(OI + R) = OI^2 - R^2 = OA^2 = 36$.

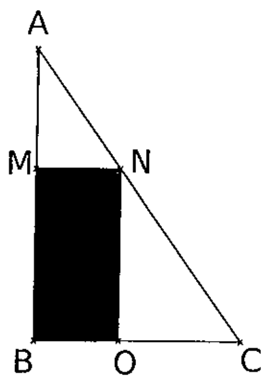
Le rectangle qui bouge dans le triangle

Problème posé

« M se déplace sur [AB], qu'est-ce qui varie, qu'est-ce qui est fixe sur cette figure ? »

La classe étudie les variations du périmètre et de l'aire du rectangle MNOB en fonction d'une variable choisie en commun.

L'étude de la variation de la longueur de la diagonale est possible.



Objectifs possibles

- Introduction de la notion de fonction en 3^e
- Mise en place du vocabulaire et des notations
- Liens : tableau ; graphique ; formule
- Fonction affine
- Fonction linéaire

Notions utilisées

- Aire et périmètre d'un rectangle
- Théorème de Thalès
- Repérage dans le plan
- Définition d'un rectangle

Matériel

- Un logiciel de géométrie et traceur de courbe
- Calculatrice graphique
- Tableur

Niveau : 3^e ou seconde

Fonctions rencontrées

- $x \mapsto 0,8x$
- $x \mapsto 20 - 2x$
- $x \mapsto 8x - 0,8x^2$

Le rectangle qui bouge dans le triangle

Nous avons d'abord expérimenté cette situation en $3^{ème}$ pour une première approche de la notion de variable, de fonction et de sens de variation d'une fonction. Elle s'est révélée trop difficile comme point de départ sur les fonctions en $3^{ème}$. Éventuellement, elle peut être utilisée en $3^{ème}$ en cours d'année. En revanche, elle est bien adaptée en seconde comme première réactivation de la notion de fonction.

Le problème est assez riche pour donner l'occasion de rencontrer une fonction linéaire croissante, une fonction affine non-linéaire décroissante, une fonction polynôme de degré 2 présentant un maximum, donc des exemples de représentations graphiques dans lesquelles les points sont alignés et un exemple où les points ne sont pas alignés.

Ce problème se trouve dans de nombreux manuels ou documents pour les professeurs. Mais tel que nous l'utilisons, en le transformant en une « situation », il donne aux élèves l'occasion non seulement de voir les représentations graphiques de ces différentes fonctions mais surtout de faire de nombreuses conjectures dans le domaine numérique, de les tester empiriquement à l'aide de l'outil informatique, puis de les justifier mathématiquement en utilisant de nouveaux moyens (expressions littérales, tableaux, représentations graphiques).

La situation se rapproche de la situation « rectangle de ficelle », mais ici les données sont choisies de sorte que le périmètre du rectangle ne soit pas constant et que le maximum de l'aire ne s'obtienne pas pour le carré.

Un logiciel de géométrie dynamique permet de faire bouger un point et de constater l'effet de ce déplacement sur le reste de la figure. On peut aussi afficher les mesures de longueur, de périmètres et d'aires. Le fait que le rectangle « bouge » aide les élèves à entrer dans le problème, exactement comme avec la ficelle dans la situation « rectangle de ficelle ».
On mesure ici l'intérêt de l'outil informatique dont l'utilisation n'est pas gratuite mais sert au contraire à la bonne appréhension du problème.

La situation comporte 5 étapes et peut se dérouler en trois séquences en 3ème : les étapes 1, 2 et 3 dans la première, l'étape 4 et le début de l'étape 5 dans la deuxième. En seconde, les premières étapes prennent moins de temps, de sorte que deux séquences suffisent.

Étape 1 :

S'approprier la figure

Le professeur projette la figure suivante (fig 1) avec un vidéo-projecteur. **Pour l'instant tous ses éléments restent fixes.**

Cette figure a été obtenue avec le logiciel Cabri-géomètre. Les dimensions ont été choisies pour ne pas surcharger les calculs.
Le point N *est lié au segment* [AC] *et le point* O *au segment* [BC].

Dans un premier temps, il est préférable de ne pas colorier le rectangle car, sinon, l'attention des élèves n'est attirée que par la variation de l'aire du rectangle et ils ne voient pas facilement la variation des autres mesures de la figure.

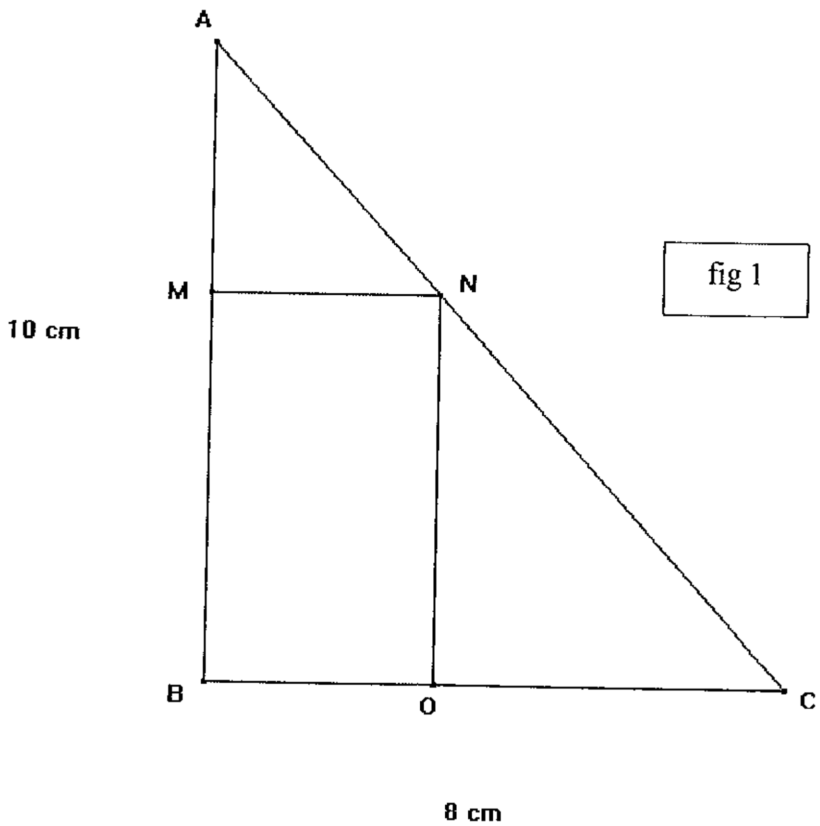


fig 1

Le professeur demande aux élèves de tracer la figure en leur expliquant oralement comment elle a été obtenue.

ABC est un triangle rectangle en B avec : AB = 10 cm et BC = 8 cm.

On place un point M quelconque sur le segment [AB].

On trace la perpendiculaire à (AB) passant par M. Elle coupe [AC] en N.

On trace la perpendiculaire à (BC) passant par N. Elle coupe [BC] en O.

Le professeur demande aux élèves quelle est la nature de MNOB et de justifier leur réponse. C'est l'occasion de revoir le théorème : si un quadrilatère a 3 angles droits alors c'est un rectangle.

Autre consigne possible pour la construction de la figure :

On trace la parallèle à (BC) passant par M. Elle coupe [AC] en N. On trace la parallèle à (AB) passant par N. Elle coupe [BC] en O.

Cette construction permet une deuxième démonstration en revoyant un autre théorème : si un parallélogramme a un angle droit, alors c'est un rectangle.

Dans les données, le point M *est quelconque, mais le professeur place le point* M *assez éloigné des extrémités* A *et* B *et différent du milieu de* [AB].

Étape 2 :

Conjecture sur les quantités qui varient et sur leur sens de variation

Le professeur dit aux élèves qu'ils vont imaginer que le point M est mobile et qu'il se déplace sur le segment [AB]. Il leur demande de choisir une autre position du point M sur le segment [AB], de nommer ce point M' et de tracer le nouveau quadrilatère M'N'O'B.

Ce « moment » est indispensable. Dans une classe où le professeur n'avait pas demandé la construction de M' et du nouveau quadrilatère, pour un très grand nombre d'élèves, les points N et O restaient fixes lorsque M se déplaçait !

La construction du point M' et du quadrilatère correspondant permet à tous de prendre conscience qu'à chaque position de M va correspondre un rectangle.

Ensuite, le professeur utilise le logiciel de géométrie dynamique pour montrer aux élèves ce qui se passe quand le point M effectue un déplacement vers le haut ou vers le bas sur le segment [AB] (mais sans aller jusqu'aux extrêmes).
Il leur demande de bien observer les effets de ce déplacement sur le reste de la figure.

Question 1 à la classe : quand le point M s'est déplacé, qu'est-ce qui a changé sur la figure et qu'est ce qui n'a pas changé ?

Réponses entendues dans nos classes :

- *le point N bouge,*
- *le point O bouge,*
- *le rectangle MNOB se déforme,*
- *les triangles AMN et NOC changent,*
- *les droites (MN) et (BC) restent parallèles ainsi que les droites (AB) et (NO),*
- *les angles droits restent des angles droits,*
- *les autres angles gardent la même mesure,*
- *la longueur MN est proportionnelle à la longueur NO.*

Question 2 à la classe : pouvez-vous préciser ce qui se passe pour le rectangle ?

Réponses :

- *les longueurs des côtés changent mais le périmètre et l'aire restent les mêmes, parce que ce qui est perdu en longueur est regagné en largeur,*
- *il y a un moment où le rectangle devient un carré,*
- *quand le rectangle est tout plat, son aire est plus petite que quand il est plus gros,*
- *si on va de A vers B, l'aire commence par augmenter puis elle diminue.*

Il est possible que les deux dernières réponses n'apparaissent pas dans certaines classes tant l'image de la compensation est prégnante.

Le professeur peut alors demander aux élèves de réfléchir sur leurs réponses. Il arrive que certains proposent de prendre des valeurs particulières pour mieux comparer l'aire et le périmètre.
Le professeur finit par convaincre la classe quand il fait bouger le point M en allant cette fois jusqu'aux limites, mais certains demeurent persuadés que le périmètre ne change pas par compensation. Cependant une autre idée fausse peut apparaître dans la classe : « si l'aire change, le périmètre change aussi... ».

Le professeur peut demander à partir de la figure construite avec les points M et M' de faire les mesures nécessaires pour évaluer « expérimentalement » le périmètre de chacun des rectangles.

Le professeur affiche alors avec la commande « cacher-montrer » les mesures des longueurs AM, MB, du périmètre de MNOB et de son aire (fig 2).

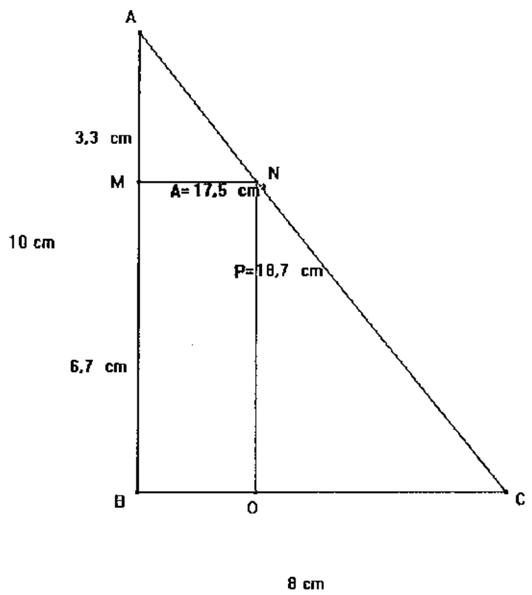


fig 2

Les élèves expriment leur étonnement : les longueurs changent, l'aire aussi mais, plus surprenant, le périmètre change aussi. Si le calcul expérimental des périmètres a été fait, cet étonnement fait place à une confirmation de l'expérience mais on se trouve toujours au niveau de la preuve empirique.

Le professeur peut donner l'idée de la preuve théorique. A l'aide d'un schéma au tableau (fig 3), on comprend que ce que l'on gagne sur [MN] est plus petit que ce que l'on perd sur [NO]. On a : NI>IN' car 10>8.

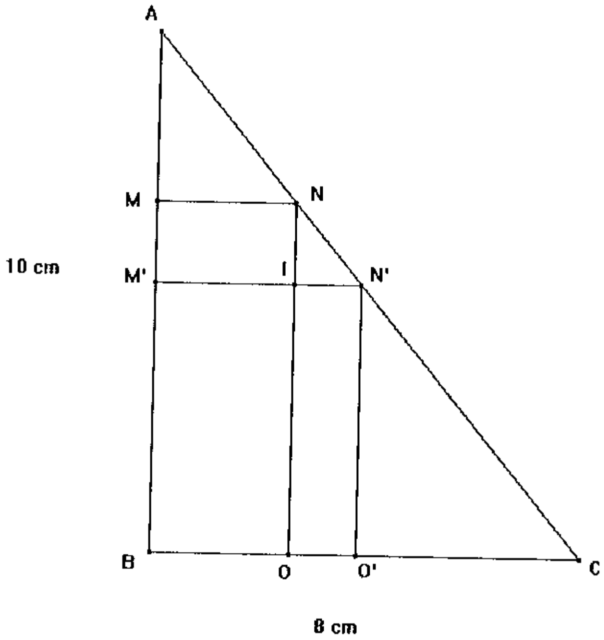


fig 3

Il est possible qu'un élève prenne alors la parole pour dire : « mais si le triangle ABC était aussi isocèle alors le périmètre ne changerait pas ».

Il y a une discussion pour les cas limites. Est-ce un rectangle ou un segment ? Que devient le périmètre ? Le rectangle est complètement aplati et le périmètre se rapproche de deux fois la longueur du segment.

En observant la variation de l'aire, la conjecture : « l'aire grandit puis elle diminue » peut apparaître ici dans le cas où elle n'a pas été formulée après la question 2.
On peut entendre alors : « oui et c'est quand le rectangle est un carré que l'aire est la plus grande ».

Belles conjectures sur lesquelles le professeur reviendra !

A la fin de cette étape, les conjectures qui ont été écrites au tableau et corrigées au fur et à mesure des débats, sont écrites sur le classeur.

Conjectures probables : quand le point M *se déplace de* A *vers* B,

- *la longueur* AM *augmente,*
- *la longueur* MB *diminue,*
- *la longueur* MN *augmente,*
- *le rectangle* MNOB *peut être un carré,*
- *le périmètre de* MNOB ~~*ne change pas*~~ *diminue,*
- *l'aire de* MNOB ~~*ne change pas*~~ *augmente puis diminue et c'est quand* MNOB *est un carré que l'aire est la plus grande,*
- *si le triangle* ABC *était isocèle - rectangle le périmètre de* MNOB *ne changerait pas.*

Dans une classe, la longueur de la diagonale du rectangle est apparue comme grandeur qui varie. Le professeur en faisant afficher cette longueur sur la figure dynamique confirme.
Un intérêt de cette diagonale, c'est que sa longueur diminue puis augmente à l'inverse de l'aire du rectangle et que l'on n'obtient pas une parabole.
C'est la composée d'une fonction polynôme de degré 2 et de la fonction racine carrée. Son expression littérale peut être donnée en $3^{\text{ème}}$ si le chapitre « racines carrées » a été traité (ou du moins la partie introductive de ces nouveaux nombres).
En fin d'étude, les constructions d'un tableau de valeurs et du graphique correspondants peuvent être envisagées sous forme d'un devoir à la maison.

Le professeur peut alors mettre à disposition des élèves (en particulier pour les plus en difficulté) la figure animée avec les affichages des longueurs et le remplissage du tableau se fait alors par relevé de valeurs.
Pour les meilleurs élèves, les calculs peuvent s'effectuer avec une procédure calculatrice : fonction polynôme suivi de l'utilisation de la touche racine carrée de la calculatrice ou utilisation de l'expression littérale de la fonction si c'est possible. L'usage d'un tableur peut également être envisagé.

Cette étude permet aussi une lecture graphique d'un minimum.

Étape 3 :

Écritures littérales

Le professeur propose aux élèves de passer à un traitement mathématique pour vérifier les conjectures.

Question à la classe : comment étudier mathématiquement ce qui se passe pour la longueur MN, le périmètre et l'aire du rectangle ?

En début de seconde et en fin de troisième, les élèves évoquent, naturellement, la notion de fonction, parlent de tableaux de valeurs et de graphique.
Le premier problème à régler est celui du choix de la variable.
Les élèves suggèrent de choisir pour variable une longueur qui peut être aussi bien AM, MB, AN, NC, MN......
Très souvent en troisième, les choix se portent sur AM et majoritairement sur MB (ce qui peut s'expliquer : il s'agit d'une dimension du rectangle).

Le professeur dit qu'il faut prendre la même pour toute la classe et il décide d'appeler x la longueur AM. *Le professeur peut avoir à « justifier » son choix ! Il explique alors que c'est dans le but de simplifier les calculs (et non de contrarier une grande partie de ses élèves !).*

Il leur demande d'écrire, en fonction de x :

- la longueur MB,
- la longueur MN,
- le périmètre $\mathcal{P}$ du rectangle MNOB,
- l'aire $\mathcal{A}$ du rectangle MNOB.

En 3ème et même en seconde, certains élèves ont des difficultés à comprendre la consigne « écrire en fonction de x » bien que cette compétence soit en principe travaillée à tous les niveaux depuis la 6ème !

Le professeur leur explique qu'il s'agit de donner une écriture contenant la lettre x, des nombres connus et des opérations, pour traduire le calcul en ligne de la grandeur demandée (longueur, périmètre ou aire).

Pour un bon nombre d'élèves, l'écriture de MB *n'est pas du tout évidente et il faut leur demander comment ils feraient pour calculer* MB *s'ils savaient que* AM *valait* 5,9 cm *par exemple.*

Le calcul de MN *fait intervenir le théorème de Thalès et la difficulté vient du fait que l'on doive écrire cette longueur inconnue (qui s'appelle ici* MN *et non x) en fonction de la variable qui s'appelle ici x. Pour les élèves, le mot « inconnue » est associé aux équations et il n'y a pas d'équation ici. En fait, il s'agit de trouver l'expression algébrique d'une fonction de x.*
On trouve MN = 0,8x *(les nombres ont été choisis pour ne pas surcharger les écritures avec des rationnels non décimaux).*

Un élève en $3^{ème}$ *nous a proposé : le triangle AMN est une réduction du triangle ABC à l'échelle* $\frac{x}{10}$ *donc* $MN = 8 \times \frac{x}{10} = 0,8x$.

L'écriture du périmètre fait ressortir les erreurs classiques de confusion entre aire et périmètre et entre double et carré, un élève ayant écrit : $0,8x^2 + (10 - x)^2$. *N'y a-t-il pas là dessous un désir de retrouver la structure des expressions que l'on obtient en appliquant le théorème de Pythagore ?*

Pour l'écriture de l'aire, on obtient la forme $0,8x(10 - x)$ que certains développent pour obtenir $8x - 0,8x^2$.

En troisième, le professeur peut décider à la fin de cette étape d'utiliser le langage des fonctions.
Par exemple, on appelle $\mathcal{L}$ la fonction définie par $\mathcal{L}(x) = 0,8x$. Cette fonction donne pour chaque valeur de x, qui caractérise une position de M, la valeur de MN correspondante.

Travail à la maison éventuel en $3^{ème}$: choisir 5 valeurs de x et calculer les valeurs correspondantes de $\mathcal{L}$, de $\mathcal{P}$ et de $\mathcal{A}$.

<u>En seconde</u>, c'est l'occasion de rappeler les notations utilisées pour les fonctions.

$\mathcal{L}\ (x) = 0{,}8x \qquad \mathcal{P}\ (x) = 20 - 0{,}4x \quad \text{et} \quad \mathcal{A}\ (x) = 8x - 0{,}8x^2$.

Ou $\mathcal{L} : x \mapsto 0{,}8\,x$, $\mathcal{P} : x \mapsto 20 - 0{,}4\,x$ *et* $\mathcal{A} : x \mapsto 8x - 0{,}8x^2$.

En seconde, les élèves ont déjà une bonne idée de ce qu'ils vont obtenir comme représentation graphique. Beaucoup disent que pour $\mathcal{L}$ *et* $\mathcal{P}$*, on aura des droites car on a des fonctions affines.*

Étape 4 :

Tableaux de valeurs pour les trois fonctions

En seconde, cette étape pourra se faire rapidement dans la même séquence que les étapes précédentes.

Pour les 3ème, il s'agit de la seconde séquence de classe. Ce qui est décrit dans cette étape concerne plutôt la classe de 3ème.

Le lendemain en 3ème, il est possible que les élèves aient fait leur travail sans qu'aucun n'ait pensé à regrouper les résultats dans un tableau ou dans plusieurs tableaux.

Le professeur leur demande comment on pourrait présenter les résultats de façon plus claire et l'idée de tableau vient tout de suite.

La classe peut décider de dresser trois tableaux, un pour chaque fonction :

$L\ (x) = 0{,}8x \qquad P\ (x) = 20 - 0{,}4x \quad \text{et} \quad A\ (x) = 8x - 0{,}8x^2$.

Le professeur demande à quelques élèves ce qu'ils ont pris pour valeurs de x.

Par exemple, un élève a choisi 1 ; 2 ; 7 ; 10 et – 3.

Certains élèves interviennent pour débattre sur le choix de 10 : *c'est quand même possible, c'est quand le rectangle est plat, quand on n'a plus que deux segments superposés.*

Le choix de 10 (et par conséquent aussi celui de 0) est admis.

En revanche, le choix de – 3 est vite rejeté car x désigne une longueur qui est forcément positive.

Dans une classe, ce choix a pu être influencé par un travail fait en début d'année sur des programmes de calculs (cf. notre fascicule d'algèbre en $4^{ème}$). Les élèves ne choisissaient que des entiers et le professeur les avait alors incité à prendre des décimaux, des rationnels et des nombres négatifs. Cette erreur d'élève s'analyse comme une conséquence du « contrat didactique » toujours implicite dans une classe : l'élève imagine ce que le professeur attend de lui d'après ce qui lui a été demandé lors des séquences précédentes. Ce contrat est nécessaire pour enseigner mais en même temps, il doit être rompu de temps à autre, car sinon l'élève n'aurait plus à réfléchir pour trouver les réponses aux questions posées. Ici, l'élève s'est placé dans un ancien contrat sur les programmes de calcul.

Le professeur demande alors à la classe de dire combien il y a de valeurs possibles de x.
Réponses probables :
« il y en a plein ; il y en a une infinité ; ce sont tous les nombres entre 0 et 10 ».
Le professeur utilise le terme d'encadrement et on note que x est compris entre 0 et 10 (0 et 10 étant des valeurs possibles) ce qui s'écrit : $0 \leq x \leq 10$.

C'est l'occasion, lorsque cette situation est la première rencontre de la notion, comme en seconde, d'introduire l'ensemble de définition d'une fonction.

Les élèves sont alors invités à compléter des tableaux avec des valeurs de x imposées : 0 ; 1 ; 2 ; 5 ; 7 ; 10. Le professeur leur suggère d'y introduire les valeurs avec lesquelles ils ont travaillé à la maison.

Pour le calcul du périmètre et celui de l'aire le professeur leur fait donner le « programme-machine » et fait remarquer que les calculatrices scientifiques respectent les priorités des calculs. Ici la forme développée ou la forme factorisée sont équivalentes du point de vue du nombre de touches à taper ; ce qui ne sera pas le cas quand on aura le choix entre deux expressions comme $(x+3)(x-3)$ et x^2-9 par exemple.

Question à la classe : est-ce que ce sont des tableaux de proportionnalité ?

- *« Oui pour le premier car le coefficient de proportionnalité est 0,8 ».*
- *« Non pour le deuxième car ça le serait s'il n'y avait pas le 20 – » (dans $20-4x$).*

Le professeur peut indiquer ici le « test du double » si les élèves ne le connaissent pas, ce qui va être réinvesti pour la troisième fonction.

- *« Non pour le troisième à cause du test du double et aussi, car la formule est trop compliquée et ce n'est pas la multiplication de x par quelque chose ».*

Étape 5 :

Représentations graphiques et utilisation de ces représentations

Une façon de procéder plus spécifique en $3^{ème}$

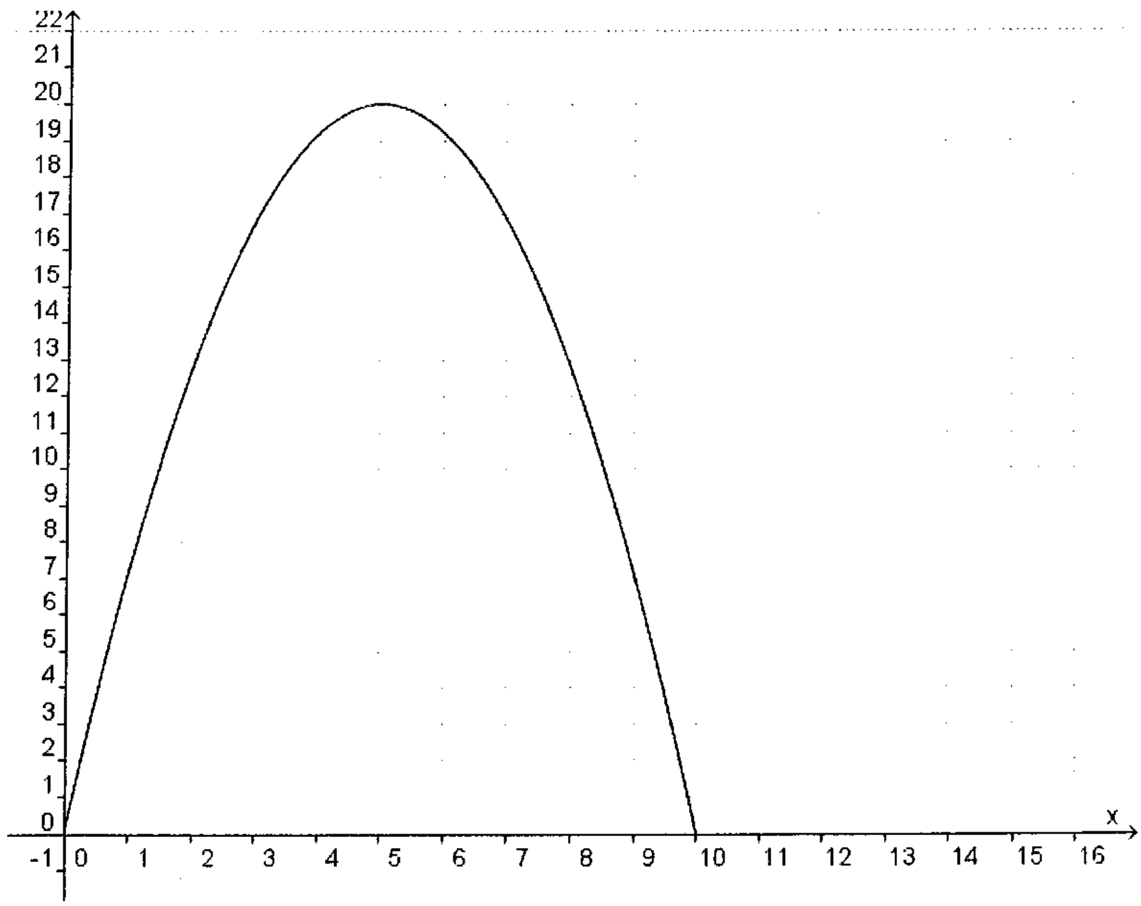
Le choix du papier millimétré ou quadrillé à petits carreaux est laissé aux élèves. Le choix des unités sur les axes est conseillé (1 cm par unité sur chaque axe). Si certains élèves ont des problèmes de place sur leur feuille, ils peuvent exceptionnellement changer d'échelle.

Les remarques sur l'alignement des points arrivent vite et certains même en $3^{ème}$ savent qu'une situation de proportionnalité se traduit par une droite. L'alignement avec l'origine du repère est aussi débattu. Pour le périmètre, le fait que la « droite » ne passe pas par l'origine paraît évidente à certains car « ce n'est pas une situation de proportionnalité ».
Le professeur peut préciser la nature de la fonction et dire que l'étude de ces fonctions se fera plus tard (on prouvera l'alignement donc le fait que la représentation graphique est une droite).
Les conjectures sur la variation de MN et du périmètre sont vérifiées algébriquement et graphiquement : MN augmente et le périmètre diminue.

Si la séquence s'arrête ici, un travail à la maison peut consister à tracer ou terminer les représentations graphiques (ce peut être à la fin de la deuxième séquence en $3^{ème}$ et à la fin de la première séquence en seconde).

En $3^{ème}$, pour la représentation graphique de l'aire, certains ont placé des points qu'ils ont laissés tels quels, d'autres les ont reliés par des segments et d'autres encore ont tracé une courbe. On peut admettre que les points ne sont pas reliés par des segments.
Le professeur peut faire référence à la situation « le carré dans le rectangle » pour expliquer que les points ne sont pas alignés et rappeler la démonstration effectuée alors (sinon, elle pourra être faite ici).

Le professeur distribue alors aux élèves le document suivant, en précisant que la courbe a été obtenue avec un logiciel qui trace les courbes à partir de l'écriture littérale de la fonction.



Question 1 : Par lecture graphique, trouver la valeur de x pour laquelle l'aire est maximale. Préciser la position correspondante du point M et du point N. Trouver la valeur de l'aire correspondante par lecture graphique puis par le calcul. Dire ce que vous pensez de la conjecture faite en début d'étude : « l'aire est maximale quand le rectangle est un carré ».

Les élèves lisent facilement l'abscisse $x = 5$ qui semble bien donner une aire maximale de 20.
D'après le théorème des milieux dans le triangle ABC (O milieu de [BC]), les points M et N sont alors les milieux des côtés du triangle.
On peut remarquer qu'alors l'aire du rectangle MNOB est la moitié de l'aire du triangle ABC.

Certains élèves ne pensent pas à remplacer x par 5 dans les expressions de MB et de MN pour savoir si MNOB est alors un carré.

Il est possible qu'un élève revienne au dessin, trace la figure dans le cas où $x=5$ *et observe que le rectangle n'est pas un carré.*

La conjecture sur le carré n'est pas vérifiée.

La lecture graphique est-elle pour autant une démonstration que l'aire maximale est bien obtenue avec un rectangle de côtés 5 et 4 ?

Question 2 : par lecture graphique, trouver les valeurs de l'aire pour successivement, $x=0,5$; $x=3,5$; $x=6,5$ et $x=9,5$. Retrouver ces valeurs par le calcul.

Les élèves s'aperçoivent vite que la lecture graphique est ici délicate car, pour $x=0,5$, *les propositions pour l'aire sont : 4 ou 3,9 ou 3,8. Seul le calcul permet de trancher.*
Et si le maximum était obtenu pour 5,1 ?

Question 3 : par lecture graphique, trouver les valeurs de x pour lesquelles l'aire est égale à 15 cm².

Pas de difficulté majeure. Les élèves se rendent compte que pour chaque valeur de l'aire, il y a deux antécédents et le professeur complète en montrant que la courbe présente un axe de symétrie ce que l'on peut expliquer par l'expression algébrique.

La conjecture que le maximum est atteint pour x = 5, se renforce du fait de cette symétrie car cela paraît « naturel » que ce soit l'axe « qui passe par le maximum ».

<u>*En troisième,*</u> *le professeur peut proposer la preuve suivante qu'il mène avec la participation de la classe.*

Il commence par écrire au tableau $A\ (x) = -0,8x^2 + 8x = -0,8(\ldots\ldots)$ et demande aux élèves de terminer cette première factorisation.

La réponse arrive assez facilement $A\ (x) = -0,8\ (x^2 - 10x)$.

Le professeur dit : « $x^2 - 10x$, c'est le début du développement d'une identité remarquable. Laquelle ? ». Quelques-uns trouvent sans indication supplémentaire.

Pour les autres, le professeur écrit avec quelques explications : $x^2 - 10x + \ldots = (\ldots - \ldots)^2$.

Ce qui suffit à la grande majorité pour répondre.

Pour terminer, la classe en arrive à $A(x) = -0{,}8\,[(x-5)^2 - 25]$ puis $A(x) = 0{,}8\,[25 - (x-5)^2]$ (multiplication par -1, opposé d'une différence).

La grande majorité des élèves comprend bien que $25 - (x-5)^2$ est maximum lorsque $(x-5)^2$ est minimum.

L'intérêt de faire une démonstration ici, en troisième, est de rappeler/préciser qu'une lecture graphique même si elle leur semble exacte (et c'est le cas ici !) n'est qu'approximative.

Un deuxième intérêt se trouve dans le calcul lui-même qui montre une utilisation des factorisations.

Question 4 : quelle est la valeur de x pour laquelle le rectangle est un carré ? Quelle est alors la longueur du côté et quelle est l'aire du carré ?

Certains élèves ont du mal à traduire le fait que MNOB *soit un carré par la condition* : MN = MB. *Quelques uns cherchent une condition faisant intervenir le périmètre.*

Une fois que l'équation $0{,}8x = 10 - x$ *est posée, de nombreux élèves de* $3^{ème}$ *rencontrent des difficultés à la résoudre. Ces difficultés sont liées à la soustraction et la présence d'un décimal (il n'est pas habituel d'avoir à effectuer* $0{,}8x + x$ *et les erreurs sont nombreuses).*

La solution non-décimale $\frac{10}{1{,}8} = \frac{100}{18} = \frac{50}{9}$ *les surprend encore !*

Le calcul du côté du carré à l'aide des deux expressions de MN et MB permet de vérifier que le résultat convient et il est l'occasion d'un calcul sur les écritures fractionnaires.

Le côté mesure $10 - \frac{50}{9} = \frac{40}{9}$.

L'aire est alors $\frac{1600}{81}$ dont une valeur approchée est 19,75. On peut alors vérifier que l'aire maximale n'est pas obtenue avec le carré, puisque pour $x = 5$, on a obtenu une aire de 20 cm².

Un bilan de cette étude est alors écrit.

Ce problème a permis de voir des exemples de <u>fonctions</u>.

A chaque valeur de la variable *x*, on peut associer une valeur d'une autre quantité (longueur, périmètre, aire...). On dit que cette quantité est une fonction de *x*.

On étudie la variation de cette quantité. Pour cela, on peut utiliser un tableau de valeurs et une représentation graphique.

Étape 5' :

Représentations graphiques et utilisation de ces représentations

Une façon de procéder plus spécifique en 2^{nde}

En seconde, la représentation graphique des fonctions $\mathcal{L}$ et $\mathcal{P}$ ne présente aucune difficulté. Il est parfois nécessaire de rappeler ce qu'est un repère et d'expliquer que l'on place x sur l'axe des abscisses.

$$\mathcal{L}(x) = 0{,}8x\ ;\ \mathcal{P}(x) = 20 - 0{,}4x \text{ et } \mathcal{A}(x) = 8x - 0{,}8x^2$$

Le professeur peut en profiter pour *réactiver la notion d'image* en demandant aux élèves de calculer, par exemple, $\mathcal{L}(3{,}7)$ mais aussi de déterminer l'image de 5,8 par la fonction $\mathcal{P}$.

Il est important en ce début d'année de montrer que ces deux consignes différentes peuvent conduire à la même démarche.

