PRÉFACE

Cette nouvelle brochure de l'IREM de Bordeaux qui concerne l'enseignement de l'algèbre en classe de quatrième fait suite, comme les auteurs le rappellent dans l'introduction, à une brochure qui visait l'entrée dans le monde algébrique, en sixième et cinquième.

Elle est organisée en six thèmes respectivement intitulés : une première entrée dans l'algèbre, les nombres relatifs, équations du premier degré, opposé d'un produit et d'une somme, la double distributivité ou produit de deux sommes, les puissances, et complétée par une longue annexe qui reprend les méthodes de fausse position qui comme chacun sait permettent de résoudre les problèmes mathématisables par une équation du premier degré en se situant dans une démarche de nature arithmétique. Cette succession de thèmes correspond à la volonté des auteurs d'étaler l'enseignement de l'algèbre sur l'ensemble de l'année, de ne pas enfermer l'algèbre dans la seule résolution d'équations et la lettre dans le seul statut d'inconnue, de faire ressentir aux élèves la fonctionnalité du calcul algébrique comme outil de résolution de problèmes et outil de preuve pour motiver l'étude des notions et techniques qui conditionnent son efficacité. Pour chaque thème, les objectifs sont clairement définis, une suite de situations est proposée et des prolongements possibles envisagés. Les principaux choix effectués dans la mise au point progressive de ces situations sont explicités et justifiés en prenant en compte les savoirs en jeu et les comportements observés des élèves.

La littérature existante dans ce domaine, même si l'on se limite aux productions des IREM, est déjà très riche : brochures IREM, brochures inter-IREM publiées par la commission inter-IREM premier cycle, articles dans les revues Repères IREM et Petit x, actes de colloques. Quand on ouvre cette brochure, on essaie donc de situer ce qui nous est offert par rapport à ces références, et bien sûr aussi, pour la didacticienne que je suis, de situer ce qui est dit et proposé par rapport à l'état actuel des connaissances didactiques dans le domaine en se référant par exemple à la synthèse que constitue l'ouvrage « The future of the teaching and learning of algebra » publié en 2004, résultant de l'étude réalisée sur ce thème par la Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique » ou aux deux chapitres écrits par David Carraher et Annalucia Schliemann d'une part, Carolyn Kieran d'autre part pour le Second International Handbook on Mathematics Teaching and Learning publié en 2007 par le National Council of Teachers of Mathematics aux USA.

En lisant l'introduction, j'ai retrouvé ainsi des catégories de difficultés qui m'étaient familières depuis que j'avais encadré au début des années 90 la thèse de Brigitte Grugeon qui reste un travail de référence dans le domaine, par exemple les différents statuts des lettres, la distinction entre dimension procédurale et structurale des expressions algébriques, l'opposition entre résolution arithmétique et algébrique des équations, tout comme l'importance à accorder vu leur dimension pré-algébrique aux calculs numériques en ligne. J'ai d'ailleurs regretté, s'agissant d'une brochure IREM, que les idées développées dans cette introduction le soient en référence à la seule expérience des auteurs alors qu'elles ont aujourd'hui la légitimité que leur assure un ensemble de travaux tant français qu'étrangers, et que les connaissances didactiques actuelles permettent d'une part de les relier entre elles au sein d'un paysage plus global, d'autre part de faire la différence entre ce qui relève de difficultés qui semblent traverser les cultures et de difficultés qui semblent davantage liées aux choix de tel ou tel système éducatif.

J'ai poursuivi ma lecture, suivant la progression proposée au fil des thèmes. Beaucoup des types de tâches proposés ne m'étaient pas inconnus : l'exploitation de programmes de calcul qui était déjà présente dans la brochure inter-IREM « Des chiffres et des lettres » et a fait depuis l'objet de nombreux travaux de recherche, l'articulation du travail géométrique et algébrique via les calculs d'aires et les décompositions, recompositions que ces calculs permettent qui a fait l'objet de diverses publications, les multiples possibilités offertes par les pyramides pour construire des problèmes « connectés » ou « déconnectés », c'est-à-dire susceptibles ou non d'une résolution suivant le patron analyse-synthèse, les équilibres de balances dont les potentialités et limites pour le travail algébrique ont fait l'objet de multiples recherches…

Mais ce que j'ai trouvé dans cette brochure et ce que j'ai beaucoup apprécié, c'est une organisation de ces différents types de tâches au sein d'une progression dont la cohérence est évidente, un choix que l'on devine progressivement optimisé au fil des expérimentations des variables didactiques définissant les tâches précises proposées aux élèves à l'intérieur d'un type donné, et une évolution soigneusement pensée de ces variables au fil des tâches d'un même type. C'est aussi la capacité des auteurs à communiquer ces choix, leurs raisons, leurs effets possibles de façon claire et synthétique, dans un langage très accessible, qui fait qu'en moins de 80 pages, l'enseignant qui souhaite exploiter ce travail a entre les mains un ensemble cohérent et riche, des pistes pour des prolongements possibles et un accès aux ressorts didactiques des situations proposées qui devrait lui permettre de penser les adaptations nécessaires à son propre contexte. J'ai aussi apprécié l'effort qui est fait pour que les règles algébriques introduites apparaissent comme non arbitraires, en faisant jouer selon les cas divers ressorts mais sans écarter les besoins de cohérence formelle quand ce sont eux qui sont épistémologiquement fondamentaux. Faire adhérer les élèves de collège à un tel travail n'est sans doute pas évident mais c'est indispensable si l'on veut les faire accéder au monde de l'algèbre.

Bien sûr, ce qui nous est proposé dans cette brochure porte très fortement la marque de ce que vise essentiellement l'enseignement de l'algèbre traditionnellement en France en quatrième : les opérations sur les nombres négatifs, la mise en place du calcul littéral, la résolution des équations du premier degré. Dans d'autres organisations curriculaires, on trouve un accent plus marqué que dans les programmes français sur un travail de modélisation algébrique conduisant à des fonctions et non seulement à des équations, une interaction plus importante entre registre symbolique algébrique et registre graphique, associée souvent à une prise en compte d'outils de calcul : calculatrices graphiques voire symboliques, tableurs. Une brochure qui serait produite pour le même niveau d'enseignement y serait sans doute sensiblement différente. Mais ceci n'enlève rien bien sûr aux qualités de ce travail.

Sur le plan des organisations didactiques, il y a me semble-t-il dans ce qui nous est proposé le souci de parvenir à un partage des responsabilités mathématiques raisonnable et réaliste entre l'enseignant(e) et ses élèves. Les situations sont pensées et calibrées pour qu'un travail mathématique conséquent soit à la portée des élèves mais on sent bien que l'enseignant a aussi un rôle clef à jouer pour faire avancer l'étude et progresser la connaissance au sein de la classe. Et les auteurs fournissent de nombreux éléments pour penser ce rôle de façon efficace, tout en préservant la responsabilité mathématique des élèves.

En résumé, on l'aura compris, cette nouvelle brochure me semble une ressource de qualité, nourrie par un travail de terrain intelligent et approfondi. Elle devrait être facilement exploitable par les enseignants de collège et j'espère qu'elle diffusera au-delà de la seule communauté IREM.

Michèle ARTIGUE

Professeur à l'Université Paris Diderot Paris 7

Références citées :

Carraher D.W., Schliemann A.D. (2007). Early Algebra. In F. Lester (ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning,* pp. 707 -762. Information Age Publishing, Inc., Greenwich, Connecticut.

Kieran C. (2007). Learning and Teaching of Algebra at the Middle School through College Levels: Building Meaning for Symbols and their Manipulation. In F. Lester (ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning,* pp. 763-803. Information Age Publishing, Inc., Greenwich, Connecticut.

Stacey K., Chick H., Kendal M. (Eds.) (2004). *The future of the Teaching and Learning of Algebra. The 12th ICMI Study.* Kluwer Academic Publishers.

Grugeon B. (1995). *La transition entre enseignement professionnel et enseignement général : le cas de l'algèbre élémentaire*. Thèse de doctorat. Université Paris 7.

Sommaire

Introduction

Dans cette brochure, le professeur de 4ème trouvera des propositions de séquences pour ses leçons d'algèbre.

Il ne s'agit pas de proposer un cours magistral, mais plutôt des situations d'enseignement plusieurs fois expérimentées et observées dans différentes classes aussi bien dans de « bons » collèges que dans des collèges difficiles, aussi bien dans des classes urbaines que rurales.

Ces situations doivent permettre au professeur de :
- transmettre un problème aux élèves de façon à ce qu'ils trouvent quelque intérêt à y entrer.
- amener les élèves à être mathématiquement actifs, c'est à dire à proposer des solutions ou du moins énoncer des pistes et des questions, de manière à s'approprier un savoir qui deviendra ainsi disponible pour être réutilisé ensuite.

Nous laissons le temps aux élèves de **répondre aux questions par écrit**, tout en passant dans les rangs pour observer leur travail, en donnant quelques encouragements individuels si nécessaires. Ensuite la mise en commun organisée par le professeur est beaucoup plus riche qu'un simple échange oral qui aurait eu lieu, dès la question posée, entre le professeur et quelques « bons » élèves, toujours les mêmes.

Dans notre brochure, les choix pédagogiques sont analysés avec les alternatives possibles, les réactions des élèves sont notées pour que le professeur ne soit pas inquiet et puisse, sans trop d'appréhension, leur donner assez de temps et de liberté pour s'exprimer par écrit et oralement. Ainsi les pistes suggérées par les élèves pourront être valorisées autant qu'elles le méritent par l'enseignant parce qu'il ne sera pas surpris par des idées parfois aussi inattendues qu'intéressantes. Cette façon d'enseigner change progressivement la relation entre les élèves et le professeur. Ils se sentent davantage en confiance car le professeur arrive à tirer partie de leur réponse, voire de certaines erreurs. Ils s'expriment alors sans peur de se tromper.

C'est de cette façon que nous avons travaillé pour écrire nos brochures antérieures. Celle-ci est écrite avec la même exigence pour aider les enseignants. Les grands points du programme sont abordés, mais il reste au professeur toute latitude pour ajouter de nombreuses séquences, exercices et problèmes. Il ne s'agit donc pas d'un « prêt à porter » pédagogique, qu'il suffit au professeur de lire très vite avant d'entrer en classe. C'est bien plus et bien moins que cela ! ... C'est autre chose !

Les professeurs disent souvent que les élèves de 4ème ont beaucoup de difficultés en algèbre et qu'elles se prolongent jusqu'au lycée.
Pourtant le programme de 4ème se résume assez vite dans ses grandes lignes : multiplication des relatifs, double distributivité, équations de premier degré. Pourquoi ces difficultés ?

Une première cause des difficultés provient de la multiplication des relatifs.
Quelques temps après l'avoir appris, les élèves se mettent petit à petit à la confondre avec l'addition, du moins pour déterminer le signe du résultat de l'opération. Nous explicitons dans cette brochure comment le professeur peut faire participer les élèves à la démonstration de la règle des signes pour la multiplication : mise en scène de la question, conjecture, démonstration. Les discussions que la situation ainsi conçue peut amener en classe et le « choc » que procure la démonstration, sont les meilleurs garants de la mémorisation de la « règle ». Ceci ne veut pas dire que tous les problèmes du calcul avec les relatifs sont résolus. Ce que nous affirmons en revanche, c'est que durant la leçon ainsi conçue, il n'y a pas un professeur seul au tableau qui

produit une démonstration devant des élèves occupés à s'agiter pour autre chose, ou à l'opposé tout à fait endormis. Il n'y a pas non plus un professeur découragé par l'expérience ci-dessus qui demande aux élèves d'admettre par exemple que le produit de deux nombres négatifs est positif. Même si le professeur a fait énoncer par les élèves une conjecture sur le signe de ce produit avant de donner la réponse, même si la classe a constaté que deux avis étaient *a priori* possible, le résultat admis ne s'inscrit pas dans la mémoire de nombreux élèves parce qu'il apparaît comme arbitraire. Avec l'organisation de la séquence telle que nous la décrivons, le professeur et les élèves vont avoir la satisfaction d'avoir prouvé une conjecture par un raisonnement qui les a convaincus.

D'autres causes très importantes des difficultés pour l'algèbre en 4ème proviennent du calcul littéral, s'il n'a pas été préparé dans les classes antérieures.

C'était certainement le cas autrefois, mais aujourd'hui les nouveaux programmes demandent d'introduire l'usage des lettres en mathématiques dès la 6ème . Néanmoins pour beaucoup d'élèves il nous semble que la familiarisation avec cet usage n'a pas été suffisante. Le professeur de 4ème doit prendre conscience de ce problème préalable pour réussir son enseignement en algèbre.

L'enseignant qui va se baser sur notre brochure pour la 4ème ne devra pas hésiter à rajouter quelques séquences pour entraîner ses élèves à l'usage des lettres. En effet la progression que nous proposons ici est la suite d'une progression en algèbre que nous avons suivie en 6ème puis en 5ème. Il pourra trouver dans notre brochure « Entrées dans l'algèbre en 6ème et 5ème » quelques séquences que nous avons prévues pour ces deux classes mais qui peuvent ëtre utilisées aussi en 4ème.

Dans ce qui suit nous en donnons quelques exemples mais de façon très résumée.
Nous introduisons l'usage des lettres dès la 6ème. Dans cette classe, une de nos situations consiste en la recherche par les élèves de différentes écritures du périmètre de certaines figures. Le « jeu » consiste à en trouver un grand nombre. Par exemple on donne un carré dont le côté a pour longueur a et les élèves doivent trouver différentes écritures du périmètre.
Ils trouvent :
$a + a + a + a$, $4 \times a$, $(2 \times a) + (2 \times a)$, $(a \times 2) \times 2$
et quand ils oublient la figure et commencent à jouer avec les écritures :
$(a \times 4) \times 1$ $(a \times 3) + a$
ou même encore plus loin de la figure :
$5 \times a - a$ $(a \times 8): 2$ $(a : 2) \times 8$

Il n'est pas inutile en 6ème de se persuader que toutes ces écritures se ramènent bien aux deux réponses « classiques » égales par définition de la multiplication $a + a + a + a = 4 \times a$.
Par exemple, on peut remplacer $(2 \times a)$ par $a + a$.

Le signe d'égalité arrive ainsi entre différentes expressions littérales. Cet exercice pratiqué dès la 6ème permet de ne plus hésiter en 4ème, surtout quand le signe $\times$ sera omis dans une écriture comme $2\ a$. Il n'est pas non plus inutile d'avoir introduit en 6ème le facteur 1 dans un produit car il est bien pratique de savoir le faire ensuite pour les factorisations.
En 5ème un exercice du même genre pourra être repris avec la distributivité qui permettra de passer de $(a \times 3) + a$ à $a \times 4$ par la mise en facteur $a\ (3 + 1) = a \times 4$.

En $5^{ème}$ encore, on pourra discuter de la nécessité des parenthèses dans certaines écritures, ou de ce qui se passe quand les parenthèses changent de place. Les priorités opératoires sont au programme. Le professeur pourra demander de classer les expressions trouvées selon leur structure : somme, différence, produit, quotient.
Ces prolongements montrent que ce travail sera bienvenu en $4^{ème}$ s'il n'a jamais été fait avant, éventuellement à propos d'une figure plus élaborée qu'un carré.

Le travail que nous avons fait pour les classes de $6^{ème}$ et $5^{ème}$ a attiré notre attention sur le fait que les difficultés des élèves, quand elles sont résistantes, se révèlent en rapport avec la nature même de l'algèbre, ses outils et ses techniques propres.
Ceci nous a permis de déterminer, en relation avec les programmes, les contenus de nos séquences. Cette prise de conscience a continué à nous guider pour notre brochure de $4^{ème}$.
Il s'agit des points suivants :

1- Un élève aura beaucoup de mal à réussir en algèbre s'il n'a pas appris à écrire un calcul en une seule ligne.

Nous avons vu cette difficulté dans les premières séances de $6^{ème}$. Nous voulions faire apparaître les lettres en faisant établir une formule par les élèves. Pour ce faire, nous avons expérimenté la situation suivante :

Le professeur demande à 4 élèves de venir au tableau et de se serrer la main comme s'ils se rencontraient le matin. Il demande ensuite à la classe combien de poignées de main ont été échangées. Les élèves se mettent vite d'accord pour répondre qu'il y en a eu 6. Le professeur demande alors : « Et si les 628 élèves du collège se saluaient le matin, combien de poignées de mains échangeraient-ils ? »
Les élèves cherchent par groupes de deux. Ils essaient d'abord avec de petits nombres, et ainsi certains trouvent une idée générale. Par exemple cherchons pour 5 personnes : chaque personne ne se salue pas elle-même, donc on multiplie 5 par 4, ce faisant on a compté deux fois chaque poignée de main, donc on divise ensuite par 2. D'autres élèves arrivent au même résultat en partant sur d'autres pistes que nous ne développerons pas ici, mais une grande partie arrive bien à une phrase et non à une formule pour transmettre le programme au cas où le nombre de personnes changerait : on prend le nombre, on le multiplie par le nombre juste avant et on divise par 2.
Si les élèves en restent à : $628 \times 627 = 393\ 756$ puis $393\ 756 \div 2 = 196\ 878$
sans savoir passer à $(628 \times 627) / 2$
ils n'ont aucune chance d'arriver à écrire la formule générale avec n personnes car les deux opérations doivent s'écrire sur une seule ligne $[n(n-1)]/2$ [1].

S'exercer dès la classe de $6^{ème}$ à écrire un calcul en une seule ligne dans le cadre numérique, puis dans le cadre littéral est donc très important.
Dans le premier thème de cette brochure on demande aux élèves d'écrire un programme de calcul en une seule ligne, dans lequel intervient un nombre x variable. Si les élèves de $4^{ème}$ n'ont jamais fait cela avant, ce sera une première séquence un peu difficile pour eux. Le professeur ne doit pas y renoncer pour autant car c'est un exercice fondamental. En revanche il peut faire avant avec ses élèves des exercices d'écriture de calcul en ligne.

2- Le statut des lettres changeant au cours d'un calcul est parfois un obstacle pour les élèves.

[1] Pour plus de détails sur cette situation, consulter notre brochure : « Entrées dans l'algèbre en $6^{ème}$ et $5^{ème}$ » Groupe Didactique des mathématiques au collège- IREM de Bordeaux

Dans les formules que les élèves connaissent depuis l'école élémentaire, les lettres fonctionnent pour eux comme des abréviations : L est la longueur du rectangle, l la largeur
Dans la formule recherchée ci-dessus, pour la situation des poignées de main, au départ la lettre *n* est une simple abréviation de « nombre de personnes ». Si ce nombre varie pour que l'élève utilise la formule plusieurs fois, la lettre prend progressivement le statut de variable. Ce statut une fois installé, il est difficile pour un élève de le changer. Si on demande aux élèves de la 5ème à la 3ème de trouver, après avoir obtenu la formule, le nombre de personnes quand 55 poignées de mains ont été échangées, rares sont ceux qui posent l'équation et raisonnent à partir de la structure du premier membre comme produit de deux entiers consécutifs. S'ils se servent de la formule, c'est au mieux en faisant des essais. Ils remplacent *n* par 10 par exemple et vérifient que la valeur trouvée est trop petite. En faisant l'hypothèse de la croissance de la fonction, ils augmentent la valeur de *n*. Nous avons observé que ceci se reproduisait pour d'autres programmes de calcul. On a une fonction, on a calculé de nombreuses images à partir de l'antécédent. On donne maintenant l'image et on demande de calculer l'antécédent. Même si cela conduit à une équation très simple pour des élèves de 4ème, beaucoup procèdent par la méthode des essais.

Lors de la résolution d'une équation comme par exemple $5(x + 1) = 2x$, on est amené à transformer $5(x + 1)$ en $5x + 5$. Ceci repose sur une égalité implicite : $5(x + 1) = 5x + 5$ qui est une identité dans laquelle la lettre n'a plus le statut d'inconnue mais celui d'indéterminée. Ce jeu subtil et implicite est difficile pour les élèves. Il n'est pas nécessaire de leur communiquer tous ces différents statuts des lettres, mais le professeur doit en avoir conscience pour concevoir la progression de l'apprentissage.

Dans d'autres exercices la lettre sert à établir une conjecture. Une des forces de l'algèbre est aussi de permettre de faire des démonstrations, et dans ce cas on démarre avec une lettre qui a le statut de nombre généralisé. Le professeur pourra retrouver tout cela dans cette brochure.

3- <u>L'utilisation du signe « = » pose toujours problème.</u>
Nous y avons déjà travaillé en 6ème et 5ème. Nous y revenons moins dans notre brochure de 4ème, mais il est certain que si ce travail n'a pas été fait, les élèves débutants de 4ème peuvent rester à un fonctionnement du signe « = » de niveau trop élémentaire qui risque de faire obstacle à leur réussite en algèbre.

4- <u>L'algèbre intervient dans deux domaines : les procédures et les structures</u>

a- *La formule (et plus largement ce qui a trait aux fonctions) est dans le domaine de la procédure*.
Si la procédure n'est pas très compliquée elle se traduit très bien dans le langage courant, comme nous l'avons vu dans notre exemple des poignées de mains. Nécessairement pour des débutants on se place au niveau de procédures peu compliquées. Se pose alors la question de l'utilité des lettres.
Dans une situation de communication en 5ème nous donnons un programme de calcul écrit en français aux émetteurs qui doivent le transmettre sans utiliser des mots. Le récepteur doit reconstituer le texte initial en français. Le programme est par exemple:
Ajouter 4 à un nombre. Multiplier le résultat obtenu par 5. Enlever 12.
Le message attendu est $(x + 4) \times 5 - 12$
Mais dans leur grande majorité les élèves de 5ème n'utilisent pas spontanément une lettre pour transmettre un tel programme et bien sûr ne l'écrivent pas sur une seule ligne.
Au mieux ils inventent plusieurs signes et transmettent par exemple :
$? + 4 = !$ $\quad ! \times 5 = *$ $\quad * - 12$
Parfois le premier signe est remplacé par un nombre particulier, ou par une liste de nombres.

Nous demandons à nos élèves de diminuer le nombre de signes pour transmettre la procédure.
Imposer cette économie amène :
- l'emploi d'un signe pour désigner le nombre quelconque (le professeur privilégie les lettres dans les suggestions des élèves)
- l'écriture du calcul en une seule ligne.

Il n'y a pas de raison que les élèves de début de 4ème manipulent plus facilement les lettres que les 5ème s'ils n'ont pas été habitués auparavant par exemple à écrire un programme en une seule ligne.

b - *Il est nécessaire de faire travailler les élèves sur les structures, dans les deux sens du terme :*

- La connaissance insuffisante de la structure des ensembles de nombres (relatifs, rationnels) est un obstacle pour l'algèbre.
- Les structures des expressions algébriques doivent être reconnues rapidement : somme, différence, produit, quotient.

C'est une source de difficulté car c'est la dernière opération qui est faite dans la procédure de calcul (et non la première) qui donne la structure.
Par exemple, pour calculer $2 \times 3 + 4$, on commence par effectuer la multiplication (procédure) mais cette expression est une somme (structure).

En 5ème on travaille les deux sens du mot « structure » lors de la séquence sur l'enseignement de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, propriété essentielle des ensembles de nombres. Dans cette séquence les élèves se rendent compte qu'ils n'arrivent pas, ou du moins très mal, à traduire cette propriété avec le langage courant. C'est là que les lettres sont bien utiles pour dire comment transformer un produit en somme et inversement.

5- <u>La mise en équation d'un problème est un obstacle important pour nos élèves.</u>
Dans le thème sur les équations de cette brochure, le lecteur retrouvera un certain nombre des points précédents.
Un des obstacles de la mise en équation pour les élèves vient du fait qu'ils ne savent pas écrire un calcul en une seule ligne.
Un deuxième obstacle de la séquence sur les équations vient du fait que les élèves essaient de trouver des stratégies pour éviter de manipuler les lettres.
Deux grandes catégories de procédures d'évitement existent.
- Si le problème posé se résout avec une équation de la forme $a\,x + b = c$, les élèves peuvent interpréter le premier membre (écrit ou non) comme un programme de calcul (multiplier par a et ajouter b). A partir du résultat c, il suffit donc de « remonter » les transformations dans l'ordre contraire. On retranche b puis on divise par a.
- Une autre possibilité est de procéder par essais et erreurs. On trouve dans les productions des élèves des raisonnements arithmétiques qui se rapprochent de la méthode connue sous le nom de « fausse position ». Les élèves introduisent implicitement la notion de variable et de fonction, au lieu de celle d'inconnue sur laquelle le professeur voudrait qu'ils travaillent.

Ceci nous amène à dire que dans nos brochures sur l'algèbre de la 6ème à la 4ème, nous n'avons pas abordé la notion de fonction, même si un programme de calcul en est une première approche. Le professeur peut introduire la notion de fonction et s'en servir. Nous avons le projet de traiter des fonctions du collège jusqu'au lycée dans une prochaine brochure.

Toutes les difficultés ne seront pas résolues avec l'utilisation de cette brochure :

Du côté du professeur :

Le professeur ne pourra s'approprier notre travail que progressivement et se posera peut-être des questions dont il aura la réponse en observant ce qui se passe dans sa classe. Il pourra commencer en expérimentant seulement quelques séquences. Il pourra au cours du temps améliorer son expérimentation, mieux comprendre les observations que nous décrivons et utiliser ainsi ce travail de façon optimale.
Nous n'avons pas rédigé dans cette brochure un thème concernant les calculs avec les nombres en écriture fractionnaire et un autre sur la notion d'inégalité. Nous y avons cependant réfléchi et nous sommes encore dans une phase d'expérimentation dans nos classes. Ce sera sans doute l'objet d'une prochaine parution ou tout au moins d'un article.

Du côté des élèves :
Il n'y a pas forcément d'effet immédiat sur les résultats en mathématiques pour quelques élèves, car il est très difficile de combler des lacunes anciennes, même s'ils se sont investis dans la participation en classe.
La façon de travailler proposée dans cette brochure n'est pas classique et surprend les élèves, il faut parfois un trimestre avant d'en voir les effets bénéfiques.
Pour les deux raisons précédentes, le professeur devra sans doute introduire des situations qui auraient pu venir dans les classes antérieures, soit pour des séances de remise à niveau, soit même pour des séances en classe entière. Une même situation prendra sans doute moins de temps en $4^{\text{ème}}$ qu'en $5^{\text{ème}}$ car les élèves travailleront plus vite, mais si elle est porteuse de sens, elle est rarement une perte de temps, même pour ceux qui ont « compris ». Elle leur permet parfois de voir un autre aspect de la question qui leur avait échappé.

Bien évidemment nous ne prétendons pas que nos situations sont une panacée ! Comme chacun le sait, l'enseignement est une longue patience, et chaque élève est différent de son voisin ! !

Quelques informations pour une meilleure lecture …

Nous avons mis en italique toutes les remarques sur les objectifs, le déroulement, les divers prolongements des situations présentées.

Les consignes à donner aux élèves sont encadrées, par exemple :

Etape 2 :
Compléter les égalités suivantes avec une valeur exacte :

(-3)× ….= (-36)   ….×4= (-12)   (-2) × ….= 18   …...×5 = (-16)   (- 10) .× ….. = 3

(-0,2) × ….= (-7)   3.× …. = (-4)   (-6) × ….= 11   (-9) × ….= (-7)

Nous avons distingué deux types de bilans :

- ceux que nous avons appelés « A retenir », qui sont à écrire dans le cahier de cours et doivent être appris par les élèves.

Ils sont écrits dans une police différente du reste de la brochure, par exemple :

***A Retenir :* Pour diviser deux nombres relatifs, on divise les parties numériques et la règle des signes est la même que pour la multiplication.**
Exemples : (- 36) ÷ (- 3) = 12 et 18 ÷ (-2) = 9
$\frac{-4}{3}$ *est le quotient de (-4) par 3*

- ceux que nous avons simplement appelé « bilan de l'étape … » qui sont en fait souvent des conclusions intermédiaires, par exemple :

Bilan : Pour montrer qu'une égalité est vraie pour n'importe quel nombre, on désigne le nombre quelconque par une lettre et on transforme les expressions obtenues en utilisant les règles de calcul, par exemple la distributivité.

Progression

- Thème 1 : Une première entrée dans l'algèbre
- Thème 2 : Les nombres relatifs
- Thème 3 : Equations du premier degré
- Thème 4 : Opposé d'un produit, d'une somme
- Thème 5 : La double distributivité
- Thème 6 : Les puissances

Pourquoi avons-nous choisi cette progression ?
Il est inhabituel de commencer la classe de 4$^{\text{ème}}$ par un chapitre sur l'algèbre. Pour nous, c'est la suite logique du travail que nous avons entrepris en 6$^{\text{ème}}$ et 5$^{\text{ème}}$ et il est important de mettre les élèves qui viennent de classes différentes à un même niveau de connaissances. D'autre part, plus nous aborderons le calcul littéral sur toute l'année, plus nos élèves y seront familiarisés. Dans ce thème 1 nous travaillons la lettre surtout en tant qu'indéterminée (pour prouver des conjectures) et un peu en tant que variable (dans des équations du type : $ax+b=c$). Nous prouvons des égalités entre expressions littérales en utilisant les propriétés des opérations vues dans les classes précédentes : la commutativité et l'associativité de l'addition et de la multiplication, et la **distributivité.** Nous revoyons cette notion dans le thème 1 car elle doit être disponible pour prouver les règles des signes de la multiplication des relatifs dans le thème 2.

Dans le thème 2, nous mettons en place les règles de la multiplication et de la division des relatifs et nous continuons à travailler avec les lettres ; elles interviennent dans des programmes de calculs ou dans des expressions littérales. La lettre peut alors représenter un nombre relatif, nouveauté de la classe de 4$^{\text{ème}}$ (x peut désigner un nombre négatif, $-x$ désigne alors un nombre positif, c'est un enjeu important pour les classes suivantes).

Le thème 3 aborde le statut de la lettre en tant qu'inconnue et nous utilisons des problèmes pour lesquels l'utilisation de la lettre est quasiment indispensable, elle apparaît en tous les cas comme un outil qui facilite la résolution du problème. Les équations sont dans ce thème du type : $ax+b=cx+d$.

Après les thèmes 1,2 et 3 la lettre est apparue comme indispensable pour prouver un résultat, pour résoudre des problèmes. L'utilité des thèmes 4 et 5, où l'on fait surtout du calcul littéral, n'est donc pas remise en cause par les élèves. Il nous semble que traiter ces notions dans un seul chapitre en milieu ou en fin de 4$^{\text{ème}}$ est particulièrement indigeste pour les élèves. Dans ces thèmes 4 et 5 nous lions les notions algébriques au cadre géométrique (longueurs, périmètres, aires, volumes, angles) comme nous l'avons fait en 6$^{\text{ème}}$ et en 5$^{\text{ème}}$.

Le thème 6 aborde les puissances avec le souci constant de prouver les propriétés établies.

Nous n'avons pas rédigé dans cette brochure un thème concernant les calculs avec les nombres en écriture fractionnaire et un autre sur la notion d'inégalité. Nous y avons cependant réfléchi et nous avons expérimenté des activités avec nos élèves. Mais nous avons essayé plusieurs options et nous n'avons pas encore tranché sur ce qui est le mieux adapté à la compréhension des élèves. Ce sera sans doute l'objet d'une prochaine parution ou tout au moins d'un article.

Thème 1 : Une première entrée dans l'algèbre

Plan du thème :

- Situation 1 : Organiser un calcul
  Etape 1 : Emettre et prouver une conjecture
  Etape 2 : Nouveau programme de calcul, nouvelle conjecture
- *Situation 2 : Produit de plusieurs facteurs*
  Etape 1 : Commutativité et associativité de la multiplication dans le domaine numérique
  Etape 2 : Réduire un produit
- *Situation 3 : Distributivité*
- *Situation 4 : Simplifier des expressions littérales pour résoudre une équation*
  Etape 1 : Utilité de la lettre comme inconnue.
  Etape 2 : Résoudre des problèmes dans le domaine géométrique
- *Situation 5 : Programme de calcul et équation*

Objectif : Le professeur doit prendre du temps pour familiariser les élèves avec les lettres quand cela n'a pas été fait dans les classes antérieures. Avant la 4ème , ils n'ont souvent utilisé les lettres que de façon très succincte au moment de la distributivité, traitée la plupart du temps très rapidement en début d'année de 5ème. Certains élèves n'ont jamais rencontré un programme de calcul. Dans ce cas, ce premier thème peut paraître difficile. Le professeur ne doit pas hésiter à adapter les situations et à les développer. Vous pourrez trouver dans notre brochure « Entrées dans l'algèbre en 6ème et 5ème» des situations qu'il est possible de reprendre en 4ème en fonction des difficultés rencontrées par les élèves.

A la fin de ce premier thème, les élèves n'ont pas encore vu les nombres relatifs qui sont l'objet du thème 2 (révision de l'addition et de la soustraction et introduction de la multiplication) . En effet nous voulons réviser d'abord la propriété de distributivité vue en 5ème car nous en avons besoin pour la multiplication des relatifs. Donc après cette leçon, le professeur doit faire attention à ne pas poser des exercices où les élèves auront besoin des relatifs. Or la plupart des manuels commencent leur progression par les relatifs, et les exercices sur le calcul littéral qu'ils proposent ensuite les font intervenir.

Situation 1 : Organiser un calcul

L'objectif de cette première situation est de revoir la distributivité mais aussi les règles de priorité des opérations, de démontrer des conjectures en utilisant des lettres, et de résoudre des équations simples du niveau 5ème.

Etape 1 : Emettre et prouver une conjecture

1. *Le professeur écrit au tableau :*

Programme de calcul : On prend un nombre, on lui ajoute 7, on multiplie le résultat par 2, puis on soustrait le double du nombre de départ.

Faire fonctionner ce programme de calcul pour trois nombres de votre choix.

