L'esprit des lois continues

Enseignement des probabilités au lycée

IREM d'Aquitaine

Université Bordeaux 1

L'esprit des lois continues

ou

Quelques aspects

du

calcul de probabilités au lycée

BARBAZO Éric

BOUSCASSE Jean-Marie

POMÈS Roland

PUYOU Jacques

PUYOU Michel

TERRACHER Pierre-H.

IREM d'AQUITAINE

UNIVERSITÉ BORDEAUX 1

Nous remercions chaleureusement Claudine ROBERT d'avoir préfacé cet ouvrage et accompagné son élaboration de conseils, suggestions et amicales critiques.

Nos remerciements s'adressent aussi à Madame Nicole BERGEROT qui a participé avec enthousiasme à sa réalisation et à Monsieur Jean-Pierre DORIGNAC qui en a assuré, avec sa maîtrise coutumière, l'impression et la fabrication.

Les AUTEURS

Maquette et mise en page BOUSCASSE Jean-Marie

Photographie couverture TERRACHER Cyril

ISBN : 978-2-85633-020-3
EAN : 9782856330203

Dépôt légal 4ème trimestre 2003

Préface

L'esprit des lois continues est un bon cru Bordelais, que l'on goûte avec plaisir - mais absorber tout son contenu d'une seule traite est déconseillé, il y a beaucoup de choses et la tête pourrait nous en tourner...

C'est un ouvrage de probabilité, qui trouvera donc naturellement sa place dans le cadre de la **formation des enseignants**. On y explore jusque dans leurs recoins certains **modèles** ; bien connaître, par le calcul et la simulation les propriétés de situations élémentaires est indispensable pour comprendre ensuite certains choix de modélisation. Enfin, les auteurs défendent des **choix pédagogiques argumentés**, qui ne manqueront pas d'intéresser les enseignants et ouvriront à coup sûr des débats intéressants.
Quelques aspects transversaux ou ponctuels forgent l'esprit de ce livre :

- Il est fait grand usage d'une propriété mathématique bien utile dès qu'on dispose d'échantillons aléatoires de lois uniformes ; à savoir : **choisir au hasard et indépendamment 2 (resp. *n*) nombres dans $[0,1]$, c'est choisir au hasard un nombre dans $[0,1]^2$ (resp. $[0,1]^n$)**[1], ce qui permet de passer aux **probabilités géométriques**[2] chères aux auteurs ; le slogan « nombres de cas favorables sur nombres de cas possibles » des univers discrets (la mesure en jeu est le comptage) régis par la loi équirépartie devenant alors « aire de la zone des cas favorables sur aire de la zone des cas possibles » (la mesure en jeu est ici l'aire). Le livre propose ensuite une somme d'exercices, dont les incontournables (sommes de lois uniformes), certains étant présentés sous plusieurs angles. Chaque lecteur pourra faire le choix des exercices qui conviennent à ses objectifs et à ses goûts, et se construire des intuitions justes (par exemple, l'image d'une loi uniforme par une variable aléatoire non affine n'est pas une loi uniforme, propriété malgré tout positive : la plupart des lois s'obtiennent comme image de lois uniformes par des variables aléatoires bien choisies et on peut alors les simuler à partir de la seule touche *random* ou *aléa*).

- De nombreuses **simulations** sont proposées, qui permettent de s'initier tant à la pratique elle-même de la simulation qu'à l'interprétation des résultats obtenus. Le statut des nombres pseudo-aléatoires fournis par une instruction *alea* ou une touche *random* est susceptible d'éclairer ce qu'est un modèle, dans la mesure où précisément ici il y a dans ce cas un paradoxe au niveau de l'intuition première ou du langage de tous les jours. En effet, la génération par un ordinateur de *n* nombres pseudo-aléatoires repose sur un algorithme parfaitement déterministe et cependant, le modèle d'échantillon aléatoire de taille *n* pour la loi uniforme est *valide* pour les nombres obtenus, sous réserve que *n* ne soit pas trop grand : simuler une loi, c'est précisément produire des données pour lesquelles cette loi est un modèle *valide*, peu importe leur mode de génération. Remarquons au passage qu'on ne connaît pas non plus de dispositifs expérimentaux susceptibles de fournir *n* données, pour *n* arbitrairement grand, qu'on puisse considérer comme des tirages au hasard de la loi équirépartie ; il y a toujours une usure qui apparaît, ou une défaillance qui se produit ; un très ancien procédé de simulation est le lancer d'un dé, qui lui

---

[1] Autrement dit, le produit $U^{\otimes n}$ de n lois uniformes sur $[0,1]$ est la loi uniforme sur $[0,1]^n$.

[2] On notera à ce propos que si on choisit un nombre r au hasard dans $[0,1]$ et indépendamment un angle θ au hasard dans $[0,2\pi]$, les points du cercle de coordonnées r et θ ne sont pas choisis suivant la loi uniforme sur le disque. Autrement dit $U \otimes U_{[0,2\pi]}$ n'est pas la loi uniforme sur le disque dont les points sont repérés par leur coordonnées polaires.

n'est pas paradoxal au plan intuitif ; on peut pourtant en faire une modélisation déterministe et au plan de la simulation, ce procédé de génération de données n'est pas de meilleure qualité que l'algorithme encodé dans une touche *random*. Évidemment, en dehors de l'utilisation pour la simulation, une différence notable s'impose entre la génération des suites de n nombres 0 ou 1 à partir d'une instruction *alea* (et qui justifie amplement le terme pseudo-aléatoire) et la génération par d'autres procédés mécaniques tels des lancers de dés : dans le premier cas, on est capable de reproduire une suite de taille n (en réinitialisant le procédé à partir de la même valeur initiale) et pas dans le second (on ne sait pas obtenir deux fois de suite la même suite de taille $n=10^6$ en lançant des dés).[3]

- Les auteurs reprennent aussi des **problèmes classiques**, tel le jeu de Franc-Carreau où on lance un palet circulaire de diamètre d sur une surface plane quadrillée et où il semble que la fréquence des cas où le palet est à cheval sur plusieurs carrés se stabilise si on fait de grandes séries de lancers. La tradition consiste le plus souvent à dire que le centre du palet arrive sur un des N carrés du quadrillage selon une loi uniforme, mais on reste très évasif sur le pourquoi de cette loi uniforme et sur ce qui se passe plus globalement. Le problème du Franc-Carreau est repris ici, plus globalement et les auteurs montrent que si on note p_i la probabilité, pour un lanceur donné, que le centre du palet arrive dans le carreau i, alors si on suppose que, pour tout $i=1\ldots N$, la loi conditionnelle sur le carreau i est uniforme, alors pour toute loi $(p_1,\ldots,p_N)$, la probabilité p que le palet ne rencontre pas la frontière d'un carreau vaut $((c-d)/c)^2$, où c est la longueur des cotés des carrés du quadrillage. Autrement dit, cette probabilité p ne dépend pas de $(p_1,\ldots,p_N)$. On peut donc (et c'est plutôt rare en dehors des expériences de référence de choix au hasard dans une urne ou de lancer de pièces ou de dés), pour confronter le modèle à l'expérience, faire intervenir plusieurs lanceurs et regrouper leurs résultats, ce qui est fait dans le chapitre 4, paragraphe 2-4-3.

Mais allons un peu plus loin, au plan de la modélisation et de la statistique. D'abord, pourquoi considérer des lois conditionnelles uniformes ? Et est-il raisonnable de choisir un modèle $(p_1,\ldots,p_N)$ à $N-1$ paramètres (qui ne tient pas compte des liens entre les paramètres : si un carré a une forte probabilité d'être atteint, ses voisins aussi et plus on s'approche du bord, plus les probabilités sont faibles). En fait, pour modéliser la situation de lancer du palet, on va considérer que le centre du palet arrive sur la surface suivant une loi de probabilité continue P de densité f, où f dépend du lanceur, mais pas du quadrillage ; on notera tout de suite que, pour une modélisation rustique avec une loi normale à deux dimensions, le nombre de paramètres à estimer pour déterminer f est petit (5 paramètres) par rapport aux $N-1$ paramètres qu'il faudrait estimer avec le modèle discret $(p_1,\ldots,p_N)$; la probabilité p_i sera ici l'intégrale de la densité f sur le carreau i ; on suppose alors que les carreaux sont *suffisamment petits* pour pouvoir considérer que sur chaque carreau, la densité f est constante : ce qui revient à approcher la loi conditionnelle sur chaque carré par la loi uniforme. D'ailleurs, si la surface de lancer est partagée en un petit nombre de grands carrés, comme on a tendance à éviter les bords, dire que les lois conditionnelles sont uniformes ne serait plus pertinent. L'expérience faite dans cet ouvrage valide d'ailleurs cette approximation pour le quadrillage choisi.

Claudine Robert

---

[3] De même, on pourrait utiliser la suite des décimales de π pour simuler la loi équirépartie sur $\{0,\ldots,9\}\ldots$ mais à condition de choisir aléatoirement le point de départ (et donc de faire intervenir un autre procédé de simulation !).

« *Dans toute aventure de ce genre,*
on se lance dans l'aléatoire »

André GIDE

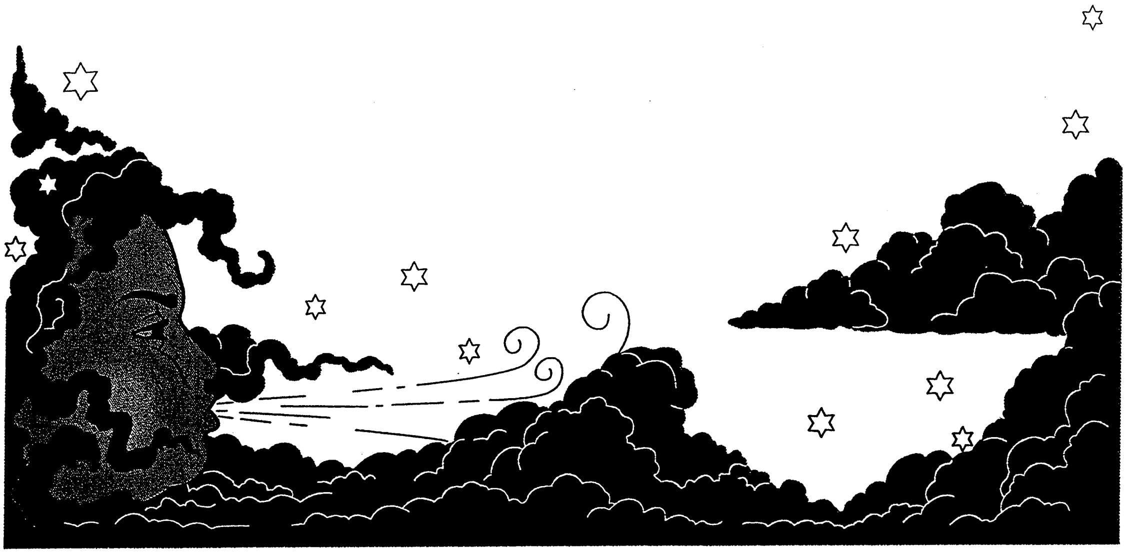
Sommaire

Chapitre 1

Exposé des motifs

« Rien n'est moins sûr que l'incertain »

Pierre Dac



1. Chronique d'un changement de programme

L'introduction de lois de probabilité continues dans l'enseignement obligatoire de la classe de Terminale scientifique (voir [1]) est l'une de ces innovations qui font " événement " dans l'enseignement des Mathématiques au lycée et qui ne peuvent donc manquer de titiller quelque part les esprits.
Mais encore ; passé l'effet de surprise que peut susciter la matière première, il s'agit d'aller au-delà de la réaction spontanée qui peut tout aussi bien déceler les signes d'un remue-ménage profond que diagnostiquer un simple fait divers : par exemple, une sorte de caprice probabiliste momentanément instillé dans les programmes par l'un de ces "allumés" de la Statistique inductive (ou autre).

Il y avait beau temps (une quinzaine d'années environ) que l'enseignement des Statistiques et Probabilités faisait aller de pair, à marche forcée (il faut bien le reconnaître), *quelques éléments de Statistique descriptive*, charriant les inévitables calculs de moyenne, d'écart type, etc. et *quelques rudiments du calcul des Probabilités* où la *Combinatoire* tenait le haut du pavé.
Il devenait urgent que cet équipage suranné, décalé des pratiques réelles de la Statistique et des Probabilités - quid de la **modélisation** ? (premier exemple), ignorant la puissance d'investigation de l'outil informatique - quid de la **simulation** ? (deuxième exemple), cède la place à une démarche construite sur une **problématique avérée**, articulée selon les **activités** que cette problématique permet de conduire à chaque niveau, dans chaque filière et qui - tant qu'à faire - resterait **cohérente dans la poursuite des objectifs**, de la seconde à la terminale (en attendant - sûrement pour bientôt ? - de prendre appui sur une initiation à l'aléatoire au collège).

Le G.E.P.S[1] de Mathématiques a d'une part opéré cette chirurgie courageuse et d'autre part largement offert à la perspicacité de tout un chacun, divers projets[2] d'une **entière refonte de cet enseignement**, ne lésinant jamais - c'est le moins que l'on puisse dire - sur la description des objectifs, des tenants, des aboutissants, des pratiques à impliquer, des conditions utiles à leur mise en œuvre, et évidemment, des contenus.
Tout le monde est bien d'accord là-dessus.
Il n'en est pas allé tout à fait de même en ce qui concerne le fond des affaires (normal : quand le dossier est ouvert[3], les débats vont bon train et le risque est pris de voir l'édifice un peu chamboulé). Et s'il ne saurait entrer dans notre propos, autrement que par l'anecdote, de relater l'historique de l'évolution de ces propositions, disons que ce

[1] G.E.P.S. : Groupe d'Experts des Programmes Scientifiques (à prononcer en une syllabe : ce néologisme onomatopéique laisse entrevoir en effet une toute autre vitalité que l'épellation laborieuse de son prédécesseur : le G.T.D.).

[2] Nous faisons allusion aux versions du 13/01/2000 (voir [3]) et du 08/01/2001 (voir [2]).

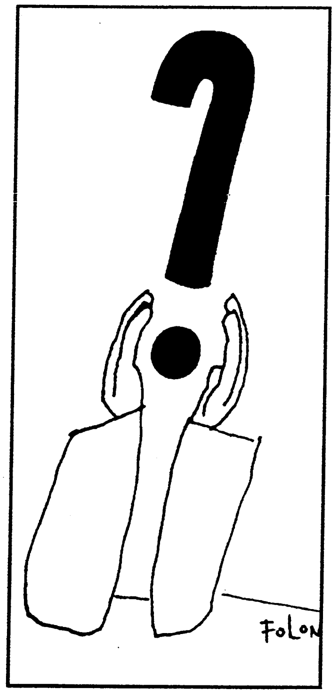
[3] Une nouveauté à souligner dans la méthode d'élaboration des programmes.

n'est tout de même pas sans regret que nous avons pris acte de la disgrâce qui, d'un projet à l'autre, a frappé quelques notions élémentaires concernant **la loi normale** (voir [2] pages 19 et 20). Erreur de perspective[4] s'il en est : on tenait là quelques morceaux choisis propres à apporter des réponses construites à des questions judicieusement soulevées dans les classes antérieures, en tout état de cause, riches en révélations sur le « *En veux-tu ? En voilà.* » de simulations qui, en classe de Seconde, ont tendance à pousser (un peu) comme des herbes folles...

Mais peu importe, on connaît la suite :

- le " **joli** " **menu de Probabilités et Statistique** et notamment, celui qui va nous préoccuper ici, décliné dans le BO n°4 du 30 août 2001, incluant en particulier *loi uniforme, notion de densité, loi de durée de vie sans vieillissement*, etc. ;
- l'énergique et très rempli **document d'accompagnement**[5] des programmes de Mathématiques des classes de Terminales ES et S (voir [4]) ;
- les **quelques troubles sur la place** que tout cela a pu susciter, sans pour autant déclencher un quelconque cataclysme pédagogique ;
- et - in fine - **les interrogations qui restent**, malgré tout, car les repères sont flous et les assurances effritées...

Tout est donc réuni pour engager un *travail utile*, d'autant que des difficultés de tous ordres ne vont pas manquer.



« *La clef de toutes les sciences est sans contredit le point d'interrogation...* »

Honoré de BALZAC (1799-1850)

(La peau de chagrin 1831)

[4] Ce projet a suscité quelques levées de boucliers (crainte de charger la barque ? frilosité analytique ? etc.) qui ont conduit le G.E.P.S. à le passer à la trappe.

[5] Premier exemple d'une publication de cette nature aussi consistant ! (Qu'on entende bien : il ne s'agit pas de surévaluer des mérites ou de distribuer des bons points mais plutôt d'appeler un chat, un chat.)

2. Des difficultés de tous ordres

Même dans ses déclinaisons les plus confortables, un travail avec les distributions continues de probabilité ne peut se payer de quelques explications simples. Il suffit de feuilleter un ouvrage un peu sérieux de calcul des Probabilités pour se rendre compte que rien de l'outillage de l'Analyse ne fait défaut : théorie de la mesure, intégration, fonctions de la variable complexe, transformation de Fourier… sans oublier Algèbre, Topologie, et quelques éléments d'axiomatique, etc..
Quand bien même, *la question de fond est ailleurs*, et les limites assignées par le programme : « *loi de probabilité à densité continue sur un intervalle de la droite réelle* », parce qu'elles permettent de gommer du paysage le côté le plus aride des notions précédentes[6], contribuent à mettre le doigt tout de suite sur ce qu'il importe de comprendre : **la question de fond est de nature probabiliste**.

Précisons, pour baliser sommairement le parcours à venir[7], qu'en tant **qu'objet mathématique**[8], les lois de probabilité continues inscrites au programme ne peuvent susciter la moindre palabre (par exemple, la notion de densité sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ est tout à fait ce qu'il y a d'ordinaire : une fonction f continue, positive sur I telle que $\int_I f(x)\,\mathrm{d}x = 1$, et c'est tout).

Oui, mais l'histoire ne s'arrête pas là : ces lois sont aussi et surtout des **outils mathématiques** créés, conçus par les mathématiciens et construits en tant que **modèles probabilistes**. Dès lors, il s'en va d'une autre paire de manches, car, vont venir achopper maintes interrogations auxquelles il est impossible d'apporter la moindre réponse sans une **rupture préalable explicite et tranchée avec le mode de pensée qui prévaut dans le discret**. (Pour rester sur l'exemple précédent : qu'elle est la signification probabiliste de la densité ?).
Pas facile !

Par ailleurs, pour une majeure partie du public des professeurs de Mathématiques concerné, les lois de probabilité continues restent encore un *terrain de découvertes*, le plus souvent mal défriché - voire pas du tout - durant leurs études universitaires. Et pour en rajouter, il nous semble bien qu'ils n'aient pas grand chose à attendre, au moins dans

---

[6] Sauf évidemment les éléments de l'Analyse classique de Terminale (intégration des fonctions continues, calcul différentiel, limites,…) et en sourdine, comme nous le verrons, une contrainte implicite exercée par la théorie de la mesure.

[7] Nous renvoyons au prochain paragraphe qui prend en charge l'examen détaillé des difficultés que peuvent soulever, dans l'Enseignement secondaire, l'introduction et l'usage des lois continues.

[8] On ne manquera pas de noter que, dans les programmes actuels (contrairement aux versions précédentes), une loi de probabilité est définie, comme un objet mathématique (voir par exemple [5], page 15), ce dont nous nous réjouissons.

un premier temps, de la littérature probabiliste, accaparée par les publications au caractère théorique et abstrait[9] apte à rebuter la meilleure des bonnes volontés par leur aridité.

Le **programme** enfin, ambitieux et prudent à la fois :

- **ambitieux**, car mettant en avant la diversité des approches, il affiche le souci de voir *se croiser les compétences.* À l'ordre du jour sont inscrits : simplifier, abstraire, modéliser, simuler, interpréter, poser le problème de l'adéquation d'une loi à des données, etc.,
- **prudent**, au moins dans la forme. Des expressions telles « *fonction de répartition* », « *variable aléatoire* » (dans le cas continu) sont exclues du libellé du programme alors que le Document d'accompagnement flirte allègrement avec ces notions[10], sûrement conscient que certaines activités - même parmi les plus élémentaires - s'accommodent fort mal d'un tel bannissement.

Bref, en supplément, un certain déséquilibre à gérer.

Il nous importe de conclure ce paragraphe en soulignant que nous n'avons pas l'impression d'avoir noirci outrancièrement le tableau en pointant :

- d'une part **les problèmes d'ordre mathématique, didactique et épistémologique** posés par certains aspects de l'enseignement actuel des Probabilités et Statistique au lycée ;
- d'autre part (et par suite) **l'exercice difficile auquel sont confrontés les enseignants**, car cela suppose une culture, des modes de réflexion et parfois même des yeux de praticien (probabiliste, statisticien, ...).

Et l'on peut s'interroger quand l'offre nationale de formation aux professeurs peut être réduite à la formule :

« *À chacun de se débrouiller avec sa sensibilité et ses niveaux de lecture !* ».

N'est-ce pas les prendre un peu pour des jocrisses ?

---

[9] Ici aussi l'exception est la règle et il serait injuste de passer sous silence certains ouvrages tel : « *Itinéraires en Statistiques et Probabilités* » (voir [11]) qui affiche clairement ses préoccupations concernant la formation continue des enseignants.

[10] Voir tous les détails dans le chapitre 3.

3. Du discret au continu ?

Voilà titrée l'une des problématiques majeures de notre travail...

Il ne paraît pas insurmontable de rendre sensible aux élèves qu'il "existe" des variables aléatoires continues, c'est à dire des variables aléatoires qui, a priori - du moins peut-on l'imaginer - peuvent prendre pour valeurs toutes celles d'un intervalle de la droite réelle (voir sur ce point les chapitres 2 et 3). En revanche, mettre en place des modèles probabilistes - i.e. des lois de probabilités - susceptibles d'être choisis pour rendre compte de tels phénomènes aléatoires n'est pas une petite entreprise, ni du point de vue mathématique, ni du point de vue didactique.

- Tant que **l'univers Ω des possibles est fini** (voire dénombrable), la simplicité est de mise :

  - d'une part, *l'attribution d'une probabilité à chaque issue élémentaire définit une loi de probabilité* (sous les conditions usuelles) ; le meilleur témoin en est l'élaboration et l'usage de tableaux (tel le tableau ci-dessous), relativement bien assimilés par les élèves de Première :

issues	ω_1	ω_2		ω_n
probabilités	p_1	p_2		p_n

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}, \quad p_i > 0, \quad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

  - d'autre part, aucune restriction ne s'impose dans la notion d'événement : *toute partie A de Ω est un événement*, et surtout, *la probabilité d'un événement A se calcule à partir des probabilités de ses issues élémentaires* : $P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega)$.

- Lorsque **l'univers Ω a la puissance du continu**, l'attribution d'une probabilité à chaque issue élémentaire n'est pas une ineptie à rejeter : la probabilité nulle convient et c'est la seule[11]. Ceci met d'emblée en évidence que " mimer le cas discret " pour obtenir la probabilité d'un événement - à supposer que nous sachions de quoi il s'agit - à partir des probabilités qui le composent conduit à une impasse.

La leçon à tirer est qu'**il faut renoncer à installer les lois continues dans les traces des lois discrètes.**

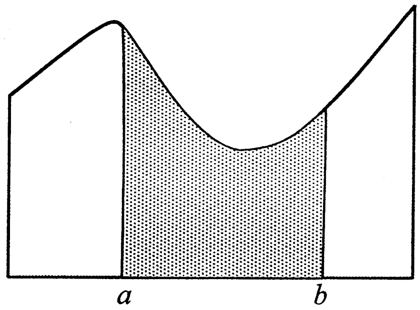
---

[11] Nous nous plaçons dans le cadre imparti par les programmes, celui des lois de probabilité à densité continue qui sont sans atome (le lecteur intéressé est attendu à l'exercice 2-18 (voir les commentaires)).

Et si, à cet endroit, il est *mathématiquement acceptable de se tourner du côté des probabilités d'intervalles* (ne serait-ce que parce que les intervalles sont les "briques" de base de la maison borélienne - tribu pour les initiés), il n'en reste pas moins qu'asséner brutalement « la » définition mise en image dans la figure ci-contre, serait faire une impasse didactique sur les interrogations majeures que soulève l'introduction de la notion de lois continues, quand bien même quelques angles auraient été préalablement arrondis :

Loi de probabilité à densité

f continue sur I ; $\int_I f(x)\,\mathrm{d}x = 1.$



Probabilité de l'intervalle $[a,b]$ de I

$$P([a,b]) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

- comment amener les élèves **à faire le deuil** de l'idée, légitimement prégnante jusqu'alors, **de probabilité définie point par point ?**
- comment tirer au clair cette espèce d'énigme concernant un phénomène aléatoire continu :
  « **toutes les issues possibles sont chacune de probabilité nulle** » ?
- comment **concevoir une loi de probabilité définie à partir de la probabilité de "zones primitives"**[12] (que sont par exemple les intervalles sur une droite réelle) ?

Voilà des questions difficiles.
On peut évidemment " balayer sous le tapis " ou bien escompter que force et conviction suffiront à convertir les élèves à l'idée d'une loi de probabilité construite par la probabilité des intervalles.
On peut aussi vouloir apporter des éléments de réponse tout en sachant que - sûrement ici plus qu'ailleurs - les résultats ne seront peut-être pas à la mesure des moyens et de l'énergie déployés.

C'est le risque que nous prenons…

[12] Il serait plutôt malvenu de s'attaquer aux notions de tribu, de parties mesurables, etc. Les domaines élémentaires de la géométrie (intervalles, segments, arcs de cercles, rectangles, cubes, ...) qui ne soulèvent aucune question quant à la mesure (longueur, aire, volume...) suffiront largement à notre propos (tous les détails au chapitre 2 page 26).

4. Les lois uniformes, d'abord

Moins qu'un slogan, la formule qui sert d'enseigne à ce paragraphe est un raccourci de la démarche décrite ci-après et que nous nous proposons d'adopter :

- introduire **en premier lieu diverses lois uniformes** (en dimensions 1 à 3) sur des domaines acceptables en Terminale ;
- mettre les élèves en situation de découvrir, à partir des lois uniformes, **d'autres lois de probabilité continues**, et, partant, le sens de certaines notions qui s'y rattachent (variable aléatoire, fonction de répartition, densité,…) ;
- nouer les **liens indispensables avec le point de vue discret**, sous "tous" ses aspects : approximation continue d'un phénomène discret, discrétisation d'un phénomène continu ; simulation discrétisée de lois continues, etc..

D'autres itinéraires sont envisageables, tel celui proposé dans le document d'accompagnement des programmes sous le titre « Histogrammes et aire sous une courbe » ([4] pages 132 et 133) que nous citons dans son intégralité :

« Comment définir les Probabilités d'intervalles ?

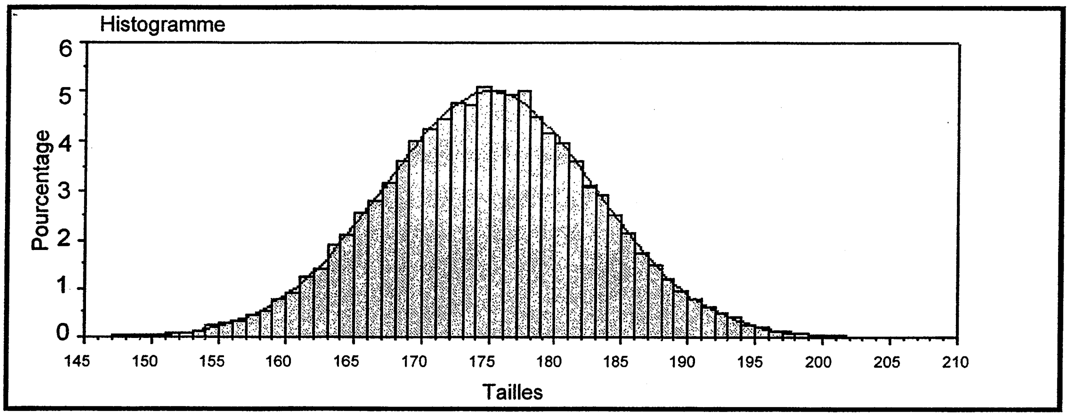
Imaginons la situation suivante:

On dispose d'un échantillon de 50 000 tailles d'hommes adultes ; un résumé numérique de cet échantillon de 50 000 données est fourni dans le tableau ci-dessous.