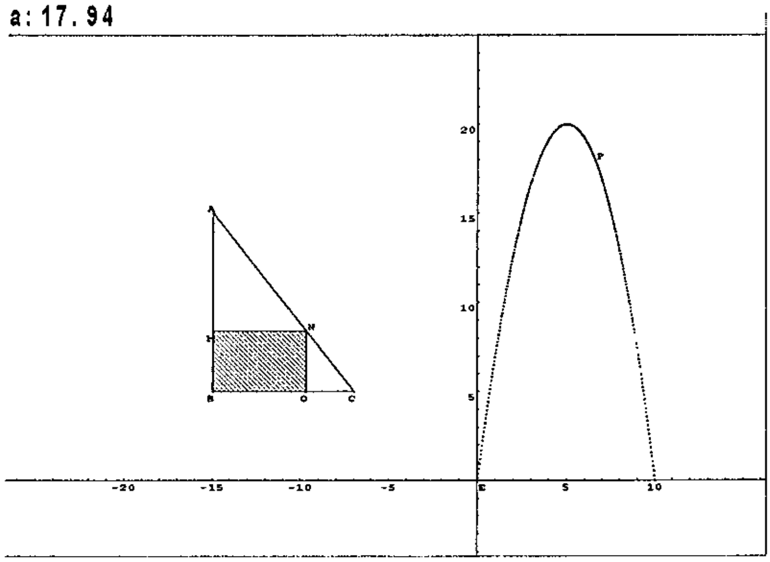
En parallèle, le professeur demande aux élèves de retrouver ces résultats sur les graphiques qu'ils viennent de tracer.

Le professeur propose le *même type de travail sur la notion d'antécédent* en demandant, par exemple, de trouver x tel que $\mathcal{P}(x)$=19,5. C'est l'occasion de réintroduire le vocabulaire et d'insister sur la différence entre image et antécédent. Il faut aussi faire le lien avec le graphique sur lequel le professeur demande de lire des antécédents.

Consigne à la classe : tracer la représentation graphique de la fonction $\mathcal{A}$.

La plupart des élèves trace la courbe attendue mais certains relient les points par des segments. Le professeur fait au tableau cette proposition en demandant à la classe d'y réfléchir. Ayant travaillé au préalable le lien entre lecture graphique et calcul d'image, des élèves proposent de vérifier en prenant des valeurs. D'autres utilisent le tableau de valeurs pour expliquer que si les points (0 ;0) et (1 ;7,2) étaient reliés par un segment le point (0,5 ;3,6) serait aussi sur la courbe or $\mathcal{A}(0{,}5)$ = 3,8 et pas 3,6.

Le professeur utilise ensuite le logiciel de géométrie dynamique (Géoplan ici) pour visualiser comme ci-dessous la représentation graphique de la fonction en utilisant le mode « trace ».
Il fait devant les élèves la construction du point P en choisissant comme abscisse la longueur AM et comme ordonnée, l'aire du rectangle déjà définie pour l'étape 2.



Question 1 : dire ce que vous pensez de la conjecture faite en début d'étude : « l'aire de MNOB augmente puis diminue et que l'aire est maximale quand le rectangle est un carré ».

La première partie de la conjecture est évidente au vue du graphique et certains élèves parlent de « courbe qui monte » et précisent même : « quand x augmente de 0 à 5 alors l'aire augmente de 0 à 20 ». A ce stade de l'année, ces remarques sont suffisantes et permettent d'avoir une première approche graphique de la notion de croissance et de décroissance d'une fonction.

Un premier bilan est alors écrit.

- ***f*** **est croissante sur un intervalle I signifie que *f(x)* augmente lorsque *x* augmente.**
- ***f*** **est décroissante sur I signifie que *f(x)* diminue lorsque *x* augmente.**

Cela peut être l'occasion de réaliser le premier tableau de variations d'une fonction.

La classe s'intéresse ensuite à la deuxième partie de la conjecture pour constater qu'elle est fausse à condition d'être sûr que l'aire maximale est bien 20 cm².
Pour $x = 5$, on a MB = 5 et MN = 4 donc MNOB n'est pas un carré.

Question 2 : comment être sûr que l'aire maximale est bien obtenue pour $x = 5$?

Certains élèves proposent de calculer des valeurs autour de 5 par exemple 4,9 ou 5,1 pour voir ce qui se passe. Le professeur peut en profiter pour expliquer le fonctionnement de la calculatrice scientifique ou d'un tableur et montrer à la classe comment réaliser un tableau de valeurs en changeant le pas... Mais est-ce une preuve ?

Il est alors intéressant de formuler la définition du maximum d'une fonction et de l'institutionnaliser :

Dire que *f(a)* est le maximum de *f* sur un intervalle I signifie que pour n'importe quel réel *x* de I , $f(x) \leq f(a)$ **.**

Le professeur explique qu'il s'agit ici de comparer 20 et $8x - 0{,}8x^2$ *et de donner un moyen fort utile par la suite : l'étude du signe de la différence.*
On obtient $20 - 8x + 0{,}8x^2 = 0{,}8(x^2 - 10x + 25) = 0{,}8(x+5)^2$ *qui est donc un nombre positif.*
En début d'année, c'est un passage difficile, à la charge du professeur mais indispensable pour justifier le maximum. On ne peut pas se contenter d'une lecture graphique ou de l'utilisation de valeurs particulières. Dans les semaines à venir, le professeur exigera des élèves une justification, il faut donc montrer l'exemple !

Question 3 : quelle est la valeur de x pour laquelle le rectangle est un carré ? Quel est alors la longueur du côté et quelle est l'aire du carré ?

L'écriture de l'équation $0,8x = 10 - x$ *à partir de l'égalité* MN = NO *arrive plus aisément qu'en* $3^{ème}$.

On obtient une solution non-décimale $x = \frac{50}{9}$ *; la longueur du côté vaut* $\frac{40}{9}$ *et l'aire est alors* $\frac{1600}{81}$ *dont une valeur approchée est* 19,75.

Question 4: déterminer la longueur AM pour laquelle l'aire vaut 15 cm².

Dans un premier temps, les élèves essaient de résoudre l'équation par le calcul mais n'arrivent à rien du fait du carré. Lors de la mise en commun, au vue des difficultés rencontrées, certains élèves proposent d'utiliser le graphique de la fonction A. C'est loin d'être une évidence pour l'ensemble des élèves. On retrouve ici la notion d'antécédent avec un cas intéressant puisqu'on en a deux !
D'autres élèves proposent d'utiliser la calculatrice pour approcher la solution à l'aide du tableau de valeurs.

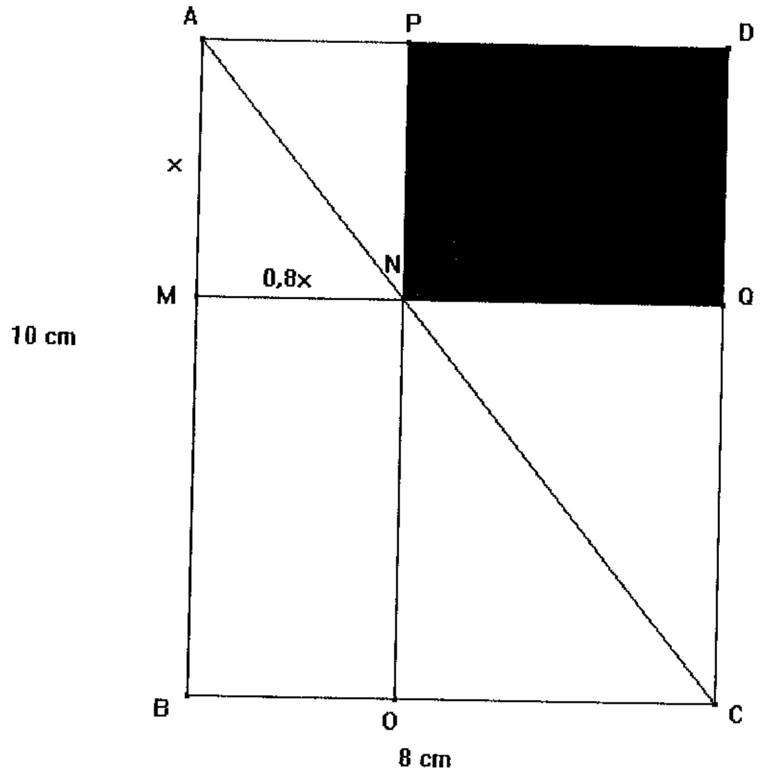
Question 5: déterminer la longueur AM pour laquelle l'aire est supérieure à 15 cm².

Quelques rares élèves persistent dans l'utilisation de la forme algébrique, la plupart a bien assimilé que le graphique permet de résoudre plus facilement cette question !
On peut résoudre d'autres inéquations comme $A(x) \leq 7,2$, *celle-ci permet par exemple d'introduire la notion d'union d'intervalles pour noter la solution.*

Bilan : la représentation graphique d'une fonction permet d'obtenir une approximation des solutions d'équations ou d'inéquations.

Conclusion et prolongements

1) Interprétation géométrique de $8x-0,8x^2$

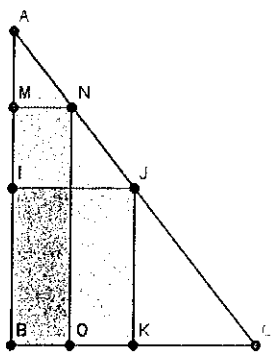


$8x$ est l'aire du rectangle ADQM, $0,8x^2$ *est l'aire de* AMNP *donc* $8x-0,8x^2$, c'est l'aire *du rectangle* PNQD *qui est égale à l'aire du rectangle* MNOB.
C'est quand l'aire des deux rectangles MNOB *et* PNQD *est maximale et N au milieu de* [AC] *qu'ils sont superposables par une rotation de 90°. Leur aire est* $\frac{1}{4}$ *de l'aire de* ABCD.
On retrouve une activité sur les aires que nous pratiquons dès la sixième (cf. notre brochure « Des activités aux situations d'enseignement », avec la situation des rectangles d'Euclide).

2) Lien entre cette situation et la situation sur les rectangles de périmètre constant

Comme nous l'avons dit, quelques élèves remarquent que, si le triangle de départ était rectangle isocèle, le maximum aurait lieu pour le carré. Dans ce cas, on retrouve exactement le même problème que celui des rectangles de ficelle dont le périmètre est constant. L'hypoténuse de ce triangle rectangle ABC coïncide alors avec le graphique de la fonction affine (une dimension en fonction de l'autre) du rectangle de ficelle.

Dans le problème tel que posé dans nos classes, le triangle rectangle de départ a subi une affinité de base (AB), de direction δ perpendiculaire à (AB) et de rapport $\frac{4}{5}$.



On a : $BC = \frac{4}{5} AB$.

Si I est le milieu de [AB], J le milieu de [AC], K le milieu de [BC], l'aire maximale est atteinte avec le carré IJKB dans le cas du triangle ABC isocèle et avec le rectangle IJKB de 5 cm sur 4 cm dans le cas de notre problème.

En d'autres termes, le carré a subi la même affinité de rapport $\frac{4}{5}$ qui l'a transformé en rectangle.

3) Construction géométrique du carré inscrit dans le triangle rectangle

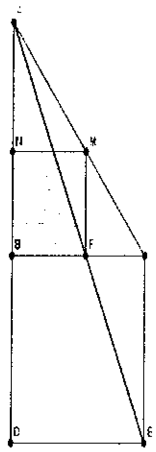


fig.1

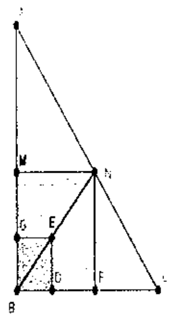


fig.2

Soit le triangle rectangle ABC de départ (Fig.1), AB = 10 et BC = 8.

On construit sur le côté [BC] un carré BDEC de côté 8 extérieur au triangle. On joint A au sommet E. La droite (AE) coupe [BC] en F.

On élève la perpendiculaire en F à (BC) qui coupe [AC] en N, puis la perpendiculaire en N à [FN]. On obtient un carré BFNM.

Démonstration avec le théorème de Thalès pour les élèves de 3ème et seconde, avec l'homothétie plus tard (MNFC est la réduction de BCDE).

$\frac{BF}{DE} = \frac{AF}{AE} = \frac{FN}{CE}$ et comme DE = CE, on a BF = FN.

On peut retrouver la valeur précédente pour le côté.

Si BF = x,

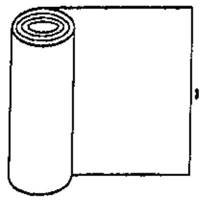
$\frac{AB}{BF} = \frac{AD}{DE}$ donc $\frac{10}{x} = \frac{10+8}{8}$ donc $x = \frac{40}{9}$.

Au lieu d'une réduction, on peut aussi faire un agrandissement à partir d'un petit carré dans le coin de l'angle droit par exemple selon la même méthode (fig.2). La figure obtenue MNFB est un agrandissement de ce carré intérieur au triangle.[1]

[1] *On pourra se reporter à l'ouvrage : « Mathématiques du collège au lycée », Annie Berté, 1996, Édition Nathan-Pédagogie.*

La bande qui se déroule.

Problème posé



Le professeur déroule une bande de papier de largeur 3 cm devant les élèves.
Des rectangles apparaissent.
La classe étudie la variation du périmètre et de l'aire de ces rectangles en fonction de la dimension variable.
L'étude de la variation de la longueur de la diagonale est possible.

Objectifs possibles

- Introduction des fonctions en $4^{ème}$ ou réinvestissement en troisième et en seconde
- Proportionnalité ou non proportionnalité en $4^{ème}$
- Lien entre tableau, graphique, formule
- Fonction affine et linéaire
- **Proportionnalité des accroissements pour une fonction affine**
- Fonction non affine éventuellement

Notions utilisées (hors du cadre des fonctions)

- Aire et périmètre d'un rectangle
- Repérage dans le plan
- Théorème de Pythagore éventuellement

Matériel

- Bande de papier de largeur 3 cm et de longueur environ 20 cm
- Logiciel ou calculatrice graphique pour tracer des courbes (facultatif)

Niveau : $4^{ème}$, $3^{ème}$ ou Seconde.

Fonctions rencontrées

- $x \mapsto 3x$
- $x \mapsto 2x + 6$
- $x \mapsto \sqrt{x^2 + 9}$ (facultatif selon la classe et avec l'objectif de rencontrer une représentation graphique qui n'est pas une droite).

La bande qui se déroule.

Cette situation a été expérimentée en seconde et en troisième. Elle permet d'une part, selon le niveau, d'introduire ou de réactiver la notion de fonction, et d'autre part d'aborder la proportionnalité des accroissements pour les fonctions affines.

Cette situation a été testée, selon les enseignants, à divers moments de l'année.
En première approche de la notion de fonction, elle permet d'aborder quelques généralités sur les fonctions et de traiter le chapitre sur les fonctions affines. Dans ce cas, l'objectif est de faire tout de suite le lien avec les connaissances de $3^{ème}$, tout en les approfondissant.

De manière plus « traditionnelle », cette situation permet d'étudier spécifiquement les fonctions affines après un chapitre complet sur les généralités concernant les fonctions.

Enfin, cette situation peut être scindée en deux parties qui peuvent être traitées à deux moments distincts de l'année. Dans un premier temps, elle peut permettre d'introduire la notion de fonction et dans un second temps, elle peut être reprise pour étudier plus spécifiquement les propriétés propres aux fonctions affines. Dans ce cas toutefois, il convient quand même de ne pas trop espacer les deux séances afin que les élèves aient bien gardé à l'esprit tout le déroulement de ce qui a déjà été fait.

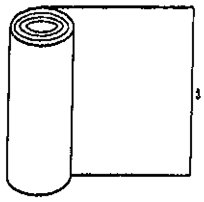
Dans tous les cas, cette situation nous a permis d'atteindre les objectifs visés.

Nous donnons ici la version utilisée comme première approche de la notion de fonction en classe de seconde. Elle est décomposée en six étapes successives.

Etape 1 :

Présentation du problème

Le professeur dit : « On considère une bande de papier de 12 cm de long et de 3 cm de large roulée sur elle-même. Vous voyez beaucoup de rectangles au fur et à mesure que je déroule. Qu'est-ce qui est fixe dans ces rectangles ? Qu'est-ce qui varie ? »



Quelques remarques préalables sur la dévolution du problème :

1- Quand le professeur montre le phénomène, les élèves expriment facilement quelles sont les grandeurs qui varient et quelles sont celles qui sont constantes. L'évoquer n'est pas suffisant, il est facile pour le professeur d'amener une bande de papier confectionnée au préalable.

Pour être plus « proche de la réalité » le professeur pourrait évoquer un store qui se déroule progressivement devant une fenêtre de même dimension. Il pourrait alors introduire la variation de la longueur déroulée du store, celle de l'aire de fenêtre cachée diminuant la lumière. S'intéresser au périmètre du rectangle serait dans ce cas artificiel. En revanche l'aire de fenêtre restant éclairée serait intéressante car elle introduit une fonction affine décroissante. Nous conseillons de garder cette idée du store pour un éventuel devoir à la maison (voir à la fin de cette situation).

Il est à notre avis très important de commencer l'étude des fonctions (et les révisions en seconde) par un matériel « réel » et non évoqué, qui facilite la modélisation. Nous pensons qu'il motive tout aussi bien l'étude qu'une « réalité » qui en reste au stade de l'évocation avec un problème en définitive plus artificiel. Avec la bande de papier, la dévolution du problème aux élèves est facile (en d'autres termes ils manifestent immédiatement leur intérêt et cherchent à répondre aux questions) et ils comprennent mieux de quelles quantités il s'agit d'étudier les variations.

2- Il nous a semblé pertinent de poser la question en ces termes, assez précis mais pas trop directifs, pour trois raisons :

La première est qu'avec des questions trop ouvertes ou trop vagues, comme « Que voit-on ? », « Que remarquez-vous ? », « Qu'est-ce qui se passe ? », ... le risque est assez grand de plonger les élèves dans une sorte de perplexité ou d'embarras néfaste à la mise en œuvre de la situation au sein de la classe.

La seconde est que la mise en avant des rectangles permet d'exclure a priori de l'étude la variation du volume et du diamètre du cylindre formé par la bande enroulée. Ceux-ci sont difficiles à exploiter à cause entre autre de l'épaisseur inconnue du ruban, du nombre inconnu de tours, de la longueur variable de papier nécessaire pour un tour... mais des remarques ont été parfois émises par les élèves à ce sujet. Il peut alors être intéressant de faire remarquer la décroissance de telles fonctions car les fonctions attachées aux rectangles sont toutes croissantes. Nous n'avons pas davantage exploité cela dans nos classes.

Enfin, il nous semble indispensable de ne pas trop fermer la question car rien n'indique dans la réalité qui est fonction de quoi. Bien sûr, il arrive qu'une variable soit plus « naturelle » : celle dont la variation « évidente » entraîne la variation des autres. Ici, c'est a priori la dimension variable, mais pourquoi pas l'aire de la surface déroulée ? Le plus souvent le choix de la variable (parmi tout ce qui varie) est ouvert, voire arbitraire. Il est bon d'en discuter avec les élèves afin qu'ils se rendent compte que, dans la traduction de la situation en termes de fonctions, il y a des choix à faire et des décisions à prendre qui, sans être totalement arbitraires, relèvent tout de même du point de vue que l'on a décidé d'adopter. Par exemple, dans le déplacement d'un mobile, il nous paraît naturel d'exprimer la distance parcourue en fonction du temps (plus je marche longtemps plus la distance est grande), mais pourquoi pas l'inverse ? Quand on prépare une randonnée, le temps de marche à prévoir est, entre autre, fonction de la distance à parcourir (fonction réciproque de l'autre). Les choix effectués dépendent du problème à résoudre.

3- Il n'est pas obligatoire de donner une longueur précise à la bande. Cependant il vaut mieux dire aux élèves qu'on se limite à 12 cm car cela permet d'avoir une échelle sur l'axe des abscisses qui conviendra mieux pour l'ensemble des fonctions étudiées. Le professeur pourra utiliser sans le dire une bande plus longue (environ 20 cm) pour la dérouler facilement pendant plus de temps, ce qui permettra aux élèves de bien visualiser la situation.

Les élèves font les propositions suivantes, très rapidement et sans hésitation :

- **la longueur du rectangle**

Pour les élèves de collège ou pour les élèves de seconde en difficulté, se pose ici un obstacle de vocabulaire. En effet, si le professeur arrête trop tôt le déroulement, à moins de 3 cm, la largeur de la bande est la longueur du rectangle (car 3 cm est la grande dimension), ce qui induit une difficulté de langage. Le professeur doit donc dérouler doucement certes mais franchement, faire une pause vers 4 cm puis une autre pause un peu après.

- **l'aire du rectangle**

- **le périmètre du rectangle**

- **la diagonale du rectangle** qui donne la possibilité de comparer les fonctions affines à une fonction qui ne l'est pas

- **le volume et le diamètre du cylindre** déjà évoqués et qu'il vaut mieux « éliminer » à cause de la difficulté de mathématisation.

Le professeur explique alors aux élèves que l'on va maintenant étudier les variations de ces grandeurs et leur demande comment ils pourraient s'y prendre.

Des élèves évoquent la notion de fonction. Le professeur leur demande de préciser en particulier ce qui est fonction de quoi. La classe doit alors se déterminer sur le choix de la variable. Les élèves se mettent rapidement d'accord pour choisir la longueur que l'on tire et l'appellent x. Certains voulaient l'appeler ℓ comme « longueur du rectangle », mais le professeur leur a fait remarquer qu'elle peut être plus petite que 3 et qu'il vaut donc mieux la considérer comme une « dimension variable » que comme la longueur du rectangle.

Les autres grandeurs dépendent de la valeur de x. Comment ? C'est maintenant que le problème est entièrement posé. En seconde, on note $a(x)$ l'aire du rectangle, $p(x)$ son périmètre et $d(x)$ la longueur de sa diagonale.

Etape 2 :

Tableaux de valeurs et représentations graphiques

Le professeur demande de remplir trois tableaux de valeurs et de tracer la représentation graphique de chaque fonction.
Pour faire ce travail, les élèves adoptent des stratégies différentes, variables selon les niveaux.

Certains font les calculs en revenant au rectangle de dimensions 3 et un nombre choisi entre 0 et 12, de sorte que le périmètre est calculé mentalement comme 3 + nombre + 3 + nombre.

D'autres utilisent rapidement des programmes de calcul énoncés par une phrase : « on multiplie la longueur déroulée par 3 pour obtenir l'aire, on multiplie la longueur déroulée par 2 et on ajoute 6 pour obtenir le périmètre ». Ces programmes sont parfois écrits avec la variable x, mais pas toujours.

La diagonale est le cas le plus compliqué. Certains élèves calculent, sans rien formaliser, avec l'expression « mentale » de la fonction alors que d'autres en seconde écrivent d'emblée : $x \mapsto \sqrt{x^2+9}$

Pour ceux qui n'utilisent pas de programme de calcul, l'image de 0 pose problème car ils ont un doute sur l'existence du rectangle dans ce cas. Lorsqu'une image est trouvée pour 0, elle peut être fausse pour le périmètre et la diagonale. Par exemple certains donnent 0 comme valeur du périmètre et joignent directement l'origine (0,0) avec le point de coordonnées (1,8). C'est l'occasion de faire sentir la notion de limite avec le calcul des images des nombres de plus en plus proches de 0 (0,5 puis 0,1 etc.), en constatant pour l'aire comme pour le périmètre que les nouveaux points semblent bien alignés avec les premiers placés.

Géométriquement le professeur peut parler de rectangle aplati. La valeur limite s'explique alors pour le périmètre en « faisant le tour » du segment de longueur 3cm, aller et retour, ce qui donne 6cm. Quant à la diagonale, elle est alors confondue avec ce segment.
Ceux qui appliquent un programme de calcul ont en revanche naturellement écrit :
$p(0) = 6$, $d(0) = 3$ et $a(0) = 0$.

Certains élèves font remarquer que si la longueur va de 1 en 1 alors l'aire va de 3 en 3 et le périmètre va de 2 en 2. On reprendra cette constatation à l'étape 3 mais le professeur en souligne déjà l'importance.

Au collège, le professeur, lors du bilan, reprend séparément chaque fonction et demande aux élèves de donner le programme de calcul utilisé. Ils expriment donc l'aire, le périmètre et la diagonale pour une longueur x. Ces expressions étaient déjà apparues naturellement chez certains dès le début de l'activité, surtout en seconde.
Ils n'ont pas de difficulté à écrire :

- pour le périmètre l'expression : $p(x) = 2x + 6$

- pour l'aire l'expression : $a(x) = 3x$

- pour la diagonale l'expression : $d(x)= \sqrt{x^2 + 9}$

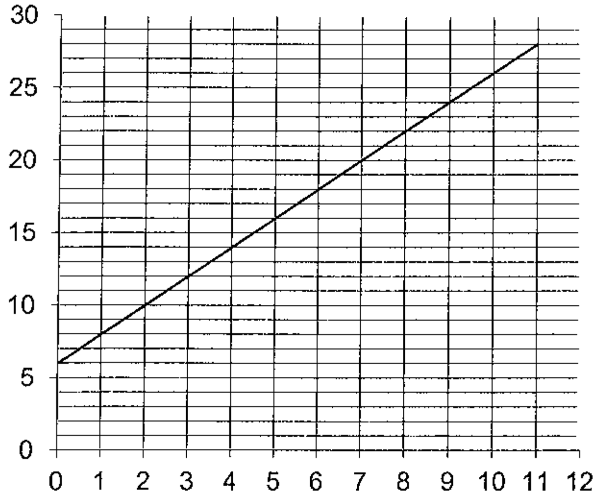
Ce premier bilan permet d'échanger sur ce qu'est une fonction.

A ce stade, la classe se met d'accord sur le fait qu'une fonction est un dispositif ou un procédé qui permet de relier deux éléments : la longueur d'un rectangle à son périmètre, un élève à sa taille, un nombre à son carré… Le premier élément est la grandeur variable qui sera représentée par une lettre, l'autre son image.
Pour une valeur donnée de la variable, l'image est unique. En revanche deux nombres différents peuvent avoir la même image : un nombre a un seul carré, un élève a une seule taille, mais deux nombres opposés ont le même carré, deux élèves peuvent avoir la même taille.

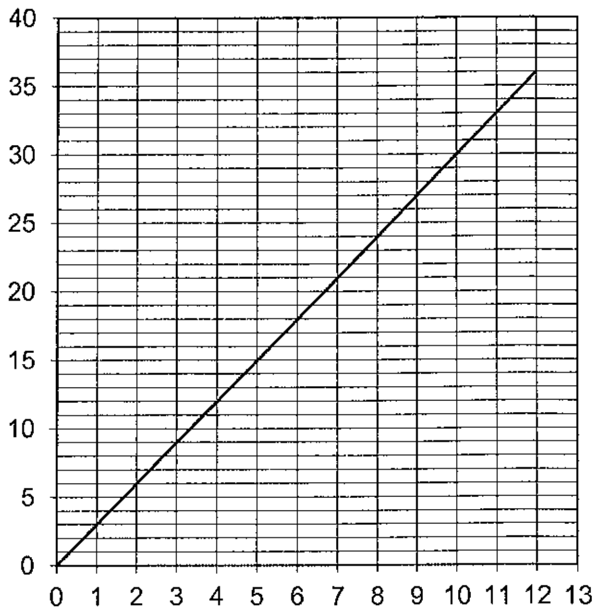
C'est l'occasion de revoir les notations $f(x)$; f; $f : x \mapsto f(x)$; et de rappeler que $f(x)$ est l'image d'un nombre x par une fonction f.

Les élèves construisent leurs courbes représentatives en reliant les points entre eux. Ils constatent immédiatement que l'on a deux fonctions représentées par des droites et une troisième fonction qui n'est pas représentée par une droite.

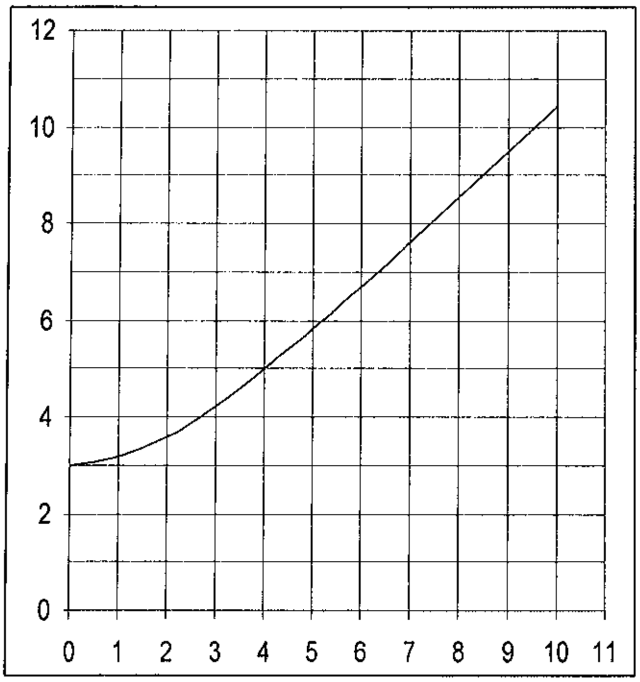
On obtient les graphiques suivants :



Périmètre



Aire



Longueur de la diagonale

Etape 3 :

Mise en relief des fonctions affines

Le professeur dit :

« D'après les graphiques, il semble que deux de ces trois fonctions aient un point commun qui les distingue de la troisième. Peut-on préciser les ressemblances et les différences entre ces trois fonctions ? »

Il peut alors demander aux élèves s'ils sont sûrs de l'alignement dans les deux premiers cas. Le problème soulevé par certains sur l'image de 0 a déjà montré l'intérêt de prendre des valeurs décimales de x pour conjecturer avec un peu de certitude l'alignement des points.
Les élèves de seconde ont déjà vu en troisième que la représentation graphique d'une fonction affine est une droite mais ils ne savent cependant pas expliquer pourquoi les points sont alignés. Personne d'ailleurs ne sait non plus justifier la conjecture de non alignement dans le cas de la diagonale.

On s'intéresse aux deux fonctions affines. Certains élèves disent que si l'on obtient des droites, c'est que « c'est proportionnel ». Il n'est pas inutile de revenir sur ce qu'ils entendent par là. Le cas de l'aire est vite réglé puisque la dimension x est multipliée par 3 et donc l'aire est proportionnelle à celle-ci. Mais le problème reste entier pour le périmètre car ce dernier n'est pas proportionnel au côté.

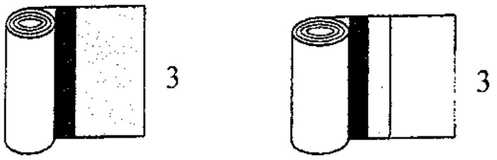
Il est alors utile de leur rappeler la remarque que certains avaient faite : « si la longueur va de 1 en 1 alors l'aire va de 3 en 3 et le périmètre va de 2 en 2 ».

Etape 4 :

Mise en évidence de la proportionnalité des accroissements pour une fonction affine.

On revient à notre bande de papier roulée. Après avoir tiré une première fois dessus, on tire à nouveau de 1 cm cette fois. Que constate-t-on ?

Et si l'on tire encore de 1cm ? Et encore…

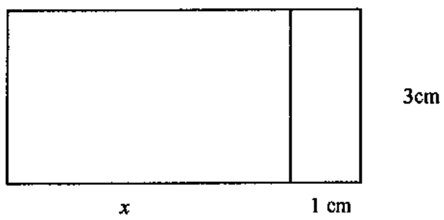


Comment peut-on le généraliser si l'on tire plus encore ?

Comment peut-on le visualiser sur le tableau et sur le graphique ?

Le professeur pourra distribuer une feuille avec les graphiques.

Les élèves en s'aidant d'un petit schéma arrivent rapidement à déterminer l'augmentation de 3 cm² pour l'aire et de 2 cm pour le périmètre à chaque fois que l'on tire de 1 cm.



La généralisation pour une augmentation différente de 1 est un peu plus difficile car l'emploi d'une deuxième variable est perturbant.

Certains sentent intuitivement le résultat et l'expliquent aux autres en prenant d'autres exemples. « Si tu tires de 2, le périmètre augmente de 4 (2+2), si tu tires de 3 le périmètre augmente de 6 (3+3), si tu tires de k le périmètre augmente de $k + k$ c'est-à-dire $2k$ ».

En revenant à la fonction déterminée à l'étape 2 :

$x \mapsto 2x+6$

donc $\quad x+1 \mapsto 2(x+1)+6 = 2x+6+\boxed{2}$,

On note que lorsque x augmente de 1 le périmètre augmente de 2. L'accroissement des images est de 2 pour un accroissement de la variable de 1.

Sur la fiche distribuée aux élèves, les accroissements sont mis en évidence sur les tableaux et les représentations graphiques.

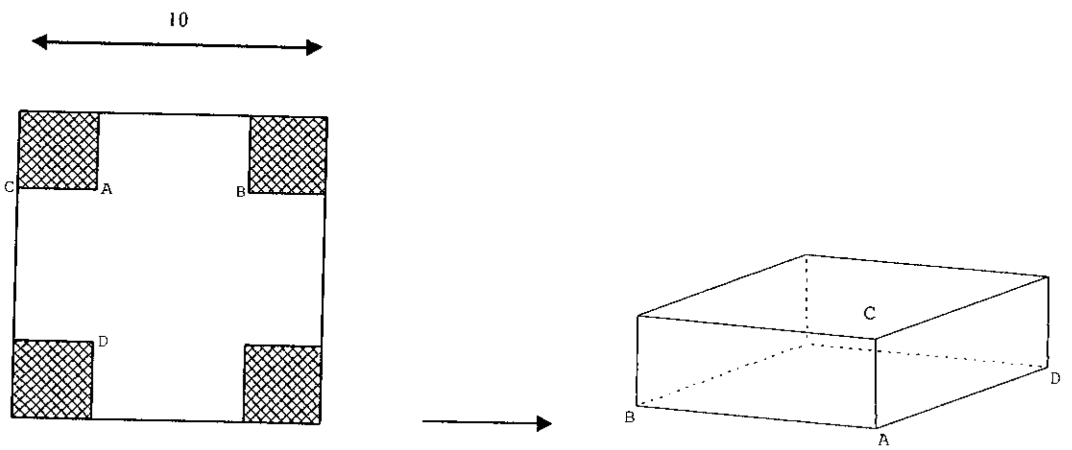
Résoudre un problème graphiquement : la boîte

Cette situation a été testée :

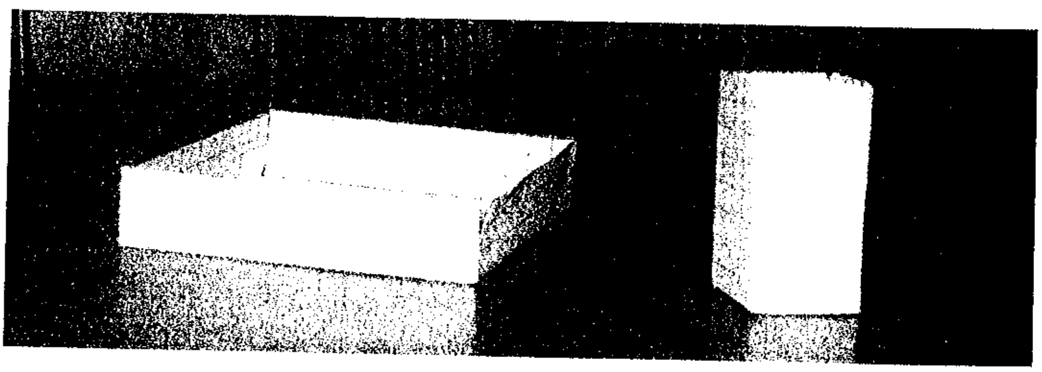
- en classe de seconde après l'étude des fonctions affines et des fonctions polynomiales du second degré. Le but est de montrer que la représentation graphique d'une fonction peut permettre de résoudre des équations et des inéquations quand on ne peut pas le faire par le calcul.
- en classe de troisième pour résoudre cette fois un problème d'optimisation par simple lecture graphique ou avec le tableur.