Décision didactique : Nous avons choisi de présenter les programmes de calcul en écrivant les consignes à la suite plutôt que ligne par ligne comme on les trouve habituellement : Choisir un nombre

- Ajouter 7
- Multiplier le résultat par 2

- Soustraire le double du nombre de départ

C'est pour favoriser l'écriture des calculs en une seule expression numérique, donc sur une seule ligne. La présentation habituelle incite au contraire les élèves à écrire les calculs sur plusieurs lignes, avec une seule opération par ligne.
De plus nous avons opté pour la formulation « on prend » plutôt que pour l'injonction « choisir » de manière à éviter qu'ils choisissent un nombre quand on ne le leur demandera pas.

Production des élèves
De façon spontanée, les élèves ne prennent que des nombres entiers.
Ils écrivent le plus souvent les calculs séparément , chacun sur une ligne.
Par exemple avec le choix du nombre 2 , on obtient en colonne :

$2 + 7 = 9$
$9 \times 2 = 18$
$18 - 4 = 14$

D'autres écrivent le calcul sur une seule ligne mais certains écrivent de fausses égalités :
$2+7=9\times 2=18-4=14$.
ou ils oublient parfois de mettre des parenthèses.

Le professeur envoie simultanément des élèves au tableau pour présenter les différentes écritures. Cette mise en commun est l'occasion de faire un travail sur le signe « = », de rappeler les règles de priorité vues en 5$^{\text{ème}}$ et de conclure sur l'écriture correcte en une seule ligne.

Dans notre publication « Entrées dans l'algèbre en 6$^{\text{ème}}$ et 5$^{\text{ème}}$ » nous conduisons les élèves à l'écriture en une seule ligne par la contrainte d'utiliser le moins de caractère possible.
Ce travail est difficile pour certains élèves mais il est indispensable pour réussir en algèbre ensuite. Par exemple savoir écrire un calcul avec une lettre (inconnue ou variable) et en une seule ligne est indispensable lors d'une mise en équation, ou pour écrire l'expression d'une fonction

2. *Le professeur fait remarquer aux élèves qu'ils n'ont utilisé que des nombres entiers et leur demande :*
Le programme donne-t-il le même résultat avec un nombre décimal ?

Les élèves essaient et trouvent de nouveau 14.

3. *Le professeur relance encore le débat :*
Le programme donne-t-il le même résultat avec une fraction ?

Les élèves sont rebutés par le calcul sur les fractions et ont peu de motivation pour se lancer dans les calculs. C'est l'occasion de leur demander s'ils n'ont pas un moyen de prouver que l'on trouve 14 quel que soit le nombre choisi au départ.
Certains élèves proposent de remplacer le nombre choisi par une lettre (surtout s'ils ont déjà manipulé les lettres en 5$^{\text{ème}}$), sinon le professeur le suggère.

Ceux qui ont compris comment écrire en une seule ligne écrivent alors $(x+7)\times 2-2\times x$
Puis en utilisant la distributivité : $2\times x+2\times 7-2\times x=14$.

Certains élèves scrupuleux peuvent avoir des hésitations pour réduire cette écriture car il faut utiliser la commutativité avec un signe de soustraction. Ils peuvent cependant admettre

facilement que si on calcule la somme (un nombre + 14) et qu'ensuite on enlève ce nombre, le résultat sera 14.
Rappelons que dans tout ce qui précède x (donc 2x) est un nombre positif. Nous donnerons après le chapitre sur les relatifs un exercice où x désigne un nombre de signe quelconque.
Le professeur peut éventuellement rappeler que pour soustraire un nombre on ajoute son opposé (vu en 5ème à propos des relatifs que nous n'avons pas encore révisés). Dans ce cas pour soustraire 2x on ajoute le nombre opposé à 2x. On a alors une somme dans laquelle on peut commuter les termes de sorte que 2x ajouté à son opposé donne 0.

> **<u>Bilan :</u> Pour montrer qu'une égalité est vraie pour n'importe quel nombre, on désigne le nombre quelconque par une lettre et on transforme les expressions obtenues en utilisant les règles de calcul, par exemple la distributivité.**

<u>Etape 2</u> : Nouveau programme de calcul, nouvelle conjecture

On procède de la même façon avec le programme suivant : On prend un nombre, on soustrait 3, on multiplie le résultat par 2 et on ajoute 6.

Le déroulement est le même mais cette fois-ci on trouve une fonction du nombre de départ : le double. Nous avons choisi le double pour que la conjecture soit aisée.
Certains élèves demandent s'ils peuvent utiliser directement la lettre au lieu d'envisager le calcul sur plusieurs nombres. Le professeur les encourage dans cette voie.

<u>Situation 2 : Produit de plusieurs facteurs :</u>

Vues les difficultés rencontrées par les élèves dans les simplifications d'écriture littérale du type $3x \times 2x$, nous préférons revenir sur une situation déjà proposée en classe de 6ème dans notre brochure « Entrées dans l'algèbre en 6ème et 5ème » qui comporte uniquement des données numériques. Nous complétons par des simplifications d'expressions littérales.
De nombreux élèves sont en effet plus gênés par les réductions que par les développements et l'analyse de travaux d'élèves nous a montré que ces réductions qui peuvent paraître simples sont mal maîtrisées par les élèves.

<u>Etape 1</u> : Commutativité et associativité de la multiplication dans le domaine numérique

Sur le mur d'une salle de bains, on a posé 8 rangées de 15 carreaux rectangulaires de longueur 12 cm et de largeur 10 cm chacun. Quelle est l'aire de la surface carrelée ?

On trouve dans la classe trois démarches différentes :

<u>Méthode 1 :</u>	<u>Méthode 2 :</u>	<u>Méthode 3 :</u>
$12 \times 10 = 120$	$15 \times 12 = 180$	$12 \times 10 = 120$
$120 \times 15 = 1800$	$8 \times 10 = 80$	$8 \times 15 = 120$
$1800 \times 8 = 14400$	$180 \times 80 = 14400$	$120 \times 120 = 14400$

Il est intéressant de faire expliciter aux élèves ce que représente chaque produit intermédiaire. La comparaison des méthodes mène au bilan :
$[(12 \times 10) \times 15] \times 8 = (12 \times 15) \times (10 \times 8) = (12 \times 10) \times (12 \times 15)$

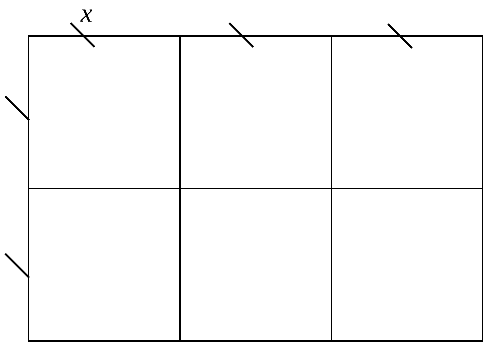
A retenir : *On ne modifie pas un produit de plusieurs nombres en changeant l'ordre des facteurs et en les regroupant comme on veut.*

Exemple : $\left[(12\times10)\times15\right]\times8=(12\times15)\times(10\times8)=(12\times10)\times(12\times15)$

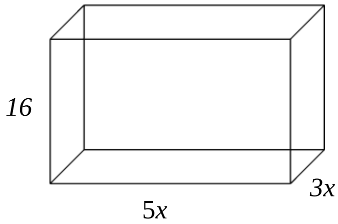
L'utilisation des parenthèses et des crochets devient inutile.

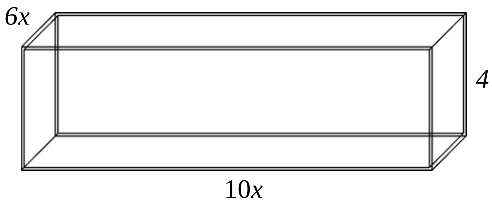
Etape 2 : Réduire un produit

1. Exprimer à l'aide de *x*, de deux façons différentes, l'aire du rectangle ci-dessous :



2. Comparer les volumes des deux pavés droits.

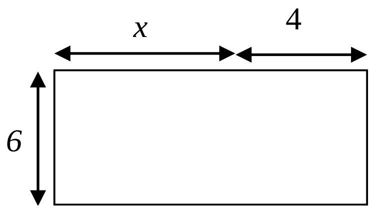


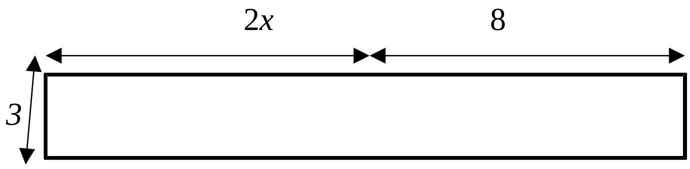


La première question donne l'occasion de réinvestir le bilan de la situation précédente sur une expression littérale où intervient « x^2 ». La deuxième est une application. Ces deux exercices permettent aussi de consolider les notions d'aire et de volume.

Situation 3 : Utilisation de la distributivité

1. Ces deux rectangles ont-ils la même aire ?

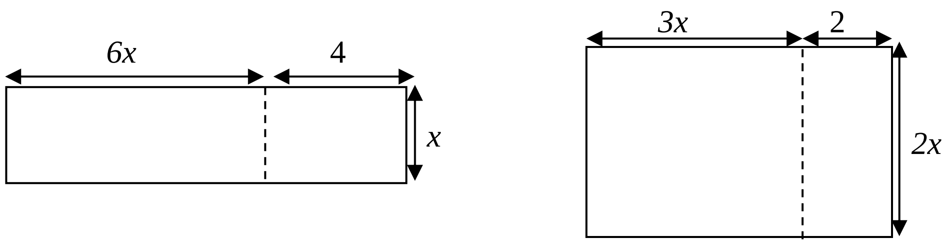




Cette situation est en outre l'occasion de revoir l'illustration géométrique de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition.
Dans le deuxième exemple, on a des produits à réduire et on utilise la situation 2.
Le professeur peut alors proposer d'autres exercices.

2.

Ces deux rectangles ont-ils la même aire ?

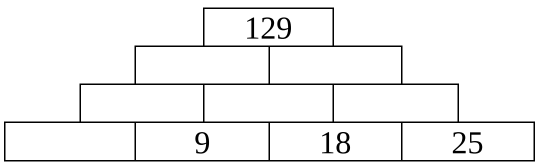


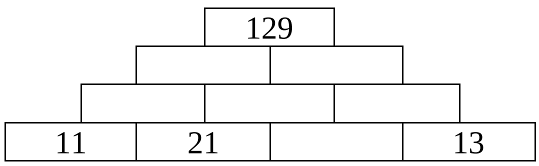
<u>Situation 4 : Simplifier des expressions littérales pour résoudre une équation :</u>

Cette situation permet d'utiliser les développements et les réductions pour résoudre des problèmes et d'éviter le côté répétitif et gratuit des exercices proposés habituellement.
Le statut des lettres change, dans les deux situations précédentes les lettres étaient des indéterminées, dans cette situation, les lettres sont des inconnues.

<u>Etape 1</u> : Utilité de la lettre comme inconnue.

Compléter les pyramides ci-dessous, chaque case est la somme des deux cases de dessous.

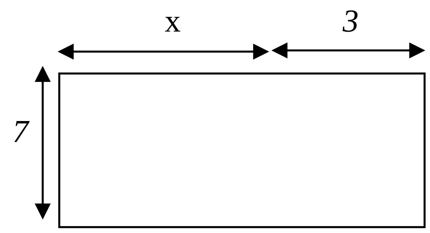




La première pyramide permet aux élèves de comprendre la consigne, elle peut être complétée sans faire intervenir de lettres, par soustractions.
Par contre, pour compléter la deuxième il est difficile de trouver la solution sans faire intervenir une lettre.
Les élèves essaient de faire un raisonnement arithmétique mais il est difficile d'imaginer que le nombre inconnu va apparaître trois fois au sommet et de deviner ce qu'il faut soustraire. Quelques rares élèves y arrivent parfois.
Le fait de remplacer le nombre inconnu par une lettre facilite le travail.
C'est donc l'occasion d'introduire les lettres pour désigner une inconnue et écrire des équations. Certains élèves peuvent y penser suite aux exercices déjà traités sur les programmes de calcul. Dans le cas contraire, le professeur devra donner un coup de pouce.
On prépare ici le thème 3 sur les équations.

<u>Etape 2</u> : Résoudre des problèmes dans le domaine géométrique

1.



On sait que le périmètre de ce rectangle vaut 74 cm.

Combien vaut x *?*

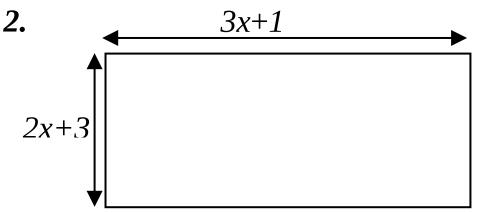
Les élèves utilisent très rarement le demi-périmètre. En utilisant ou non la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, ils obtiennent l'équation 2x+20=74 qui est du type de celles qui ont été résolues en 5ème.
D'autres raisonnent comme ils le font en 6ème : ils retranchent $(7+3)\times 2$ à 74, écrivent directement que 2x=54 et concluent.

On pourra également proposer aux élèves un schéma :

$$\boxed{x} \xrightarrow{\times 2} \boxed{} \xrightarrow{+\,20} \boxed{74}$$

Ce dessin facilite la remontée des calculs. On utilise, dans l'ordre inverse, les opérateurs réciproques. C'est ce que certains élèves font sans le formaliser.

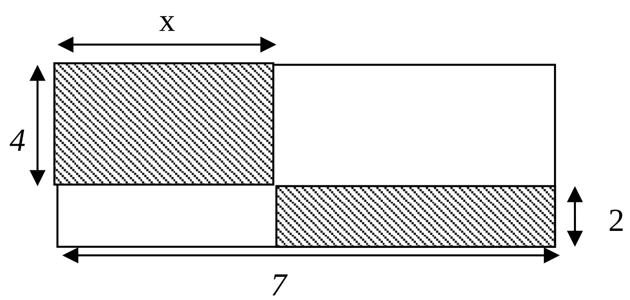
2.



On sait que le périmètre de ce rectangle vaut 28 cm.
a) *Combien vaut* x *?*
b) *Que peut-on dire de ce rectangle ?*

On trouve deux types de démarches : certains élèves développent et réduisent l'expression $2(3x+1)+2(2x+3)$ pour arriver à *10*x + *8*. D'autres comptent directement le nombre de fois où ils trouvent x dans le périmètre : $(3x+2x)\times 2$ et ajoutent ensuite $(3+1)\times 2$.
Dans la question a) la lettre x a le statut d'inconnue. Dans la question b), elle a le statut de variable ; en remplaçant x par 2, on prouve que pour cette valeur le rectangle est un carré.

3.



On sait que la somme des aires hachurées vaut 19 cm².

Trouver la valeur de x *?*

Cet exercice peut permettre de réinvestir la distributivité de la multiplication par rapport à la soustraction.
Les élèves trouvent deux méthodes :
- Soit ils écrivent $4x+(7-x)\times 2=19$
- Soit ils écrivent directement $4x+2\times 7-2\times x=19$ à partir de la figure par soustraction d'aire.

En comparant les deux écritures, le professeur peut faire ressortir le développement ou la factorisation.

<u>Situation 5 : Programme de calcul et équation</u>

<u>Programme de calcul :</u> On prend un nombre, on le multiplie par 3 et on ajoute 17 au résultat.

a) Si le nombre choisi est 29, quel est le résultat final ? Et si on choisit 9,6 ?
b) Si le résultat final est 47, quel était le nombre choisi au départ ?
c) Si le résultat final est 113,3, quel était le nombre choisi au départ ?
d) Si le résultat final est 19, quel était le nombre choisi au départ ?

Le choix des variables didactiques permet d'obtenir comme solution : un nombre entier (pour trouver 47), un nombre décimal (pour trouver 113,3) et une fraction (pour trouver 19).Se repose alors le problème de l'écriture fractionnaire d'un quotient puisque les élèves ont plutôt tendance à proposer 0 ,66 comme solution du d). On leur propose alors d'appliquer ce programme de calcul à 0,66 et on ne retrouve pas 19. S'engage alors une discussion qui aboutit à la proposition de $\frac{2}{3}$ comme solution.

<u>Stratégies des élèves pour résoudre les questions b, c, d:</u>
On trouve souvent deux méthodes de résolution.
1- Certains élèves choisissent de « remonter les calculs » comme on le fait avec le schéma de la situation précédente : on enlève 17 au résultat et on divise par 3

2- D'autres, influencés par le travail fait dans les situations précédentes, proposent d'appliquer le programme de calcul au nombre x et écrivent ainsi une expression algébrique : 3x + 17.
Il y a alors deux types de stratégies :
a- Ceux qui continuent à donner à la lettre x le statut de variable comme elle l'a dans l'écriture d'un programme de calcul et essaient de trouver la valeur de x en faisant des essais, c'est à dire en remplaçant x par plusieurs valeurs pour trouver, par corrections successives, la valeur qui convient.
C'est le principe de l'addition « à trou ». Ici certains élèves font implicitement un changement de variable. La variable que l'on cherche par essai n'est plus x mais 3x
Un seul essai suffit pour trouver x quand 3x + 17 = 47, mais il faut sans doute plusieurs essais pour trouver x quand 3x + 17 = 113,3 en commençant par exemple avec 3x = 90 (trop petit) et en augmentant progressivement. Le nombre d'essais dépend des compétences en calcul numérique.
b- Ceux qui cherchent à résoudre l'équation 3x+17=113,3. La lettre prend alors le statut d'inconnue.

Comme les transformations des membres d'une équation n'a pas encore été abordé, les élèves ont seulement à leur disposition la définition de la différence : à partir de la somme a + b = c on obtient deux différences a = c – b ou b = c – a.
Ainsi ils obtiennent formellement   3x = 113,3 – 17 puis la valeur de x en divisant par 3.

Il ne s'agit pas d'attirer spécialement l'attention des élèves sur les changements de statut de la lettre x, mais il vaut mieux que le professeur en ait conscience pour comprendre leurs difficultés et savoir qu'il faut les entraîner à passer d'un statut à l'autre sans même s'en rendre compte, comme le fait l'expert.

Thème 2 : Les nombres relatifs[2]

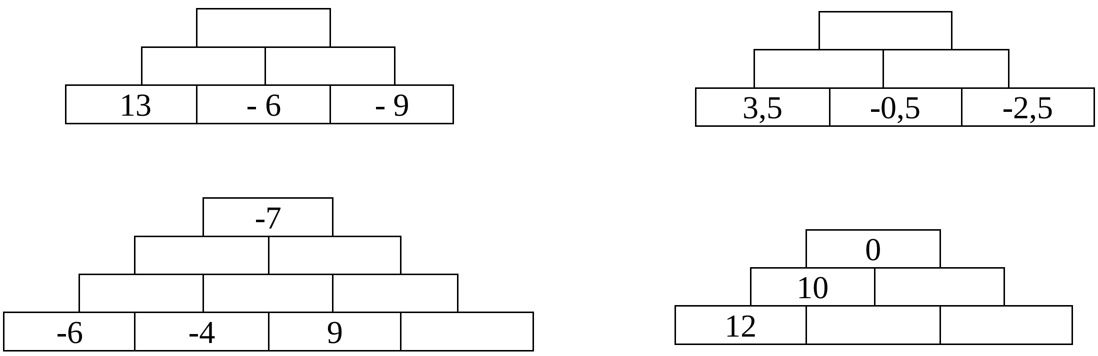
<u>Plan du thème</u>

- Situation 1 : Addition et soustraction
  - Etape 1 : Réviser les règles de l'addition et de la soustraction
  - Etape 2 : Somme de plusieurs termes - commutativité - associativité de l'addition - opposés.
  - Etape 3 : Exercices.
- Situation 2 : Le produit de deux nombres relatifs.
  - Etape 1 : Produit de deux nombres de signes contraires.
  - Etape 2 : Produit de deux nombres négatifs.
- Situation 3 : Multiplication par (-1)
  - Etape 1 : Conjecture.
  - Etape 2 : Démonstration.
  - Etape 3 : Illustration géométrique
- Situation 4 : Quotient de deux nombres relatifs :
  - Etape 1 : Réactiver la notion de quotient de nombres positifs.
  - Etape 2 : Quotient de deux nombres relatifs.
  - Etape 3 : La règle des signes

<u>Situation 1 : Addition et soustraction</u>

<u>Etape 1</u> : Réviser les règles de l'addition et de la soustraction

Compléter les pyramides ci-dessous, chaque case est la somme des deux cases de dessous.



Les deux premières pyramides font réviser uniquement la somme de deux relatifs.
Pour la troisième et la quatrième les élèves procèdent le plus souvent mentalement par la technique des additions « à trou ». Il est possible que certains élèves posent les soustractions à effectuer.
Le professeur pourra alors rappeler le lien entre somme et différence.
Par exemple s'ils écrivent la somme $9 + x = -7$ ils en déduisent la différence $x = (-7) – 9$ qui peut aussi s'écrire sous forme de somme $(-7) + (-9)$.
On revoit aussi la notion d'opposé.

[2] Il s'agit de l'ensemble des nombres décimaux positifs et négatifs.

<u>Etape 2</u> : Somme de plusieurs termes – commutativité - associativité de l'addition - opposés

<u>« Le tableau de comptable » :</u> Compléter le tableau sachant que la case désignée par chaque flèche est la somme des cases précédentes :

							↑
		-7,5	3,5	7,5	-6,8	→	
		-3,5	-3,5	2,1	1,4	→	
		↓	↓	↓	↓		
	←						

Pour « Le tableau de comptable » *certains élèves ont du mal à comprendre pourquoi ils trouvent la même somme dans les deux cases en haut à droite et en bas à gauche. C'est l'occasion de revenir sur la commutativité de l'addition, de réviser les sommes de plusieurs relatifs et de montrer que ces deux résultats sont la somme des huit nombres donnés au départ.*

<u>Etape 3 :</u> Exercices

a) Compléter les nombres manquants dans la pyramide ci-dessous, le principe est le même qu'à l'étape 1.

-3,5	9,5		
	-9,2		-25

b) Compléter le carré magique ci-dessous. Les sommes des nombres de chaque ligne, de chaque colonne et des diagonales sont les mêmes.

		-4
-5	-1	
2		

c) Programme de calcul :

On prend un nombre, on lui ajoute (- 12) et on soustrait (-3) au résultat.

- Si le nombre choisi est –2, quel est le résultat final ? Et si on choisit 4,9 ?
- Si le résultat final est (–7,1), quel était le nombre choisi au départ ?

Les objectifs de cette étape sont :

- *montrer que la soustraction est une procédure experte qui évite les tâtonnements,*
- *utiliser des équations avec des nombres relatifs.*

<u>Situation 2 : Le produit de deux nombres relatifs</u>

Pour donner du sens aux règles de la multiplication , on utilise la distributivité, c'est pourquoi il est indispensable d'avoir revu cette propriété, c'est prévu dans le thème 1.

Le professeur commence par annoncer aux élèves que l'objectif de cette situation est la mise en place de la multiplication des relatifs.

<u>Etape 1 :</u> Produit de deux nombres de signes contraires

Compléter les égalités :

$-3+(-3)+(-3)+(-3)+(-3)=$

$-5+(-5)+(-5)=$

$\underbrace{-2,3+(-2,3)+...........+(-2,3)+(-2,3)}_{\text{100 termes}}=$

<u>Déroulement en classe :</u>

Les élèves font l'addition puis s'aperçoivent qu'il est plus rapide d'utiliser la multiplication entre positifs qu'ils connaissent et d'écrire le signe – à la fin. Cette remarque leur permet de trouver le dernier résultat en calculant -2,3 × 100 sans faire effectivement l'addition

De façon naturelle, les élèves proposent d'écrire $(-3)\times 5=-15$

$(-5)\times 3=-15$

$(-2,3)\times 100=-230$

Certains élèves sont surpris de remarquer que la règle des signes de l'addition ne semble plus être valable pour la multiplication : par exemple le résultat de $(-3)\times 5$ *est –15 bien que 5 soit plus grand que 3.*

Le professeur demande alors aux élèves s'ils peuvent prévoir le résultat pour :

$(-3)\times 6=$

$3\times(-6)=$

$(-4,2)\times 8=$

La mise en commun permet d'insister sur le fait qu'on peut prévoir le résultat car il est facile d'imaginer que l'on peut remplacer chaque multiplication par une addition réitérée.

Il faut ajouter 6 fois (-3) dans le premier calcul, 3 fois(-6) dans le second et 8 fois (–4,2) dans le troisième, ce qui permet de calculer alors en faisant une multiplication.

Se pose ensuite le cas des produits que l'on ne peut pas remplacer par une addition réitérée comme par exemple $4{,}2\times(-8)$ *car aucun des facteurs ne peut jouer le rôle du « nombre de fois ». On peut conjecturer le résultat mais on voudrait le prouver.*

Le professeur explique aux élèves que lorsque les mathématiciens introduisent de nouveaux nombres, ils font en sorte que les propriétés de calcul connues soient encore valables avec ces nouveaux nombres. La distributivité de la multiplication par rapport à l'addition est donc étendue à l'ensemble des nombres relatifs ainsi que le produit par 0 qui donne 0.
En ayant ces propriétés on peut démontrer la conjecture sur le résultat de $4{,}2\times(-8)$
La démonstration est faite au tableau en recherchant le plus possible la participation active des élèves en classe entière.

On sait que $4{,}2\times 8 = 33{,}6$ *et on conjecture* que $4{,}2\times(-8) = -33{,}6$
Notre conjecture consiste donc à dire que ces deux nombres semblent opposés.
On le vérifie en calculant leur somme : $4{,}2\times 8 + 4{,}2\times(-8)$
Comme on conserve la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, on peut factoriser
$4{,}2\times 8 + 4{,}2\times(-8) = 4{,}2\times[(-8)+8] = 4{,}2\times 0 = 0$
Ces deux nombres sont bien opposés car leur somme est nulle. La conjecture est démontrée.

Le professeur peut aussi leur proposer cette deuxième démonstration qui utilise la distributivité de la multiplication par rapport à la soustraction.
En $5^{ème}$*, le nombre relatif (–8) a été introduit comme le résultat de la différence 0 – 8, ou 1 – 9, ou 2 – 10, …*
On peut donc proposer le calcul suivant :

$$\begin{aligned}4{,}2\times(-8) &= 4{,}2\times(0-8)\\ &= 4{,}2\times 0 - 4{,}2\times 8\\ &= 0 - 33{,}6 = -33{,}6\end{aligned}$$

<u>Etape 2 :</u> Produit de deux nombres négatifs

A votre avis, quel peut être le résultat de $(-5)\times(-3)$?

Le professeur recueille les conjectures dans la classe. Les plus fréquentes sont 15 ou – 15
Ce sont des nombres opposés. Il s'agit de décider quel est le bon résultat et de le prouver. Les élèves travaillent par deux. Certains réinvestissent ce qui vient d'être fait en ajoutant au produit cherché un autre produit de sorte qu'une mise en facteur soit possible, ce qui permet de tester la deuxième conjecture. Ils trouvent à l'aide de la distributivité que $(-5)\times(-3)=15$.
Mais le coup de pouce est souvent nécessaire car le calcul à faire n'est pas facile à trouver pour les élèves, même s'il a été suggéré par le calcul déjà fait en commun au tableau pour le cas précédent.

D'autres groupes restent bloqués dans l'idée que le produit de deux nombres négatifs ne peut être que négatif. Ils pensent qu'il est inutile de faire le moindre calcul car « c'est évident ! »

Une mise en commun permet de s'accorder sur le calcul à faire en utilisant la distributivité *pour factoriser la somme* $(-5)\times(-3) + (-5)\times 3 = (-5)\times[(-3)+3]$

ou bien, $(-5)\times(-3) + 5 \times (-3) = [(-5)+5]\times(-3)$
ou bien, si certains élèves ont démarré ainsi, on peut aussi calculer $[(-5)+5]\times(-3)$
ou encore suivant la démonstration qui a été présentée à l'étape 1 , on peut écrire :
$-5\times(-3) = -5\times(0-3) = -5\times 0-(-5)\times 3 = 0-(-15) = 0+15 = 15.$

Dans tous les cas on trouve 15 et non –15 qui était le résultat qui semblait le plus naturel à certains élèves qui pensent que « le produit de deux choses négatives ne peut pas donner quelque chose de positif !».

Lors d'une observation de classe nous avons entendu une élève qui après la démonstration refusait toujours d'admettre ce signe + et défendait son point de vue ainsi : « mais enfin si je descend 5 fois 3 marches je descends 15 marches donc le résultat est -15 ! »
Le professeur lui disait : « Oui mais 5 fois c'est +5 ! ! » et elle répondait :
« Mais non puisque c'est 5 fois en descendant c'est bien –5 ! ». Cette observation, qui n'est pas une anecdote, montre comment l'image mentale de la translation (monter-descendre, avancer-reculer), qui aide à comprendre la somme des relatifs, fait ensuite obstacle à la multiplication. Ce qui ne veut pas dire qu'il ne faut pas s'en servir pour apprendre l'addition des relatifs. Ici l'addition est un obstacle didactique incontournable et l'image de la translation doit être utilisée à bon escient (voir notre publication : Entrées dans l'algèbre en 6ème - 5ème).

Si le professeur fait la démonstration lui-même au tableau, même avec la participation de la classe, tous les élèves n'ont pas l'occasion d'exprimer vraiment leurs idées. Le professeur croit que tous ont compris alors que les résistances silencieuses se manifesteront quelque temps plus tard sous forme d'erreurs.

On admet que cette règle des signes est la même quels que soient les nombres.

A Retenir :** **Quand on multiplie deux nombres relatifs, on multiplie les valeurs numériques* et pour trouver le signe du produit, on utilise la règle suivante :

- ***Le produit de 2 positifs est positif***
- ***Le produit d'un positif et d'un négatif est négatif***
- ***Le produit de 2 négatifs est positif.***

Exemples :

$$4\times(-3) = -12$$
$$-5\times 2 = -10$$
$$-3\times(-4) = 12$$
$$-7\times 7 = -49$$

** On devrait dire « valeur absolue » mais ce terme est hors programme. Nous utilisons les expressions « valeur numérique » ou « partie numérique » mais nous sommes conscients qu'elles n'ont pas de définition mathématique ; certains emploient « distance à zéro » mais il faut avoir travaillé ce vocabulaire non anodin avec les élèves avant. D'autres préfèrent donner des exemples en se limitant dans l'énoncé de la règle à donner le signe du produit selon celui des facteurs sans expliciter le calcul de la valeur absolue de ce produit.*

<u>Situation 3 : Multiplication par (-1)</u>

<u>Etape 1 :</u> Conjecture

Calculer	$(-1)\times 3$ $(-1)\times(-4)$ $(-3{,}2)\times(-1)$ $7{,}6\times(-1)$ $(-1)\times(-1)$ $(-1)\times 0$ $(-1)\times 1$
Quelle remarque peut-on faire sur le résultat du produit d'un nombre par (-1) ?	

Les élèves calculent en appliquant la règle sur le produit de deux nombres relatifs et remarquent que le produit d'un nombre par (-1) est l'opposé de ce nombre.

<u>Etape 2 :</u> Démonstration

Désignons un nombre quelconque par la lettre x, on peut démontrer cette conjecture en utilisant la distributivité. Les élèves peuvent faire cette démonstration eux-mêmes, avec deux méthodes :

a) *par disjonction des cas car ils peuvent utiliser la règle des signes qui vient d'être démontrée pour tous les nombres.*
Si x est positif son produit par (– 1) est négatif donc c'est l'opposé de x.
Si x est négatif son produit par (– 1) est positif donc c'est l'opposé de x.
Dans tous les cas il s'agit de l'opposé de x.

b) *en utilisant une démonstration semblable à ce qu'ils ont vu dans la situation précédente.*
On conjecture que $x\times(-1)$ *est l'opposé de x.*
Pour en être certain on les ajoute
$x\times(-1) + x = x\times(-1) + x\times 1 = x\times[(-1)+1] = x\times 0 = 0$
Donc $x\times(-1)$ *est l'opposé de x.*

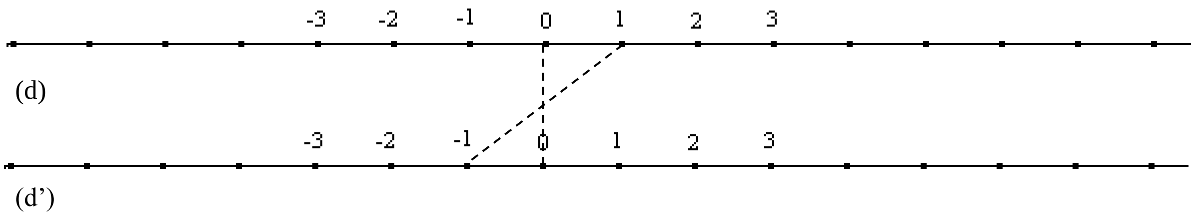
<u>A Retenir :</u> Quand on multiplie un nombre par (-1) on obtient son opposé.

$x\times(-1) = -x \qquad (-1)\times x = -x$

Le signe « - » peut intervenir avec trois sens différents :

- ***le signe de la soustraction***
- ***le signe des nombres négatifs***
- ***le signe qui désigne l'opposé***

Etape 3 : Illustration géométrique



Le professeur montre le dessin suivant où l'on joint le point A d'abscisse 1 sur la droite (d) avec le point A' ayant pour abscisse le produit de 1 par (-1) sur la droite (d'). Il demande aux élèves de le continuer en joignant chaque point d'abscisse entière à son produit par (-1).

La multiplication par (-1) correspond à une symétrie centrale, tous les segments se coupent au centre de symétrie. Un point de (d) et son symétrique sur (d') ont des abscisses opposées.