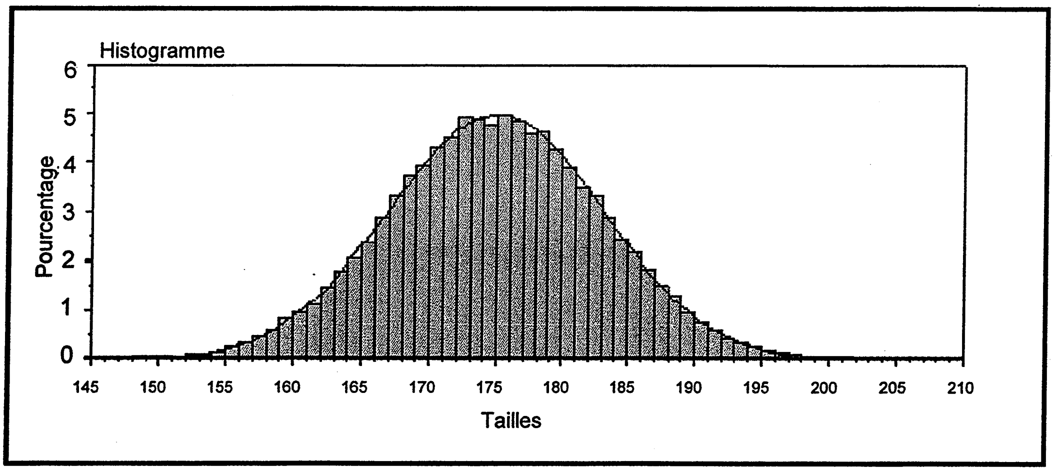
	Moyenne	*Ecart type*	*Nombre*	*Minimum*	*Maximum*	*Médiane*	*Interquartile*
Tailles	*175*	*8,0*	*50 000*	*145,1*	*209,5*	*175,0*	*10,8*

Traçons maintenant un histogramme de ces données, avec un pas de 1 cm. Si l'unité d'aire est celle d'un rectangle correspondant à 1 cm en abscisse et un pourcentage de 0,01 en ordonnée, l'aire grisée ci-dessous est la somme des fréquences pour chaque intervalle, et vaut 1. Si on cherche la fréquence des données entre 173 et 177 cm, ce sera la somme des aires des cinq rectangles de bases respectives $[173\,,174[, \ldots, [176\,,177[$ *: en première approximation, ces rectangles ont tous une hauteur voisine de 0,05, la fréquence est donc voisine de 0,20 : la série comporte 50 000 données, et le modèle doit donc être tel que la probabilité d'avoir une taille entre 173 et 177 cm soit voisine de 0,20. L'idée est ici de trouver une fonction f dont la courbe représentative épouse l'histogramme, l'aire sous cette courbe devant être égale à 1 : la probabilité d'un intervalle* (a,b) *sera alors l'aire sous la courbe délimitée par les droites d'équations* $x=a$ *et* $x=b$*, c'est à dire le nombre* $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$*. La courbe représentative d'une telle fonction* f *a été tracée sur l'histogramme; déterminer une telle fonction est un problème délicat, mais pour de* *nombreuses situations, dont celle qui est traitée ici, on cherche la fonction f parmi une famille paramétrée de fonctions: il suffit alors d'ajuster les paramètres.*

De même que dans un modèle défini par une loi de probabilité P sur un ensemble fini E, les fréquences fluctuent autour de la loi P, de même ici, l'invariant est la fonction f et pour des grandes séries de données, les histogrammes fluctuent autour du graphe de f. On peut voir ci-dessous une seconde série de 50 000 données; on y a représenté la même fonction f : l'histogramme n'a pas beaucoup bougé et la courbe représentative de f épouse bien la forme de ce nouvel histogramme. »



	Moyenne	Écart type	Nombre	Minimum	Maximum	Médiane	Interquartile
Tailles	175	8	50000	145,4	208,5	175	10,8



On pourrait critiquer le choix de « la taille d'individu » comme exemple introductif de variable aléatoire continue, ou émettre quelques réserves sur la signification, pour les élèves, « d'épousailles » entre des histogrammes fluctuants et une certaine courbe - tout ce qu'il y a de figée - (malgré l'hypotypose qui en est faite) ou encore s'interroger sur la réalité des pratiques (qui nous paraissent exiger la présence, auprès des élèves, de cornacs hors classe tant en statistique qu'en informatique).

Peut-être que cette approche portée par la conviction de pouvoir régler tous les problèmes à la fois prend trop le risque de n'en régler aucun ?

Tout cela témoigne plus de notre perplexité que de la moindre intention de déboulonner, même en tapinois, une démarche (celle du document d'accompagnement), attitude vaine qui serait par ailleurs sans aucun effet pour donner un quelconque crédit à une autre approche (et en particulier la nôtre).

Concernant cette dernière, nous éprouvons donc le besoin de dresser un tableau simplifié[13] mais conforme des arguments parmi les plus marquants qui la motivent :

- Nous nous inscrivons dans **la lignée générale tracée par le programme** de la classe de Première Scientifique (voir [5], page 15) :
  « *Les lois de probabilité non équiréparties rencontrées en première et terminale sont le plus souvent l'image par une variable aléatoire d'une loi équirépartie, et on introduira donc presque simultanément la notion de loi de probabilité et celle de variable aléatoire.* »
  Cette démarche ayant fait ses preuves, nous nous en tenons aux valeurs sûres en l'adaptant à l'étude de phénomènes aléatoires continus, les lois uniformes se substituant aux lois équiréparties.
- La conséquence est qu'il entre alors dans nos cordes de **démêler paisiblement l'écheveau des questions difficiles** précédemment soulevées (voir paragraphe 3, page 16), par exemple, en mettant quelques temps en attente la notion de densité, à l'utilité fort contestable dans l'étude des lois uniformes.
- Initialiser l'étude des lois continues par celle des lois uniformes permet de **prendre en compte les connaissances préconstruites des élèves**[14] sur les probabilités géométriques[15] :
  - mieux cibler les " verrous à faire sauter " (probabilité d'une issue ponctuelle par exemple) ;
  - institutionnaliser, comme il se dit ça et là, sans didactisme poussif des savoirs implicites (proportionnalité à la mesure - longueur, aire… - par exemple), etc..

Voilà donc présenté, en quelques mots, le **fil conducteur** de cet ouvrage : une démarche pour un enseignement élémentaire des lois de probabilité continues, mais une démarche que nous émanciperons des stricts contenus de Programme, **pour répondre aux attentes exigeantes des enseignants sur un tel sujet**.

Et il ne nous paraît pas à la hauteur de la demande de se contenter d'atteler à ces contenus quelques annexes « théoriques », sévères et subtiles qui prétendraient colmater quelques barques probabilistes qui feraient un peu eau à tel ou tel endroit.

---

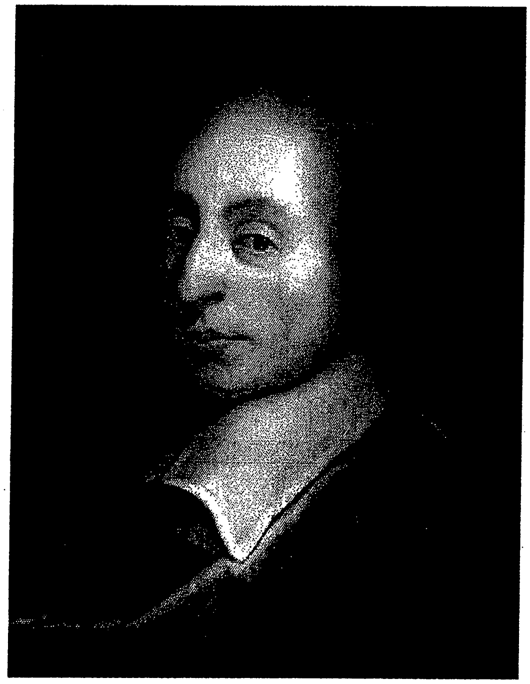
[13] Pour l'instant, sans volonté de démonstration qui viendra par la suite (on peut en être assuré), chapitre après chapitre.

[14] Evidemment, cela suppose un travail préalable de mise en évidence de ces capacités (voir le paragraphe 2-1-2 du chapitre2).

[15] Probabilité géométrique : distribution uniforme sur des domaines géométriques.

A contrario d'une telle entreprise d'accolage de textes hétérogènes pour le non initié (et pour quelques autres aussi), notre travail est plutôt - chacun en aura pointé la nécessité - **un travail d'articulation**.

Mais, que l'on entende bien, les efforts sont à partager. Nous aurions pu écrire cela, sous la forme adoucie à dessein pour tenter d'embarquer les plus sceptiques : « la voie retenue ne satisfera pas les adeptes de la mathématique contemplative », ou encore - plus sincèrement cette fois, en restant dans l'imagerie maritime - « **le lecteur sera plus souvent dans la soute que sur la passerelle...** ».



Blaise PASCAL (1623-1662)

« *Ainsi, joignant la rigueur des démonstrations de la science à l'incertitude du hasard, et conciliant ces choses en apparence contraires, elle peut, tirant son nom des deux, s'arroger à bon droit ce titre stupéfiant : La Géométrie du Hasard*.»

(Adresse à l'Illustre Académie Parisienne de Science 1654)

5. L'ouvrage : mode d'emploi

Voilà donc, pour les embarqués, les points essentiels :

- **La structure de l'ouvrage**, en cinq chapitres, fidèle à la démarche adoptée.
  - Chapitre 1 : *Exposé des motifs* (nous y sommes…).
  - Chapitre 2 : *La loi uniforme.*
  - Chapitre 3 : *Les lois continues.*
  - Chapitre 4 : *Modélisation.*
  - Chapitre 5 : *La loi exponentielle.*
- **La structure de chaque chapitre**, programmée en deux temps :

1. **L'analyse des contenus**, avec une visée bien différente de la "théorie qui résout tout". Il s'agit en effet :
   - d'une part, de mettre à plat, " tels quels " les **contenus** à enseigner et de fournir la **solidité mathématique** capable d'éclairer (en particulier) leur signification probabiliste (sans prendre le lecteur pour un déchiffreur d'hiéroglyphes, sans prétention excessive donc, mais tout de même avec l'idée que " se coller l'oreille sur le rail " n'est pas le seul moyen d'avoir un aperçu clair de ce qui est entrain de se passer) ;
   - et d'autre part, de regarder de près **les enjeux d'un tel enseignement pour nos élèves** ; en vrac :
     - difficulté d'ordre mathématique ?
     - pierre d'achoppement sur l'interprétation probabiliste ?
     - rupture inconsommable avec une pratique installée ?
     - et (soyons généreux) : saut conceptuel infranchissable ?
     - sans oublier (soyons pragmatiques) : carences dans la simulation ?
     - etc..
2. **Une panoplie d'exercices**, avec de quoi nourrir du plus méfiant, au plus accro. Nous avons choisi d'équiper chacun d'eux :
   - **d'une résolution achevée**, souvent de diverses manières (sans occulter les plus " scolaires "), chaque solution ayant, si nécessaire, son index des destinataires (élèves, enseignants, …) ;
   - en général **d'un commentaire** précisant quelles notions sont mises en jeu (en Probabilité comme ailleurs), quelles variantes de l'exercice sont intéressantes - voire indispensables , quel est le dessous des cartes, etc. ;
   - et, lorsqu'il s'y prête, d'une proposition de **simulation**[16], incluant recette et ingrédients utiles.

---

[16] Réalisée à l'aide du tableur Excel (voir détails page 32).

Nous entendons manifester ainsi un double souci :

- fournir à chaque enseignant quelques critères utiles pour discerner parmi ces multiples activités, celles qu'il estime judicieuses de proposer à ses élèves (l'expertise pouvant porter aussi bien sur la difficulté mathématique, la pertinence dans la classe, le temps imparti...) ;
- permettre à chacun d'eux de tirer de réels enseignements sur les lois de probabilité continues et leurs usages, parce que, par exemple, une solution va offrir la possibilité d'affiner une idée confuse ou encore parce qu'une variante, une remarque vont faire revenir à la surface un point profondément enterré...

Ajoutons sur ce dernier point : **formation des enseignants**, qu'il est dans notre esprit que le couple (analyse des contenus, panoplie d'exercices) a pour vocation première de fonctionner en tandem plutôt que dans une structure féodale : cela semble aller de soi.

- **Les sources bibliographiques**

En dehors des traités de Probabilité et Statistique de « facture universitaire », nous avons puisé pour l'essentiel :

- *dans les pulications iremiques* et notamment dans celles émanant de la Commission Inter-IREM Statistique et Probabilités ;
- *dans* **toutes** *les productions du G.E.P.S. de Mathématiques* (et de son prédécesseur le G.T.D.) : programmes, documents d'accompagnement des programmes, ainsi que dans les projets de programmes qui ont largement éclos depuis quatre ou cinq ans.

Par suite, il n'est guère difficile d'imaginer que la stricte conformité aux programmes officiels s'en trouve un peu ébranlée, ce qui n'est pas d'une très grande importance :

- pour le lecteur : sans être un praticien supérieurement doué, chacun reconnaîtra les siens ;
- pour nous, puisque le choix a été fait de dépenser notre énergie à **mettre en évidence la vitalité de certaines notions probabilistes**, souvent désamorcée par le fait de leur simple inscription dans les programmes, plutôt qu'à jouer les comptables scrupuleux d'une adéquation aux mêmes textes.

Chapitre 2

La loi uniforme

« La loi est uniforme, les mœurs, la terre, les intelligences ne le sont pas »

Honoré de BALZAC

1. Les lois uniformes (au pluriel)

1.1 Pourquoi « au pluriel » ?

Précisons d'entrée de jeu que les lois qui vont nous préoccuper dans ce chapitre sont les lois uniformes sur un intervalle de $\mathbb{R}$, un segment géométrique, un cercle (ou un arc de cercle), un carré - un disque éventuellement - et un cube, quand bien même ne serait formellement inscrit au programme que le cas de l'intervalle réel.

Plusieurs raisons en effet, militent pour l'ouverture d'un tel éventail :

- En ce qui concerne les lois de probabilité continues, « *en comprendre quelques usages* » est l'un des objectifs clairement affichés par le programme. Dès lors, une première nécessité apparaît, tautologiquement décrite dans le document d'accompagnement des programmes ([4]) : *proposer aux élèves des activités consistantes,* c'est-à-dire des activités autrement plus riches que celles où l'on se contente de faire appel à des démarches entièrement calquées sur la définition.

  De ce point de vue, nous ne pouvons tenir pour inintéressant le filon[1] largement ouvert de situations impliquant " le choix au hasard " de deux (ou trois) réels de $[0,1]$, indépendamment les uns des autres. Or, il se trouve[2] qu'un tel choix peut être tenu pour celui d'un point " au hasard " (i.e. selon la loi uniforme) dans un carré (ou dans un cube) et que de plus, et surtout, **cette propriété permet d'instrumenter les ressources élémentaires de la géométrie (dessin, mesure) dans l'étude des phénomènes aléatoires continus, et partant, d'enrichir les conceptions que nous pouvons en avoir**.
  Et, si cet argument fournit des présomptions assez fortes sur le bien-fondé de l'introduction des lois uniformes en dimensions 1, 2 et 3, il n'est pas le seul.

- Si l'on fait l'impasse sur la moindre considération qui ne serait pas d'ordre strictement mathématique, il existe une manière toute simple d'introduire les lois uniformes. La voici, emprunté à RENYI[3] ([18]):

---

[1] Voilà une tournure euphémique s'il en est : tout le chapitre 4 de cet ouvrage est consacré à l'exploitation de ce filon...

[2] Cela ne doit rien au hasard (voir les explications au chapitre 4, page 153).

[3] Le célèbre ouvrage de RENYI « Calcul des Probabilités » - sorte de "BLED" des probabilités pour des générations d'étudiants - fait unanimement référence. Par ailleurs, s'adressant à des « débutants exigeants » il manifeste une vocation pédagogique clairement affirmée. Et nous ne pensons pas perdre notre temps à vouloir tirer quelques enseignements des leçons des " grands maîtres ", sans prétendre pour autant leur attribuer la moindre capacité d'intimidation à l'encontre de quiconque n'y souscrirait pas pleinement (fallait-il le dire ?).

« *Soit* Ω *un ensemble mesurable de l'espace euclidien à n dimensions, dont la mesure de Lebesgue à n dimensions est positive et finie. Soit* $\mathcal{A}$ *l'ensemble des parties mesurables de* Ω *et* $\mu(A)$ *la mesure de Lebesgue à n dimensions d'une partie mesurable A de* Ω. *Posons* $P(A) = \dfrac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$ *(1)*

Alors, $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *est une algèbre de probabilité de Kolmogorov.* »

Et RENYI - qui s'y connaît - d'ajouter :
« *En général, nous dirons que la répartition de la probabilité est uniforme quand la probabilité pour qu'un objet (dont la position dépend du hasard) se trouve dans une partie d'un ensemble, sera déterminée par la définition (1) à partir d'une mesure géométrique* μ *invariante par déplacement* : *volume, aire, longueur d'arc, etc.).* »

Nous entendons faire notre cette définition dans une version évidemment adoucie par la formulation adoptée et par l'usage prudent de quelques garde-fous.

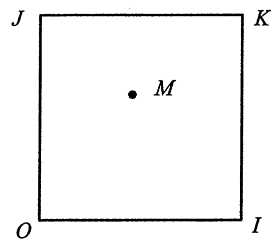
Ainsi, le rapport : $\dfrac{\textbf{mesure de la zone des issues favorables à un événement}}{\textbf{mesure de la zone des issues possibles}}$

sera notre " tête de pont ", étant entendu que :

- les *mesures* sont celles de la Géométrie élémentaire : longueur sur une droite et un cercle, aire dans le plan et volume dans l'espace ;
- les *" zones "* considérées sont en conséquence nécessairement des parties de la droite, du cercle, du plan, de l'espace soumises aux exigences suivantes :
  - le problème de l'existence de la mesure de ces parties (au sens précédent) ne saurait être soulevé ;
  - l'évaluation de cette mesure n'imposera pas de calculs d'une trop grande technicité.

Illustrons notre propos par l'étude conjointe de deux exemples délibérément choisis pour que, ce qui les unit : la loi de probabilité, aggrave ce qui les oppose : la pertinence didactique.

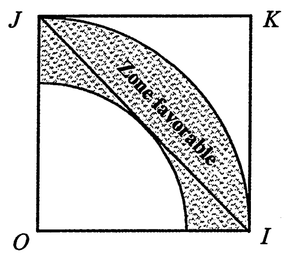
Exemple 1



Un point M étant choisi " au hasard " dans le carré de côté 1, c'est-à-dire selon la loi uniforme dans ce carré, quelle est la probabilité de l'événement :
« le cercle de centre O passant par M rencontre le segment $[IJ]$ » ?

La zone des issues possibles est évidemment le carré *OIKJ* et il n'y a aucune difficulté :

- d'une part à déterminer la zone des issues favorables, ne serait ce que graphiquement (voir figure ci-contre),
- d'autre part à évaluer par un calcul d'aire la mesure de chacune (le résultat $\dfrac{\pi}{8} \simeq 0{,}39$ étant à cet endroit sans grand intérêt).



Exemple 2

Un point M étant choisi " au hasard " dans le même carré $OIKJ$ (toujours donc selon la loi uniforme), quelle est la probabilité que ses coordonnées dans le repère (O,I,J) soient toutes deux rationnelles ?

La réponse est zéro [4] (ce qui peut mettre à mal quelques spécialistes de la simulation non avertis des propriétés de la mesure de LEBESGUE...).

Et, même si cet exemple semble forcer le trait jusqu'à la caricature, il reste le prototype du problème didactiquement déplacé.[5]

Ajoutons que l'aspect engageant de la " définition " précédente ne nous a pas échappé, en ce qui concerne l'**analogie avec l'équirépartition** (soulignée[6] dans [3], page 32).

Lorsque l'univers des possibles est fini, la substitution (que l'on pourrait rendre licite) du cardinal d'une partie à la mesure livre l'antienne de la classe de Première :

$\dfrac{\text{nombre d'issues favorables}}{\text{nombre d'issues possibles}}$, ce qui range, au moins formellement, la loi équirépartie sous la bannière des lois uniformes.

Mais nous verrons (paragraphe 2.1 de ce chapitre), quand il s'agira d'engager les travaux visant à introduire les lois uniformes auprès des élèves, que cette similitude ne s'arrête pas aux seules tournures, aussi apparentées soient elles.

Auparavant, il nous faut parcourir un passage certes délicat, mais incontournable pour quiconque ne veut pas rester sur le bord du chemin...

1.2 La modélisation uniforme

1.2.1 Deux exemples

Une fois n'est pas coutume, nous ouvrirons ce paragraphe par la mise en parallèle de deux documents, pour l'instant, livrés bruts (i.e. sans autres commentaires que ceux visant à les replacer dans le contexte).

Document n°1

Ouvrage : « Comprendre les Probabilités » de J.L. BOURSIN (voir [9]).

Public désigné : étudiants de Premier Cycle des Universités en Sciences Économiques, en Administration économique et sociale, en Droit, en Sociologie et en Psychologie.

Contexte : Introduction du chapitre 4 de l'ouvrage : « Les lois continues ».

---

[4] De manière générale, toute partie dénombrable est de mesure nulle.

[5] Ce ne serait plus le cas, bien au contraire, dans un certificat de licence (par exemple), consacré aux Probabilités.

[6] Extrait : « *Loi uniforme sur un intervalle I. La probabilité d'un intervalle est le quotient de sa longueur par celle de l'intervalle (cette propriété est l'analogue de la suivante : la probabilité d'un ensemble est le quotient du nombre de ces cas favorables divisé par le nombre de cas total).* »

« Un exemple simple est utile dès maintenant. Imaginons une ficelle, dont une longueur h est délimitée entre deux mâchoires, qu'on écarte avec une force croissante, jusqu'à ce qu'elle casse. L'hypothèse est faite que la ficelle est suffisamment homogène pour qu'il n'existe aucun point en lequel la rupture soit plus probable qu'en un autre. La distance X du point de rupture à la mâchoire de gauche figure une variable aléatoire continue, qui peut prendre toutes les valeurs entre 0 et h. Mais quelle valeur attribuer à la probabilité de rupture en l'un de ces points, par exemple le milieu ? Aucune valeur non nulle ne convient : en effet, puisqu'il y a une infinité de points de rupture possibles, la somme des probabilités ainsi attachées serait infinie, et non égale à 1. On résout cette difficulté en parlant d'une densité de probabilité f, la probabilité de voir la rupture se produire sur un petit segment de longueur s étant alors égale au produit de s par cette densité. [...]

La densité de probabilité est d'ailleurs facile à calculer : la rupture étant certaine, la probabilité attachée à la longueur h, qui est égale au produit hf de la longueur h par la densité f, est égale à 1. La densité f est donc l'inverse de la longueur h. »

Document n°2

Ouvrage : « Calcul des Probabilités » de A. RENYI (déjà cité).

Public désigné : “ Débutants exigeants ” (dixit l'auteur) : « étudiants de Licence de Maths Pures » donnerait une idée avoisinante.

Contexte : Paragraphe : « Probabilités géométriques », tout de suite après la définition que nous avons présentée dans le paragraphe précédent.

« Considérons un exemple simple :

Exemple 1. - *On tire sur une cible carrée et nous supposons que tous les coups touchent la cible (c'est-à-dire que les autres n'entrent pas en considération). La probabilité pour que le coup touche une partie A donnée à l'avance de la cible doit être proportionnelle à l'aire de cette partie A ; quelle est-elle ? Il suffit de trouver le coefficient de proportionnalité. Si Ω est toute la cible, la probabilité correspondante doit être égale à 1. Donc* $P(A)=\frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$*, où* $\mu(\Omega)$ *est l'aire de la cible entière et* $\mu(A)$ *l'aire de A. Par exemple la probabilité pour que le coup tombe dans le quart inférieur gauche de la cible est égale à 1/4. »*

1.2.2 Des questions ?

Nous ne nous attarderons pas sur l'argumentation mise en avant dans le document n°1 pour arracher au lecteur la conviction que la probabilité associée à un point ne peut être qu'égale à zéro (on retrouvera dans le paragraphe 2.1 à venir des démarches autrement persuasives). Nous ferons peu de cas également des considérations sur la densité (Document n°1) : à considérer - pour l'instant - comme un tracas collatéral qui ne saurait nous détourner de l'essentiel.

Le voici.

Ce serait “ ne rien comprendre ” aux Probabilités *que de s'interroger sur la pertinence des situations choisies (“* ficelle sous tension ” dans le document n°1, “ tir sur la cible ” dans le document n°2) *pour " introduire " la loi uniforme sur un segment de* $\mathbb{R}$ *ou sur un carré* : **une telle question est à mettre au rang des non-sens** !

En effet, il n'existe aucun argument de quelque nature que se soit permettant d'affirmer **a priori** que, par exemple, le point de rupture de la ficelle " suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0,h]$ "[7].

Et l'on aurait un constat identique dans n'importe quelle autre situation : point d'impact d'une flèche sur une cible, instant d'arrêt d'une " puce électronique " (voir plus loin), etc..

À y réfléchir un tant soit peu, cela ne saurait nous surprendre.

Les études engagées en classe de Première (dans le cas discret) ont mis en évidence, que lorsqu'il s'agit de modéliser une expérience aléatoire, c'est-à-dire d'associer à cette expérience une loi de probabilité, le plus souvent, **le choix d'un modèle ne relève pas seulement des considérations propres au protocole expérimental ou à la nature de l'expérience**[8]**.**

Par suite, et pour revenir aux phénomènes aléatoires qui nous préoccupent, faute de données expérimentales consistantes, *il ne saurait rester qu'une seule planche de salut pour introduire le modèle uniforme* : " *admettre* " *que ces phénomènes sont décrits par la loi uniforme !*

Une telle assurance nous est donnée, au pied de la lettre, par A. RENYI (Document n° 2) : *« La probabilité pour que le coup touche une partie de la cible doit être*[9] *proportionnelle à l'aire de la partie ».*

Elle plus diluée chez J.-L. BOURSIN qui accorde une part moins belle que nous l'aurions voulue à admettre que le modèle retenu est, d'avance, le modèle uniforme. Mais, parce qu'il serait difficile de ne pas accorder un certain crédit à l'auteur[10], gageons que la phrase suivante - qui aurait mérité mieux quant à sa tournure - correspond à cette exigence (Document n°1) :

« L'hypothèse est faite[11] *que la ficelle est suffisamment homogène pour qu'il n'existe aucun point en lequel la rupture soit plus probable qu'un autre*[12] *».*

---

[7] Prière de ne pas (trop) chicaner sur la formulation un peu cavalière : ce n'est pas le moment...

[8] « *[...] sauf dans certains cas. Il en est ainsi des lancers de pièces ou de dés pour lesquels des considérations de symétries conduisent au choix d'un modèle où la loi de probabilité est équirépartie. En dehors de tels cas [...], le choix d'un modèle à partir de données expérimentales est beaucoup plus délicat et ne sera pas abordé dans l'Enseignement Secondaire* » (Document d'accompagnement du Programme de 1ère S ([5], page 18)).

[9] C'est nous qui le soulignons.

[10] J.L. BOURSIN est l'un de ces spécialistes de Probabilités et Statistiques aux compétences et talent de vulgarisateur reconnus (voir par exemple [9] et [10]).

[11] C'est encore nous qui soulignons.

[12] Autrement dit, l'hypothèse est faite que la densité de probabilité est constante : la loi uniforme n'est pas loin.

1.2.3 Des leçons à tirer

• Le modèle uniforme (quelque soit le domaine considéré) est un modèle probabiliste et, par suite, comme tout modèle probabiliste, il échappe à la tyrannie du VRAI-FAUX. Enfonçons le clou[13], avec cet extrait du document d'accompagnement du Programme de 1^{ere} S ([5]) :

« La modélisation ne relève pas d'une logique du vrai et du faux : un modèle n'est ni vrai, ni faux, il est efficace ou inutilisable, il peut être validé ou infirmé par des données expérimentales. Une des premières fonctions de la statistique dite inférentielle est d'associer à une expérience aléatoire un modèle, ou une gamme de modèles compatibles avec les données expérimentales dont on dispose et aussi de définir des procédures de validation ».

• Ayant compris, qu'en ce qui concerne l'introduction des lois uniformes, nous devons nous garder d'un amateurisme facile, il est donc essentiel d'indiquer clairement (aussi clairement que RENYI dans l'exemple de la cible) **quand on se réfère au modèle uniforme.**

Et, prolongeant ainsi l'esprit des mesures adoptées en classe de Première pour la loi équirépartie, nous conviendrons qu'une expression telle « *choisir un réel au hasard dans* $[0,1]$ » (ou encore « *choisir un point au hasard sur un segment, un cercle, dans un carré...* ») est une référence implicite à ce modèle.

1.3 Simulation et modèle uniforme

Nous n'entendons pas nous interroger, ni sur les problèmes que soulève la génération par l'ordinateur de nombres aléatoires[14] (ou pseudo-aléatoires...), ni sur l'" inertie " de l'électronique qui peut s'interposer entre notre pensée et le résultat produit[15]. Sans nous griser de la virtuosité apparente de l'ordinateur, **nous ferons comme si...**

Nous envisageons plutôt cette question embarrassante :

« Sachant que simuler une expérience aléatoire, c'est choisir un modèle de l'expérience et simuler ce modèle, et que par ailleurs seuls les modèles discrets sont susceptibles d'être simulés, comment simuler une expérience aléatoire dont l'ensemble des issues possibles est par exemple l'intervalle réel $[0,1]$ *? »*

Le problème du choix du modèle étant provisoirement exclu du sujet[16], il ne reste plus qu'à se tourner vers **la simulation discrétisée d'une loi continue.**

---

[13] À cet endroit, la redite n'est pas à craindre.

[14] Le lecteur intéressé par ce sujet pourra consulter, par exemple, l'excellent article de Michel JANVIER dans l'ouvrage « *Des statistiques à la pensée statistique* » ([27]).

[15] Au sens où l'écrit Michel HENRY ([25], page 29) :

« Avons nous réellement simulé quelque chose ? Ou avons-nous seulement vérifié que le résultat de la simulation (conforme à ce qui était donc attendu) confirme que la fabricant de l'ordinateur et le concepteur du logiciel ont bien rempli leurs cahiers des charges ? »

[16] Nous nous en préoccuperons ultérieurement.

1.3.1 Une approche théorique

Soit k un entier naturel ($k \geq 1$).

Désignons par $\mathcal{D}_k$ l'ensemble des décimaux de $[0,1[$ dont l'écriture décimale comporte au plus k chiffres après la virgule. Ainsi $\mathcal{D}_k = \left\{ \frac{i}{10^k} \middle| i \in [\![0, 10^k - 1]\!] \right\}$ (où, selon l'usage, l'ensemble des entiers naturels de 0 à n ($n \in \mathbb{N}$) est noté $[\![0,n]\!]$) et $\mathrm{card}(\mathcal{D}_k) = 10^k$.

Considérons l'expérience aléatoire consistant à tirer " au hasard " un élément de $\mathcal{D}_k$, c'est-à-dire selon la loi équirépartie de $\mathcal{D}_k$ (chaque élément est donc de probabilité $\frac{1}{10^k}$).

Donnons nous enfin deux réels fixés a et b de $[0,1[$ tels que $a < b$.

Nous avons alors le résultat suivant :

La probabilité que l'élément X tiré dans $\mathcal{D}_k$ soit dans l'intervalle $]a,b]$ est telle que :

$$\left|\mathbb{P}(a < X \leq b) - (b-a)\right| \leq 10^{-k}$$

Démonstration

Soit x un réel fixé de $[0,1[$.