Nous rédigeons plus spécifiquement le déroulement en classe de seconde car le problème peut paraître difficile pour les classes de troisième. Nous donnons déjà beaucoup d'autres situations sur les fonctions pour le niveau troisième.

Étape 1



Réaliser une boîte à partir d'un carré de côté 10 cm, en enlevant à chaque « coin » le même « petit » carré, comme indiqué sur le schéma ci-dessus.



Cette étape est indispensable pour que chaque élève comprenne comment est construite la boîte.

Le professeur montre à la classe des boîtes de dimensions différentes réalisées par les élèves.

Il leur demande ce qu'elles ont en commun et ce qu'elles ont de différent.

Les élèves répondent que le volume des boîtes change.

Étape 2
Déterminer la dimension du côté du petit carré pour que le volume de la boîte soit 40,5 cm^3.

Choisir 40,5 permet d'obtenir la solution décimale simple 0,5 (que les élèves peuvent déterminer en testant des valeurs) et une autre plus difficile à trouver ($\frac{19-\sqrt{37}}{4} \approx 3,23$)[1] dont les élèves de seconde ne peuvent déterminer qu'une valeur approchée.

Cette situation étant proposée au début du troisième trimestre, certains élèves se lancent rapidement dans le calcul en notant x la longueur du côté du carré.

Ils écrivent que le volume de la boîte est donné par $(10-2x)^2 \times x$.

D'autres ont cependant du mal à démarrer. Ils ont compris qu'il faut exprimer le volume de la boîte en fonction de x mais ne trouvent pas l'expression des dimensions de la boîte.

Le professeur les incite à reprendre la boîte qu'ils ont réalisée et à déterminer les longueurs AB, AD et AC, nécessaires au calcul du volume, en fonction de x.

Une fois levées les difficultés liées à la représentation dans l'espace, les élèves trouvent l'expression du volume.

Le problème revient donc à résoudre : $(10-2x)^2 \times x = 40,5$.

Les élèves commencent par développer et obtiennent $4x^3 - 4x^2 + 100x = 40,5$ ce qui ne les avance guère…

1 Voir compléments pour le professeur à la suite de cette situation.

Certains élèves utilisent alors leur calculatrice, surtout dans les classes où cette méthode a déjà été vue pour les résolutions des équations et des inéquations du second degré.

Le professeur met les autres sur cette voie en leur demandant s'ils ne connaissent pas d'autres méthodes que le calcul pour résoudre une équation. Deux idées arrivent : le test sur des valeurs particulières et l'utilisation de la représentation graphique de la fonction $V : x \mapsto (10-2x)^2 \times x$.

Le professeur demande de déterminer l'ensemble de définition de V.

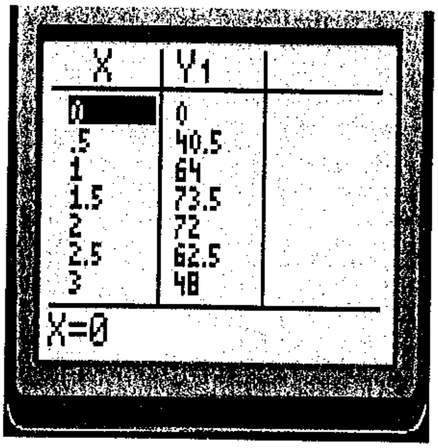
Certains proposent l'intervalle [0 ; 10], rapidement rejeté par les autres qui expliquent que x ne peut pas être supérieur à 5. On écrit donc que l'ensemble de définition de V est l'intervalle [0 ; 5].

Le professeur laisse alors les élèves chercher la solution du problème à l'aide de leur calculatrice.

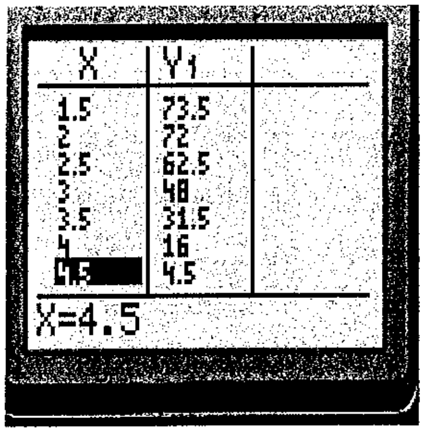
C'est l'occasion de travailler les différentes fonctions de la calculatrice : tableau de valeurs, graphique, détermination d'intersections de courbes...

Diverses méthodes émergent dans la classe :

1. Utilisation du tableau de valeurs pour approcher au mieux les solutions de l'équation.



Les élèves conjecturent une solution entre 0 et 1 et une autre entre 3 et 4. Ils modifient le pas de la table et obtiennent :

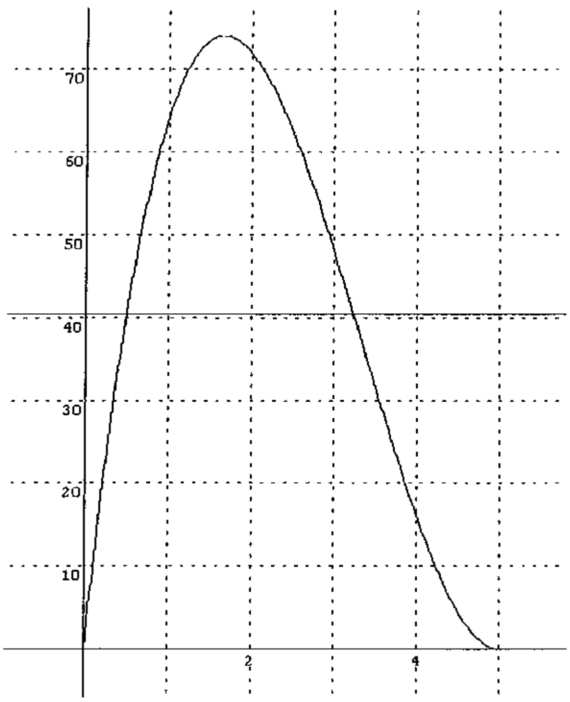


Ils ont donc trouvé la solution 0,5 et établi que l'autre est entre 3 et 3,5. En poursuivant ainsi ils trouvent que cette autre solution est proche de 3,25.

L'inconvénient de cette méthode est que des élèves s'arrêtent à la première solution en oubliant celle comprise entre 3 et 4.
De plus, rien n'indique que les deux solutions trouvées sont les seules.

2. Utilisation de la courbe représentative de la fonction.

- En traçant la courbe à la main:



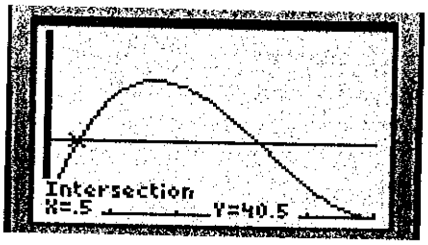
Graphiquement les élèves trouvent les deux solutions : 0,5 et environ 3,25.

Il faut les encourager à vérifier leurs résultats en calculant les images des valeurs déterminées graphiquement et les pousser à affiner leur valeur approchée en appliquant la méthode décrite précédemment.

L'idéal est de coupler les deux méthodes : le graphique pour s'assurer du nombre de solutions et le tableau de valeurs pour les approcher au mieux.

- <u>En utilisant la calculatrice :</u>

Les élèves font afficher la représentation graphique de la fonction V et de celle de la fonction constante $f : x \mapsto 40,5$.



C'est un travail à faire avec tous les élèves de la classe. Il permet en effet de travailler la notion de fenêtre d'affichage et la détermination de l'intersection de deux courbes à l'aide de la calculatrice.

Le professeur profite de la mise en commun et de l'exposé des différentes méthodes pour demander aux élèves les autres conjectures qu'ils peuvent déduire de la courbe de V. Ils évoquent le maximum du volume de la boîte et les variations de la fonction V.
Ils conjecturent, à partir du graphique, et à l'aide de la calculatrice, que le volume maximum d'environ 74 cm^3 est obtenu pour $x \approx 1,67$ cm.

En seconde, nous nous contentons de la conjecture sur le problème d'optimisation du volume. En effet les élèves auront dès l'année suivante, avec l'étude de la fonction dérivée, les outils nécessaires pour la justifier.

Étape 3

Déterminer la dimension du côté du petit carré pour que le volume de la boîte soit inférieur ou égal à 16 cm^3.

Choisir 16 permet d'avoir une solution « évidente » (4) et une autre ($3 - 2\sqrt{2} \approx 0{,}17$) qui ne l'est pas.[2]

Les élèves réinvestissent ce qui a été fait à l'étape 2.

En appelant x la longueur du côté du carré, le problème revient à estimer les solutions de l'inéquation $(10-2x)^2 \times x \leq 16$

Les élèves trouvent sans grande difficulté que $x \in [0;0,2] \cup [4;5]$.

Bilan :

La représentation graphique d'une fonction peut aider à résoudre des équations et des inéquations que nous ne savons pas résoudre par le calcul.

Compléments pour le professeur

1° La résolution des équations (au niveau première)

La première équation que les élèves n'ont pas su résoudre algébriquement est :

$4x^3 - 40x^2 + 100x - \dfrac{81}{2} = 0$ (voir étape 2, méthode 1)

Quand on a trouvé, qu'une solution est $\dfrac{1}{2}$, (ce qui se vérifie par le calcul) une factorisation permet de trouver les deux autres. Il suffit de déterminer le coefficient a en développant le produit :

$(x - \dfrac{1}{2})\,(4\,x^2 - a\,x + 81)$

[2] Voir compléments pour le professeur à la suite de cette situation.

ce qui donne pour le coefficient des termes en x^2, par identification :

$-\frac{1}{2} \times 4 - a = -40$ donc $a = 38$.

D'où l'équation à résoudre : $(x - \frac{1}{2})(4x^2 - 38x + 81) = 0$.

Le discriminant de l'équation $4x^2 - 38x + 81 = 0$ est 37.

On obtient les deux autres solutions. Seule celle que nous avons donnée, $\frac{19 - \sqrt{37}}{4}$, est dans l'intervalle [0,5].

Il en est de même pour la deuxième équation : $4x^3 - 40x^2 + 100x - 16 = 0$ (voir étape 3)

Quand on a trouvé qu'une solution est 4, une factorisation permet de trouver les deux autres.
Il suffit de déterminer le coefficient a en développant le produit :
$(x - 4)(4x^2 - ax + 4)$, ce qui donne pour le coefficient des termes en x^2, par identification :
$-4 \times 4 - a = -40$ donc $a = 24$.
D'où l'équation à résoudre : $(x - 4)(4x^2 - 24x + 4) = 0$.
Le discriminant de l'équation $x^2 - 6x + 1 = 0$ est 8.
On obtient les deux autres solutions. Seule celle que nous avons donnée, $3 - 2\sqrt{2}$, est dans l'intervalle [0,5].

<u>2° Les abscisses de deux points particuliers</u>

On peut demander aux élèves, même en troisième, de trouver la valeur de x qui conduit à une boîte cubique, cela revient à trouver x tel que :

$10 - 2x = x$; $3x = 10$; $x = \frac{10}{3}$

Visiblement, d'après le graphique, ce n'est pas la valeur qui donne le maximum du volume.
Nous avons conjecturé à partir du graphique ou à l'aide de la calculatrice que le maximum est d'environ 74 cm^3 obtenu pour x environ égal à 1,67 cm.

En fait, il s'agit de $x = \frac{5}{3} \approx 1{,}66666$

Le calcul de la dérivée permet de retrouver ce résultat. Le volume maximal est alors de $\frac{2000}{27}$ cm^3.

Il paraît saugrenu de demander aux élèves de trouver la valeur de x pour laquelle l'aire de la base est égale à l'aire de la surface latérale et pourtant une solution de cette équation est aussi $\frac{5}{3}$.

Nous verrons par la suite que ce n'est pas un hasard.

$(10 - 2x)^2 = 4x(10 - 2x)$; $10 - 2x = 4x$; $6x = 10$; $x = \frac{5}{3}$

Cette équation a aussi pour solution $x = 5$, qui correspond au cas où la boite est réduite à un point.

Finalement, pour $x = \frac{5}{3}$, le volume est maximal et l'aire de la base est égale à l'aire de la surface latérale; pour $x = \frac{10}{3}$ la boîte est un cube.

<u>3° La variation de x entre 0 et 5 se divise en fait en trois parties d'égale amplitude :</u>

L'examen du graphique permet de suivre la variation du volume :

$0 < x < \frac{5}{3}$ le volume augmente mais la courbe monte de plus en plus lentement : le coefficient directeur de la tangente est positif et diminue quand x augmente.

$\frac{5}{3} < x < \frac{10}{3}$ le volume diminue : la courbe descend de plus en plus vite : le coefficient directeur de la tangente est négatif et diminue de plus en plus quand x augmente.

$\frac{10}{3} < x < \frac{15}{3}$ le volume diminue encore mais plus lentement.

A partir du point d'abscisse $\frac{10}{3}$, la pente de la tangente, toujours négative, augmente, c'est à dire qu'au lieu de devenir « de plus en plus négative » elle devient « de moins en moins négative » jusqu'à s'annuler.

La pente de la tangente était décroissante avant ce point. Elle est devenue croissante après ce point.

Pour $x = \frac{10}{3}$, il y a un point d'inflexion.

Sans dire le mot, on peut caractériser ce point en disant que la concavité de la courbe change : ici avant ce point la concavité était dirigée vers le bas et après ce point elle se trouve dirigée vers le haut.

Explication de l'arrivée des deux nombres $\frac{5}{3}$ et $\frac{10}{3}$ sans parler de dérivées :

A un instant donné, la hauteur de la boîte est x et le côté de la base y (qui vaut $10 - 2x$). Le volume est $x\,y^2$.

Quand la hauteur augmente de h, le côté de la base diminue de $2h$.

Le volume est devenu : $(x + h)\,(y - 2h)^2$

On développe et on ordonne selon les puissances croissantes de h :

$(x + h)(y^2 - 4yh + 4\,h^2) = xy^2 + hy\,(y - 4x) + 4h^2\,(x - y) + 4h^3$

La variation du volume est donnée par les trois derniers termes. Si h est petit, les termes en h^2 et h^3 sont négligeables par rapport au terme en h.

On gagne en volume tant que le coefficient de h est positif, soit $y - 4x > 0$ donc $y > 4x$

c'est-à-dire $10 - 2x > 4x$; $10 > 6x$; $x < \frac{5}{3}$

C'est en annulant le terme de premier degré en h que l'on trouve un maximum ou un minimum local.

Dès que x sera supérieur à $\frac{5}{3}$ on va perdre en volume.

Pour h assez petit (tant que h^3 sera négligeable devant h^2), la perte va être ralentie dès que le coefficient de h^2 sera positif c'est à dire dès que $x > y$ soit :

$x > 10 - 2x$; $3x > 10$; $x > \frac{10}{3}$

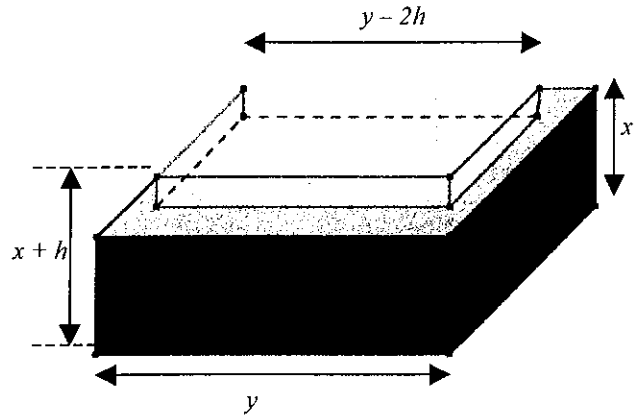
Interprétation du maximum $\frac{5}{3}$:

On peut transformer le deuxième terme : $hy(y - 4x) = h(y^2 - 4xy)$.

On remarque alors que y^2 est l'aire de la base et que $4\,xy$ est l'aire latérale.

Le maximum est obtenu quand ce terme est nul, c'est-à-dire quand l'aire latérale est égale à l'aire de la base. Au voisinage de ce point, ce qu'on perd d'un côté ($4\,xyh$) se compense par ce qu'on gagne de l'autre (y^2h).

Que se passe-t-il donc géométriquement pour le volume quand l'aire latérale est égale à l'aire de la base ?



En violet le volume gagné
En vert le volume perdu

Dans le cas où x augmente de h, la hauteur de la boîte augmente, ce qui permet de gagner en volume, mais l'aire de la base diminue, donc on perd. Au début de la manipulation le volume augmente, donc on doit gagner davantage qu'on ne perd. C'est près de l'équilibre que la compensation doit être la meilleure et ensuite le processus s'inverse.

Quand x augmente de h, y diminue de $2h$.

Le volume gagné est celui d'un parallélépipède de hauteur h et dont l'aire de base est $(y\text{-}2h)^2$

Le volume gagné est donc :

$h(y-2h)^2 = h\,(y^2 - 4hy + 4h^2) = h\,y^2 - 4h^2y + 4h^3$

Le volume perdu est celui d'une couche tout autour de la boîte qui s'appuie sur la surface latérale.

Le volume perdu est : $y^2x - (y - 2h)^2x = 4xyh - 4xh^2$

Le bilan redonne : $V(x + h) - V(x) = h\,(y^2 - 4xy) + 4h^2\,(x - y) + 4h^3$

Tous les termes s'expliquent géométriquement. On repère quatre parallélépipèdes avec une face carrée de côté h et quatre cubes de côté h.

On peut se référer à ce qui se passe avec les rectangles de périmètre constant au voisinage du carré.

4°- La représentation graphique de la fonction dans $\mathbb{R}$

En seconde et aussi dans les classes suivantes, il peut être intéressant de voir ce que donne la représentation graphique de la fonction indépendamment du problème concret de la boîte.

On peut par exemple proposer de résoudre alors l'équation : $4x^3 - 40\,x^2 + 100\,x = \frac{2000}{27}$

La lecture graphique permet de conjecturer la racine double $x = \frac{5}{3}$ et une racine simple égale environ à 3,3.

La résolution algébrique conduit à l'équation $4\,(x^3 - 10\,x^2 + 25\,x - \frac{500}{27}) = 0$.

Penser à la racine double permet de la transformer en $(x - \frac{5}{3})^2\,(x - \frac{20}{3}) = 0$.

Les cubitainers : fonction affine par morceaux.

Problème posé

Problème 1 : Un vigneron vend son vin en vrac au prix de 3 € le litre. Il propose à ses clients des cubitainers de 10 L au prix de 5 € la pièce pour y mettre le vin acheté.

1) M. Dupont achète 5 L de vin . Combien va-t-il payer (cubitainer compris) ?
2) Mme Richard achète 18 L de vin. Combien va-t-elle payer (cubitainers compris) ?
3) Représenter graphiquement le prix payé en fonction de la quantité de vin achetée sachant qu'on aura besoin de cubitainers. On prendra comme unité 2 carreaux (ou 2cm) = 5 L en abscisses et 1 carreau (ou 1 cm) = 5 € en ordonnées. Expliquer.
4) M. Durand dépense 113 € .Quelle quantité de vin a-t-il achetée ? Justifier.

Ou problème 2 : Chez un vigneron, on peut acheter du vin au litre. Dans ce cas, le vin est conditionné dans des cubitainers d'une capacité de 5 litres.

Le vin est vendu 2,50 € le litre et un cubitainer est vendu 1,50 €.

1) Calculer le prix qu'un client devra payer pour 2 litres achetés, puis pour 5 litres et 7 litres. Expliquez brièvement vos calculs.
2) Exprimer le prix *p(x)* en fonction du volume *x* (exprimé en litres) de vin acheté, *x* étant compris entre 0 et 15.

Tracer la courbe représentative de la fonction *p* dans un repère orthogonal. On prendra 1 cm pour 1 litre en abscisses et 1 cm pour 2 € en ordonnées.

Objectifs possibles

- Exemple de fonction non continue
- Fonctions affines par morceaux.
- Programmer le tracé d'une fonction affine par morceaux.

Matériel

- Traceur de courbe (logiciel ou calculatrice graphique) *facultatif.*

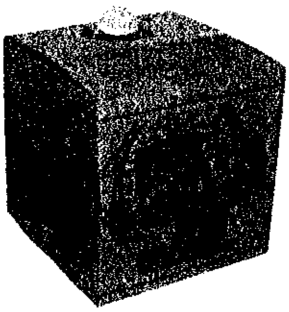
Niveau

- $3^{ème}$ ou 2^{nde}

Fonction utilisée

- $p(x) = 2{,}5x + 1{,}5$ si $x \in [0; 5]$; $p(x) = 2{,}5x + 3$ si $x \in \,]5; 10]$;...

Les cubitainers : fonction affine par morceaux



Ce travail permet de rencontrer une fonction affine par morceaux à l'aide d'un habillage «concret». C'est le tracé de la courbe à la main qui en constitue l'intérêt principal.

Les élèves vont découvrir pour la première fois une fonction non continue.

On verra, par la suite, les limites de l'habillage concret. En effet une réflexion sur la pertinence de la modélisation proposée pourra faire l'objet d'un débat dans la classe.

Problème 1 : *Un vigneron vend son vin en vrac au prix de 3 € le litre . Il propose à ses clients des cubitainers de 10 L au prix de 5 € la pièce pour y mettre le vin acheté.*

1) *M. Dupont achète 5 L de vin . Combien va-t-il payer (cubitainer compris) ?*
2) *Mme Richard achète 18 L de vin . Combien va-t-elle payer (cubitainers compris) ?*
3) *Représenter graphiquement le prix payé en fonction de la quantité de vin achetée sachant qu'on aura besoin de cubitainers. On prendra comme unité 2 carreaux (ou 2cm) = 5 L en abscisses et 1 carreau (ou 1 cm) = 5 € en ordonnées. Expliquer.*
4) *M Durand dépense 113€ .Quelle quantité de vin a-t-il achetée ? Justifier.*

La fonction cherchée p est la suivante :

- $p(x) = 3x + 5$ si $x \in [0;10]$; $p(x) = 3x + 10$ si $x \in [10;20]$;...

Utilisation par l'enseignant

Les deux premières questions permettent aux élèves de comprendre la situation. Pour résoudre la dernière question les élèves peuvent utiliser le graphique et (ou) un raisonnement algébrique.

Les paramètres ont été choisis de manière à visualiser au mieux les « trous » de la courbe. Les unités ont été imposées pour les mêmes raisons.

Le plus intéressant dans cet exercice, c'est la séance consacrée à la correction qui donne lieu à des échanges très riches dans la classe. Le professeur a scanné des productions d'élèves et les projette à la classe.

Ce problème a été posé en seconde comme application après le cours sur les fonctions affines. Alors que dans la situation « la bande qui se déroule », les fonctions affines sont vues comme un objet d'étude, ici elles sont utilisées comme outil. En effet si aucune connaissance préalable sur le sujet n'est vraiment nécessaire pour la modélisation, le tracé de la courbe en revanche nécessite les connaissances relatives à leur représentation graphique.
Dans la plupart des copies, l'erreur commune vient du fait que les élèves ne veulent pas de « trous » dans la courbe et relient les points d'une manière ou d'une autre.

Remarques sur les énoncés

Certaines des productions d'élèves ont été obtenues à partir d'un énoncé légèrement différent mais qui fait apparaître d'autres possibilités de réalisation. Nous avons pris le parti de vous le présenter car il permet de souligner l'importance des variables didactiques et des risques d'erreurs qu'elles peuvent engendrer.
Voici cet énoncé :

Problème 2 : *Chez un vigneron, on peut acheter du vin au litre. Dans ce cas, le vin est conditionné dans des cubitainers d'une capacité de 5 litres.*
Le vin est vendu 2,50 € le litre et un cubitainer est vendu 1,50 €.

1- *Calculer le prix qu'un client devra payer pour 2 litres achetés, puis pour 5 litres et 7 litres. Expliquez brièvement vos calculs.*
2- *Exprimer le prix p(x) en fonction du volume x (exprimé en litres) de vin acheté, x étant compris entre 0 et 15.*
3- *Tracer la courbe représentative de la fonction p dans un repère orthogonal. On prendra 1 cm pour 1 litre en abscisses et 1 cm pour 2 € en ordonnées.*

Nous noterons au niveau de chaque production le numéro du problème dont elles sont issues.

La fonction cherchée *p* est la suivante :

1) $p(x) = 2,5x + 1,5$ si $x \in [0;5]$; $p(x) = 2,5x + 3$ si $x \in [5;10]$;...

Exemples de production d'élèves :

Élève 1A problème 1

x	$-\infty$		-1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
signe [illegible]		$-$	0	$+$		$+$	
signe [illegible]		$+$		$+$	0	$-$	
$A(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc $S =]-\infty ; -1] \cup [\frac{3}{2} ; +\infty[$.

laquelle je crois ?

4,5/7 Exercice [illegible]

1) [illegible]

$2 \times 5 + [illegible] = 20$

Donc [illegible]

2) [illegible]

$18 \times 2 + 5 \times 2 = 64$

Donc [illegible]

3) Il n'y a pas de proportionnalité entre ces points car la représentation est une représentation graphique d'une fonction affine de la forme $f(x) = ax + b$ dont a est le coefficient directeur et b l'ordonnée à l'origine.

Déterminons a :
Soit A de coordonnées $(5 ; 20)$
Soit B de coordonnées $(18 ; 64)$

Pourquoi as-tu dit que c'est une fonction affine ?!

$a = \frac{64 - 20}{18 - 5} = \frac{44}{13}$

Déterminons b.
On sait que $y = ax + b$

$20 = \frac{44}{13} \times 5 + b$

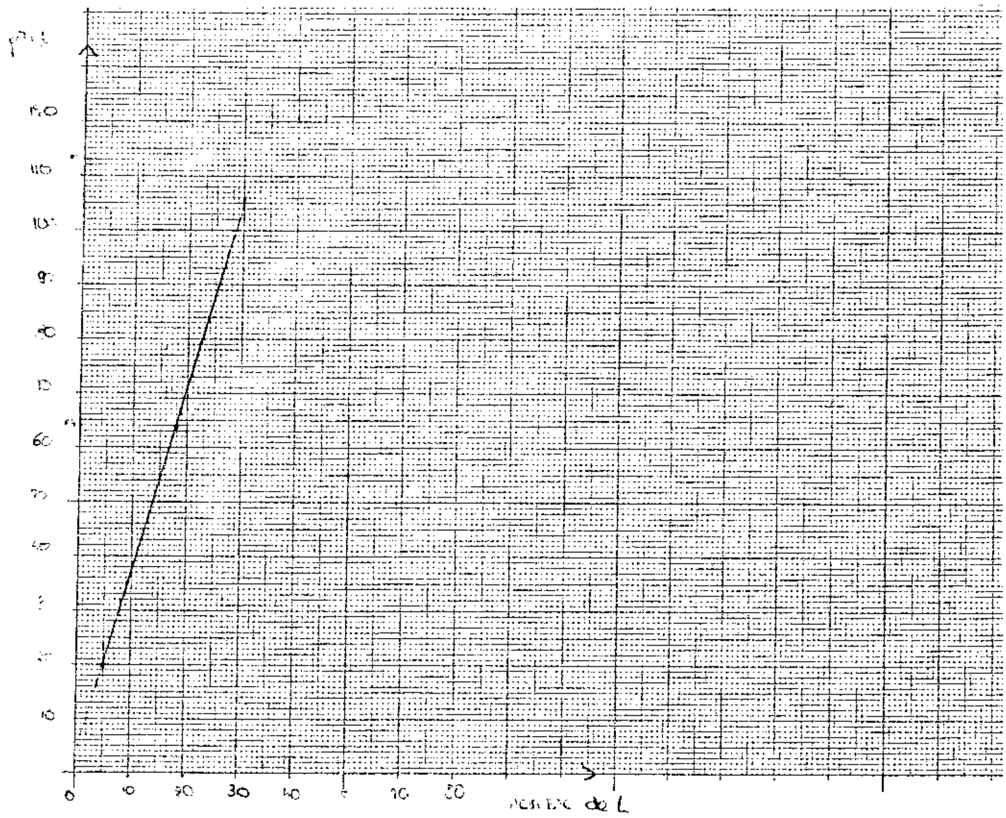
$20 = \frac{220}{13} + b$

$b = 20 - \frac{220}{13} = \frac{20 \times 13 - 220}{13}$

$= \frac{40}{13}$

Donc sa fonction affine est :
$x \longmapsto \frac{44}{13} x + \frac{40}{13}$

Cet élève a obtenu la représentation graphique suivante :



Il a admis une fonction affine dans l'ensemble du domaine d'étude et n'a pas remis en question sa conjecture car il n'a calculé que deux points.

- Certains tracés, assez rares, représentent une droite construite à partir des points de coordonnées (10, p(10)), (20, p(20)) et (30, p(30), qui sont alignés !

En effet :

p(10) = 3 x 10 + 5 = 35, p(220) = 3 x 20 + 5 = 65, p(30) = 95.

Ce qui permet de vérifier la proportionnalité des accroissements.

Les élèves ont commencé par construire le graphique pour *x* compris entre 0 et 10.

Ils ont décelé une fonction affine dans l'ensemble du domaine d'étude et n'ont pas remis en question leur conjecture qui se confirmait avec le calcul de *p(20)* et *p(30)*. Trois points alignés leur ont suffit pour conclure à l'alignement des points.

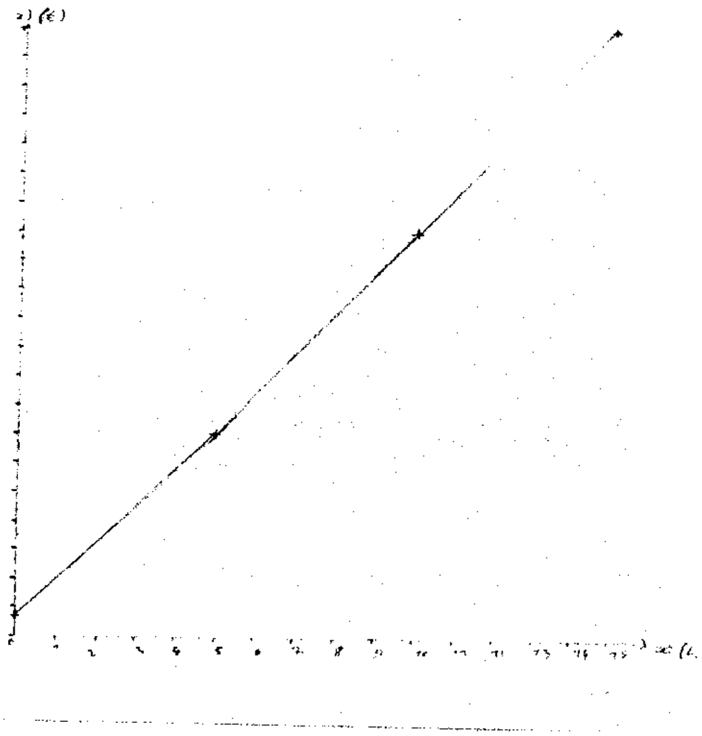
Ce phénomène est encore accru si on modifie les paramètres de la situation, par exemple si on diminue le prix du litre à 2,5€, le prix du cubitainer à 1,5€ et la contenance à 5 litres comme dans le problème 2. Non seulement les points sont alignés mais en plus les élèves peuvent conclure à la proportionnalité en calculant :

$p(5) = 2{,}5 \times 5 + 1{,}5 = 14,$

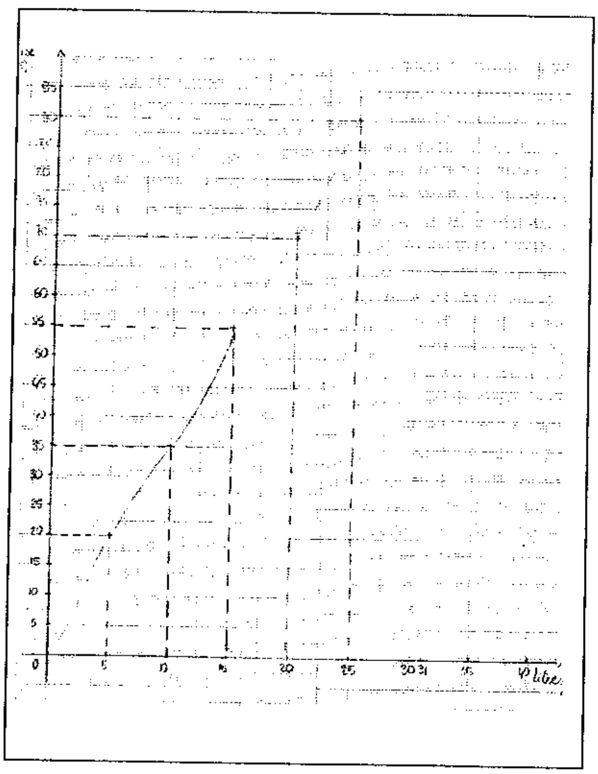
$p(10) = 2{,}5 \times 10 + 3 = 2 \times (2{,}5 \times 5 + 1{,}5) = 2 \times p(5) = 28,$

$p(15) = 42 = 3 \times p(5).$

Élève 1B problème 2



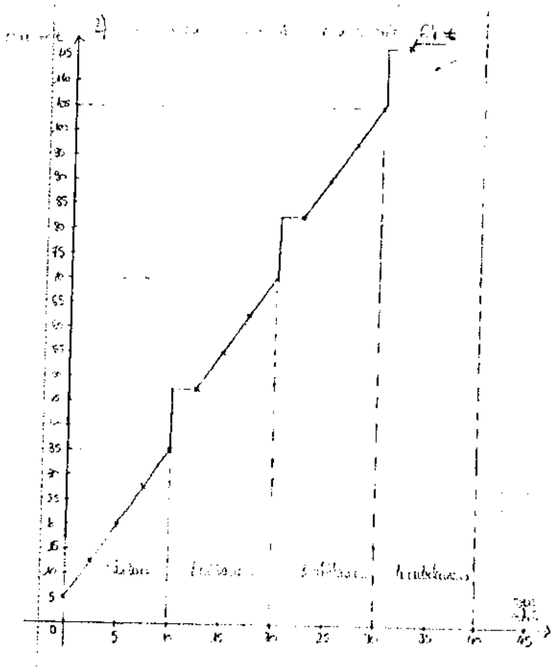
Élève 2 problème 1



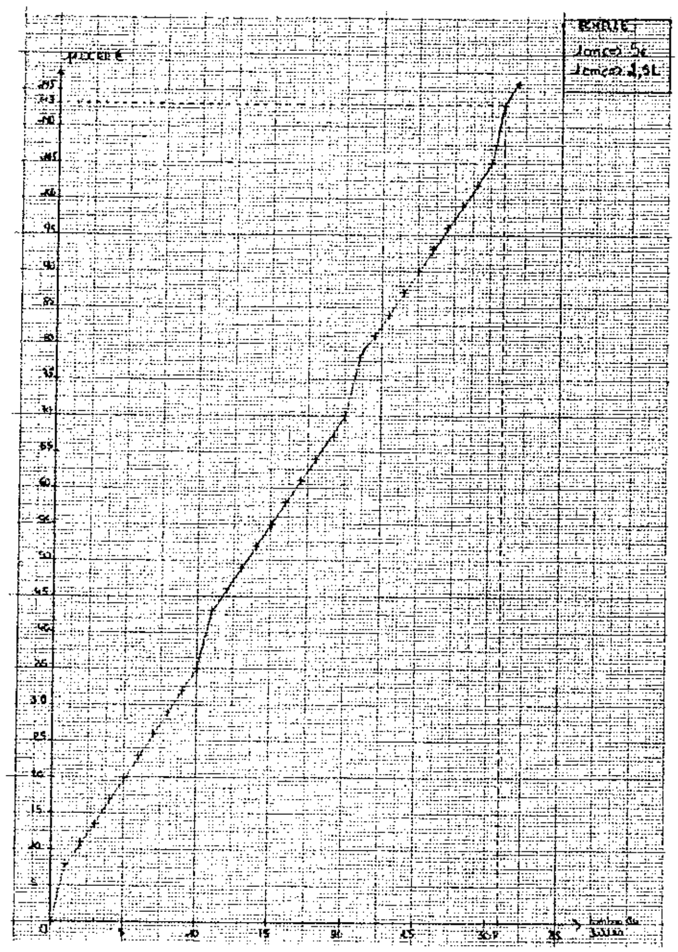
L'élève 2 a pris cinq valeurs et relie les points par un trait continu. Il fait passer sa représentation par l'origine.
Beaucoup d'élèves reconnaissent une fonction affine par morceaux mais cherchent par tous les moyens à relier les « morceaux » en adoptant diverses stratégies.
Les trois stratégies suivantes procèdent des mêmes intentions.
Après discussion, il semble qu'une raison bien particulière ait poussé les élèves à adopter cette stratégie. La plupart d'entre eux, au moment de tracer pour représenter la situation, ont estimé, à juste titre, que les plages de valeurs [10 ; 11] et [20 ; 21] correspondaient à des situations absurdes dans la réalité et ont levé les difficultés à leur manière.
Les élèves 3 et 4 ont préféré relier les points en ne tenant pas compte des valeurs prises par $p(x)$ sur les intervalles [10 ; 11] et [20 ; 21] plutôt que d'obtenir une courbe à trous. Par contre l'élève 5 n'hésite pas à marquer la discontinuité.