Exercice 1 :

a, b, c sont 3 nombres tels que $a \times b \times c = -100$

1) *Existe-t-il des nombres qui vérifient cette égalité ?*
2) *Sans chercher à connaître les valeurs de a, b, c, peut-on trouver les valeurs de :*

   $a \times 2 \times b \times (-5) \times c$

   $a \times (-6) \times c\, b$

   $(-a) \times b \times c$

   $(-a) \times (-b) \times c$

   $a\, b\, c + 1$

   $a \times c \times a \times b \times a \times c \times b$

   $a \times 2 \times c \times 2 \times b \times 2 \times a$

Ce dessin fournit une illustration visuelle du fait que la multiplication par (-1) donne l'opposé du nombre de départ.[3]

L'objectif de cet exercice est de tester une égalité, mais aussi de travailler l'associativité et la commutativité de la multiplication.
Les élèves trouvent plusieurs solutions $5 \times 2 \times (-10)$ *ou* $(-10) \times (-10) \times (-1)$, *….*

Les deux dernières expressions posent problème, le résultat contient encore une lettre. Cela étonne encore les élèves bien qu'on les ait habitués dès la sixième au fait qu'un résultat n'est pas toujours un nombre mais peut être une expression littérale.
On remarquera qu'on a quand même progressé en écrivant le dernier résultat sous la forme -800a, il suffit de connaître la valeur de la lettre a pour trouver le résultat, alors qu'avant il fallait a, b, et c.
Le professeur peut proposer des calculs dans lesquels le signe × est sous-entendu, des élèves vont poser la question, ce sera le moment de rappeler que le signe × peut ne pas s'écrire.

---

[3] On pourrait faire cette transformation sur une seule droite en associant un point de la droite avec le point ayant comme abscisse son produit par (-1). Le centre de symétrie serait le point d'abscisse 0. On a décidé de dédoubler la droite pour plus de lisibilité.
De façon générale, ajouter un nombre peut être associée à une translation de la droite et multiplier par un nombre à une homothétie. (voir Mathématiques Dynamiques d'Annie Berté chez Nathan Pédagogie)

Les élèves ont des difficultés pour les expressions $-a \times b \times c$ *et* $-a \times (-b) \times c$. *C'est l'occasion de réinvestir la situation 3 (multiplication par (-1)) et de se familiariser avec le troisième statut du signe « - » : - a signifie l'opposé de a et – a=* $(-1) \times a$.

Exercice 2 : Prévoir le signe.

a, *b* et *c* sont des nombres relatifs non nuls.

***a* et *b* désignent des nombres négatifs, *c* désigne un nombre positif.**

	Est toujours positif	Est toujours négatif	Ça dépend
$a \times b$			
ac			
abc			
a²			
c²			
-a			
-c			
a ×*(-c)*			
a+ b			

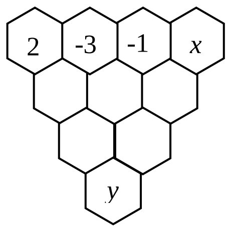
Ce travail est assez difficile pour les élèves mais il permet de réutiliser la notation (– a) , d'utiliser la règle des signes sur des exemples littéraux et de prendre conscience que a peut désigner un nombre négatif et (–b), un nombre positif.

Exercice 3 :

Le nombre qui est dans la case situé en dessous est le produit des deux cases qui la surmontent.

Après avoir complété les alvéoles :

1) Prouver que si *x* est négatif alors *y* est aussi négatif.
2) Exprimer *y* en fonction de *x*.



Exercice 4 : Remplacer des lettres par leur valeur.

a = (–3) et *b* = (–4)

Calculer *a + b ;* *a – b;* *ab;* *a² ;* *– a ;* *2a ;* $2a + 3b + 7$

Les élèves ont du mal avec –(–3) qu'ils n'ont rencontré que rarement (dans les sommes algébriques, on en a proposé une qui commence par –(–2) + ….)
Il faut rappeler que le signe (–) signifie ici l'opposé de (–3).

Pour calculer 2a, il faut remettre le signe ×. *Certains élèves qui ne pensent pas à remettre le signe*× *confondent avec la soustraction 2 – 3, ou avec l'addition parce qu'il n'y a pas de signe.*

Exercice 5 : Le compte est bon
On donne les nombres -4 ; -1 ; 2 ; 3 ; -10 ; -6
Avec certains nombres de cette liste, utilisés une fois et une seule, écrire une suite de calculs qui donne -100.

Cet exercice permet de travailler la priorité des opérations avec des nombres relatifs.
Quelques exemples de solutions :

1. $(3-(-1)-(-6))\times(-10)$
2. $(3\times 2-(-4))\times(-10)$
3. $(-1+3-(-4)\times 2)\times(-10)$
4. $(-4-(-6))\times(-10)\times(3+2)$
5. $(-1-(-6))\times(2+3)\times(-4)$
6. $(3\times 2+(-4)\times(-1))\times(-10)$

Des élèves trouvent des expressions qui donnent 100, on peut alors rappeler la multiplication par (–1) qui donne l'opposé.
On utilise la règle de la soustraction dans des calculs comme $-4-(-6)$ *, ce qui permet de retravailler cette opération qui pose problème aux élèves.*

Exercice 6 :
On donne l'expression E = $-2\times x\times(-4)+2x$
Calculer la valeur de E pour x = 125 478,9

Le nombre choisi est volontairement très compliqué pour inciter les élèves à réfléchir avant de se lancer dans les calculs numériques.
Le programme de calcul se simplifie et donne E = 10x. Les élèves qui voient cette astuce vont beaucoup plus vite que les autres pour le calcul.

Exercice 7 :
Voici un programme de calcul : On prend un nombre, on le multiplie par 2, on ajoute (- 10).

1) *Faire fonctionner ce programme pour (-5) et 5.*
2) *On trouve 20, quel est le nombre de départ ?*

On résout une équation avec des nombres relatifs.

Exercice 8 :
Voici un programme de calcul : On prend un nombre, on lui ajoute 2, on multiplie le résultat par (–3), puis on enlève le nombre de départ.

Trouver un programme de calcul équivalent (qui donne le même résultat pour tous les nombres) mais plus court (dont le texte comporte moins d'opérations).

Situation 4 : Quotient de deux nombres relatifs :

Avant d'aborder le quotient avec les nombres négatifs, il est important de réactiver cette notion avec des nombres positifs.

<u>Etape 1 :</u> Réactiver la notion de quotient de nombres positifs.

Compléter les égalités suivantes avec une valeur exacte :

$2 \times \ldots = 54$ $\ldots \times 3 = 2004$ $5 \times \ldots = 14$ $4 \times \ldots = 1$ $\ldots \times 0{,}4 = 3{,}2$ $3 \times \ldots = 4$

Les élèves hésitent encore sur cette situation que l'on a repris de la sixième et de la cinquième. Les difficultés sont toujours les mêmes :

Pour $4 \times \ldots = 1$, ils disent que c'est impossible car $1 < 4$. C'est une conception de la multiplication comme une opération qui agrandit toujours. Sûrement une conséquence de l'introduction de la multiplication des entiers comme une addition réitérée.

Pour $3 \times \ldots = 4$, ils proposent des solutions décimales : 1,33 ; 1,333.Il faut revenir sur le statut de nombre de la fraction $\frac{4}{3}$.

<u>A Retenir :</u>

Le nombre $\frac{4}{3}$ est le nombre qui, multiplié par 3, donne 4 : $3 \times \frac{4}{3} = 4$. ***C'est le quotient de 4 par 3.***

<u>Etape 2 :</u> Quotient de deux nombres relatifs.

Compléter les égalités suivantes avec une valeur exacte :

$(-3) \times \ldots = (-36)$ $\ldots \times 4 = (-12)$ $(-2) \times \ldots = 18$ $\ldots \times 5 = (-16)$ $(-10) \times \ldots = 3$

$(-0{,}2) \times \ldots = (-7)$ $3 \times \ldots = (-4)$ $(-6) \times \ldots = 11$ $(-9) \times \ldots = (-7)$

Les égalités ont pour solution un nombre décimal ou entier que l'on obtient en faisant une division. La règle des signes de la multiplication aide à déterminer le signe de la solution. En généralisant, on conjecture la règle des signes pour la division de deux nombres relatifs et on remarque que c'est la même que celle de la multiplication.

<u>Etape 3 :</u> La règle des signes

Compléter les égalités suivantes avec un quotient.
$(-3) \times \ldots = (-7)$ $3 \times \ldots = 7$ $3 \times \ldots = (-7)$ $(-3) \times \ldots = 7$
Les nombres obtenus sont-ils égaux ou opposés ?

$\frac{-7}{-3} = \frac{7}{3}$ *est un nombre positif,* $\frac{-7}{3} = \frac{7}{-3}$ *est un nombre négatif d'après la règle des signes de la multiplication.*

Ces deux nombres sont opposés. Donc : $\frac{-7}{3} = \frac{7}{-3} = -\frac{7}{3}$.

Si on admet que la règle de la simplification des écritures fractionnaires se prolonge avec les nombres négatifs on peut prouver que la règle des signes conjecturée à l'étape précédente est bien la bonne.

$\frac{-7}{-3}=\frac{(-1)\times 7}{(-1)\times 3}=\frac{7}{3}$ *et* $\frac{-7}{3}=\frac{(-1)\times 7}{(-1)\times(-3)}=\frac{7}{-3}$

C'est une occasion de réinvestir : « si on multiplie un nombre par –1 on obtient son opposé ».

<u>A Retenir :</u> Pour diviser deux nombres relatifs, on divise les parties numériques et la règle des signes est la même que pour la multiplication.

Exemples : (–36) ÷ (– 3) = 12 et 18 ÷ (–2) = –9

$\mathbf{\frac{-4}{3}}$ ***est le quotient de (–4) par 3***

La règle des signes pour les quotients de nombres relatifs est la suivante :

$\mathbf{\frac{-7}{-3}=\frac{7}{3}}$ ***désigne un nombre positif***

$\mathbf{\frac{-7}{3}=\frac{7}{-3}}$ ***désigne un nombre négatif***

et donc $\mathbf{\frac{-7}{3}=\frac{7}{-3}=-\frac{7}{3}}$.

Thème 3 : Equations du premier degré.

Plan du thème :

- Situation 1 : Egalités et opérations
  - Etape 1 : Première rencontre avec les propriétés de l'égalité
  - Etape 2 : Application pour déterminer une inconnue
  - Etape 3 : Contexte autre que la balance.
- Situation 2 : Des problèmes où le passage à l'algèbre est relativement simple.
- Situation 3 : Progression pour la mise en équation de problèmes.
- Situation 4 : « égalité, équation, identité…. »
  - Etape 1 : Identité.
  - Etape 2 : Equation à plusieurs solutions.
  - Etape 3 : Equation qui n'a pas de solution.

Quelques réflexions préliminaires pour le professeur

A- Deux façons de poser la question

Les équations servent à résoudre une grande variété de problèmes dans lesquels plusieurs conditions données sont exprimées par des relations entre des nombres connus et inconnus. Il s'agit de trouver l'ensemble des nombres inconnus vérifiant ces conditions. Plus précisément, existe-t-il des nombres qui conviennent ? un seul ? plusieurs ?
Comment fait-on pour les trouver ? Est-ce toujours possible ?

La question se présente en 5$^{\text{ème}}$, en 4$^{\text{ème}}$ puis après avec les problèmes relevant d'une équation à une inconnue. Elle s'étendra dès la 3$^{\text{ème}}$ et au-delà avec les problèmes relevant d'inéquations à une inconnue, des systèmes d'équations et d'inéquations. Nous limitons pour l'instant notre étude aux équations du premier degré en 4$^{\text{ème}}$.

La façon dont sont données les conditions est une variable didactique très importante.

<u>Type 1- Les conditions sont données par des égalités entre des « programmes de calcul »</u>
Deux variantes :
soit directement avec le langage de l'algèbre
soit par des phrases formant un problème où deux programmes de calcul sont décrits
Exemple 1 :

- Existe-t-il un nombre x tel que $2x + 14 = 4x - 18$?
- Y a-t-il un nombre qui donne le même résultat, si Alice le multiplie par 2 puis lui ajoute 14 ou si Bertrand le multiplie par 4 puis retranche 18 ?

<u>Type 2 : Les conditions sont dans le texte d'un problème :</u>

Exemple 2 :
Avec la somme dont je dispose, si je veux acheter 4 CD il me manque 18 €. Si j'achète 2CD il me restera 14 €. Quel est le prix d'un CD et quelle est la somme dont je dispose ?

Formellement c'est exactement le même problème car la solution algébrique consiste à résoudre l'équation ci-dessus. Mais l'apprentissage de la résolution de problèmes de type 1 ne suffira pas à rendre les élèves capables de résoudre les problèmes de type 2.

Or, dans les nouveaux programmes de collège, la résolution des problèmes de premier degré fait partie du socle commun. En revanche, la résolution d'une équation de premier degré n'en fait pas partie mais doit être enseignée à tous, même s'il n'y a pas une exigence de réussite pour tous.

De ce fait, nous avons décidé de ne pas enseigner la technique de résolution des équations avant d'aborder la résolution algébrique des problèmes de premier degré. Ainsi les élèves n'apprendront pas une technique sans en avoir compris l'utilité pour résoudre des problèmes. Nous avons donc cherché à introduire la technique progressivement en même temps que les élèves avanceront dans la mise en équation. Deux questions (voir B- et C-) sont apparues lors de notre travail. La première nous a permis de comprendre que cette décision, que nous avons maintenue, n'avait en fait rien d'une évidence.

B- Quel outil enseigner pour résoudre ces problèmes : arithmétique ou algèbre des équations ?

Nous avons rencontré immédiatement des difficultés pour motiver l'apprentissage de la résolution des équations de premier degré par des problèmes, car souvent nos élèves s'engagent dans des méthodes non algébriques qui aboutissent.

Par exemple pour résoudre le problème des CD, de très nombreux élèves vont :
- soit utiliser le raisonnement suivant : la différence entre les deux projets d'achat est de deux CD (4 –2) ce qui donne une différence de 32 € (14 + 18) donc un CD coûte la moitié soit 16 €. C'est ce que nous appelons un raisonnement pré-algébrique.
- soit utiliser une méthode par essais plus ou moins élaborée pour arriver plus vite au résultat. Les élèves connaissant à peu près le prix d'un CD risquent de faire un premier essai entre 10 et 20 €. S'ils essaient 15, la correction sera assez rapide pour trouver le résultat sans même de raisonnement.

Ces deux méthodes - et il y en a d'autres- sont pour eux plus simples qu'une mise en équation suivie de sa résolution.

Même lorsque la mise en équation est faite, la question des essais se pose à nouveau pour résoudre l'équation. Le professeur peut, en utilisant le tableur montrer aux élèves, à partir d'une équation algébrique de degré 1 ou 2 ou 3..., ce que signifie une recherche par tâtonnement d'une solution, sans avoir l'assurance de les trouver toutes ainsi. Il peut aussi leur montrer comment essayer de limiter les essais par encadrement des solutions. Notez que, dès que l'on fait des essais, la lettre qui avait, dans l'équation, le statut d'inconnue, prend le statut de variable, car chaque membre devient l'expression d'une fonction.
Dans le cas du premier degré, essayer de limiter les essais rapproche de la méthode dite de « fausse position » qui permet de conclure avec deux essais seulement et un raisonnement de proportionnalité. Ainsi, les équations ne sont-elles pas nécessaires à la résolution des problèmes de premier degré. Alors, pourquoi les enseigner au collège, plutôt que les méthodes arithmétiques, dont certaines sont très proches des stratégies des élèves ?

Nous avons voulu approfondir cette question en examinant la résolution de ces problèmes de premier degré à la fois dans l'histoire des mathématiques et dans l'histoire de l'enseignement des mathématiques, en cherchant à mettre en relation ce que nous trouvons dans l'histoire avec les productions de nos élèves.

Dès le XIIe siècle les mathématiciens avaient énoncé la méthode arithmétique de « fausse position » permettant de résoudre tous ces problèmes de premier degré. La difficulté de justification de cette méthode rend difficilement envisageable son enseignement, d'autant plus que, selon la nature du problème, un raisonnement peut permettre de la retrouver sous une forme simplifiée en évitant ainsi son application mécanique. Mais l'enseignement peut s'enliser alors dans un exposé de raisonnements variés, très dépendants du contexte, sans que l'apprenti ait l'assurance d'aboutir systématiquement quel que soit le problème. L'examen de l'histoire de l'enseignement permet de voir en quoi la pratique de l'algèbre apparaît comme un soulagement. Notamment on observe l'introduction de la lettre pour désigner l'inconnue, même dans la solution « arithmétique », pour alléger la phrase donnant la méthode qui indique le calcul[4].

Il apparaît alors évident que nous ne pouvons pas priver nos élèves de ce moyen algébrique puissant si la résolution des problèmes de premier degré est au programme. Notre étude historique permet de comprendre que l'introduction de l'algèbre au collège s'est imposée, car pour résoudre un problème il est naturel d'enseigner la méthode la plus puissante, quitte à passer de l'arithmétique à l'algèbre. L'algèbre permet en outre de résoudre des problèmes qui ne sont pas de premier degré mais qui s'y ramènent facilement. C'est donc un souci de démocratisation qui a guidé jusqu'à ce jour, le développement de l'école publique.

Nous accepterons donc toutes les solutions arithmétiques proposées par les élèves, mais notre objectif est de leur faire comprendre que, pour aboutir, certaines de leurs méthodes leur demandent un raisonnement plus difficile qu'une résolution algébrique. Il s'agit alors de la leur enseigner de façon à ce qu'ils n'hésitent plus à l'adopter.

C - Comment enseigner la mise en équation et la technique de résolution des équations ?

Dans le développement qui suit nous répondons à deux questions. Comment le professeur va-t-il enseigner les propriétés de l'égalité et comment va-t-il utiliser ce qu'il est convenu d'appeler « la métaphore » de la balance ? Nous avons opté pour l'utilisation de cette dernière pour plusieurs raisons que nous allons voir.

1- Résolution des équations en utilisant les propriétés de l'égalité

Il s'agit de transformer l'équation de façon à obtenir une équation équivalente que l'on sait résoudre.
Le professeur utilise généralement les « propriétés de l'égalité ».
Il peut démontrer que les égalités $a = b$, $a + c = b + c$, $a\,d = b\,d$ (avec d non nul) sont équivalentes . Ceci permet d'ajouter ou de retrancher un même nombre aux deux membres donc de « faire passer » les termes d'un membre dans l'autre en changeant leur signe (transposition) et de multiplier ou diviser les deux membres par un même nombre.
Eventuellement on peut se contenter de l'addition qui permet de passer de $ax+b = cx+d$ à
$ax - cx = d - b$ soit $a'x = b'$ et on termine par la définition du quotient.

Il y a deux façons de démontrer les propriétés de l'égalité.

[4] Le professeur intéressé trouvera notre étude historique en annexe. La méthode de fausse position est expliquée avec ses variantes et mise en rapport avec des productions d'élèves prises dans nos classes. Le professeur qui nous lit pourra trouver exactement la même démarche chez ses élèves. Voir cette méthode exposée en annexe dans ce fascicule

On peut utiliser la définition de la différence et traduire que deux nombres sont égaux par leur différence nulle.
Par exemple $a - b = 0$ se transforme en $(a+c) - (b+c) = 0$ ou $c(a - b) = ac - bc = 0$
Ce passage par la différence est indispensable pour démontrer les propriétés similaires de l'inégalité à cause de la multiplication par un négatif.

Pour les égalités point n'est besoin de recourir à un tel théorème sur égalité et différence.
a et *b* sont des lettres qui désignent des nombres connus et donnés.
En vertu du fait que le résultat d'une addition ou d'une multiplication est unique, il s'ensuit que si *a* et *b* sont deux écritures du même nombre $a + c$ et $b + c$ seront deux autres écritures du même nombre par substitution de *b* par *a* dans l'écriture de la somme.
Il en est de même pour la multiplication à condition que *c* ne soit pas nul dans le cas de la division c'est à dire la multiplication par l'inverse de *c*.
Cela semble une telle évidence qu'on pourrait penser qu'il est inutile d'en faire une démonstration Mais si *a* et *b* sont des expressions littérales renfermant des nombres connus et une ou plusieurs lettres ayant le statut de nombre inconnu, cette évidence se brouille un peu.

Une chose est sûre : quelle que soit la méthode de démonstration, les élèves ne vont pas entrer dans ces raisonnements abstraits pour démontrer les propriétés de l'égalité tant qu'ils n'en verront pas l'intérêt.

2- Pour réussir la mise en équation

Il s'agit de faire comprendre à l'élève qu'il peut, à partir du texte du problème, trouver deux programmes de calcul qui doivent donner la même quantité. Comme on ne connaît pas la valeur de l'inconnue qui intervient dans ces deux calculs on peut imaginer que les deux quantités qu'on cherche à rendre égales sont chacune dans le plateau d'une balance.
En faisant des hypothèses sur la valeur de l'inconnue on fait pencher les plateaux de la balance d'un côté ou de l'autre : il s'agit de « la méthode des plateaux » des mathématiciens mettant en place la formule de « fausse position »[5].

Par exemple, considérons le problème énoncé dans le A sous sa forme « Alice et Bertrand ».
Sans écrire d'équation, on donne une valeur arbitraire au nombre choisi par Alice et Bertrand. Par exemple 10.
Le plateau d'Alice donne $2 \times 10 + 14 = 34$ et le plateau de Bertrand donne $4 \times 10 - 18 = 22$ Celui d'Alice est plus lourd. On ajuste en changeant la valeur du nombre, en raisonnant plus ou moins astucieusement pour atteindre la solution au plus vite.

En fait, que l'on utilise l'algèbre ou l'arithmétique pour résoudre le problème, la nécessité de cette prise de conscience d'une égalité « conditionnelle » est toujours là,
- soit pour écrire une égalité entre deux expressions algébriques (ici $2x + 14 = 4x - 18$),
- soit pour faire les essais même sans avoir écrit les membres de l'équation et pour évaluer la différence entre les « deux plateaux ».

Un des blocages que certains de nos élèves rencontrent est justement
- soit de s'arrêter à l'écriture d'une seule expression, sans signe d'égalité, et de croire que cela va suffire pour trouver l'inconnue.

[5] Les chimistes utilisent la même image mentale semble-t-il quand ils « équilibrent » une équation chimique.

- soit d'écrire une expression algébrique pour chaque membre qu'ils désignent parfois par deux lettres différentes, voire par la même lettre, par exemple A = $P_1(x)$ et A = $P_2(x)$ et de rester bloqués sur ces deux égalités, sans penser à utiliser la transitivité pour passer à l'équation. Un peu plus loin, nous verrons le cas de Camille qui a pensé à adopter le signe « ? » pour l'inconnue, mais qui bute sur l'écriture de l'égalité. Il nous apparaît que l'image mentale de la balance peut à ce stade, aider les élèves.

3- L'introduction de la balance pour enseigner les propriétés de l'égalité

Nous venons de voir que l'image mentale de la balance est utile pour résoudre les problèmes qui nous occupent, aussi bien par une méthode arithmétique que pour écrire une égalité lors de la mise en équation.
Elle a aussi été utile dans l'histoire des mathématiques, non seulement pour la méthode arithmétique de résolution des problèmes de premier degré, mais encore pour mettre en place les propriétés de l'égalité relativement à l'addition dans le but de résoudre des équations de degré supérieur à 1.

Al Kwarizmi s'attaque aux équations de degré 2 en classant ces équations en six types. Par exemple $ax^2 + c = bx$ est un de ces types qu'il sait résoudre. Pour cela il doit parfois changer les termes de l'équation initiale de membre, par exemple quand il part de :
$2x^2 – 13\,x + 8 = x^2 + 3$.
Il faut garder à l'esprit qu'il ne s'agit pas d'une équation au sens actuel, l'expression de ses « membres » se fait par des phrases, et il n'y a pas de signe =.
Al Kwarizmi utilise alors la métaphore de la balance pour transformer cette équation.[6].

Le professeur peut aussi utiliser l'image mentale de la balance dont nous avons déjà vu l'utilité pour les élèves dans le stade de la mise en équation, pour introduire les propriétés de l'égalité. Si cet objet a été tellement utile pour les mathématiciens au début des mathématiques, pourquoi en priver nos élèves ?

Nous avons décidé de faire conjecturer par les élèves de 4ème les propriétés de l'égalité pour résoudre un vrai problème mis en scène avec une balance. Ainsi la balance n'est pas une simple illustration ou une « métaphore ». Elle est un élément du « milieu » qui permet de transmettre le problème aux élèves Certes dans ce premier temps on se limitera à des nombres positifs. Mais la démonstration avec des nombres quelconques pourra venir ensuite.
Nous explicitons ci-dessous tous les arguments pour que le professeur puisse prendre ses décisions en toute liberté car nous connaissons les reproches qui sont faits à l'encontre de l'utilisation de la balance.

---

[6] Elle devient: $x^2 + 5 = 13\,x$. par deux rééquilibrages qui sont :

1- al-gàbr ou restauration :si le premier membre $2x^2 – 13\,x + 8$ doit se transformer $2x^2 +8$, il faut restaurer l'équilibre en rajoutant $13x$ au second

2- muqàbalah ou confrontation qui consiste en même temps à enlever 3 et diviser par 2.
La distinction vient du fait qu'enlever un nombre positif ou diviser par un nombre positif se conçoit bien avec les plateaux d'une balance, mais enlever $–13x$ pose des difficultés de représentation concrète car Al Kwarizmi ne dispose pas des nombres négatifs.
Cet exemple est développé dans l'ouvrage Histoires de problèmes, histoire des mathématiques- Commission Inter- IREM d'épistémologie et histoire des mathématiques- Editions Ellipse- 1993 et elle est évoquée dans le manuel Dimathème classe de 4ème

On entend souvent dire que les élèves ne sont plus familiarisés avec l'utilisation de ce type de balance. C'est loin d'être vrai. Ils savent depuis la maternelle ce qu'est une balançoire où deux enfants s'assoient à chaque extrémité d'une planche. Ils ont déjà rencontré ces balances à l'école primaire et certains professeurs de physique continuent de les utiliser dans leurs classes, en se servant eux-mêmes de la métaphore de la balance pour résoudre des équations algébriques avec les élèves s'ils en ont besoin dans le cadre de leur discipline. Au pire, dans le cas où les élèves n'en auraient jamais manipulé, il est très facile d'emprunter une balance Roberval aux physiciens afin de leur en expliquer le fonctionnement et leur montrer notamment que si on enlève un objet sur un des plateaux d'une balance équilibrée, l'équilibre est rompu[7].

L'autre critique souvent entendue est que ce modèle atteint rapidement ses limites avec l'utilisation des nombres négatifs. Nous objecterons à cela que la balance nous permet en fait de travailler les propriétés des égalités, de les conjecturer avec les nombres positifs pour mieux les démontrer ensuite.
De plus la balance n'est pas l'unique approche des équations que nous utilisons (voir étape 3 de la situation 1).

Lorsqu'on propose cette activité aux élèves, on ne leur donne pas le titre du chapitre afin de ne pas les influencer. Ils sont parfois surpris et se demandent vraiment où leur professeur veut en venir avec ses balances, ce qui accroche d'autant plus leur attention

[7] Le professeur peut aussi amener dans la classe une tige de mécano plantée verticalement dans un bocal de sable et une autre tige de mécano horizontale pouvant pivoter autour d'un axe fiché dans la tige verticale. De simples épingles à linge suspendues à égale distance de l'axe permettront d'illustrer le principe de la balance et au passage la loi des leviers qui conduit à la proportionnalité inverse de la longueur du bras et de la masse. C'est très important pour la culture de nos élèves. Ce dispositif permet aussi d'introduire des forces orientées qui s'exercent en sens contraire aux extrémités des bras de levier.
Et que dire du symbole de la justice qu'ils étudient en 4ème avec le professeur d'éducation civique ?

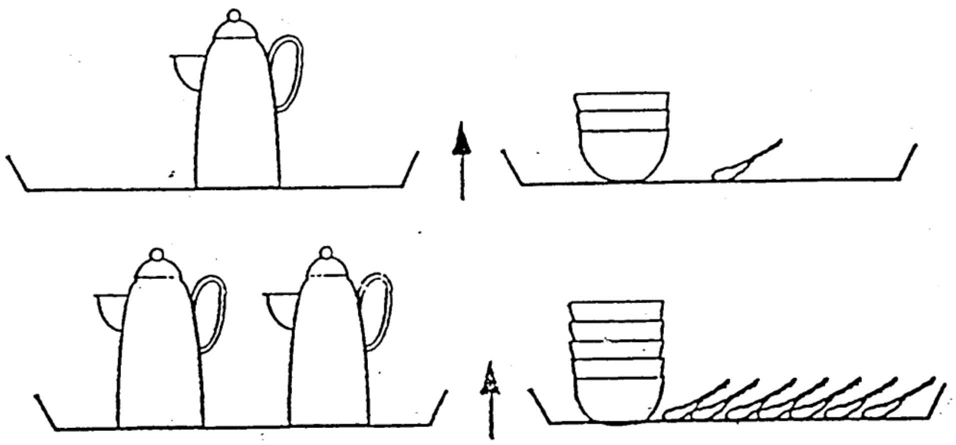
Situation 1 : Egalités et opérations

L'objectif de cette situation 1 en trois étapes est de conjecturer les propriétés de l'égalité vis à vis des opérations.
Dans les trois étapes les élèves utilisent en acte toutes les propriétés de l'égalité vis à vis de l'addition et de la multiplication, avec des nombres entiers positifs. Ils les formulent comme des conjectures pour tous les nombres. Le professeur attend d'avoir traité les étapes 2 et 3 pour les institutionnaliser et les démontrer simplement en utilisant la substitution.
La technique de résolution d'équations se met en place en classe par la succession des problèmes dans les étapes 2 et 3 de la situation 1 et la situation 2.
Jusqu'à la fin de la situation 2, le professeur ne donne aucun exercice technique à faire à la maison.

Etape 1 [8] Première rencontre avec les propriétés de l'égalité

C'est parce que ce problème pourrait se traduire par un système de deux équations à trois inconnues que les propriétés de l'égalité vont fonctionner utilement.

Sur les plateaux de ces balances il y a des pots, des bols et des petites cuillères. Ces balances sont en équilibre.



Combien faut-il mettre de petites cuillères sur le plateau de droite pour que la balance soit en équilibre ?

Rédiger la façon dont vous avez raisonné.

Pour faciliter la mise en commun, cette étape est proposée à la fin d'une séance (20 minutes sont suffisantes) de manière à récupérer les productions des élèves, pour en choisir quelques-

[8] Source : « Activités mathématiques au collège » Hors série Petit *x* 1992-93

unes et préparer un transparent à partir duquel la discussion s'engagera lors de la séance suivante.

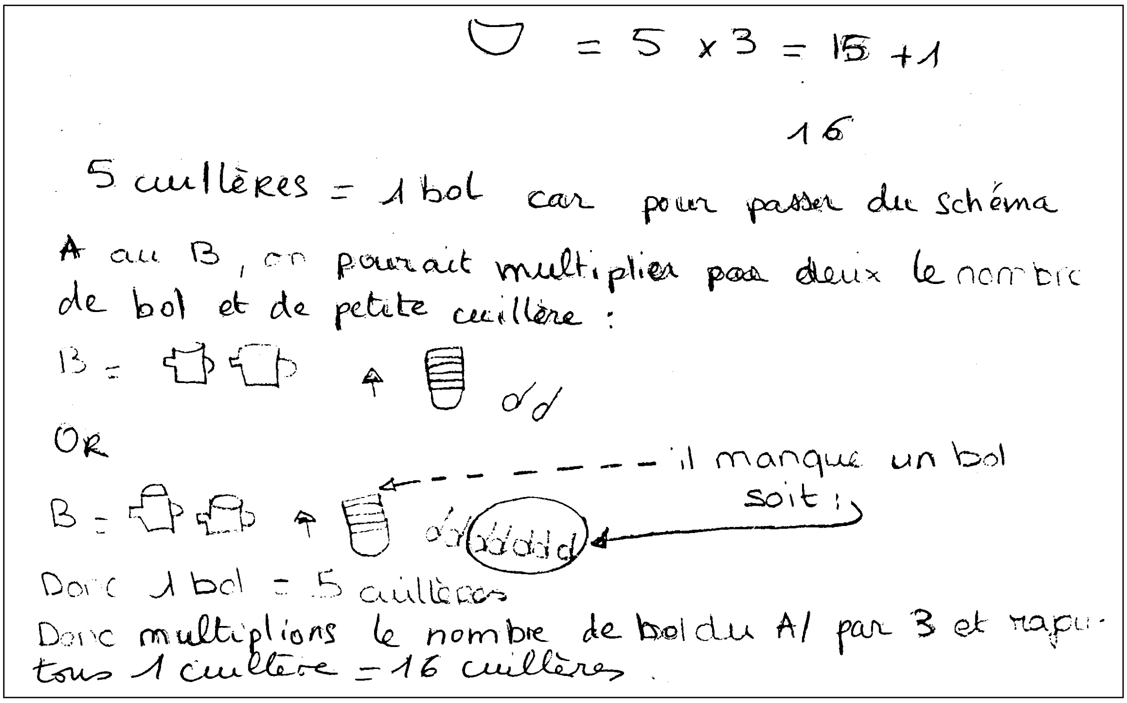
<u>Stratégies des élèves :</u>
Lors de cette première activité, les élèves trouvent principalement deux méthodes :
<u>Première méthode :</u> Ils déduisent de la première balance que deux pots ont la même masse que six bols et deux cuillères, ils concluent alors grâce à la deuxième balance que six bols et deux cuillères ont la même masse que cinq bols et sept cuillères et donc qu'un bol a la même masse que cinq cuillères.
<u>Deuxième méthode :</u> Ils déduisent par différence entre les deux équilibres qu'un pot a la même masse que deux bols et six cuillères. Deux bols et six cuillères ont alors la même masse que trois bols et une cuillère et donc un bol a la même masse que cinq cuillères.
Une fois arrivés à cette conclusion, les élèves n'ont plus beaucoup de difficultés pour donner la réponse : un pot a la même masse que seize cuillères.

Quelques élèves affectent au hasard des masses aux objets mais le système essai-erreur qu'ils mettent ensuite en place ne leur permet pas d'aboutir à la solution.

La rédaction de la justification n'est pas aisée. Certains élèves font des phrases comme nous venons de le faire, d'autres font des dessins, d'autres encore utilisent des égalités et écrivent : « 1 pot = 3 bols + 1 cuillère » pour décrire le premier équilibre. Des élèves écrivent même « 1p = 3b + 1c ». On pourrait alors conclure que ceux-là ont intégré l'usage de la lettre dans la mise en équation. Cependant, pour la plupart d'entre eux, la lettre « p » ne désigne pas la masse du pot mais simplement l'abréviation du mot « pot » et donc 3b est loin de signifier pour eux $3 \times b$ soit « trois fois la masse d'un bol » !