L'événement $(0 \leq X \leq x)$ n'est autre que $\left\{ \frac{i}{10^k} \middle/ i \in \mathbb{N} \text{ et } 0 \leq i \leq 10^k x \right\}$, ou encore, en désignant par E la fonction " partie entière " :

$$(0 \leq X \leq x) = \left\{ \frac{i}{10^k} \middle/ i \in [\![0, \mathrm{E}(10^k x)]\!] \right\}$$

L'hypothèse d'équirépartition livre donc :

$$\mathbb{P}(0 \leq X \leq x) = \frac{1}{10^k}\left(1 + \mathrm{E}(10^k x)\right).$$

Comme $[0,b]$ est la réunion disjointe des intervalles $[0,a]$ et $]a,b]$, nous en déduisons immédiatement l'égalité : $\mathbb{P}(a < X \leq b) = \frac{1}{10^k}\left(\mathrm{E}(10^k b) - \mathrm{E}(10^k a)\right)$.

Avec l'encadrement : $x - 1 < \mathrm{E}(x) \leq x$ $(\forall x \in \mathbb{R})$, et quelques bricolages élémentaires d'inégalités, il ne faut rien de plus pour affirmer que :

$$\left|\mathbb{P}(a < X \leq b) - (b-a)\right| \leq 10^{-k}.$$

Conséquences

Comme $(b-a)$ est la probabilité uniforme sur $[0,1]$ de n'importe lequel des intervalles d'extrémités a et b, il en découle, selon la formule que nous empruntons à D. DACUNHA-CASTELLE et M. DUFLO (voir [13], page 115) que :

« à partir de " nombres au hasard " sur $\mathcal{D}_k$, on peut, à 10^{-k} près, fabriquer des nombres au hasard sur $[0,1]$ ».

C'est donc le moment d'examiner les procédés de fabrication...

1.3.2 La fonction ALEA( )

Cet ouvrage étant destiné à être utilisé, nous voilà quelque part sommés d'assurer un cadre cohérent aux diverses simulations à venir et de plus, disponibles pour tout un chacun. De ce point de vue, parce que d'usage relativement courant, nous allons considérer que le **logiciel Excel** fait l'affaire et donc, effectuer par la suite toutes les simulations à l'aide du « générateur de nombres aléatoires appartenant à l'intervalle $[0,1[$ » inscrit à son menu sous le nom de fonction Alea().

En ce qui concerne cette dernière, sans chercher à " passer par l'étamine " tous ses aspects, il convient de signaler que la fonction Alea() « *renvoie un nombre aléatoire supérieur ou égal à* 0 *et inférieur à* 1[17] » (comme l'indique la fenêtre reproduite ci-après), formulation à entendre comme suit : « Alea() est un générateur de nombres pseudo-aléatoire pris " quasiment[18] " dans $\mathcal{D}_{15}$ (en conservant la notation du paragraphe précédent) et ceci évidemment, quel que soit le nombre de décimales à l'affichage (moins de 10 en général dans les simulations effectuées) ».

ALEA

Voir aussi

Renvoie un nombre aléatoire supérieur ou égal à 0 et inférieur à 1. Un nouveau nombre aléatoire est renvoyé chaque fois que la feuille de calcul est recalculée.

Syntaxe

ALEA( )

Notes

- Pour générer un nombre réel aléatoire compris entre a et b, utilisez :

  ALEA()*(b-a)+a

- Si vous voulez utiliser ALEA pour générer un nombre aléatoire qui ne change pas chaque fois que la cellule est recalculée, vous pouvez taper =ALEA() dans la barre de formule, puis appuyer sur F9 pour transformer la formule en nombre aléatoire.

Contrôler le caractère non mensonger de la " publicité " ci-dessus est une première manipulation qui s'impose : il s'agit de " **constater** " (i. e. sans autre ambition que la simple observation) **que la fréquence d'appartenance à un intervalle** $[a,b]$ **de** $[0,1[$ **tend à se stabiliser vers la longueur de l'intervalle** $[a,b]$. Par ailleurs, l'occasion est ainsi fournie de se familiariser avec la fonction Alea().

Voici donc -en détail- cette manipulation.

---

[17] Le nombre 1 est exclus, ce qui ne gêne en rien : comme toute autre valeur, elle est de probabilité nulle.

[18] Les nombres sont les décimaux de $\mathcal{D}_{30}$, avec une mantisse égale à 15 (on " trouvera " : $0,\underbrace{123456789123456}_{\text{15 chiffres}}$, mais aussi $0,000\underbrace{123456789123456}_{\text{15 chiffres}}$.

Activité : *« fonction Alea() et loi uniforme »*

Objectif : obtenir la fréquence d'un intervalle $[a,b]$ inclus dans $[0,1]$ pour la fonction **Alea()** d'EXCEL et constater la stabilité de cette fréquence autour de la longueur de l'intervalle.

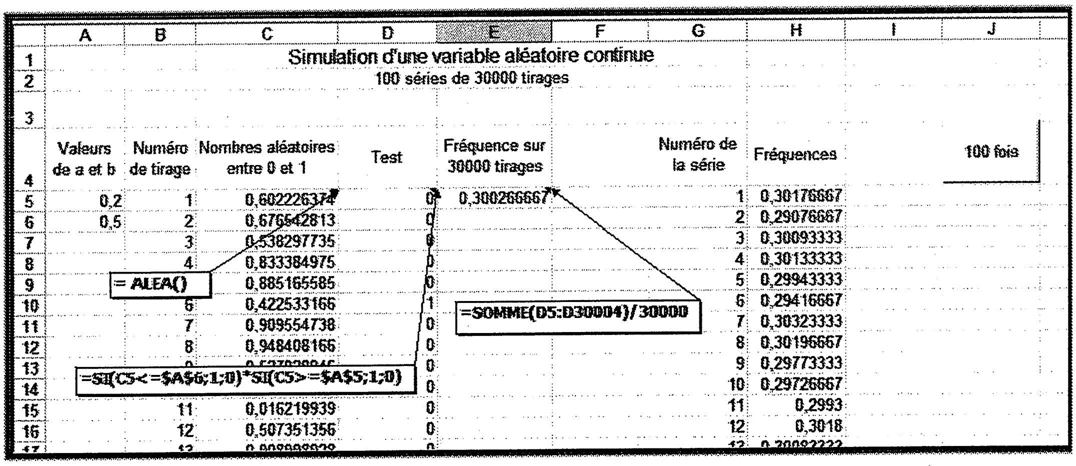
Protocole : les réels a et b sont donnés dans $[0,1]$ tels que $a<b$ (par exemple $a=0,2$ et $b=0,5$).

Réaliser une série de 30000 tirages d'un nombre aléatoire dans $[0,1]$ à l'aide de la fonction **Alea()** et calculer la fréquence de l'intervalle $[a,b]$.

À l'aide d'une macro-commande, réaliser 100 séries de 30000 tirages et représenter sur un graphique les 100 fréquences de l'intervalle $[a,b]$ obtenues.

Présentation de la feuille de calcul EXCEL

- ☞ Cellules A5 et A6 : les valeurs de a et b.
- ☞ Colonne B : les numéros des tirages de 1 à 30000.
- ☞ Colonne C : les nombres aléatoires.
- ☞ Colonne D : le test d'appartenance à $[a,b]$.
- ☞ Cellule E5: la fréquence de $[a,b]$ dans la série.
- ☞ Colonne G : les numéros de séries de 1 à 100.
- ☞ Colonne H : la fréquence de $[a,b]$ dans les 100 séries.



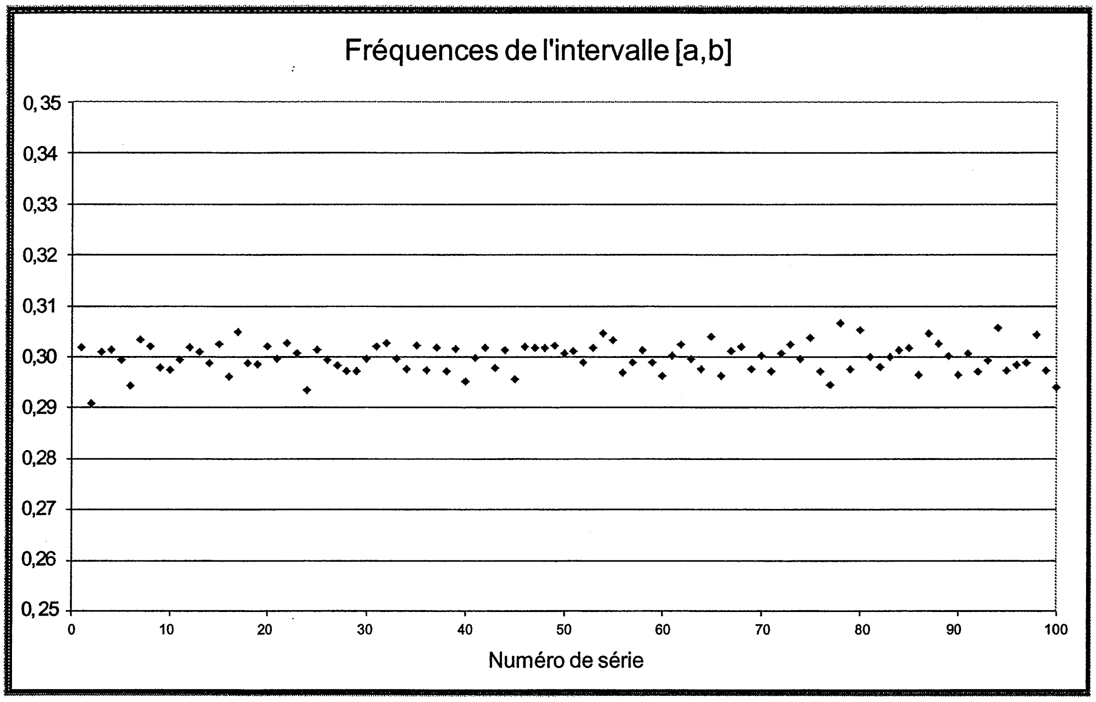
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1				Simulation d'une variable aléatoire continue						
2				100 séries de 30000 tirages						
3										
4	Valeurs de a et b	Numéro de tirage	Nombres aléatoires entre 0 et 1	Test	Fréquence sur 30000 tirages		Numéro de la série	Fréquences		100 fois
5	0,2	1	0,602226374	0	0,300266667		1	0,30176667		
6	0,5	2	0,676542813	0			2	0,29076667		
7		3	0,538297735	0			3	0,30093333		
8		4	0,833384975	0			4	0,30133333		
9			0,885165585	0			5	0,29943333		
10		6	0,422533166	1			6	0,29416667		
11		7	0,909554738	0			7	0,30323333		
12		8	0,948408166	0			8	0,30196667		
13		[illegible]	[illegible]	0			9	0,29773333		
14				0			10	0,29726667		
15		11	0,016219939	0			11	0,2993		
16		12	0,507351356	0			12	0,3018		
17		13	[illegible]	[illegible]			13	[illegible]		

Code de la macro

```
Sub fois100()
' fois100 Macro
' Macro enregistrée le 03/09/2002 par IREM1
'
Dim cpt As Integer
For cpt = 1 To 100
Cells(4 + cpt, 8).Value = Cells(5, 5).Value
Next cpt

End Sub
```

Représentation des fréquences sous forme de nuage de points.



Conclusion : aux fluctuations d'échantillonnage près, on ne peut qu'être convaincu.

Andrey KOLMOGOROV (1903-1987)

« *Le concept même de la probabilité mathématique serait sans utilité s'il ne trouvait sa concrétisation dans la fréquence d'arrivée d'événements, suite à des expériences nombreuses réalisées dans des conditions uniformes.* »

2. Les lois uniformes dans la classe

2.1 L'introduction du modèle uniforme

2.1.1 Point de vue

De manière générale, nous entretenons la certitude d'une conviction :
« l'introduction d'une nouvelle notion a pour finalité première ... d'introduire une nouvelle notion ».

Autrement dit, elle se doit de faire toucher du doigt le “ pourquoi ”, le “ comment ” du point de vue qui va être adopté, de défricher le sens de la réponse qu'elle peut apporter à quelques questions inaccessibles à ce qui prévalait jusqu'à présent, mais elle n'a pas faculté à ausculter d'entrée de jeu tous les problèmes qui ne manqueront pas d'être soulevés.

Bref, arrêtons[19] de croire à l'exceptionnelle cuvée d'une introduction qui prétendrait donner la mesure définitive des choses.

Nous nous méfierons donc de ces situations susceptibles “ d'attirer le chaland ” sur un tel sujet, mais qui, examinées à la loupe, se révèlent d'une facture délicate, voire douteuse (il en est ainsi, par exemple du jeu de Franc-Carreau dont nous proposons une étude extrêmement détaillée dans le chapitre 4 (pages 164 à 171)).

Reste alors, sûrement un peu aux antipodes de telles ambitions, la proposition que nous ferons nôtre : reprendre paisiblement l'A B C des enjeux mathématiques et didactiques de l'introduction du modèle uniforme, avec en préalable, l'idée toute simple “ d'aller voir ” un peu ce qu'il y a dans la tête des élèves[20] ».

2.1.2 Des savoirs préconstruits chez les élèves ?

- Un essai « sauvage »

Nous avons soumis à la perspicacité de 126 élèves de terminale S répartis en cinq classes l'étude des trois situations aléatoires que nous présentons ci-après, dans les conditions suivantes :

- épreuve réalisée en classe ;
- durée de l'épreuve : 30 minutes ;
- enseignement de probabilité et statistique non entamé dans chacune des classes.

---

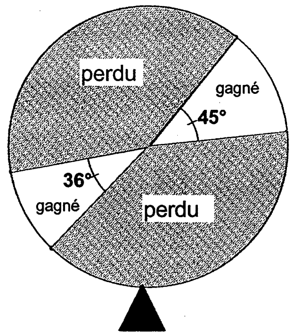
[19] Nous aussi, pour la simple raison que l'on se souvient d'avoir cru au Père Noël...

[20] Pas d'inquiétude : la tournure va aller en s'améliorant.

SITUATION 1 : La roue de la fortune

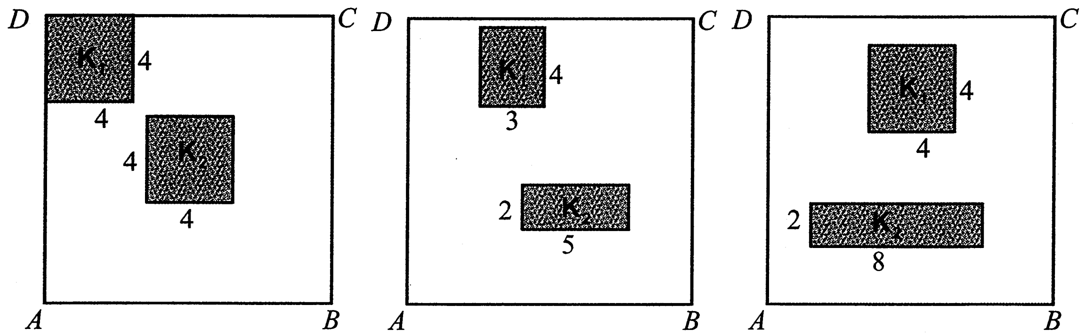
On lance une roue de la fortune traditionnelle.

Quelle est la probabilité de gagner ?



SITUATION 2 : Dans le carré

On choisit au hasard un point dans un carré *ABCD*. Préciser dans chacun des cas ci-dessous s'il y a plus, ou moins, ou autant de chance que le point soit choisi dans la zone K_1 que dans la zone K_2.



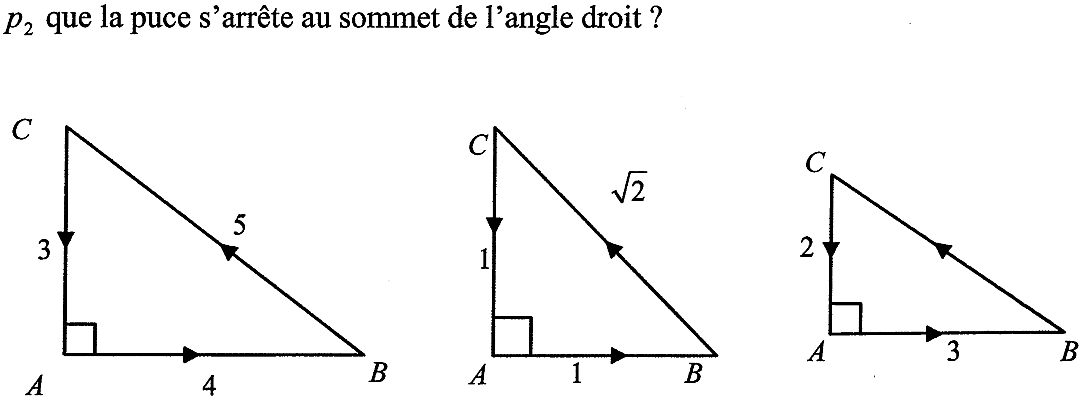
SITUATION 3 : La puce électronique

Une puce électronique se déplace à vitesse constante sur le " pourtour " d'un triangle toujours dans le même sens (indiqué par la flèche).

Une panne se produit subitement et la puce s'arrête instantanément.

Quelle est, dans chaque cas, la probabilité :

- p_1 que la puce s'arrête sur l'hypoténuse ;
- p_2 que la puce s'arrête au sommet de l'angle droit ?



$p_1 =$ $\quad$ $p_1 =$ $\quad$ $p_1 =$

$p_2 =$ $\quad$ $p_2 =$ $\quad$ $p_2 =$

• Résultats

Sous l'hypothèse de modèle uniforme[21] dans chacune des situations, le taux de réussite[22] des élèves est supérieur à 90 % dans les études suivantes :

- situation 1 (95 % environ) ;
- situation 2 ;
- situation 3 : calcul de la probabilité p_1.

En ce qui concerne le calcul de p_2 dans ce dernier exercice, nous avons jugé utile d'affiner le compte rendu des résultats, comme l'indiquent le tableau ci-dessous et les légendes qui l'accompagnent.

Réponse proposée	**%**	**LÉGENDE**
Aucune	24 %	
$\dfrac{1}{\text{longueur du pourtour}}$	28 %	Par exemple $1/12$ (triangle 1, situation 3) ou valeur approchée de $1/12$.
$\dfrac{1}{+\infty}$	23 %	Sont incluses les réponses : « $\dfrac{1}{x}$ où x tend vers $+\infty$ » ; « 0^+ » ; « $\dfrac{1}{n}$, n infiniment grand ».
$\dfrac{1}{3}$	7 %	Il y a trois sommets (interprétation).
Réponse qualitative du type : « très peu probable »	8 %	Ou encore " très faible ", " infiniment petite ", " très peu de chance ", etc..
Autres	10 %	Voir (∗).
0 (tel quel)		Une seule réponse.

(∗) Autres : cela peut aller du chiffrage infinitésimal arbitraire en apparence « (0,00000002 % » (?)) à « **ça dépend de la taille du point** » ou « ça dépend de l'unité de longueur » en passant par « 6 fois sur A en 1 minute » ou encore « 1 sur la somme des points du périmètre » etc..

---

[21] Choqué ? Bien vu : les "leçons" du paragraphe précédent ont été retenues. (Voir commentaires à suivre.)

[22] Les réponses "approchées" sous forme de pourcentage (par exemple 41,67 % pour le premier triangle de la puce électronique) ont été comptabilisées comme exactes.

- Commentaires

Il nous semble loisible de tirer trois enseignements :

1. Pour les élèves, l'intervention du hasard dans les phénomènes aléatoires continus fait systématiquement **référence à ce que nous appelons le modèle uniforme**[23]. Et si de ce point de vue quelques tournures dans les énoncés peuvent être inculpées en tant que pousse-au-crime (roue « *traditionnelle* » (situation 1), panne d'électricité « *subite* » (situation 3), il n'en va pas tout à fait de même dans la situation 2 où l'énoncé est volontairement aseptisé : « *On choisit un point au hasard* », ce qui ne rebute personne[24].
Il importe donc, comme nous nous en sommes expliqués dans le paragraphe précédent, de revenir sur l'étude de ces situations et de jeter quelques doutes sur l'adoption spontanée (et implicite) de la distribution uniforme[25].

2. En ce qui concerne cette dernière - en dehors des " cas de rupture " (voir ci-après) - le calcul de la probabilité d'un événement par le quotient

$$\frac{\text{mesure de la zone des issues favorables à cet événement}}{\text{mesure de la zone des issues possibles}}$$

(avec successivement pour mesure : angle, aire, longueur) ne met personne (ou presque) sous tension.

Mieux, et quand bien même ce constat ne saurait être émancipé du contexte géométrique[26], il est à la portée de la plupart des élèves d'expliciter l'idée de **proportionnalité** qui sous tend les calculs qu'ils ont effectués : ceci est évidemment lourd de conséquences pour la suite.

3. Les " cas de rupture "

Dès que la zone favorable est de **mesure nulle**, l'idée du rapport des mesures est jetée aux orties et laisse sa place :

- aux retrouvailles avec ces bonnes *cardinalités ensemblistes*, type : « $\frac{1}{+\infty}$ », avec 1 pour " un point" (le sommet de l'angle droit) et $+\infty$ pour " tous les points du pourtour " ;
- ou à un *salmigondis* " cardinal-mesure " type : « $\frac{1}{12}$, (exercice 1, situation 3) »

---

[23] Pour l'instant..., entre nous.

[24] Le lecteur attentif n'aura pas manqué d'observer que la carré ABCD est livré sans dimension (i.e. la longueur du côté n'est pas fournie), ce qui à l'évidence, biaise un peu les comportements. Nous en sommes bien d'accord.

[25] Les élèves ont été informés que lorsque le chantier « Proba-Stat » sera à l'ordre du jour dans la classe, le professeur reviendra sur les situations qui leur ont été proposées.

[26] Les situations sont volontairement installées dans le cadre géométrique, pour l'instant : « *débroussailler paisiblement les affaires, les unes après les autres* » n'est pas éloigné de ce que nous avons écrit.

avec 1 : " 1 point " et 12 :" longueur du pourtour ";

- ou *au doute,* type : « très peu probable »;
- ou encore *à rien,* type : « pas de réponse ».[27]

Il semble donc bien que, tout compte fait, nous tenions là l'un des verrous essentiels (le verrou ?) à faire sauter ...

En conclusion, munis de telles informations que, pensons-nous, chacun est susceptible de recueillir par une " vraie " expérimentation solennelle et calibrée comme il se doit, nous pouvons déposer là les prémices d'une introduction des lois uniformes et entrer dans le vif du sujet.

2.1.3 Une proposition

En trois paliers :

1. Institutionnaliser le calcul de probabilité d'un événement dans le cadre des distributions uniformes par :

$$(*)\quad \frac{\textbf{mesure de la zone favorable à cet événement}}{\textbf{mesure de la zone possible}},$$

à l'aide de situations semblables à celles présentées précédemment (en variant les mesures : longueur, angle, aire, ...) :

- en mettant en évidence le trait finalement le plus voyant : la *proportionnalité* ;
- sans épiloguer pour l'instant sur l'adoption impulsive du modèle uniforme ;
- en évitant les cas de rupture : zone favorable de mesure nulle.

2. Traiter le problème des **zones de mesure nulle** en restant dans le cadre de la mesure.

Par exemple, en reprenant le problème de la " puce électronique " (toujours sous l'hypothèse uniforme), calculons la probabilité p_2 que la puce s'arrête en A.

Méthode 1 (sans état d'âme, expéditive).

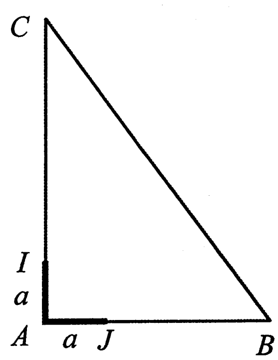
On applique le calcul des probabilités conformément à la " définition (*) " ci dessus :

- zone favorable : point A ; longueur 0 ;

- zone possible : pourtour du triangle ; longueur 12.

D'où $p_2 = \frac{0}{12} = 0$.

Méthode 2 (sans contre indication[28]).



Considérons les points I et J de la figure ci-contre où $AI = AJ = a$ ($a > 0$ donné, pas trop grand). La puce a " plus de chance " de s'arrêter sur la ligne brisée $[IA] \cup [AJ]$ qu'au point A. Comme cette ligne a comme longueur $2a$, on obtient :

$$0 \leq p_2 \leq \frac{2a}{12} = \frac{a}{6}.$$

---

[27] L'ensemble de ces réponses représente 83 % de celles fournies par les élèves.

[28] Voir remarque suivante.

À supposer, pour fixer les idées que l'on ait choisi $a = \frac{1}{n}$ (avec $n \geq 1$), il vient :

$0 \leq p_2 \leq \frac{1}{6n}$, pour tout entier n ($n \geq 1$) d'où $p_2 = 0$.

Remarques

Certains pourront ne pas se satisfaire d'abandonner aux seuls calculs les tentatives d'élucidation de ce " phénomène[29] " : « Il est possible que la puce s'arrête en A, mais la probabilité de cet événement est nulle ».

Notre meilleur atout, susceptible de dissiper ce mal-être tient dans la réponse (déjà citée) d'un élève : « *la probabilité que la puce s'arrête au point A dépend de la taille du point* » qui décrit, de façon inégalable, ce à quoi l'on doit s'attendre lorsqu'on fait passer la réalité avant l'abstraction.

En clair, à pousser plus loin l'analyse, le phénomène « la puce s'arrête exactement au point A » est inobservable[30]. Il relève de la seule vue de l'esprit, de l'idéalisation pure et ne peut donc être qualifié d'" événement " que dans un cadre théorique.

Faut-il en conclure que donner du sens à la probabilité d'un tel événement ne peut se faire en dehors de ses références à ce cadre théorique ?
Sûrement, quitte à pousser naïvement à la limite la validité de la loi :

$$\frac{\text{mesure de la zone favorable à cet événement}}{\text{mesure de la zone possible}},$$

qui est le point de vue adopté dans la méthode 2.

3. Accorder une insistance particulière à la loi uniforme sur un intervalle de la droite réelle :

- c'est le terrain naturel où se posent, s'étudient et se résolvent nombre de problèmes concernant les phénomènes aléatoires continus, et notamment quelques uns parmi les plus élémentaires ;
- c'est le domaine d'exercice privilégié pour les procédures de simulation (cf. la fonction ***ALEA()*** ;
- enfin, parmi les lois uniformes, c'est le cas d'espèce inscrit noir sur blanc dans les Programmes...

---

[29] Au sens premier du terme : « *Tout ce qui se manifeste à la conscience que ce soit par l'intermédiaire des sens (phénomènes extérieurs, physiques, sensibles) ou non (phénomènes psychologiques, affectifs)* » (PETIT ROBERT).

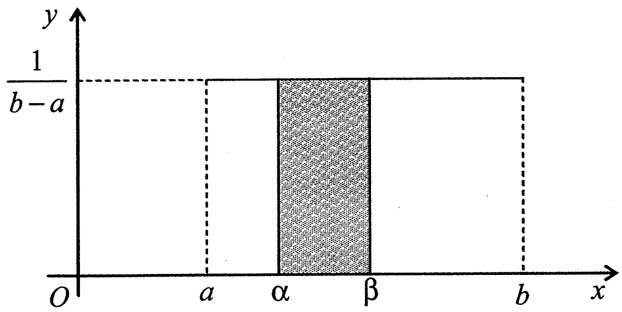
[30] En totale rupture avec les expériences aléatoires rencontrées jusqu'à présent : « à PILE OU FACE, la pièce de monnaie s'immobilise sur PILE », « la somme des points obtenus en lançant deux dés est égale à 7 », etc., et même « la puce électronique s'arrête sur l'hypoténuse du triangle » sont des phénomènes qui peuvent être matériellement observés.

2.1.4 *Un constat*

C'est en vain que l'on chercherait à cet endroit un quelconque intérêt à introduire la notion de densité, tant du point de vue scientifique que pédagogique, sauf peut être pour suivre chronologiquement le libellé du Programme.

En tout état de cause, la voici :

Loi uniforme sur un intervalle $[a,b]$.



La fonction **densité** f est **constante** sur l'intervalle $[a,b]$: $\forall x \in [a,b],\ f(x) = \dfrac{1}{b-a}$.

La **probabilité de l'intervalle** $[\alpha,\beta]$ contenu dans $[a,b]$ est calculée par :

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\beta-\alpha}{b-a}.$$

2.2 Événement, probabilité d'un événement

Si la mise en place de la répartition uniforme sur un domaine acceptable mérite -comme nous venons de le voir- quelques égards attentionnés, elle ne saurait occuper seule le devant de la scène.

Les notions **d'évènement** et **de probabilité d'événement** réclament bien autre chose qu'une vague analogie avec les modèles discrets[31]. On ne peut se contenter de faire appel à un bricolage de circonstance : « *sans chercher à tout prix la couleur du caméléon*[32] », un détour s'impose.

2.2.1 *Phosphore ou Probabilité ?*

Voici une situation tout à fait banale, mais exemplaire, :

« **On choisit au hasard un réel** x **dans** $[0,1]$**. Quelle est la probabilité que** $\sqrt{x} \geq \dfrac{1}{2}$ **?** »

On peut aisément convenir que la résolution " standard " de cette question ne va guère s'écarter de :

[31] Quand bien même, il ne serait pas interdit de penser que, parmi les prises de position à venir, certaines auraient pu inspirer quelques manières de faire dans le cadre des probabilités discrètes.

[32] CAVANNA.

« Pour x appartenant à $[0,1]$, *on a l'équivalence* :

$$\sqrt{x} \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{4} \leq x \leq 1.$$

Par suite, le réel x étant choisi " au hasard " dans $[0,1]$, *c'est à dire selon la loi uniforme, on a* : $P\left(\sqrt{x} \geq \frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$. »

Et l'on a du mal à voir ce que l'on pourrait ajouter.

Pourtant si : cet exemple, aussi modeste soit-il apporte déjà son contingent d'interrogations :

- qu'est-ce que $\left(\sqrt{x} \geq \frac{1}{2}\right)$? Un événement ? Si oui lequel ?

- que signifie la lettre " P " dans l'écriture $P\left(\sqrt{x} \geq \frac{1}{2}\right)$? S'agit-il de l'initiale en lettre capitale du mot « probabilité » ou d'un symbole mathématique désignant une loi de probabilité ?

On (le lecteur) aurait tort de négliger de telles questions : il semble se dissimuler derrière ces péripéties d'apparence puérile de solides raisons d'étonnement[33].