Cette remarque a permis d'engager une discussion sur le lien entre les fonctions, la réalité et la modélisation de la réalité.

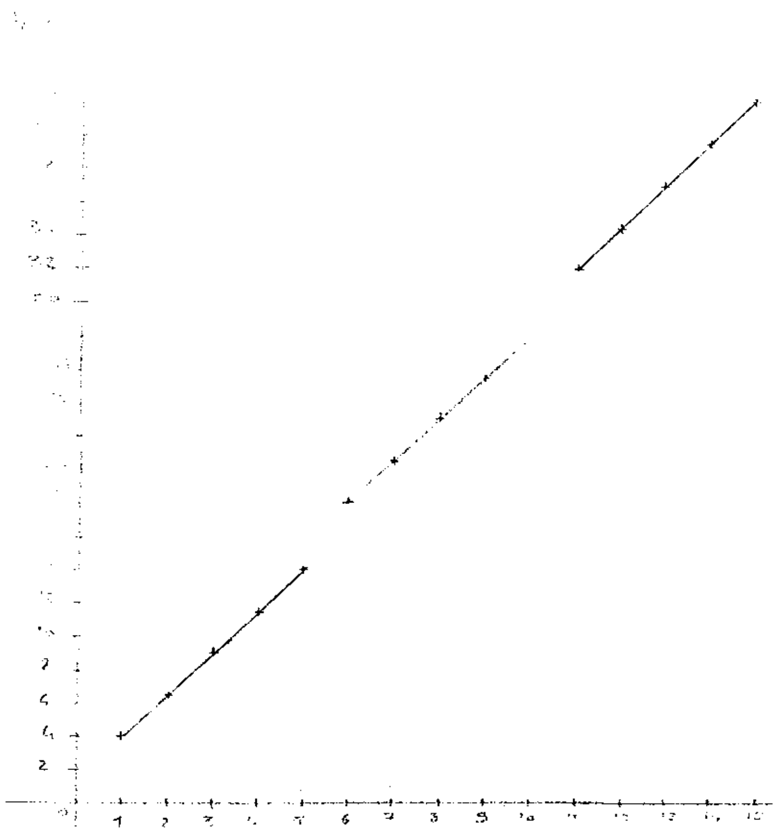
Élève 3 problème 1



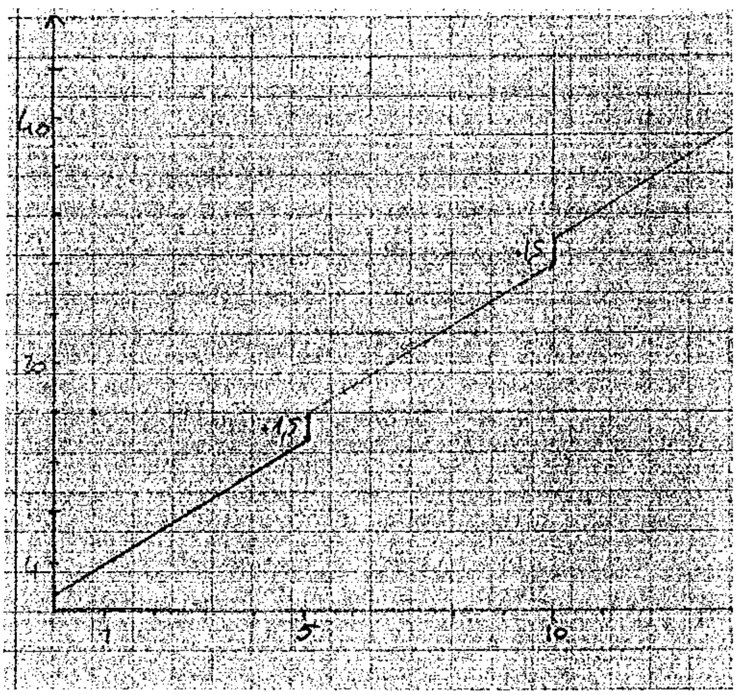
Élève 4 problème 1



Élève 5 problème 2



Élève 6 problème 2

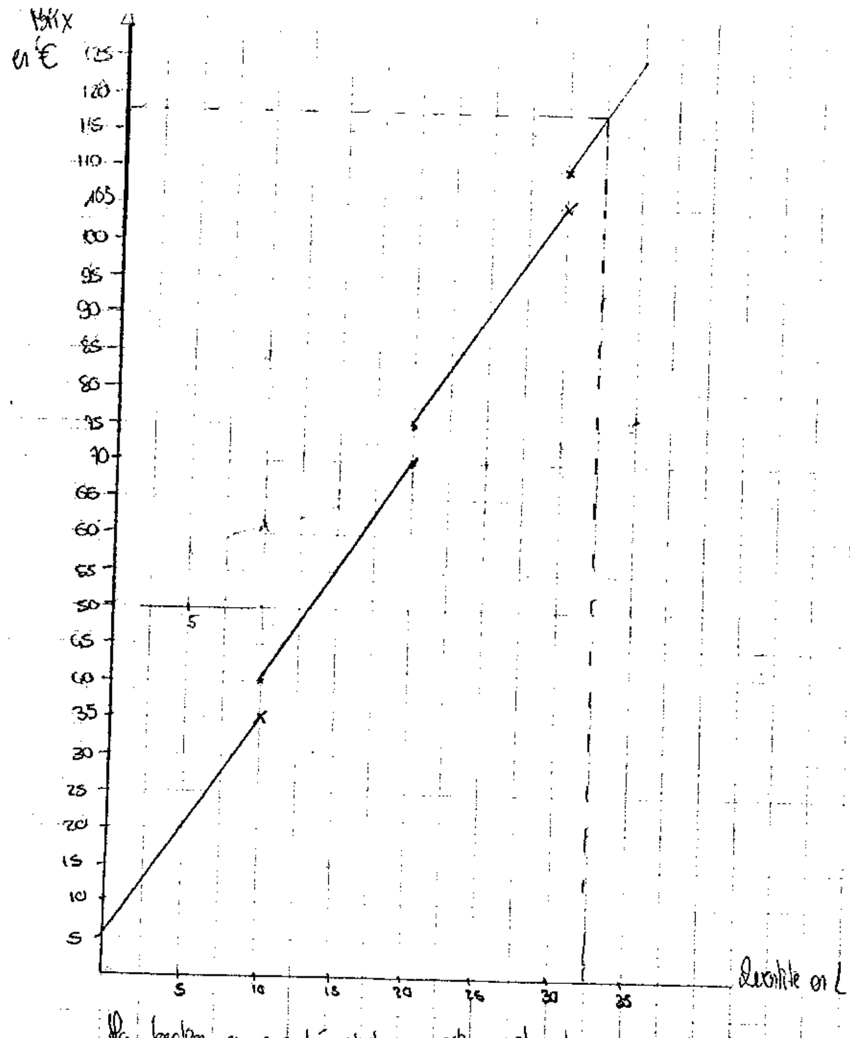


A partir d'un tracé juste, les élèves ont éprouvé le besoin de relier les extrémités des segments consécutifs.

Cette stratégie est facile à interpréter, l'élève 6 n'ayant rencontré dans le cours que des fonctions continues, l'idée qu'il se faisait des représentations graphiques a pris le pas sur le respect du cours : «deux points distincts ne peuvent pas avoir la même abscisse».

L'unicité de l'image d'un nombre est cependant parfaitement rappelée par certains élèves :

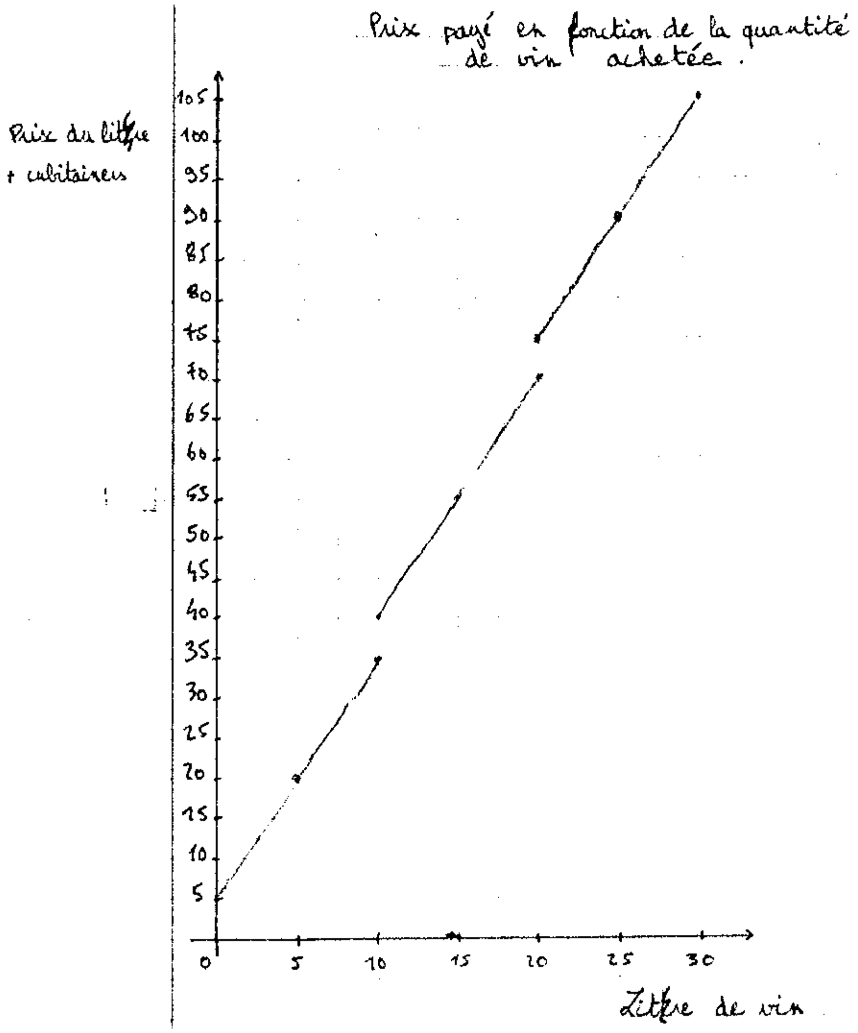
Élève 7 problème 1



La fonction représentée n'est pas continue et est composée de plusieurs fonction affines. On ne peut pas les relier car, graphiquement si on les relie, 10 L de vin vaut à la fois 35, 36, 37, 38, 39 et 40 €. ce qui n'est pas possible.

Élève 8 problème 1

Cette fonction n'est pas continue, elle comprend plusieurs fonction affine car on remarque graphiquement que 10 à 2 ordonnées, car en effet il faudrait commencer la fonction $3x+10$ quand x est égal à 10,000... or sur le graphique c'est impossible de le représenter



Ces deux élèves remarquent qu'un nombre ne peut pas avoir plusieurs images et soulèvent le problème qui se pose pour $x = 10, 20$ … La discussion en classe est animée et certains notent la limite du modèle : « achète-t-on réellement 10,1 litres de vin ? » , « dans la réalité les clients préféreront acheter 10 L, 20L de vin pour remplir leur cubitainer ».

Le modèle fonctionne de manière absolue. Quand on revient à la réalité il ne faut pas le fausser et prendre une certaine distance vis-à-vis de lui.

__Exercice de réinvestissement__

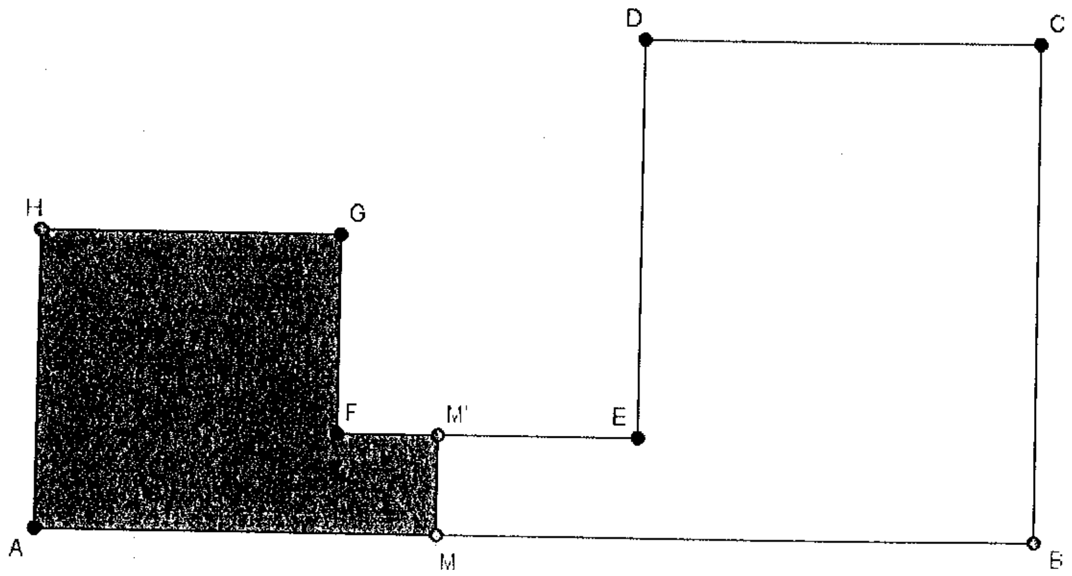
Cet exercice permet de rencontrer deux fonctions dont l'une n'est pas continue

On considère l'octogone ABCDEFGH ci-dessous.

Chaque carreau du quadrillage est un carré de côté 1cm.

M est un point mobile qui décrit le segment [AB].

Selon la position de M, M' est le point de [HG], [FE] (distinct de F) ou de [DC] (distinct de D) tel que (MM') soit perpendiculaire à (AB).



On note x la distance AM.

1) On note f la fonction définie sur [0 ; 10] qui à chaque valeur de x associe l'aire de la surface coloriée.

a) Exprimer $f(x)$ pour x appartenant à chacun des intervalles [0 ; 3],] 3 ; 6] et] 6 ; 10].

b) Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthogonal (on prendra le cm comme unité graphique en abscisse et 1cm pour 2 unités graphiques en ordonnée).

2) On note g la fonction définie sur [0 ; 10] qui à chaque valeur de x associe le périmètre de la surface coloriée.

a) Exprimer $g(x)$ pour x appartenant à chacun des intervalles [0 ; 3],] 3 ; 6] et] 6 ; 10].

b) Tracer la courbe représentative de g dans un autre repère orthogonal (on prendra le cm comme unité graphique en abscisse et 1cm pour 2 unités graphiques en ordonnée).

Allongement ou compression de ressorts

Problème posé

Etudier la longueur d'un ressort en fonction de l'effort qu'il subit.

Objectifs possibles

- Application des fonctions affines dans un problème de physique
- Proportionnalité des accroissements pour une fonction affine
- Interprétation concrète du coefficient directeur et de l'ordonnée à l'origine d'une fonction affine

Notions utilisées

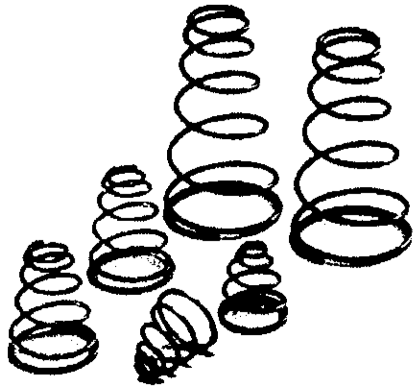
- Proportionnalité ou non proportionnalité
- Résolution d'une équation du 1^{er} degré

Matériel : calculatrice graphique

Niveau : troisième, seconde ou première

Fonctions rencontrées

- $x \mapsto 2,5x+5$
- $x \mapsto 1,5x+10$
- $x \mapsto 0,1-\dfrac{1}{5000}x$

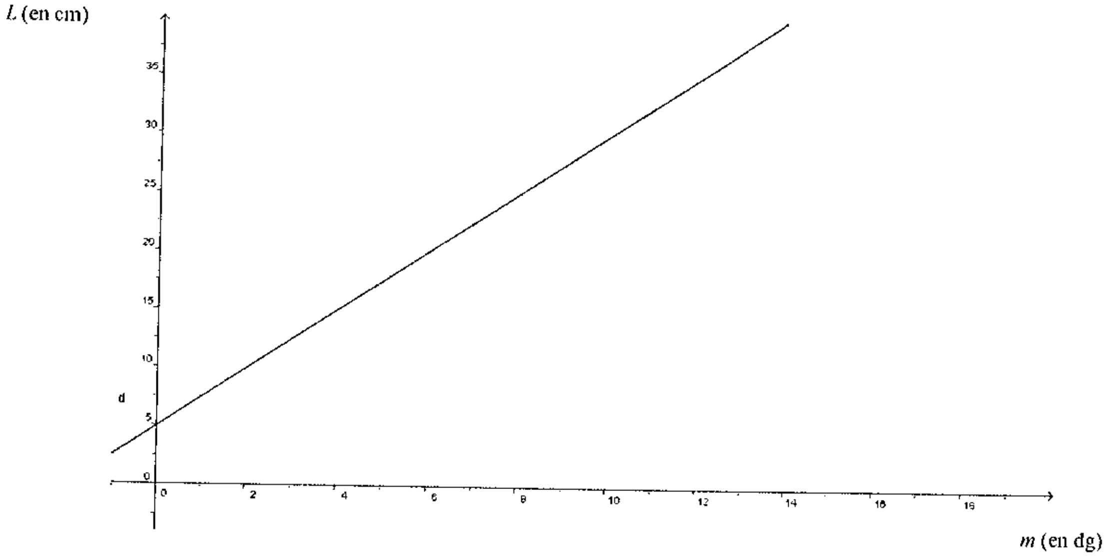


Allongement ou compression de ressorts

<u>Situation concernant l'allongement d'un ressort (classes de 3ème, 2de ou 1ère)</u>

Cette situation a été testée en seconde comme application des fonctions affines mais aussi en classe de première pour revoir la notion de coefficient directeur. Dans ces classes, il s'agit de réviser les fonctions affines en interprétant les données dans le contexte de la physique. Cette situation peut être utilisée éventuellement en 3ème.

<u>Etape 1 :</u> On dispose d'un ressort R1. On a représenté sa longueur (L en cm) en fonction de la masse suspendue (m en dg).



Quels renseignements peut-on tirer de la représentation graphique ?

La première idée qui fuse dans la classe est celle de la proportionnalité. Il faut demander aux élèves de préciser leur pensée. En effet, certains pensent que la longueur est proportionnelle à la masse car « on a une droite ». D'autres réfutent cette idée avec comme argument essentiel que « cela ne passe pas par l'origine ».

Quand le professeur demande aux élèves comment on pourrait savoir s'il y a proportionnalité ou pas, ils proposent de prendre des valeurs et de « voir ».

La construction du tableau de valeurs montre la non proportionnalité de la longueur et de la masse mais permet de revoir la proportionnalité des accroissements. Les élèves la traduisent par : « Chaque fois que la masse augmente de 1 dg, le ressort s'allonge de 2,5 cm. ».

Les élèves peuvent construire et remplir le tableau ci-dessous :

Masse (en dg)	1	3	7	8	10
Allongement du ressort (en cm)					

Certains ont remarqué que, lorsqu'on n'accroche aucune masse au ressort, il mesure 5 cm.

La notion de fonction affine arrive naturellement et la plupart des élèves donne l'expression algébrique de cette fonction.

L'intérêt est de faire le lien entre cette expression et le ressort R1 en posant la question suivante : « Que représentent le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine ? »

Etape 2 : On dispose d'un deuxième ressort R2 de longueur 10 cm au repos . Quand on suspend une masse de 1 dg, le ressort R2 s'allonge de 1,5 cm. On suppose que son allongement est proportionnel à la masse.

Peut-on suspendre une même masse aux ressorts R1 et R2 pour qu'ils aient la même longueur ? Y a-t-il plusieurs possibilités ?

Deux idées émergent dans la classe :

- Une solution graphique : les élèves tracent la droite passant par (0 ;10) et de coefficient directeur 1,5. Ils lisent les coordonnées du point d'intersection des deux droites et répondent à la question.

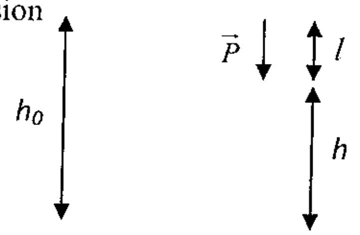
- Une solution algébrique : les élèves déterminent les expressions algébriques des deux fonctions et résolvent l'équation $5 + 2{,}5\,m = 10 + 1{,}5\,m$ où m désigne la masse accrochée aux deux ressorts.

Exercice concernant la compression d'un ressort (classe de $1^{\text{ère}}$)

Encore sur le thème des ressorts, nous avons utilisé, dans d'autres classes de $1^{\text{ère}}$, l'exercice suivant, qui peut éventuellement être donné en 2^{de}. Il est très voisin d'un exercice du manuel Mathématiques, première STI, Hachette Education.

Comme dans la situation précédente, l'intérêt est interdisciplinaire. Les élèves sont amenés à reconnaître une fonction affine hors d'un contexte purement mathématique.
La fonction rencontrée est $h(P) = 0{,}1 - \frac{1}{5000}P$

Lorsqu'on compresse un ressort hélicoïdal, sa variation de longueur est proportionnelle à l'effort de compression



Sous l'action de la force $\vec{P}$, la hauteur est diminuée de la longueur l.
Un essai sur un ressort a donné pour effort : $P = 50\ N$ et pour longueur $l = 10^{-2}$ m.
1- Déterminer la raideur k du ressort, coefficient de proportionnalité entre l'effort de compression et la diminution de longueur l ($P = k\ l$).
2- Le ressort a une longueur au repos de $h_0 = 0{,}1$ m.
   a- Exprimer la hauteur du ressort en fonction de l'effort P.
   b- De quel type de fonction s'agit-il ? Quel est son sens de variation ?
   c- Faire sa représentation graphique pour P variant de 0 à 200 newtons.

L'enclos

Problème posé

On réalise un enclos rectangulaire le long d'un mur.

Le mur forme le quatrième côté de l'enclos.

On dispose de 400m de grillage pour clôturer cet enclos.

On veut utiliser la totalité du grillage.

Quelles doivent être les dimensions de l'enclos pour que l'aire soit maximale ?

Objectifs possibles

- Modéliser une situation de « la vie courante » : choisir une variable pour trouver une fonction en vue d'étudier les variations d'une quantité
- Déterminer l'ensemble de définition d'une fonction en relation avec le contexte du problème
- Réaliser un tableau de valeurs et un graphique
- Utiliser la calculatrice ou un graphique pour conjecturer un maximum
- Résoudre une inéquation de degré 2
- S'entraîner éventuellement à écrire la forme canonique du trinôme

Notions utilisées

- Reconnaître le développement du carré d'une différence
- Fonction polynôme de second degré

Matériel : calculatrice graphique

Niveau : seconde et premières S ou ES

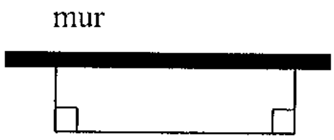
Fonction rencontrée : $x \mapsto 400x-2x^2$

Un problème d'optimisation : l'enclos

Ce problème que l'on rencontre dans de nombreux manuels sous des formes diverses (aire de baignade, chenil...) est une excellente application de l'étude des fonctions polynomiales du second degré. Il a donc été posé dans nos classes après le travail sur la fonction polynomiale du second degré.

Problème :

On réalise un enclos rectangulaire le long d'un mur.
Le mur forme le quatrième côté de l'enclos.
On dispose de 400 m de grillage pour clôturer cet enclos.
On veut utiliser la totalité du grillage.
Quelles doivent être les dimensions de l'enclos pour que l'aire soit maximale ?



Certains élèves mettent un peu de temps à démarrer en disant qu'il leur manque des données.

D'autres, pour comprendre ce qui se passe, fixent des longueurs (en général la longueur du côté perpendiculaire au mur) et trouvent alors que l'autre dimension se déduit rapidement de la première.

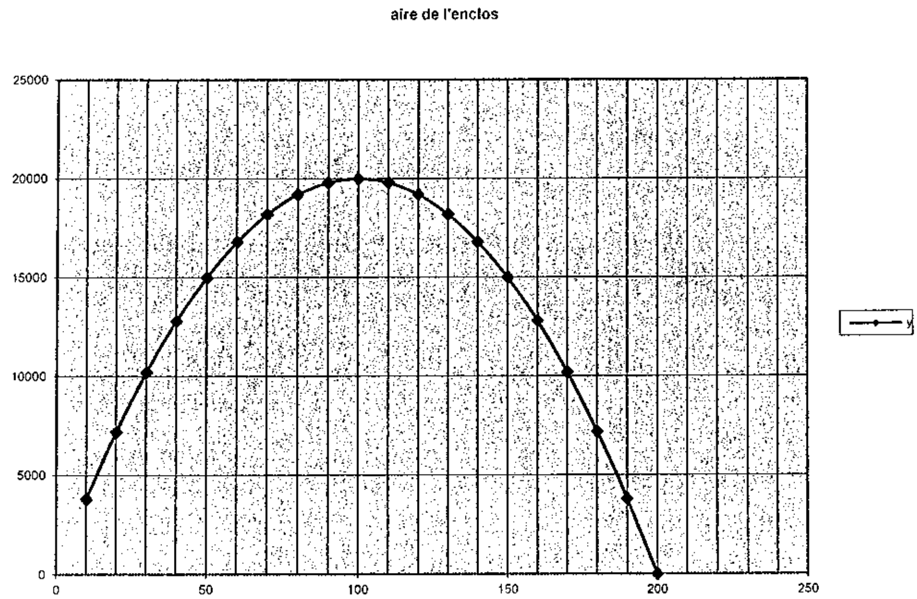
D'autres encore pensent que c'est pour le carré que l'on va avoir la plus grande aire par analogie avec le rectangle de ficelle et proposent comme dimensions $\frac{200}{3} \times \frac{200}{3}$.

D'autres, enfin, prennent l'initiative d'appeler x soit la longueur du côté perpendiculaire au mur, soit la longueur du côté parallèle au mur (la première solution étant la plus choisie). Ils expriment la deuxième dimension en fonction de x et en déduisent l'expression de l'aire.

On rencontre aussi des élèves qui restent bloqués après avoir appelé x une des deux dimensions et y la deuxième. Ils ne voient pas le lien entre x et y et oublient la seule donnée numérique du problème. Le professeur ne doit pas hésiter à leur donner un coup de pouce.

Lors de la mise en commun, on se met d'accord sur le choix de la variable : ce sera la longueur du côté perpendiculaire et on écrit l'expression de l'aire : $A(x) = 400x - 2x^2$.
Le professeur pousse la classe à s'interroger sur l'ensemble de définition de la fonction A.
Les avis sont partagés entre [0 ; 200] et [0 ; 400]. Après discussion la classe se met d'accord sur [0 ; 200].
Le professeur propose alors de reformuler le problème : il s'agit de trouver le maximum de la fonction $A : x \to 400x - 2x^2$.

Les élèves reconnaissent l'équation d'une « parabole inversée », si cela a été vu en classe, ils donnent l'abscisse du sommet (100) et en déduisent le maximum ($A(100) = 20000$).
Dans d'autres classes ils conjecturent le maximum à l'aide de la calculatrice ou d'un tableur.



Les élèves constatent que pour $x = 100$ l'aire est maximale. Revenir au cas du carré permet de montrer qu'il a une aire plus petite.

On peut ensuite démontrer que 20000 est le maximum de la fonction A en étudiant par exemple le signe de $20000 - A(x)$.

On a $20000 - A(x) = 20000 - 400x + 2x^2 = 2(x^2 - 200x + 10000) = 2(x-100)^2$.

Donc $20000 - A(x) \geq 0$ pour tout $x \in [0;200]$. De plus $A(100) = 20000$.

Cette méthode est plus simple que la forme canonique qui reste bien souvent à la charge du professeur.

La vente de haricots

Problème posé

Dans un grand magasin 1 kg de haricots verts est vendu 2,5 €. A ce prix, le magasin vend en moyenne 50 kg de haricots verts par jour.

Le directeur du magasin se rend compte que s'il applique une hausse de 0,1€ au prix du kilo, il en vend 10 kg de moins par jour mais s'il applique une baisse de 0,1 € au prix du kilo il en vend 10 kg de plus par jour.

Quel est le prix que doit choisir l'épicier pour obtenir la recette maximale sur la vente de haricots verts et quelle est cette recette ?

Objectifs possibles

- Modéliser une situation de « la vie courante » : choisir une variable commode pour trouver une fonction en vue d'étudier les variations d'une quantité
- Utiliser la proportionnalité des accroissements pour reconnaître une fonction affine
- Réaliser des tableaux de valeurs et des graphiques
- Utiliser la calculatrice ou un graphique pour conjecturer un maximum
- Étude d'une fonction polynôme de degré 2

Notions utilisées

- Fonctions affines
- Fonction polynôme de degré 2

Matériel

- Calculatrice graphique

Niveau

- Seconde et Premières S ou ES

Fonctions rencontrées :

- $x \mapsto (50+100x)(2,5-x) = -100x^2 + 200x + 125$
- $x \mapsto (50-100x)(2,5+x) = -100x^2 - 200x + 125$
- $x \mapsto 300 - 100x$ et $x \mapsto (300-100x)x = -100x^2 + 300x$
- $x \mapsto (50+x)(2,5-0,01x) = -0,01x^2 + 2x + 125 = 225 - 0,01\,(x-100)^2$

Un problème pour la classe de seconde ou 1ère : vente de haricots verts

Nous avons proposé ce problème dans plusieurs classes de lycée après l'étude des fonctions affines et des fonctions polynomiales du second degré. Pour le résoudre les élèves doivent utiliser le même modèle mathématique vu lors des situations des rectangles de ficelle ou du rectangle dans le triangle : celui de la fonction de second degré dont la représentation graphique est une «parabole renversée ». A mesure que le prix du kilo de haricots vendus augmente, le chiffre d'affaire croît de 0 (prix de vente nul) jusqu'à un maximum (prix de vente optimal) et décroît à nouveau jusqu'à 0 (prix de vente trop cher de sorte qu'il n'y a plus d'acheteurs). Il s'agit de trouver la valeur du prix de vente qui donne ce maximum.

C'est un modèle élémentaire en économie. Ici la modélisation est bien davantage à la charge de l'élève que dans les deux autres situations.

Problème :

Dans un grand magasin 1 kg de haricots verts est vendu 2,5 €. A ce prix, le magasin vend en moyenne 50 kg de haricots verts par jour.

Le directeur du magasin se rend compte que s'il applique une hausse de 0,1€ au prix du kilo, il en vend 10 kg de moins par jour mais s'il applique une baisse de 0,1€ au prix du kilo il en vend 10kg de plus par jour.

Quel est le prix que doit choisir l'épicier pour obtenir la recette maximale sur la vente de haricots verts et quelle est cette recette ?

Gestion de la classe :

Après l'étude de la fonction carrée, le travail a été fait en classe par groupe de 3 à 4 élèves et s'est déroulé sur deux séances d'une heure chacune.

Le professeur a transmis le problème et laissé chaque groupe chercher pendant une quinzaine minutes. Ensuite il est passé dans la classe pour prendre connaissance de ce qu'avaient

fait les différents groupes, en encourageant certains ou en donnant quelques indications à d'autres s'il le jugeait nécessaire.

La première séance a été consacrée à la recherche, la seconde séance a permis de terminer la phase de recherche si c'était nécessaire (selon les classes) et de rédiger la solution proposée.

Cette situation a été testée récemment deux fois dans le cadre des modules en seconde et une fois dans une classe de 1ère STG avec, dans ces classes, trois solutions différentes trouvées par les élèves (méthodes 1, 2 et 3). Il y a plusieurs années le même problème avait été testé en module dans une classe de seconde avec la même organisation du travail des élèves (recherche par groupe). Deux méthodes avaient été proposées alors par les élèves (méthodes 2 et 4).

Les différentes méthodes des élèves :

Les méthodes 1, 2 et 3 diffèrent par le choix de la variable avec cependant des points communs dans la mise en œuvre : les élèves commencent par faire des tableaux de valeurs « pour voir ce qui se passe ».

Ils terminent avec le graphique qui représente les variations de la recette et ils lisent l'abscisse du point qui correspond au maximum, ce qui donne la solution du problème.

Certains de nos élèves sont allés jusqu'à la démonstration avec la forme canonique qui avait été travaillée en classe.

Dans la méthode 4 la variable est la même que dans la méthode 2 mais en revanche la mise en œuvre est très différente.

Les méthodes 1 et 2 sont les plus fréquentes.