Voici quelques productions d'élèves qui concernent la première méthode :

<u>Production 1 :</u>



Cet élève annonce d'abord son résultat (avec une erreur de dessin) : un pot égale 16 cuillères en expliquant 16 par 5 × 3 + 1 Il justifie ensuite pourquoi un bol égale 5 cuillères en utilisant la première méthode et termine en raisonnant sur les écarts. Il rédige sa solution en utilisant uniquement des dessins de balances et d'objets pour écrire les égalités.

<u>Production 2 :</u>

1 pot = 3 bols + 1 cuillère

2 pots = 6 bols + 2 cuillères = 5 bols + 7 cuillères donc 1 bol = 5 cuillère

donc 2 pots = 5 bols + 7 cuillires = (5x5) + 7 = 25 + 7 = 32 don

<u>2 pots = 32 cuillères</u> = donc 1 pot = 16 cuillères .

Ce deuxième élève utilise des opérations et des égalités pour rédiger sa solution. Il utilise lui aussi la première méthode pour débuter puis il termine en exprimant la valeur de 2 pots en cuillères et il divise par deux.

Lors du débat, au cours de la mise en commun, on peut décider d'une présentation commune et l'usage des lettres obtient l'adhésion de tous !

Voici un exemple de rédaction de la solution, utilisant cette fois la deuxième méthode à laquelle la mise en commun peut aboutir :

On désigne par p la masse d'un pot, par b, celle d'un bol et par c celle d'une cuillère.

$1p = 3b + 1c$

$2p = 6b + 2c$ *on a doublé la masse de chaque plateau*

or $2p = 5b + 7c$ *donc* $5b + 7c = 6b + 2c$

$7c = 1b + 2c$ *on a enlevé 5b à chaque plateau*

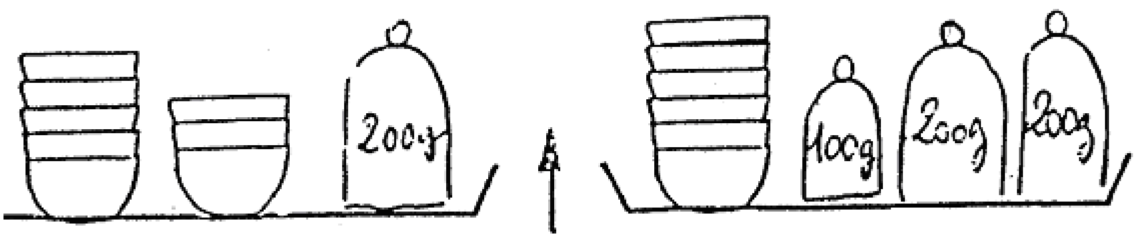
$5c = 1b$ *on a enlevé 2c à chaque plateau*

donc $1p = 3 \times 5c + 1c = 16c$.

1 pot est donc en équilibre avec 16 cuillères.

<u>Etape 2</u> : Application pour déterminer une inconnue

Cette balance est en équilibre. Quelle est la masse d'un bol ?



Le comptage des bols est difficile, il y en a 8 à gauche et 6 à droite.

Cette étape permet de retravailler les propriétés de l'égalité déjà vues à l'étape 1, elle permet de poursuivre la formalisation jusqu'à arriver à la technique des équations.
Les élèves, pour résoudre ce problème, enlèvent 6 bols et 200g sur chaque plateau. Ils arrivent alors au fait que deux bols et 300g ont la même masse.

Voici quelques productions d'élèves :

<u>*Production 1 :*</u>

8b + 200g   6b + 100g + 200g + 200g

1ère balance = 8b + 200g
2ème balance = 6b + 100g + 200g + 200g

-200g   8b + 200g = 6b + 100g + 200g + 200g   -200g

-6b   8b = 6b + 100g + 200g

2b = 100g + 200g   -6b

÷2   1b = 150g   ÷2

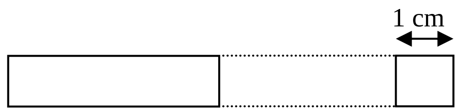
<u>*Production 2 :*</u>

~~A~~ Sa On soustrait 8 Bol par 6 sa fait 2 Bol Comme Dans la 2ème balance il y a 300g en trop ~~A~~. Ses 300g font 2 Bol alors je divise 300g par 2. Sa fait 150g. 1 Bol est fait 150g

Ainsi, certains élèves ont bien amorcé le travail sur les équations (production 1) et vont encore le parfaire à l'étape suivante. D'autres, cependant, ne sont pas passés à la formalisation (production 2).
Pour consolider l'utilisation des propriétés des égalités, nous proposons l'étape 3 où les élèves sont amenés à utiliser une autre représentation mentale que celle de la balance. La grandeur en jeu sera la longueur et non plus la masse. L'égalité se vérifie par juxtaposition des deux bandes et pas par l'équilibre des plateaux d'une balance. Cela donne une autre image mentale de l'égalité aux élèves.

<u>Etape 3[9] :</u> Contexte autre que la balance.

On possède un stock de rectangles identiques et de carrés identiques qui ont été découpés dans une baguette de bois de 1 cm de largeur. On constate que si l'on met bout à bout 2 rectangles et 8 carrés cela fait la même longueur que si l'on met 7 rectangles et 2 carrés. Quelle est la longueur d'un rectangle ?



Pour aider les élèves à mieux appréhender la situation, le professeur peut apporter des cubes et des parallélépipèdes de même largeur et de même hauteur (les jeux pour enfants du type des duplos font très bien l'affaire). Il peut ainsi leur montrer des suites de carrés et de rectangles comparables à ceux proposés dans l'étape 3. Dans le cas des duplos il y a des pavés droits dont la longueur est deux fois celle du carré, donc si l'on met bout à bout 5 pavés et 2 cubes, on obtient la même longueur qu'en mettant bout à bout 3 pavés et 6 cubes.

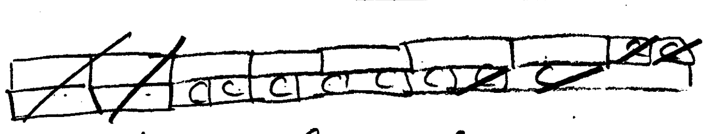
<u>Stratégies des élèves :</u>
On voit apparaître dans la classe plusieurs méthodes :
Certains écrivent une équation mais rares sont ceux qui vont au bout de la résolution. Parmi ceux-là, il y en a qui utilisent même deux inconnues pour désigner le carré et le rectangle (voir production n°2) : certains aboutissent à « 5 rectangles = 6 carrés ». Il y a là encore confusion entre la longueur du rectangle et l'abréviation du mot rectangle.
D'autres font des schémas et ils sont confrontés au problème de l'égalité des longueurs des deux alignements car ils ont pris une mesure quelconque pour le côté du rectangle. Ils prennent alors conscience qu'une seule mesure doit être solution.
Ils mettent alors en place plusieurs stratégies :

- *soit ils raisonnent avec deux longueurs différentes des alignements en faisant comme si elles étaient égales,*
- *soit ils « s'arrangent » pour avoir des alignements de même longueur (voir production n°1).*

Enfin quelques élèves utilisent les propriétés de l'égalité en faisant des phrases (voir production n°3).

Voici quelques productions d'élèves :
<u>Production 1 :</u>

c = carré



5 rectangle = 6 carrée

6 : 5 = 1,2

Une réctangle fait 1,2 cm de long.

---

[9] « Des mathématiques au cycle central », Commission inter-IREM 1er cycle juin 2001.

Cet élève rédige sa solution en faisant un dessin. Il supprime deux rectangles et deux carrés à l'extrémité de chaque ligne. Le dessin est difficile à faire car pour une longueur quelconque, les deux assemblages n'ont pas la même longueur. C'est pourquoi il a étiré le dernier « carré » en bas. Cette difficulté va conduire un plus grand nombre d'élèves à se passer du dessin pour aller vers plus de formalisation mathématique.

Production 2 :

carré = x rectangle : y $2y + 8x = 7y + 2x$ $6x = 5y$ $6 \div 5 = 1,2$ $1,2 \times 1 = 1,2$ cm La longueur du rectangle est de 1,2cm	On enlève deux carré partout et deux rectangles partout donc 6 carrés est égale à 5 rectangles. $6 \div 5 = 1,2$; $1,2 \times 1 = 1,2$ cm. donc la longueur du rectangle est de 1,2cm

Cet élève utilise des lettres pour rédiger sa solution, il a même choisi x et y et non c et r les initiales des mots « carré » et » rectangle ». Dans la deuxième colonne, il explique son calcul par une phrase. Il a bien utilisé les propriétés de l'égalité.

Production 3 :

si l'on enlève 2 rectangles et 2 carrés il reste 5 rectangles et 6 carrés

$6 \div 1.2 = 5$ et $5 \times 1.2 = 6 \div 5 = 1.2$

Donc la longueur d'un rectangle est ~~de~~ 1.2 cm

Cet élève utilise uniquement des phrases pour rédiger sa solution, il ne fait que des calculs arithmétiques.

Lors de la mise en commun, on se met d'accord sur la présentation de la solution.

En parallèle de cette résolution, le professeur peut expliquer les différentes étapes avec le schéma suivant :
x désignant la longueur du rectangle.

$$7x + 2 = 2x + 8$$
$$\downarrow -2x \qquad \downarrow -2x$$
$$5x + 2 = 8$$
$$\downarrow -2 \qquad \downarrow -2$$
$$5x = 6 \qquad \text{donc } x = \frac{6}{5}$$

Cette présentation moins formalisée que la suivante, est plus visuelle et peut aider certains élèves.

On peut rédiger aussi de la façon suivante :

$7x+2-2=2x+8-2$

$7x=2x+8-2$

$7x-2x=2x+6-2x$

$7x-2x=6$

$5x=6$

$x=\frac{6}{5}$

$x=1,2$

Pour calculer $2x + 6 - 2x$ il faut transformer la soustraction en addition et donc il faut avoir vu que l'opposé de $2x$ est $(-2x)$.
On a alors :
$2x+6-2x=2x+(-2x)+6=0+6=6$

***A retenir :* Quand on a une égalité, on obtient une autre égalité en ajoutant (ou en soustrayant) le même nombre aux deux membres de l'égalité.**
Quand on a une égalité, on obtient une autre égalité en multipliant (ou en divisant) chaque membre par un même nombre (non nul).

Quand les manuels proposent une démonstration, c'est la suivante :
$a = b$ donc $a - b = 0$
Calculons $(a + c) - (b + c) = a - b = 0$ donc $a + c = b + c$.

Cela nous semble trop compliqué, nous préférons utiliser la substitution.
Comme $a = b$, si on ajoute c à a , cela donne : $a + c$. Il suffit de substituer a à b dans cette somme et on obtient $a + c = b + c$. On obtient la réciproque en ajoutant $(-c)$ ou en enlevant c.

On peut procéder de même pour démontrer que si $a = b$ alors $ac = bc$. On pourrait se passer de cette deuxième propriété pour la technique de résolution d'une équation car il suffit de se ramener à une équation du type $ax = b$ en utilisant seulement la transformation des membres par addition puis de trouver x en utilisant la définition du quotient.

La rédaction de la démonstration est très difficile à comprendre pour les élèves car il faut imaginer que les lettres a,b,c peuvent désigner une expression algébrique. De plus la propriété démontrée est une évidence pour les élèves. La démonstration se fait donc uniquement à l'oral et le professeur peut même décider de ne pas la faire ou de ne la faire seulement que si une difficulté survient dans l'utilisation de cette propriété.

Exercice à donner à la maison :
On possède un stock de baguettes de bois identiques et d'allumettes identiques. Chaque allumette a une longueur de 4 cm.
On constate que si l'on met bout à bout 12 baguettes et 18 allumettes cela fait la même longueur que si l'on met bout à bout 17 baguettes et 4 allumettes.
Quelle est la longueur d'une baguette en cm ?

Malgré les nombres plutôt grands de baguettes et d'allumettes certains élèves font encore un schéma et résolvent le problème par une procédure arithmétique.

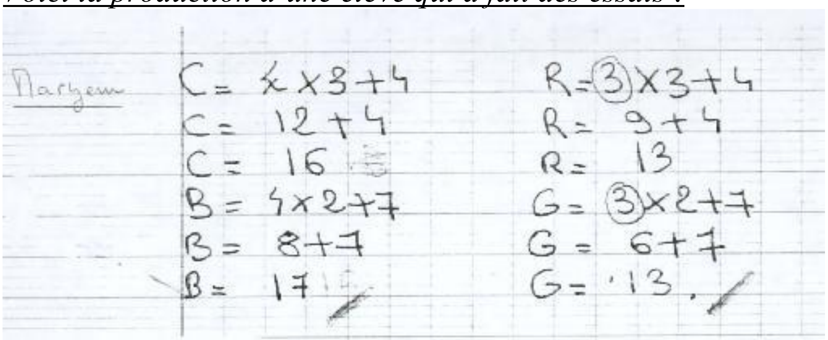
<u>Situation 2 : Des problèmes où le passage à l'algèbre est relativement simple.</u>

On commence avec le problème 1 dont la solution est 3. Certains élèves trouvent rapidement la solution en faisant des essais. On leur donne alors aussitôt le problème 2 où la solution est 0,75.

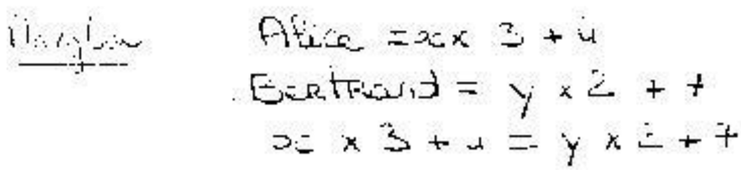
<u>Problème 1 :</u> Deux élèves Alice et Bertrand ont chacun une calculette. Ils affichent le même nombre sur leur calculette. Alice multiplie le nombre affiché par 6 puis ajoute 7 au résultat obtenu. Bertrand multiplie le nombre affiché par 2 puis ajoute 10 au résultat obtenu. Quand ils ont terminé ils s'aperçoivent que leurs calculettes affichent le même résultat. Quel nombre ont-ils affiché au départ ? <u>Problème 2 :</u> Deux élèves Alice et Bertrand ont chacun une calculette. Ils affichent le même nombre sur leur calculette. Alice multiplie le nombre affiché par 5 puis ajoute 4 au résultat obtenu. Bertrand multiplie le nombre affiché par 10 puis ajoute 7 au résultat obtenu. Quand ils ont terminé ils s'aperçoivent que leurs calculettes affichent le même résultat. Quel nombre ont-ils affiché au départ ?

Ces problèmes sont inspirés de l'ouvrage «Les débuts de l'algèbre au collège » Editions INRP.et repris dans les commentaires de programmes « Du numérique au littéral » Ils nous ont parus intéressants car ils permettent d'éviter autant que faire se peut le recours à l'arithmétique. La situation est purement abstraite.
En effet la notion d'écart a ici moins de sens que si l'on résolvait le problème : « le prix de 6 sucettes et de 7 bonbons est le même que celui de 2 sucettes et 10 bonbons ; sachant qu'un bonbon coûte 1€, quel est le prix d'une sucette ? ». Dans ce cas là, l'équation n'est pas la méthode la plus efficace et une grande majorité d'élèves résout le problème, comme il l'aurait fait à l'école primaire en disant que 4 sucettes coûtent le même prix que 3 bonbons et donc qu'une sucette coûte 0,75€.
Ici, la situation purement abstraite entraîne une mise ne équation plus facile que dans un problème dit « concret ».

<u>Voici la production d'une élève qui a fait des essais :</u>



- *quand les élèves font des essais, la lettre a pour eux le statut de variable. Ils sont tellement pris dans ce statut qu'ils oublient le statut d'inconnue, d'autant plus que les deux membres de l'équation sont des programmes de calcul abstraits.*
- *Par exemple cette élève désigne la variable de chaque programme de calcul par deux lettres différentes et s'arrête en oubliant qu'il s'agit de la même inconnue.*



Nous avons trouvé des productions du genre :
Alice $3\times 5 + 4 = 19$ *et Bertrand* $2 \times 6 + 7 = 19$
qui dénotent la même difficulté que Marylou. Ils prennent deux nombres différents au départ et pensent avoir résolu le problème car ils ont trouvé le même résultat. Ils disent qu'il y a égalité, mais ne peuvent pas conclure.
Envisager la lettre comme une variable est ici un obstacle à la compréhension de ce qu'est une équation.

- *Il y a d'autres difficultés aussi bien pour le problème 1 que pour le 2, qui viennent de la transitivité de l'égalité.*

Camille	Alice: ?x3 +4 = même résultat que B Bertrand: ?x2 +7 = même résultat que A.

Cet élève a bien désigné l'inconnue par un point d'interrogation, mais il a oublié qu'il peut la trouver en écrivant une égalité, rappeler la balance ou les bandes de même longueur sera utile. De plus avec la notation « ? », on ne sait pas si l'élève a bien compris qu'il s'agit du même nombre dans les deux calculs.

D'autres désignent le résultat commun d'Alice et Bertrand par une lettre :

$$6\times x+7=y$$
$$2\times x+10=y$$

Ils n'arrivent pas à écrire l'équation, car pour eux il y a deux inconnues.

~~Enseignant~~ On va dire n le nbre départ :

a. $\boxed{n\times 3+4=\Omega}$ ~~4 : 3 3n+~~

$3\times n+4 = z$

b. $\boxed{n\times 2+7=\Omega}$

- *D'autres écrivent Alice :* $x \times 6 + 7$ *Bertrand :* $x\times 2 + 10$ *et* $x \times 6 + 7 = x \times 2 + 10$

Ils ont écrit l'égalité mais ne savent pas continuer en utilisant ses propriétés car ils ne reconnaissent pas la situation rencontrée lors des problèmes précédents de masses ou de longueurs égales.

Ils confondaient jusque-là, les objets, les grandeurs et les mesures associées à cause de l'écriture 6x qui peut se lire comme une multiplication externe (6 objets aussi bien que 6 fois une mesure). Ceci a facilité implicitement la construction du sens dans leur travail. La mise en équation étant facile, ils écrivent $x\times 6$ *qui ne peut être qu'une multiplication interne car x ne peut être autre chose qu'un nombre. La rencontre à ce moment de la progression avec ces problèmes abstraits est donc indispensable pour franchir cet obstacle. Les élèves le rencontrent toujours dans les mises en équation pour résoudre des problèmes, quel que sit le mode d'introduction des équations adopté par l'enseignant.*

- *Certains élèves raisonnent sur les écarts.*

L'écart $6x - 2x$ vaut $4x$ et l'écart $10 - 7$ vaut 3.
Ils en déduisent facilement que : $4x = 3$

Ceux qui raisonnent ainsi sur les écarts vont plus vite que les autres. Ils sont donc persuadés d'avoir trouvé une méthode plus efficace. Cela les empêche de comprendre la méthode générale si on ne remet pas leur méthode en cause avec le problème suivant :

Problème 3 : Alice et Bertrand ont chacun une calculette. Ils affichent le même nombre sur leur calculette. Alice multiplie le nombre affiché par 5 puis ajoute 4 au résultat obtenu. Bertrand multiplie le nombre affiché par 10 puis ajoute 7 au résultat obtenu. Quand ils ont terminé ils s'aperçoivent que leurs calculettes affichent le même résultat. Quel nombre ont-ils affiché au départ ?

La solution de ce problème est négative.
Les élèves sont conduits à écrire $5x + 4 = 10x + 7$
Celui qui raisonne avec les écarts pour résoudre cette équation va trouver $5x = 3$
d'où une solution positive qui se révèlera fausse au moment de la vérification. D'autres pensent que c'est impossible car $10x > 5x$ et $7 > 4$ donc $10x + 7$ est forcément supérieur à $5x + 4$. Ils ne pensent pas aux nombres négatifs.

A la suite de ces problèmes, le professeur pourra donner des exercices à la maison du type :
« Les nombres 2 et 3 sont-ils solutions de l'équation $5x + 4 = 9x - 8$? »
Cela permettra aux élèves de travailler sur la notion de solution d'une équation.

A la suite de cet enchaînement de situations, on pourra mettre en place la méthode de résolution des problèmes à l'aide d'une équation.

A retenir* : Pour résoudre un problème, on peut le mettre en équation, pour cela :** ***1) on désigne l'inconnue ***2) on traduit le problème par une égalité*** ***3) on résout l'équation en utilisant les propriétés de l'égalité*** ***4) on vérifie sa solution.*** ***5) on conclut en donnant la réponse du problème.***

Situation 3 : Progression pour la mise en équation de problèmes.

Dans ces problèmes, les élèves vont rencontrer des situations avec des difficultés de plus en plus grandes pour apprendre à mettre un problème en équation.
Chaque exercice permet d'aborder une difficulté différente au niveau de la mise en équation et des calculs algébriques nécessaires pour résoudre l'équation.
Parallèlement à ces problèmes traités en classe, le professeur peut donner des exercices techniques en rapport avec les difficultés rencontrées dans les problèmes.

Toutes les solutions arithmétiques de ces problèmes proposées par les élèves sont acceptées. Les élèves nous en proposent toujours quelques-unes assez astucieuses. Mais à la fin de cette progression, ils ont compris que le recours à l'algèbre leur permet de trouver toujours la solution, et ils n'hésitent plus à l'utiliser.

Problème 1 : Un nombre est tel que son double augmenté de 16 est égal à son triple diminué de 21. Quel est ce nombre ?

*Pour la première fois ici, il est nécessaire d'**ajouter** le même nombre aux deux membres de l'égalité. La confrontation des différentes méthodes est l'occasion de rappeler que soustraire –21 c'est ajouter 21.*

Problème 2 : Je pense à un nombre, j'enlève son double de 20, je trouve le même résultat que si j'ajoute 15 à son triple. Quel est ce nombre ?

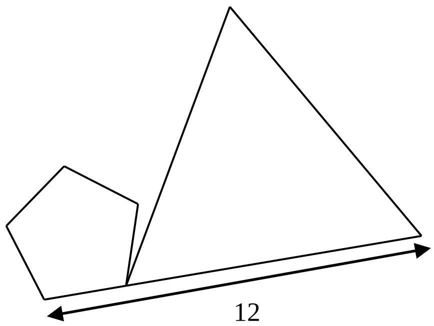
Dans ce problème, l'un des coefficients de x est négatif et il va falloir ajouter 2x aux deux membres de l'égalité. C'est plus difficile que d'ajouter un nombre connu comme au problème précédent.

Problème 3 : Je pense à un nombre, je lui ajoute 20, puis je double le résultat obtenu.
Curieusement, je trouve 10 fois le nombre de départ.
A quel nombre ai-je pensé au départ ?

Il faut d'abord utiliser la distributivité, pour réduire l'expression, avant de résoudre l'équation.
La mise ne équation donne $2(x + 20) = 10x$

Problème 4 : Calculer x le côté du pentagone régulier pour que son périmètre soit égal à celui du triangle équilatéral.

La mise en équation donne $5x = 3(12 – x)$
Cet exercice nécessite l'utilisation de la distributivité de la multiplication par rapport à la soustraction.



Problème 5 : Un père a 42 ans. Il a deux enfants de 11, 9 et 4 ans. Dans combien d'années l'âge du père sera-t-il égal à la somme des âges de ses deux enfants ?

La mise en équation devient difficile car il ne s'agit plus de programmes de calcul.
Les élèves doivent se représenter la situation en imaginant les années qui passent.
Le choix de la variable "nombre d'enfants" est important. Avec deux enfants seulement (par exemple 11 et 9 ans) la mise en équation présente exactement la même difficulté qu'avec trois enfants. Elle conduit à : $42 + x = 11 + x + 9 + x$ *Mais, dans ce cas, pas mal d'élèves évitent l'algèbre en raisonnant sur l'écart entre l'âge du père et la somme des âges des deux enfants qui diminue d'une année par an. Ils suivent l'évolution de la différence à mesure que la variable nombre d'années augmente. Cela se fait mentalement, ce qui donne la solution par simple différence sans équation.*

42 – (11+ 9) = 20 et la réponse est 20 ans.
C'est un peu plus difficile avec trois enfants car l'écart diminue de 2 ans chaque année, donc il faut diviser par 2 la différence, d'où le choix de trois d'enfants.
Pour faciliter la compréhension de ce type d'exercice sur les âges, on peut suggérer aux élèves qui ne trouvent pas une solution arithmétique et qui sont complètement bloqués pour mettre en équation, de s'aider d'un tableau à deux colonnes avec les âges aujourd'hui et les âges quelques années plus tard

Après ce problème 5, un élève nous a demandé s'il était possible qu'un tel problème « concret » ait des solutions négatives. Le problème 6 est une réponse à sa question.

<u>Problème 6 :</u> Un père a 38 ans. Ses quatre enfants ont 18, 12, 8 et 6 ans. Est-il possible que l'âge du père soit un jour (ou ait été) égal à la somme des âges de ses quatre enfants ?

La mise en équation est plus difficile car la question ne dit pas quelle est l'inconnue à désigner par x.
La solution est –2 : il y a deux ans l'âge du père était la somme des âges de ses quatre enfants.

<u>Problème 7 :</u> Un nombre est tel que son tiers augmenté de son cinquième est égal à 110.
Quel est ce nombre ?

La résolution nécessite ici un travail sur la somme de deux écritures fractionnaires.

<u>Problème 8 :</u> On a trois sacs de bonbons. Le premier contient 30 bonbons de plus que le troisième, le deuxième contient 6 bonbons de moins que le troisième.
En tout il y a 150 bonbons. Quel est le nombre de bonbons dans chaque sac ?

Même si le problème comporte trois inconnues, il n'est pas difficile d'écrire deux inconnues en fonction de la troisième.

Si on pose ce même problème seul en début de troisième par exemple, les élèves proposent des solutions qui n'utilisent pas d'équations. C'est rarement le cas lorsqu'il vient à la fin d'une série de problèmes comme ici.

Ils peuvent utiliser la méthode des essais :
<u>Méthode 1 :</u> en conservant la contrainte de la somme, ils divisent 150 par 3 et trouvent 50 bonbons pour chaque sac. Ensuite, ils ajustent pour satisfaire les autres contraintes. Cette méthode, très rapide quand il n'y a que deux sacs, devient ardue avec trois sacs.
<u>Méthode 2 :</u> en prenant un nombre arbitraire pour le troisième sac, 40 par exemple, ils conservent les deux autres contraintes : 40 + 30 ; 40 + 6 ; 40. La somme est 144 soit 6 bonbons de moins que 150, on enlève deux bonbons à chaque sac.
Ceux qui ont divisé par 3 pour trouver 50 continuent parfois avec la méthode 2. Le calcul de 50 leur a servi à trouver un ordre de grandeur pour la valeur de l'essai.

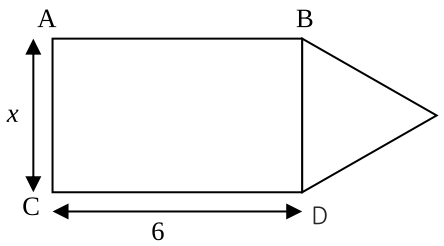
Cette méthode 2 signifie que l'élève est prêt à écrire deux inconnues en fonction de la troisième, ce qui donne une résolution facile, sans équation, avec une méthode pré-algébrique cette fois et non arithmétique. Il suffit de représenter le contenu des sacs par trois segments par exemple. La première longueur a 30 unités de plus que la troisième et il en manque 6 à la seconde pour avoir la troisième. Le calcul 150 –30 + 6 donne trois fois la contenance du troisième sac.

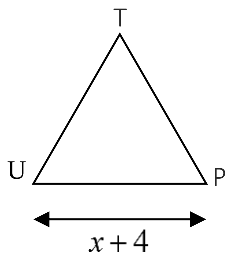
Lors de la mise en commun, en traduisant cette solution fournie par des élèves dans le langage de l'algèbre, on comprend qu'il s'agit sur le fond de la « même solution » , même si elle est très différente sur la forme.

Ce problème permet de préparer celui du concert par exemple, ou tout autre problème de mélange, ou un problème d'un autre type pour lequel l'écriture d'une équation avec une seule inconnue bien choisie n'est pas facile. Les problèmes du type de celui du concert peuvent être réservés à la 3ème au moment de l'étude des systèmes d'équations.

<u>Situation 4 : « égalité, équation, identité… »</u>

<u>Etape 1</u> : Identité.





ABDE est un rectangle BDC est un triangle équilatéral.   TUP est un triangle équilatéral.

Pour quelle(s) valeur(s) de *x* ces deux figures ont-elles le même périmètre ?

Les élèves, pour la plupart, écrivent sans difficulté l'équation mais quand ils obtiennent des égalités du type 3x+12 = 3x+12 ou 0 x = 0 , ils ne savent plus que répondre …. Et ce qui ressort le plus souvent est « ce n'est possible ! ».
La mise en commun permet de distinguer le calcul des deux périmètres avant de se lancer dans l'écriture d'une équation, on obtient alors 3x +12 pour les deux et on conclut que les deux figures ont le même périmètre quelle que soit la valeur de x.

<u>Bilan :</u> $x+6\times 2+2x=3x+12$ est vraie pour n'importe quelle valeur de *x*. Cette égalité est toujours vraie, cela s'appelle une identité.

<u>Etape 2 :</u> Equation à plusieurs solutions.

On donne l'égalité $x\times x-2\times x=x-2$
Les nombres 1 et 2 vérifient –ils cette égalité ?
Quelle conjecture peut-on faire ? Est-elle exacte ?

Si les élèves connaissent les puissances, on peut bien entendu écrire $x^2-2x=x-2$.
Comme l'égalité est vraie pour 1 et 2, la majorité des élèves a vite fait de dire que c'est une identité. Heureusement quelques sceptiques testent avec d'autres valeurs et le nombre 0 est une des premières valeurs à être donnée pour démentir la conjecture.
C'est l'occasion de distinguer cette égalité de celle qui a été vue à l'étape 1 de montrer en quoi elles sont différentesbien que le même signe « = » soit employé et de mettre l'accent sur la notion de contre-exemple.

Bilan : $x^2 - 2x = x - 2$ est vraie pour $x = 1$, $x = 2$ mais elle n'est pas vraie pour $x = 0$, $x = 3$ etc … cette égalité est une équation qui a deux solutions.

Autre possibilité pour cette étape 2 :

Le professeur fait travailler les élèves sur l'équation $x^3 + 11x = 6x^2 + 6$
Le nombre 1 est-il solution de cette équation ? Le nombre 2 est-il solution de cette équation ? Le nombre 3 est-il solution de cette équation ? Pouvez-vous faire une conjecture ?

L'équation a été obtenue par transformation de l'équation $(x-1)(x-2)(x-3) = 0$

La conjecture la plus fréquente est : tous les nombres sont solutions de cette équation
L'essai pour le nombre 4 permet de réfuter cette conjecture. Le professeur dit aux élèves qu'ils verront plus tard pourquoi cette équation n'a que 3 solutions.

Etape 3 : Equation qui n'a pas de solution.

Deux élèves Alice et Bertrand ont chacun une calculette. Ils affichent chacun un nombre sur leur calculette. Alice ajoute 5 au nombre affiché, puis multiplie par 4 le résultat obtenu.
Bertrand ajoute 7 au double du nombre affiché, puis multiplie le résultat obtenu par 2.
Quand ils ont terminé ils s'aperçoivent que leurs calculettes affichent le même résultat.
1. Ils pensent qu'ils ont affiché le même nombre au départ. Est-ce vrai ?

Les élèves écrivent l'équation et restent dubitatifs devant l'égalité obtenue : 0x = 6…. que certains écrivent 0 = 6 . Le fameux « c'est impossible » retentit dans la classe et cette fois-ci, c'est vrai !
On conclut que ce problème n'a pas de solution car il n'existe pas de nombres x tel que $(x+5)\times 4 = (2x+7)\times 2$.

2. Ils ont trouvé tous les deux 16. Quel est le nombre affiché par Alice ? Quel est celui affiché par Bertrand ?

A retenir :
Une équation peut avoir une seule solution : $6x+7=2x+10$ ***n'est vraie que pour*** $x=0{,}75$**.**
Une équation peut avoir plusieurs solutions : $x^3+11x=6x^2+6$ ***a trois solutions 1 , 2 et 3 .***
Une équation peut n'avoir aucune solution : il n'existe aucun nombre x ***tel que*** $(x+5)\times 4=(2x+7)\times 2$.
Une équation peut avoir une infinité de solutions : $x+6\times 2+2x=3x+12$ ***est vraie pour n'importe quelle valeur de x. On a alors une identité.***

Étape 4 : Problème mettant en jeu deux inconnues.

Problème : J'ai payé 5 € pour deux cafés et un chocolat. Pouvez-vous savoir quel est le prix d'un chocolat et celui d'un café ?

Les élèves s'aperçoivent qu'il y a plusieurs possibilités et que si on fixe le prix d'une des consommations, on peut calculer le prix de l'autre.

Le professeur peut alors rajouter une deuxième condition : un chocolat coûte 0,50 € de plus qu'un café. Les élèves constatent qu'il n'y a plus qu'une solution.
Ils peuvent écrire deux équations où d'emblée une seule comme dans le problème du concert. C'est un des types de problème proposé en 4ème le plus difficile pour la mise en équation.
Nous préparons ainsi la leçon sur les systèmes qui aura lieu en 3ème où nous pourrons représenter les deux fonctions affines dans un même repère, pour expliquer ce qui se passe.

Réflexions pour le professeur sur la technique de résolution d'une équation

La résolution des équations peut se faire par une autre méthode que celle que nous avons choisie

Les élèves ont appris avec la définition de la différence qu'il est équivalent de dire $a = b$ et $a - b = 0$. Donc toute équation de la forme $P_1(x) = P_2(x)$ peut se ramener à $P_1(x) - P_2(x) = 0$ soit $P(x) = 0$

Cette méthode est bien adaptée pour résoudre les équations de degré 2, ou celles de degré 3 ou 4 qui s'y ramènent par des changements d'inconnue. Après avoir regroupé tous les termes dans un seul membre, il suffit de factoriser P(x). Pour le second degré 2, la forme canonique du trinôme le permet.