Examinons cela de plus près :

- $\left(\sqrt{x} \geq \frac{1}{2}\right)$ désigne l'« événement »[34] A défini par : $A = \left\{x \in [0,1] / \sqrt{x} \geq \frac{1}{2}\right\}$;
- comme $[0,1]$ est muni de la loi de probabilité uniforme que nous notons $\mathcal{U}$ (et non P : il est facile de comprendre pourquoi), la **probabilité de l'événement** A est $\mathcal{U}(A)$;
- par suite, l'on se devrait d'écrire :

$$A = \left\{x \in [0,1] / \sqrt{x} \geq \frac{1}{2}\right\} = \left\{x \in [0,1] / x \geq \frac{1}{4}\right\}, \quad \text{soit } A = \left[\frac{1}{4}, 1\right].$$

Comme $[0,1]$ est muni de la loi de probabilité uniforme $\mathcal{U}$, **la probabilité**[35] **de** A est $\mathcal{U}(A) = \frac{3}{4}$.

Et, pour établir l'inanité de l'argument (on l'entend déjà) qui nous taxe de rigorisme obsessionnel, passons à un autre exemple pas moins éloquent (et de plus incontournable).

Il est légitime de penser qu'avec la seule fonction **ALEA()** d'Excel, nous n'allons pas donner sans compter dans la simulation. Un premier pas est franchi (en attendant

[33] Verdict prononcé à l'aune des résultats de l'interview sur le sujet de quelques élèves, étudiants et aussi enseignants...

[34] C'en est un : entre nous, il n'y pas à barguigner ; quant aux élèves, le problème ne saurait être soulevé (déjà dit).

[35] En toutes lettres pour l'instant.

mieux) grâce à la propriété suivante qui permet de simuler la loi uniforme sur $[a,b]$ à partir de loi uniforme sur $[0,1]$:

« ***Si** x **suit la uniforme sur** $[0,1]$ **alors** $y=a+(b-a)x$ **suit la loi uniforme sur** $[a,b]$* »

Pour cela, considérons un intervalle $[\alpha,\beta]$ de $[a,b]$. Avec $y=a+(b-a)x$, nous avons l'équivalence :

$$\alpha \leq y \leq \beta \Leftrightarrow \frac{\alpha-a}{b-a} \leq x \leq \frac{\beta-a}{b-a}.$$

Comme x suit la loi uniforme sur $[0,1]$, nous avons :

$$P(\alpha \leq y \leq \beta) = \frac{\beta-a}{b-a} - \frac{\alpha-a}{b-a} = \frac{\beta-\alpha}{b-a} = \frac{\text{longueur de } [\alpha,\beta]}{\text{longueur de } [a,b]},$$

ce qui prouve que y suit la loi uniforme sur $[a,b]$.

Et l'on est prié de noter que **la lettre « P » ne désigne pas la loi de probabilité uniforme $[a,b]$** ; les (rarissimes) lecteurs qui penseraient le contraire sont conviés à une session de rattrapage au chapitre 3 (paragraphe 1-3 pages 100 à 105), à moins qu'ils ne se satisfassent des éclaircissements ci-après.
L'événement $A=(\alpha \leq y \leq \beta)$ n'est autre que **la partie de $[0,1]$** définie par $A=\{x \in [0,1] \,/\, \alpha \leq a+(b-a)x \leq \beta\}$, et, comme nous l'avons vu, A est l'intervalle $\left[\frac{\alpha-a}{b-a}, \frac{\beta-a}{b-a}\right]$ de $[0,1]$.

Par suite, en désignant par $\mathcal{U}_{[0,1]}$ (respectivement par $\mathcal{U}_{[a,b]}$) la loi de probabilité uniforme sur $[0,1]$ (respectivement sur $[a,b]$) la **probabilité de l'événement A est calculée** par $\mathcal{U}_{[0,1]}(A)=\frac{\beta-\alpha}{b-a}$, qui se trouve être égale à $\mathcal{U}_{[a,b]}([\alpha,\beta])$.

Et donc… C.Q.F.D.

Cet exemple d'une (trop ?) grande simplicité permet cependant d'entrevoir qu'une écriture telle que « *P*(*A*) », qui semble couler sous la plume, n'a pas toujours la force évocatrice d'un espace probabilisé qu'en général, on est prompt à lui accorder.
Ainsi, dans le *Problème de la rencontre* (voir chapitre 4, page 154), peut-on considérer comme allant de soi que A : « Les personnes se rencontrent » est une partie " convenable " de $[0,1]\times[0,1]$ muni de la loi uniforme ?

Par ailleurs, l'explicitation de la loi de probabilité P (ou même son existence) n'est pas toujours une évidence première (on pourra s'interroger, de ce point de vue, aussi bien sur le cas accessible de l'exercice 2-18 que sur celui, " inabordable " du chapitre 5 (paragraphe 3, pages 243 à 247)).
En conséquence, nous utiliserons **la notation « $\mathbb{P}(A)$ » comme raccourci de la probabilité de A** » sans préjuger de l'espace probabilisé dans lequel nous sommes censés travailler.
Contraignant ? Laborieux ? Étriqué ?

Peut-être, mais c'est à coup sûr le prix à payer pour obtenir de nos élèves des productions “ intelligentes ” ou pour le moins que leurs efforts cessent de passer pour des assauts de maladroits, faute (la nôtre) d'avoir tiré de l'ombre le sens exact des objets, notions et symboles mathématiques manipulés.

Quant au phosphore, dont la présence saugrenue en titre de paragraphe n'a échappé à personne, faut-il rappeler que son symbole chimique est P ?

2.2.2 Une “ vraie ” loi de probabilité

L'additivité de la mesure fait que les propriétés usuelles d'une probabilité sont au rendez-vous. Encore faut-il les mettre en évidence :

- il n'y a aucune raison en effet, pour que les procédures de calcul apprivoisées par les élèves dans le cas discret (probabilité du complémentaire, d'une réunion…) s'appliquent ipso facto dans le cas continu ;
- par ailleurs, ce serait une fausse bonne idée de passer sous silence que “ certaines ” propriétés sont requises avant de baptiser “ loi de probabilité ” telle ou telle application (sous prétexte que l'axiomatique complète reste inaccessible aux élèves).

En ce qui concerne *la loi uniforme sur un intervalle de* $\mathbb{R}$, où, en Terminale, la tribu d'évènements est réduite à la seule branche des réunions finies d'intervalles[36] (qui, signalons le, est stable par réunion finie et passage au complémentaire), on peut, sans risquer de se tromper, mettre en première ligne les “ observations ” suivantes :

Soit P la probabilité uniforme sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

1. Quel que soit $[a,b]\subset I$, on a : $P([a,b])=P([a,b[)=P(]a,b])=P(]a,b[)$

ce qui - dans ce contexte - rend commode de désigner par (a,b) l'un quelconque des quatre intervalles précédents.[37]

2. Étant donnés deux intervalles disjoints I_1 et I_2 de I :

$P(I_1\cup I_2)=P(I_1)+P(I_2)$, d'où découle sans gros effort que si A et B sont des réunions finies d'intervalles de I : $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$;

$P(\overline{A})=1-P(A)$ ($\overline{A}$ étant le complémentaire de A dans E).

2.2.3 À propos d'indépendance

➢ Événements indépendants

On distinguerait mal ici l'utilité d'une “ théorie ” de l'indépendance probabiliste d'évènements présentée dans une forme aboutie. L'idée majeure consiste à affirmer qu'on éprouve « simplement » le besoin de donner une définition car, nous n'avons pas le sentiment d'être à côté en voulant ruiner (une fois de plus) chez nos élèves

---

[36] Conformément au Programme : choix raisonnable, qui, à notre sens, n'affaiblit en rien une initiation aux lois continues de Probabilité.

[37] C'est le point de vue adopté par le document d'accompagnement (voir [4], page 132).

cette conception de la notion d'indépendance stochastique d'événements qui tient à tout prix à la situer en dehors du calcul de probabilités.
Ce chapitre étant placé sous l'enseigne de la loi uniforme, nous nous satisferons pleinement - pour l'instant - de ce qui suit[38].

Soit I un intervalle borné de $\mathbb{R}$ et P la loi de probabilité uniforme sur I. Deux événements[39] A et B sont dits indépendants lorsque $P(A/B)=P(A)$ ou encore lorsque $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$.

Exemple

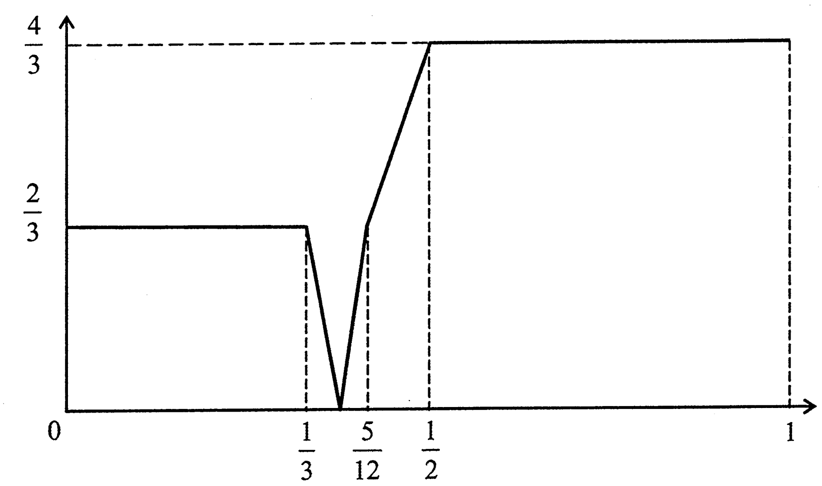
- Un réel étant choisi au hasard dans $[0,1]$ (i.e. selon la loi uniforme P de $[0,1]$), les événements A et B définis ci-après sont indépendants :
  $A=$ « le réel choisi appartient à $\left[0,\frac{1}{6}\right]\cup\left[\frac{5}{6},1\right]$ » ;
  $B=$ « le réel choisi appartient à $\left[\frac{1}{6},\frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right]\cup\left[\frac{5}{6},1\right]$ ».

En effet :

  - d'une part $P(A)=\frac{1}{3}$ et $P(B)=\frac{1}{2}$,
  - d'autre part $P(A\cap B)=P\left(\left\{\frac{1}{6}\right\}\cup\left[\frac{5}{6},1\right]\right)=P\left(\left\{\frac{1}{6}\right\}\right)+P\left(\left[\frac{5}{6},1\right]\right)=\frac{1}{6}$, d'où il ressort que $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$.

- Nous ne tenons pas spécialement à décontenancer le lecteur en bouleversant tant soit peu l'agencement minutieux de cet ouvrage, mais, à cet endroit s'impose un saut à l'intérieur du prochain chapitre.

Considérons donc un instant la fonction f définie sur $[0,1]$ par la représentation graphique suivante :



[38] Qui ne se démarque pas - au moins formellement - du point de vue adopté dans le cas discret.

[39] Comme nous venons de le dire dans le précédent paragraphe, nous ne considérerons comme événements que des réunions finies d'intervalles.

La fonction f est *continue, positive sur* $[0,1]$ et $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 1$ (jeu d'enfants) : par suite, cette fonction est la densité d'une loi de probabilité sur $[0,1]$ notée P'.

Nous avons alors :

$$P'(A) = \frac{1}{6}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{6}\times\frac{4}{3} = \frac{1}{3} \ ;$$

$$P'(B) = \frac{1}{6}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\times\frac{4}{3}+\frac{1}{6}\times\frac{4}{3} = \frac{5}{9} \ ;$$

$$P'(A\cap B) = P'\left(\left\{\frac{1}{6}\right\}\cup\left[\frac{5}{6},1\right]\right) = P'\left(\left\{\frac{1}{6}\right\}\right)+P'\left(\left[\frac{5}{6},1\right]\right) = \frac{1}{6}\times\frac{4}{3} = \frac{2}{9}.$$

Comme $P'(A\cap B) \neq P'(A)\times P'(B)$, il faut en conclure que A et B sont des évènements dépendants pour la loi de probabilité P'.

Nous voilà parvenus à nos fins : mettre en exergue, selon la formule particulièrement bien sentie emprunté à [4] (page 118), que :

La notion formelle d'indépendance d'événements[40] est une propriété numérique à l'intérieur d'un modèle probabiliste.

Mais, comme nous allons le voir dans la prochaine rubrique, s'arrêter à ce seul constat (qui fait trop souvent l'objet " d'exercices " dont la pertinence reste à deviner) serait amoindrir la compréhension de la notion d'indépendance.

➢ Tirages indépendants

• En ce qui concerne l'entendement naïf de l'expression "*tirer deux réels au hasard dans* $[0,1]$ *indépendamment l'un de l'autre*", on est prié de croire que nul ne serait en mal de vocabulaire. Une fois concédé[41] que tirer au hasard un réel dans $[0,1]$, c'est adopter le modèle uniforme sur $[0,1]$, viendrait sûrement l'une de ces tournures visant à exprimer que le résultat d'un tirage "n'influe pas" sur le résultat de l'autre, chacun ayant libre cours de piocher dans la copieuse liste d'expressions avoisinantes :

$$\text{Le résultat de l'un} \begin{cases} \text{n'a aucun effet...} \\ \text{ne déteint pas...} \\ \text{est sans conséquence...} \\ \text{n'a aucune répercussion...} \\ \text{etc....} \end{cases} \text{sur le résultat de l'autre}$$

sans oublier le pléonasme : « Le résultat de l'un ne dépend pas du résultat de l'autre ».

---

[40] On dit également « indépendance stochastique ».

[41] Ce qui a été fait.

Ce discours railleur dans la forme l'est beaucoup moins dans le fond, car il existe une vraie difficulté à définir proprement la notion d'expériences aléatoires identiques et indépendantes (voir par exemple [4], pages 122 et 123) où est engagé le pari d'une explication clarifiante sur ce point).

• C'est l'une des raisons[42] pour lesquelles nous différons au chapitre 4 : " Modélisation ", l'énoncé de la propriété :

« **Choisir au hasard deux réels** x **et** y **dans** $[0,1]$ **indépendamment l'un de l'autre signifie que l'on choisit un point** $M(x,y)$ **dans le carré** $[0,1]\times[0,1]$ **selon la loi uniforme dans ce carré.** »

Nous retiendrons pour l'instant que ce modèle est construit de telle sorte que les variables aléatoires "abscisse" et "ordonnée" soient indépendantes[43].

En d'autre termes et de manière plus générale, choisir n réels $x_1, x_2, \ldots, x_n$ au hasard dans un intervalle borné I de $\mathbb{R}$, indépendamment les uns des autres, signifie que :

1° Chacun des réels $x_1, x_2, \ldots, x_n$ **est choisi aléatoirement dans** I**, selon la loi uniforme de cet intervalle.**

2° Pour tous intervalles $I_1, I_2, \ldots, I_n$ **de** I**, la probabilité de l'événement «** $x_1 \in I_1$ **et** $x_2 \in I_2$ **...et** $x_n \in I_n$ **» est égale au produit des événements** $(x_1 \in I_1)$, $(x_2 \in I_2)$, ... $(x_n \in I_n)$.

Exemple

Trois personnes ont rendez vous en un lieu entre 12 heures et 13 heures. Les instants d'arrivée sont supposés être choisis au hasard entre 12 h et 13 h, indépendamment les uns des autres. Quelle est la probabilité que le dernier arrivé soit arrivé entre 12 h 30 et 12 h 45 ?

Retenons l'heure comme unité de temps et désignons par $12+t_1$, $12+t_2$, $12+t_3$ les heures d'arrivée respectives des trois personnes, avec t_1, t_2 et t_3 dans $[0,1]$.

L'heure d'arrivée du plus tardif étant $12+\max(t_1,t_2,t_3)$, notre problème peut donc être formulé ainsi :

Soit trois réels t_1, t_2, t_3 *pris au hasard dans* $[0,1]$, *indépendamment les uns des autres. Quelle est la probabilité que* $\frac{1}{2} \leq \max(t_1,t_2,t_3) \leq \frac{3}{4}$?

Considérons pour cela l'événement A_t défini par :

$A_t =$ « $\max(t_1,t_2,t_3) \leq t$ » où t est un réel fixé de $[0,1]$.

---

[42] La simple lecture du chapitre 4 fera aisément deviner les autres.

[43] Voir l'exercice 2.40.

De l'équivalence $\max(t_1,t_2,t_3)\le t \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 \le t \\ t_2 \le t \\ t_3 \le t \end{cases}$, nous tirons que l'événement A_t n'est autre que l'événement[44] : $(t_1 \in [0,t]$ et $t_2 \in [0,t]$ et $t_3 \in [0,t])$.

Les nombres t_1, t_2 et t_3 étant choisis au hasard dans $[0,1]$ (i.e. selon la loi uniforme de $[0,1]$), la probabilité de chacun des événements $(t_1 \in [0,t])$, $(t_2 \in [0,t])$ et $(t_3 \in [0,t])$ est égale à t.

L'indépendance (affirmée dans l'énoncé) des tirages des réels t_1, t_2 et t_3 assure, d'après ce qui précède, que la probabilité de A_t est égale au produit des ces trois probabilités, autrement dit que $\mathbb{P}(A_t)=t^3$.

Note **:** On obtiendrait de la même manière que la probabilité de l'événement : "$\max(t_1,t_2,t_3)<t$" (avec inégalité stricte) est aussi égale à t^3.

Revenons à notre problème en observant que :

$\left(\max(t_1,t_2,t_3)\le\frac{3}{4}\right)=\left(\max(t_1,t_2,t_3)<\frac{1}{2}\right)\uplus\left(\frac{1}{2}\le\max(t_1,t_2,t_3)\le\frac{3}{4}\right)$, tout en notant au passage que le symbole $\uplus$ signifie que la réunion considérée est disjointe.

En découle que la probabilité de l'événement $\left(\frac{1}{2}\le\max(t_1,t_2,t_3)\le\frac{3}{4}\right)$ est calculée par la différence des probabilités des événements $\left(\max(t_1,t_2,t_3)\le\frac{3}{4}\right)$ et $\left(\max(t_1,t_2,t_3)<\frac{1}{2}\right)$. Compte tenu des résultats précédemment obtenus, il vient :

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{2}\le\max(t_1,t_2,t_3)\le\frac{3}{4}\right)=\left(\frac{3}{4}\right)^3-\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{19}{64} \text{ (29,7 % environ).}$$

Remarques

1. Aucune des lourdeurs de la résolution n'a été épargnée au lecteur, selon un choix délibéré de notre part, manière de l'alerter sur l'affluence de méandres à parcourir dans le moindre recoin par un débutant...

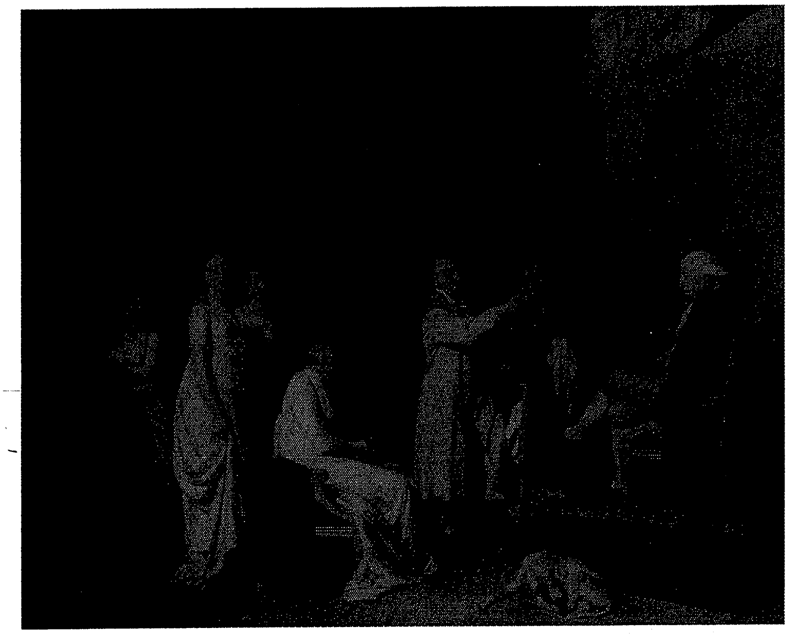
2. Comme nous le verrons dans le chapitre 3, l'introduction de la variable aléatoire $T=\max(t_1,t_2,t_3)$ et l'utilisation avisée de sa fonction de répartition offrent une traverse avantageuse.

[44] On pourrait le noter $\bigcap_{i=1}^{3}(t_i \in [0,t])$; cette commodité sera adoptée dans la suite.

➢ Avec un générateur de nombres aléatoires

Nous considèrerons que les tirages de réels dans $[0,1[$ à l'aide de la fonction **Alea()** sont des tirages indépendants, quand bien même les principales méthodes mises en œuvre pour engendrer des nombres (pseudo) aléatoires laissent clairement entrevoir qu'il n'en est rien du point de vue théorique[45].

Mais parce que cette dépendance est infime, voire insignifiante et de plus, imperceptible, impalpable dans la pratique, c'est en vain que l'on se refuserait le luxe vraiment inoffensif de passer outre (quitte à ne rien avouer de cette histoire aux puristes d'avance récalcitrants à l'idée de cohabiter avec une telle " anomalie "...).



Pierre-Simon de LAPLACE (1749-1827) (et sa famille)[46]

« (...) *dans le petit nombre des choses que nous pouvons savoir avec certitude (...), les principaux moyens de parvenir à la vérité se fondent sur les probabilités.* »

(Essai philosophique sur les probabilités 1825)

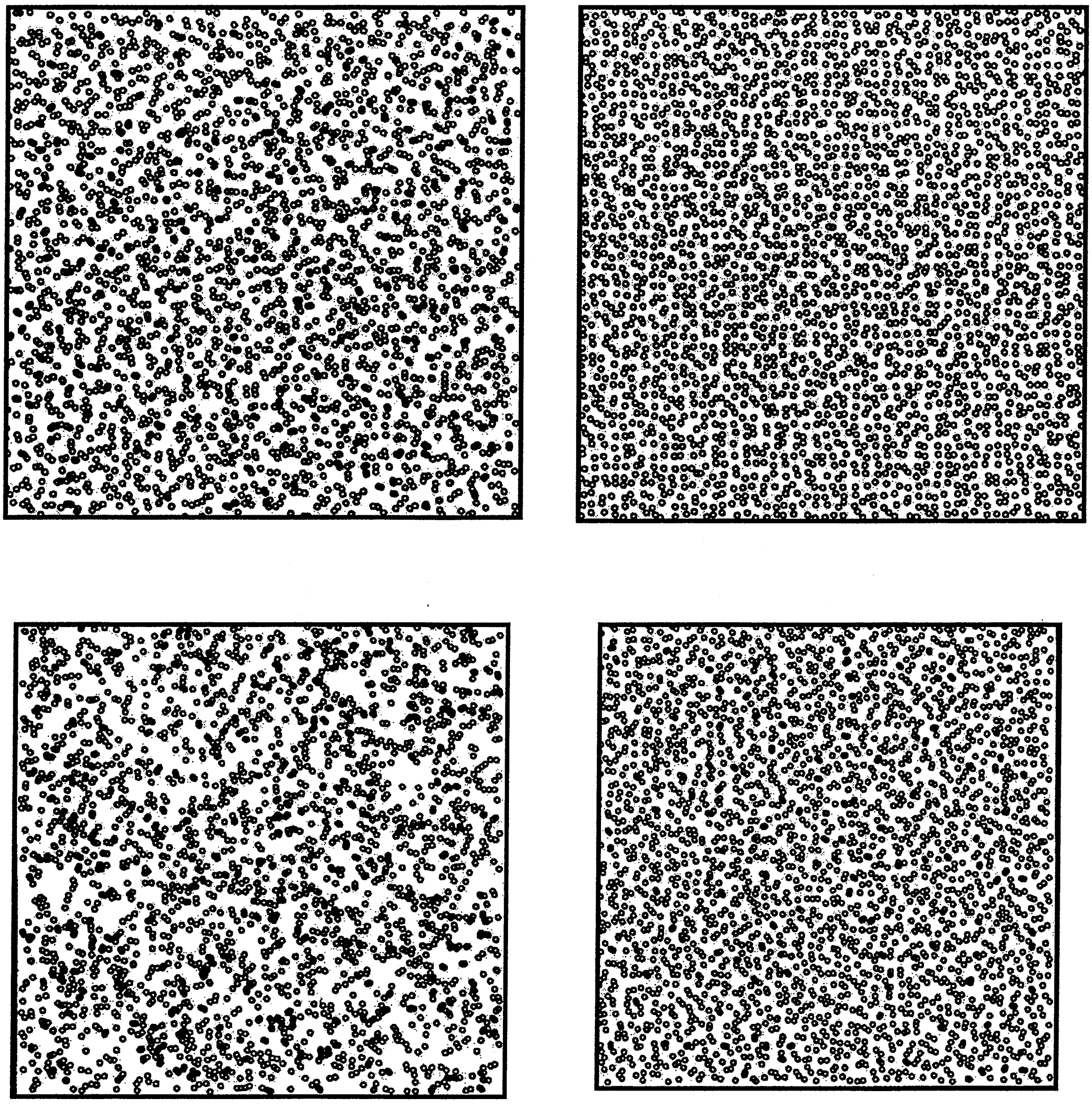
[45] Voir par exemple l'article de Bernard PARZYSZ ([30]) " Quelques questions à propos des tables et des générateurs aléatoires " (à paraître dans " Probabilités au lycée " COMMISSION INTER-IREM " Statistique et Probabilités ").

[46] Peints par Louis Léopold BOILLY dans l'atelier du sculpteur HOUDON.

Détente

Où est la loi uniforme ?

(*900 points dans un carré*)



3- Exercices

Quatre thèmes balisent le parcours :

- **Thème 1** « *Loi uniforme sur un intervalle de* $\mathbb{R}$ *ou sur un segment géométrique* »
  (exercices 2-1 à 2-16)
  Il s'agit de combler une première nécessité : *familiariser* avec les modes de calcul de probabilités uniformes en dimension 1, déduction faite de toute surenchère probabiliste : probabilités conditionnelles, évènements indépendants, etc..

- **Thème 2** « *Loi uniforme sur un intervalle et conditionnement* »
  (exercices 2-17 à 2-22)
  Signalons l'exercice 2-22 où s'annonce musclée la cohabitation entre loi uniforme sur $[0,1]$ et les probabilités conditionnelles…

- **Thème 3** « *Tirages indépendants et loi uniforme* »
  (exercices 2-23 à 2-32)
  La propriété mise en évidence au paragraphe 2-2-3 et l'exemple qui l'accompagne seront nos références : nous voulons dire qu'il n'est pas fait appel, pour l'instant, à " l'identification " de tirages au hasard de réels de $[0,1]$ indépendamment les uns des autres au tirage d'un point dans le carré $[0,1]^2$ (ou le cube $[0,1]^3$) selon la loi uniforme .

- **Thème 4** « *Loi uniforme sur divers domaines géométriques* »
  (exercices 2-33 à 2-41)
  À savoir pour l'essentiel : le carré, le cube, le cercle et le disque.

Note préliminaire

Rappelons les conventions adoptées dans cet ouvrage :

- *Choisir un réel au hasard dans un intervalle* $[a,b]$ *(ou sur un segment* $[AB]$*,...) signifie qu'un tel choix s'effectue selon la loi uniforme de l'intervalle* $[a,b]$ *(ou du segment* $[AB]$ *,...)*
- *Une telle loi de probabilité est notée* $\mathcal{U}_{[a,b]}$ *(ou* $\mathcal{U}_{[AB]}$*,...) ou plus simplement* $\mathcal{U}$ *lorsque aucune ambiguïté n'est à craindre sur le domaine de référence.*

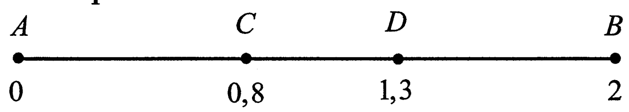
De telles clauses en vigueur dans tous les exercices ne seront par répétées.

Exercice 2-1

On choisit un point M au hasard sur le segment $[AB]$ ci-dessous.

Quelle est la probabilité que M soit :

- **à égale distance de C et D ?**
- **plus près de C que de D ?**



Solution

Nous désignons par I le milieu de $[CD]$.

- L'événement : « M est à égale distance de C et de D » n'est autre que l'issue ponctuelle « M est le milieu de $[CD]$ » de probabilité nulle.
- L'événement : « M est plus près de C que de D » n'est autre que l'événement « M appartient à $[AI]$ » dont la probabilité est calculée par :

$$\mathcal{U}_{[AB]}([AI]) = \frac{AI}{AB} = \frac{1,05}{2} = 0,525.$$

Exercice 2-2

On choisit un point M au hasard sur le segment $[AB]$ ci-dessous.

Quelle est la probabilité que M soit plus près d'un point marqué × que d'un point marqué • ?

Solution

Soit E l'événement : « M est plus près d'un point × que d'un point • ».

Introduisons le milieu I de $[AC]$ et le milieu J de $[BD]$.

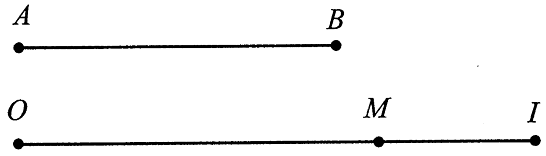
Il est géométriquement évident que E est la réunion des segments disjoints $[AI]$ et $[JB]$, d'où : $\mathbb{P}(E) = \mathcal{U}([AI] \cup [JB]) = \mathcal{U}([AI]) + \mathcal{U}([JB]) = \frac{0,9}{3} + \frac{0,3}{3} = 0,4$.

Exercice 2-3

On considère un segment $[AB]$ de longueur ℓ $(0<\ell<1)$ et un segment $[OI]$ de longueur 1. On choisit un point M au hasard sur $[OI]$.

Quelle est la probabilité de l'événement E :

« on peut construire un triangle de côtés OM, IM et AB » ?