<u>Méthode 1 :</u>

Les élèves commencent par faire des calculs avec des valeurs particulières. Pour une baisse de 0,1 €, ils déterminent la quantité vendue (60 kg) et la recette correspondante ($60 \times 2,4 = 144$ €).
Ils recommencent avec une baisse de 0,2 €, de 0,3 € … puis avec une hausse de 0,1 €, de 0,2 €.
La variable choisie est notée x et les élèves disent qu'elle représente soit « la baisse du prix au kilo », soit plus rarement « la hausse du prix au kilo » car les premiers calculs montrent que la valeur cherchée doit être inférieure à 2,5 €.

L'intérêt de cette variable est de permettre d'écrire facilement l'expression du prix d'un kilo.

Dans le premier cas le prix d'un kilo est $2{,}5x$ ce qui suppose $x > 0$ en cas de baisse et $x < 0$ en cas de hausse. Dans le deuxième cas le prix d'un kilo est $2{,}5 + x$ de sorte que $x > 0$ en cas de hausse et $x < 0$ en cas de baisse.

Puis dans les deux cas les élèves trouvent sans trop de difficultés l'expression du nombre de kilos vendus en fonction de x.

Si x est la baisse du prix d'un kilo, le nombre de kilos vendus en fonction de x est alors $50 + 100x$.

Les élèves obtiennent la fonction $f\colon x \mapsto (50+100x)(2{,}5-x)$.

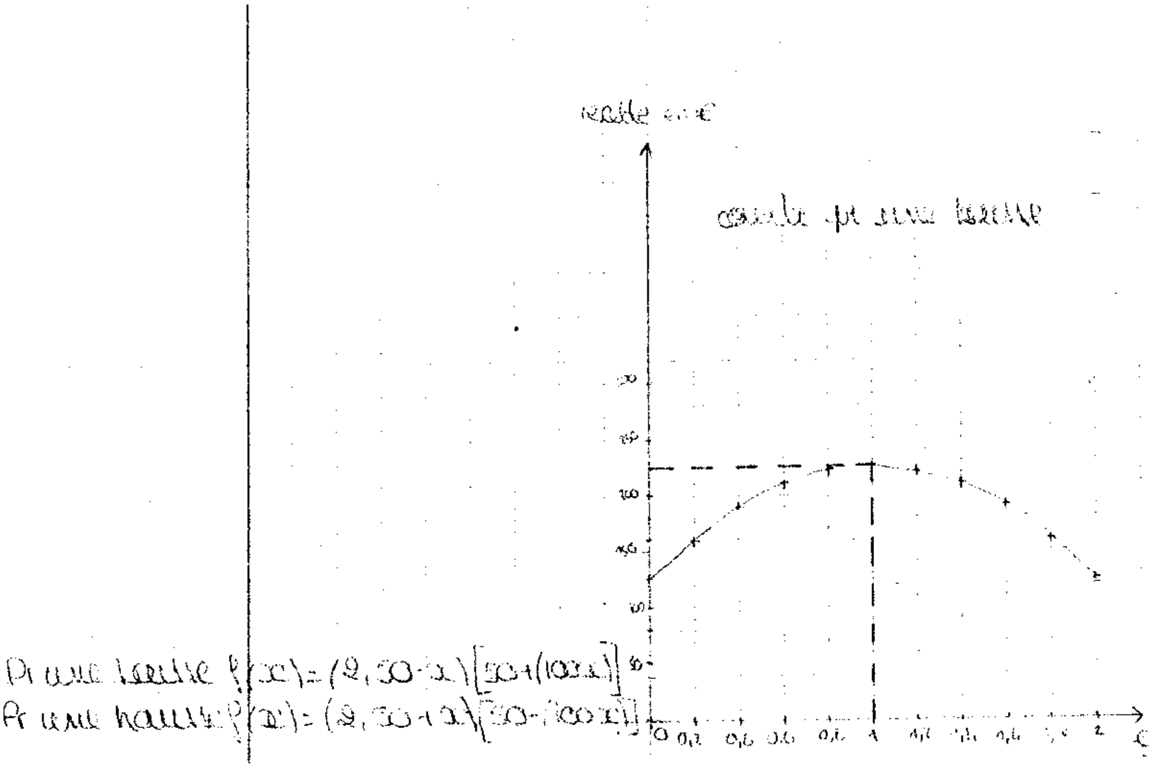
Son expression algébrique s'écrit encore $f(x) = -100x^2 + 200x + 125$.

Si x est la hausse du prix d'un kilo, le nombre de kilos vendus en fonction de x est alors $50 - 100x$.

Les élèves obtiennent la fonction $f\colon x \mapsto (50-100x)(2{,}5+x)$.

Son expression algébrique s'écrit encore $f(x) = -100x^2 - 200x + 125$.

Ils font la représentation graphique de la fonction trouvée :



Ils l'utilisent ou se servent de leur calculatrice pour conjecturer le maximum de 225 pour $x = 1$ dans le premier cas ou $x = -1$ dans le second.

Certains élèves vont jusqu'à la forme canonique qui est :
- dans le premier cas $f(x) = 225 - 100\,(x-1)^2$;
La recette la meilleure est bien de 225 pour $x = 1$ soit un prix de $2{,}5 - 1 = 1{,}5$.

- dans le deuxième cas $f(x) = 225 - 100\,(x+1)^2$;
La recette la meilleure est bien de 225 pour $x = -1$ soit un prix de $2{,}5 + (-1) = 1{,}5$.

Lors de la mise en commun le professeur pourra montrer aux élèves que ces deux méthodes n'en font qu'une car il suffit d'appeler x la variation du prix du kilo à partir de 2,5.
Or comme x est un nombre algébrique, si le prix est supérieur à 2,5 on a $x > 0$ et si le prix est inférieur à 2,5 on a $x < 0$. On trouve alors la fonction du deuxième cas.

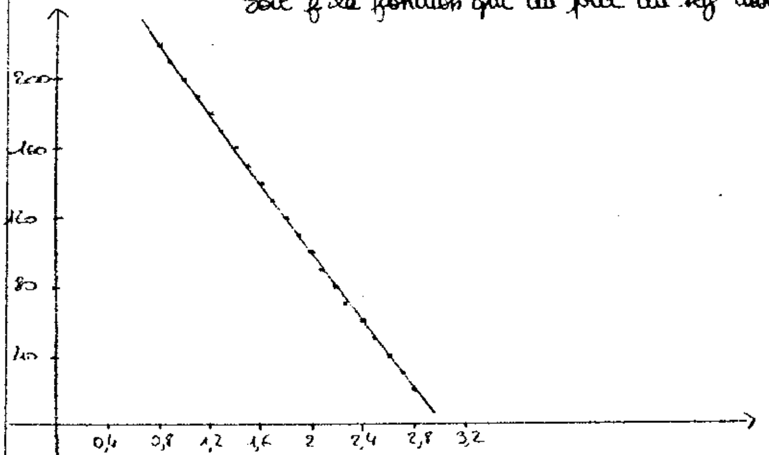
<u>Méthode 2</u> :
Ici la variable choisie est le prix d'un kilo noté x.
Les élèves commencent par compléter un tableau de valeurs où ils écrivent à la fois le nombre de kilos vendus et la recette en fonction du prix d'un kg.

Certains groupes ont du mal à continuer une fois qu'ils ont réalisé le tableau de valeurs. Ils n'arrivent pas à déterminer l'expression algébrique de la fonction qu'ils cherchent, car pour trouver l'expression algébrique de la recette en fonction de x, ils doivent trouver d'abord le nombre de kilos vendus en fonction de x.

Le professeur peut leur demander ce qu'ils savent faire avec un tableau de valeurs et les amener ainsi à tracer la représentation graphique du nombre de kilos vendus en fonction de x, afin de conjecturer une fonction affine. Cela leur permet de trouver la première fonction $x \mapsto 300 - 100x$.

I $\underline{\text{1ère étape}}$:

Prix en kg → quantité vendue :
Soit f la fonction qui au prix au kg associe la quantité vendue



a) D'après la représentation graphique de la fonction qui, au prix au kg des haricots associe la quantité vendue, on en déduit que celle-ci est affine, car la courbe semble être une droite.
Ainsi elle est de forme $ax + b$.

b) D'après l'énoncé, le coefficient directeur est -100 : « lorsque le prix augmente de 0,1 €, il vend 10 kg de moins ».
Ainsi $a = -100$

c) Comme $f(x) = -100x + b$.
On sait que $f(2,5) = 50$
$\Leftrightarrow f(2,5) = -100 \times 2,5 + b$
donc $-100 \times 2,5 + b = 50$
$\Leftrightarrow b = 300$.
Ainsi $\underline{f(x) = -100x + 300}$.

Puis ils représentent graphiquement la fonction f: $x \mapsto (300 - 100x)x$ dont l'expression algébrique s'écrit encore $f(x) = -100x^2 + 300x$

Ensuite, ils utilisent la représentation graphique de cette fonction ou leur calculatrice pour conjecturer le maximum de 225 pour $x = 1,5$.

D'autres le démontrent avec la forme canonique $f(x) = 225 - 100(x - 1,5)^2$.

II/ 2e étape.

Quantité vendue → Recette.

Pour avoir la recette, on multiplie la quantité vendue avec le prix au kg, c'est-à-dire x.

Soit g la fonction qui au prix au kg associe la recette :

$$g(x) = f(x)x$$
$$g(x) = (-100x + 300)x.$$

III/ 3e étape.

On veut connaître le prix au kg correspondant à la recette maximale.
On cherche alors la forme canonique de la fonction g.

$$\begin{aligned} g(x) &= -100x^2 + 300x \\ &= -100(x^2 + 3x) \\ &= -100\left(\left(x - \tfrac{3}{2}\right)^2 - \tfrac{9}{4}\right) \\ &= -100\left(x - \tfrac{3}{2}\right)^2 + \tfrac{900}{4} \\ &= -100\left(x - \tfrac{3}{2}\right)^2 + 225. \end{aligned}$$

$100\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 \geq 0$ car un carré est toujours positif.

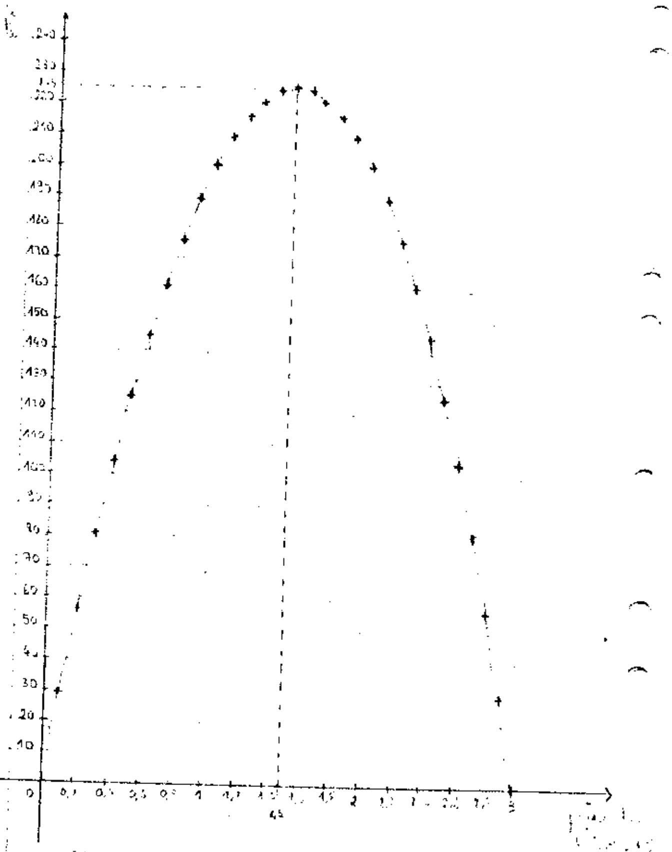
$\Leftrightarrow -100\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 \leq 0$

$\Leftrightarrow -100\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + 225 \leq 225$

$\Leftrightarrow g(x) \leq 225,$

Ainsi, $g(1,5)$ est le maximum de la fonction.

$g(1,5) = 225$



Pour obtenir la recette maximale on regarde l'abscisse du point qui a pour ordonnée [illegible]
Ainsi, $x = 1,5$ € donc la recette maximale [illegible] est obtenue pour $x = 1,5$ €

Dans la copie de gauche les élèves prouvent algébriquement que le meilleur prix est 1,5€.

Dans la copie de droite ils se contentent de le lire sur le graphique.

<u>Méthode 3</u> :

La troisième méthode, plus rare que les deux précédentes, consiste à prendre pour variable le nombre de kilos vendus « en plus ou en moins » selon l'expression utilisée par les élèves.
Ils n'avaient en tous les cas aucun doute sur le fait que x pouvait être positif ou négatif selon le cas.

L'avantage de ce choix est de pouvoir écrire facilement le nombre de kilos vendus, ce qui, on l'a vu, posait problème dans la méthode précédente. Il s'agit de $50 + x$. On peut supposer que c'est cette facilité qui a conduit les élèves à prendre cette variable qui n'est pas induite par la question ni par la situation « concrète » qui laisse penser que c'est la masse vendue qui dépend du prix du kilo et non l'inverse.

Pour écrire l'expression algébrique de la recette, il faut maintenant exprimer le prix du kilo correspondant à cette vente. C'est une difficulté.

prix (1) si 2,60€ le kg il vend 10kg de moins / jours
prix (2) 2,50 € le kg ⟶ 50kg / jours
prix (3) si 2,4 € le kg il vend 10 kg de plus / jours

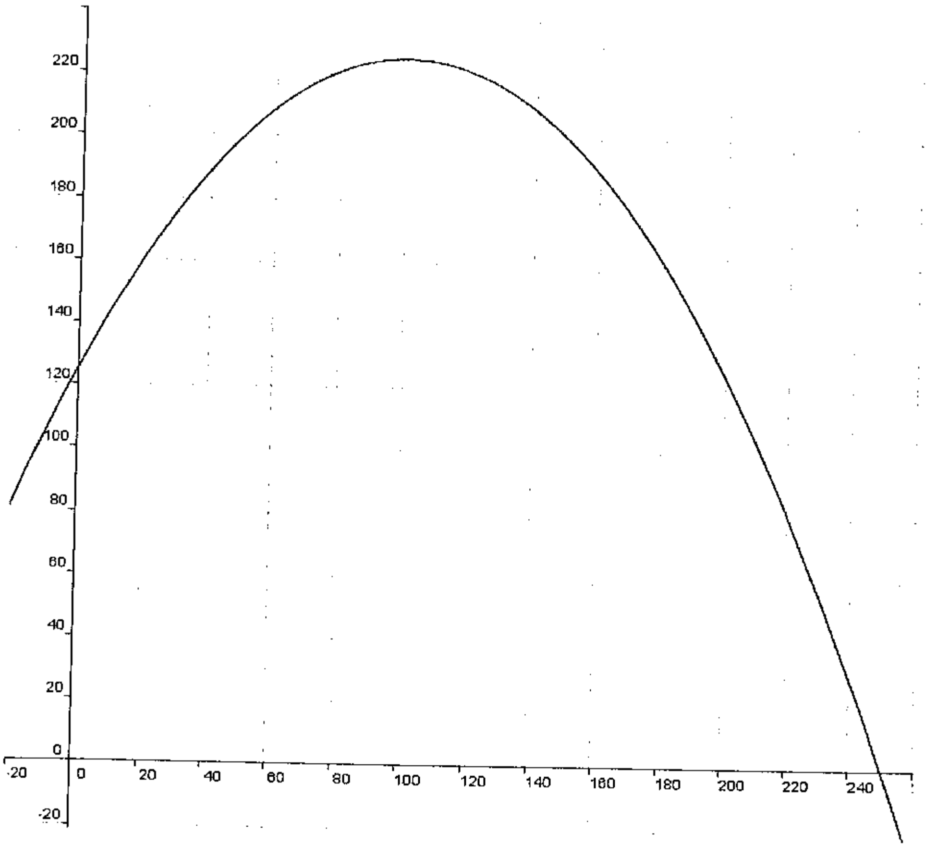
prix (1) = 40 × 2,6 = 104 € $\quad (50+x)\times\left(2{,}5-\frac{x}{100}\right)$
prix (2) = 50 × 2,5 = 125 €
prix (3) = 60 × 2,4 = 144 € $\quad (50+10)\times\left(2{,}5-\frac{10}{100}\right)$
prix x_1 = 70 × 2,3 = 161 €
prix x_2 = 80 × 2,2 = 176 €

Je pense que ce calcul peut être résolu par une fonction car quand le prix augmente la vente baisse et vice versa.
J'ai donc trouver la fonction suivante :
$(50+x)\times\left(2{,}5-\frac{x}{100}\right)$
50 correspond ~~au~~ nombre de kg vendu en moyenne pour un prix de 2,5 €.
je constate aussi que pour 60 kg (50 + 10) il y a une baisse du prix de $\frac{x}{100}$.
Avec la calculette je trouve que le prix maximum que peut atteindre l'épicier est de 225 € soit :
$(50+100)\times\left(2{,}5-\frac{100}{100}\right) = 225$ €
le prix correspond à $(2{,}5-1) = 1{,}5$ €.

$$\underbrace{\boxed{(50+x)}}_{\text{nombre de kg}} \times \underbrace{\boxed{\left(2{,}5-\frac{x}{100}\right)}}_{\text{prix / kg en fonction de } x}$$

Les élèves essayent avec des valeurs particulières : pour 10 kg de haricots vendus en plus, ils déterminent le prix du kilogramme et la recette correspondante. Ils recommencent avec une hausse de 20 kg, de 30 kg … puis avec une baisse de 10 kg, de 20 kg ….
Ils trouvent ainsi que le prix du kilo est $2,5 - 0,01x$.

Ce qui les amène à tracer la représentation graphique de la fonction $f : x \mapsto (50+x)(2{,}5-0{,}01x)$.
Son expression algébrique s'écrit encore $f(x) = -0,01x^2 + 2x + 125 = 225 - 0{,}01(x-100)^2$.
La meilleure recette se produit donc pour une vente de 100 kilos au dessus de 50 kg, soit 150 kg, ce qui donne une recette de 225 € et le prix du kilo à 2,5 – 1 = 1,5€.



Remarques :

a- Dans ces trois méthodes, on a vu que le professeur est parfois amené à intervenir pour aider les élèves à passer du tableau de valeurs à la fonction. Les élèves parlent spontanément de fonctions mais ont parfois du mal à identifier clairement la variable surtout pour la $1^{ère}$ et la $3^{ème}$ méthode. Leur proposer de faire un graphique peut les aider : qu'est-ce qu'on met en abscisse ? Qu'est-ce qu'on met en ordonnée ?

On aurait pu penser que, vue la question posée, la majorité des groupes choisirait naturellement le prix comme variable mais il n'en est rien. Il y a autant de groupes qui choisissent le prix comme variable que la variation de prix. Le choix de la variation de la quantité comme variable est beaucoup plus rare mais arrive !

Les mots utilisés pour poser le problème ont de l'importance. Il n'est pas anodin que les trois mots « hausse », « baisse » et « prix » figurent dans le problème, car ils peuvent donner l'idée aux élèves de choisir x pour représenter une de ces trois variables. Les élèves peuvent voir ensuite que choisir la « hausse » » ou la « baisse » c'est la même chose, car x représente une quantité algébrique. Parmi ces trois mots, le choix par le professeur de celui qui figure dans la question a une influence, car le fait d'être dans la question plutôt que dans le texte le met en relief au moment où l'élève doit désigner la variable.

b- Pour chacune des trois variables, la courbe représentant la recette peut-être construite point par point et la solution du problème sera trouvée en utilisant seulement le registre graphique complétée par la calculatrice.

Mais pour ceux qui l'ont écrite, l'intérêt de l'expression algébrique est triple :

- Elle permet d'anticiper immédiatement la forme de la courbe : c'est une parabole

- Pour construire le graphique, les calculs sont plus rapides en utilisant une formule qui donne la recette. Le calcul peut être éventuellement programmé, ce qui le rend d'autant plus rapide.

- Quand on a conjecturé le maximum de 225 on peut prouver la conjecture en utilisant l'expression algébrique de l'une des trois méthodes. Par exemple avec celle de la méthode 3, il suffit de prouver que $225 - (50 + x)(2,5 - 0,01x)$ est positif ou nulle pour toutes les valeurs de x .
Or cette différence est : $0,01\,x^2 - 2x + 100$ soit $(0,1x - 10)^2$

qui est bien positive pour toutes les valeurs de x sauf pour la valeur $x = 100$ qui l'annule.

- Si on va jusqu'à la transformation de l'expression de la fonction pour obtenir la forme canonique, calcul plus difficile que le précédent, on peut économiser le graphique pour trouver le maximum. En fait, la forme canonique permet de contrôler le résultat conjecturé. Inversement le graphique et la calculatrice assurent la justesse du calcul.

Méthode 4 :

Cette méthode a surgi dans une classe où on avait étudié auparavant « le rectangle de ficelle » ainsi que les axes de symétrie de la parabole. En particulier les élèves avaient remarqué que l'aire du rectangle de périmètre 40 cm était nulle soit quand la dimension variable était nulle soit quand elle était égale à 20 cm. Le maximum était atteint pour la valeur moyenne 10 cm, ce qui correspond à l'abscisse du sommet de la parabole d'équation $y = x\,(20 - x)$.

Les élèves l'avaient d'autant mieux compris que le professeur leur avait montré qu'un changement de variable permettait de résoudre le problème très facilement. En partant du carré de côté 10 et en écrivant les dimensions du rectangle sous la forme $10 - X$ et $10 + X$, on a l'expression de l'aire sous la forme $100 - X^2$ ce qui montre parfaitement la symétrie de la courbe.

Comme dans la méthode 2 les élèves ont pris pour variable le prix du kilo noté x et on commencé à calculer certaines valeurs de la recette. En particulier ils ont vu que si $x = 0$, la recette est nulle. Elle est nulle aussi si $x = 3$ car si on augmente 5 fois le prix de 0,1, la recette sera nulle. Le magasin ne vendra plus de haricots car $50 = 5 \times 10$. Ils ont alors conjecturé que la situation pouvait peut-être se modéliser comme celle du rectangle de ficelle à savoir que la fonction qu'ils recherchaient (la recette en fonction du prix) pouvait être représentée par une parabole dont le sommet avait pour abscisse la moitié de 3 soit 1,5. Ils l'ont exprimé en disant: « c'est pareil que ce qu'on a vu avec la ficelle ».

La conjecture était bonne et la méthode totalement inattendue par leur professeur, qui les a encouragés.

Ils ont donc cherché l'équation d'une parabole passant par les points dont ils étaient sûrs à savoir ceux de coordonnées A (0 ; 0), B (3 ; 0) et C (2,5 ; 125).

Le point A permet de dire que l'équation est de la forme $y = ax^2 + bx$. Les deux autres points donnent les conditions : $9a + 3b = 0$ soit $b = -3a$ et $6{,}25\,a + 2{,}5\,b = 125$

soit $-1{,}25\,a = 125$ donc $a = -100$ et $b = 300$. Ils ont vérifié ensuite, pour être sûrs du modèle, que d'autres points dont ils avaient calculé les coordonnées se trouvaient bien sur la parabole.

23 Recette maximale

OBJECTIF Pratiquer une démarche scientifique et résoudre un problème.

Le directeur d'une salle de spectacle sait qu'il reçoit en moyenne 500 spectateurs quand le prix d'une place est de 20 €.

Il a constaté que chaque réduction de 1 € sur le prix d'une place attire 50 spectateurs de plus.

Il souhaiterait déterminer le prix d'une place lui assurant la meilleure recette.

1. Conjecture

a) Faire quelques essais à la main.

b) Réaliser une telle feuille de calcul avec un tableur.

	A	B	C	D
1	Réduction (en €)	Prix (en €)	Nombre de spectateurs	Recette (en €)
2	0	20	500	10000
3	1			

c) Représenter graphiquement à l'aide du tableur, la recette en fonction du montant de la réduction.

d) En affinant éventuellement l'exploration, émettre une conjecture sur le montant de la recette maximale.

2. Preuve

a) Déterminer la fonction f qui à une réduction x associe la recette.

b) Justifier la conjecture.

3. Pour les plus rapides

a) Modifier la feuille de calcul précédente de telle sorte qu'elle soit utilisable même si la réduction d'un euro entraîne une augmentation différente du nombre de spectateurs.

b) Recopier et compléter le tableau suivant :

Augmentation du nombre de spectateurs pour une réduction de 1 €	Recette maximale
20	
30	
⋮	
100	

c) Rédiger un compte rendu de l'activité.

La page ci-contre est extraite du manuel Hyperbole 2nde (nouveau programme 2009).

On retrouve le même problème que celui évoqué ci-dessus.

Dans le manuel les élèves n'ont ni le choix de la variable ni celui de la méthode. Ce qui est tout de même remarquable, c'est que la démarche proposée par le manuel est une de celle que les élèves choisissent sans avoir besoin de questions intermédiaires. On a vu que, sans qu'on ait besoin de leur suggérer, ils font des essais, des tableaux de valeurs, des graphiques et essaient de démontrer leur conjecture.

Mais ici chaque pas est imposé, alors que si on laisse les élèves libres, ils inventent eux-mêmes cette démarche ou ils trouvent d'autres méthodes.

Il est dommage de ne pas envisager que nos élèves sont capables d'effectuer seuls une vraie activité de recherche, contrairement à l'objectif affiché par le manuel : pratiquer une démarche scientifique....

PARTIE III

Les exercices

Plus petites questions poursuivant le même but que les problèmes qui se trouvaient au cœur des situations des parties I et II, à savoir la construction du sens.
Ce ne sont pas des exercices au sens usuel, pour un entraînement à la technique, qui seraient à résoudre du jour pour le lendemain.
Le professeur pourra se servir de certains de ces exercices pour un devoir à la maison, qui laisse aux élèves un peu de temps de réflexion.

Distance parcourue en fonction du temps

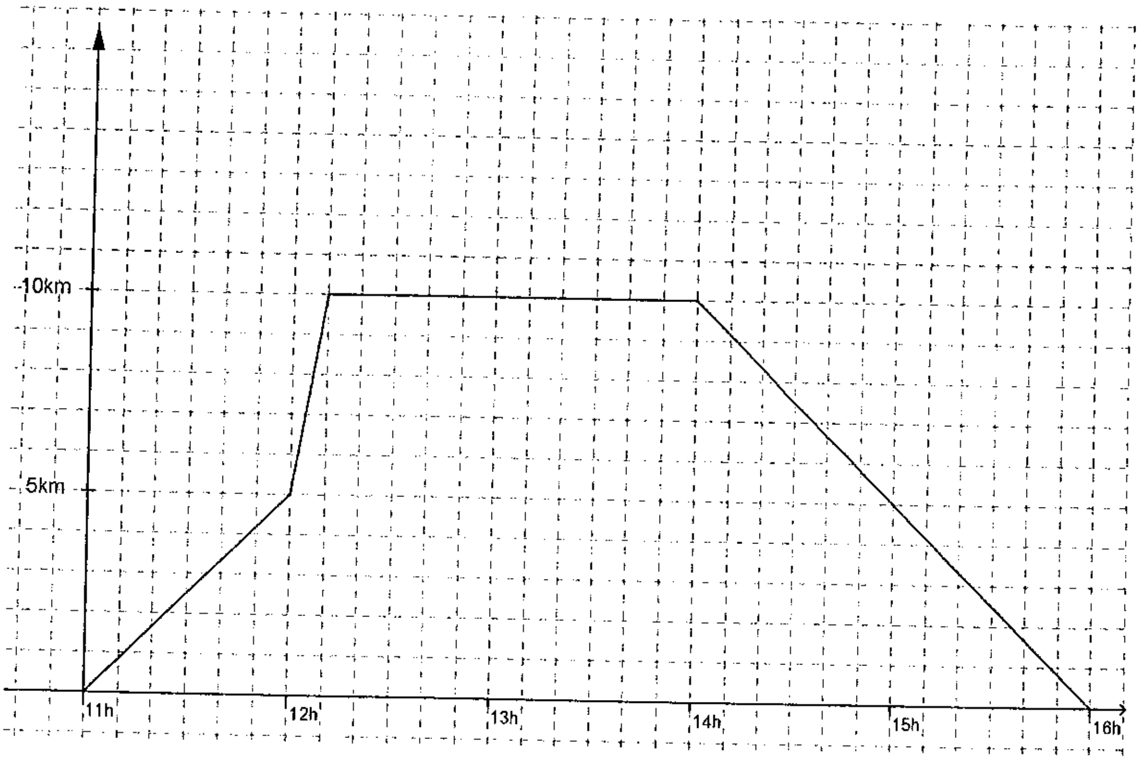
Nous proposons un exercice niveau collège que nous avons pu utiliser dès la $6^{ème}$ et un autre exercice qui convient pour les classes de seconde.
Il s'agit de déplacement à vitesse constante et donc de fonctions affines par intervalles.

Le petit chaperon rouge (classe de $6^{ème}$)

Le petit Chaperon Rouge habite à un bout de la ville. Sa mère-grand habite à l'autre bout de la ville, 10 km plus loin. Sur la longue avenue qui sépare la maison du Chaperon Rouge de celle de sa mère-grand, on peut marcher à 5 km/h ou prendre un bus qui roule à 30 km/h.

Sur son carnet personnel, le Chaperon Rouge « raconte » ses sorties en traçant des graphiques. Sur l'axe horizontal, il marque les heures et, sur l'axe vertical, il marque la distance qui le sépare de sa maison.

1) Première sortie



a-Que représente un petit carreau sur l'axe horizontal ?

b- Que représente un petit carreau sur l'axe vertical ?

c- A quelle heure le Chaperon Rouge est-il parti de chez lui ?

d- A quelle heure est-il arrivé chez sa mère-grand ?

e- Comment a-t-il voyagé à l'aller ?

f- Combien de temps est-il resté chez sa mère-grand ?

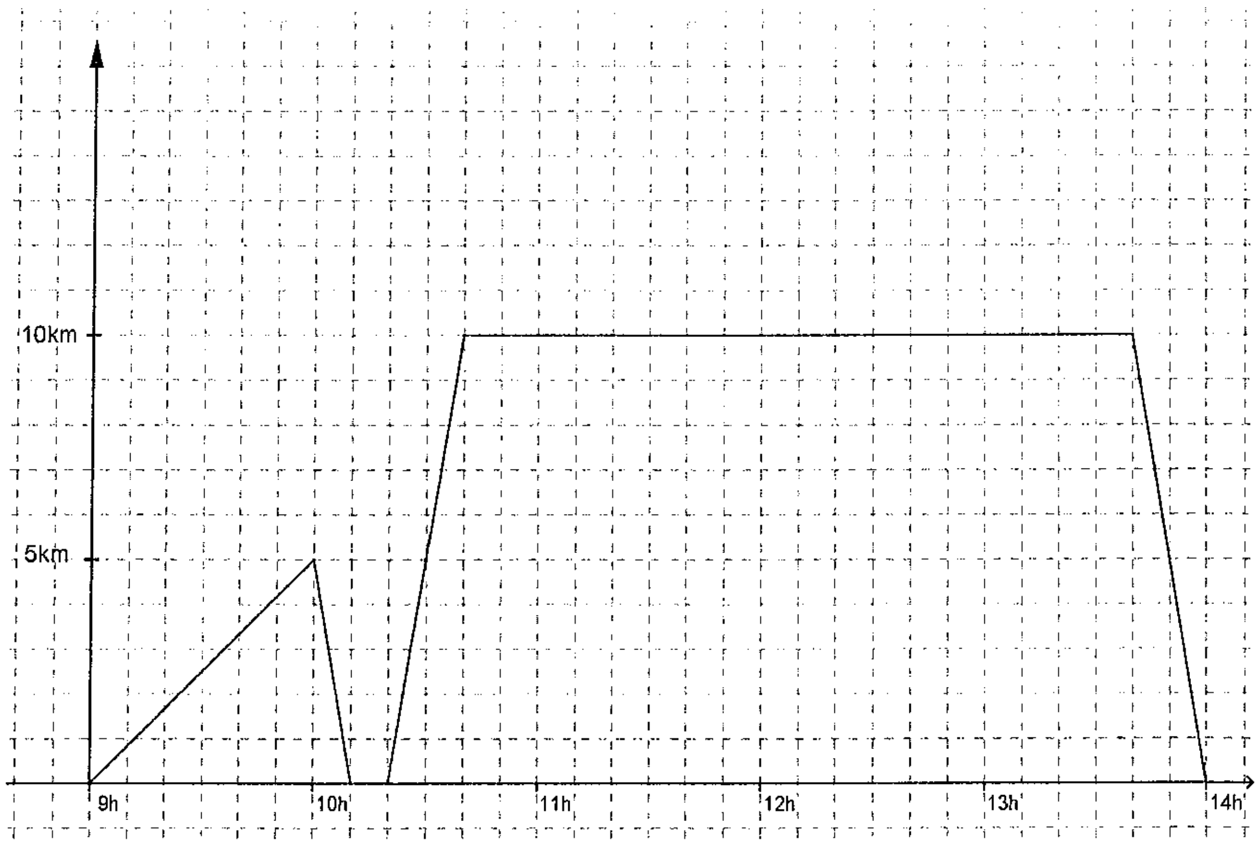
g- Comment est-il revenu ?

h- A quelle heure est-il rentré chez lui ?

2) <u>Deuxième sortie</u>

Ce jour-là, le Chaperon Rouge avait oublié son pot de beurre.

Raconte, avec précision, ce qu'il a fait.



3) <u>Troisième sortie</u>

Ce jour-là :

- Le Chaperon Rouge est parti de chez lui à 14h.
- Il a marché pendant une heure.
- Soudain, il a vu le loup et alors… il s'est caché dans une cabine téléphonique pendant 40 minutes en attendant que le loup s'en aille !
- Puis, il a pris le bus jusque chez sa mère-grand.
- Il est resté 2 heures et demie chez sa mère-grand.
- Et il est rentré chez lui en bus évidemment !

Réalise le graphique qui « raconte » cette sortie et donne l'heure à laquelle le Chaperon Rouge est rentré chez lui.