Nous allons noter
Méthode 1 : utiliser les propriétés de l'égalité
Méthode 2 : utiliser la différence nulle des deux membres

Ces deux méthodes peuvent servir à résoudre les équations de premier degré. Nous avons choisi la méthode 1, à savoir utiliser les propriétés de l'égalité car la méthode 2 nous semble présenter des inconvénients que nous allons examiner.

1- Les inconvénients de la méthode 2 en elle-même

Pour nos élèves de 4ème, la méthode 2 les conduit à regrouper les termes de façon à arriver pour toutes les équations de premier degré à $a\,x + b = 0$.
Par exemple soit à résoudre : $4x - 9 = x - 5$
Deux nombres sont égaux signifie que leur différence est nulle soit $4x - 9 - (x - 5) = 0$.
Retrancher une différence peut poser problème en 4ème. Le professeur doit avoir traité cela avant (inconvénient 1). On arrive ainsi à $3x - 4 = 0$.

Que faire alors ? Pour utiliser les connaissances des élèves le professeur doit revenir à $3x = 4$ car si la différence des nombres est nulle, alors ils sont égaux. Puis en utilisant la définition du quotient les élèves trouvent que x est le quotient de 4 par 3, comme ils doivent l'avoir vu en début de 5ème lors du chapitre sur les quotients. Si l'élève était arrivé à une somme comme $3x + 4 = 0$, il aurait dû
- soit utiliser le fait que si la somme est nulle, les nombres sont opposés.
- soit la transformer en différence $3x - (-4) = 0$ et poursuivre avec le théorème sur la différence nulle.

Il faut reconnaître qu'il y a une « bizarrerie[10] » dans cette méthode car après avoir tout mis dans le membre de gauche, il faut restaurer deux membres non nuls pour continuer (inconvénient 2).

[10] Le mot incohérence serait trop fort pour traduire un certain défaut de « logique » au sens usuel du terme.

Si dès le premier degré on veut instaurer la méthode générale de résolution des équations $P(x) = 0$ la suite de la résolution est la suivante $3x - 4 = 0$ soit $3(x - 4/3) = 0$ soit $x - 4/3 = 0$ ce qui donne la valeur de x en utilisant seulement à la fin la différence nulle. Remarquer que le théorème sur le produit nul se voit seulement en 3ème. Il est vrai qu'ici un des facteurs est constant, néanmoins c'est encore un inconvénient (3) à cette méthode.

L'inconvénient se retrouve en 3ème pour la résolution des inéquations, par exemple $3x + 4 < 0$
Si on veut garder le deuxième membre nul, le passage par la différence est cette fois indispensable pour arriver à $3[x - (-4/3)] < 0$ et conclure par $x < -4/3$.
Cette méthode est bien celle que les élèves généraliseront au lycée dans le cas d'une équation de degré supérieur à 1, mais il faut reconnaître que cela paraît lourd au collège par rapport à celle-ci :
$3x < -4$ obtenu directement en ajoutant les termes convenables aux deux membres puis $x < -4/3$ obtenu en divisant les deux membres par 3.

Que ce soit pour les équations ou les inéquations, nous préférons que nos élèves aient plusieurs méthodes pour transformer les membres ; ils choisissent ainsi de raisonner avec celle qu'ils veulent.
Il y a un inconvénient (5) à enseigner uniquement la méthode 2 pour les équations, qui nous semble majeur. Supposons que des élèves de 4ème n'utilisent pas les propriétés de l'égalité pour résoudre les équations. En 3ème, ils peuvent avoir un autre professeur qui utilise la méthode 1 pour les équations et qui va faire la leçon sur la résolution des systèmes en supposant que les élèves connaissent les propriétés de l'égalité, cette fois indispensables pour la méthode de résolution des systèmes par combinaison linéaire des équations. Les élèves auront alors beaucoup de mal à faire le lien avec leur méthode 2 apprise en 4ème, surtout si le professeur de 3ème n'est pas averti.

La méthode 2 associée à la méthode des essais

Pour introduire la méthode 2, le professeur, après avoir fait écrire l'équation, va lui-même provoquer les essais avec éventuellement l'aide d'un tableur, pour minimiser la différence entre les deux membres. Ensuite, pour justifier la résolution algébrique, il va montrer aux élèves que le seul souci d'encadrer la solution en ciblant les essais ne suffit pas à la trouver exactement si elle est décimale ou fractionnaire. Doit-il le faire sans signaler, si les élèves ne les voient pas, les relations de proportionnalité des écarts qui permettent en fait d'aboutir en deux coups ?
Cette méthode ne nous apparaît pas très bonne pour enseigner la résolution des équations et problèmes de premier degré car le professeur amène les élèves tout près de la solution arithmétique (qui rendait l'équation inutile !) pour les persuader ensuite qu'ils ne peuvent pas aboutir dans tous les cas, alors qu'ils le pourraient. (inconvénient 4).

Certes toute tentative d'élèves avec des essais, qu'elle aboutisse ou non, doit être prise en considération par l'enseignant. Mais ces essais sont tentés par les élèves seuls, avant toute écriture algébrique dans le cas de la méthode 1. Une fois l'équation écrite, le professeur amène les élèves à utiliser les propriétés de l'égalité pour la résoudre.

3- Les statuts de la lettre lors de la résolution des inéquations et des équations.

Après avoir fait écrire l'inéquation, nous nous sommes servis des essais en évaluant la différence entre les membres pour démarrer la résolution des inéquations de premier degré. En effet pour comprendre ce que signifie résoudre une inéquation, les élèves doivent faire passer la lettre du statut d'inconnue à celui de variable, car on ne cherche pas une valeur précise de cette inconnue, mais des intervalles dans lesquels la valeur de la lettre varie. Ceci mérite d'être approfondi, y compris pour les équations.

Pour résoudre une équation « abstraite », indépendamment de tout problème, une méthode spontanée est bien de faire des essais en donnant à l'inconnue différentes valeurs, puis d'ajuster ces essais de façon à faire diminuer l'écart entre les deux membres. On s'oriente bien vers l'évaluation de la différence qu'il faut rendre nulle. Ceci peut donc conduire les élèves assez naturellement vers la méthode 2 où la lettre récupère son statut d'inconnue à la fin, pour trouver la solution exacte, car lors des essais, la lettre n'a pas le statut d'inconnue mais celui de variable.

Ce jeu avec le statut de la lettre n'est pas du tout une évidence pour les élèves. Quand ils font des essais certains sont tellement pris dans le statut de variable de la lettre qu'ils sont capables de dire qu'ils ont trouvé la solution de l'équation précédente $4x - 9 = x - 5$ parce qu'ils ont trouvé ceci en essayant quelques entiers :

pour $x = 3$ on a 3 dans un membre

pour $x = 8$ on a aussi 3 dans l'autre membre,

donc « c'est égal ! » et ils croient avoir résolu la question, surtout si chaque membre représente un simple programme de calcul hors de tout contexte « concret ».

Pour affronter le problème et non l'occulter, même si le programme de collège y incite peu avant la 3ème, nous faisons tracer la représentation graphique des deux fonctions $f(x) = 4x-9$ et $g(x) = x-5$ sur un même graphique en donnant l'interprétation graphique de la résolution de l'équation, ainsi que celle des deux antécédents de 3 pour chacune des fonctions.
L'examen de ce graphique avec les deux droites sera aussi utile en 3ème pour résoudre l'inéquation

$4x - 9 < x - 5$

Ainsi de façon très explicite les deux membres ne sont plus considérés comme des polynômes $P_1(x)$ et $P_2(x)$ à une indéterminée (des expressions algébriques), mais comme des fonctions f et g d'une variable. Evidemment il n'est pas nécessaire que ces changements de statut de la lettre soient explicités aux élèves, mais ils doivent être clairs pour l'enseignant.

En seconde pour résoudre l'inéquation $(4x - 9)(x - 5) < 0$, plusieurs graphiques peuvent être utiles qui permettent aux élèves de redonner à x son statut de variable. Par exemple

- le tracé de la parabole d'équation $y = 4x^2 - 29x + 45$,
- ou bien le tracé sur un même graphique de la parabole d'équation $y = 4x^2$ et de la droite d'équation $y = 29x - 45$,
- et surtout un graphique avec les deux droites d'équation $y = 4x - 9$ et $y = x - 5$

Le professeur pourra par exemple au moment de la mise en commun présenter un premier transparent avec la représentation d'une droite, superposer un deuxième transparent avec la représentation de l'autre, puis enfin un troisième transparent avec les droites « frontières » $x = 9/4$ et $x = 5$ pour bien délimiter les trois régions et déterminer celle qui convient.

Cela nous semble utile pour donner du sens au tableau permettant de trouver le signe d'un produit de plusieurs facteurs, car alors le statut de variable de la lettre est primordial. Les enseignants de seconde rencontrent des échecs massifs avec ce tableau de signes dont les élèves ne comprennent pas le sens.

Conclusions sur les deux méthodes

Cette analyse nous permet de voir que la question ne se pose pas en termes d'une concurrence entre les deux méthodes 1 et 2 mais plutôt d'une complémentarité. Néanmoins le professeur doit prendre des décisions sur la progression à adopter pour organiser cela, tout ne peut pas se faire en même temps.

Donc nous proposons dans ce fascicule l'enseignement de la résolution des équations en utilisant les propriétés de l'égalité en 4ème. Nous utiliserons les essais multiples avec l'évaluation de la différence entre les membres plutôt dans la séquence sur les inéquations en 3ème.
Eventuellement, le professeur pourra, en 3ème, amener les élèves vers une deuxième méthode de résolution des équations (la méthode 2 avec la différence des membres) en leur montrant en même temps pourquoi deux essais suffiraient à résoudre l'équation.
Supposons qu'ils aient à résoudre $4x - 9 = x - 5$
Le professeur peut introduire la fonction affine $F(x) = 4x - 9 - (x - 5) = 3x - 4$ et utiliser la proportionnalité des accroissements qui se trouve dans le nouveau programme de 3ème. Nous explicitons cela dans l'annexe qui se trouve à la fin du fascicule.

Thème 4 : Opposé d'un produit, d'une somme.

Plan du thème :

- Situation 1 : Travail sur l'opposé
  - Etape 1 : Opposé d'un produit
  - Etape 2 : Opposé d'une somme
- Situation 2 : Ajouter une somme
- Situation 3 : Soustraire une somme

Dans ce thème, nous allons travailler sur la gestion des parenthèses dans une suite d'additions et de soustractions.
On trouve fréquemment dans les manuels, un énoncé de la règle de suppression des parenthèses précédées du signe moins sous la forme : « on peut supprimer un couple de parenthèses et le signe moins qui le précède, à condition de changer tous les signes des termes à l'intérieur des parenthèses ». Beaucoup d'élèves continuent à faire des erreurs jusqu'en troisième et au-delà, dans la réduction d'une expression du type $(8x+3)-(3x-5)$. *Cette règle leur pose des problèmes car elle ne s'appuie sur aucun énoncé mathématique qui leur permettrait de comprendre ce qu'ils font.*

Nous préférons baser la leçon sur les connaissances antérieures suivantes :

- *pour soustraire un nombre on peut ajouter son opposé. Par exemple, pour soustraire* $3x-5$ *nous allons ajouter l'opposé de la somme* $3x+(-5)$. *D'où la recherche de l'opposé de cette somme, et au préalable la recherche de l'opposé du produit* $3x$
- *deux nombres sont opposés si leur somme est nulle, et si leur somme est nulle alors ils sont opposés.*
- *l'opposé d'un nombre est le produit de ce nombre par* -1 *(déjà traité dans le thème 2).*

Ainsi les élèves ont des repères mathématiques qui leur permettent de contrôler leurs résultats et de comprendre leurs erreurs.

Situation 1 : Travail sur l'opposé

Choix didactique : *Plutôt que de faire trouver aux élèves l'opposé d'un produit ab ou d'une somme a+b, nous travaillons d'abord sur des exemples dans lesquels a et b sont des expressions numériques et littérales que les élèves rencontreront souvent par la suite, associées entre elles pour former des expressions plus complexes.*

Etape 1 : Opposé d'un produit

Compléter les égalités suivantes :	Compléter les phrases suivantes :
3,5 + …… = 0	L'opposé de 3,5 est ……………
(-4) + ……= 0	L'opposé de (-4) est …………….
x + …….. = 0	L'opposé de x est …………….
$2\times x+.......=0$	L'opposé de $2\times x$ est …………….
$-4\times x+........=0$	L'opposé de $-4\times x$ est …………….
$7x+.......=0$	L'opposé de $7x$ est …………….
$7xy+......=0$	L'opposé de $7xy$ est …………….

Gestion de la classe : Les élèves remplissent les pointillés individuellement. Lorsqu'ils ont terminé, les résultats sont mis en commun. Le professeur jugera s'il peut donner tout le document à la fois ou faire une première mise en commun après les 4 premières lignes.
Les deux premières lignes ne posent pas de problème.
La troisième ligne permet de rappeler la notation $-x$ que l'on a introduite dans le thème 2 « Les nombres relatifs ».

Conjectures des élèves : Pour l'opposé de $2\times x$ les élèves proposent $(-2)\times x$ ou $2\times(-x)$ ou même $(-2)\times(-x)$.
Le professeur demande alors aux élèves de reprendre l'égalité à trou correspondante qu'ils ont complétée et de montrer que si on remplace les pointillés par $(-2)\times x$ ou $2\times(-x)$, on trouve bien zéro.
On utilise ici la distributivité, comme on l'a fait au thème 2.
$2\times x+(-2)\times x = x\times[2+(-2)] = x\times 0 = 0$ et $2\times x+2\times(-x) = 2\times[x+(-x)] = x\times 0 = 0$
En utilisant la multiplication par (-1) (voir thème 2) le professeur peut aider les élèves à prouver que $(-2)\times(-x)$ est égal à $2\times x$.
$(-2)\times(-x) = [(-1)\times 2]\times[(-1)\times x] = [(-1)\times(-1)]\times(2\times x) = 1\times 2\times x = 2x$
On utilise ici l'associativité et la commutativité de la multiplication.

Pour l'opposé de 7x, on peut demander aux élèves de trouver et de prouver eux mêmes leur résultat , sans l'aide du professeur, puisque c'est presque comme ce qu'ils ont fait pour $2\times x$:
Opposé de $(7x) = -(7x) = (-7)\times x = 7\times(-x)$ et $(-7)\times(-x) = 7x$
La difficulté supplémentaire par rapport à ce que les élèves ont fait pour $2\times x$ vient du signe $\times$ qui n'est pas écrit dans l'expression 7x et qu'ils doivent remettre dans $(-7)\times x$ ou dans $x\times(-7)$
.

Bilan : L'opposé d'un produit de deux facteurs est égal au produit de l'opposé d'un seul des deux facteurs par l'autre. opp $(a\times b)$ = opp $a\times b$ $=a\times$ opp b Remarque : opp $a\times$ opp $b = a\times b$

Une démonstration n'est pas indispensable car la généralisation de ce qui a été fait dans les cas particuliers est immédiate.
Il y a deux possibilités :
- par distributivité : Par exemple $a\times b$ + opp $a\times b = b\,(a$ + opp $a) = b\times 0 = 0$
- par l'introduction de -1 et l'associativité de la multiplication

opp $(a\times b) = -1\,(a\times b) = [(-1)\times a]\times b$= opp $a\times b$

Etape 2 : Opposé d'une somme

Compléter les égalités suivantes :	Compléter les phrases suivantes :
$x+3+\ldots\ldots\ldots\ldots = 0$	L'opposé de $x+3$ est …………….
$-x+4+\ldots\ldots\ldots\ldots = 0$	L'opposé de $-x+4$ est …………….
$3x+1+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0$	L'opposé de $3x+1$ est …………….
$x-2+\ldots\ldots\ldots\ldots.. = 0$	L'opposé de $x-2$ est ………………..
$-3x+2y-7+\ldots\ldots\ldots\ldots. = 0$	L'opposé de $-3x+2y-7$ est ……………..

Conjectures : *Pour l'opposé de x + 3, les élèves proposent (–x) + (–3) ou* $-x-3$.

Ils peuvent montrer seuls que ces deux expressions sont correctes en utilisant la commutativité et l'associativité de l'addition pour justifier que la somme vaut zéro.
$x+3+(-x)+(-3)=[x+(-x)]+[3+(-3)]=0$
Ils peuvent aussi le prouver en utilisant multiplication par (–1) et la distributivité :
$(-x)+(-3)=(-1)\times x+(-1)\times 3=(-1)\times(x+3)=-(x+3)$

Puis ils peuvent prouver que $(-x)+(-3)=-x-3$ par définition de la soustraction de deux nombres relatifs.

Pour l'opposé de $x-2$, *les élèves proposent* $-x+2$ *ou* $2+(-x)$ *ou* $2-x$.
$-x+2=(-1)\times x+(-1)\times(-2)=(-1)\times[x+(-2)]=-(x-2)$

Bilan : L'opposé d'un somme de plusieurs termes est égal à la somme des opposés de chaque terme. opp $(a+b)$ = opp a + opp b

Démonstration
Comme pour l'opposé d'un produit il y a deux possibilités de démonstration :
- par commutativité et associativité de l'addition :
$(a+b)$ + (opp a + opp b) = (a + opp a) + (b + opp b) = 0 + 0 = 0
- par la multiplication par –1 et la distributivité :
opp $(a+b) = (-1)\times(a+b) = (-1)\times a + (-1)\times b$ = opp a + opp b

Situation 2 : Ajouter une somme

1. Calculer : 0,3 + (4,38 + 0,7) $(2,6+7,3)+(7-2,6+5,7)$ **2.** Calculer : $(7x+3,5)+(3x+6,5)$ pour x = 32 458

La classe justifie la suppression des parenthèses en utilisant l'associativité et la commutativité de l'addition travaillées depuis la 6ème
$a+(b+c)=a+b+c$

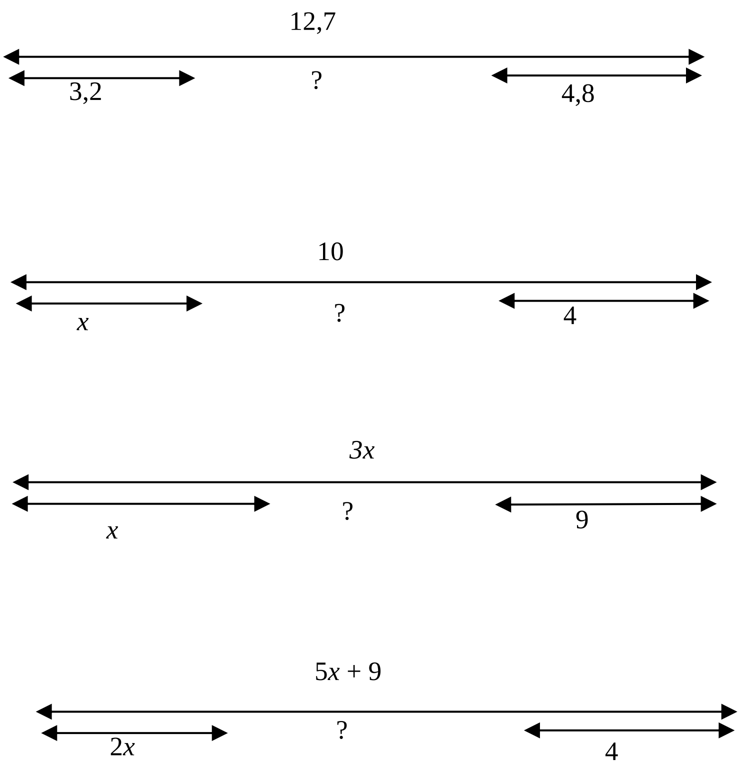
Situation 3 : Soustraire une somme

A ce stade, nous pourrions faire trouver aux élèves comment soustraire une somme avec un exercice de réduction classique d'une expression littérale. En effet, comme le professeur vient de traiter l'opposé d'une somme, les élèves pourraient énoncer assez vite une méthode : pour soustraire une somme, on ajoute l'opposé de la somme donc les opposés de chaque terme. Nous avons fait le choix dans les questions 1 et 2 de revenir d'abord à des connaissances intuitives des élèves pour leur permettre de s'approprier davantage la technique dans les cas simples.

1. Pierre possède 50 €. Il achète un CD à 12 € et un DVD à 19 €.
Calculer de deux façons différentes la somme qui lui reste.

Un premier problème très simple.

2. Ecrire de deux façons la longueur manquante et montrer qu'on trouve le même résultat :



Pour chaque calcul, il est important de laisser l'égalité entre les deux expressions obtenue affichée au tableau.

Pour la première ligne, les élèves trouvent facilement les deux expressions :
12,7 – (3,2 + 4,8) et (12,7 – 3,2) – 4,8
Le calcul effectif qui donne dans les deux cas le nombre 4,7 montre l'égalité.
$12{,}7-(3{,}2+4{,}8)=(12{,}7-3{,}2)-4{,}8=12{,}7-3{,}2-4{,}8$.
Les parenthèses sont inutiles dans la deuxième expression.

Pour la deuxième ligne, les élèves vont écrire $(10-4)-x=6-x$ *et* $10-(x+4)$ *ou* $10-(4+x)$.
D'où l'égalité : $10-(x+4)=10-x-4 \ = \ 6-x$

Pour la troisième ligne les deux expressions attendues sont : $(3x-x)-9$ *et* $3x-(x+9)$
D'où l'égalité : $3x-(x+9)=3x-x-9=2x-9$

Et enfin $(5x+9)-(2x+4)=5x-2x+9-4$

Les élèves utilisent spontanément la commutativité, pour rapprocher les lettres et les nombres et réduire l'expression trouvée.

Dans les trois dernières lignes, contrairement à ce qui se passe dans la première, on ne peut pas effectuer la somme avant de l'enlever. On enlève alors chaque terme dans l'ordre que l'on veut. Par exemple pour la première on effectue $10 - 4$, *pour la seconde c'est* $3x - x$, *et pour la troisième c'est* $5x - 2x$ *et* $9 - 4$.

Le professeur demande aux élèves d'écrire au brouillon un bilan de cette activité en se servant des égalités écrites au tableau pour repérer la structure commune aux quatre calculs.

Certains l'expriment sous forme d'une phrase, d'autres pensent à utiliser trois lettres différentes et écrire une identité quand la phrase leur paraît trop compliquée

Bilan : Pour soustraire une somme de deux termes, il faut soustraire successivement chaque terme de la somme.

Ou bien $a-(b+c)=a-b-c$

Si aucun élève ne produit spontanément ces expressions, le professeur les y conduit.

Seuls ou avec l'aide du professeur, selon le niveau de la classe, les élèves peuvent justifier cette égalité en utilisant la définition de la soustraction et l'opposé d'une somme que l'on vient de voir à la situation précédente, ou la multiplication par -1.

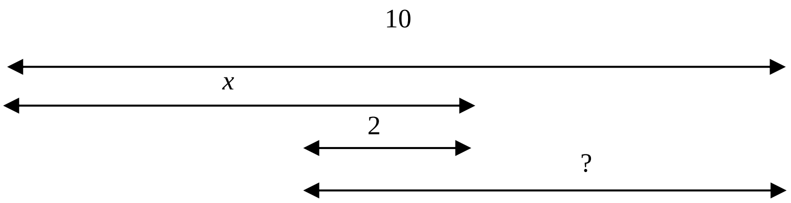
$a-(b+c)=a+opp(b+c)=a+[(-b)+(-c)]=a-b-c$

$a-(b+c)=a+(-1)\times(b+c)=a-b-c$

3. Ecrire sans parenthèses : $7x-3-(-2x+1)$

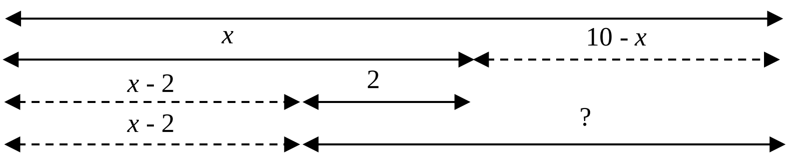
Pour transformer l'écriture, les élèves doivent raisonner ici avec l'opposé d'une somme, en s'aidant de la démonstration précédente, sans l'appui d'un dessin.

4. Ecrire la longueur cherchée de deux façons différentes :



La longueur cherchée est : $(10-x)+2=10-(x-2)$.

Cette égalité peut-être illustrée par le dessin suivant.



On peut généraliser cette égalité et la justifier de la façon suivante :

$$\begin{aligned} a-(b-c) &= a+opp\,(b-c) \\ &= a+opp\,(b+opp\,c) \\ &= a+opp\,b+opp\,(opp\,c) \\ &= a+opp\,b+c \\ &= a+(-b)+c \\ &= a-b+c \end{aligned}$$

<u>A Retenir :</u> Etant donnés trois nombres a, b et c

Si les parenthèses sont précédées du signe « + »

$$\boxed{a+(b+c)=a+b+c}$$

Ex : $A = 2 + (x + 5)$
$A = 2 + x + 5$
$A = 2 + 5 + x$
$A = 7 + x$

$B = 3 + (-2 + x)$
$B = 3 + (-2) + x$
$B = 1 + x$

Si les parenthèses sont précédées du signe « – »

$$\boxed{a-(b+c)=a-b-c}$$

Pour soustraire une somme de deux termes, on peut soustraire successivement chaque terme de la somme.

Ex : $C=4-(-3+x)=4-(-3)-x=4+3-x$

ou

$C=4-(-3+x)=4+(3-x)=4+3-x$

ou

$C=4-(-3+x)=4+(-1)\times(-3+x)$
$\quad =4+(-1)\times(-3)+(-1)\times x=4+3+(-x)$
$C=7-x$

$$\boxed{a-(b-c)=a-b+c}$$

Pour soustraire une différence, transforme la différence en somme.

Ex : $D = 2x - (3 - 5x) = 2x - (3 + (-5x))$
$D = 2x - 3 - (-5x) = 2x - 3 + 5x$
Ou
$D = 2x - (3 - 5x) = 2x + (-3 + 5x) = 2x - 3 + 5x$

Les élèves doivent avoir intégré suffisamment la justification qu'ils préfèrent

- *pour donner le résultat en enlevant les parenthèses sans réécrire toutes les étapes à chaque fois,*
- *pour y revenir très vite s'ils font des erreurs et comprendre pourquoi*

<u>Exercices :</u>

1. Tout calcul astucieux est vivement conseillé ! Calculatrice interdite !

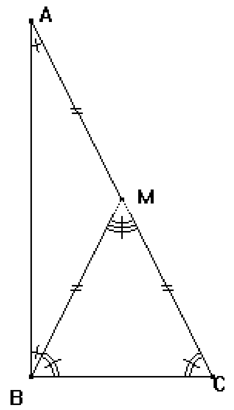
E = $x+4-(x-2)+2x-5-(x+1)$, calculer cette expression pour $x = \frac{75}{89}$

F = $-(x+2)+4x+2-(2x+5)-(x+(-3))$, calculer cette expression pour x = 8921,5471 et pour $x = \frac{361}{784}$.

G = $-(x+y)+3x+4y-(-y+2x)$, calculer cette expression pour x = 1725468,56 et y = 1

2. On pourra donner l'exercice suivant si le cercle circonscrit à un triangle rectangle a déjà été traité.
ABC est un triangle rectangle en B. M est le milieu de [AC]. On connaît la mesure de l'angle BAC.
On cherche s'il y a une formule qui permettrait de calculer celle de l'angle BMC.

- Calculer BMC pour plusieurs valeurs de l'angle BAC.
- Faire une conjecture.
- La prouver.



Remarques :

1°) On démontre rapidement que les triangles ABM et BMC sont isocèles donc :

$$ABM = BAM = a \quad et \quad MBC = BCM$$

$$\begin{aligned} BMC &= 180° - 2MBC = 180° - 2(90° - a) \\ &= 180° - 2 \times 90° + 2a = 2a \end{aligned}$$

2°) Autre méthode : les points A, M et C sont alignés donc :

$$\begin{aligned} BMC &= 180° - AMB = 180° - (180° - 2a) \\ &= 180° - 180° + 2a = 2a \end{aligned}$$

Thème 5 : « La double distributivité » ou produit de deux sommes.

Plan du thème :
- Situation 1 : Aire du rectangle partagé
  - Etape 1 : Avec deux lettres seulement.
  - Etape 2 : Etablir la formule générale avec les quatre lettres
  - Etape 3 : Démonstration dans le cas général.
- Situation 2 : Avec des nombres négatifs

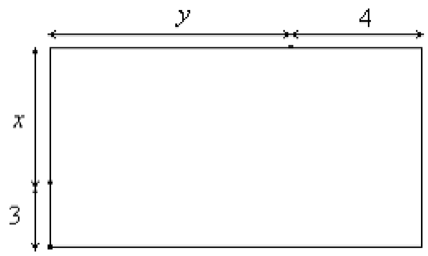
<u>Situation 1 : Aire du rectangle partagé</u>

<u>Etape 1 :</u> Avec deux lettres seulement.

Il s'agit ici d'obtenir un maximum d'écritures différentes de l'expression : $(x+3)(y+4)$ *et de préparer la démonstration de l'identité :* $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$.
Les expérimentations que nous avons faites montrent que les élèves rentrent plus facilement dans l'activité avec des lettres et des nombres plutôt qu'avec directement quatre lettres.

Nous faisons le choix de donner aux élèves le dessin sans aucun segment tracé à l'intérieur du rectangle. En laissant ce travail à leur charge nous obtenons dans la classe une diversité d'écritures qui prépare la démonstration de l'identité.

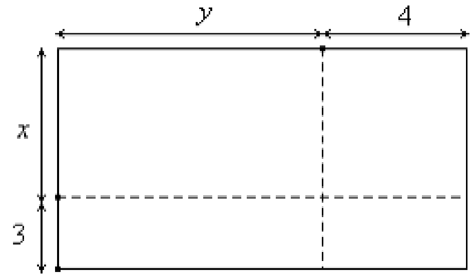
Ecrire l'aire du grand rectangle en fonction de *x* et *y* de plusieurs façons différentes



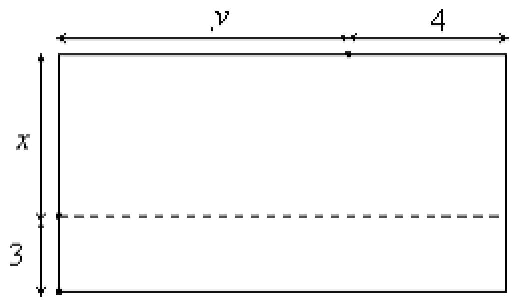
- *Des élèves écrivent 3x et 4y pour les longueurs des côtés du rectangle, il faut leur faire remarquer que ce n'est pas une multiplication mais une addition que l'on fait pour calculer ces longueurs.*
- *Des élèves confondent avec le périmètre. Les autres le leur font remarquer lors de la mise en commun. (ou le professeur quand il passe dans les rangs).*

L'écriture la plus naturelle qui vient de la formule de l'aire du rectangle est souvent donnée par les élèves, c'est : $(x+3)(y+4)$.
Cependant de nombreux élèves l'écrivent en gardant le signe $\times$ *:* $(x+3)\times(y+4)$, *ce qui est correct.*
D 'autres oublient les parenthèses : $x+3\times y+4$. *Il faut alors revenir sur les règles de priorité des opérations pour leur faire comprendre que l'expression qu'ils ont écrite ne traduit pas le calcul qu'ils veulent faire.*
Certains élèves restent bloqués sur cette idée et ne trouvent aucune autre expression. Le professeur pourra leur donner un coup de pouce en leur proposant de découper la figure en plusieurs morceaux.

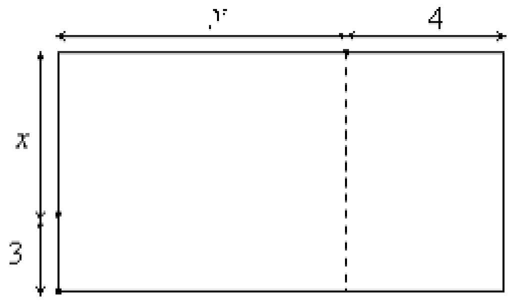
Ensuite les différents découpages permettent de confronter les différentes écritures lors de la mise en commun.



Ce découpage donne l'expression :
$xy+4x+3y+12$

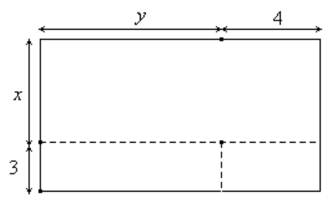


Celui-ci donne :
$x(y+4)+3(y+4)$
En développant cette expression on retrouve la précédente.

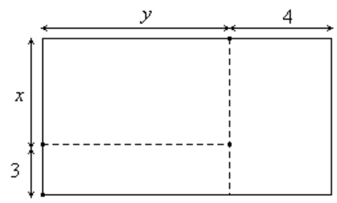


Celui-là donne :
$y(x+3)+4(x+3)$
En développant cette expression on retrouve la première.

D'autres possibilités de découpages sont parfois proposées par des élèves. Ce qui donne d'autres expressions à comparer.



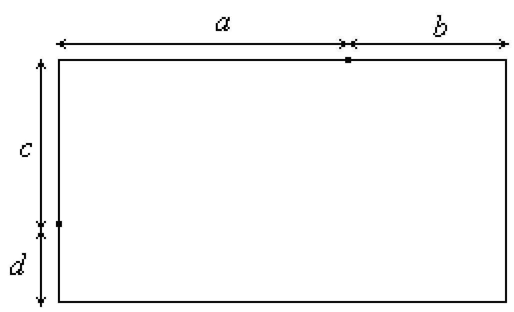
Ou bien



<u>Bilan :</u> $(x+3)(y+4)=xy+4x+3y+12$.

<u>Etape 2</u> : Etablir la formule générale avec les quatre lettres

Ecrire l'aire du rectangle de plusieurs façons différentes en utilisant les lettres *a*, *b*, *c* et *d*.