Solution

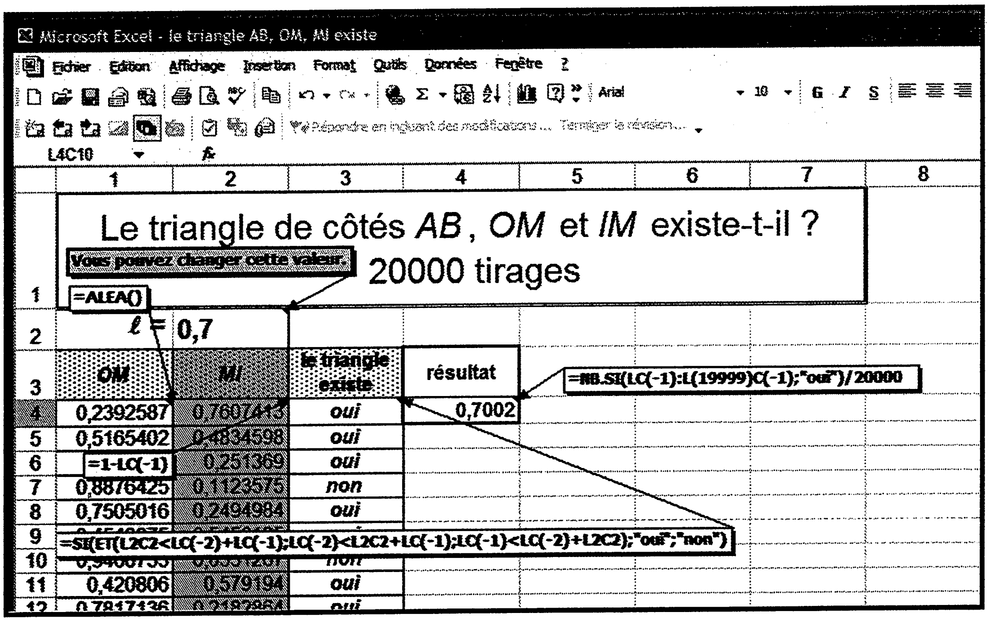
On note x la longueur OM : x suit donc la loi uniforme $\mathcal{U}_{[0,1]}$.

L'événement E est réalisé si et seulement si le point M vérifie $\begin{cases} OM+IM>AB \\ OM+AB>IM \\ IM+AB>OM \end{cases}$

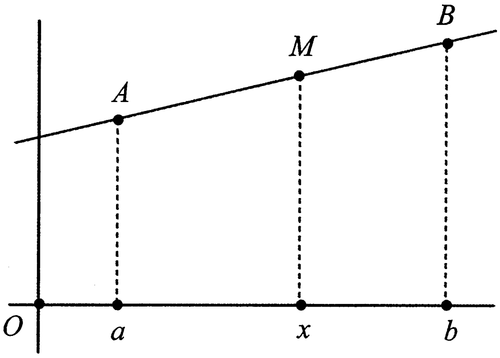
Ce système est équivalent à $\begin{cases} x+\ell>1-x \\ 1-x+\ell>x \end{cases}$ ou encore $\dfrac{1-\ell}{2}<x<\dfrac{1+\ell}{2}$.

Par suite, $\mathbb{P}(E)=\mathcal{U}_{[0,1]}\left(\left]\dfrac{1-\ell}{2},\dfrac{1+\ell}{2}\right[\right)=\ell$.

Simulation



Exercice 2-4



On choisit au hasard un point M sur $[AB]$.
Est-ce que x suit la loi uniforme sur $[a,b]$ (x est défini par la figure ci-contre) ?

Solution

Comme x est à valeurs dans $[a,b]$, considérons un réel z de $[a,b]$ et P le point de (AB) d'abscisse z.

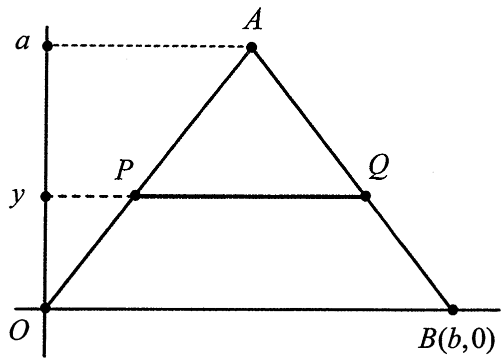
Dans ces conditions, $\mathbb{P}\big(x\in[a,z]\big)=\mathbb{P}\big(M\in[AP]\big)=\mathcal{U}_{[AB]}([AP])=\dfrac{AP}{AB}$.

Compte tenu de l'égalité $\dfrac{AP}{AB}=\dfrac{z-a}{b-a}$ (propriété élémentaire d'une projection de droite à droite), il vient :

$$\mathbb{P}\big(x\in[a,z]\big)=\mathcal{U}_{[a,b]}\big([a,z]\big).$$

L'abscisse x de M suit donc la loi uniforme sur $[a,b]$.

Exercice 2-5



On donne le triangle OAB de la figure ci-contre et y est pris au hasard dans $[0,a]$.

Quelle est la loi de la longueur ℓ du segment $[PQ]$?

Solution

- Avec les données de la figure on a :
  $\dfrac{PQ}{OB}=\dfrac{AP}{AO}$ (Théorème de Thalès) et $\dfrac{AP}{AO}=\dfrac{a-y}{a}$ (encore Thalès),
  d'où l'on déduit la relation $\dfrac{\ell}{b}=\dfrac{a-y}{a}$, soit $\ell=\dfrac{b}{a}(a-y)$.

- Par suite, pour un réel x donné de $[0,b]$, l'événement $(\ell\le x)$ n'est autre que :
  $$\left\{y\in[0,a]/\frac{b}{a}(a-y)\le x\right\}=\left\{y\in[0,a]/y\ge a-\frac{ax}{b}\right\}.$$
  La probabilité de l'événement $(\ell\le x)$ est donc :
  $$\mathcal{U}_{[0,a]}\left(\left[a-\frac{ax}{b},a\right]\right)=\frac{x}{b}=\mathcal{U}_{[0,b]}([0,x]).$$

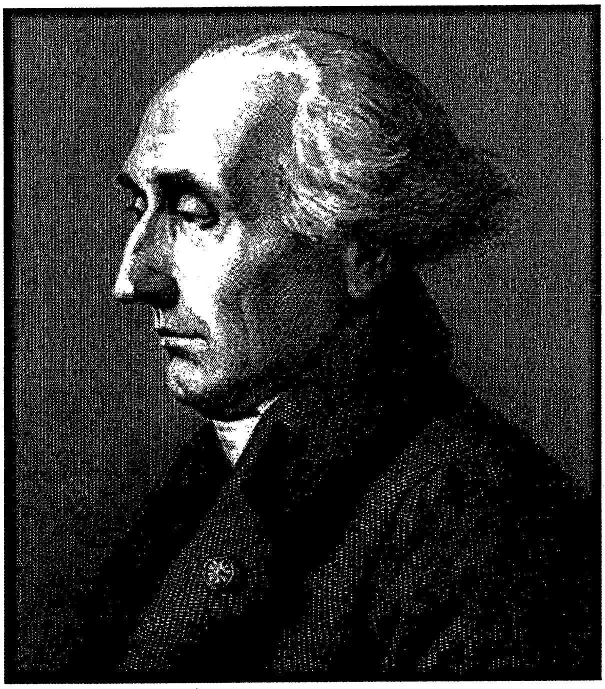
- **Conclusion** : la longueur ℓ suit la loi uniforme sur $[0,b]$.

Commentaire (Exercices 2-1 à 2-5)

Il s'agit d'enfoncer les premiers clous :

- dans le calcul de probabilités à l'aide d'une loi continue, en l'occurrence la loi uniforme : probabilité d'une issue ponctuelle, d'un intervalle, d'une réunion finie d'intervalles disjoints, etc. ;
- dans la démarche, en décrivant soigneusement l'événement considéré comme partie de l'intervalle référentiel muni de cette loi uniforme (les bonnes habitudes se prennent tôt…).

Signalons que dans les exercices 2-4 et 2-5 le recours à l'introduction de variables aléatoires ($X : M \mapsto$ abscisse de M dans l'exercice 2-4, $X : y \mapsto$ longueur de $[PQ]$ dans l'exercice 2-5) ne s'impose pas.



comte Louis LAGRANGE (1736-1813)

« *On estime la probabilité d'un événement par le nombre de cas favorables divisé par le nombre de cas possibles. La difficulté ne consiste que dans l'énumération des cas.* »

Exercice 2-6

On considère le carré $OIKJ$ de côté 1 et on choisit au hasard un réel r dans l'intervalle $\left[0,\sqrt{2}\right]$.

1° Quelle est la probabilité p de l'événement E :

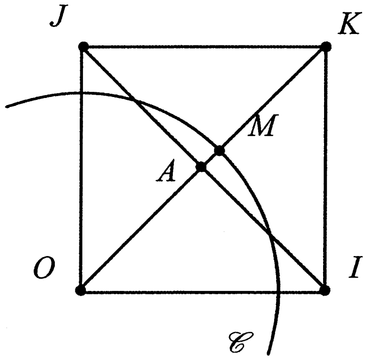
« le cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon r coupe la droite (IJ) » ?

2° Quelle est la probabilité q de l'événement F :

« le cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon r coupe le segment $[IJ]$ » ?

Solution

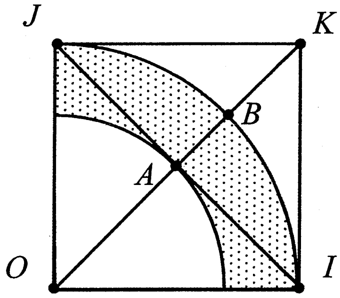
Choisir le réel r au hasard dans l'intervalle $\left[0,\sqrt{2}\right]$ revient à choisir un point M sur la diagonale $[OK]$ du carré selon la loi uniforme du segment $[OK]$. Le cercle $\mathscr{C}$ est donc le cercle aléatoire de centre O passant par un point M pris au hasard sur $[OK]$.



1° Le cercle $\mathscr{C}$ ainsi défini rencontre la droite (IJ)) si et seulement si le point M appartient au segment $[AK]$, où A est le centre du carré.

Par suite : $p=\mathcal{U}_{[OK]}([AK])=\dfrac{AK}{OK}=\dfrac{1}{2}$.

2° De même, le cercle $\mathscr{C}$ rencontre le segment $[IJ]$ si et seulement si le point M appartient au segment $[AB]$ défini par la figure ci-contre.



Avec $OA=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $OB=1$, d'où $AB=1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, nous avons

donc : $q=\mathcal{U}_{[OK]}([AB])=\dfrac{1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$.

Remarque : à l'évidence $q<p$; la nature est bien faite.

Commentaire

On ne s'étonnera pas de l'adoption du point de vue géométrique de préférence au point de vue algébrique que l'on pourrait résumer ainsi :

« La distance de O à la droite (IJ) est $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Par suite, le cercle de centre O et de rayon r rencontre la droite (IJ) si et seulement si $r>\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. D'où le calcul de $\mathbb{P}(E)$ à l'aide de la loi uniforme sur $\left[0,\sqrt{2}\right]$… »

La raison ? Il est presque toujours plus facile de mesurer ce qui se voit que ce qui ne se voit pas.

Le même problème avec M choisi au hasard dans le carré $OIKJ$ (déjà évoqué dans le chapitre 2 page 26) est l'objet de l'exercice 2-36.

Exercice 2-7

On choisit x au hasard dans $[0,4]$. Déterminer la probabilité de l'événement E : « l'intervalle $[x,x+0,5]$ ne contient aucun entier ».

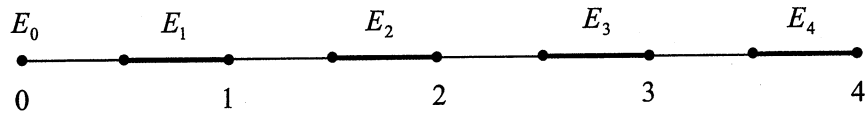
Solution

Comme l'intervalle $[x,x+0,5]$ contient au plus un entier, l'événement $\overline{E}$ est la réunion disjointe des événements E_n : « $[x,x+0,5]$ contient l'entier n », pour $n \in [\![0,4]\!]$.

- L'événement E_0 est réduit à $\{0\}$.
- Pour $n \in [\![1,4]\!]$,

  « $[x,x+0,5]$ contient l'entier n » signifie $(x \le n \le x+0,5)$ soit « $x \in [n-0,5;n]$ ».

  On peut alors donner une représentation graphique de $\overline{E}$:



Il s'ensuit que

$$\mathbb{P}(\overline{E}) = \mathcal{U}_{[0,4]}(\{0\} \cup [0,5\,;1] \cup [1,5\,;2] \cup [2,5\,;3] \cup [3,5\,;4])$$
$$= 0 + \frac{0,5}{4} + \frac{0,5}{4} + \frac{0,5}{4} + \frac{0,5}{4} = 0,5.$$

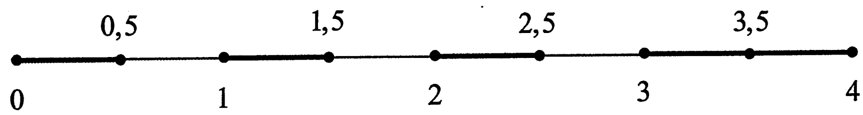
La probabilité de E est donc 0,5.

Exercice 2-8

On choisit x au hasard dans $[0,4]$.
Déterminer la probabilité de l'événement E : « l'intervalle $[x,x+1,5]$ contient au moins deux entiers ».

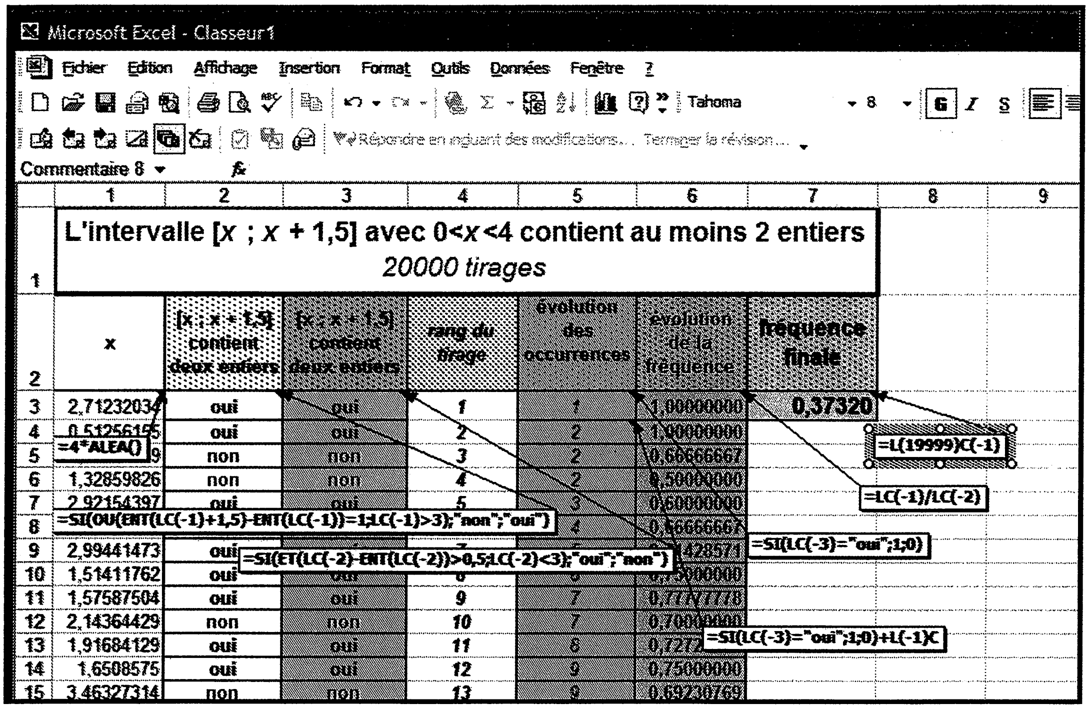
Solution

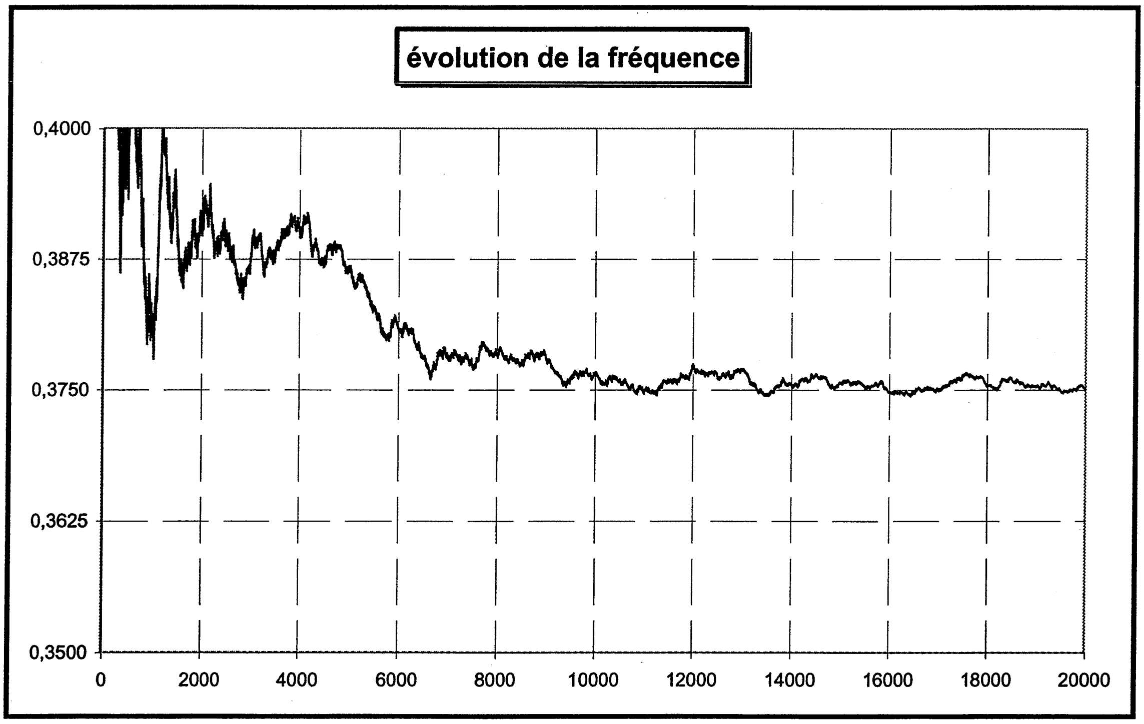
L'événement $\overline{E}$ est « l'intervalle $[x,x+1,5]$ contient au plus un entier ». En procédant comme à l'exercice 2-7 on obtient le schéma ci-après représentatif de $\overline{E}$:



Ainsi $\mathbb{P}(\overline{E}) = \mathcal{U}_{[0,4]}(]0;0,5[\cup]1;1,5[\cup]2;2,5[\cup]3,4]) = \frac{5}{8}$, d'où $\mathbb{P}(\mathrm{E}) = \frac{3}{8}$.

Simulation


Microsoft Excel - Classeur1
Fichier Edition Affichage Insertion Format Outils Données Fenêtre ?
L'intervalle [x ; x + 1,5] avec 0<x<4 contient au moins 2 entiers
20000 tirages
x
[x ; x + 1,5] contient deux entiers
[x ; x + 1,5] contient deux entiers
rang du tirage
évolution des occurrences
évolution de la fréquence
fréquence finale
0,37320
=4*ALEA()
=SI(OU(ENT(LC(-1)+1,5)-ENT(LC(-1))=1;LC(-1)>3);"non";"oui")
=SI(ET(LC(-2)-ENT(LC(-2))>0,5;LC(-2)<3);"oui";"non")
=L(19999)C(-1)
=LC(-1)/LC(-2)
=SI(LC(-3)="oui";1;0)
=SI(LC(-3)="oui";1;0)+L(-1)C


évolution de la fréquence
0,4000
0,3875
0,3750
0,3625
0,3500
0
2000
4000
6000
8000
10000
12000
14000
16000
18000
20000

Exercice 2-9

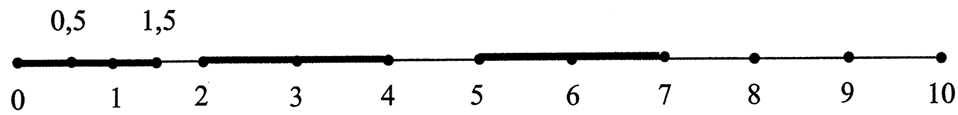
On choisit x au hasard dans $[0,10]$. Déterminer la probabilité l'événement E :
« l'intervalle $[x-1, x+1]$ ne contient aucun des nombres 0,5 ; 3 et 6. »

Solution

Parce que l'intervalle $[x-1, x+1]$ ne peut contenir plus d'un des nombres 0,5 ; 3 et 6, il est commode de considérer l'événement complémentaire $\overline{E}$:

« l'intervalle $[x-1, x+1]$ contient au moins l'un des nombres 0,5 ; 3 et 6 ». Alors :

$$x \in \overline{E} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \leq 0{,}5 \leq x+1 \\ \text{ou } x-1 \leq 3 \leq x+1 \\ \text{ou } x-1 \leq 6 \leq x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 1{,}5 \\ \text{ou } 2 \leq x \leq 4 \\ \text{ou } 5 \leq x \leq 7 \end{cases}$$, d'où la représentation de $\overline{E}$:



Par suite, $\mathbb{P}(\overline{E}) = \mathcal{U}([0;1{,}5] \cup [2,4] \cup [5,7]) = \dfrac{5{,}5}{10} = 0{,}55$.

Et donc, $\mathbb{P}(E) = 0{,}45$.

Commentaire (Exercices 2-7 à 2-9)

Seule nouveauté (on l'aura noté) : calcul de la probabilité du complémentaire.

Exercice 2-10

Soit x un réel fixé de $[0,1]$, on choisit y au hasard dans $[0,1]$.
Déterminer la probabilité que l'intervalle $[y, y+0{,}2]$ contienne x.

Solution

On désigne par E l'événement : « l'intervalle $[y, y+0{,}2]$ contient x ». Alors :

$$x \in [y, y+0{,}2] \Leftrightarrow y \leq x \leq y+0{,}2 \Leftrightarrow x-0{,}2 \leq y \leq x$$

Comme x appartient à $[0,1]$, deux cas sont à distinguer :

- $x < 0{,}2$, d'où $x-0{,}2 < 0$ et $\mathbb{P}(E) = \mathcal{U}_{[0,1]}([0,x]) = x$;
- $x \geq 0{,}2$, d'où $\mathbb{P}(E) = \mathcal{U}_{[0,1]}([x-0{,}2; x]) = 0{,}2$.

Commentaire

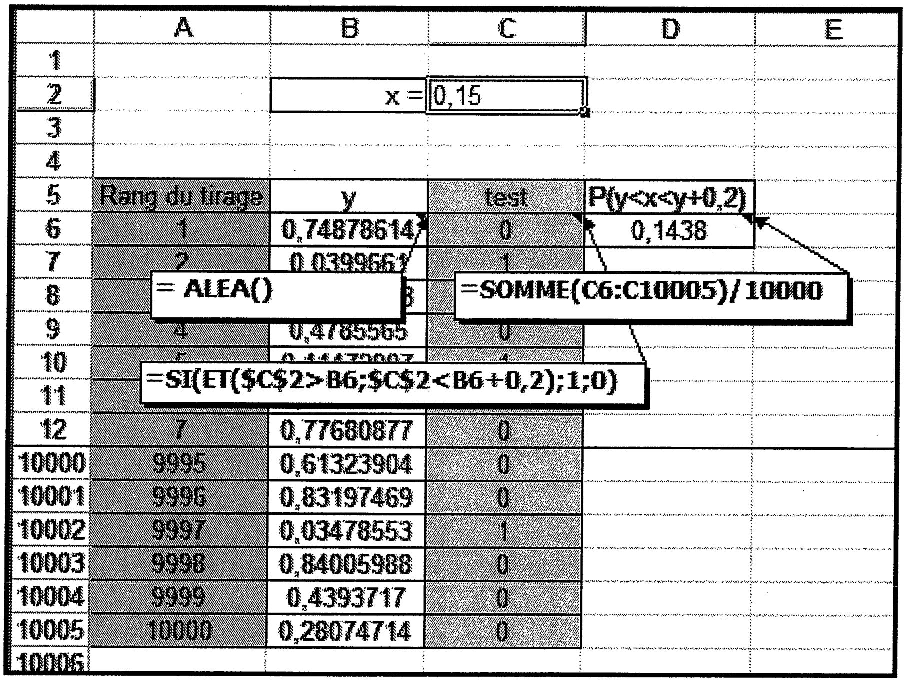
Une variante intéressante qui sera l'objet de l'exercice 4-6 est de considérer que le réel x n'est plus fixé, mais pris au hasard dans $[0,1]$.

Simulation :

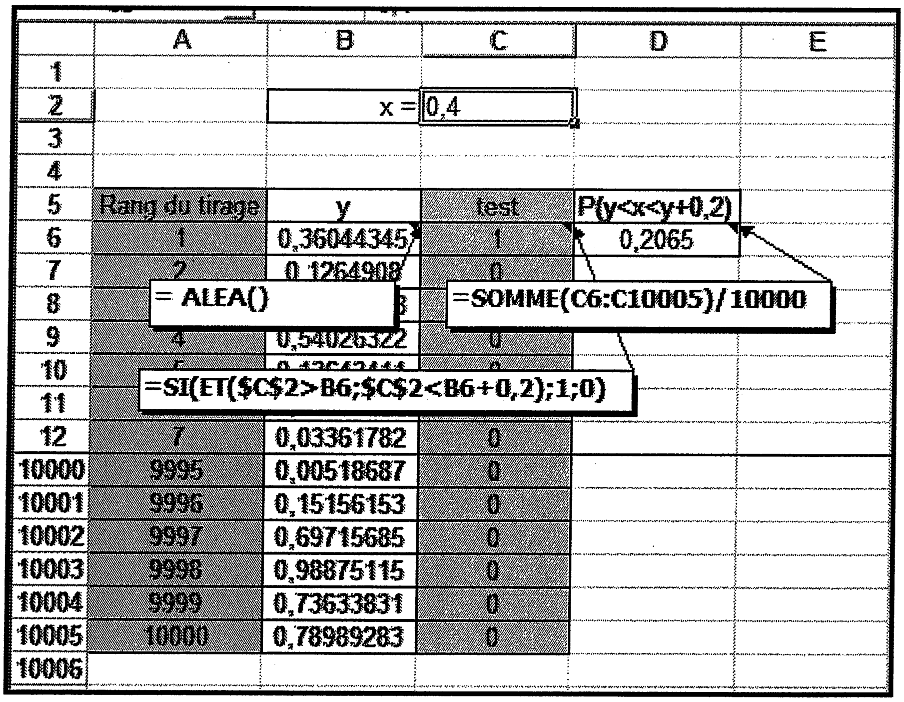
Soit x fixé dans $[0,1]$.

La feuille de calcul EXCEL ci-dessous permet de calculer la fréquence de l'événement $\left(x \in [y, y+0,2]\right)$ sur 10000 tirages de y.

Première copie d'écran : $0 \le x < 0,2$.



Deuxième copie d'écran : $0,2 \le x \le 1$.



Exercice 2-11

Soit n un entier naturel non nul .
On choisit un réel x au hasard dans $[0,1]$ et l'on pose $y = nx$.
Est ce que y suit la loi uniforme sur $[0,n]$?

Solution

Il est clair que y est à valeurs dans $[0,n]$.Soit donc $a \in [0,n]$.

L'événement $(0 \leq y \leq a)$ est $\{x \in [0,1] / 0 \leq nx \leq a\}$ soit $\left\{x \in [0,1] / 0 \leq x \leq \frac{a}{n}\right\}$.

Alors, $\mathbb{P}(0 \leq y \leq a) = \mathcal{U}_{[0,1]}\left(\left\{x \in [0,1] / 0 \leq x \leq \frac{a}{n}\right\}\right) = \mathcal{U}_{[0,1]}\left(\left[0, \frac{a}{n}\right]\right) = \frac{a}{n}$

Ainsi, $\mathbb{P}(0 \leq y \leq a) = \frac{a}{n} = \mathcal{U}_{[0,n]}([0,a])$: y suit la loi uniforme sur$[0,n]$.

Commentaire

Anticipons sur la notion de variable aléatoire en désignant par Y la variable aléatoire définie de $[0,1]$ dans $[0,n]$ par $x \mapsto nx$.
Nous venons simplement de constater que la probabilité de l'événement $(Y \leq a)$, qui n'est autre que $\mathcal{U}_{[0,1]}\left(Y^{-1}([0,a])\right)$ est égale à $\mathcal{U}_{[0,n]}([0,a])$; autrement dit, la loi de probabilité de la variable aléatoire Y est la loi uniforme sur $[0,n]$.

Exercice 2-12

Soit a et b deux réels tels que $a < b$.
On choisit un réel x au hasard dans $[0,1]$. On définit y par : $y = (b-a)x + a$
Est ce que y suit la loi uniforme sur $[a,b]$?

Solution

Reprenons presque mot à mot ce que nous avons dit sur ce sujet (voir page 43).
Soit $z \in [a,b]$; l'événement $(a \leq y \leq z)$ est égal à $\{x \in [0,1] / a \leq (b-a)x + a \leq z\}$ soit :

$$\left\{x \in [0,1] / 0 \leq x \leq \frac{z-a}{(b-a)}\right\}.$$

Alors la probabilité de l'événement $(a \leq y \leq z)$ est calculée par

$$\mathcal{U}_{[0,1]}\left(\frac{z-a}{b-a}\right) = \frac{z-a}{b-a} = \mathcal{U}_{[a,b]}([a,z]).$$

On peut donc conclure que y suit la loi uniforme sur $[a,b]$.

Exercice 2-13

Soit n un entier naturel non nul .
On choisit un réel x au hasard dans $[0,n]$ et l'on pose : $y=E(x)$ (partie entière de x).
Quelle est la loi de probabilité de y ?

Préliminaires

Rappelons que $E(x)$ désigne le plus grand entier inférieur ou égal à x, autrement dit l'unique entier k tel que : $k \leq x < k+1$.

Notons alors que $0 \leq x - E(x) < 1$ (ceci en vue de l'exercice 2-14).

Solution

Si $x \in [0,n]$ alors $y=E(x)$ est à valeurs dans $\{0,1,2,\cdots n\}$.