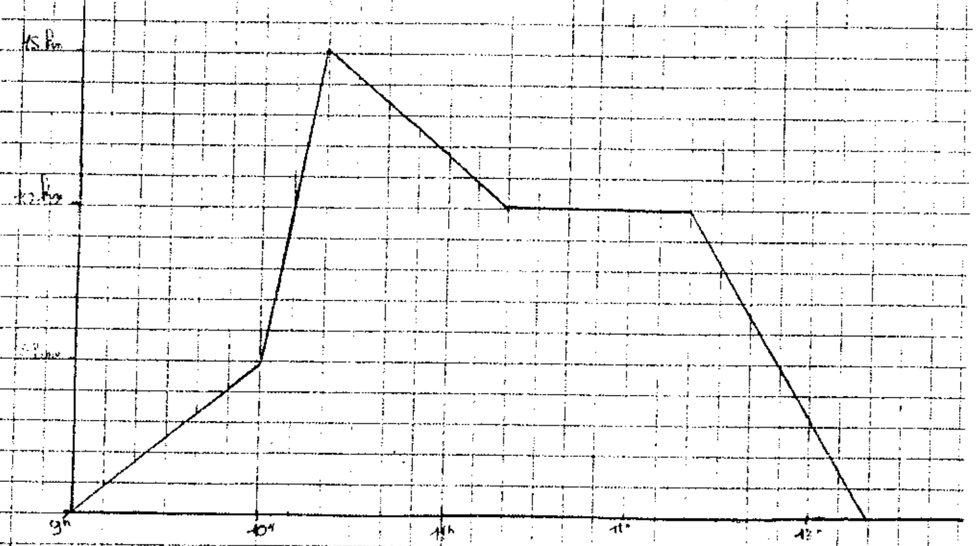
4) Quatrième sortie :

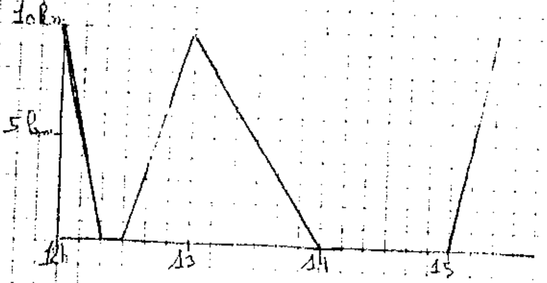
En travail à la maison, les élèves doivent inventer un texte et réaliser le graphique correspondant. Ils peuvent faire preuve d'imaginations…Il n'y a qu'à voir ces copies d'élèves pour s'en convaincre !

Suivent quelques productions d'élèves (collège du Grand Parc, Bordeaux) :

4/ Quatrième sortie :

Le petit chaperon rouge part à 9h de chez lui. Il marche pendant 1h, ap
il aperçu le loup, alors il prit le bus. Pendant le trajet il dormit 20 min. Qua
il s'est réveillé il a remarqué qu'il est allé trop loin, il était à 5 km de chez sa grand
mère. Alors il a marché 1h pour arriver. Il est resté 1h et il est rentré avec le
que sa grand mère lui a offert. Le vélo va à 10 km/h.

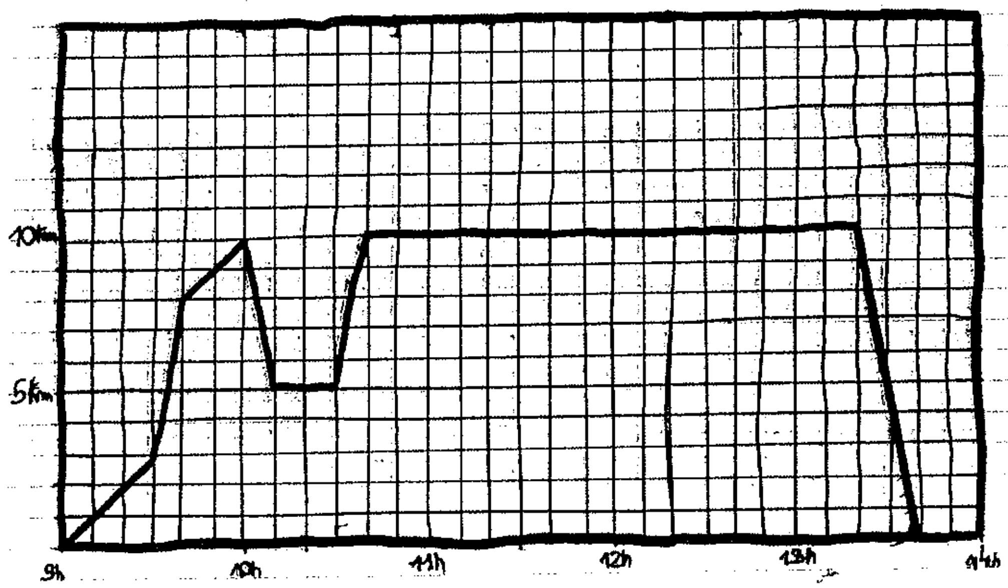




La mère-grand par chez le petit chaperon rous. Elle quitte sa maison à 12h
et prend sa Harley Davidson qui va à 30 km/h. Elle ~~paro~~ parcourt 10 km alors
qu'elle veut aller aux toillettes, elle fait une pause de 10 minutes et veut
repartir mais elle fait le tour de quelques avenues car c'est le carna-
val. La mère grand doit parcourir 20 km pour faire le tour et elle arrive
chez le chaperon rous ~~et~~ puis y fait une partie de scrabble pendant 1h et repart
chez elle. En rentrant chez elle, elle mange un gros chiche-kebab et
elle a mal au ventre mais on s'en fiche.

Devoir Maison

Le petit Chaperon Rouge part de chez lui à 9h pour aller voir sa mère-grand. Il marche 30 minutes (à 5km/h) mais il se rend compte qu'il n'a pas de pot de beurre et va en acheter un au magasin qui est à 5 km d'où il se trouve. Il y va en bus (qui lui va à 30 km/h) ~~Il y reste 20 minutes car il y trouve des bus sympas~~. Puis, il va chez sa mère-grand ~~en bus~~ à pieds. Mais, elle n'est pas là. Il en profite pour aller au McDonald qui est à 5km avant la maison de sa mère-grand, il y va en bus et y reste 20 minutes. Sa mère-grand lui envoie un texto pour lui dire qu'elle est rentrée et qu'elle s'excuse. Il y va en bus. Le petit Chaperon Rouge veut resté chez sa mère-grand 2h40 minutes. Il revient chez lui en bus.

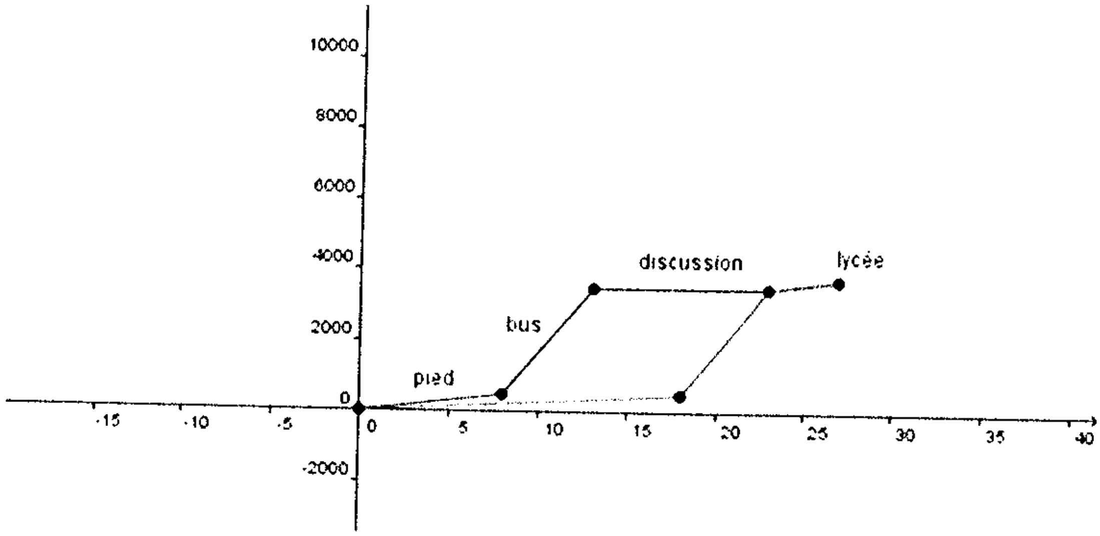


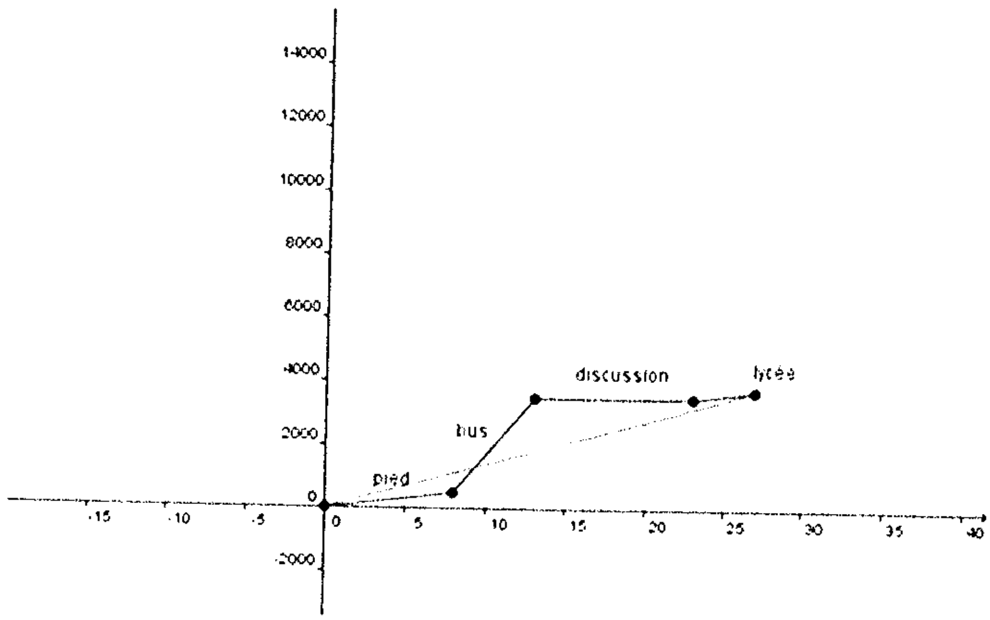
Le trajet de Karim (classe de seconde)

Karim va au lycée. Il se rend à pied d'un pas régulier et en 8 minutes jusqu'à l'arrêt de bus le plus proche, à 500m de chez lui. Il prend alors le bus et parcours 3 km en 5 minutes.
A l'arrêt du bus il rencontre une amie avec qui il discute 10 minutes sans se déplacer.
Finalement il arrive au lycée situé à 250 mètres de l'arrêt du bus en 4 minutes.

1- Représenter graphiquement la distance parcourue par Karim en fonction du temps
2- En arrivant au lycée Karim se rend compte qu'il a oublié son exposé ; il décide de faire demi-tour et d'aller le récupérer. Il refait exactement le même trajet sans s'arrêter et avec le même temps de parcours. Représenter sur le même graphique la suite des variations de la distance entre Karim et sa maison en fonction du temps.

Voici des exemples d'erreurs commises par des élèves :

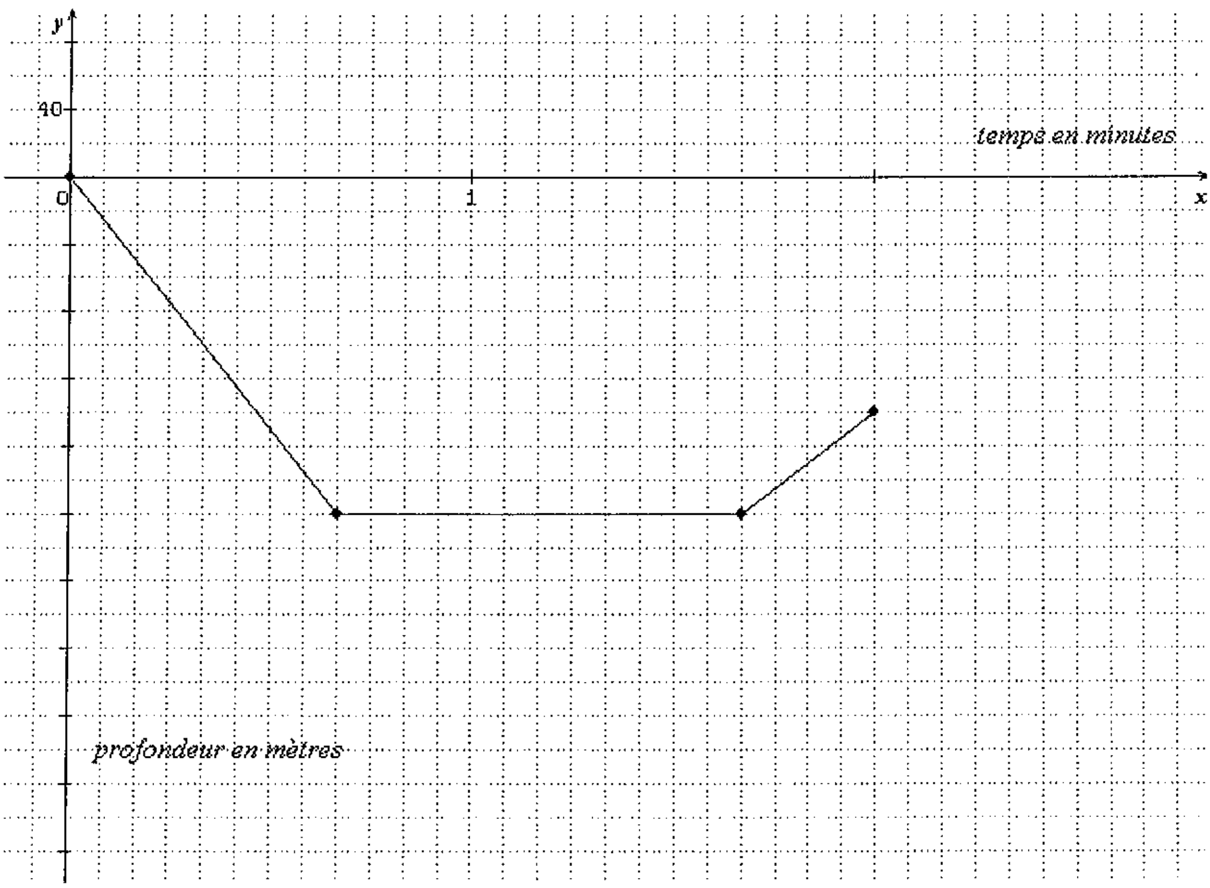




Le sous-marin

Cet exercice peut être posé à partir de la cinquième.

1. Quelle durée représente un centimètre ?
2. Quelle profondeur représente un centimètre ?
3. Quelle est la profondeur maximum atteinte par le sous-marin ?
4. En combien de temps arrive-t-il à –200 m ?
5. Quelle est sa vitesse de descente en mètres par seconde ?
6. Pendant combien de temps reste-t-il à –200 m ?
7. Que fait-il après 1 min 40 s de plongée ?
8. A quelle profondeur est-il au bout de 2 min d'immersion ?
9. Compléter le graphique sachant qu'il reste 10 s à –140 m et qu'il remonte ensuite à la surface à une vitesse de 4 m/s.
10. Combien de temps a duré son immersion ?
11. A quel moment la vitesse est-elle la plus élevée ?



L'engin de travaux publics

Cet exercice peut être proposé à partir de la quatrième.

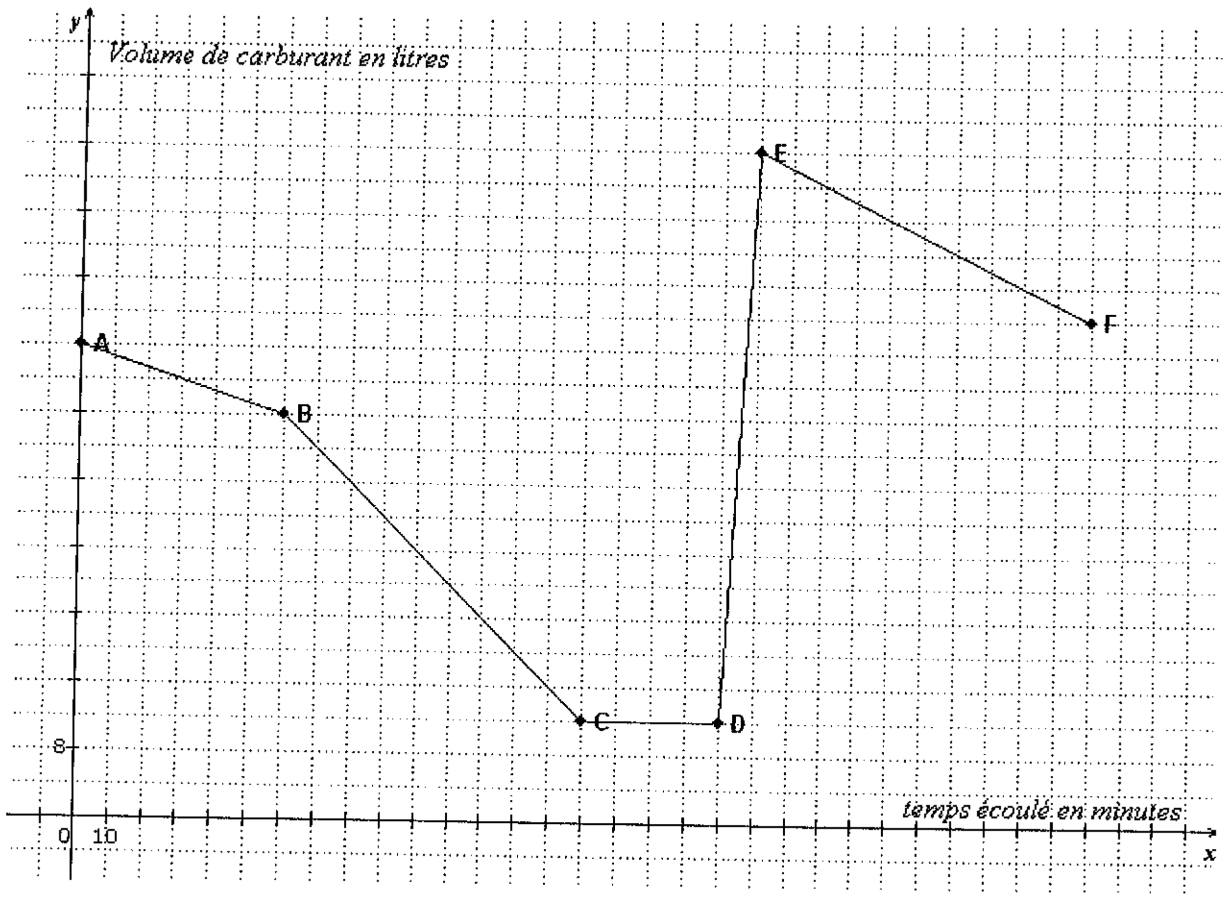
La consommation en carburant d'un engin de travaux publics s'évalue en litres par heure de fonctionnement.

Cette consommation est variable et dépend du travail qui est demandé :

- Déplacement : 8 litres par heure ;
- Chargement : 12 litres par heure ;
- Terrassement : 24 litres par heure.

Ce graphique définit la fonction qui, à un instant d'une matinée de travail, associe le volume de carburant dans le réservoir.

On sait que la matinée de travail a commencé à 7 heures.



a. Quel volume de carburant y a-t-il dans le réservoir à 7 heures ?

b. A quelle heure la matinée de travail s'achève-t-elle ?

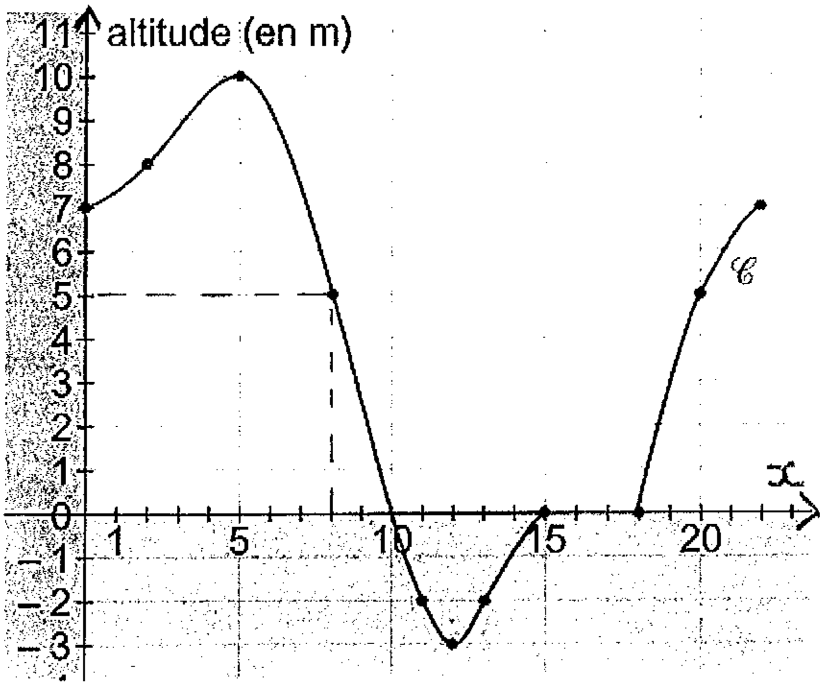
c. A quelle heure a-t-on refait le plein du réservoir ? Combien de litres y a-t-on mis ?

d. Expliquer à quel type de travail correspond chaque segment [AB], [BC], [CD], [DE], [EF]. On précisera la durée, les horaires, la consommation de carburant … On pourra faire des calculs…On pourra tracer des traits, écrire sur le graphique …

Interpréter un graphique

L'oiseau

Cet exercice peut être traité à partir de la cinquième.



Un oiseau de mer niche sur une falaise à 7 m de hauteur. Il part pêcher un poisson.

La courbe ci-dessous représente l'altitude de l'oiseau en fonction de la distance qui le sépare de la côte.

L'altitude et la distance à la côte sont exprimées en mètres.

Ecrire des questions que l'on peut poser à partir de cette représentation graphique ?

Au bout d'un temps de recherche, les élèves posent leurs questions ; d'autres y répondent. A partir de la classe de troisième, les élèves peuvent utiliser le vocabulaire spécifique aux fonctions comme « image » ou « antécédent » ; le professeur les incite à le faire.

Degrés Celsius, degrés Fahrenheit.

Cet exercice peut être proposé en troisième comme application des fonctions affines.

En France l'unité usuelle de température est le degré Celsius (°C). Dans les pays anglo-saxons, c'est le degré Fahrenheit (°F).

Si on note x la mesure d'une température en °C et y la mesure correspondante de cette température en °F, on sait que : $y = 1{,}8x + 32$.

1. Pour des températures de 20°C, 0°C, −10 °C, 100°C que lira un américain sur son thermomètre ?
2. Si un américain lit 50°F, −13°F, 113°F sur son thermomètre comment pourra-t-il traduire ces températures à un français ?
3. Si à Los Angeles il fait 77°F, est-ce une température caniculaire ?
4. Un médecin américain s'inquiète-t-il quand le thermomètre de son malade indique 99,5°F ?
5. Compléter le tableau suivant :

Température en °C	20	0	−10	100				
Température correspondante en °F					100	−13	77	-67

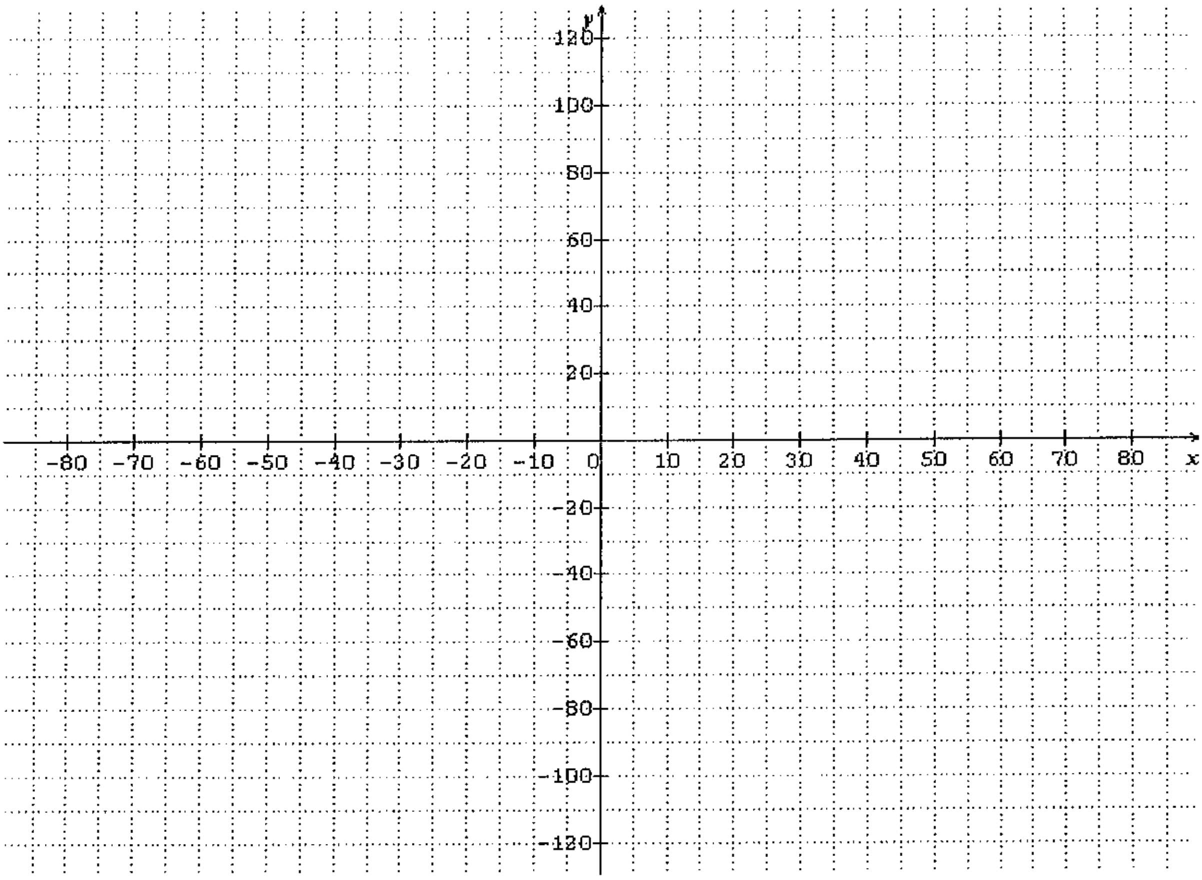
6. Il existe un film très célèbre de François Truffaut (sorti en 1966) d'après un roman de Ray Bradbury qui a pour titre « *Fahrenheit 451* ». L'action du film se déroule dans un pays imaginaire où un dictateur contraint les habitants à brûler tous leurs livres. On sait que le papier brûle dès que la température s'approche de 233°C.

   Pouvez-vous expliquer le titre du film?

   Réponse : $1{,}8 \times 233 + 32 = 419{,}4 + 32 = 451{,}4$

   On peut aussi demander aux élèves de chercher qui sont Daniel Gabriel Fahrenheit *(physicien allemand, Dantzig1686- La Haye 1736)*, François Truffaut *(cinéaste français 1932-1984)* et Ray Bradbury *(qui n'est pas dans un dictionnaire courant, voir internet).*

7. En utilisant le tableau précédent, placer des points dans le repère suivant ayant pour coordonnées (x ; y), x désigne une température en °C et y la température correspondante en °F.



Quelle conjecture peut-on faire sur les points obtenus ?
Existe-t-il une température qui soit positive en °C et négative en °F ?

Dans une bonne classe de 3ème ou en 2nde, on peut aussi demander aux élèves de déterminer l'expression de la fonction affine en donnant l'énoncé suivant :

On sait que la correspondance entre les deux échelles de température est une fonction affine de sorte que la température de la glace fondante est 32°F et que la température de l'eau bouillante est 212°F.

Si on note x la mesure d'une température en °C et y la mesure correspondante de cette température en °F, déterminer l'expression de la fonction affine telle que $y = f(x)$

On pose ensuite les mêmes questions que précédemment en enlevant 0°C et 100°C qui sont déjà donnés.

Tableau de variation

Cet exercice est proposé pour les classes de seconde.

ABC est un triangle rectangle en A tel que AB = 4 et AC = 3.

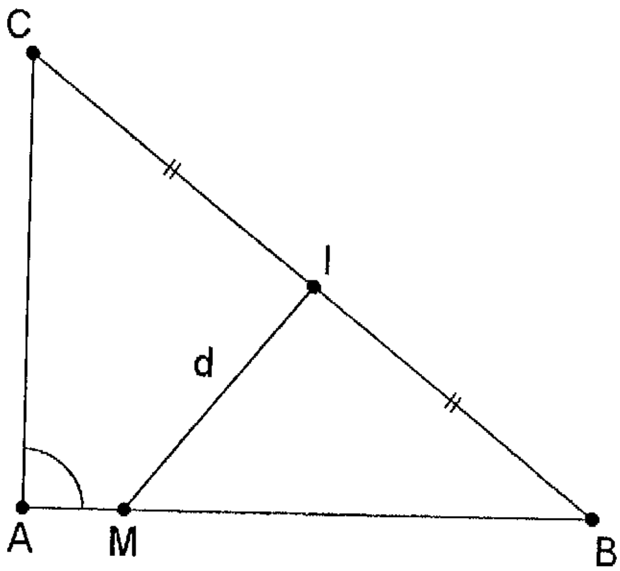
I est le milieu de l'hypoténuse [BC].

Un point mobile M se déplace en restant sur les côtés, de A vers B, puis de B vers C, enfin de C vers A.

On note x la distance qu'il a parcourue à partir de A.

On considère la fonction f définie par : $f : x \longmapsto IM$.

Sans chercher à exprimer explicitement $f(x)$, dresser le tableau de variation de f.



<u>Indications pour le professeur</u>

Le tableau de variation se déduit directement des propriétés géométriques de la figure.

x	0	2	4	6,5	9	10,5	12
f	2,5		2,5		2,5		2,5
		1,5		0		2	

Pour réaliser ce tableau de variation, il suffit de savoir calculer CB = 5 avec le théorème de Pythagore, de savoir que la médiane [IA] mesure la moitié de l'hypoténuse soit 2,5, et que « la perpendiculaire est plus courte que l'oblique ». Il faut aussi savoir que le segment qui joint les milieux des côtés [BC] et [AB] mesure la moitié de [AC] soit 1,5 et que le segment qui joint les milieux des côtés [BC] et [AC] mesure la moitié de [AB] soit 2.

Avec des élèves de première on pourra, après avoir fait ce tableau, vérifier la cohérence entre le tableau et l'expression de la fonction qui est la suivante :

- Si $0 \leq x \leq 4$, $f(x) = \sqrt{(x-2)^2 + 1{,}5^2}$ et $f'(x) = \dfrac{2(x-2)}{\sqrt{(x-2)^2 + 1{,}5^2}}$

On obtient $f(0) = \sqrt{6{,}25} = 2{,}5$, $f'(x) < 0$ si $0 \leq x < 2$ et $f'(x) > 0$ si $2 < x \leq 4$.

- Si $4 \leq x \leq 6{,}5$, $f(x) = 2{,}5 - (x-4) = 6{,}5 - x$.

Elle est donc décroissante dans cet intervalle.

- Si $6{,}5 \leq x \leq 9$, $f(x) = (x-4) - 2{,}5 = x - 6{,}5$.

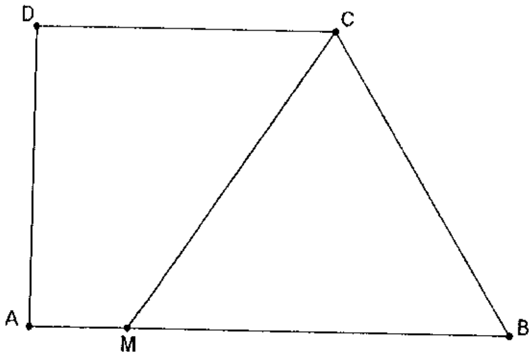
La fonction est donc croissante dans cet intervalle.

- Si $9 \leq x \leq 12$, $f(x) = \sqrt{[1{,}5 - (x-9)]^2 + 2^2} = \sqrt{(x-10{,}5)^2 + 4}$

$$\text{et } f'(x) = \frac{2(x-10{,}5)}{2\sqrt{(x-10{,}5)^2 + 4}}$$

donc $f'(x) < 0$ si $9 \leq x < 10{,}5$ et $f'(x) > 0$ si $10{,}5 < x \leq 12$.

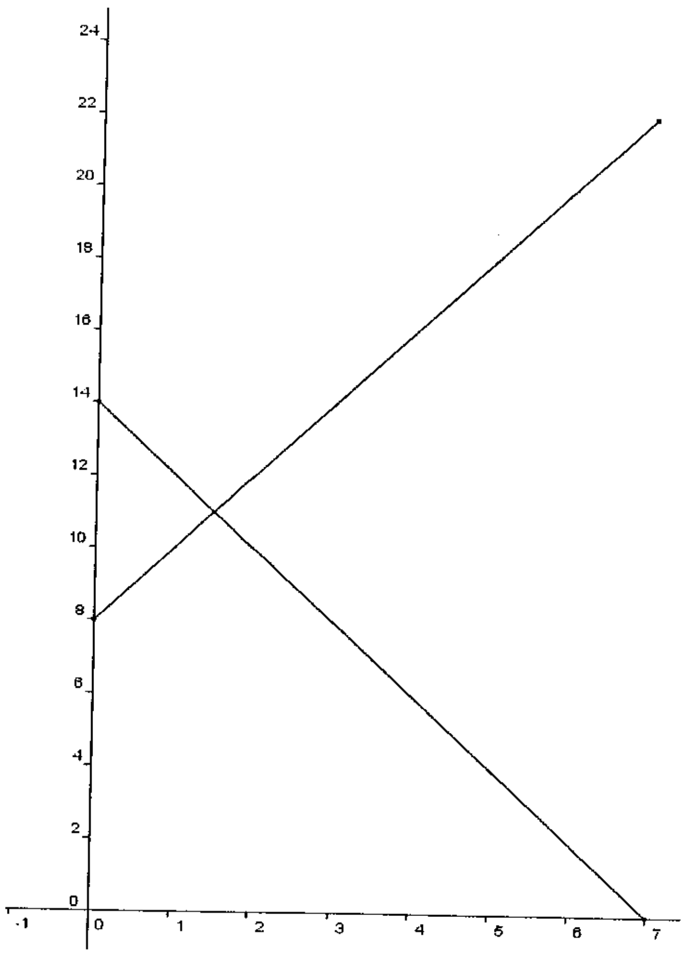
Triangle et trapèze



ABCD est un trapèze rectangle (les angles en A et D sont droits) et M est un point du segment [AB]. On note x la distance AM, $f(x)$ l'aire du triangle CMB et $g(x)$ l'aire du trapèze AMCD.

Le graphique ci-dessous représente les deux aires en fonction de x.

En vous aidant du graphique, retrouvez les longueurs des côtés de ABCD



Quand x augmente l'aire de BCM diminue, donc f est décroissante et f est représentée par la droite qui « descend ».

Quand x augmente l'aire de AMCD augmente, donc g est croissante et g est représentée par la droite qui « monte ».

- AB = 7 et $f(0) = 14$

  donc $0{,}5 \times AB \times AD = 14$ donc AD = 4.
- $g(0) = 8$ donc $0{,}5 \times DC \times AD = 8$

  donc DC = 4.

Grâce au théorème de Pythagore on trouve :

$BC^2 = 3^2 + 4^2$ donc BC = 5.

Des carrés dans un carré

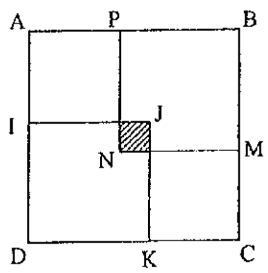
Cet exercice est proposé pour les classes de seconde

ABCD est un carré de côté 1 et x est un nombre réel compris entre 0 et 1.

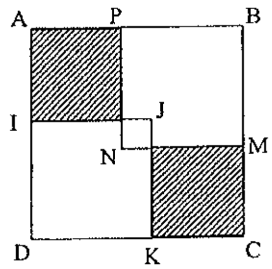
IJKD et PBMN sont deux carrés de côté x contenus dans le carré ABCD.