Il s'agit de réinvestir ici ce que l'on a fait dans l'étape 1 mais en utilisant quatre lettres qui représentent des nombres positifs. On arrive à l'égalité :
$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$
Le professeur fait remarquer que cette égalité n'a été mise en place qu'avec un travail sur les aires et donc seulement avec des nombres positifs. On va maintenant démontrer qu'elle est vraie quelle que soit la nature des nombres, positifs ou négatifs.

Etape 3 : Démonstration dans le cas général.

Le professeur peut choisir selon le niveau de sa classe de ne pas faire cette étape. Son intérêt est d'insister sur la substitution dans une égalité. On est amené à remplacer la lettre *k* par l'expression $a + b$.

Lors de l'introduction de la multiplication des nombres relatifs, on a admis en début d'année que, quels que soient les nombres *k*, *c* et *d*, positifs ou négatifs, on a :
$k(c+d)=kc+kd$
On cherche à écrire autrement $(a+b)(c+d)$, on appelle *k* le nombre $a+b$ et on obtient :
$(a+b)(c+d)=k(c+d)$ en utilisant la distributivité cette égalité s'écrit :
$(a+b)(c+d)=kc+kd$ en remplaçant *k* par $a+b$ on obtient :
$(a+b)(c+d)=(a+b)c+(a+b)d$ en utilisant de nouveau la distributivité :
$(a+b)(c+d)=ac+bc+ad+bd$ et en changeant la place de nombres dans le deuxième membre de l'égalité :
$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$

Ce changement de variable, qui est d'ailleurs un « changement d'indéterminée » peut paraître prématuré en quatrième. Il nous semble accessible aux élèves si le professeur prend la démonstration en charge.

A retenir :
a, b, c et d désignant des nombres quelconques on peut écrire :

$$(a+b)\times(c+d)=a\times c+a\times d+b\times c+b\times d$$

ou

$$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$$

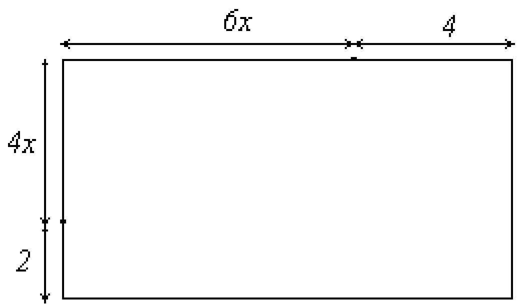
Un produit de deux sommes ayant deux termes chacune peut s'écrire comme une somme de quatre produits.

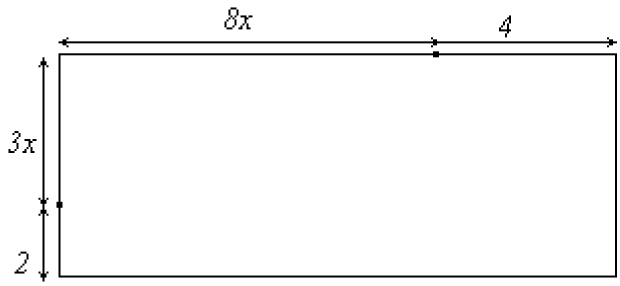
Pour certains élèves il est utile de laisser un moment le signe de la multiplication pour éviter les erreurs du type : $(x+3)(x+4)=x^2+4x+3x+7$ ou $(x+3)(x+4)=2x+4x+3x+12$
Il y a une difficulté supplémentaire lorsque l'expression comporte des termes tels que $2x\times3x$. Dans le thème 1 de cette progression, nous avons proposé un travail sur cette difficulté. Il est important de revenir aux propriétés mathématiques en jeu, soit ici l'associativité de la multiplication.

Exercices

Dans les quelques exercices suivants nous faisons intervenir la lettre avec ses différents statuts : indéterminée, inconnue, variable. On peut remarquer que dans un même exercice la lettre a selon les moments plusieurs statuts.

1) Comparer les aires de ces deux rectangles :





2) Montrer que l'aire du carré (fig 1) est la somme de celle du carré (fig 2) et du rectangle(fig 3)

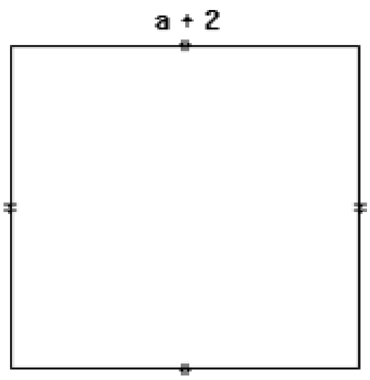


fig 1

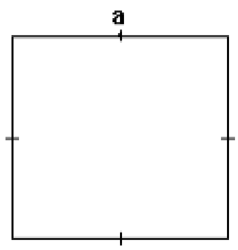


fig 2

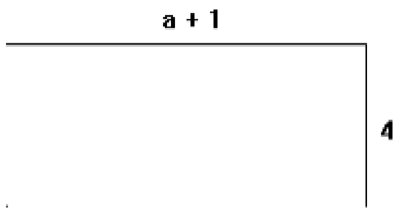
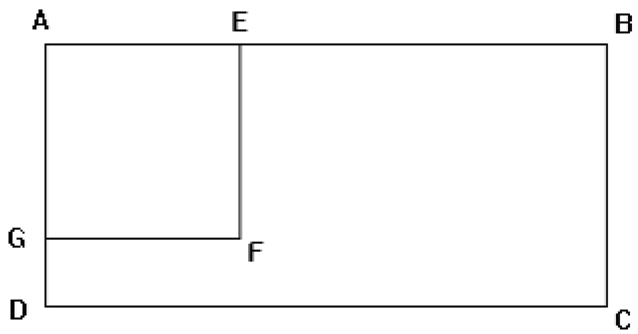


fig c

3)



Trouver la valeur de *x* pour laquelle l'aire du rectangle ABCD comporte 45 cm² de plus que l'aire du carré AEFG.

4) Compléter les égalités suivantes :

a) $(x+...)(...+7)=x^2+...+...+35$

b) $(...+2)(4x+...)=...+21x+...+14$

c) $(3x+...)(...+2)=12x^2+...+2$

Situation 2 : Avec des nombres négatifs

Nous ne donnons pas de nouvelles formules avec le signe " – " , elles seraient trop nombreuses et leur mémorisation est fastidieuse et inutile si l'on se ramène à la règle de la soustraction : *pour soustraire un nombre on ajoute son opposé.*

Par exemple : $(x+7)(x-4) = (x+7)(x+(-4)) = x^2 + (-4)x + 7x + 7\times(-4)$

On revient ici sur le sens de $(-4)x$ qui peut s'écrire $-(4x)$ et donc ajouter l'opposé de $4x$ revient à soustraire $4x$.
L'expression donnée s'écrit finalement : $x^2 - 4x + 7x - 28$ soit $x^2 + 3x - 28$.

Ces manipulations d'écritures faisant intervenir des signes – sont loin d'être évidentes pour les élèves. Si on veut leur donner du sens, cela prend du temps et on peut accepter que certains élèves en restent à des écritures un peu lourdes sans arriver à l'écriture la plus simple.

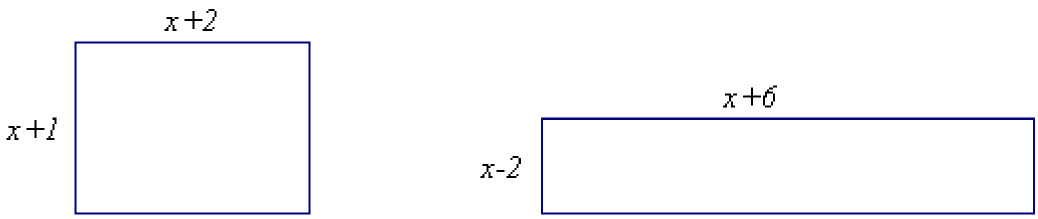
Exercices :

1) On considère l'expression E = $(2x+1)(6x+5) - 4x(3x+3{,}75)$
Calculer la valeur de E pour x = 1 999 999 995.

2) **Programme A** : Choisir un nombre. Lui ajouter 16 et lui soustraire 16. Multiplier les deux résultats obtenus.
Programme B : Choisir un nombre. Calculer son carré. Retrancher 256 au résultat. Donner le résultat.
a) Applique ces deux programmes à un même nombre de ton choix.
b) Recommence avec un autre nombre.
c) Fais une conjecture et prouve qu'elle est vraie.

3) a) On considère 4 entiers consécutifs comme 3, 4, 5, 6.
On effectue le calcul suivant : $4\times5-3\times6$
b) Choisir quatre autres entiers consécutifs et effectuer le calcul formé de la même façon que dans le a).
c) Recommencer encore avec quatre autres entiers consécutifs.
d) Quelle conjecture peut-on faire ? La démontrer.

4)



a) Exprimer les aires de ces deux rectangles en fonction de *x*. Donner une forme développée et réduite des deux expressions obtenues.
b) Existe-t-il une valeur de *x* pour laquelle ces deux rectangles ont la même aire ?

Thème 6 : Les puissances.

Plan du thème :

- Situation 1 : Un problème pour introduire l'écriture a^n
- Situation 2 : Des règles pour calculer avec des puissances.

Etape 1 : Produit de deux puissances d'un même nombre d'exposants positifs.
Etape 2 : Définition de a^0, a^1, a^{-n}
Etape 3 : Produit de deux puissances d'un même nombre avec des exposants entiers relatifs.

- Situation 3 : Quotient de deux puissances d'un même nombre
- Situation 4 : Les puissances de 10
- Situation 5: Les écritures scientifiques

Etape 1 : Produit d'un décimal par une puissance de dix
Etape 2 : Définition de l'écriture scientifique ; utilité de l'écriture scientifique pour comparer des nombres.

Situation 1 : Un problème pour introduire l'écriture a^n

Nous avons choisi ce problème pour introduire la notation puissance car il est simple à comprendre. Les élèves sont motivés et la discussion qui suit est intéressante car ils se sentent concernés puisqu'on s'intéresse à leur famille.

1) Vous avez 2 parents, 4 grands-parents, combien aviez-vous d'arrières grands parents ? et d'arrières arrières grands parents ?

2) Si on remonte 10 générations, combien cela vous fait –il d'ancêtres directs ?

Les élèves comptent facilement 8 arrières grands parents et 16 à la génération précédente. Il faut parfois préciser qu'il faut compter aussi ceux qui sont décédés.

Pour l'étape 2, certains élèves proposent d'utiliser la proportionnalité. Par exemple, ils calculent jusqu'à la 5ème génération puis multiplient ce nombre par deux. Les exemples trouvés à l'étape 1 prouvent que ce modèle ne fonctionne pas. A la première génération, il y a 2 parents, à la 2ème génération 4 grands parents, à la 3ème génération, 8 ancêtres et non 6 !
La croissance rapide des résultats confirme que ce n'est pas une situation de proportionnalité. Le professeur peut dire qu'en mathématiques, on dit que c'est une croissance exponentielle.

Les élèves comptent leurs ancêtres génération après génération en multipliant le nombre de la génération précédente par 2, de proche en proche. Ils peuvent utiliser la calculatrice. Certains font un arbre de calculs, d'autre font un tableau.

Lors de la mise en commun le professeur présente les résultats dans un tableau.

Générations	Calculs effectués	Nombre d'ancêtres	Ecriture condensée du résultat
1ère	2	2	2
2ème	$2 \times 2 = 2^2$	4	2^2
3ème	$2 \times 4 = 2^3$	8	2^3

4ème	2×8	16	2^4
5ème	16×2	32	2^5
6ème	32×2	64	..
7ème		128	
8ème	…	256	
9ème		512	
10ème		1024	

Le professeur remplit les trois premières colonnes sous la dictée des élèves puis il leur demande de proposer une écriture condensée du calcul pour compléter la dernière colonne. Les notations du carré et du cube sont connues des élèves depuis la cinquième donc la notation d'exposant supérieur à 3, paraît naturelle.

3) Trouver le nombre d'ancêtres à la 20ème génération, sans connaître le résultat à la 19ème génération ?

Les élèves utilisent en acte certaines propriétés du calcul sur les puissances, pour simplifier leurs calculs. Ils procèdent à des regroupements utilisant les résultats qui figurent dans le tableau précédent.
Ils proposent par exemple :

- $2^{20} = \underbrace{(2 \times 2 \times 2 \times 2 \times \ldots \times 2)}_{\textit{10 facteurs}} \times \underbrace{(2 \times 2 \times 2 \times \ldots \times 2 \times 2)}_{\textit{10 facteurs}} = 1024^2$
- $2^{20} = 16^2 \times 16^2 \times 16 = 16^5$

Le professeur leur demande d'écrire leurs calculs intermédiaires en utilisant la notation sous forme de puissances, ce qui donne :

- $2^{20} = 2^{10} \times 2^{10}$
- $2^{20} = (2^4)^5 = 2^4 \times 2^4 \times 2^4 \times 2^4 \times 2^4$

La taille du résultat 1 048 576 ancêtres, pour 20 générations, étonne les élèves. Certains ont du mal à lire le nombre.
Il arrive que des élèves demandent combien d'années représente une génération. Sinon le professeur aborde la question, pour faire intervenir la notion de temps dans ce problème. On s'accorde à dire qu'en moyenne une génération correspond à 25 ans.

On a calculé le nombre d'ancêtres en remontant 20 générations, soit $20 \times 25 = 500$ ans ; cela remonte à l'époque de la Renaissance que les élèves ont étudiée en histoire en cinquième.
Le professeur peut faire remarquer que pour seulement deux classes de 30 élèves, cela représente
$1\,048\,576 \times 60 = 62\,914\,560$ ancêtres. Pour comparer, la population de la France est actuellement de 63 800 000 habitants environ.
Selon les classes, des dialogues peuvent s'instaurer sur la diversité des origines pour expliquer ces chiffres par l'arrivée sur notre sol, au cours du temps, de personnes étrangères, qui sont devenus des ancêtres plus ou moins lointains et souvent oubliés de beaucoup d'entre nous, ou

bien par le fait que nous ayons des ancêtres communs. Dans une classe, un élève a dit : « Mais alors, si ça se trouve, on est tous frères ! »
Le professeur pourra citer ces propos du généticien Albert Jacquard : *« Les populations qui constituent notre espèce ont des dotations génétiques différentes, mais ces différences sont insuffisantes pour tracer entre elles sans trop d'arbitraire des frontières qui sépareraient les races. Cette unité résulte d'une évolution commune. Il suffit de remonter nos généalogies sur quelques milliers de générations (ce qui dans l'histoire d'une espèce est une période bien courte) pour trouver des ancêtres communs à tous les humains d'aujourd'hui. »*[11]

A Retenir : ***définition de a^n où a est un nombre et n un entier naturel supérieur ou égal à 2.***
a^n est le produit de n facteurs tous égaux à a.

$$a^n = \underbrace{a \times a \times .... \times a}_{n \text{ facteurs}}$$

n s'appelle l'exposant.

On peut aussi proposer les exercices suivants comme situation de départ ou les poser en exercices.

1. Pliage :
Le professeur plie en deux une feuille de papier. Au départ, avant tout pliage, il y a une épaisseur de papier (n=0). Après le premier pliage (n = 1), il y a deux épaisseurs, après le second pliage (n = 2) il y a 4 épaisseurs, puis 8 épaisseurs pour n = 3. Le nombre de couches de papier est doublé à chaque fois. Quel est le nombre d'épaisseurs après n pliages ?

La réalisation pratique du pliage devient très vite impossible et ce problème n'a pas de prolongement extra mathématiques.

2. **Division cellulaire :**
Une cellule œuf, issue d'une fécondation, se divise très rapidement en deux cellules. De nouveau, chacune de ces cellules se divise en deux nouvelles cellules. Cette division cellulaire se poursuit toujours de la même manière.
Au départ, il y a une cellule, après une division (n = 1) il y en a deux. Elles se divisent elles-mêmes en deux ce qui fait quatre cellules à la deuxième étape (n = 2). Combien de cellules y aura-t-il au bout de n divisions ?

Intéressant, si on fait intervenir le temps, on arrive à des discussions sur le développement d'une bactérie par exemple.

3. **Propagation d'une rumeur :**

Une personne apprend une rumeur (n=0) et, une heure plus tard (n=1), elle informe un ami de cette rumeur. L'ami transmet une heure plus tard (n=2) la rumeur à deux autres personnes, qui, à leur tour la transmettent chacune à deux autres personnes une heure plus tard, et ainsi de suite, chaque personne la transmettant chaque fois à deux autres au bout d'une heure. Aucune personne n'est informée deux fois. Après n heures, combien de personnes sont-elles au courant de cette rumeur ?

[11] Extrait de l'ouvrage : « A toi qui n'est pas encore né(e) » par Albert jacquard- Editions Calmann-Lévy- Février 2000

Intéressant car très actuel, avec les chaînes de messages sur Internet, mais difficile à comprendre.

Le problème de la rumeur ainsi posé est assez difficile car la question porte sur le nombre total de personnes au courant de la rumeur après n heures, et non sur le nombre de personnes nouvellement informées à l'heure n. Il rend compte ainsi de façon assez bonne d'une réalité, mais il nécessite un raisonnement assez subtil qui est bien adapté à l'apprentissage du raisonnement par récurrence, au niveau d'une classe scientifique de lycée.
A l'étape 0 une seule personne est informée (2^0) et à l'étape 1, une seule nouvelle personne est informée de sorte que 2 personnes en tout sont informées soit 2^1. A l'étape suivante, 2 nouvelles personnes sont informées de sorte qu'elles sont 4 (2^2), puis à l'étape suivante il y a 8 personnes informées (4 anciennes et 4 nouvelles, soit 2^3). A l'étape suivante on aura
$8 + 4 \times 2 = 8+8 = 2^4$
Les élèves peuvent admettre que le nombre de personnes est doublé à chaque fois. C'est un raisonnement par récurrence qui en donne la preuve formelle.
Supposons de façon générale qu'à l'étape $n-1$, le nombre total de personnes informées soit 2^{n-1} qui se décompose en 2^{n-2} (personnes anciennement informées) + 2^{n-2} (personnes nouvellement informées)
A l'étape n, le total des personnes informées sera :
2^{n-1} *(total des personnes informées à l'étape $n-1$)* $+ 2^{n-2} \times 2 = 2^{n-1} \times 2 = 2^n$
Si le professeur veut obtenir 3^n, il faut supposer qu'une personne en informe deux autres, puis chacune des deux en informe trois autres, puis le processus continue par l'information de trois personnes par chacune des nouvelles informées.
Le nombre des personnes informées est successivement
1 (soit 3) , puis $1+2 = 3$ (soit 3^1), puis $3 + 3\times2 = 9$ (soit 3^2) puis $9 + 6 \times3 = 27$, puis $27 + 18 \times3 = 27 \times3$
De façon générale, le nombre de personnes informées à l'étape n est
$3^{n-1} + (3^{n-1}-3^{n-2})\times 3 = 3^{n-1} + 3^{n-2} \times (3-1) \times 3 = 3^{n-1} \times 3 = 3^n$

Le professeur peut choisir le problème de la rumeur au lieu de celui des ancêtres pour l'introduction des puissances, en posant le problème de deux autres façons :
<u>Variante 1</u> : Toutes les heures, une personne confie la rumeur à deux autres (ou trois autres) , qui elles-mêmes la confient à deux autres (ou trois autres), etc... On demande le nombre de personnes qui viennent d'être informées à l'heure n.
<u>Variante 2</u> : Toutes les heures chaque personne au courant de la rumeur en informe une autre. On demande le nombre total de personnes au courant à l'heure n. A l'heure $n = 0$, une personne est au courant. A l'heure suivante $n =1$, il y a deux personnes. A l'heure suivante $n = 3$ il y a 4 personnes car comme les deux personnes précédentes l'on dit chacune à une personne, le nombre a doublé. On obtient 2^n à l'étape n car on a $2^{n-1} + 2^{n-1} = 2^n$ personnes au courant.
Plus simplement le nombre de personnes double à chaque étape car $p + p = 2p$.
On peut obtenir la suite 3^n en supposant que chaque personne au courant le dit à 2 autres toutes les heures. A chaque étape le nombre de personnes triple : $p + p\times 2 = 3p$.
Cette variante nous paraît moins « réaliste « que les précédentes, car une fois que la personne a transmis en confidence la rumeur à une ou deux autres, il est peu probable qu'elle continue toutes les heures à informer des personnes nouvelles. Mais elle a deux avantages pour le professeur :
- *elle demande de comptabiliser toutes les personnes au courant comme dans l'énoncé initial, ce qui n'est pas le cas de la variante 1 qui ne s'intéresse qu'à celles nouvellement informées.*

- *elle conduit à un calcul plus simple que l'énoncé initial, et les élèves seront convaincus du résultat sans recourir au raisonnement par récurrence qu'on ne peut pas utiliser au collège.*

Exercices dans lesquels les exposants sont des entiers supérieurs ou égaux à 2 :

- Travail sur des puissances de nombres négatifs et la différence entre -2^4 et $(-2)^4$.

Si le professeur l'estime nécessaire, il peut écrire un bilan sur le signe des puissances d'un nombre négatif.

- Exercices de calculs avec les règles de priorité dans des calculs du type 3×2^2.
- Substitution de la lettre par des valeurs dans des expressions du type $3x^2 + 2x + 1$.

Le professeur fera un bilan sur la priorité des puissances dans les calculs.

Situation 2 : Des règles pour calculer avec des puissances.

Pour justifier l'introduction de règles de calcul sur les puissances, le professeur peut faire référence à la situation précédente. Comme les puissances donnent des nombres qui deviennent vite très grands, si on veut calculer avec ces nombres, on va garder les écritures sous forme de puissances.

Etape 1 : Produit de deux puissances d'un même nombre d'exposants positifs.

Ecrire sous la forme d'une puissance le résultat des produits suivants : $2^4 \times 2^3$; $3^7 \times 3^4$; $5^{17} \times 5^{21}$ et justifier les réponses.

Les élèves trouvent assez vite les résultats 2^7, 3^{11}, 5^{38} et savent les justifier comme dans la situation 1.
On peut leur demander de faire une phrase qui généralise cette règle.
Ils proposent, « Pour multiplier deux puissances d'un même nombre, il faut ajouter les exposants. »

Certains élèves se demandent si cela va marcher avec des nombres différents, le professeur propose de calculer par exemple : $2^4 \times 5^4$ ou $2^5 \times 3^4$.
On peut justifier que la règle ne marche pas, mais on peut quand même simplifier cette écriture en rassemblant les nombres ayant les mêmes exposants.

- $2^4 \times 5^4 = (2 \times 2 \times 2 \times 2) \times (5 \times 5 \times 5 \times 5)$
  $= (2 \times 5) \times (2 \times 5) \times (2 \times 5) \times (2 \times 5)$
  $= (2 \times 5)^4 = 10^4 = 10\,000$
- $2^5 \times 3^4 = (2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2) \times (3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3)$
  $= (2 \times 3) \times (2 \times 3) \times (2 \times 3) \times (2 \times 3) \times 2$
  $= 6^4 \times 2$

D'autres élèves se demandent s'il existe une règle pour la somme de deux puissances.
Le professeur propose de calculer $2^5 + 2^4$.

- $2^5 + 2^4 = (2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2) + (2 \times 2 \times 2 \times 2) = 32 + 16 = 48$

Le résultat n'est pas une puissance entière de 2. On doit faire les calculs en respectant les priorités des opérations.

Bilan de l'étape 1 :
1. $a^n \times a^p = a^{n+p}$. où a est un nombre et n et p sont des entiers supérieurs ou égaux à 2
Seuls les exposants changent, les deux nombres doivent être les mêmes, et l'opération est une multiplication.

2. $a^n \times b^n = (a \times b)^n$ où a et b sont des nombres et n est un entier supérieur ou égal à 2

3. Il n'y a pas de règle pour ajouter des puissances.

Le professeur peut faire écrire ce bilan aux élèves ou bien le réserver pour plus tard, lorsque les propriétés auront été établies pour des exposants entiers relatifs.

Etape 2 : Définition de a^0, a^1, a^{-n}

1) Définition de a^0
Nous avons défini a^2, a^3, …. Quelle est la signification de a^0 ?

Les élèves proposent 0 ou 1 comme valeur.

Cela ne veut rien dire si on considère la définition que nous avons donné des puissances.
On va donc le définir autrement, en utilisant la règle de calcul que l'on vient de donner
$a^n \times a^p = a^{n+p}$, où a est un nombre et n et p sont des entiers supérieurs ou égaux à 2 ,
de telle sorte que cette règle soit encore valable avec a^0.

Le professeur propose de calculer $2^5 \times 2^0$, en utilisant la règle de calcul.
On obtient : $2^5 \times 2^0 = 2^{5+0} = 2^5$. Donc $32 \times 2^0 = 32$.
2^0 est le nombre manquant dans l'égalité à trou : $32 \times$ …. $= 32$ donc $2^0 = 1$

Il demande aux élèves de refaire la même chose seuls avec $3^3 \times 3^0$ et d'en déduire la valeur de 3^0, puis de choisir un nombre quelconque et de proposer eux mêmes un calcul.

Bilan : Si l'on veut que la règle de calcul soit prolongée, il faut poser $a^0 = 1$ pour tout a non nul.

Le professeur pourra justifier que 0^0 *n'est pas défini.*
n étant un nombre entier non nul supérieur à 2. $0^{n+0} = 0^n \times 0^0 = 0^n$ *donc* $0 \times 0^0 = 0$
0^0 *peut donc prendre n'importe quelle valeur. Comme il y a ambiguïté, on a décidé de ne pas définir* 0^0.

2) Définition de a^1.
Choisissez un exemple de calcul qui permettrait de savoir ce que vaut a^1 ? (a étant le nombre que vous avez choisi).

Les élèves peuvent s'inspirer de ce qui précède, ils ont déjà utilisé dans le tableau de la situation 1, que, par exemple, $2^4 \times 2 = 2^5$ et $2^5 = 2^{4+1} = 2^4 \times 2^1$ donc $2^1 = 2$.

Ou bien en imitant l'étape précédente, ils peuvent calculer $2^4 \times 2^1 = 2^{4+1} = 2^5$.
On a donc $16 \times 2^1 = 32$. On peut en déduire que $2^1 = 2$.

D'autres élèves peuvent proposer des calculs analogues avec d'autres nombres.
On en déduit que pour tout a, $a^1 = a$.

3) Définition de a^{-n}
a) Le professeur demande : « D'après vous que vaut 2^{-3} ? »

On a déjà utilisé ce type de question ouverte pour introduire de nouvelles règles de calcul, pour l'addition et pour la multiplication des nombres relatifs. Elles permettent aux élèves d'exprimer leurs conceptions et ainsi au professeur de les prendre en compte.

Voici des réponses des élèves :

-8 ; -6 ; $(-3)^2 = 9$; 0,125 ; $\frac{1}{8}$

-8 s'explique par la confusion avec $(-2)^3$; -6 par la confusion avec -2×3 ; 9 par la confusion avec $(-3)^2$ par une sorte de « commutativité ».

Les résultats 0,125 et $\frac{1}{8}$ donnés par les calculatrices surprennent les élèves. En effet ce sont des nombres non entiers et positifs, alors que l'écriture 2^{-3}ne comporte que des nombres entiers et un « signe –».

Après avoir analysé les réponses le professeur justifie ces résultats de deux façons.

- Calculer $2^3 \times 2^{-3}$

On prolonge la règle aux exposants entiers négatifs.

On a : $2^3 \times 2^{-3} = 2^{3+(-3)} = 2^0$ ou $8 \times 2^{-3} = 1$. On en déduit donc que 2^{-3} est le nombre manquant dans l'égalité à trou $8 \times \ldots. = 1$ d'où $2^{-3} = \frac{1}{8} = 0{,}125$

ou encore $2^3 \times \ldots. = 1$ et $2^{-3} = \frac{1}{2^3}$

- Ecriture « en cascade » :

Exposants	Ecriture sous forme d'une puissance de 2	Ecriture décimale ou fractionnaire	
4	2^4	$2\times2\times2\times2 = 16$	
3	2^3	$2\times2\times2 = 8 = 16\div2$	$\div 2$
2	2^2	$2\times2 = 4 = 8\div2$	$\div 2$
1	2^1	$4\div2=2$	$\div 2$
0	2^0	$2\div2=1$	$\div 2$
–1	2^{-1}	$0{,}5 = \dfrac{1}{2}$	$\div 2$
–2	2^{-2}	$0{,}25 = \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2^2}$	$\div 2$
–3	2^{-3}	$0{,}125 = \dfrac{1}{8} = \dfrac{1}{4}\div2 = \dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2^3}$	$\div 2$

Ces deux démonstrations sont bien utiles pour convaincre les élèves de ce résultat étonnant !

b) Trouver un calcul permettant de définir ce que vaut 3^{-2}.

Les élèves s'inspirent de ce qui précède et calculent $3^2 \times 3^{-2}$ d'où ils déduisent que
$3^{-2} = \dfrac{1}{9} = \dfrac{1}{3^2}$.
Pour la « cascade », c'est plus difficile. Les résultats n'étant pas des décimaux, il faut garder les écritures fractionnaires (il faut calculer $\dfrac{1}{3}\div3$), ce qui est une occasion de retravailler les opérations avec des nombres en écriture fractionnaire.

On peut généraliser ce que l'on vient de faire pour 2 et pour 3 à tout nombre a non nul.
$a^2\times a^{-2} = a^0 = 1$ *donc* $a^{-2} = \dfrac{1}{a^2}$ *; de même* $a^{-3} = \dfrac{1}{a^3}$

Bilan : On peut définir pour tout nombre a non nul et tout entier relatif n, $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

On remarque que a^n et a^{-n} sont inverses.

Certains élèves s'intéressent aux puissances d'exposants décimaux ou fractionnaires, le professeur leur dit qu'on peut les définir mais que ce n'est pas possible en quatrième. Ils le verront plus tard au lycée.

<u>Etape 3 :</u> Produit de deux puissances d'un même nombreavec des exposants entiers relatifs.

Calculer $2^{-2} \times 2^{5}$; $2^{-3} \times 2^{-4}$

$2^{-2} \times 2^{5} = \dfrac{1}{2^{2}} \times 2^{5} = \dfrac{2^{5}}{2^{2}} = 2^{3} = 2^{5+(-2)}$

$2^{-3} \times 2^{-4} = \dfrac{1}{2^{3}} \times \dfrac{1}{2^{4}} = \dfrac{1}{2^{3} \times 2^{4}} = \dfrac{1}{2^{7}} = 2^{-7} = 2^{-3+(-4)}$

La règle de calcul vue pour des exposants entiers positifs se prolonge aux exposants entiers relatifs.

<u>Situation 3 : Quotient de deux puissances d'un même nombre</u>

1) Ecrire sous forme d'une seule puissance $\dfrac{2^{7}}{2^{4}}$ et justifier le résultat.

Les élèves reviennent à la définition et en simplifiant la fraction, ils obtiennent 2^3 .

De même pour $\dfrac{3^{5}}{3^{8}}$, ils obtiennent en simplifiant : $\dfrac{1}{3^{3}}$ soit d'après la définition précédente 3^{-3}.

2) Enoncer une règle de calcul.

Les élèves proposent la phrase suivante : « Quand on divise deux puissances, on soustrait les exposants. » ou encore pour *a* un nombre non nul et *n* et *p* deux entiers relatifs, $\dfrac{a^{n}}{a^{p}} = a^{n-p}$. On écrira cette phrase en bilan.

Le professeur propose de vérifier que cette règle fonctionne avec les deux exemples précédents et notamment le deuxième. Il demande de faire fonctionner cette règle sur d'autres exemples, il choisit des cas où il y a un exposant négatif, au numérateur ou au dénominateur.

Par exemple : $\dfrac{2^{-4}}{2^{5}}$ = 2^{-4-5} = 2^{-9} d'après la règle. Le professeur, au tableau, sollicite la participation des élèves pour vérifier le résultat en utilisant la définition de 2^{-4}.

$\dfrac{2^{-4}}{2^{5}} = \dfrac{\frac{1}{2^{4}}}{2^{5}} = \dfrac{1}{2^{4}} \times \dfrac{1}{2^{5}} = \dfrac{1}{2^{9}} = 2^{-9}$ ou encore $\dfrac{2^{-4}}{2^{5}} = 2^{-4} \times \dfrac{1}{2^{5}} = 2^{-4} \times 2^{-5} = 2^{-9}$

Le professeur demande aux élèves de faire la même chose seuls pour justifier le résultat de $\dfrac{3^{8}}{3^{-2}}$

.

$\dfrac{3^{8}}{3^{-2}} = 3^{8} \times \dfrac{1}{3^{-2}} = 3^{8} \times 3^{2} = 3^{10}$ ou avec la règle $\dfrac{3^{8}}{3^{-2}} = 3^{8-(-2)} = 3^{10}$

A ce stade de l'étude, tous les cas d'exposants entiers relatifs positifs ou négatifs ont été abordés. On peut donc généraliser les deux règles de calcul.

A Retenir :** Pour tout nombre a non nul et tous entiers relatifs n et p :* $a^n \times a^p = a^{n+p}$ ***et $\dfrac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$

Situation 4 : Les puissances de 10

C'est un simple cas particulier de ce qui précède pour lequel les puissances sont faciles à calculer.

On ne détaillera pas cette partie car on procède de manière classique comme on peut le trouver dans les manuels.

Puissances de puissances $(10^n)^p$ **:**

Ce type de calcul n'est au programme que pour les puissances de 10 .

On peut demander aux élèves de calculer

$(10^3)^2 = 10^3 \times 10^3 = 10^{3\times 2} = 10^6$

$(10^{-4})^3 = 10^{-4} \times 10^{-4} \times 10^{-4} = 10^{-4\times 3} = 10^{-12}$

$(10^{-2})^{-3} = \dfrac{1}{(10^{-2})^3} = \dfrac{1}{10^{-2} \times 10^{-2} \times 10^{-2}} = \dfrac{1}{10^{-6}} = 10^6 = 10^{-2\times(-3)}$

C'est une occasion de réutiliser les règles de calcul.