- Soit k un entier naturel tel que $k<n$. L'événement $(y=k)$ est égal à $\{x \in [0,n] / E(x)=k\}$, soit $\{x \in [0,n] \,/\, k \leq x < k+1\}$

  On a donc $\mathbb{P}(y=k) = \mathcal{U}_{[0,n]}([k,k+1[)$, puisque x suit la loi uniforme sur $[0,n]$.

  D'où $\mathbb{P}(y=k) = \dfrac{k}{n}$.

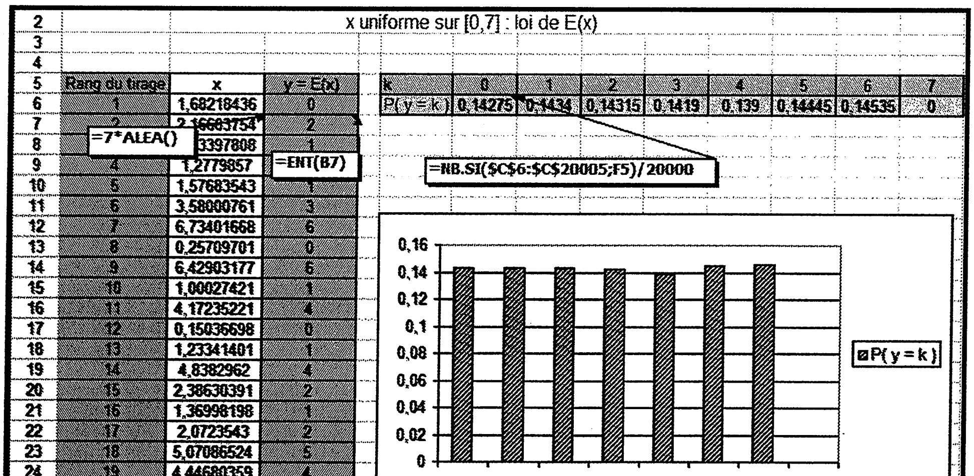
- Si $k=n$, l'événement $(y=n)$ est égal à $\{x \in [0,n] / E(x)=n\}$, soit l'événement $(x=n)$, de probabilité nulle.

Par suite, *la loi de probabilité de* y *est la loi équirépartie sur* $\{0,1,2,\cdots,n-1\}$.

Commentaire

Le fait de rencontrer une variable aléatoire discrète Y avec l'une des issues possibles $(Y=n)$ de probabilité nulle ne doit pas émouvoir outre mesure : cela résulte de la définition même de Y, d'un espace probabilisé ayant la puissance du continu, à valeurs dans un ensemble fini.

Simulation



Exercice 2-14

Soit n un entier naturel non nul.
On choisit un réel x au hasard dans $[0,n]$. On définit y par : $y = x - E(x)$.
Montrer que y suit la loi uniforme sur $[0,1]$.

Solution

D'après le préliminaire de l'exercice 2-13, nous savons que y est à valeurs dans $[0,1[$.
Soit $a \in [0,1[$. Par définition, l'événement :

$(0 \leq y \leq a)$ est égal à $\{x \in [0,n] / 0 \leq x - E(x) \leq a\}$ soit

$\{x \in [0,n] \;/\; E(x) \leq x \leq E(x) + a\}$ ou encore

$\{x \in [0,n] \;/ \exists k \in \{0,1,2,...,n-1\} / k \leq x \leq k+a\}$.

Ainsi $(0 \leq y \leq a)$ est la réunion des événements $(k \leq x < k+a)$ avec $k \in \{0,1,2,...,n-1\}$, événements disjoints deux à deux (car $0 \leq a < 1$).

Comme pour tout k de $\{0,1,2,...,n\}$, $\mathbb{P}(k \leq x < k+a) = \mathcal{U}_{[0,n]}([0,a]) = \dfrac{a}{n}$ (car x suit la loi uniforme sur $[0,n]$), on a : $\mathbb{P}(0 \leq y \leq a) = n \times \dfrac{a}{n} = a$.

Conclusion : y suit la loi uniforme sur $[0,1]$.

Exercice 2-15

Soit n un entier naturel non nul et a un réel tel que $0 < a < 1$.
On choisit x au hasard dans $[0,n]$, quelle est la probabilité que $[x, x+a]$ ne contienne aucun entier ?

Solution

Soit F l'événement « $[x, x+a]$ ne contient aucun entier ».
Comme $0 < a < 1$, l'intervalle $[x, x+a]$ contient au plus un entier.
L'événement contraire $\overline{F}$ est donc la réunion disjointe des événements $(k \in [x, x+a])$ quand k varie de 0 à n.
Avec les égalités suivantes : $(k \in [x, x+a]) = (x \leq k \leq x+a) = (k - a \leq x \leq k)$,
L'événement $\overline{F}$ est la réunion disjointe des événements $((k-a \leq x \leq k)$, où k varie de 0 à n.

Autrement dit : $\overline{F} = \{0\} \cup \left(\bigcup\limits_{k=1}^{n} [k-a, k] \right)$.

La probabilité uniforme de $\overline{F}$ est donc égale à $0 + \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{a}{n} = a$.

Par suite, *la probabilité de F est* $1 - a$.

Exercice 2-16 *Loi de la $k^{ème}$ décimale*

Soit k un entier naturel non nul. On choisit un réel x au hasard dans $[0,1[$ et y désigne la $k^{\text{ième}}$ décimale de x, notée $D_k(x)$. On se propose de déterminer la loi de probabilité de y.

1° Résoudre le problème lorsque $k=1$.

2° a) Vérifier que $D_k(x)=D_1\left(10^{k-1}x\right)$.

b) Conclure .

☞ Les résultats des exercices 2-11, 13 et 14 sont les bienvenus.

Solution

1° Pour un réel x de $[0,1[$, la première décimale de x est la partie entière de $10x$.

Autrement dit : $\mathrm{D}_1(x)=E(10x)$.

D'après l'exercice 2-11, si x suit la loi uniforme sur $[0,1]$ alors $10x$ suit la loi uniforme sur $[0,10]$ et par ailleurs, $E(10x)$ suit la loi équirépartie sur $\{0,1,2,\cdots,9\}$ (d'après l'exercice 2-13).

2° a) Soit x d'écriture décimale $\overline{0,a_1a_2a_3........a_{k-1}a_ka_{k+1}........}$.

Alors on a : $10^{k-1}x=\overline{a_1a_2a_3........a_{k-1},a_ka_{k+1}........}$

$E\left(10^{k-1}x\right)=\overline{a_1a_2\cdots a_{k-1}}$

$10^{k-1}x-E\left(10^{k-1}x\right)=\overline{0,a_ka_{k+1}\cdots}$, nombre dont la première décimale est la $k^{ème}$ décimale de x.

b) D'après les exercices 2-11 et 2-14, si x suit la loi uniforme sur $[0,1[$, alors $y=10^{k-1}x$ suit la loi uniforme sur $\left[0,10^{k-1}\right[$, $y-E(y)$ suit la loi uniforme sur $[0,1[$ et donc d'après la question 1°, $D_1(y)$ suit la loi équirépartie sur $\{0,1,2,\cdots,9\}$.

Conclusion : $D_k(y)$ suit la loi équirépartie sur $\{0,1,2,\cdots,9\}$.

Commentaires

1- Au menu de cet exercice : écriture décimale d'un réel, partie entière, lois uniformes, loi équirépartie, etc. ; il ne fait pas partie du tout venant.

2- La démonstration ci-dessus en sous-tend une autre mathématiquement inattaquable (mais en dehors des capacités des élèves), car basée sur la notion d'écriture décimale.

A savoir :

$$x=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{10^n}\ ;$$

$$10^k x=\left(a_1 10^{k-1}+\cdots+a_{k-1}\right)+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_{k+n-1}}{10^n}\ ;$$

$$10^k x-E\left(10^k x\right)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_{k+n-1}}{10^n}\ ;$$

et enfin $D_1\left(10^k x-E\left(10^k x\right)\right)=a_k$.

3- *Une méthode combinatoire*

Elle consiste à montrer que $\mathbb{P}(D_k = n) = 0{,}1$ pour $n \in [\![0,9]\!]$. Voici les étapes pour établir par exemple que $\mathbb{P}(D_k = 4) = 0{,}1$.

- $D_k = 4$ si et seulement si il existe une $(k-1)$-liste $(a_1, \cdots, a_{k-1})$ de $\{0,1,2,\ldots 9\}$ telle que $\overline{0,a_1a_2\ldots a_{k-1}4} \le x < \overline{0,a_1a_2\ldots a_{k-1}5}$, c'est-à-dire que l'événement $D_k = 4$ est la réunion des intervalles $\left[\overline{0,a_1a_2\ldots a_{k-1}4}\,;\overline{0,a_1a_2\ldots a_{k-1}5}\right[$ quand $(a_1, \cdots, a_{k-1})$ décrit $\{0,1,2,\ldots 9\}^{k-1}$;
- les intervalles $\left[\overline{0,a_1a_2\ldots a_{k-1}4}\ ;\ \overline{0,a_1a_2\ldots a_{k-1}5}\right[$ sont disjoints ;
- ils sont au nombre de 10^{k-1} (nombre de $(k-1)$-listes $(a_1, \cdots, a_{k-1})$ de $\{0,1,2,\ldots 9\}$) ;
- ils ont tous la même probabilité : $\mathcal{U}_{[0,1]}\left(\left[\overline{0,a_1a_2\ldots a_{k-1}4}\ ;\ \overline{0,a_1a_2\ldots a_{k-1}5}\right[\right) = \dfrac{1}{10^k}$.

Finalement $\mathbb{P}(D_k = 4) = 10^{k-1} \times \dfrac{1}{10^k} = \dfrac{1}{10}$.

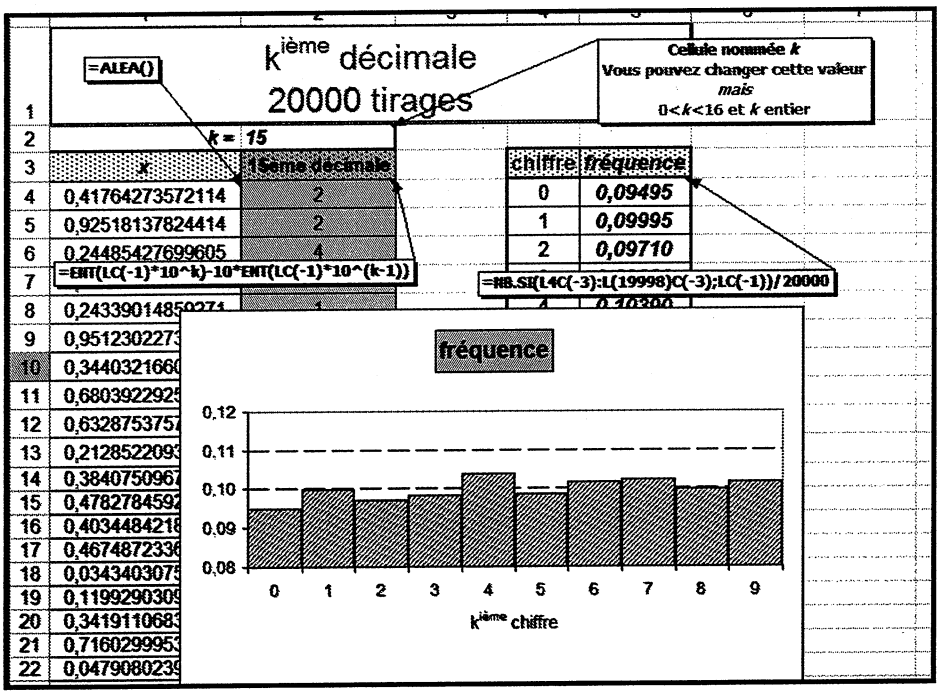
Ce raisonnement peut être reproduit pour calculer $\mathbb{P}(\mathrm{D}_k = n)$ pour tout n de $\{0,1,2,\ldots 8\}$.

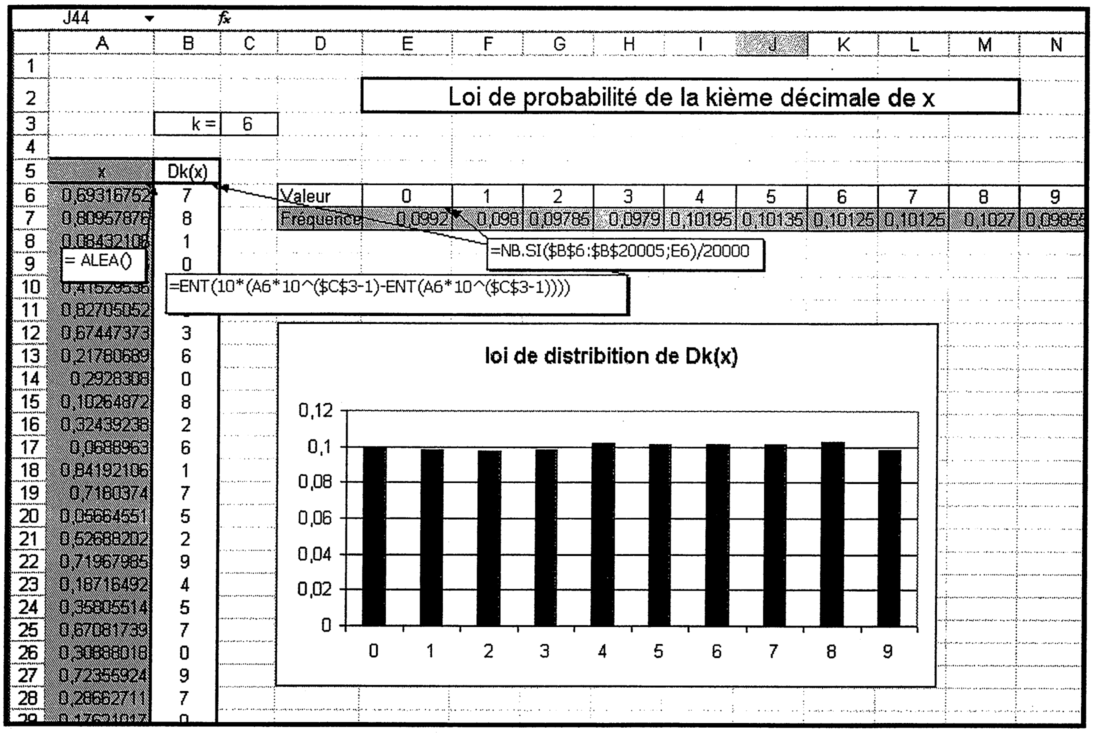
Pour $\mathbb{P}(\mathrm{D}_k = 9)$, faire intervenir les intervalles

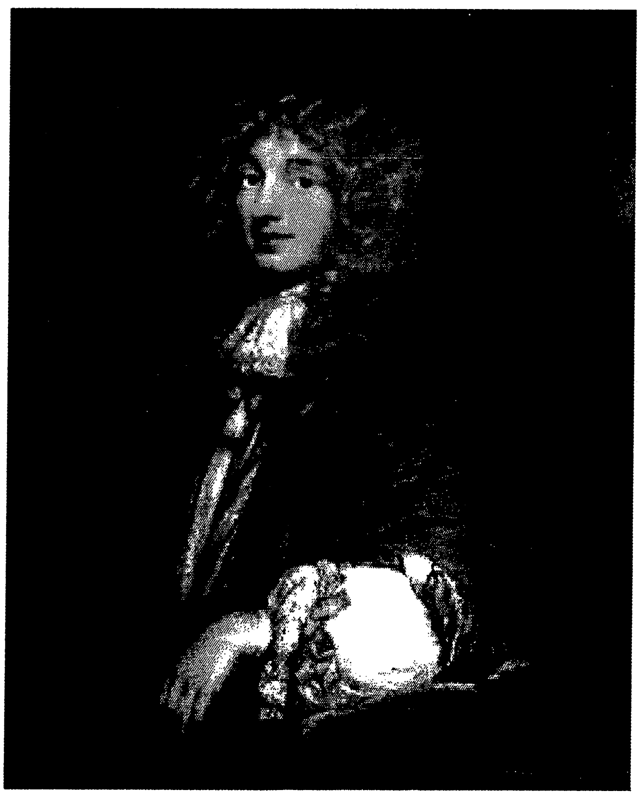
$$\left[\overline{0,a_1a_2\ldots a_{k-1}9}\ ;\ \overline{0,a_1a_2\ldots a_{k-1}9} + 10^{-k}\right[.$$

4- Dans la simulation que nous proposons ci-après, on notera que la formule qui définit la colonne $D_k(x)$ est celle utilisée dans la démonstration.

Simulation







Christiaan HUYGENS (1629-1695)

« *Quoique dans les jeux de hasard pur les résultats soient incertains, la chance qu'un joueur a de gagner ou de perdre a cependant une valeur déterminée* »

(Ratiocinüs in alea ludo 1657)

Exercice 2-17

On choisit un réel x au hasard dans $[0,1]$. On définit y par :

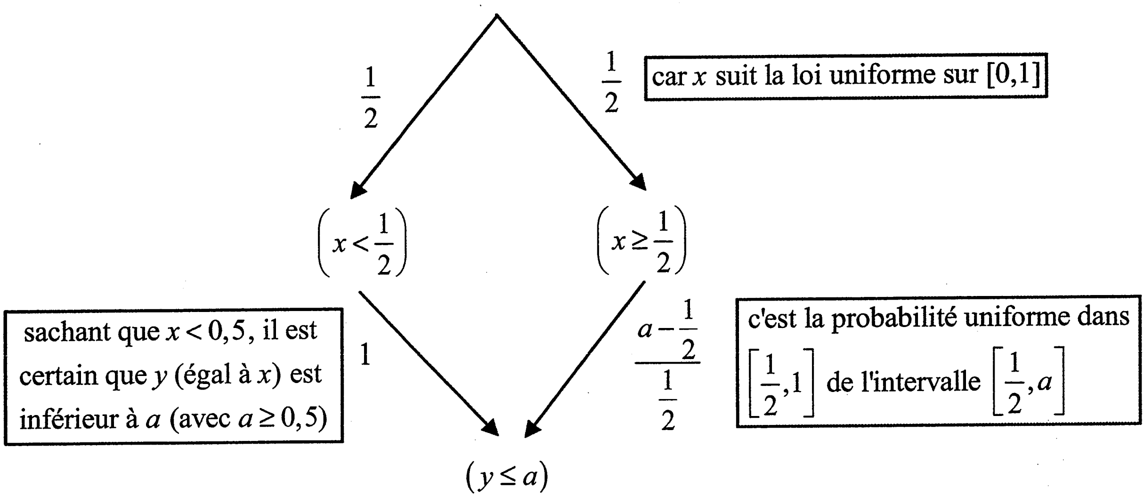
$$\begin{cases} \text{si } x<\dfrac{1}{2} \text{ alors } y=x\,; \\ \text{si } \dfrac{1}{2}\leq x\leq 1 \text{ on choisit } y \text{ au hasard dans } \left[\dfrac{1}{2},1\right]. \end{cases}$$

Est-ce que y suit la loi uniforme sur $[0,1]$?

Solution

Avec y manifestement à valeurs dans $[0,1]$, considérons un réel a de $[0,1]$:

- si $0\leq a<\dfrac{1}{2}$, $\mathbb{P}(y\leq a)=\mathbb{P}(0\leq x\leq a)=\mathcal{U}_{[0,1]}[0,a]=a$;
- si $\dfrac{1}{2}\leq a\leq 1$, construisons l'arbre suivant :



On a donc $\mathbb{P}(y\leq a)=\dfrac{1}{2}\times 1+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{a-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2}+a-\dfrac{1}{2}=a$

Finalement pour tout a de $[0,1]$, $\mathbb{P}(y\leq a)=a=\mathcal{U}_{[0,1]}([0,a])$.

Donc, *y suit la loi uniforme sur* $[0,1]$.

Commentaire

Les nombres x et y sont choisis au hasard dans $[0,1]$ et il est clair que la probabilité de l'événement ($x=y$) n'est pas nulle : elle est à l'évidence supérieure ou égale à $\dfrac{1}{2}$ (de fait égale à $\dfrac{1}{2}$).

En revanche, comme il sera vu dans le chapitre 4 (Paragraphe 1-3-2 page 157) si l'on suppose x et y choisis indépendamment l'un de l'autre, alors la probabilité de l'événément $(x=y)$ est égale à 0.

Exercice 2-18

On choisit un réel x au hasard dans $[0,1]$. Pour définir le réel y on réalise une épreuve de Bernoulli indépendante du choix de x dont les issues S et E ont pour probabilités respectives p et $q=1-p$:

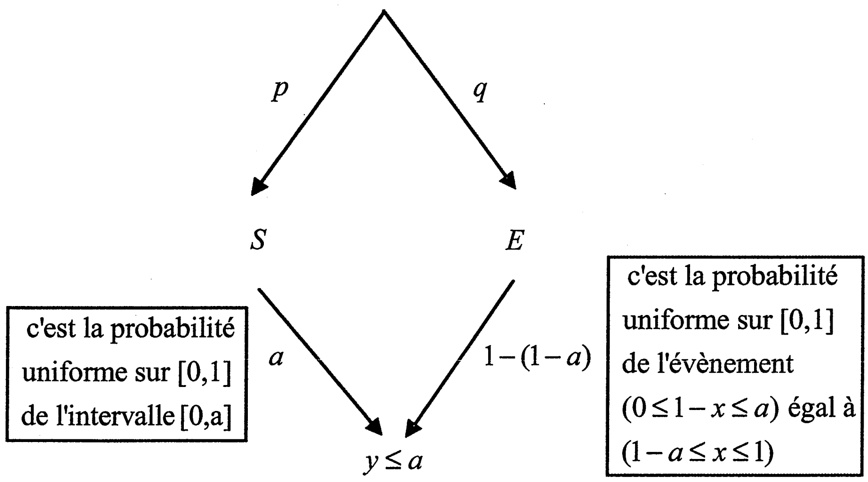
- **si l'issue est S alors $y=x$;**
- **si l'issue est E alors $y=1-x$.**

Est-ce-que y suit la loi uniforme sur $[0,1]$?

Solution

Après avoir observé que si x appartient à $[0,1]$, il en est de même de $1-x$, évaluons la probabilité de l'événement $(y \leq a)$ où a est un élément de $[0,1]$.

Pour cela construisons l'arbre suivant :



Ainsi, $\mathbb{P}(y \leq a) = p \times a + q \times a = (p+q) \times a = a$.
Donc, *y suit la loi uniforme sur* $[0,1]$.

Commentaire

Soit Z la variable aléatoire : $Z =$ « somme de x et de y ».
Désignant toujours par S et E les issues contraires de l'épreuve de Bernoulli, nous avons : $\mathbb{P}(Z=1) = \mathbb{P}\big((x+y=1)/S\big) \times \mathbb{P}(S) + \mathbb{P}\big((x+y=1)/E\big) \times \mathbb{P}(E)$.

Or, d'une part $\mathbb{P}\big((x+y=1)/S\big) = 0$ (il s'agit de la probabilité uniforme de l'issue ponctuelle $\left(x=\frac{1}{2}\right)$) et d'autre part $\mathbb{P}\big((x+y=1)/E\big) = 1$ (évident).

Par suite $\mathbb{P}(Z=1) = 0 \times p + 1 \times q = q$.

Ainsi, la variable aléatoire Z " charge " le point 1 : elle fait partie de cette " redoutable " catégorie de variables aléatoires ni discrètes, ni à densité.
(Cette remarque est destinée aux enseignants et à eux seuls.)

Exercice 2-19 *Rencontres conditionnées*

Deux personnes A et B ont rendez-vous en un lieu donné entre 12h et 13h.
La personne A arrive à 12h 30 et repart à 12h 45.
L'instant d'arrivée de la personne B est choisi au hasard entre 12h et 13h : elle attend un quart d'heure avant de repartir, sauf si elle est arrivée entre 12h 45 et 13h, auquel cas elle quitte les lieux à 13h.

1° Quelle est la probabilité que A et B se rencontrent sachant que, lorsque A arrive au lieu de rendez-vous (à 12h 30 donc), elle ne trouve personne ?

2° Quelle est la probabilité que A et B se rencontrent sachant que, lorsque B arrive au lieu de rendez-vous, elle ne trouve personne ?

Solution

1° On note E_1 l'événement « La rencontre a lieu » et E_2 l'événement « **B** n'est pas au lieu de rendez-vous à 12h30 ».

Il s'agit de calculer $\mathbb{P}(E_1 / E_2) = \dfrac{\mathbb{P}(E_1 \cap E_2)}{\mathbb{P}(E_2)}$.

L'événement $E_1 \cap E_2$ n'est autre que : « l'arrivée de **B** se situe entre 12h 30 et 12h 45 ».

Ainsi $\mathbb{P}(E_1 \cap E_2) = \dfrac{1}{4}$.

Quant à l'événement E_2 il signifie : « **B** arrive avant 12h 15 ou après 12h 30 ».

On a donc : $\mathbb{P}(E_2) = \dfrac{3}{4}$.

Par suite : $\mathbb{P}(E_1 / E_2) = \dfrac{1}{3}$.

2° En gardant les notations introduites dans la première question, désignons par E_3 l'événement : « **A** n'est pas au lieu de rendez-vous lorsque **B** arrive », ce que l'on peut exprimer par : « **B** arrive avant 12h 30 ou après 12h 45 ».

On a donc : $\mathbb{P}(E_3) = \dfrac{3}{4}$.

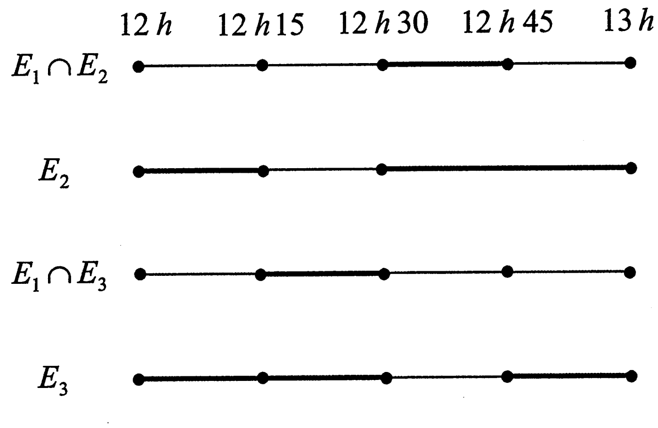
Quant à l'événement $E_1 \cap E_3$, il signifie que l'heure d'arrivée de **B** est dans l'intervalle [12h 15 , 12h 30], d'où $\mathbb{P}(E_1 \cap E_3) = \dfrac{1}{4}$.

On en déduit $\mathbb{P}(E_1 / E_3) = \dfrac{1}{3}$.

Commentaire

Un schéma analogue à celui présenté ci-contre nous semble faciliter la résolution de cet exercice, quand bien même celui-ci ne semble pas impénétrable.

Heure d'arrivée de **B**



Exercice 2-20 *Deviner le plus grand (Version 1, Stratégie 1)*

Soient a et b deux réels fixés dans $[0,1]$ et distincts. Chacun des nombres est inscrit dans une enveloppe. Le joueur doit deviner dans laquelle des enveloppes est inscrit le plus grand des deux nombres. Pour cela, il a le droit de choisir au hasard une des enveloppes et de prendre connaissance du nombre inscrit dans cette enveloppe (ce nombre sera appelé dans la suite « nombre lu »).

Le joueur adopte la stratégie suivante .

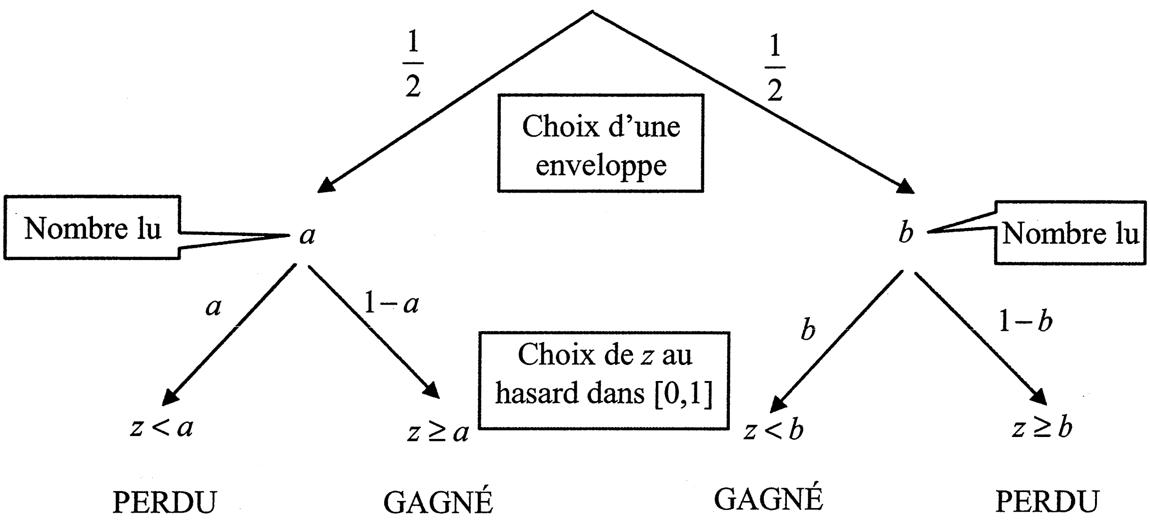
Il tire un nombre z au hasard dans $[0,1]$ et décide que :

- **si $z <$ « nombre lu », alors « nombre lu » est le plus grand ;**
- **si $z \geq$ « nombre lu », alors c'est l'autre nombre le plus grand .**

Calculer en fonction de a et b la probabilité P_1 de gagner avec cette stratégie.

Solution

- Supposons $a < b$ et construisons l'arbre pondéré suivant :



Donnons quelques explications sur la construction de l'arbre.

- Par exemple, lorsque " nombre lu " est a (c'est à dire le plus petit des deux nombres), pour gagner le joueur doit prendre l'autre nombre et cela se produit lorsqu'il tire un nombre z supérieur ou égal à a.
  La probabilité de gagner sachant que « nombre lu » $=a$ est donc $1-a$.
- On calcule de la même façon les autres probabilités conditionnelles.
  En conclusion, lorsque $a<b$, $P_1 = \frac{1}{2}\times(1-a)+\frac{1}{2}\times b = \frac{1}{2}+\frac{b-a}{2}$.