On désigne par $S_1(x)$ l'aire de la partie commune à ces deux carrés si elle existe et par $S_2(x)$ l'aire de la partie extérieure à ces deux carrés et contenue dans ABCD.

Si ces deux carrés n'ont pas de partie commune, on pose $S_1(x) = 0$.

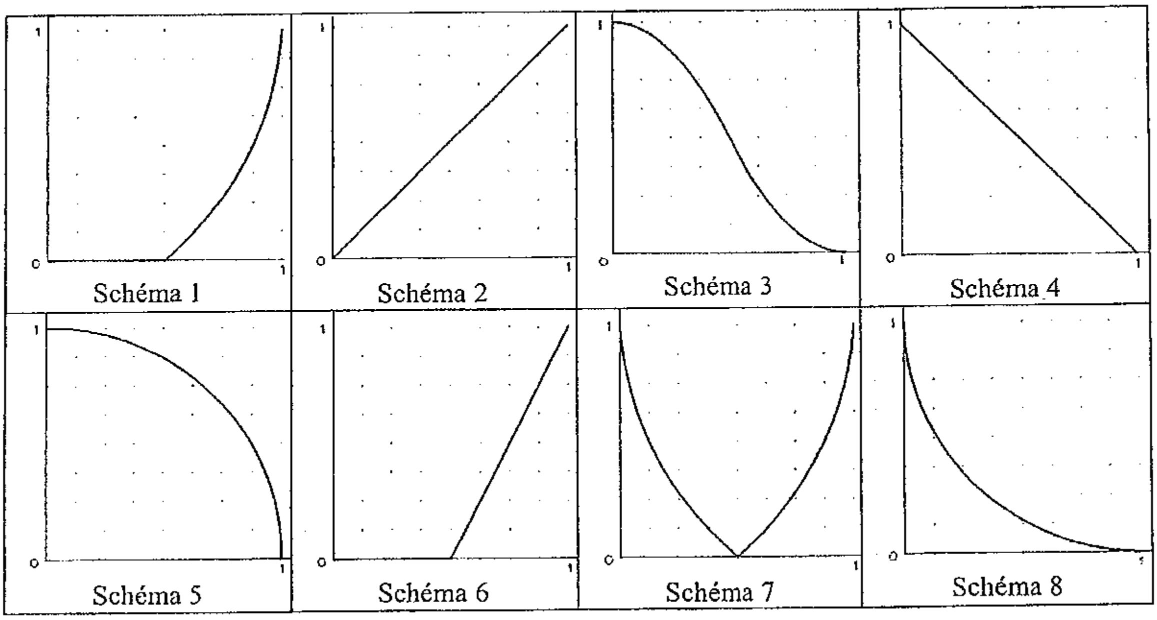


Visualisation de $S_1(x)$



Visualisation de $S_2(x)$

1- Retrouver parmi les huit courbes suivantes celle qui représente la fonction S_1 et celle qui représente la fonction S_2. On s'appliquera à justifier ses choix.



2- Pour quelle valeur de x a-t-on $S_1(x) = \frac{1}{4}$?

3- Pour quelle valeur de x a-t-on $S_1(x) = S_2(x)$?

4- Pour quelle valeur de x a-t-on $S_1(x) + S_2(x)$ minimum ? Quel est ce minimum ?

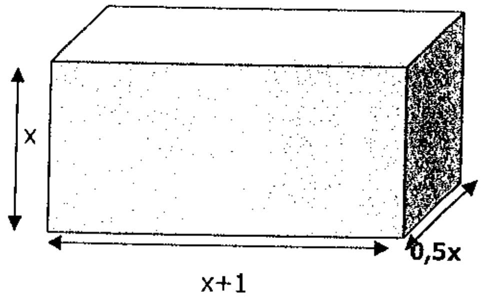
Fonctions et Equations

Ces exercices sont proposés pour les classes de seconde.

Exercice 1 :

On considère un pavé droit dont les dimensions en cm sont x, $x + 1$ et $0{,}5x$.

Existe-t-il une valeur de x pour laquelle le volume du pavé soit 40 cm^3 ? 30 cm^3 ?



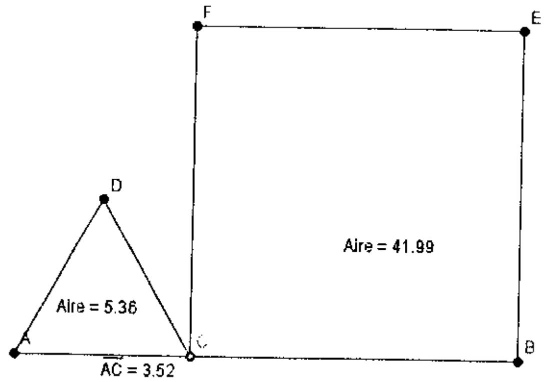
Exercice 2 :

[AB] est un segment de longueur 10 cm.

1) Placer un point C sur le segment [AB] .

2) Construire un triangle équilatéral ACD et un carré CBEF à l'aide d'un logiciel de géométrie.

3) Faire afficher la longueur AC, les aires de ACD et de CBEF. On obtient la figure ci-dessous.



4) Conjecturer une valeur approchée de la longueur AC pour que les aires de ACD et de CBEF soient égales. Démontrer ce résultat.

Exercice 3 :

ABCD est un rectangle tel que AB = 10 cm et AD = 6 cm.

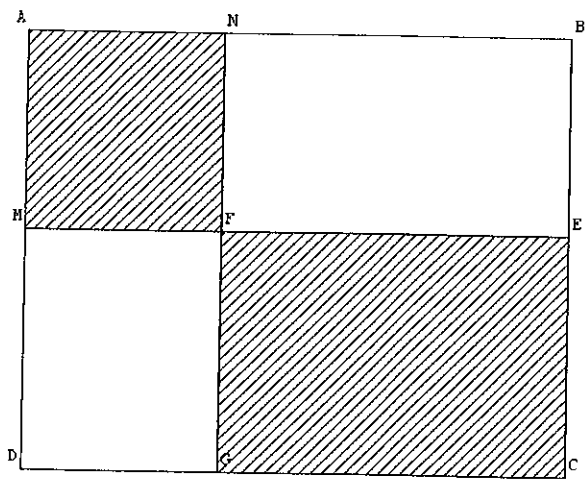
M est un point de [AD]. N est le point de [AB] tel que AN = AM = x.

F est le point tel que ANFM est un carré.

E et G sont deux points de [BC] et de [DC] tels que FECG est un rectangle.

On s'intéresse à la somme des aires hachurées.

Déterminer les valeurs de x pour lesquelles la somme des aires est inférieure ou égale à 30cm².



Exercice 4 :

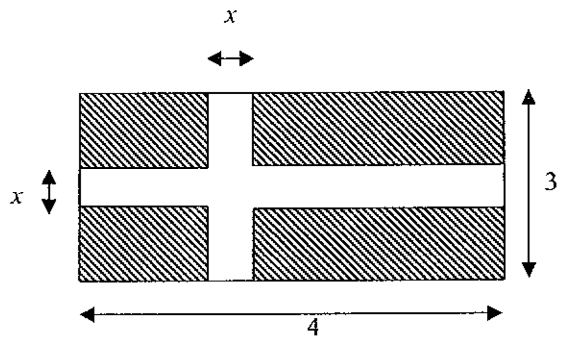
Partie A

1- Développer et réduire $(x-6)(x-1)$

2- Résoudre l'équation $x^2-7x+6=0$

Partie B

Déterminer la valeur de x pour que les surfaces grises et blanches aient la même aire.



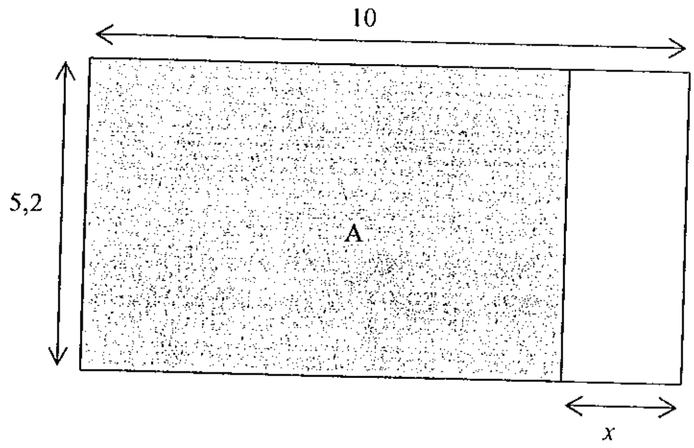
Remarque : Cet exercice peut être traité en première S sans la première partie. Il est possible de le modifier en demandant aux élèves de déterminer les valeurs de x pour lesquelles une surface est plus importante que l'autre pour obtenir une inéquation de degré 2.

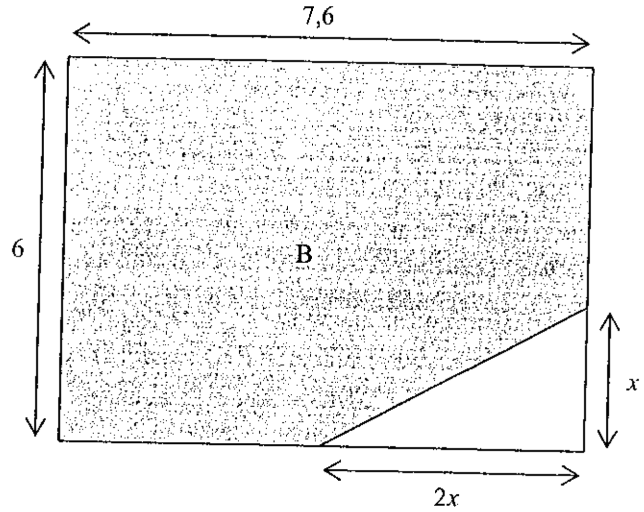
Polygones d'aires variables

Cet exercice est proposé en classe de troisième ou de seconde.

On considère les deux rectangles A et B ci-dessus. Les longueurs sont données en cm.

Déterminer s'il existe des valeurs de x pour lesquelles les surfaces en gris ont la même aire.



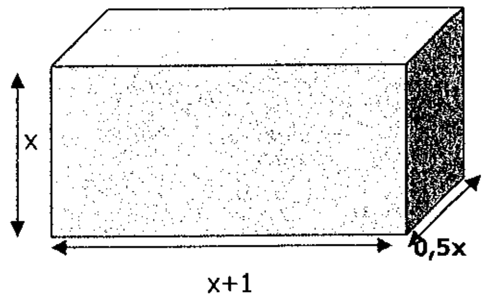


L'objectif de cet exercice est la résolution d'équations à l'aide d'un tableau de valeurs construit sur tableur pour conjecturer les deux solutions et l'utilisation du graphique pour lire les solutions. Les fonctions rencontrées sont : $x \mapsto -5{,}2x + 52$ et $x \mapsto -x^2 + 45{,}6$.

Dilatation du pavé

Nous proposons cet exercice en seconde ou dans une bonne classe de troisième.

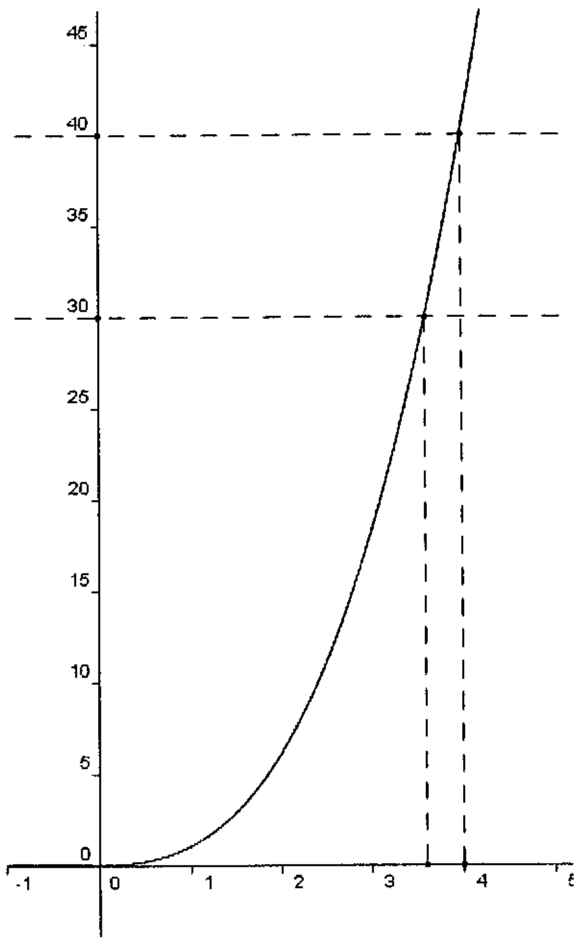
On considère un pavé droit dont les dimensions en centimètres sont x, $x + 1$ et $0{,}5x$.
Existe-t-il une valeur de x pour laquelle le volume du pavé soit 40 cm^3 ? 30 cm^3 ?



Le but de cet exercice est de proposer aux élèves un problème qui conduit à une équation du type $f(x) = k$ qu'ils ne savent pas résoudre algébriquement, afin de les amener à une résolution graphique pour pallier cela.
La nature du problème permet d'admettre que la fonction utilisée est strictement croissante et continue (même si le mot n'est pas donné ainsi aux élèves) afin de garantir l'existence et l'unicité des solutions.

Il est sans doute souhaitable de proposer le problème de façon assez ouverte aux élèves de façon à ce qu'ils constatent par eux-mêmes la difficulté de la résolution de $\frac{x^2(x+1)}{2} = 40$ et surtout de $\frac{x^2(x+1)}{2} = 30$.

En complément, il est intéressant de leur montrer comment on peut améliorer la précision des solutions approchées ainsi obtenues à l'aide du tableur de leur calculatrice.



PARTIE IV

Les compléments pour le professeur

Des compléments mathématiques ou des indications sur des liens entre plusieurs des situations proposées.

Un exemple de progression pour la classe de troisième.

1) Notion de fonction :

Introduction de la notion de variation, des notations, de la représentation graphique.

Situations « essentielles » :

- Un carré et un rectangle
- Rectangles de périmètre constant
- Rectangles d'aire constante

Exercice : L'oiseau

2) Proportionnalité

Fonction linéaire. Démonstration de l'alignement des points avec la tangente. Théorème de Thalès.

Situation « essentielle » : Le rectangle qui bouge

Exercice : L'engin de travaux publics

3) Fonction affine

Caractérisation des fonctions représentées par une droite. Proportionnalité des accroissements. Interprétation graphique du coefficient directeur et de l'ordonnée à l'origine.

Situation « essentielle » : La bande qui se déroule

Exercices : Le store

Degrés Celsius et degrés Fahrenheit

Il nous paraît important de répartir l'étude des fonctions tout au long de l'année et de travailler cette notion dans plusieurs chapitres de la progression.

Ainsi, dans le chapitre sur la trigonométrie on peut représenter graphiquement les fonctions trigonométriques. D'autre part, si on veut utiliser la notion de tangente pour prouver l'alignement des points sur un graphique représentant une situation de proportionnalité, il faut traiter la trigonométrie avant les fonctions linéaires.

Dans le chapitre sur les racines carrées on peut travailler avec la diagonale de « la bande qui se déroule ».

Un exemple de progression pour la classe de seconde.

1) **Généralités sur les fonctions :**

Lectures graphiques, ensemble de définition, tableau de variation et signe dune fonction (à partir de la représentation graphique)

Situation « essentielle » : Rectangle qui bouge

2) **Fonctions affines**

Définition et proportionnalité des accroissements

Signe de $ax+b$ suivant les valeurs de x

Situation « essentielle » : la bande qui se déroule

3) **Fonction carré et fonctions polynômes de degré 2**

Variations de la fonction carré et des fonctions polynômes de degré 2

Propriété de symétrie de leurs courbes.

Etude du signe d'un produit

Résolution d'équations et d'inéquations du second degré se ramenant au premier degré

Situations « essentielles » :

- signe d'un produit
- rectangles de périmètre constant
- carré dans un rectangle

Situation « complémentaire » : les haricots verts ...

Exercice : le drapeau

4) **Fonction inverse et fonctions homographiques**

- variations de la fonction inverse
- signe d'un quotient
- équation et inéquation avec dénominateur

Situation « essentielle » : rectangles de même aire.

Remarques à propos de « l'aire négative ».

Les élèves doivent savoir qu'une aire est une mesure positive. Cependant certains élèves parlent d'aire négative, par exemple dans la situation du store.

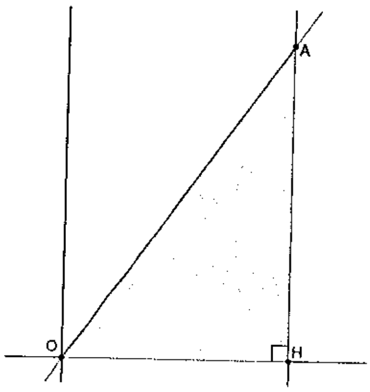
Nous signalons au professeur la cohérence de cette interprétation au cas où certains élèves argumenteraient dans ce sens.

Dans la situation du store la remarque de l'élève sur le store « retourné » qui a une aire négative est loin d'être dénuée de sens. Au contraire !

En mathématique quand un calcul d'aire donne un résultat négatif on sait bien comment interpréter ce résultat.

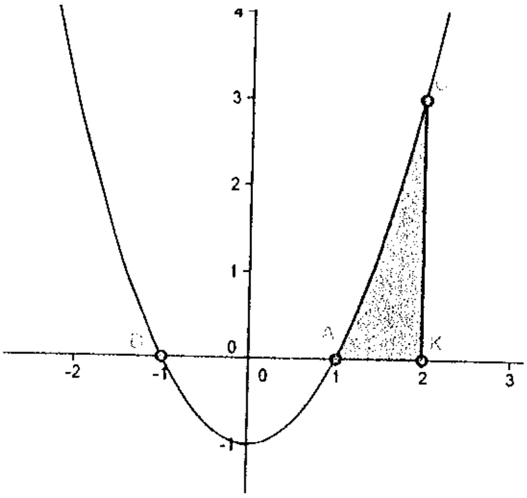
1- Calcul d'aire avec une intégrale

a-



Soit la droite d'équation $y = x$. Soit le point A de la droite d'abscisse 1 qui se projette en H sur l'axe des abscisses. L'aire du triangle rectangle OAH est $\frac{1}{2}$.

Le calcul de cette aire par une intégrale $\int_0^1 x dx$ conduit à une primitive $\frac{x^2}{2}$ qui donne bien l'aire entre 0 et 1 : $\frac{1}{2}$.

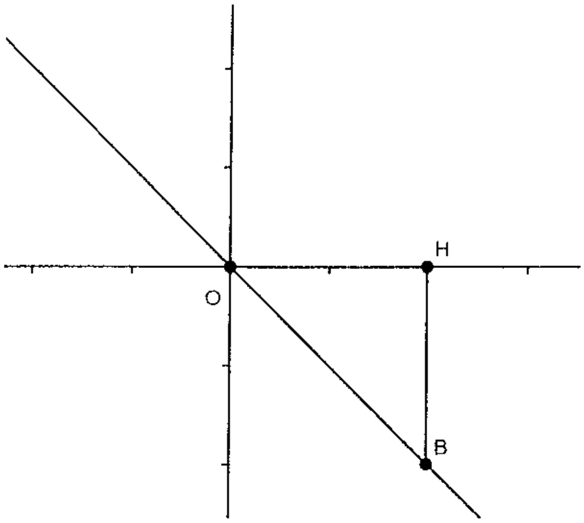


Soit la parabole d'équation $y = x^2 - 1$.

Elle coupe l'axe des abscisses aux points d'abscisses 1 (A) et –1 (B). Soit C le point de la courbe d'abscisse 2 qui se projette en K sur l'axe des abscisses.

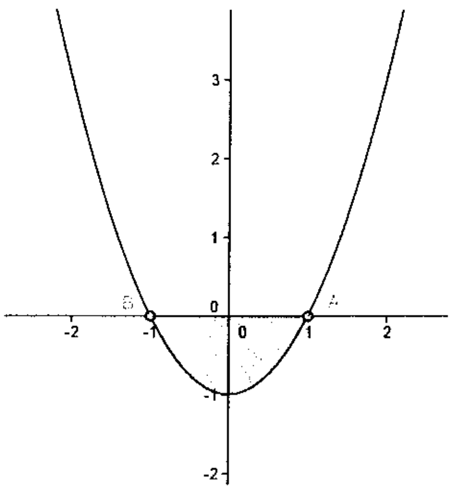
Le calcul de l'aire de la surface limitée par le segment [CK], l'axe des abscisses et l'arc de parabole entre A et C avec une intégrale $\int_1^2 (x^2-1)dx$ conduit à une primitive $\frac{x^3}{3}-x$ qui donne entre 1 et 2 une aire de $\frac{8}{3}-2-(\frac{1}{3}-1)=\frac{4}{3}$.

b-



Soit la droite d'équation $y=-x$. Soit le point B de la droite d'abscisse 1 qui se projette en H sur l'axe des abscisses. L'aire du triangle rectangle OBH est $\frac{1}{2}$. « L'aire algébrique » de ce triangle est donnée par l'intégrale $\int_0^1 -x dx$.

En prenant la fonction $x \mapsto \frac{-x^2}{2}$ pour primitive de la fonction $x \mapsto -x$ on obtient « l'aire algébrique » $-\frac{1}{2}$.



« L'aire algébrique » de la surface limitée par l'axe des abscisses et le morceau de parabole entre A et B est donnée par l'intégrale $\int_{-1}^{1} (x^2-1)dx$.

En prenant la fonction $x \mapsto \frac{x^3}{3}-x$ pour primitive de la fonction $x \mapsto x^2-1$, on obtient « l'aire algébrique »

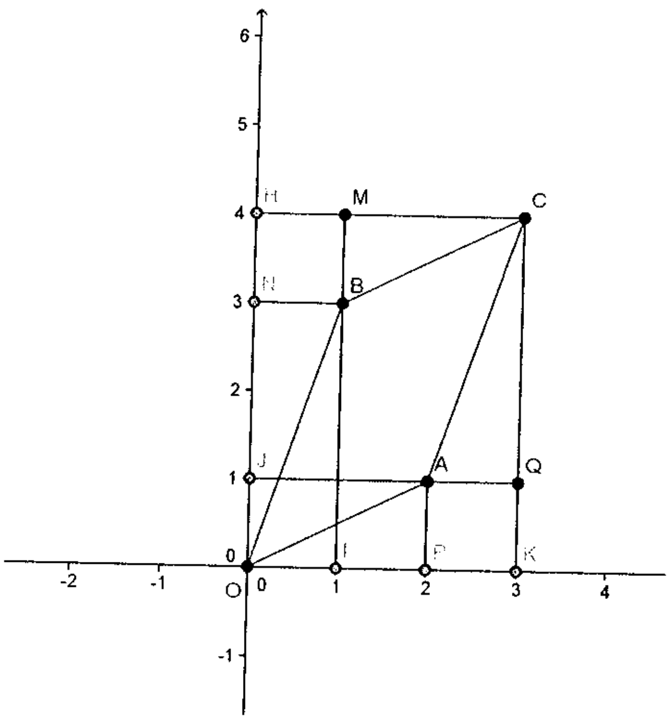
$$\frac{1}{3}-1-(-\frac{1}{3}+1)=-\frac{4}{3}$$

Interprétation :

Dans les cas **a)** l'aire calculée était celle d'une surface située au-dessus de l'axe des abscisses, d'où le résultat positif.

Dans les cas **b)** l'aire calculée était celle d'une surface au-dessous de l'axe des abscisses, d'où le résultat négatif.

2- Calcul d'aire avec un déterminant



I(1,0) J (0,1) A(2,1) B (1,3) C(3,4)

Aire OACB = aire OHCK – (aire OAP + aire MBC) – aire PAQK – (aire OBN + aire ACQ) – aire HMBN

Aire OACB = 4 x 3– 2 x 1– 1 x 1– 1 x 3– 1 x 1= 5

$\overrightarrow{OA}\begin{vmatrix} 2 \\ 1 \end{vmatrix}$ $\overrightarrow{OB}\begin{vmatrix} 1 \\ 3 \end{vmatrix}$

Pour trouver l'aire de ce parallélogramme OACB il suffit de calculer le déterminant $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$ ce qui donne 6 –1 = 5.

En effet en écrivant $= \cos\theta\ \vec{i} + \sin\theta\ \vec{j}$ et $= \cos\theta'\ \vec{i} + \sin\theta'\ \vec{j}$ on trouve que dét ($\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$) = OA × OB × (cosθ sinθ' - cosθ 'sinθ) = $\overrightarrow{OA}$ × $\overrightarrow{OB}$ × sin (θ'− θ) ,   donc

OA × OB × sin ($\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$) soit le produit de OA par la hauteur issue de B dans le parallélogramme, ce qui donne « l'aire algébrique » du parallélogramme.

Il s'agit d'une « aire algébrique » car le signe du déterminant est celui de sin (θ'− θ) .

L'angle (θ '− θ) varie entre $-\pi$ et π , le signe de l'angle orienté des deux vecteurs étant lié à l'orientation du plan.

Changer l'ordre des deux vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$, revient à changer le signe de l'angle :

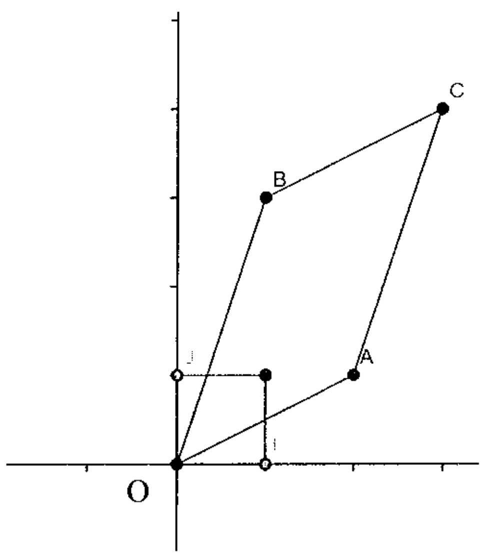
le déterminant $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$ change de signe. Il devient égal à (−5)

On peut remarquer le lien entre cette aire et la norme du produit vectoriel des deux vecteurs.

Transformation affine

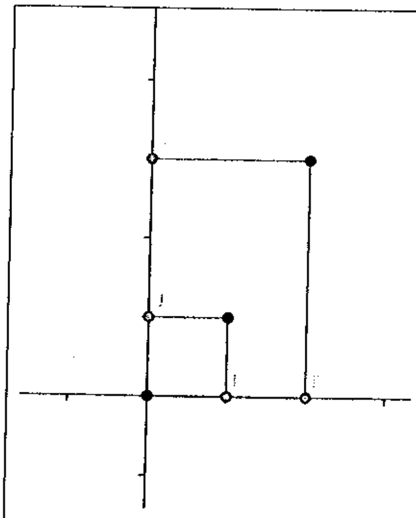
Soit la transformation vectorielle qui transforme $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$ en $\overrightarrow{OA} = \vec{i}'$ et $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$ en $\overrightarrow{OB} = \vec{j}'$

La matrice de cette application est $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ ce qui donne dans le plan affine la transformation d'un point M (*x*, *y*) en M'(*x'*, *y'*) de sorte que $\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = x + 3y \end{cases}$



Ainsi quand le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est orthonormé, le carré de côtés [OI] et [OJ] et d'aire 1 est transformé dans le parallélogramme OACB d'aire 5. Alors les aires de toutes les figures seront multipliées par 5 dans la transformation, c'est à dire qu'elles seront multipliées par le déterminant de la matrice de l'application linéaire.

Autre exemple avec une transformation plus simple : $\vec{i}' = 2\vec{i}$ et $\vec{j}' = 3\vec{j}$ par exemple.



Alors dans le plan affine le carré d'aire 1 se transforme en un rectangle d'aire 6 (on a « étiré » les deux dimensions dans la direction des axes, c'est à dire on a fait deux affinités).

La matrice de cette application est $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

Son déterminant est égal à 6 et l'aire OI'AJ'= 6.

<u>Influence d'une symétrie</u>

Considérons une isométrie vectorielle plane qui transforme la base $(\vec{i}, \vec{j})$ orthonormée en une base $(\vec{i}\,', \vec{j}\,')$ orthonormée aussi (puisque c'est une isométrie).

$\vec{i}\,'\begin{vmatrix} a \\ b \end{vmatrix}$ *et* $\vec{j}\,'\begin{vmatrix} a' \\ b' \end{vmatrix}$

Ces vecteurs doivent être orthogonaux de sorte que $a' = \lambda b$ *et* $b' = -\lambda a$ car leur produit scalaire doit être nul (si les composantes de l'un sont a et b , l'autre est colinéaire au vecteur de composantes $-b$ et a)

Ils doivent être de norme 1 de sorte que $a^2 + b^2 = 1$ et $(\lambda a)^2 + (-\lambda\, b)^2 = 1$ donc $\lambda^2 = 1$.

Il y a donc deux possibilités $\lambda = 1$ ou $\lambda = -1$.

Il y a donc deux matrices possibles pour les isométries planes $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ *ou* $\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$.

Dans le premier cas on a une matrice de déterminant égal à $a^2 + b^2 = 1$.

Il s'agit d'une rotation avec $a = \cos\alpha$ *et* $b = \sin\alpha$ *où* α *est l'angle de la rotation.*

Dans le second cas on a une matrice de déterminant égal à $-(a^2 + b^2) = -1$.

Il s'agit d'une symétrie axiale.

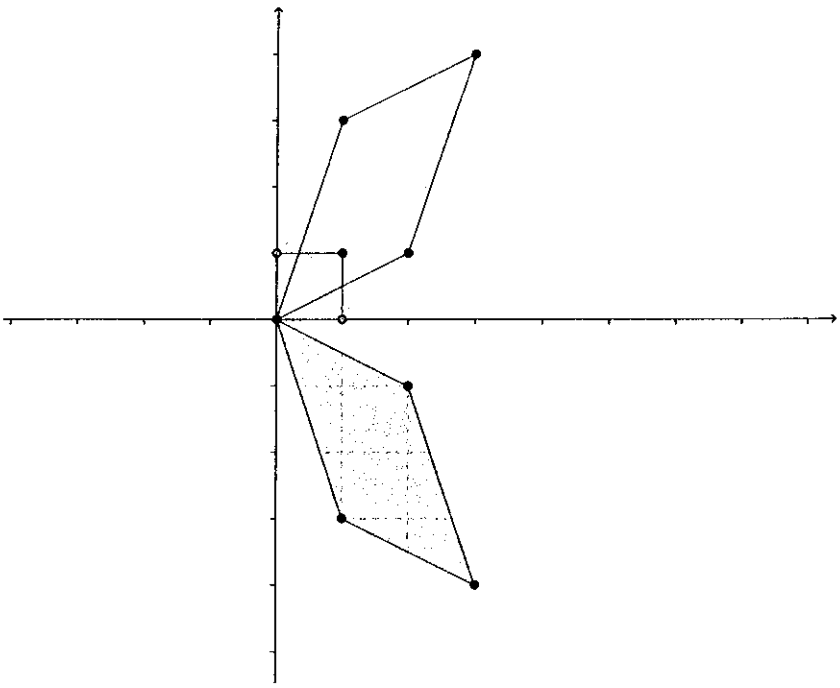
Dans le plan affine en composant ces transformations avec une translation on retrouve toutes les isométries planes.

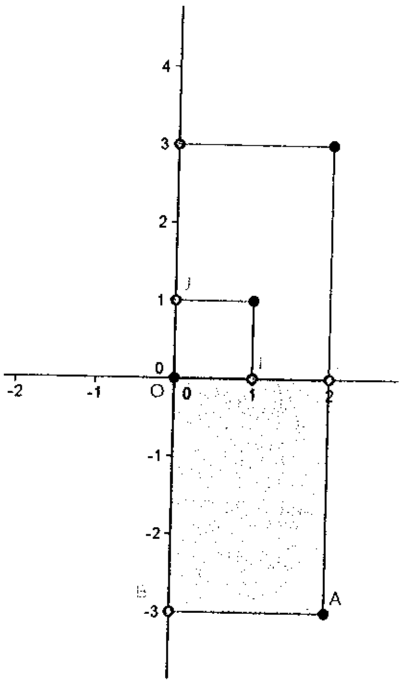
Avec une symétrie des plus simples : $\vec{i}' = \vec{i}$ et $\vec{j}' = -\vec{j}$ par exemple, on a la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ qui est celle d'une symétrie par rapport à l'axe des abscisses.

Faisons successivement la transformation affine précédente de matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ puis cette symétrie ce qui donne dans le plan affine la transformation d'un point M (x, y) en M'(x', y') de sorte que $\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = -x - 3y \end{cases}$

La matrice de cette transformation est le produit des deux matrices

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$ dont le déterminant est égal au produit des deux déterminants $(-1) \times 5 = -5$.

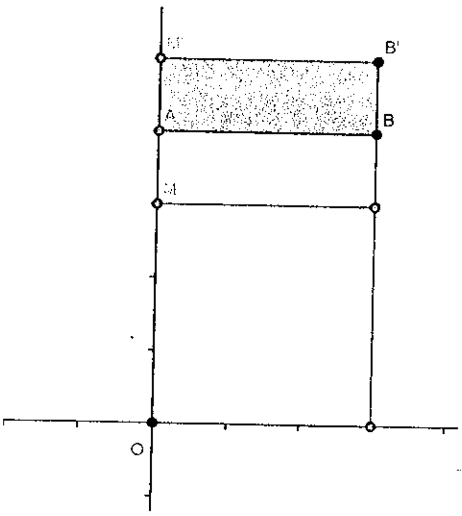




De même le déterminant de l'application composée qui transforme le carré de base dans le rectangle OBAI' est -6

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\0 & -3\end{pmatrix}$$

Interprétation de l'intervalle de variation dans le problème du store



Dans ce problème le point M varie entre O et A
$OA = 2{,}5$ cm de sorte que si $x = OM$
la longueur du store tiré est $2{,}5 - x$ avec $x < 2{,}5$.

Mais les élèves ont imaginé le store « retourné » au dessus de la fenêtre ce qui revient à faire varier M sur un axe orienté vers le haut en prenant pour origine un point O au bas de la fenêtre.
On obtient alors pour le store différents rectangles comme ABB'M'.

$x = \overline{OM}$; $\overline{OA} = 2{,}5$; $\overline{MA} = 2{,}5 - x < 0$

Le calcul de leur aire avec la même formule 1,4 $(2{,}5 - x)$ donne un résultat négatif.
Par exemple pour $x = 3$, le calcul donne $-0{,}7$.
Il s'agit d'un rectangle symétrique d'un rectangle déjà obtenu en déroulant le store vers le bas et d'aire 0,7 cm^2.

Interprétation de l'intervalle de variation pour le carré dans le rectangle

Contrairement à ce qui est arrivé dans la situation du store, les élèves de collège n'ont pas envisagé le cas $x > 6$ et essayé alors de donner un sens à toute la représentation graphique en parlant d'une aire négative. Cette interprétation ne se justifie pas vraiment ici, car on ne se trouve pas dans une situation où intervient une symétrie.