Situation 5: Les écritures scientifiques

Etape 1 : Produit d'un décimal par une puissance de dix

On commence par faire écrire des nombres décimaux en utilisant des puissances de 10, de différentes façons.

Par exemple :

$1450 = 145 \times 10^{\cdots}$

$1450 = ... \times 10^3$

$1450 = 0{,}145 \times 10^{\cdots}$

$1450 = ... \times 10^{-1}$

$1450 = 1450000 \times 10^{\cdots}$

Bilan : Tout nombre entier ou décimal peut s'écrire comme produit d'un décimal par une puissance de dix de plusieurs façons.   Multiplier un nombre décimal par une puissance de dix revient à déplacer la virgule ou rajouter des zéros. Les chiffres ne changent pas.

<u>Etape 2</u> : Définition de l'écriture scientifique ; utilité de l'écriture scientifique pour comparer des nombres

Le but de l'activité qui suit est de montrer l'utilité de l'écriture scientifique dans la comparaison de nombres.
Cette écriture permet d'encadrer très facilement un nombre entre deux puissances de 10 avec des exposants consécutifs.
En effet :

Si $1 \leq a < 10$, alors $1 \times 10^n \leq a \times 10^n < 10 \times 10^n$, pour tout entier n relatif.

On a donc : $10^n \leq a \times 10^n < 10^{n+1}$.

Avec ces encadrements, il est très simple de comparer deux nombres en écriture scientifique.
On commence par comparer les exposants des puissances de 10 :

- Si ces exposants sont différents, le plus grand nombre est celui qui a le plus grand exposant.
- Si ces exposants sont égaux, le plus grand nombre est celui qui a le plus grand nombre compris entre 1 et 10 de son écriture scientifique.

Pour montrer l'utilité de l'écriture scientifique, il est important de proposer dans l'activité introductive des nombres à comparer ayant des ordres de grandeur très éloignés, en effet les élèves peuvent se passer de l'écriture scientifique pour comparer ces nombres, en adoptant des stratégies différentes qui consistent à :

- Ecrire tous les nombres en utilisant la même puissance de 10, ils n'ont plus qu'à comparer des décimaux.
- Ecrire tous les nombres en utilisant des nombres entiers multipliés par des puissances de 10.
- Revenir aux écritures décimales.

En proposant des nombres à comparer avec des ordres de grandeurs éloignés, le professeur rend ces stratégies difficiles à mettre en œuvre : elles impliquent l'écriture de trop de zéros !

Dans l'activité ci-dessous, les nombres à comparer sont des longueurs qui vont de l'infiniment petit à l'infiniment grand en passant par l'échelle humaine.

1) On propose ci-dessous une liste de longueurs de différents « objets » :

$A = 72{,}86 \times 10^{-6}$ m $B = 1{,}496 \times 10^{9}$ m $C = 175 \times 10^{-2}$ m

$D = 0{,}0582 \times 10^{7}$ m $E = 5 \times 10^{-3}$ m $F = 22{,}76 \times 10^{10}$ m

$G = 6{,}5 \times 10^{-11}$ m $H = 2{,}45 \times 10^{5}$ m $I = 960 \times 10^{-13}$ m

$J = 14\,270 \times 10^{8}$ m $K = 0{,}5 \times 10^{-12}$ m

Encadrer chacune de ces longueurs entre deux puissances de 10 d'exposants consécutifs.

Pour ne pas influencer les élèves dans leur démarche, le professeur explique ce qu'il entend par cet encadrement sans traiter un exemple précis, en notant par exemple :

$10^2 < a < 10^3$ *et* $10^{-5} < b < 10^{-5+1}$

2) Quels sont parmi les nombres proposés, ceux qu'on a encadré sans faire de calculs ?

La simplicité de l'encadrement des nombres B et H est plus facile à voir pour les élèves que les nombres E et G à cause du signe négatif des exposants.

Le professeur introduit la définition d'une écriture scientifique et il donne la justification exposée en remarque préliminaire pour souligner l'intérêt de cette écriture pour des encadrements par des puissances d'exposants consécutifs.

3) Ecrire toutes les longueurs sous forme d'une écriture scientifique et les classer dans l'ordre croissant.

Il est évidemment important que parmi les nombres proposés, certains aient la même puissance de 10 dans leur écriture scientifique.
Pour la longueur C égale à 1,75m c'est l'occasion d'expliquer que l'écriture scientifique de ce nombre est : $1{,}75 \times 10^0$ *ou plus simplement 1,75.*

Les élèves établissent facilement la méthode de comparaison des nombres en écriture scientifique (exposée en remarque préliminaire) et qui peut être notée dans le cours.

4) On donne les informations suivantes : Rayon d'un atome d'hydrogène < Rayon d'un atome de carbone < Rayon d'un atome d'oxygène. Distance Soleil- Terre < Distance Soleil- Mars < Distance Soleil- Saturne.

Compléter le tableau ci- dessous en associant à chaque « objet » une longueur parmi les longueurs de A à K.

Longueur en écriture scientifique	« Objet »
	1) Rayon d'un atome d'oxygène
	2) Taille d'une fourmi
	3) Rayon d'un atome de carbone
	4) Distance Soleil- Terre
	5) Diamètre d'un cheveu
	6) Distance Bordeaux- Paris
	7) Distance Soleil- Mars
	8) Taille d'un homme

	9) Distance Soleil- Saturne
	10) Rayon d'un atome d'hydrogène
	11) Distance Bordeaux- Toulouse

Solution

Longueur en écriture scientifique	« Objet »
G = $6{,}5 \times 10^{-11}$ m	1) Rayon d'un atome d'oxygène
E = 5×10^{-3} m	2) Taille d'une fourmi
I = $9{,}6 \times 10^{-11}$ m	3) Rayon d'un atome de carbone
B = $1{,}496 \times 10^{9}$ m	4) Distance Soleil- Terre
A = $7{,}286 \times 10^{-5}$ m	5) Diamètre d'un cheveu
D = $5{,}82 \times 10^{5}$ m	6) Distance Bordeaux- Paris
F = $2{,}276 \times 10^{11}$ m	7) Distance Soleil- Mars
C = 1,75 m	8) Taille d'un homme
J = $1{,}4\,27 \times 10^{12}$ m	9) Distance Soleil- Saturne
K = 5×10^{-13} m	10) Rayon d'un atome d'hydrogène
H =$2{,}45 \times 10^{5}$ m	11) Distance Bordeaux- Toulouse

D'autres exercices :

Pour continuer sur la comparaison

Dans le tableau ci-dessous, figurent toutes les planètes du système solaire et leurs distances moyennes au soleil.

Saturne	$14{,}27 \text{ x } 10^8$ km
Mars	$227{,}9 \text{ x } 10^6$ km
Uranus	$286{,}9 \text{ x } 10^7$ km
Terre	$1{,}496 \text{ x } 10^8$ km
Neptune	$45\,050 \text{ x } 10^5$ km
Vénus	$1{,}082 \text{ x } 10^8$ km
Jupiter	$77{,}83 \text{ x } 10^7$ km
Mercure	$57{,}9 \text{ x } 10^6$ km

Comparer ces distances et refaire un tableau en rangeant les planètes de la plus proche à la plus éloignée du soleil.

Avec des puissances d'exposants négatifs

Voici les masses en kg de certains atomes.
Uranium : $0,395 \times 10^{-24}$ Aluminium : $4,48 \times 10^{-26}$ Or : $32,7 \times 10^{-26}$
Fer : 9274×10^{-29} Cuivre : 1055×10^{-28}
Donner les écritures scientifiques de ces masses, puis les ranger par ordre croissant.

<u>Il faut calculer avec des nombres en écriture scientifique.</u>

- **Vitesse de la lumière**

La lumière se déplace à la vitesse de 3×10^5 km par seconde dans le vide.

a) Quelle distance parcourt la lumière en 1 jour ? en une année ?
b) Combien met de temps la lumière du Soleil pour arriver sur la Terre sachant que la distance Terre-Soleil est de $1,5 \times 10^8$ km ?

- **Un litre d'eau de mer** contient en moyenne 0,000005 mg d'or.

Sachant que l'eau de mer représente 1 320 millions de kilomètre cube, donner en tonnes, un ordre de grandeur de la masse d'or contenue dans l'eau de mer présente sur la terre.

<u>Il faut effectuer des changements d'unités.</u>

- **Un millimètre cube de sang humain** contient cinq millions de globules rouges et 7000 globules blancs.

Sachant que le corps humain contient environ 5 litres de sang, combien cela fait il de globules rouges et de globules blancs ?

- **La résistance électrique d'un fil métallique** dépend de sa longueur, de sa section et du matériau utilisé.

R est la résistance du fil en Ω
ρ est la résistivité du fil en Ωm
ℓ est la longueur du fil en m
S est la section du fil en m^2

$$R = \frac{\rho \ell}{S}$$

Calculer la résistance d'un fil de cuivre ($\rho = 1,6 \times 10^{-9}\,\Omega m$) de longueur ℓ = 400 m et de section S = 25 mm².

ANNEXE

Résolution des problèmes de premier degré sans recourir à l'algèbre

Nous allons voir comment il est possible de résoudre par des méthodes arithmétiques tous les problèmes relevant d'une équation du premier degré. Nous donnons un aperçu
- des procédés trouvés par les mathématiciens au cours de l'histoire
- des procédés donnés par des manuels anciens

Puis nous rapprochons ce que nous donne cette histoire avec des productions d'élèves.

Les deux questions que se sont posées les hommes dès l'origine des mathématiques pour résoudre tous ces problèmes « concrets » que nous reconnaissons aujourd'hui comme relevant des équations sont les suivantes :
- « quels algorithmes permettront de trouver sûrement (et si possible automatiquement) la ou les solutions ?
- sous quelle forme et avec quels signes peut-on écrire la solution ?

Les réponses apportées à la première question dépendent de celles apportées à la seconde et réciproquement. »[12]

Effectivement avant d'avoir les outils de l'algèbre, les hommes ont trouvé des méthodes arithmétiques instituées en algorithmes pour résoudre les équations de premier degré. Les équations du second degré les ont conduits à des méthodes « pré-algébriques » qui évolueront sur plusieurs siècles jusqu'à l'algèbre d'aujourd'hui.
Nous examinons les méthodes historiques parce que nous allons retrouver, du moins dans le cas du premier degré, des tentatives similaires chez les élèves. Ceux-ci ne pourront pas, en revanche, aboutir seuls à un ou des algorithmes, pas plus arithmétiques qu'algébriques. Selon le contexte, ils devront inventer à chaque coup des solutions qui sembleront sans rapport entre elles de sorte que, si nous les laissons sans outils, leur réussite leur apparaîtra chaque fois relever d'une astuce nouvelle ou d'un heureux hasard. L'examen de leur travail ainsi que de celui d'un ancien manuel d'enseignement va nous conduire à prendre la décision de leur donner l'outil algébrique.

Mais il ne s'agit pas de le donner de façon non signifiante pour eux, car dans ce cas ils ne vont pas se l'approprier. S'ils s'en servent ce sera alors par simple effet du contrat didactique. En situation relativement a-didactique, quand ils auront vraiment pris en charge un problème, ils reviendront immédiatement à leurs recherches à l'issue aléatoire, parce qu'elles sont vraiment les leurs, même si elles sont plus coûteuses en temps et en réflexion que la mise en équation.

En ce qui concerne nos choix didactiques pour l'enseignement des équations du premier degré, se reporter au corps de la brochure.

1- Algorithmes de résolution de problèmes de premier degré

a- <u>Méthode historique de fausse position simple</u>

<u>Premier exemple (Pellos fin du XVe siècle)</u> :

[12] Entre guillemets, citation prise dans l'ouvrage: *Histoires de problèmes, histoire des mathématiques*- IREM – Editions Ellipses - 1993

Une lance a la moitié et le 1/3 dans l'eau et 9 paumes à l'extérieur. je te demande combien elle a de long.

Une solution du problème par fausse position simple est la suivante : Si la lance mesurait 12, on aurait 12 – 6 – 4 soit 2 à l'extérieur. Pellos dit : « Si 2 sont venus de 12 de combien sont venus 9 ? ».

D'où la solution : $\frac{12 \times 9}{2} = 6 \times 9 = 54$

Aujourd'hui le problème peut se résoudre par une équation :

$x - \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}x = 9$ donc $\frac{1}{6}x = 9$ d'où $x = 6 \times 9 = 54$

2- <u>Deuxième exemple</u>[13] :

Dans un manuel de 1859, voici un problème extrait du « § II : Problèmes résolus à l'aide des proportions – point 3 : Règles de fausse position - 1°: Règle de fausse position simple »

PROBLÈME : *On a partagé une somme entre quatre personnes de manière que la première en a eu le 1/5, la deuxième les 3/10, la troisième les 5/16, et la quatrième a eu pour sa part 7500. Quelle était la somme à partager ?*

Le manuel donne la solution suivante :

SOLUTION. Je prends le nombre 80 divisible à la fois par 5, par 10 et par 16.

Le $\frac{1}{5}$ de 80 est	16
Les $\frac{3}{10}$	24
Les $\frac{5}{16}$	25
Somme	65

80 — 65 = 15 ; j'écris donc la proportion

$15:7500::80:x = \frac{80 \times 7500}{15} = 80 \times 500 = 40000.$

La somme à partager était 40000 fr.

Aujourd'hui le problème peut se résoudre avec une équation où x désigne la somme:

$\frac{1}{5}x + \frac{3}{10}x + \frac{5}{16}x + 7500 = x$ d'où $(1 - \frac{1}{5} - \frac{3}{10} - \frac{5}{16})x = 7500$ d'où $\frac{80-65}{80}x = 7500$

$\frac{15}{80}x = 7500$ $x = \frac{80 \times 7500}{15} = 40\,000$

<u>3- Type de problèmes de premier degré ainsi résolus</u>

Ce sont ceux relevant d'une équation de la forme $\sum_i a_i x = b$ soit $ax = b$ dans lesquels b est donné dans le texte mais le coefficient a n'est pas donné.

Dans le premier exemple $b = 9$, dans le second b = 7500 Les deux exemples précédents montrent que si les coefficients a_i sont des fractions le bon choix pour la valeur « fausse » de x

---

[13] Cet exemple est tiré du manuel suivant : *Nouvelle arithmétique des Ecoles primaires* par G.Ritt, inspecteur général de l'Instruction primaire – Paris - Librairie de L.Hachette et Cie - 1859

est un multiple commun des dénominateurs. Les calculs à effectuer sont alors exactement les mêmes que lors de la résolution par l'algèbre.

Avec nos notations actuelles la méthode se justifie ainsi.
On cherche x tel que $ax = b$ On prend la fausse solution x' qui donne $ax' = b'$ d'où
$\frac{x}{x'} = \frac{b}{b'}$ donc $x = \frac{x' \times b}{b'}$

Cette méthode était déjà utilisé par les scribes égyptiens. Au XII^{e} siècle, le mathématicien indien Bhaskara appelle cette méthode « ista-karma » c'est à dire « opération avec un nombre essai ». Sa désignation par la « règle de fausse position » n'est venue qu'à la fin du XV^{e} siècle.
Nous remarquons que dans la solution du deuxième problème extraite d'un manuel d'enseignement de 1859, l'auteur n'a pas hésité à noter à la fin l'inconnue par x, pour écrire les rapports égaux, ce qu'on peut voir comme une introduction progressive de l'algèbre dans l'enseignement de l'arithmétique.

b- Méthode historique de fausse position double

1- Exemple de problème relevant du cas général :

Jean, Pierre et René ont chacun un jardin. Celui de Pierre a une aire 3 fois plus grande que celui de Jean, et celui de René mesure 11 m² de plus que celui de Jean. Le jardin de Pierre et le jardin de René ont la même aire. Trouver l'aire de chaque jardin.

Qu'on tente une solution arithmétique par fausses positions ou une solution algébrique avec une seule équation, une des difficultés est de déterminer le nombre inconnu auquel on va attribuer deux fausses valeurs ou bien qu'on va désigner par la lettre x. Il s'agit de l'aire du jardin de Jean.
Par la méthode algébrique cela conduit à l'équation $3x = x + 11$
Par la méthode des fausses positions, on attribue au jardin de Jean par exemple une aire de 4, puis une aire de 6. Puis sans écrire aucune équation, on trouve :
Fausse position 4 erreur 15 – 12 = 3 dans un sens
Fausse position 6 erreur 18 – 17 = 1 dans l'autre sens
$$x = \frac{6 \times 3 + 4 \times 1}{3 + 1} = \frac{22}{4} = 5{,}5$$
Comment justifier un tel calcul qui donne bien la solution ?

2- Type de problèmes algébriques ainsi résolus et justification :

Tous les problèmes relevant d'une équation de premier degré de la forme $ax + b = cx + d$
Les coefficients a, b, c, d ne sont pas donnés.

On prend deux solutions fausses x' et x'' qui conduisent à des erreurs e' et e''
$e' = (ax' + b) - (cx' + d) = (a - c)x' + b - d$
$e'' = (ax'' + b) - (cx'' + d) = (a - c)x'' + b - d$

La formule permettant de trouver x se justifie avec nos notations actuelles de la façon suivante :
$x''e' - x'e'' = (b - d)(x'' - x')$ et $e' - e'' = (a - c)(x' - x'')$

$x=\dfrac{x''e'-x'e''}{e'-e''}$ (formule 1) qui est bien la valeur de x cherchée soit $x=\dfrac{b-d}{c-a}$[14]

Cette méthode a été très importante pendant de nombreux siècles. Fibonacci parle au XII^{e} siècle de « règle de l'augmentation et de la diminution » , les mathématiciens arabes l'utilisent sous le nom de « hisab al-khata'ayn » ou « calcul des deux erreurs » , les mathématiciens chinois l'appellent « ying bu zu shu » c'est à dire « règle du trop (ying) ou du pas assez(bu zu) ». Le mathématicien Ibn al Banna l'illustre par « la méthode des plateaux », le mathématicien Qusta ibn Luqa en fait une démonstration géométrique à la fin du IX^{e} siècle en se référant à la propriété des aires des parallélogrammes d'Euclide (livre 1 des Eléments).
Au XIII^{e} siècle Fibonacci la démontre en utilisant les règles de calcul sur les proportions développées par Euclide et arrive à

$\dfrac{x''-x}{e''}=\dfrac{x'-x''}{e'-e''}$ (formule 1 bis) qui le conduit à $x=x''-\dfrac{e''(x'-x'')}{e'-e''}$ (formule 1 ter)

Le manuel de 1859, précédemment cité, énonce la règle de fausse position double en attirant l'attention de l'élève sur le fait que les erreurs ont un « sens ». Voici ce qui est écrit :

RÈGLE : *On multiplie chaque erreur par l'autre supposition, ce qui donne deux produits ; on retranche ces deux produits l'un de l'autre, et l'on divise le reste par la différence des deux erreurs.*
Si les erreurs sont en sens contraire, c'est à dire l'une par excès et l'autre par défaut, on ajoute les deux produits et l'on divise la somme par la somme des erreurs

3- Cas particulier :

Il s'agit des problèmes relevant d'une équation de la forme $ax + b = d$
Le nombre d est donné, les coefficients a et b peuvent rester cachés.
On prend deux fausses positions x' et x''
$ax + b = d$
$ax' + b = d'$ $\dfrac{x-x'}{d-d'}=\dfrac{x''-x'}{d''-d'}$ (formule 2) $x=x'+\dfrac{(x''-x')(d-d')}{d''-d'}$ (formule 2bis)
$ax'' + b = d''$

On retrouve les formules 2 faisant intervenir les erreurs en remarquant que
$d - d' = e'$ *et* $d'' - d' = (d - d') - (d - d'') = e' - e''$

La donnée de d permet d'éviter la formule 1 plus complexe que les formules 2 qui, elles, se retrouvent facilement en situation en raisonnant par proportionnalité. La formule 2 bis, à rapprocher de celle démontrée par Fibonacci pour le cas général, sera celle que certains de nos élèves vont utiliser mais sous forme simplifiée et implicite comme nous le verront par la suite.

Pour faire appliquer la formule générale, le manuel de 1859 ne pose pas de problème relevant du cas général mais seulement un problème relevant de ce cas particulier :

[14] Histoire d'algorithmes. Du caillou à la puce. Par J.L. Chabert , E. Barbin, M. Guillemot, A.Michel-Pajus, J.Borowczyk , A.Djebbar, J.C.Martzloff. Editions Belin- 1995 où nous avons pris les renseignements historiques qui figurent dans le paragraphe qui suit

PROBLÈME : *On a payé* 80 *fr. pour* 29 *mètres d'étoffes de deux espèces, l'une à* 3 *fr. et l'autre à* 2 *fr.50 c. le mètre ; combien a-t-on acheté de mètres de chaque espèce ?*
Aujourd'hui le problème peut se résoudre par une équation dans laquelle par exemple x désigne la longueur en mètres du tissu à 3fr.:
$3x + 2{,}5(29 - x) = 80$ soit $0{,}5x = 80 - 72{,}5$ soit $0{,}5x = 7{,}5$ d'où $x = 15$

Nous remarquons qu'il s'agit de la forme $ax + b = d$ avec $d = 80$, une donnée du texte.

Bien qu'il s'agisse d'un cas particulier, et qui plus est d'un type de problème dit « de mélanges » comme nous le verrons plus loin (on mélange deux tissus) le manuel donne deux solutions utilisant la méthode générale, pour permettre aux élèves d'apprendre à résoudre tous les types de problèmes.

Dans les deux cas l'inconnue qui est en fait le nombre sur lequel porte les suppositions est appelé, quand il est trouvé, « nombre véritable »

Résolution avec la règle énoncée (formule 1) :

Je suppose qu'on ait acheté 9 mètres de la première espèce, et par conséquent 20 de la seconde ;

$$\begin{array}{lr} & 3^{fr} \times 9 = 27^{fr} \\ & 2^{fr},50 \times 20 = 50 \\ \hline \text{Total} & 77^{fr} \end{array}$$

au lieu de 80 fr. ; erreur par défaut 3.

Je suppose en second lieu qu'on ait acheté 11 mètres de la première espèce, et par conséquent 18 de la seconde ;

$$\begin{array}{lr} & 3^{fr} \times 11 = 33^{fr} \\ & 2^{fr},50 \times 18 = 45 \\ \hline \text{Total} & 78^{fr} \end{array}$$

au lieu de 80 fr. ; erreur par défaut 2.

Je dispose les nombres ainsi qu'il suit :

1re supposition 9, erreur par défaut 3.
2e supposition 11, erreur par défaut 2.

Différence des produits en croix $33 - 18 = 15$.
Différence des erreurs 1
Nombre véritable $\frac{15}{1} = 15$.

Pour la deuxième méthode, le manuel donne d'abord un équivalent de notre formule 1 bis [15] en faisant fonctionner le savoir sur les proportions qu'il a développé antérieurement, en ces termes

AUTRE RÈGLE : *Après avoir fait deux suppositions qui entraînent chacune une erreur, on écrit la proportion :*
Différence des erreurs **:** différence des suppositions **::** 1re ou 2e erreur **:** différence entre la 1re ou la 2e supposition et le nombre véritable.

Le manuel poursuit ainsi en appliquant cette règle pour résoudre le problème

[15] ......que nous pourrions appeler « proportion de Fibonacci » (voir paragraphe 1 précédent)

Ainsi, dans le problème précédent, on écrirait la proportion :

3—2 ou 1 : 11—9 ou 2 :: 3 : x—9, d'où x—9 = 6 et x = 15,

ou bien

3—2 ou 1 : 11—9 ou 2 :: 2 : x—11, d'où x—11 = 4 et x = 15.

Il s'agit bien de la formule 1bis avec
$d = 80$ $d' = 77$ $d'' = 78$ $d - d' = e' = 3$ $d - d'' = e'' = 2$ $x' = 9$ $x'' = 11$
On remarque que le manuel désigne dans sa solution le nombre inconnu par x et passe de $x - 11 = 4$ à $x = 15$. On assiste là encore à l'introduction progressive de l'algèbre dans l'enseignement.

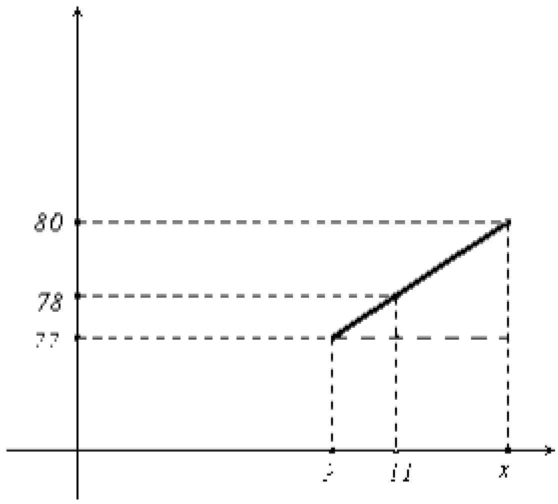
Avec nos notations :
La différence des erreurs est $d'' - d' = e' - e''$
La différence des suppositions est $x'' - x'$ La première erreur est $e' = d - d'$
La différence entre la première supposition et le nombre véritable est $x - x'$

On remarquera que cet énoncé de la règle en termes d'erreurs amène une difficulté de sens de la différence : si la différence des suppositions est $11 - 9$, la différence des erreurs est $3 - 2$ et non $2 - 3$.
Le manuel passe sous silence cette difficulté qui aurait disparu avec la formule 2 bis utilisant d, d'et d'' au lieu de e' et e''.
C'est la rançon à payer pour avoir comme dans le manuel, l'algorithme le plus général.

4- Interprétation de la méthode de fausse position double comme une interpolation linéaire.

Continuons sur l'exemple du prix du tissu. On a trouvé l'expression de la fonction qui donne le prix du tissu quand on connaît la mesure x du tissu à 3F le mètre par exemple en écrivant l'équation.
Cette fonction est $f(x) = 3x + 2{,}5(29 - x)$.

Sans avoir trouvé l'expression de la fonction, on peut trouver l'antécédent de 80 en supposant la linéarité et en faisant une interpolation, ce qui est très proche de la méthode de fausse position double. C'est notre formule 2 bis



$f(9) = 77$

$$\frac{x-9}{80-77} = \frac{11-9}{78-77}$$

$f(11) = 78$

$x = 9 + 2 \times 3 = 9 + 6 = 15$

$f(x) = 80$

Avec les fausses positions choisies ici il s'agit plutôt d'une extrapolation

On aurait pu prendre aussi la fonction
$f_1(x) = 3x + 2{,}5(29 - x) - 80$.

Dans ce cas on retrouve la formule 1bis avec les erreurs
e' et e''.

Par exemple dans le cas du problème des trois jardins, l'expression de la fonction pour interpréter la fausse position double par une interpolation est la différence $f_2(x) = 3x - (x + 10)$
On cherche x tel que $f_2(x) = 0$ avec, pour reprendre les fausses positions données en exemple $f_2(4) = e'$ et $f_2(6) = e''$

Le manuel de 1859 attire l'attention de l'élève sur le fait que la linéarité de la fonction inconnue est une condition essentielle à la réussite de la méthode. Il est recommandé à l'élève de s'en assurer en testant avec une troisième valeur. Le manuel l'explique à l'élève avec l'exemple du problème des tissus et en s'appuyant encore sur ce qui a été développé sur les proportions dans un chapitre précédent :

445. La règle de fausse position simple ou double n'est pas applicable dans tous les problèmes ; et même dans les cas où elle est applicable, il reste toujours un peu d'incertitude pour savoir laquelle des deux, de la simple ou de la double, donnera la solution cherchée ; bien que les problèmes qui se résolvent par la règle de fausse position simple puissent toujours se résoudre par la règle de fausse position double. Le raisonnement, au contraire, conduit infailliblement au résultat.

Pour reconnaître si la règle de fausse position est applicable, on fait trois suppositions de nombres formant entre eux une proportion par différence continue ; les résultats obtenus doivent aussi former une proportion par différence continue. Ainsi, dans l'exemple qui précède, la première supposition 9 a donné pour résultat 77 ; la deuxième 11 a donné pour résultat 78 ; en prenant 13 pour troisième supposition, on obtient pour résultat 79. Les trois nombres 9, 11 et 13 forment une équidifférence continue, ainsi que 77, 78 et 79. On a en effet 9.11:11.13 et 77.78:78.79.

Remarquer que la fonction sous-jacente testée par le manuel est la fonction *f* du fait du cas particulier (deuxième membre constant égal à 80)

5-Autre simplification de la méthode de la fausse position double :

Le manuel de 1859 ne donne pas d'autre variante de la méthode de fausse position double pour résoudre le problème du tissu. Un manuel d'enseignement un peu plus récent fournit une solution avec une variante de cette méthode qui est celle que certains de nos élèves trouvent seuls.

Exemple de problème résolu dans un manuel du siècle dernier[16] :

Il s'agit d'un problème du même type que celui des tissus : mélange de pièces de valeurs différentes.

[16] Combette, *Cours moyen et supérieur –Arithmétique, système métrique et géométrie usuelle*, Alcide Picard et Kaan, Paris, 10e éd, s.d (p.219) - Donné par l'ouvrage d'histoire des mathématiques cité en note 2-
Nous n'avons pas l'indication de la date du manuel, mais nous avons un autre ouvrage intitulé « Géométrie par Combette » et daté de 1903. Nous pouvons attribuer une date de parution voisine à ce manuel.

CHAPITRE VIII

RÉSOLUTION DE QUELQUES PROBLÈMES

377. A. Problème I (**fausse position**). — *Un sac contient 154 fr. en pièces de 5 fr. et de 2 fr.; il y a 41 pièces, trouver le nombre de pièces de 5 fr.*

Si toutes les pièces étaient de 2 francs, le sac ne contiendrait que 41 × 2 ou 82 francs, tandis qu'il en contient 154 : la différence est 72 francs.

Chaque fois que l'on remplace une pièce de 2 francs par une pièce de 5 francs le nombre total des pièces ne change pas, mais la somme augmente de 3 francs. Comme il faut augmenter la somme de 72 francs, il faudra remplacer autant de pièces de 2 francs par des pièces de 5 francs que 3 est contenu de fois dans 72, c'est-à-dire 24.

Réponse : il y a 24 pièces de 5 francs.

Remarque. — Beaucoup de problèmes se résolvent par la méthode que nous venons d'employer : elle s'appelle méthode de fausse position.

En quoi cette méthode que certains de élèves utilisent est -elle liée avec ce qui précède ?

<u>Type de problème algébrique ainsi résolu</u>
Le choix d'une seule inconnue, le nombre de pièces de 5F conduirait à l'équation suivante :
$5x + 2(41 - x) = 154$ qui est de la forme $ax + b = d$

<u>Méthode de double fausse position vue précédemment (cas particulier)</u>
Si le nombre de pièces de 5F est nul :
$x' = 0$ la somme serait 82F soit en moins 154 – 82 = 72F ($d - d'$)
Si le nombre de pièces de 5F est 41 :
$x'' = 41$ la somme serait 205F soit en trop 205 –154 = 51F ($d'' - d'$)
Pour un écart de 41 pièces de 5F, l'écart entre les sommes est de 72 + 51 = 123F
Pour combler l'écart de 72F, il faut ajouter à 0 le nombre de pièces de 5F suivant :
$\dfrac{41 \times 72}{123}$ = 24 pièces (formule 2 bis)

<u>Méthode de fausse supposition enseignée dans ce manuel</u>
Il s'agit d'une méthode de double fausse position que nous qualifierons de <u>« simplifiée</u> » par le choix des deux suppositions x' et x'' de sorte que $x'' - x' = 1$. *soit* $x'' = x' + 1$
Ici on avait $d = 154$ *. En choisissant*
$x' = 0$ $d' = 41 \times 2 = 82$
$x'' = 1$ $d'' = 82 + 3$
$d - d' = 154 - 82$ et $d'' - d' = 3$ Il suffit d'écrire la proportion (formule 2 bis)

<u>Méthode avec un système d'équations</u>
Le choix de deux inconnues conduirait au système $\begin{cases} x + y = 41 \\ 5x + 2y = 154 \end{cases}$

Les élèves de 4ème ou de 3ème qui n'ont pas trouvé seuls la méthode arithmétique exposée dans ce manuel du début du siècle, essaient parfois de se lancer dans l'algèbre, mais comme ils voient deux inconnues et aucune raison de choisir l'une plutôt que l'autre, ils les désignent par deux lettres. Cela les conduit à l'écriture du système, que souvent ils ne savent pas résoudre car, soit ils ne l'ont pas encore vu, soit ils n'ont pas compris la technique de résolution qui n'a pas pris de sens pour eux. Donc ils s'arrêtent là. Cela renforce leur opinion que nous pouvons résumer ainsi : « cela ne sert à rien de prendre des lettres, parce que si on met des lettres on ne sait pas faire, alors que ceux qui ont essayé sans mettre des lettres ont parfois réussi ! »

Remarque 1 : La résolution du système

- procédé par substitution

$y = 41 - x$ reporté dans la seconde équation donne l'équation du premier degré déjà écrite

- procédé par addition :

multiplier les deux membres de la première équation par -5 et ajouter les deux équations membre à membre conduit aux mêmes calculs que la méthode de fausse position double avec $x' = 0$ et $x'' = 1$

Remarque 2 :

Certains élèves n'écrivent pas le système mais font un raisonnent arithmétique

Ils gardent en mémoire l'idée de deux contraintes sur les deux nombres inconnus. Ils satisfont une des contraintes et font des essais pour satisfaire l'autre contrainte tout en conservant la première.

Par exemple on choisit de garder la contrainte de 41 pièces en tout. On fait un essai avec 0 pièces de 5F et donc 41 pièces de 2F. On trouve 84F de sorte que la deuxième contrainte n'est pas satisfaite puisqu'il faut 154F. Deux possibilités pour continuer :

- soit on poursuit les essais en augmentant le nombre de pièces de 5F et en diminuant le nombre de pièces de 2F pour augmenter la somme d'argent en conservant le nombre total de 41 pièces jusqu'à arriver au résultat.