- Dans le cas où $b<a$ on a $P_1 = \frac{1}{2}+\frac{a-b}{2}$.

- *Dans tous les cas,* $P_1 = \frac{1}{2}+\frac{|b-a|}{2}$ (c'est mieux qu'en désignant systématiquement - par exemple - le « nombre lu » comme le plus grand).

Exercice 2-21 *Deviner le plus grand* (*Version 1, Stratégie 2*)

Les données sont identiques à celles de l'exercice 2-20, mais le joueur change de stratégie :

- **si « nombre lu » $\geq \frac{1}{2}$, alors il déclare que « nombre lu » est le plus grand ;**
- **si « nombre lu » $< \frac{1}{2}$, alors il déclare que l'autre nombre est le plus grand .**

Calculer en fonction de a et b la probabilité P_2 de gagner avec cette stratégie.

Solution Trois cas sont à examiner :

1er cas : $\frac{1}{2}$ *est compris entre a et b*

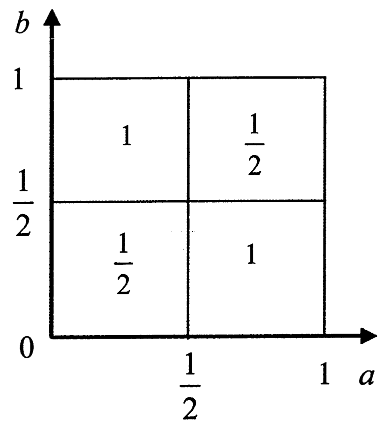
Le joueur gagne à tous les coups. En effet :

- si « nombre lu » est le plus petit des deux nombres, il est donc inférieur à $\frac{1}{2}$: le joueur change et il gagne ;
- si « nombre lu » est le plus grand des deux nombres, il est donc supérieur à $\frac{1}{2}$: le joueur ne change pas et il gagne encore.
  On a donc dans ce cas $P_2 = 1$.

2ème cas : *a et b sont tous deux inférieurs à* $\frac{1}{2}$.

Le joueur gagne si et seulement si « nombre lu » est le plus petit (car il change alors d'enveloppe), ce qui a une chance sur deux de se produire.

Et cette fois, $P_2 = \frac{1}{2}$.



3ème cas : *a et b sont tous deux supérieurs à* $\frac{1}{2}$.

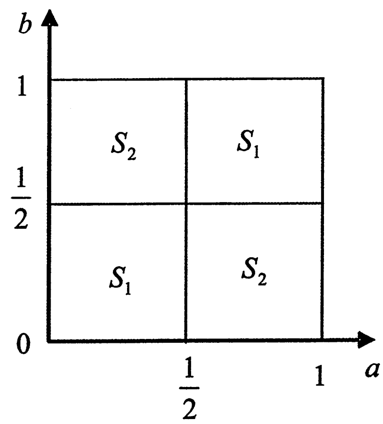
Le joueur gagne si et seulement si « nombre lu » est le plus grand (car il garde l'enveloppe), ce qui a une chance sur deux de se produire.

Là encore, on a : $P_2 = \frac{1}{2}$.

Le schéma ci-contre résume les résultats obtenus.

Commentaire

On compare les deux stratégies décrites dans les exercices 2-20 et 2-21.
Quelle est la meilleure stratégie ?



Lorsque $P_2 = 1$, on a évidemment $P_2 \geq P_1$,

et lorsque $P_2 = \frac{1}{2}$, on a $P_2 \leq \frac{1}{2} + \frac{|b-a|}{2} = P_1$.

D'où le schéma ci-contre qui indique en fonction de a et b la meilleure des stratégies S_1 ou S_2.

Exercice 2-22 *Le problème des enveloppes*

On dispose de deux enveloppes, et on choisit un réel x au hasard dans $[0,1]$.

- **Si $x<\dfrac{1}{2}$, on écrit x sur une feuille que l'on place dans l'une des enveloppes et $2x$ sur une autre feuille que l'on place dans la deuxième enveloppe.**
- **Si $x\geq\dfrac{1}{2}$, on écrit x sur une feuille que l'on place dans l'une des enveloppes et $\dfrac{x}{2}$ sur une autre feuille que l'on place dans la deuxième enveloppe.**

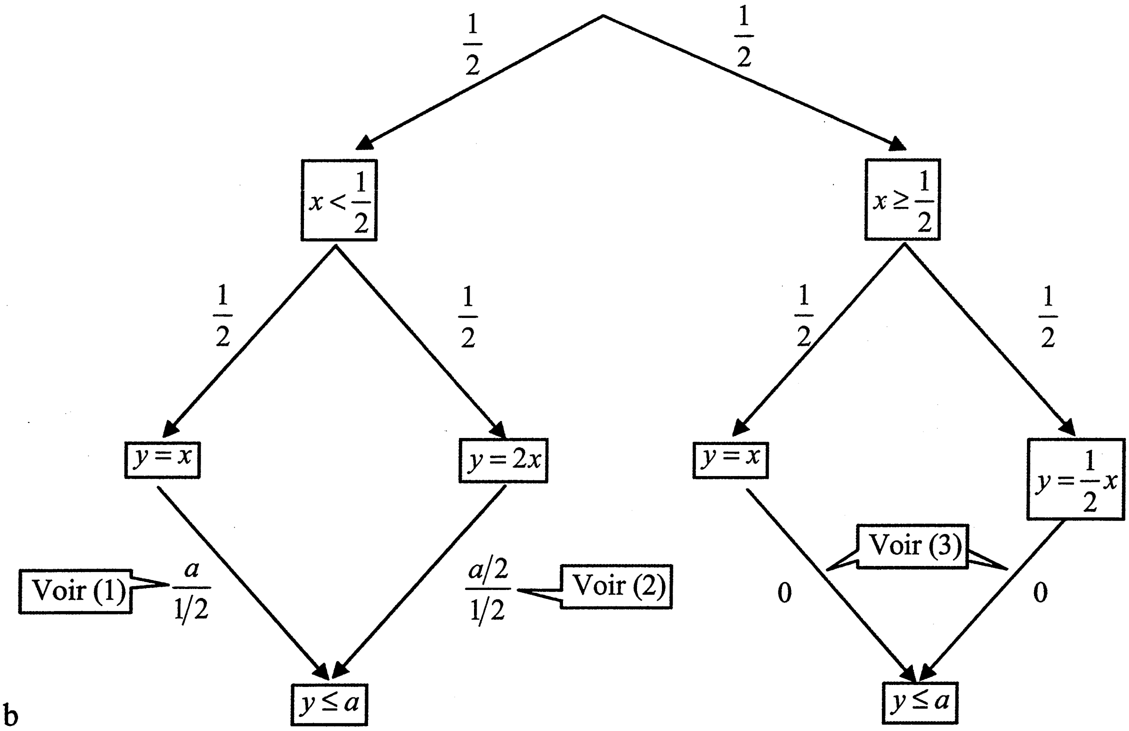
On tire une enveloppe au hasard. Quelle est la probabilité P_a que le nombre inscrit dans l'enveloppe choisie soit compris entre 0 et a (a fixé dans $[0,1]$) ?

Solution

Soit y le nombre inscrit dans l'enveloppe choisie.

Nous distinguerons trois cas : $0\leq a<\dfrac{1}{4}$, $\dfrac{1}{4}\leq a<\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{1}{2}\leq a\leq 1$.

1[er] cas : $0\leq a<\dfrac{1}{4}$



b

On a donc
$$P_a=\left(\frac{a}{\frac{1}{2}}\times\frac{1}{2}+\frac{\frac{a}{2}}{\frac{1}{2}}\times\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{2}=\frac{3a}{4}$$

Quelques explications :

- (1) et (2). Les probabilités sont calculées par la probabilité uniforme $\mathcal{U}_{\left[0,\frac{1}{2}\right]}$ de :

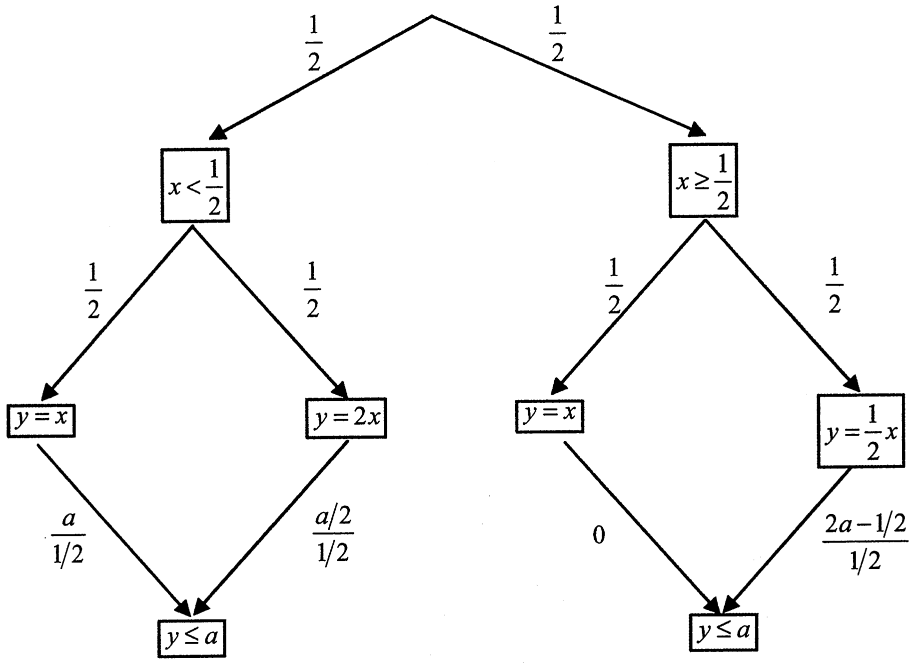
  - l'événement $(x\leq a)$ dans le cas (1) ;

- l'événement $(2x \leq a)$ soit $\left(x \leq \dfrac{a}{2}\right)$ dans le cas (2).

- (3) Lorsque $x \geq \dfrac{1}{2}$, x et $\dfrac{1}{2}$ sont plus grands que $\dfrac{1}{4}$ et donc plus grands que *a*.

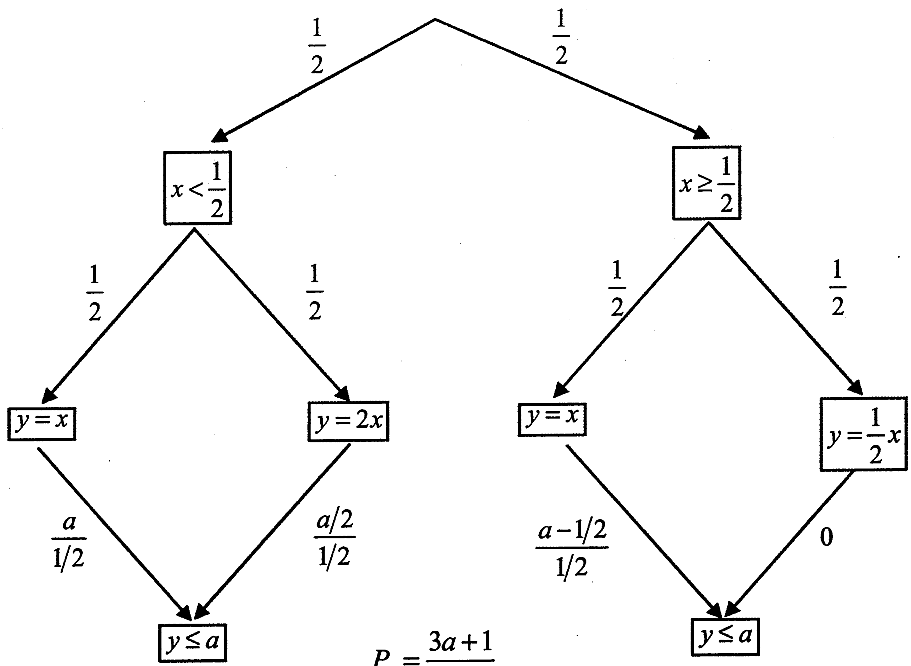
  Note : les deux cas suivants procèdent de la même démarche (le détail des calculs est abandonné au lecteur).

2ème cas : $\dfrac{1}{4} \leq a < \dfrac{1}{2}$



$$P_a = \frac{7a-1}{4}$$

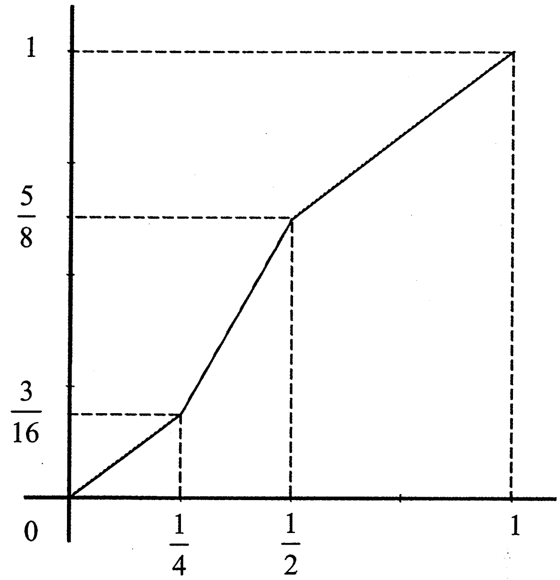
3ème cas : $\dfrac{1}{2} \leq a \leq 1$

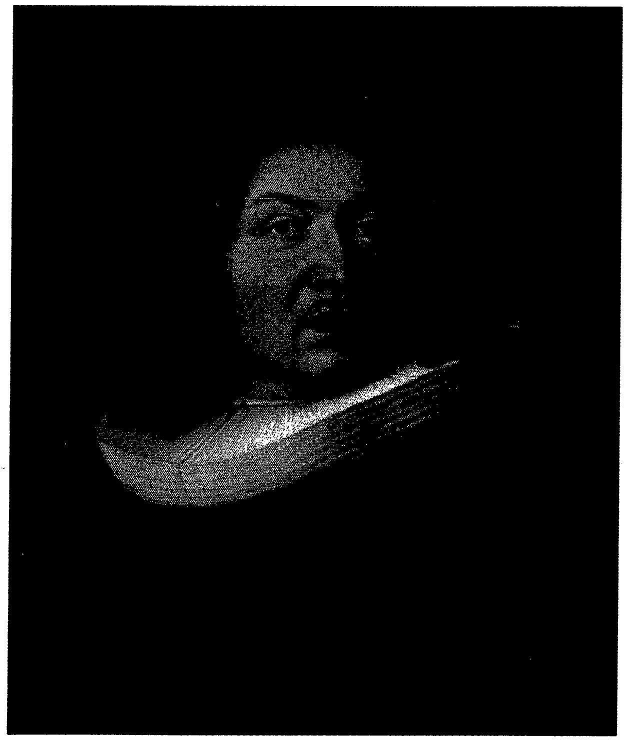


$$P_a = \frac{3a+1}{4}$$

Commentaire

La représentation de la fonction de répartition $a \mapsto F(a) = \mathbb{P}(X \leq a)$ laisse voir que nous n'obtenons pas une loi de probabilité à densité continue (car F n'est pas dérivable).





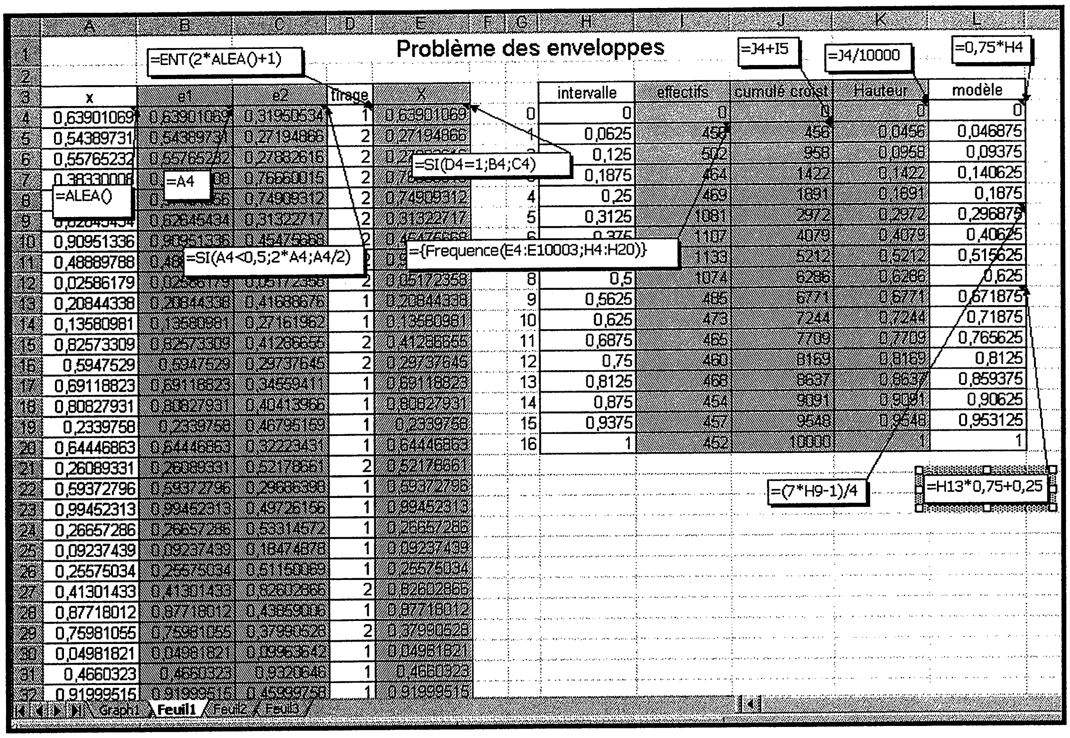
Jacques BERNOULLI (1654-1705)

« Pour éviter la fatigue d'une circonlocution, j'appellerai « féconds » ou « fertiles » les cas dans lesquels un événement peut se produire, et « stériles » ceux dans lesquels le même événement ne peut se produire. »

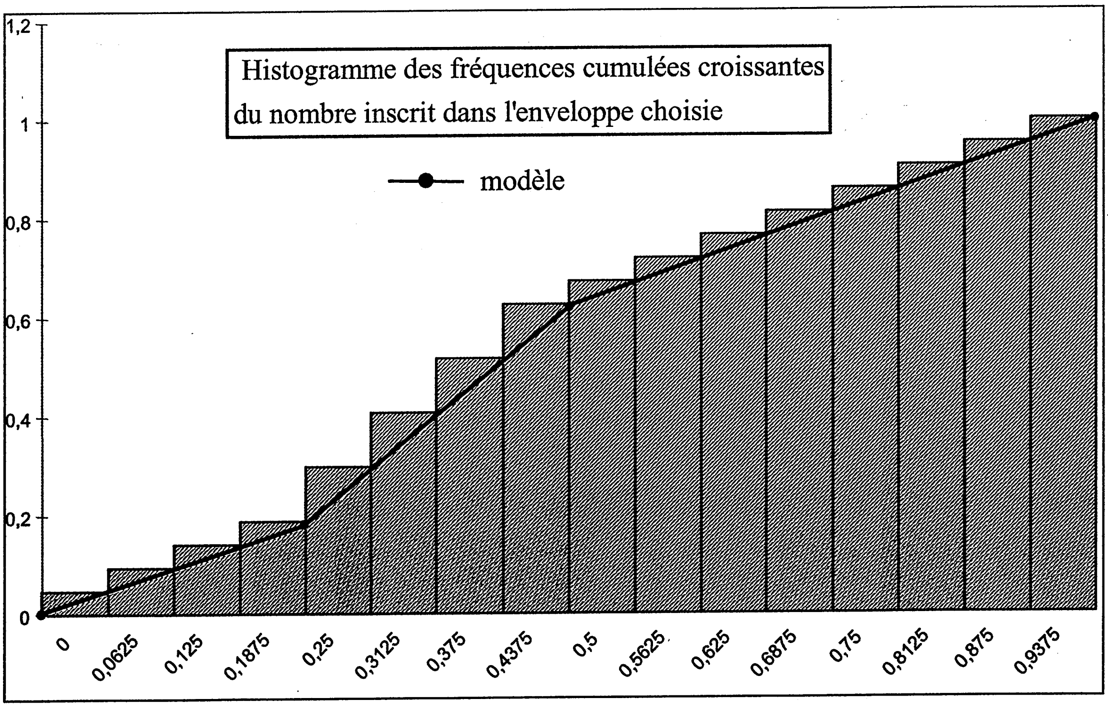
(Ars Conjectandi 1713)

Simulation

➢ Feuille de calcul utilisée dans la simulation



➢ Exemple de graphique obtenu par simulation.



Exercice 2-23 *Le salon de coiffure* (d'après [19])

Dans un salon de coiffure officient trois coiffeuses. Une cliente se présente à 11 heures et constate que les trois coiffeuses sont occupées et que deux personnes attendent leur tour. Chaque coupe dure une demi-heure et on fait l'hypothèse (faute de mieux) que les instants des débuts des coupes en cours sont indépendants les uns des autres et choisis au hasard entre 10h 30 et 11h.
Quelle est la probabilité que la cliente ressorte coiffée du salon avant 11h 45 ?

Solution
L'heure est choisie comme unité de temps.

Soit T la variable aléatoire : $T =$ “ temps d'attente de la cliente jusqu'au début de sa coupe ”.

Il est clair que T est à valeurs dans $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ et que la probabilité cherchée est celle de l'événement $\left(T \leq \frac{1}{4}\right)$.

De manière générale, pour $t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, l'événement $(T \leq t)$ signifie que :

> “ les trois coupes en cours sont achevées avant l'heure $11+t$ ”
> ou encore que :
> “ les trois coupes en cours ont débuté entre 10,5 et $10{,}5+t$ ”.

Pour chaque coiffeuse, la probabilité de l'événement “ la coupe en cours a commencé entre 10,5 et $10{,}5+t$ ”est calculée par $\frac{t}{1/2} = 2t$, d'après l'hypothèse : « l'instant du début de la coupe est uniformément distribué dans l'intervalle $[10{,}5;11]$ ».

Les instants des débuts des coupes étant indépendants, il vient $\mathbb{P}(T \leq t) = (2t)^3 = 8t^3$.

Par suite, pour $t = \frac{1}{4}$, $\mathbb{P}\left(T \leq \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8}$, (12,5% si l'on préfère).

Commentaires

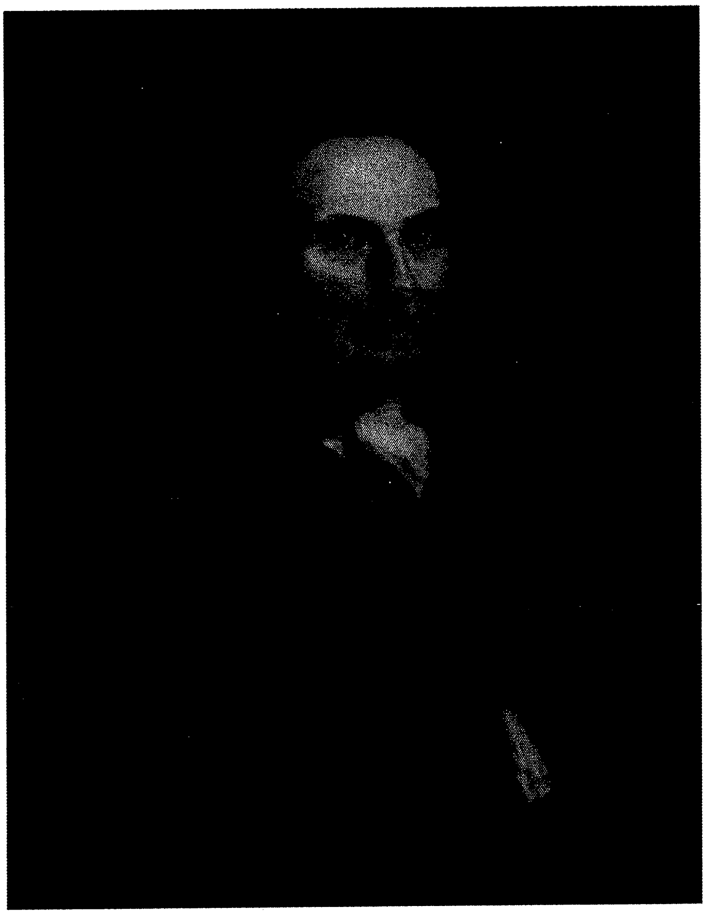
1- Pour traiter le problème dans toute sa généralité, il est commode d'introduire la variable aléatoire *T*, ce qui n'est nullement obligatoire pour l'aborder avec les élèves tel qu'il est posé.

2- La généralisation à n coiffeuses avec $n-1$ clientes en attente - toujours sous les mêmes hypothèses - ne pose aucune difficulté.
   On a pour $t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$: $\mathbb{P}(T \leq t) = 2^n t^n$.

   Par suite, dans un "grand" salon de coiffure ($n = 9$ par exemple), la probabilité que la cliente sorte coiffée avant 11h 45 n'est plus que $\frac{1}{2^9}$ ($\frac{1}{500}$ environ).

Notons cependant, qu'avec $E(T)=\int_0^{\frac{1}{2}} t\left(n2^n t^{n-1}\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\times\frac{n}{n+1}$, la durée moyenne du séjour de la cliente dans le salon de coiffure est :

- pour un “ petit ” salon (3 coiffeuses) : 52 min 30 s ;
- pour un “ grand ” salon (9 coiffeuses) : 57 min.



Abraham de MOIVRE (1667-1754)

« *Cependant il y a des Auteurs, en fait d'une classe très différente de celle de James BERNOULLI, qui laissent entendre que la Doctrine des Probabilités ne pourrait trouver de place dans une Recherche sérieuse ;et que des Études de ce type, aussi simples et faciles soient-elles, disqualifient un homme pour raisonner sur tout autre sujet.* »

(The Doctrine of chances 1756)

Exercice 2-24

Soit a un réel de $[0,1]$. On choisit deux nombres réels x et y au hasard dans $[0,1]$ indépendamment l'un de l'autre.

1° Quelle est la probabilité de l'événement E :
« l'intervalle d'extrémités x et y contient a »?

2° Pour quelle(s) valeur(s) de a, cette probabilité est-elle maximale ?

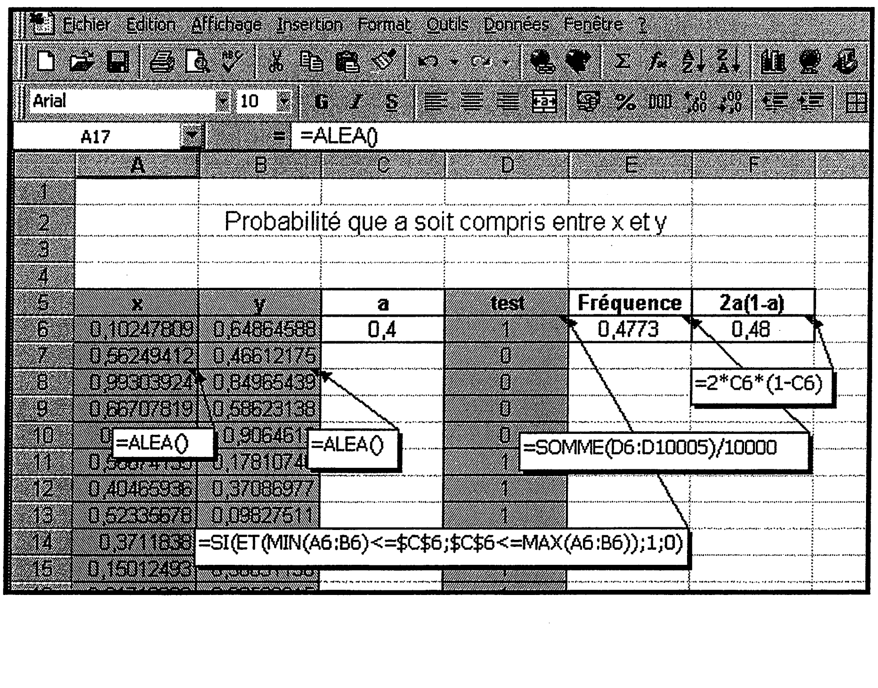
Solution

1° L'événement $E_1 = E \cap (x \leq y)$ est l'événement $(x \leq a) \cap (y \geq a)$ de probabilité $a \times (1-a)$, puisque x et y sont choisis indépendamment l'un de l'autre selon la loi uniforme de $[0,1]$.
Pour les mêmes raisons, l'événement $E_2 = E \cap (x \geq y)$ est de probabilité $(1-a) \times a$.
Comme $E = E_1 \cup E_2$ et que $E_1 \cap E_2 = (x=a) \cap (y=a)$ est de probabilité nulle, la probabilité de E est la somme des probabilités de E_1 et E_2, à savoir : $2a \times (1-a)$.

2° L'étude d'une fonction du second degré (ou celle du maximum d'un produit de deux nombres a et $(1-a)$ de somme constante) mène immédiatement à :
« la probabilité est maximale lorsque $a = \dfrac{1}{2}$ ».

Simulation

On se propose de simuler le choix au hasard de x et y et de tester l'appartenance de a à l'intervalle de bornes x et y. On calcule la fréquence de réalisation de cet événement sur 10 000 tirages que l'on compare avec la valeur théorique $2a(1-a)$.



Exercice 2-25

Soit a un réel de $[0,1]$. On désigne par I et J les intervalles $I=[0,a]$ et $J=]a,1]$.

On choisit deux réels x et y au hasard dans $[0,1]$ indépendamment l'un de l'autre.

Quelle est la probabilité p de l'événement E :

« x et y ne sont pas dans le même intervalle I ou J » ?

Existe-t-il des intervalles pour lesquels cette probabilité est maximale ?

Solution

L'événement E est la réunion, à l'évidence disjointe, des événements E_1 et E_2 :

$$E_1=(x\in I \text{ et } y\in J)) \,;\; E_2=(x\in J \text{ et } y\in I).$$

Les réels x et y étant choisis indépendamment l'un de l'autre, la probabilité de E_1 est

$$\mathcal{U}_{[0,1]}(I)\times\mathcal{U}_{[0,1]}(J)=a(1-a).$$

Il en est de même de la probabilité de E_2.

Ainsi, $p=2a(1-a)$.

On en déduit que p est maximale pour $a=\frac{1}{2}$, valeur pour laquelle $p=\frac{1}{2}$.