Dans les deux devoirs à la maison pour le lycée, x prend toutes les valeurs positives. En seconde un carré variable est superposé à un carré fixe, en première un carré variable est superposé à un rectangle fixe. Si les élèves parlent d'aire négative, particulièrement dans le premier cas où l'interprétation s'entrevoit plus facilement, le professeur peut prendre en considération leur argumentation, tout en indiquant la solution attendue avec des aires constamment positives (Cf. la correction des devoirs que nous donnons à la suite des textes).

1- <u>Quand le carré de côté x est superposé à un carré de côté 6</u> :

Un carré ANPM de côté variable AM = x et un autre carré fixe ABCD de côté AB = 6

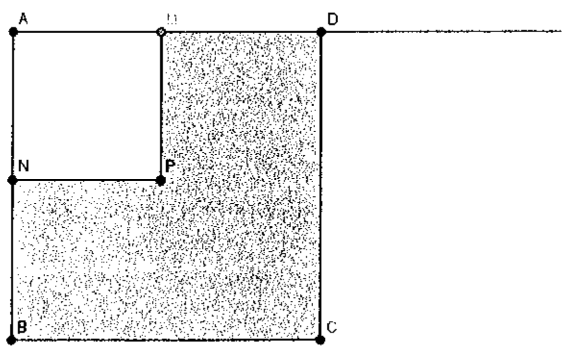


Figure 1

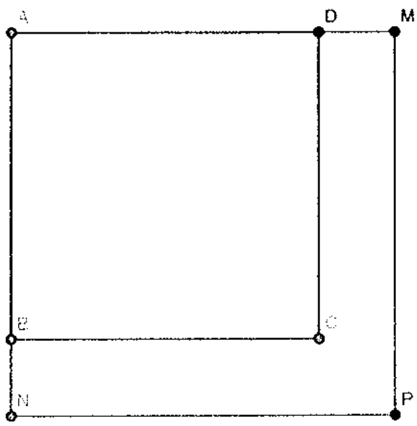


Figure 2

Si $0 \leq x \leq 6$ comme dans la figure 1, $36 - x^2$ est un nombre positif. C'est l'aire de MDCBNP. Si $x > 6$ comme dans la figure 2, $36 - x^2$ est un nombre négatif, mais sa valeur absolue est toujours égale à l'aire de l'hexagone MDCBNP.

On pourrait convenir que, si on sort du carré, l'aire devient négative et dans ce cas la représentation graphique de la parabole d'équation $y = 36 - x^2$ est encore valable pour représenter l'aire de l'hexagone.

Dans les deux cas, en décomposant l'aire de l'hexagone en deux rectangles, le calcul conduit à MD x AB + AM x NB qui donne dans le premier cas ($0 \leq x \leq 6$) :

$(6-x)6 + x(6-x) = 36-x^2$.

La formule reste la même dans le second cas ($x > 6$) si on convient que la mesure de MB et de ND est toujours $6-x$ à condition de considérer des mesures algébriques.

Mais ce n'est pas ce qui est attendu des élèves. On attend qu'ils donnent correctement l'expression opposée pour l'aire : $x^2 - 36$.

Quant au périmètre de l'hexagone, il augmente dès qu'on sort du carré de côté 6. Il n'est plus constant ; l'expression de la fonction change nécessairement.

2- <u>Quand le carré de côté x est superposé à un rectangle de dimensions 9 et 6</u>

Si $0 \leq x \leq 6$, $54 - x^2$ est un nombre positif. C'est l'aire de MDCBNP.

Si $6 < x < 9$ (fig 3) il s'agit de l'aire du polygone non convexe MDCIPNBI qui n'est plus un hexagone. Si on veut garder la même formule, ($54 - x^2$), l'interprétation est plus délicate car le carré déborde du rectangle seulement sur un côté de sorte qu'on obtient un polygone dont une partie BIPN est à l'extérieur du rectangle (dont il faut compter l'aire négative) et une autre partie MDCI est encore à l'intérieur du rectangle (aire positive).

Par exemple pour $x = 7$ on trouve alors : $54 - 49 = 5$ comme $2 \times 6 - 1 \times 7 = 12 - 7 = 5$

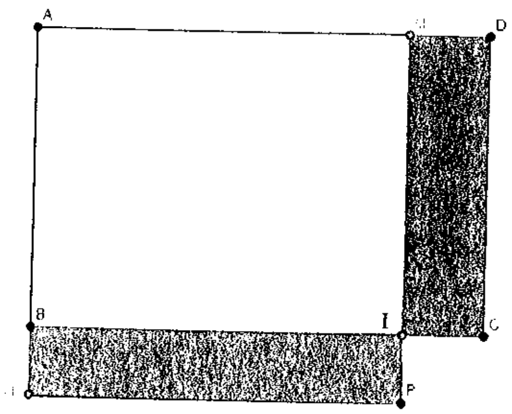


Figure 3

$6 < x < 9$

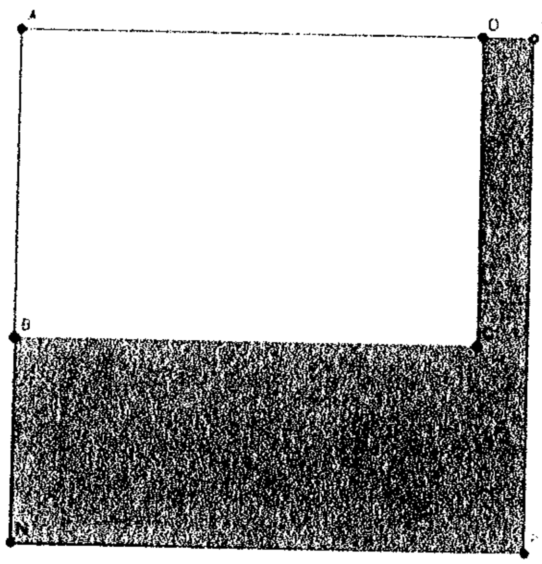


Figure 4

$x \geq 9$

Si $x \geq 9$ (*figure* 4) on retrouve l'hexagone MDCBNP tout entier à l'extérieur du rectangle et la formule $54 - x^2$ donne une aire négative.

Dans les trois cas, en décomposant l'aire cherchée en deux rectangles, le calcul conduit à :
MD × AB + AM × NB.
Ceci donne dans le premier cas ($0 \leq x \leq 6$) $\quad (9-x)6 + x(6-x) = 54 - x^2$.
La formule reste la même dans les deux derniers cas si on convient que la mesure de MB est toujours $9 - x$ et celle de ND est toujours $6 - x$ à condition de considérer des mesures algébriques *si* $6 < x < 9$ *ou* $x \geq 9$.

Ceci n'est pas la solution attendue des élèves pour les devoirs à la maison que nous proposons. Ils doivent savoir qu'une aire est une mesure positive.
Nous signalons cependant au professeur la cohérence de cette interprétation au cas où certains élèves argumenteraient dans ce sens.

Annexe au thème des rectangles de même périmètre ou des rectangles de même aire :
Un problème géométrique dans le plan

Ce problème concerne les classes de 3ème, de seconde ou de première.

Les élèves ont vu que, parmi tous les rectangles de même périmètre, c'est le carré qui a l'aire la plus grande, et ils ont vu peut-être aussi que parmi tous les rectangles de même aire, c'est le carré qui a le périmètre le plus petit. Donc pour enserrer une aire plane rectangulaire maximale avec le minimum de matériel, le plus avantageux est de fabriquer un carré avec une ficelle ou un fil de fer. De même, une « boîte » à base carrée fabriquée avec une bande de largeur constante, en carton ou en métal, aura un volume maximal pour une surface latérale donnée.

1- En abandonnant la contrainte du rectangle pour accepter n'importe quelle figure plane fermée, peut-on obtenir une aire plus grande que celle du carré ?

Les trois résultats généraux qui sous-tendent cette question sont les suivants :

a- Si deux polygones ont le même périmètre et le même nombre de côtés, celui qui a l'aire la plus grande est le polygone régulier.

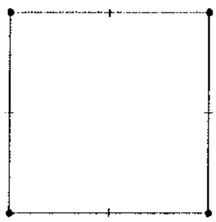
b- Si deux polygones réguliers ont le même périmètre, c'est celui qui a le plus grand nombre de côtés qui a l'aire la plus grande.

c- Pour un périmètre donné c'est le cercle qui a l'aire maximale (on peut le voir comme cas limite d'un polygone régulier ayant un nombre infini de côtés).

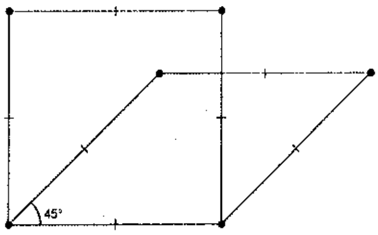
Ces résultats sont difficiles à démontrer dans toute leur généralité. Mais le professeur peut les faire approcher aux élèves avec des exemples adaptés à leur niveau, ce qui donne au passage l'occasion d'exercices simples, avec un entraînement au calcul plus motivé que les exercices gratuits qui se trouvent d'habitude dans les manuels.

Le carré

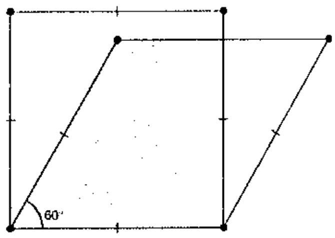
On a déjà l'exemple des rectangles. Un rectangle est un quadrilatère qui a tous ses angles égaux, mais pas nécessairement ses côtés de même mesure. Or parmi tous les rectangles de périmètre donné, c'est le carré, polygone régulier, qui a l'aire la plus grande. Envisageons maintenant les quadrilatères qui ont tous leurs côtés de même mesure mais pas nécessairement tous leurs angles égaux. Soit un carré et un losange de même périmètre. Ils ont des côtés de même mesure. Ont-ils la même aire[1] ?



Carré de côté 1



losange ayant un angle de 45°



losange ayant un angle de 60°

Comparons les aires d'un carré et celles de losanges de côté 1. Avec un angle de 45°, la hauteur est $\frac{\sqrt{2}}{2}$ donc l'aire est de $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Avec un angle de 60° la hauteur est $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et donc l'aire est de $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

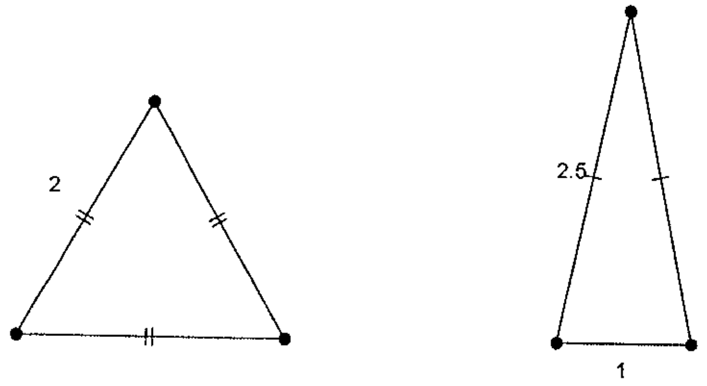
Quel que soit l'angle du losange, l'aire sera toujours inférieure à celle du carré car la hauteur du parallélogramme est inférieure au côté du carré.
On peut conjecturer alors que parmi tous les quadrilatères de même périmètre c'est le carré qui a l'aire la plus grande.

Le professeur peut inventer de nombreux exercices de comparaison d'aire entre des figures simples de même périmètre ou de comparaison de périmètres entre des figures de même aire.

[1] Ceci peut donner lieu à une séquence très intéressante en lycée au moment de l'introduction de la fonction sinus en utilisant un carré articulé (sur une idée d'Emma Castelnuovo). Cf. *Mathématique du collège au lycée*, Annie Berté, édition Nathan Pédagogie (1996).

Le triangle équilatéral

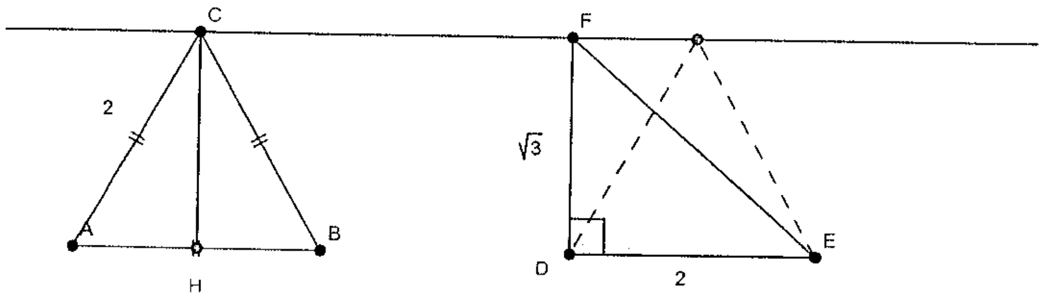
Exemple 1 : comparaison d'aires :



Un élève de collège peut comparer l'aire d'un triangle équilatéral de côté 2 (hauteur $\sqrt{3}$ et aire $\sqrt{3}$) avec celle d'un triangle isocèle de même périmètre dont la base mesure BC = 1 (fig1) . Il faut calculer AB = AC = 2,5. Puis il faut trouver sa hauteur AH = $\sqrt{6}$ puis trouver son aire $\frac{\sqrt{6}}{2}$ que l'on doit comparer à $\sqrt{3}$. Ceci revient à comparer $\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sqrt{3}$.

Or comme $\frac{\sqrt{2}}{2}$ <1, on en déduit que l'aire du triangle isocèle est inférieure à celle du triangle équilatéral.

Exemple 2 : comparaison de périmètres



Un élève de collège peut comparer le périmètre d'un triangle équilatéral ABC de côté 2 (hauteur $\sqrt{3}$ et aire $\sqrt{3}$) et celui d'un triangle rectangle DEF de même aire dont les côtés de l'angle droit sont de mesure DE = 2 et DF= $\sqrt{3}$.

Le périmètre du triangle équilatéral est 6, celui du triangle rectangle est $\sqrt{3} + \sqrt{7} + 2$.

Ceci revient à comparer $\sqrt{3} + \sqrt{7}$ avec 4. Or $\sqrt{3} > 1{,}7$ et $\sqrt{7} > 2{,}6$

donc $\sqrt{3} + \sqrt{7} > 4{,}3$.

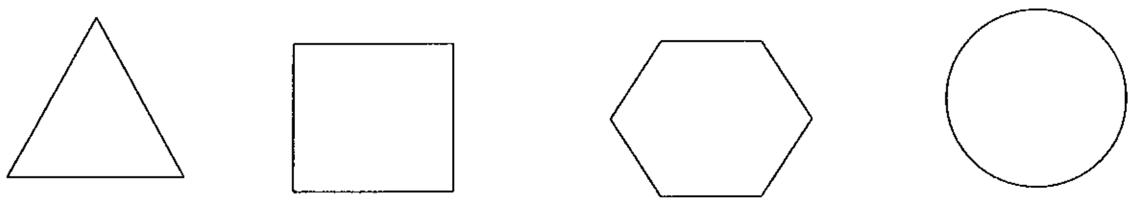
Le périmètre du triangle rectangle est donc plus grand que celui du triangle équilatéral.

Ceci amène à conjecturer que parmi tous les triangles de périmètre donné c'est le triangle équilatéral qui a l'aire maximale et pour une aire donnée il a le périmètre minimal. Il s'agit bien du polygone régulier de trois côtés.

L'hexagone

- Dès le collège, le professeur peut proposer aux élèves de comparer l'aire d'un triangle équilatéral, l'aire d'un carré, l'aire d'un hexagone régulier et l'aire d'un cercle, tous de même périmètre. Il est commode de prendre pour ce périmètre la valeur de 6 unités, et on peut comprendre que, l'unité étant quelconque, le résultat sera le même avec un périmètre quelconque comme 1 ou 6a.

Montrons que le cercle a l'aire la plus grande, puis vient l'hexagone, puis le carré, puis le triangle.



Ces quatre figures ont un périmètre de 6 unités. Quelle est leur aire ?

<u>Triangle équilatéral</u> : côté = 2, hauteur = $\sqrt{3}$, aire = $\sqrt{3}$

<u>Carré</u> : côté = $\frac{3}{2}$, aire = $\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$ or $\frac{9}{4} > 2 > \sqrt{3}$

Donc l'aire du carré est plus grande que l'aire du triangle équilatéral.

Hexagone : côté = 1 , aire = $6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ or $\frac{3}{2} \times \frac{3}{2} < \frac{3}{2} \times \sqrt{3}$ car $1{,}5 < \sqrt{3}$

Donc l'aire de l'hexagone est plus grande que celle du carré.

Cercle : rayon = $\frac{6}{2\pi} = \frac{3}{\pi}$, aire $\pi \times \left(\frac{3}{\pi}\right)^2 = \frac{9}{\pi} = 3 \times \frac{3}{\pi}$

Il s'agit de comparer $3 \times \frac{3}{\pi}$ et $3 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$ donc de comparer $\frac{3}{\pi}$ et $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Pour comparer ces deux nombres on peut comparer leurs produits par 2 π.

Il s'agit de comparer 6 (pour le cercle) et $\pi\sqrt{3}$ (pour le carré). Or $\pi < 3{,}2$ et $\sqrt{3} < 1{,}8$

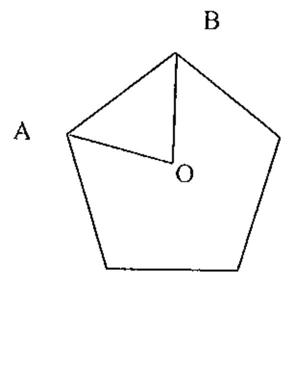
donc $\pi\sqrt{3} < 5{,}8$ donc $\pi\sqrt{3} < 6$.

L'aire du cercle est plus grande que celle du carré.

2- Nous avons comparé les aires du triangle équilatéral, du carré et de l'hexagone parce qu'il s'agit de trois polygones réguliers qui pavent le plan. Y en a-t-il d'autres ?

Ces polygones pavent le plan parce que la mesure de leur angle (60, 90 ou 120) est un diviseur de 360. Mais 360 a beaucoup d'autres diviseurs (2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 45, 72, 180). Comment s'assurer qu'il n'y a pas d'autres polygones réguliers qui pavent le plan ?

On a déjà envisagé les polygones ayant 3, 4 et 6 côtés. Il reste à étudier les angles pour 5 côtés et pour plus de 6 côtés.



On peut calculer directement l'angle du pentagone

Dans le triangle isocèle OAB, l'angle au sommet vaut

360° : 5 = 72° donc l'angle du polygone vaut 180°–72° = 108°

108 n'est pas un diviseur de 360.

Les élèves peuvent tracer trois pentagones avec un sommet commun et accolés par un côté.

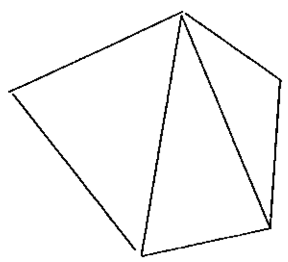
Il reste un petit angle vide de 360°– 3x108° = 360 – 324° = 36°

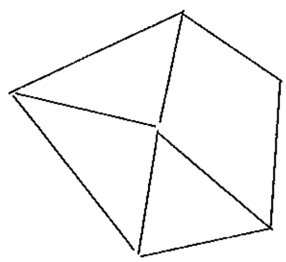
Les pentagones réguliers ne pavent pas le plan.

Si on imagine que le nombre de côtés augmente, on peut comprendre que l'angle au centre diminue et donc que la mesure de l'angle du polygone augmente. Ceci signifie que la mesure des angles des polygones de plus de 6 côtés est supérieure à 120°. Dans ce raisonnement il y a une fonction sous-jacente qui donne la mesure de l'angle d'un polygone régulier en fonction de son nombre n de côtés. En fait il s'agit d'une suite puisque le nombre de côtés est un entier. Trouver son expression est possible dès la $5^{ème}$ après la leçon sur la somme des angles du triangle lors d'une séquence intéressante qui donne aux élèves l'occasion d'effectuer une recherche[2].

Or le seul diviseur supérieur à 120° que l'on a trouvé est 180° qui ne convient pas pour l'angle d'un polygone. En conséquence il est certain que les seuls polygones réguliers qui pavent le plan sont ceux précédemment trouvés.

Le professeur demande aux élèves de trouver la somme des angles d'un quadrilatère convexe quelconque. Ils trouvent facilement en divisant le quadrilatère en deux triangles avec une diagonale. Certains tracent les deux diagonales ce qui peut les bloquer. Mais avec deux diagonales ils peuvent aussi compter 4 triangles et trouve 180 x 4 – 360 = 360.
Ensuite le professeur demande la somme des angles d'un pentagone convexe quelconque.
De la même façon que pour le quadrilatère, il y a deux méthodes selon que l'on trace trois triangles en partant d'un sommet ou cinq triangles en prenant un point quelconque à l'intérieur du polygone.





3 x 180 = 580 ou 5 x 180 – 360 = 580

[2] Cf. *Mathématique du collège au lycée*, Annie Berté, édition Nathan Pédagogie (1996), p. 68 et suivantes

Ensuite le professeur augmente brutalement le nombre de côtés, par exemple 20 côtés, de manière que le dessin soit presque impossible à réaliser. Les élèves doivent alors imaginer ce qui se passe, ce qui rend ensuite possible l'écriture de la formule donnant la somme des angles pour n côtés. Selon la méthode choisie on trouve $(n-2) \times 180$ ou $n \times 180 - 360$.
En $5^{\text{ème}}$, après l'apprentissage de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, s'assurer que les deux résultats sont les mêmes, est un problème qui intéresse les élèves.

On en déduit la formule qui donne l'angle d'un polygone régulier de n côtés dans lequel tous les angles ont même mesure:

$$\frac{n \times 180 - 360}{n} = 180 - \frac{360}{n}$$

Il est possible de trouver cette formule en se limitant au calcul dans un polygone régulier de n côtés selon la méthode que nous avons utilisée plus haut pour trouver l'angle du pentagone régulier. Il y a n triangles isocèles dont l'angle au sommet est $\frac{360}{n}$.

Donc l'angle du polygone est $180 - \frac{360}{n}$.

Cette fonction est croissante car si n augmente $\frac{360}{n}$ diminue et donc la différence augmente. L'angle d'un polygone régulier de plus de 6 côtés est nécessairement supérieur à 120°. D'autre part cet angle tend vers une limite quand n tend vers l'infini qui est 180°.

3- Ceci permet de comprendre la forme des alvéoles des abeilles qui obtiennent le plus de place possible avec le minimum de cire.

En effet pour construire leurs alvéoles, les abeilles se mettent côte à côte et tournent sur elles-mêmes en projetant de la cire uniformément autour d'elles. Elles fabriquent ainsi un réseau de cylindres accolés. Effectivement nous avons vu que pour un périmètre donné, c'est le cercle qui donne le maximum de place à l'intérieur. Cependant des cercles accolés ne pavent pas le plan.

Il y a deux façons de disposer des cercles dans le plan : soit dans un réseau à mailles carrées et alors chaque cercle se trouve à l'intérieur d'un carré, soit dans un réseau à mailles hexagonales et alors chaque cercle se trouve à l'intérieur d'un hexagone. C'est dans le deuxième cas où l'empilement est le plus dense (voir un entassement de bûches ou de bouteilles cylindriques par exemple). Ainsi les petits cylindres de cire fabriqués par les abeilles s'entassent et on obtient en surface un pavage par des hexagones. Tout cela est plus longuement développé dans l'ouvrage cité ci-dessus. Nous ne développerons pas davantage ici dans cette brochure concernant les fonctions.

A propos des situations ou exercices concernant la fonction polynôme de 2^{e} degré.

Vente de haricots, rectangles de même périmètre, problème de Diophante et rectangle dans le triangle.

1- Dans le problème de la vente de haricots, les élèves que nous avons observés ont utilisé trois variables différentes pour trouver une fonction qui modélise le problème.

- Méthode 1 : la variation autour du prix par kilo (celui donné par l'énoncé, soit 2,5 €)
- Méthode 2 et 4 : le prix d'un kilo
- Méthode 3 : la variation autour du nombre kilos vendus (celui donné par l'énoncé soit 50 kg)

Mais pour résoudre ce problème il existe d'autres variables. En fait il y en a beaucoup, notamment toutes les variations autour d'un prix particulier (variantes de la méthode 1). Il est certes naturel de prendre la variation autour du prix donné dans l'énoncé et du point connu (2,5 ; 50). Mais on pourrait prendre comme variable la variation autour d'un autre prix calculé à l'aide de celui-ci, en utilisant l'hypothèse fournie, ce qui conduirait peut-être à des calculs plus simples.

Par exemple, avec un raisonnement qui utilise la moyenne des deux extrêmes (selon l'idée soutenant la méthode 4 de nos élèves) on pourrait choisir comme variable la variation autour du « prix moyen ». Aucun élève n'y a pensé dans les solutions que nous avons. Les deux conditions de vente extrêmes qui donnent la recette nulle sont à 0€ le kilo et à 3€ le kilo et la variable serait la variation X (en plus ou en moins) autour de leur moyenne 1,5€.

Chaque fois qu'on diminue le prix au kilo de 1€ on augmente la vente de 100 kg donc pour 1,5€ on vend 150 kg de plus.

Le prix de vente au kilo s'écrit alors : $1,5 + X$.

Si on augmente le prix de X en euros on diminue la vente de 100 X en kilo. Donc la quantité vendue pour un prix de $(1,5 + X)$ est $(150 - 100X)$

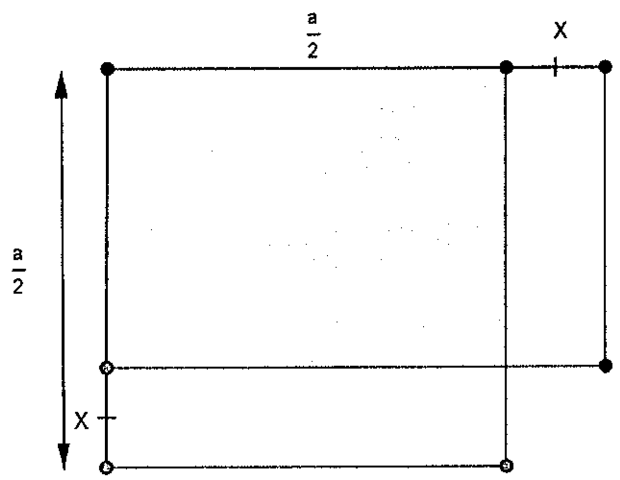
La fonction qui donne la recette est donc

$(1,5 + X)(150 - 100X) = 100(1,5 + X)(1,5 - X) = 225 - 100X^2$

Donc la recette maximum est 225€ quand $X = 0$

Ce serait la solution de l'élève qui aurait bien compris ce qu'est la fonction de second degré, la fonction de référence $X \mapsto a\,X^2$, la parabole qui la représente, les paraboles obtenues par translation parallèlement aux axes, leurs équations et leurs axes de symétrie, la fonction $X \mapsto a\,X^2 + b$, la forme canonique, etc.

2- Dans le problème des rectangles formés avec la ficelle de longueur $2a$, nous avons laissé nos élèves libres de prendre une variable « naturelle » : une des dimensions x du rectangle. Ceci nous a permis d'introduire deux fonctions : une dimension en fonction de l'autre (fonction de1[er] degré) et l'aire en fonction d'une dimension (fonction de 2[e] degré).
Une variable plus astucieuse pour les calculs aurait été la variation X d'une dimension à partir de la longueur $\frac{a}{2}$ du côté du carré.



Les dimensions du rectangle auraient été $\frac{a}{2} + X$ et $\frac{a}{2} - X$.

Son aire est alors : $(\frac{a}{2} + X)\,(\frac{a}{2} - X) = \frac{a^2}{4} - X^2$, de sorte que l'aire maximale est

$\frac{a^2}{4}$ pour $X = 0$.

3- Quand Diophante doit résoudre le problème :

Trouver deux nombres connaissant leur somme 20 *et leur produit P*, il va choisir directement la bonne inconnue (*arithme*) qui correspond à la variable quand la fonction est le produit.

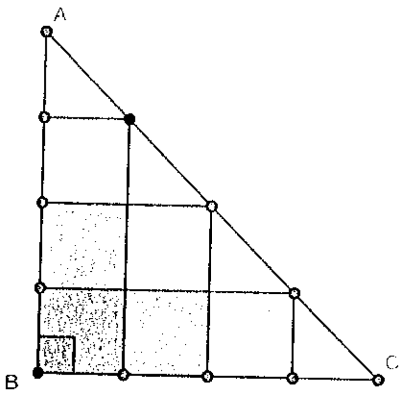
Au lieu de désigner par x un nombre et par $20 - x$ l'autre, il appelle X la demi -différence des deux nombres qui sont ainsi $10 + X$ et $10 - X$ et il obtient pour produit

$$(10 - X)(10 + X) = 100 - X^2 = P.$$

De sorte qu'il trouve facilement X pour n'importe quel produit.

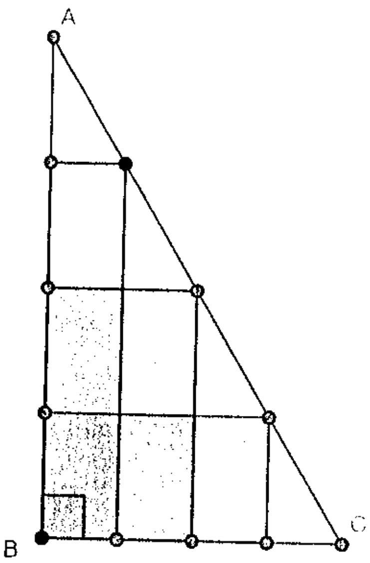
Pour une autre somme S, il suffira de changer le 10 en $\frac{S}{2}$.

4- En référence à la situation du « rectangle qui bouge dans le triangle » page 86 :



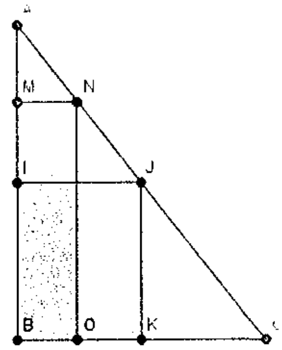
Si on prend un triangle rectangle ABC isocèle, le rectangle inscrit dans ce triangle aura son aire maximale pour le carré. En d'autres termes l'hypoténuse de ce triangle serait exactement le graphique de la fonction affine (une dimension en fonction de l'autre) du rectangle de périmètre constant.

Mais dans le problème posé dans nos classes, nous avons fait subir au triangle rectangle de départ une affinité.



Le triangle rectangle de départ a subi une affinité de base (AB), de direction δ perpendiculaire à (AB) et de rapport –.

On a : $BC = \frac{4}{5} AB$.



Mais le fond du problème est toujours du second degré.... Il y a toujours deux positions extrêmes pour M en A et en B qui annulent l'aire. AM varie entre 0 et 10. Donc comme plus haut, quand on a bien compris ce qui va arriver si le modèle est bien du second degré, on a intérêt à prendre pour variable une variation autour de la demi- somme qui est 5.

En d'autres termes soit I le milieu de [AB], J le milieu de [AC], K le milieu de [BC]. Le rectangle IJKB de 5 cm sur 4 cm va jouer le rôle du carré dans le rectangle de ficelle.

En fait le carré a subi la même affinité de rapport $\frac{4}{5}$ qui l'a transformé en rectangle.

On appelle X la mesure algébrique IM en orientant la droite (AB) de B vers A par exemple.

Si le côté du rectangle porté par [AB] a pour mesure 5 + X

le côté porté par [BC] a pour mesure $(4 - \frac{4}{5})X$. Pour le trouver il faut raisonner avec l'affinité, le théorème de Thalès, bref la proportionnalité !

Donc l'aire du rectangle qui bouge est donnée par : $(5 + X)\,(4 - \frac{4}{5}X) = \frac{4}{5}(5 + X)(5 - X)$

soit $\frac{4}{5}(25 - X^2) = 20 - \frac{4}{5}X^2$, ce qui donne immédiatement le maximum de l'aire.

La fonction de référence est toujours $X \mapsto a\,X^2 + b$ avec $a = +1$ ou $a = -1$.

5- Le problème des haricots verts à la différence du problème de rectangle de ficelle, du problème de Diophante, du problème du rectangle dans le triangle, n'est pas un problème qui se pose à propos de concepts abstraits (rectangles ou nombres) mais un problème sensé venir de la réalité.

Dans ce cas la réalité consisterait justement à faire des essais, comme les élèves, mais non dans un modèle déjà donné, plutôt *in vivo* si on peut dire. Le vendeur fixe un prix 2,5 € et note la vente : 50,1 kg et la recette, puis il fixe un autre prix 2 € et note la vente et la recette. Il fait ainsi 4 ou 5 mesures. Ensuite un simple tableau de correspondance va montrer au marchand de haricots à peu près quel est le meilleur prix et cela lui suffira. Mais pour un économiste qui veut mathématiser le phénomène pour fabriquer un modèle qui puisse resservir dans d'autres situations, cela ne suffit pas. Un bon moyen est de faire deux graphiques. Dans le premier nuage de points il verra à peu près une droite et dans le deuxième nuage à peu près un morceau de parabole. La cohérence entre les deux conjectures se fera par le calcul en prenant une variable, en supposant la première fonction affine et en calculant les deux équations. Il serait logique de supposer que dans la réalité on choisit la mesure jugée la plus exacte et pour variable la variation X autour de cette mesure.

BIBLIOGRAPHIE

ARTIGUE Michèle, *L'enseignement des fonctions*, exposé lors de la journée de l'IREM d'Aquitaine, avril 2010

BERTÉ Annie, *Mathématique dynamique* – Nathan –Pédagogie 1993

BERTÉ Annie, *Mathématique du collège au lycée* – Nathan –Pédagogie 1996

BROUSSEAU Guy , *Théorie des situations didactiques*. La Pensée sauvage-1998

CASTELNUOVO Emma, BARRA Mario, *Mathématiques dans la réalité*, CÉDIC, 1980, Edité auparavant sous le titre *Matematica nella realita*, Turin, 1976

COMMISSION INTER-IREM D'ÉPISTÉMOLOGIE ET D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES -*Histoire de problèmes, histoire des mathématiques* – Editions Ellipses-1993

DOUADY Régine, *Jeux de cadre et dialectique outil –objet,* Recherches en didactique des mathématiques , vol.7, n°2, Grenoble, 1986

IREM DE FRANCHE-COMTÉ, *Les fonctions en mathématiques et en Sciences physiques*, 2009

IREM DE POITIERS : *Organiser l'enseignement autour de PER en classe de seconde. L'exemple des fonctions* - Travaux dans le cadre de la Recherche AMPÈRES (Commission inter-IREM de didactique et INRP) durant les années 2005 à 2010

GROUPE DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES AU COLLÈGE, IREM D'AQUITAINE
- *Des « activités » aux situations d'enseignement* – IREM –Université de Bordeaux 1 –2002
- *Entrées dans l'algèbre en 6ème et 5ème* – IREM- Université de Bordeaux 1- 2007
- *Algèbre 4ème, un enchaînement de situations d'enseignement*- IREM-Université de Bordeaux 1-2009

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE- *Algèbre et fonctions,* notamment III- *l'entrée dans la pensée fonctionnelle au lycée*- DESCO- Groupement national d'équipes de recherches en Didactique des mathématiques, 1997