Dans ce cas les élèves commencent en général les essais par un nombre de pièces de 5F non nul. C'est totalement empirique pour eux mais à rapprocher de l'interprétation graphique : on trace la droite d'équation $x + y = 41$ et on cherche parmi les points de coordonnées entières celui dont les coordonnées satisfont à $5x + 2y = 154$ (intersection de deux droites)

- soit on cherche à satisfaire la deuxième contrainte en raisonnant par proportionnalité:

chaque fois que je remplace une pièce de 2F par une pièce de 5F, la somme augmente de 3F. On retrouve alors, si on a commencé par $x = 0$ (82F) que le nombre de fois qu'il faut répéter la transformation pour satisfaire la deuxième contrainte est $\frac{154-82}{3} = 24$ (fausse position « simplifiée »)

2- Résolutions arithmétiques ou pré-algébriques dans lesquelles s'engagent les élèves

Nous allons décrire d'autres procédures dans lesquelles s'engagent les élèves de collège de tous niveaux, aussi bien ceux de 6ème ou de 4ème qui n'ont eu encore aucun enseignement sur les équations que ceux de 3ème ou de seconde qui veulent les éviter car ils ne savent pas ou ne peuvent pas se servir de cet outil qui leur est demeuré étranger malgré l'enseignement qu'ils ont reçu.

L'examen de leur travail peut aider à décider si l'enseignement de l'outil algébrique des équations est justifié. Dans le cas de réponse positive un retour sur l'histoire de la pensée peut alors nous aider pour améliorer cet enseignement (voir le thème des équations dans la brochure).

a- Exemple 1 :

Problème : *Jean a un certain nombre de billes. Pierre en a 3 fois plus et René en a 14 de plus que Jean. Pierre et René ont le même nombre de billes. Combien chacun des trois enfants a-t-il de billes ?*

1-Recherche orientée vers l'arithmétique :

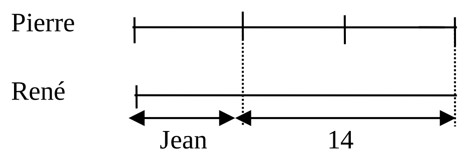
Quelques rares élèves donnent la solution suivante ou du moins essaient dans cette direction :
Je suppose que Jean a 3 billes. Dans ce cas Pierre aurait 9 billes et René aurait 17 billes. Il y a un écart de 8 billes en faveur de René.
Si j'augmente de 1 bille la part de Jean, celle de Pierre augmente de 3 et celle de René seulement de 1. L'écart se réduit ainsi de 2 billes. Comme l'écart est de 8 billes, je fais quatre fois cette opération de sorte que la part de Jean est de 3 + 4 = 7 billes

On reconnaît la méthode de fausse position double en prenant $x'' - x' = 1$ comme dans le problème des pièces de monnaie mais cette fois on se trouve dans le cas général comme dans le problème des jardins où on doit utiliser les erreurs en l'absence d'une constante d évidente.
On a $e' = 8$ $e'' = 6$ $e' - e'' = 2$
$x = x' + \frac{e'}{e' - e''} = 3 + \frac{8}{2} = 7$ (formule 2 bis simplifiée par le choix de $x'' - x' = 1$)

En fait l'avantage essentiel de cette méthode pour les élèves est que, même s'ils n'arrivent pas au bout, le premier pas qui consiste à choisir une inconnue la plus commode et à lui attribuer une valeur un peu au hasard les conduit à faire une deuxième supposition. Il leur suffit ensuite de se rendre compte du sens de l'erreur puis d'améliorer le résultat avec une troisième supposition, et ainsi de suite, ce qui peut leur donner assez vite la solution, souvent même en seulement deux ou trois coups, surtout dans le cas de nombres entiers simples comme ici.

2- Recherche utilisant une approche pré-algébrique

Les élèves sont orientés vers cette piste surtout s'ils imaginent une représentation (intellectuellement ou par un dessin) des parts de chaque enfant et l'équilibre des parts de Pierre et de René.
Ils raisonnent alors de la façon suivante :



Trois fois la part de Jean est égale à la part de Jean plus 14.
Donc deux fois la part de Jean vaut 14
La part de Jean vaut 7

Ce raisonnement suit exactement la mise en équation et la transformation de ses membres pour la résoudre : $3x = x + 14$ $\quad 3x - x = 14$ $\quad 2x = 14$ $\quad x = 7$

b- Exemple 2 :

Problème : J'ai choisi un nombre, je l'ai multiplié par 3, j'ai ajouté 5 et j'ai trouvé 17. Quel est ce nombre ?

Recherche utilisant la réciproque d'une fonction

Les élèves n'ont pas besoin de résoudre l'équation $3x + 5 = 17$ pour trouver la solution et calculer mentalement $17 - 5 = 12$ et $12 \div 3 = 4$

Ces calculs sont exactement ceux qui permettent de résoudre l'équation. Mais ce n'est pas l'équation qui modélise le mieux le raisonnement des élèves.
Ce raisonnement se traduit mieux dans un cadre fonctionnel : il s'agit de rechercher l'antécédent de 17, obtenu par une certaine fonction f qu'il n'est pas nécessaire d'expliciter.

En fait $f(x) = 3x + 5$ et on cherche l'image de 17 par la fonction réciproque.
Or f est composée de deux fonctions : on prend le triple puis on ajoute 5.
Il suffit de composer les fonctions réciproques dans l'ordre inverse en restant dans le cadre d'un modèle implicite d'action sans aucune formalisation : pour me chausser, je mets mes chaussettes, j'enfile mes chaussures et je fais un nœud à mes lacets. Pour retrouver mes pieds nus je fais les mêmes opérations dans l'ordre inverse.

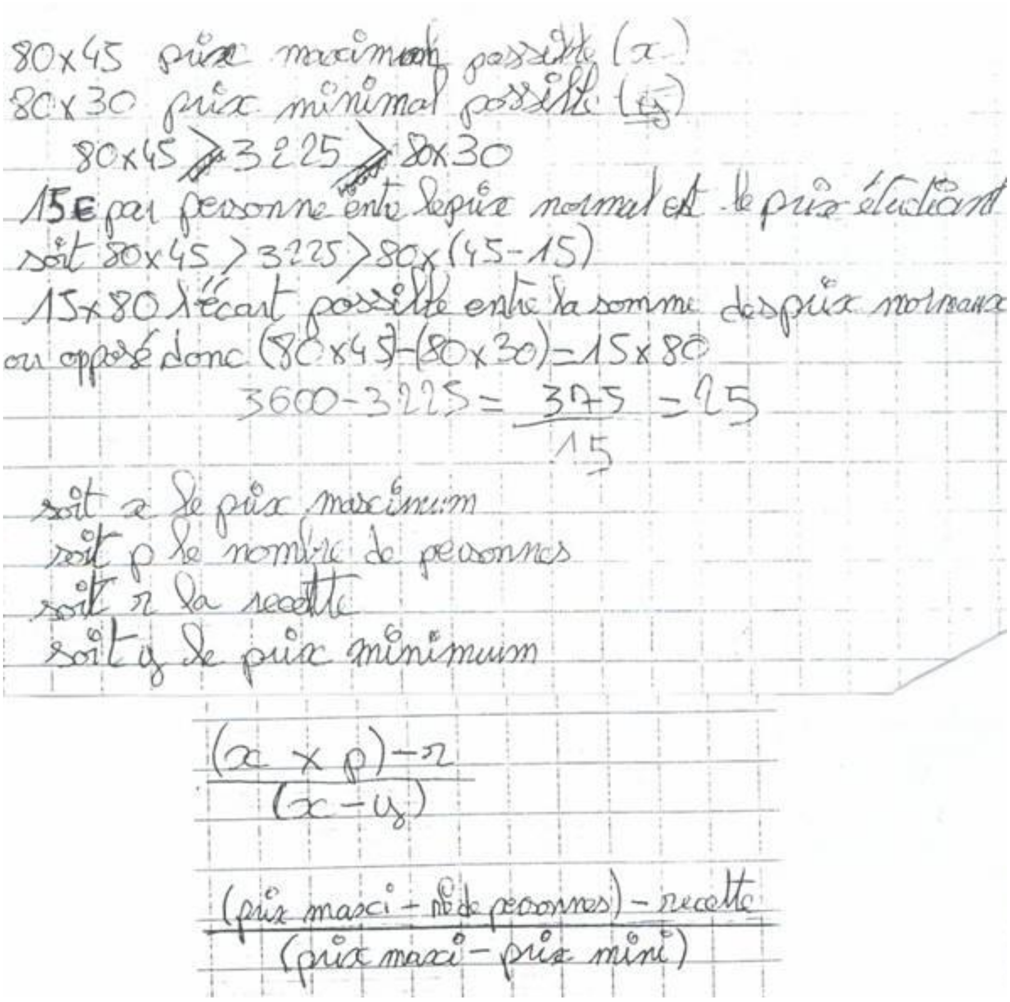
Modifier les nombres pour rendre les calculs plus difficiles ne justifie pas pour autant l'usage de la formalisation algébrique. Certains élèves veulent bien reconnaître le parallèle entre ce qu'ils ont fait en « remontant la chaîne des calculs » et les deux étapes de la résolution de l'équation, mais ce genre de problème ne les incitera pas à adopter la technique de l'équation, tout au plus à la comprendre...

c- Exemple 3 :

Il s'agit d'un problème que le professeur peut poser en $4^{ème}$ ou en $3^{ème}$ comme exercice d'application pour utiliser le savoir sur la mise en équation et la résolution de problèmes de premier degré. Nous l'avons proposé il y a quelques années.

Problème : Pour un étudiant, une place de concert coûte 30 euros, alors que le prix normal est de 45 euros. La recette pour 80 personnes a été de 3225 euros.
Combien d'étudiants ont assisté à cette séance ?

1- Recherche orientée vers l'arithmétique : Un élève a écrit ceci :



80x45 prix maximal possible (x)
80x30 prix minimal possible (y)
80x45 > 3225 > 80x30
15€ par personne entre le prix normal et le prix étudiant
soit 80x45 > 3225 > 80x(45-15)
15x80 l'écart possible entre la somme des prix normaux
ou opposé donc (80x45)-(80x30)=15x80
3600-3225 = $\frac{375}{15}$ = 25

soit x le prix maximum
soit p le nombre de personnes
soit r la recette
soit y le prix minimum

$\frac{(x \times p) - r}{(x - y)}$

$\frac{(\text{prix maxi} \div \text{nb de personnes}) - \text{recette}}{(\text{prix maxi} - \text{prix mini})}$

On peut interpréter cette solution comme une résolution arithmétique par la méthode de fausse supposition double « simplifiée »

S'il n'y a aucun étudiant (première supposition $x' = 0$) la recette est $80 \times 45 = 3600$ et l'erreur correspondante est $3600 - 3225 = 375$

Si on remplace un spectateur tarif plein par un étudiant ($x'' = 1$) la recette va diminuer de 15F.

d'où par proportionnalité $x = 0 + \dfrac{375}{15} = 25$

En prenant pour inconnue x qui est le nombre d'étudiants, la résolution par une équation serait

$30x + 45(80 - x) = 3225$ soit une équation de la forme $ax + b = d$ avec la donnée $d = 3225$

On a $d' = 3600$ $\quad 375 = d' - d$ $\quad 15 = d'' - d'$ $\quad$ et on a $x'' - x' = 1$

Le calcul de d'' n'est pas utile car seul ce qui intervient est la différence $d'' - d'$

2- Remarque :

Après avoir trouvé la réponse, l'élève tente une généralisation, qui n'était pas demandée, en désignant les nombres donnés dans l'énoncé par des lettres. Il espère ainsi avoir une « formule » qui lui permettra de résoudre plus vite un problème de même type, peut-être parce qu'il a eu beaucoup de peine à imaginer cette solution et qu'il voudrait pouvoir la retrouver. Il

s'agit bien de la recherche d'un algorithme, objectif des hommes résolvant des problèmes, comme nous le disons au début de ce texte.
Mais la portée de l'énoncé de l'élève est limitée du fait qu'il « colle » à la situation du prix des places pour un spectacle car il s'agit d'une formule où les lettres sont des abréviations.

Remarquons enfin qu'il s'agit si fortement d'une formule, c'est à dire un programme arithmétique de calcul, que la quantité cherchée n'est pas représentée par une lettre. L'absence d'égalité interdit de fait toute transformation algébrique. La « formule » ne pourra donc pas se transformer pour tirer la valeur d'une quelconque quantité en fonction des autres.
Il est bien connu que les élèves doivent franchir l'obstacle des formules de l'arithmétique pour entrer dans l'algèbre, ce qui ne veut pas dire qu'il ne faut pas enseigner des formules et surtout faire trouver des formules par les élèves dans les premières années de collège (voir notre travail à ce sujet)

3- Les problèmes d'alliage et de mélange : la recherche d'une formule

En fait la formule trouvée par l'élève est tout à fait intéressante car le problème qu'il a résolu relève d'un grand type de problèmes qui est celui de la détermination des composantes d'un alliage ou d'un « mélange » (ici les places à prix étudiant et les places à tarif complet).
Dans le manuel de 1859, les méthodes de fausse position figurent en §II mais sont précédées d'un §I qui traite en 7 points de différentes « règles », notamment en point 7 des règles de mélange et d'alliage soit une autre méthode qui donne les mêmes calculs de proportionnalité que ceux des fausses positions en prenant les compositions extrêmes du mélange. Voici une « règle » et un problème d'application avec sa solution. La démonstration de la règle en général n'est pas faite mais il est démontré la validité de la solution du problème avec cette « règle ».

RÈGLE : *Pour connaître les quantités de chaque espèce qui doivent entrer dans un mélange de deux choses, connaissant le prix de chacune d'elles et le prix moyen du mélange, on cherche la différence entre le prix de chaque chose et le prix moyen. Les quantités demandées sont entre elles comme les différences obtenues.*

PROBLÈME : *Un marchand a du blé de deux qualités différentes, la première a 30 fr. l'hectolitre, et la seconde a 21 fr. l'hectolitre ; il voudrait en faire un mélange qui revient à 25 fr. l'hectolitre ; combien doit-il en prendre de chaque espèce ?*

Le manuel résout le problème en appliquant la règle avec un tableau

Prix moyen	*Prix des espèces données*	*Différences*
	30 fr. de la 1re	*4*
25		
	21 fr. de la 2e	*5*

Le manuel continue ainsi en expliquant la méthode et en ajoutant une « démonstration »

J'écris les prix donnés l'un sous l'autre et entre les deux, mais un peu à gauche, le prix moyen. Je cherche la différence entre le prix supérieur et le prix moyen, et j'écris cette différence 5 à la droite du prix inférieur. Je cherche de même la différence entre le prix moyen et le prix inférieur, et j'écris cette différence 1 à la droite du prix supérieur.

Les quantités de chaque espèce que le marchand doit prendre seront comme les nombres 4 et 5, c'est-à-dire que le nombre d'hectolitres de la première espèce ne sera que les $\frac{4}{5}$ du nombre d'hectolitres de la deuxième, et réciproquement le nombre d'hectolitres de la deuxième sera les $\frac{5}{4}$ du nombre d'hectolitres de la première.

DÉMONSTRATION. En effet, en vendant 25 fr. un hectolitre de la première espèce qui coûte 30 fr., le marchand perd 5 fr., et gagne au contraire 4 fr. en vendant 25 fr. l'hectolitre de la seconde espèce, qui ne coûte que 21 fr.

Par conséquent, pour un nombre quelconque d'hectolitres de la première espèce, 20, par exemple, le marchand perdra $5^{fr} \times 20$; il faut donc qu'il compense cette perte par la vente d'un nombre d'hectolitres de la deuxième espèce tel, que $4^{fr} \times$ par ce nombre d'hectolitres inconnu fasse précisément le même produit. Connaissant un produit $5^{fr} \times 20$ et un des facteurs 4, on trouvera l'autre facteur, c'est-à-dire le nombre d'hectolitres demandé, en divisant 5×20 par 4. Ce nombre sera donc $\frac{5 \times 20}{4} = 20 \times \frac{5}{4}$.

La solution, comme on voit, ne donne que le rapport des deux quantités à mélanger.

Il est à noter que cette démonstration arithmétique utilise un raisonnement que nous avons vu dans la fausse position double avec $x'' - x' = 1$. (voir problème des pièces de monnaie au **1**-b-5). Ici la nature du problème ne rend pas nécessaire le choix des valeurs de x' et x'' Seule la différence égale à 1 suffit.

Dans le cadre de l'algèbre, pour montrer le rôle joué par les différences et trouver le rapport entre les deux quantités de blé dans le mélange, on dirait :
Soit x le nombre d'hectolitre à 30F et y le nombre d'hectolitre à 21F
$30x + 21y = 25(x + y)$ *soit* $30x - 25x = 25y - 21y$ *soit* $(30 - 25)x = (25 - 21)y$
soit $5x = 4y$

Si on imposait la quantité totale P de mélange à fabriquer on aurait pu résoudre le problème par une équation de premier degré de la forme $30x + 21(P - x) = 25P$

Nous avons déjà rencontré ce type de problème à deux reprises : les tissus (**1**-b-3), les pièces de monnaie (**1**-b-5)
Ces problèmes peuvent se résoudre par une équation de premier degré de même type
Pour les 29 mètres de tissu de deux espèces valant en tout 80F, on avait $3x + 2{,}5(29 - x) = 80$
Pour les 41 pièces de monnaie de 5F et 2F valant en tout 154F, on avait $5x + 2(41 - x) = 154$
Pour les 80 places à 30F et 45F avec une recette de 3225F, on a $30x + 45(80 - x) = 3225$
Donc si on note :
R le second membre constant (il s'agit de la recette pour le cinéma, de $25P$ pour le blé , etc...)

p le nombre total (il s'agit du nombre de personnes pour le cinéma, du nombre de pièces, etc..)
a et b les valeurs de l'unité de matière de chaque sorte : $bx + a(p - x) = R$ soit
$x = \dfrac{ap - R}{a - b}$, formule qui est bien celle de l'élève et qui permet de trouver la solution de tous ces types de problèmes.

Dans le manuel de 1859 les problèmes comme celui sur les tissus ou les pièces de monnaie ne sont pas reconnus comme résolubles par la méthode exposée auparavant avec le mélange du blé, appelée parfois « la croix des mélanges[17] » basée sur les différences entre les extrêmes et une moyenne ce qui évite de parler de fausse position.

Dans les problèmes que nous avons vus sur les tissus ou sur les pièces, plusieurs obstacles empêchent d'utiliser cette « croix des mélanges » ou ce tableau donné par le manuel de 1859 . Considérer un tissu fictif dont le prix du mètre serait 80F/29 ou une pièce fictive dont la valeur serait 154F/41 n'a pas beaucoup de sens dans le problème réel . Néanmoins il était possible d'éviter d'en passer par là. Par exemple pour les tissus le manuel aurait pu présenter la solution ainsi :

3F de la 1ère — $29 \times 3 - 80 = 87 - 80 = 7$

2,5F de la 2ème — $80 - 29 \times 2,5 = 80 - 72,5 = 7,5$

Le rapport entre les deux longueurs cherchées est $\dfrac{7}{7,5} = \dfrac{14}{15}$

Comme on a un total de 29 mètres la solution est 14 mètres de la 2ème et 15 mètres de la 1ère
Donc cette objection aurait pu être levée.
Cependant nous voyons que cette méthode est bien adaptée quand il s'agit de déterminer quelle proportion de chaque liquide ou de chaque métal on utilise pour obtenir un prix donné du litre de mélange ou un titre donné de l'alliage. Si en revanche la quantité de mélange ou d'alliage à fabriquer et le prix total du produit ou le poids total sont imposés (comme pour les tissus, 29 mètres à 80 fr. et comme pour les pièces 41 pièces formant 154F) la méthode ne donne que la proportion des deux quantités mais non la valeur exacte de chacune. Un deuxième calcul de proportion est nécessaire.

Indépendamment de ces deux obstacles, dont le premier était peut-être le plus gênant pour les anciens auteurs de manuels car on ne peut pas « dans la réalité » parler de « mélange » pour des tissus ou des pièces, de nombreux problèmes de premier degré ne sont pas résolubles avec cette croix des mélanges, d'où la présentation à la suite dans le manuel de la règle de fausse position, méthode « royale » qui permet de résoudre comme nous l'avons vu tous les problèmes relevant de premier degré. On comprend bien pourquoi les mathématiciens de

[17] Voir à ce propos le problème de la laitière exactement de même type, dans l'article intitulé « Palimpseste » de Philippe Lombard, revue de l'APMEP n°466-
Problème : *Une latière a fourni a une crémière 20 litres de lait. En pesant ce lait la crémière a trouvé un poids de 20,555kg. Ce lait a-t-il été mélangé à de l'eau ? Qu'est-ce qui le prouve ? Quelle quantité d'eau contient-il ? On rappelle que la densité du lait est 1,03*
En avance sur les pédagogues du siècle suivant, F. Legendre, dans un ouvrage titré :l'Arithmétique en sa perfection, mise en pratique selon l'usage des financiers, gens de pratique, banquiers et marchands (1781- Chez Martial Barbou, imprimeur du Roi- Limoges) résume sous le titre « règle d'alliage » tout ce qui concerne les mélanges de métaux, grains, vins , étoffes... (pages 227 à 233)

toutes origines y ont travaillé pendant des siècles de manière à obtenir son énoncé le plus performant et sa démonstration la meilleure.

d- Exemple 4 :
Il s'agit d'un problème posé en 3ème il y a quelques années à propos de la résolution des systèmes de deux équations du premier degré.

Problème : *Pour équiper un espace technologique, un collège achète 5 ordinateurs et 2 imprimantes pour un coût total de 37 300 F. L'année suivante, pour compléter le matériel, ce collège achète aux mêmes tarifs, 3 ordinateurs et une imprimante pour un coût total de 21 900F. Quel est le prix d'un ordinateur, quel est le prix d'une imprimante ?*

Recherche utilisant le pré-algébrique :
Un élève a esquivé l'écriture formelle d'un système d'équations et a fourni la solution exacte suivante :

1/ Le prix d'un ordinateur est de : 6500F
37300 - 21 900 = 15 400
15 400 x 2 = 30 800
37 300 - 30800 = 6500
Le prix d'une imprimante est de : 2400F
6500 x 5 = 32500 ou 6500 x 3 = 19500
37300 - 32 500 = 4800 ou 21 900 - 19500 = 2400
4800 : 2 = 2400

En désignant par x le prix d'un ordinateur et par y le prix d'une imprimante, la première étape de la résolution avec le système aurait été :

$$\begin{array}{ll} (1) & \left\{\begin{array}{l} 5x+2y=37300 \\ 3x+y=21900 \end{array}\right. \\ (2) & \end{array}$$

En retranchant membre à membre les deux équations on trouve :
$2x + y = 37\,300 - 21\,900$ (3)

C'est bien la première opération posée par l'élève. Dans son raisonnement cette étape représente la différence entre le premier achat et le second donc le prix de deux ordinateurs et d'une imprimante.
La résolution du système aurait continué ainsi :
- en multipliant les deux membres de l'équation (3) par 2 , $4x + 2y = 15\,400 \times 2 = 30\,800$ (4)
- en retranchant membre à membre (1) et (4) pour trouver x

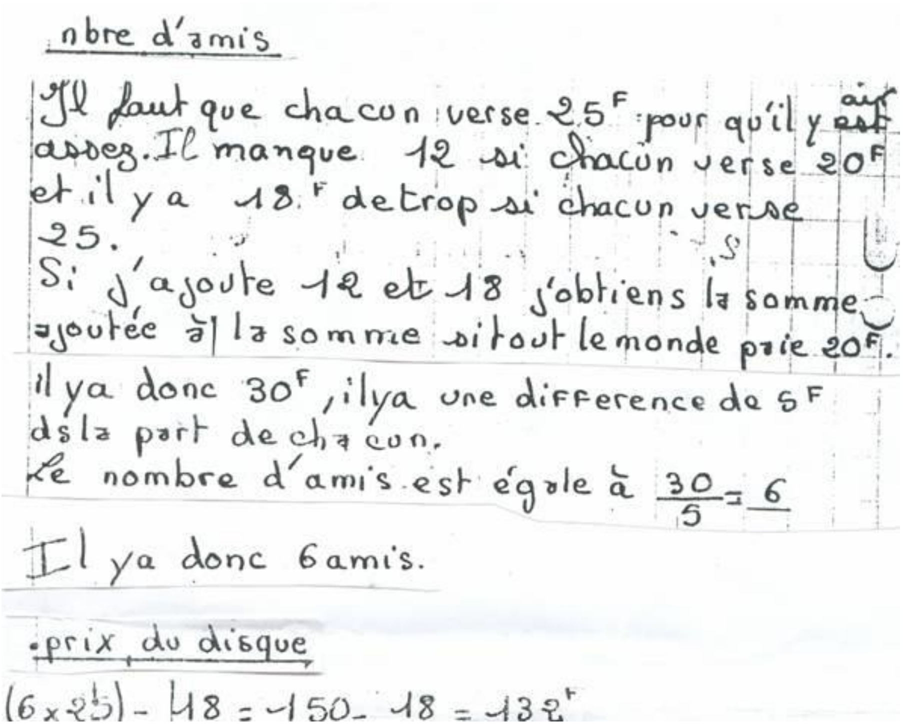
Ce sont effectivement les opérations que fait l'élève avec les constantes des deuxièmes membres, ce qui correspond dans son raisonnement

- à chercher d'abord le prix de 4 ordinateurs et de 2 imprimantes,
- à faire la différence avec le premier achat qui comporte un ordinateur de plus et le même nombre d'imprimantes
- à trouver ainsi le prix d'un ordinateur.

Nous disons que l'élève a utilisé une méthode pré-algébrique, bien que la désignation des inconnues par des lettres manque. Dans le raisonnement de l'élève elles ont été « dites » en toutes lettres : prix d'un ordinateur, prix d'une imprimante Certains élèves peuvent désigner par exemple le prix d'un ordinateur par *o* et le prix d'une imprimante par *i*, lettres qu'ils utilisent comme des abréviations quand ils explicitent davantage par écrit leur raisonnement pour ne pas en perdre le fil. [18].

<u>Remarque</u> : Une recherche orientée vers l'arithmétique serait toute autre car elle consisterait à tester un prix d'ordinateur et un prix d'imprimante de façon à trouver par exemple le prix du deuxième achat et ensuite à corriger en fonction du renseignement fourni par l'autre achat (voir ci-dessus le problème des pièces de monnaie au **1**-4 –Remarque 2)

e- <u>Exemple 5</u> :
<u>Problème :</u> *Plusieurs amis veulent offrir un disque à Paul pour son anniversaire. Si chacun verse 20F, il manque 12F. Si chacun verse 25F, il y a 18F de trop. Calculer le nombre d'amis de Paul et le prix du disque.*
Un élève de 4ème l'a résolu ainsi


nbre d'amis

Il faut que chacun verse 25F pour qu'il y ~~est~~ ait assez. Il manque 12 si chacun verse 20F et il y a 18.F de trop si chacun verse 25.
Si j'ajoute 12 et 18 j'obtiens la somme ajoutée à la somme si tout le monde paie 20F.
il ya donc 30F, il ya une difference de 5F ds la part de chacun.
Le nombre d'amis est égale à $\frac{30}{5} = 6$

Il ya donc 6 amis.

prix du disque

$(6 \times 25) - 18 = 150 - 18 = 132$F

---

[18] Dans l'histoire de la pensée mathématique on peut se référer à Diophante qui désigne l'inconnue par un mot l' «arithme » (le nombre) « mais ne peut en représenter qu'une seule. Quand il y en a plusieurs, il parle de la première, de la deuxième de la plus grande, de la plus petite.... Diophante a écrit son oeuvre sous la forme classique du discours continu. Mais il abrège un peu ce verbalisme en utilisant systématiquement certaines abréviations...et remplace quelques mots très fréquents par leurs lettres initiales ou finales » (extrait de l'ouvrage : une histoire des mathématiques –Routes et dédales. A.Dahan-Dalmico et J.Peiffer- Editions du Seuil)

Le raisonnement de l'élève peut se modéliser ainsi :
Si x est le nombre d'amis, S' et S'' les sommes obtenues et S la somme exacte
$25x = S' = S + 18$
$20x = S'' = S - 12$ $\qquad x = \dfrac{S' - S''}{25 - 20} = \dfrac{30}{5} = 6$

Cette proportionnalité entre la différence des sommes et la différence des versements de chacun reste implicite pour l'élève, mais c'est bien la base de son calcul.

La solution avec une équation de premier degré conduit aux calculs suivants très proches aussi de ceux réalisés par l'élève à condition de procéder ainsi :
Soit x le nombre d'amis
$20x + 12 = 25x - 18$ soit $25x - 20x = 18 + 12$ soit $5x = 30$ soit $x = 6$

Mais si lors de la résolution de l'équation on ne passe pas par une étape comme par exemple
$25x - 20x + 12 = 18$ ou encore $20x - 25x = -12 - 18$
la corrélation avec le problème disparaît. L'écriture algébrique devient formelle, sans rapport avec la réalité, ce qui est le fonctionnement normal de l'outil algébrique, et plus généralement de la modélisation mathématique d'un problème réel. Le travail mathématique dans le modèle se fait indépendamment de la réalité modélisée. On y revient seulement à la fin pour vérifier si on a obtenu une solution acceptable pour le problème réel, ce qui donne une indication sur l'adéquation plus ou moins bonne du modèle pour traduire la réalité.
Dans le cas très simple de la résolution d'un problème par une équation à une inconnue, ceci se traduit par un changement de statut de la lettre. Dans la première ligne x désigne un nombre inconnu qui a un sens dans le problème. Ensuite la lettre x fonctionne comme une indéterminée et ne retrouve son statut d'inconnue qu'à la dernière ligne quand la solution est trouvée. Ce jeu avec le statut des lettres devra faire partie de l'apprentissage de l'outil des équations.
C'est une différence fondamentale avec une solution arithmétique pendant laquelle on ne perd jamais de vue le problème de départ.

Conclusion :
Tous les problèmes conduisant à des équations de premier degré peuvent se résoudre par l'arithmétique en utilisant la proportionnalité. Selon les cas, ceci se traduit par des raisonnements plus ou moins faciles, de sorte qu'une formule générale, valable dans tous les cas, dite de « fausse position » existe et a été enseignée pendant de nombreux siècles.

Avec les notations et concepts actuels cette méthode de « fausse position » s'explique ainsi :
Toute équation de premier degré de la forme $f(x) = g(x)$ peut se résoudre par un raisonnement de proportionnalité en appliquant une interpolation linéaire à la fonction F, telle que
$$F(x) = f(x) - g(x).$$
On choisit deux valeurs de x , on calcule leurs images, et on cherche par interpolation l'antécédent de 0.
Les méthodes spontanées des élèves sont :
- faire des essais, en diminuant plus ou moins leur nombre par un raisonnement, le plus rapide étant de faire deux essais et de conclure par proportionnalité
- utiliser un raisonnement pré-algébrique quand c'est possible.

Dans tous les cas, il faut repérer dans le problème la quantité inconnue et les deux programmes de calcul qui doivent donner le même résultat, qu'on les énonce avec des phrases pour une résolution arithmétique ou pré-algébrique ou bien qu'on les écrive avec des notations algébriques en vue d'une résolution par une équation.

BIBLIOGRAPHIE

ACTES DE L'UNIVERSITÉ D'ÉTÉ: *Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques*- La Rochelle – Publication de l'IREM de Clermont-Ferrand- 1998

ARTIGUE Michèle , *L'enseignement du calcul aujourd'hui* : *problèmes, défis et perspectives* Repères IREM n°54, année 2004

BERTÉ Annie, *Mathématique dynamique* – Nathan –Pédagogie 1993

BOYÉ Anne, *Quelques éléments d'histoire des nombres négatifs*- IREM de Nantes

BROUSSEAU Guy , *Théorie des situations didactiques*. La Pensée sauvage-1998

CHABERT J.L., BARBIN E.,GUILLEMOT M., MICHEL-PAJUS A., BOROWCZYK J., DJEBBAR A., MARTZLOFF J.C., *Histoire d'algorithmes- Du caillou à la puce-* – Editions Belin-1993

CHEVALLARD Yves, *Le passage de l'arithmétique à l'algèbre*, Revue Petit *x* n° 19 et 23 – 1989-1990

COMBIER G, GUILLAUME J.C., PRESSIAT André,. *Les débuts de l'algèbre au collège*- INRP –1996

COMMISSION INTER-IREM PREMIER CYCLE *:*
- *Des mathématiques au cycle central* - Tomes 1 et 2- 1999 et 2001- Calcul littéral au collège

COMMISSION INTER-IREM D'EPISTEMOLOGIE ET D'HISTOIRE DES MATHEMATIQUES -*Histoire de problèmes, histoire des mathématiques* – Editions Ellipses-1993

GLAESER Georges, *Epistémologie des nombres relatifs*, Recherches en Didactique des Mathématiques - Vol 2, n°3- La Pensée Sauvage

GROUPE DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES AU COLLEGE, IREM D'AQUITAINE
- *Des « activités » aux situations d'enseignement* – IREM –Université de Bordeaux 1 –2002
- *Entrées dans l'algèbre en 6ème et 5ème* – IREM- Université de Bordeaux 1- 2007
- *Enseigner les nombres relatifs au collège*- Revue Repères IREM - n° 73- 2008
- *Problèmes et équations du premier degré en 4ème* – Revue APMEP (à paraître 2009)

INSPECTION PEDAGOGIQUE REGIONALE DE MATHEMATIQUES- *L'algèbre et en particulier le calcul littéral de la 6ème à la 2de* ; Académie d'Orléans Tours –Mai 2003

LOMBARD Philippe, *Palimpseste*, Revue APMEP n° 466

PETIT *x*, Hors série, *Activités mathématiques au collège*- 1992-1993

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE- *Algèbre et fonctions* , notamment II- *L'apprentissage de l'algèbre au collège*- DESCO- Groupement national d'équipes de recherches en Didactique des mathématiques

Documents d'accompagnement des programmes - EduSCOL
- *Du numérique au littéral* – janvier 2006
- *Les nombres au collège* – juillet 2006
- *Le calcul numérique au collège*- janvier 2007