Commentaires

1- L'exercice 4-3 propose une solution basée sur la modélisation par le choix « au hasard » d'un point dans le carré $[0,1]\times[0,1]$.

2- Une première généralisation de cet exercice consiste à remplacer I et J par des réunions finies d'intervalles avec toujours $[0,1]$ réunion disjointe de I et J.

On a alors $p=2\mu(I)\times(1-\mu(I))$ où $\mu(I)$ est la " longueur " de I, ce qui conduit à un résultat analogue quant à la valeur maximale de p.

3- Une deuxième généralisation est de considérer plusieurs intervalles deux à deux disjoints de réunion égale à $[0,1]$: si elle se moule dans les études précédentes en ce qui concerne le calcul de probabilités proprement dit, l'affaire se complique en revanche dans la recherche du maximum (utilisation d'une inégalité de convexité). Le cas abordable de trois intervalles est l'objet de l'exercice 2-32.

4- On ne saurait s'étonner de retrouver à cet endroit les mêmes résultats qu'à l'exercice 2-24 : l'événement de l'exercice 2-24 " a appartient à l'intervalle d'extrémités x et y " est en effet la réunion disjointe des événements E_1 et E_2 et $(x=y=a)$ (avec les notations précédentes).

Exercice 2-26

On choisit deux nombres réels x et y au hasard dans $[0,1]$, indépendamment l'un de l'autre, et l'on pose : $x'=1-x$ et $y'=1-y$.

Montrer que x' et y' peuvent être considérés comme pris au hasard et indépendamment l'un de l'autre dans $[0,1]$.

Solution

- *Loi de x' et y'.*
  Il est clair que x' et y' sont à valeurs dans $[0,1]$.
  Soit a un réel de $[0,1]$; on a : $(x'\leq a)=\{x\in[0,1]/1-x\leq a\}=[1-a,1]$
  La probabilité de l'événement $(x'\leq a)$ est donc $\mathcal{U}_{[0,1]}([1-a,1])=a$.
  Ainsi x' suit la loi uniforme sur $[0,1]$, et il en est évidemment de même y'.

- *Indépendance*
  Soit deux réels a et b de $[0,1]$.
  D'après ce qui précède, la probabilité de l'événement $(x'\leq a)\cap(y'\leq b)$ est calculée par $\mathcal{U}_{[0,1]}([1-a,1]\cap[1-b,b])$.
  Les réels x et y étant choisis indépendamment l'un de l'autre selon la loi uniforme dans $[0,1]$, il vient :
  $$\mathcal{U}_{[0,1]}([1-a,1]\cap[1-b,b])=\mathcal{U}_{[0,1]}([1-a,1])\times\mathcal{U}_{[0,1]}([1-b,1])=a\times b.$$
  Il en découle que $\mathbb{P}((x'\leq a)\cap(y'\leq b))=\mathbb{P}(x'\leq a)\times\mathbb{P}(y'\leq b)$.
  Les événements $(x'\leq a)$ et $(y'\leq b)$ sont donc indépendants.

- *Conclusion*
  Les réels x' et y' peuvent être considérés comme choisis au hasard dans $[0,1]$ indépendamment l'un de l'autre.

Commentaires

1- « *Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes uniformément distribuées sur* $[0,1]$ *; alors il en est de même des variables aléatoires $X'=1-X$ et $Y'=1-Y$* ».
Cette formulation du résultat que nous venons d'établir devrait satisfaire les enseignants à la recherche d'un énoncé plus rigoureux...

2- Nous exploiterons cette propriété dans l'étude de la variable aléatoire : « somme de deux nombres pris au hasard et indépendamment l'un de l'autre dans $[0,1]$ » (Chapitre 3 Paragraphe 2-2-2 page 113).

Exercice 2-27

On considère les six intervalles de $[0,1[$: $I_k = \left[\frac{k}{6}, \frac{k+1}{6}\right[$ pour $k \in [\![0, 5]\!]$.

On choisit au hasard six réels de $[0,1[$ indépendamment les uns des autres.

L'affirmation « Il y a en moyenne quatre intervalles parmi I_0, I_1, I_2, I_3, I_4, I_5 qui contiennent chacun au moins l'un de ces six réels » est-elle vraie ou fausse ?

Solution

Considérons, pour $k \in [\![0,5]\!]$, les variables aléatoires X_k définies par :

$$X_k = \begin{cases} 1 & \text{si } I_k \text{ contient au moins l'un de ces réels;} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le nombre d'intervalles $(I_k)_{0 \le k \le 5}$ qui contiennent au moins l'un de ces réels est alors la variable aléatoire $X = \sum_{k=0}^{5} X_k$.

Nous cherchons $E(X)$ qui, par linéarité de l'espérance, est égal à $\sum_{k=0}^{5} E(X_k)$.

Pour tout $k \in [\![0, 5]\!]$, on a : $E(X_k) = \mathbb{P}(X_k = 1) = 1 - \mathbb{P}(X_k = 0)$.

Comme $(X_k = 0)$ est l'événement : « tous les réels sont en dehors de I_k » et que les réels sont choisis selon la loi uniforme et indépendamment les uns des autres dans $[0,1[$, la probabilité de l'événement $(X_k = 0)$ est : $\left(1 - \mathcal{U}_{[0,1[}(I_k)\right)^6 = \left(1 - \frac{1}{6}\right)^6 = \left(\frac{5}{6}\right)^6$.

Par suite, $E(X_k) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^6$ et $E(X) = 6\left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^6\right) \approx 3{,}9906$.

L'affirmation est donc fausse … de très peu.

Commentaires

1- Dans le cas général de n intervalles $I_k = \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right[$ pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, le nombre moyen d'intervalles qui contiennent chacun au moins l'un de ces n réels est $n\left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n\right)$ (même raisonnement).

2- À supposer que l'on cherche un exemple instructif pour apprendre aux élèves à ne pas suivre les yeux fermés “ tout ” résultat fourni par une simulation, cet exercice est visiblement un excellent candidat, d'autant plus que nombre d'entre eux s'attendent à obtenir une valeur entière.

Simulation

Voici donc les éléments d'une simulation :

Microsoft Excel - six-inter

Fichier Edition Affichage Insertion Format Outils Données Fenêtre ?

Q7 fx

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2		six intervalles					
3							
4							
5	Rang	x1	x2	x3	x4	x5	x6
6	1	0,98234454	0,46937899	0,08647368	0,20872367	0,97423861	0,81598238
7	2	0,03624165	0,62588585	0,42423527	0,13544577	0,47560575	0,81705165
8	3	0,8932[illegible]	[illegible]885	0,75696685	0,89548372	0,07796397	0,14060347
9	4	0,8389[illegible]	[illegible]863	0,31651997	0,20579424	0,33591228	0,34081301
10	5	0,3280452	0,32869532	0,64078173	0,69437221	0,0037148	0,99784059
11	6	0,91118074	0,03418184	0,09885173	0,53730654	0,77021953	0,94323988
12	7	0,02065485	0,93053756	0,86963845	0,75182347	0,36997663	0,91733618
13	8	0,52863944	0,90380993	0,43963878	0,37961799	0,79138258	0,06257815
9997	9992	0,370903	0,62571628	0,47555385	0,18116935	0,93625597	0,12674116
9998	9993	0,35527404	0,41137806	0,68426841	0,66464443	0,56801276	0,8496443
9999	9994	0,99750282	0,95049243	0,27886561	0,66185394	0,4083546	0,35772294
10000	9995	0,75261548	0,83001133	0,24861202	0,47113708	0,14390182	0,68648127
10001	9996	0,2182026	0,06628723	0,15740301	0,69381388	0,77563206	0,64795482

= ALEA()

H	I	J	K	L	M	N	O	P
			Critères					
0	< 0,1666	< 0,3333	< 0,5	< 0,6666	< 0,8333	< 1		
test sur I1	test sur I2	test sur I3	test sur I4	test sur I5	test sur I6	Nb d'intervalles atteints	Nb moyen	
1	1	1	0	1	2	5	3,99	
2	0	2	1	1	0	4		
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	2	4		
0	2	2	[illegible]	[illegible]	[illegible]	4		
1	2	0	[illegible]	[illegible]	[illegible]	5		
[illegible]	[illegible]	[illegible]	1	1	2	4		
[illegible]	[illegible]	[illegible]	0	1	3	4		
1	0	2	1	1	1	5		
1	1	2	1	0	1	5		
0	0	2	2	1	1	4		
0	1	2	1	0	2	4		
1	1	1	0	3	0	4		
2	1	0	1	2	0	4		
2	1	0	1	1	1	5		
1	0	2	0	2	1	4		
1	1	0	2	2	0	4		
4	0	1	1	0	0	3		

= NB.SI(B5:G5;N2)-H5-I5-J5-K5-L5

=NB.SI(H5:M5;"<>0")

= NB.SI(B5:G5;I$2)

Dans les exercices 2-28 et 2-29, n désigne un entier naturel non nul et l'on considère l'expérience aléatoire consistant à tirer n réels x_1, x_2, ... x_n au hasard dans $[0,n]$, *indépendamment les uns des autres.*

Exercice 2-28 *Loi du max*

Calculer la probabilité de l'événement : $\max(x_1, x_2, ..., x_n) \leq a$ **(**a **réel fixé de** $[0,n]$**).**

Solution

Il est clair que $\max(x_1, x_2, ..., x_n) \leq a$ si et seulement si, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $x_i \leq a$.

Autrement dit, l'événement E est l'intersection des événements $(x_i \leq a)$ pour $i \in [\![1,n]\!]$, chacun de probabilité $\mathcal{U}_{[0,n]}([0,a]) = \dfrac{a}{n}$.

L'hypothèse d'indépendance des tirages permet alors d'affirmer que la probabilité de E est le produit de ces probabilités.

Ainsi $\mathbb{P}(E) = \left(\dfrac{a}{n}\right)^n$.

Exercice 2-29 *Loi du min*

Calculer la probabilité de l'événement F **:** $\min(x_1, x_2, ..., x_n) \leq a$ **(**a **réel fixé de** $[0,n]$**).**

Solution

Il est préférable de calculer la probabilité de l'événement contraire $\overline{F}$ défini par $(\min(x_1, x_2, ... x_n) > a)$.

En effet $(\min(x_1, x_2, ..., x_n) > a)$ équivaut à $(\forall i \in \{1, 2, ... n\}, x_i > a)$, d'où :

$$\overline{F} = \bigcap_{i=1}^{n} (x_i > a).$$

Les événements $(x_i > a)$ étant indépendants deux à deux et de probabilité

$$\mathbb{P}(x_i > a) = \mathcal{U}_{[0,n]}([a,n]) = \frac{n-a}{n} = 1 - \frac{a}{n}, \text{ on a : } \mathbb{P}(\overline{F}) = \left(1 - \frac{a}{n}\right)^n.$$

Conclusion : $\mathbb{P}(F) = 1 - \left(1 - \dfrac{a}{n}\right)^n$

Commentaire

L'étude du comportement asymptotique de la loi obtenue sera étudié dans le chapitre 5. (Paragraphe 5-2)

Dans les exercices 2-30 et 2-31, n désigne un entier naturel non nul et l'on considère l'expérience aléatoire consistant à tirer n réels $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *au hasard dans* $[0,1]$, *indépendamment les uns des autres.*

Exercice 2-30

Calculer la probabilité de l'événement E :

$$\min(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq \frac{1}{2} \leq \max(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Solution

L'événement contraire $\overline{E}$ est la réunion des deux événements disjoints :

$$F_1 : \min(x_1, x_2, \ldots, x_n) > \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad F_2 : \max(x_1, x_2, \ldots, x_n) < \frac{1}{2}.$$

On a $F_1 = \bigcap_{i=1}^{n} \left(x_i > \frac{1}{2} \right)$, où les événements $\left(x_i > \frac{1}{2} \right)$ sont indépendants deux à deux et de probabilités respectives $\frac{1}{2}$. Il en découle $\mathbb{P}(F_1) = \frac{1}{2^n}$.

De même $F_2 = \bigcap_{i=1}^{n} \left(x_i < \frac{1}{2} \right)$ et $\mathbb{P}(F_2) = \frac{1}{2^n}$.

Par suite : $\mathbb{P}(\overline{E}) = \mathbb{P}(F_1) + \mathbb{P}(F_2) = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}$, et donc $\mathbb{P}(E) = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}$.

Exercice 2-31

Plus généralement (cf. exercice 2-30) calculer la probabilité de l'événement

E : $\min(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq a \leq \max(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, **pour a réel donné de $[0,1]$.**

Solution

En adaptant la solution précédente :

- $\overline{E}$ est la réunion des deux événements disjoints :
  F_1 : $\min(x_1, x_2, \ldots, x_n) > a$ et F_2 : $\max(x_1, x_2, \ldots, x_n) < a$.

- $F_1 = \bigcap_{i=1}^{n} (x_i > a)$, où les événements $(x_i > a)$ sont indépendants deux à deux et de probabilités respectives $1 - a$.
  On en déduit $\mathbb{P}(F_1) = (1-a)^n$ et de même $\mathbb{P}(F_2) = a^n$.
  Par suite : $\mathbb{P}(\overline{E}) = \mathbb{P}(F_1) + \mathbb{P}(F_2) = (1-a)^n + a^n$.

  Ainsi $\mathbb{P}(E) = 1 - (1-a)^n - a^n$.

Commentaire

Une étude élémentaire de fonction montre que cette probabilité est maximale pour $a = \frac{1}{2}$.

Exercice 2-32

Soit l'intervalle $[0,1]$ réunion disjointe de trois intervalles $I=[0,a]$, $J=]a,b]$ et $K=]b,1]$ avec $0<a<b<1$. On choisit trois nombres x, y et z au hasard dans $[0,1]$.

Quelle est la probabilité p que les trois nombres soient issus d'intervalles tous différents ?

Solution

Soit E l'événement : « x, y et z sont issus d'intervalles tous différents » .L'événement E est la réunion disjointe des six événements :

$$(x,y,z)\in I\times J\times K \;\;;\;\; (x,y,z)\in I\times K\times J;$$
$$(x,y,z)\in J\times I\times K \;\;;\;\; (x,y,z)\in J\times K\times I;$$
$$(x,y,z)\in K\times I\times J \;\;;\;\; (x,y,z)\in K\times J\times I.$$

Compte tenu de l'indépendance des tirages effectués par ailleurs selon la loi uniforme de [0,1], la probabilité de chacun de ces événements est le produit des longueurs des intervalles *I*, *J* et *K*, soit : $a(b-a)(1-b)$. D'où $\mathbb{P}(E)=6a(b-a)(1-b)$.

Commentaire

Cherchons s'il existe des intervalles pour lesquels cette probabilité est maximale (par analogie avec l'exercice 2-25).

Méthode 1 : ***étude d'une surface*** (pour les élèves suivant l'enseignement de spécialité).

Désignons par x et y les longueurs respectives des intervalles I et J.

L'intervalle K étant de longueur $1-x-y$, nous avons $\mathbb{P}(E)=6xy(1-x-y)$.

Nous nous proposons de déterminer le maximum sur $[0,1]\times[0,1]$ de la fonction F de deux variables définie par $F(x,y)=xy(1-x-y)$ à l'aide de la surface S d'équation : $z=F(x,y)$ et de ses sections par les plans d'équation $y=k$ (par exemple).

- Soit k fixé dans $[0,1]$ et P_k le plan d'équation $y=k$.

  La section de la surface S par le plan P_k est la parabole (contenue dans ce plan) d'équation $z=kx(1-x-k)=-kx^2+k(1-k)x$.

  On en déduit facilement que le point culminant de S dans le plan P_k est le point $\Omega_k\left(\dfrac{1-k}{2},k,\dfrac{k(1-k)^2}{4}\right)$.

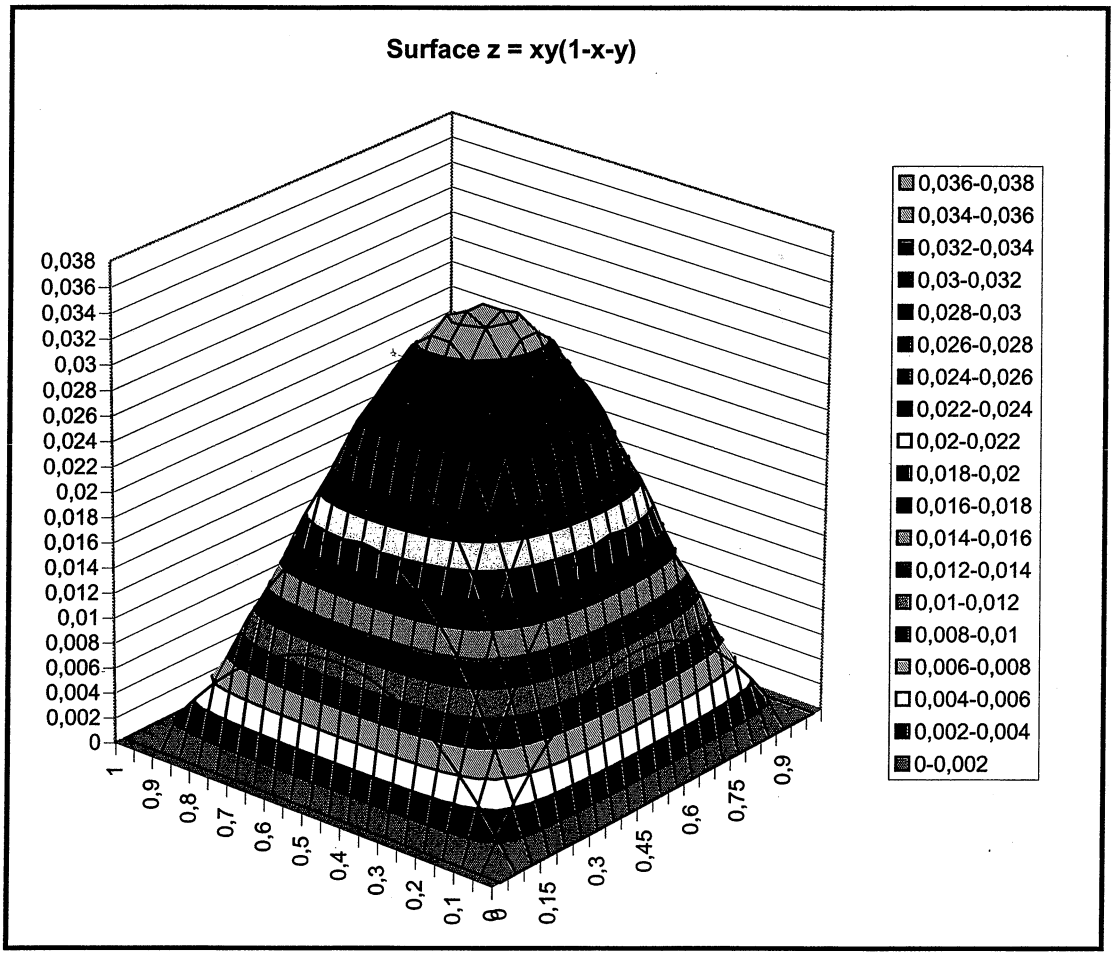
- Introduisons la fonction f définie sur $[0,1]$ par $f(k)=\dfrac{k(1-k)^2}{4}$ (f est la fonction qui, au réel k de $[0,1]$ associe la côte du point culminant de S dans le plan P_k).

k	0		$\frac{2}{3}$		1
$f'(k)$		$+$	0	$-$	
$f(k)$		$\nearrow$	M	$\searrow$	

  On a $f'(k)=\dfrac{1}{4}(1-k)(1-3k)$, d'où l'on déduit le tableau de variation ci-dessus, qui prouve que f admet un maximum M pour $k=\dfrac{1}{3}$, avec $M=\dfrac{1}{27}$.

Le point culminant de la surface S est donc le point $\Omega\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{27}\right)$, ce qui signifie que le maximum sur $[0,1]\times[0,1]$ de la fonction F est atteint au point de coordonnées $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$. Il s'ensuit que la probabilité p est maximale lorsque I et J sont toutes deux de longueur $\frac{1}{3}$.

En résumé, tous calculs achevés : $p\leq\frac{2}{9}$, avec égalité si et seulement si les intervalles I, J et K sont de même longueur $\frac{1}{3}$.



Méthode 2 : *inégalité de la moyenne* (pour tous les élèves).
Il s'agit d'établir que pour $x\geq 0$, $y\geq 0$ et $z\geq 0$:

$\sqrt[3]{xyz}\leq\frac{1}{3}(x+y+z)$, ***avec égalité si et seulement si*** $x=y=z$.

➤ Remarques

1- On notera que le résultat est trivial lorsque l'un des réels x, y ou z est nul, ce qui conduit dans la suite à supposer $x>0$, $y>0$ et $z>0$.

2- Dans ce dernier cas, il existe une démonstration classique basée sur la concavité de la fonction logarithme népérien qui fournit la relation :

pour $x>0$, $y>0$ et $z>0$ $\ln\left(\frac{x+y+z}{3}\right)\geq\frac{1}{3}(\ln x+\ln y+\ln z)$

(évidemment équivalente à l'inégalité envisagée).

➤ Nous proposons ici une solution élémentaire s'appuyant sur une autre propriété de la fonction $\ln$, qui présente l'avantage d'être accessible à tout un chacun :

pour tout réel $x>0$, on a $\ln x\leq x-1$ avec égalité si et seulement si $x=1$.

Alors étant donné n réels $x_1, x_2,..., x_n$ strictement positifs de moyenne arithmétique $\mu=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$ nous avons :

$$\ln\left(\frac{x_i}{\mu}\right)\leq\frac{x_i}{\mu}-1 \quad \text{pour } i=1, 2, ..., n.$$

En découle, par sommation que :

$$\ln\left(\frac{x_1x_2...x_n}{\mu^n}\right)\leq\frac{1}{\mu}\sum_{i=1}^{n}x_i-n=0\text{, d'où :}$$

$\frac{x_1x_2...x_n}{\mu^n}\leq 1$ que l'on va écrire : $\boldsymbol{\sqrt[n]{x_1x_2...x_n}\leq\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}}$.

(l'égalité imposant $\ln\left(\frac{x_i}{\mu}\right)=\frac{x_i}{\mu}-1$ pour $i=1, 2, ..., n$, d'où $x_i=\mu$ pour tout i)

➤ Le corollaire, qui permet de conclure comme précédemment sur la valeur maximale de la probabilité, est que si l'on impose les conditions $0\leq x\leq 1$, $0\leq y\leq 1$, $0\leq z\leq 1$ et $x+y+z=1$, le produit xyz est maximum pour $x=y=z=\frac{1}{3}$.

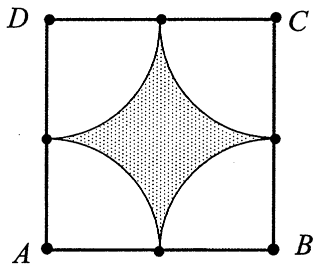
Exercice 2-33

On choisit un point M au hasard dans un carré $\mathcal{C}$ de côté 1.

Quelle est la probabilité de l'événement E : « le point M est à une distance supérieure ou égale à $\frac{1}{2}$ de tous les sommets du carré » ?

Solution

Comme le montre la figure ci-contre, la zone des issues favorables est le carré privé des quatre quarts de disques de rayon $\frac{1}{2}$ centrés sur les sommets.



Le calcul du rapport $\frac{\text{aire de la zone favorable}}{\text{aire de la zone possible}}$ est élémentaire :

- aire de la zone favorable $= 1 - 4 \times \frac{1}{4} \times \pi \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 - \frac{\pi}{4}$;
- aire de la zone possible $= 1$ (aire du carré).

D'où : $\mathbb{P}(E) = 1 - \frac{\pi}{4}$.

Exercice 2-34

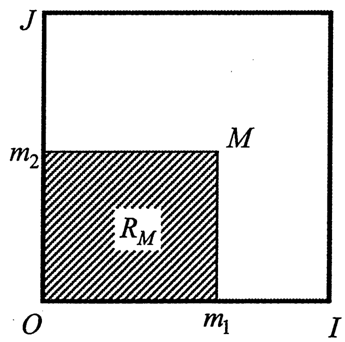
A chaque point M du carré $\mathcal{C}$ de côté 1 on fait correspondre le rectangle $R_M = Om_1Mm_2$.

Soit $A(a,b)$ un point fixé de $\mathcal{C}$.

On choisit un point M au hasard dans $\mathcal{C}$.

Quelle est la probabilité de l'événement E :

« Le rectangle R_M contient A »?



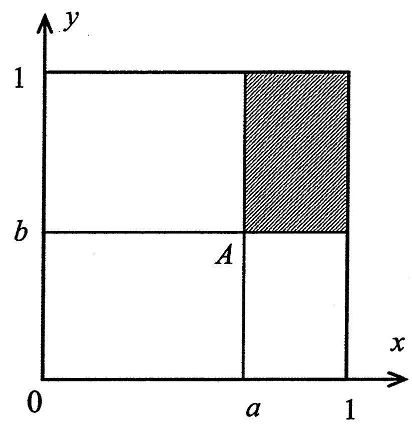
Solution

On constate sur la figure ci-contre, que l'événement E est réalisé lorsque le point M est situé dans la zone grisée (zone favorable).

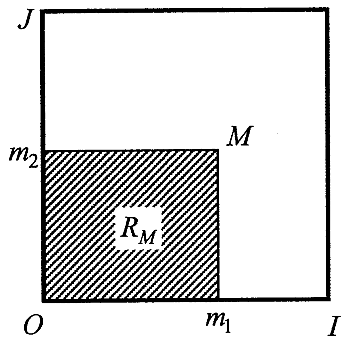
Le point M étant choisi selon la loi uniforme dans le carré, on a :

$$\mathbb{P}(E) = \frac{\text{aire de la zone favorable}}{\text{aire totale}} = \frac{(1-a)(1-b)}{1}$$

$$\mathbb{P}(E) = (1-a)(1-b)$$



Exercice 2-35



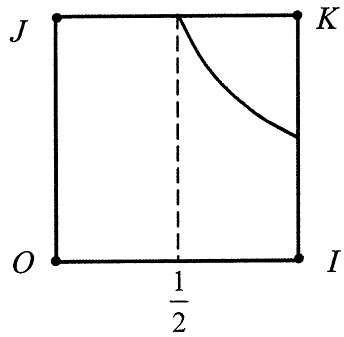
A chaque point M du carré $\mathcal{C}$ de côté 1 on fait correspondre le rectangle $R_M = Om_1Mm_2$.

On choisit un point M au hasard dans $\mathcal{C}$.

1° Quelle est la probabilité que l'aire du rectangle R_M soit égale à $\frac{1}{2}$?

2° Quelle est la probabilité que l'aire du rectangle R_M soit inférieure ou égale à $\frac{1}{2}$?

Solution



Notons x et y les coordonnées de M dans le repère (O,I,J).

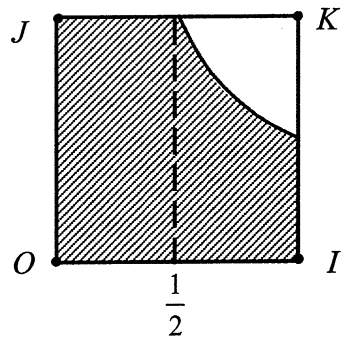
1° L'événement $E = \left(\text{Aire}(R_M) = \frac{1}{2}\right)$ est l'événement décrit par $\left\{M(x,y) \in \mathcal{C} \,/\, xy = \frac{1}{2}\right\}$: il s'agit de l'arc d'hyperbole d'équation $y = \frac{1}{2x}$ contenu dans le carré $\mathcal{C}$.

Comme M est choisi, selon la loi uniforme dans le carré, on a :

$$\mathbb{P}(E) = \frac{\text{aire de la zone favorable}}{\text{aire totale}}.$$

Or la zone favorable a ici une aire nulle, donc $\mathbb{P}(E) = 0$.

2° L'événement $\left(\text{Aire}(R_M) \leq \frac{1}{2}\right)$ est de même caractérisé par $\left\{M(x,y) \in \mathcal{C} \,/\, xy \leq \frac{1}{2}\right\}$: il s'agit cette fois du domaine situé sous l'hyperbole d'équation $y = \frac{1}{2x}$ et contenu dans le carré $\mathcal{C}$.



L'aire de ce domaine est alors :

$$A = \frac{1}{2} + \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} + \left[\frac{1}{2}\ln x\right]_{\frac{1}{2}}^{1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln 2.$$

Par suite, $\mathbb{P}\left(\text{Aire}(R_M) \leq \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln 2$.

Commentaire

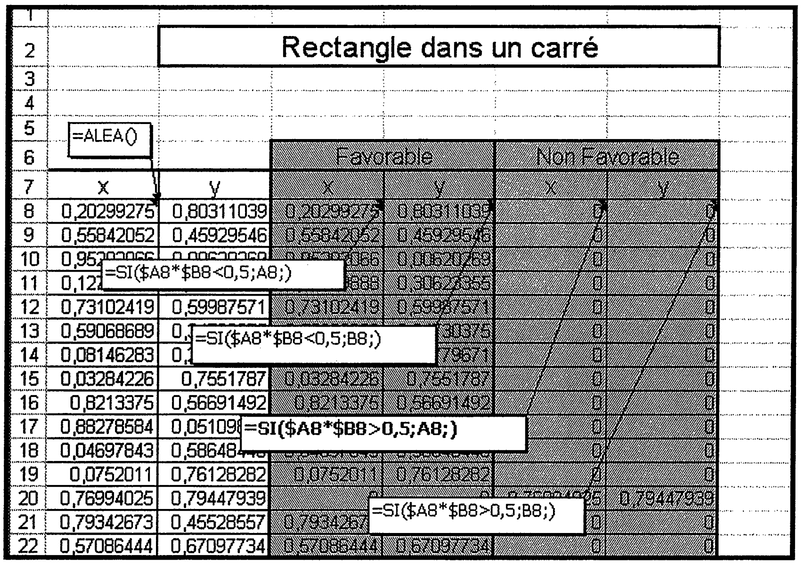
Quelques nouveautés sont à souligner en dehors de l'usage de la loi uniforme dans le carré:

- probabilité d'un domaine non vide mais de " mesure nulle " ;
- calcul d'aire à l'aide d'une intégrale.

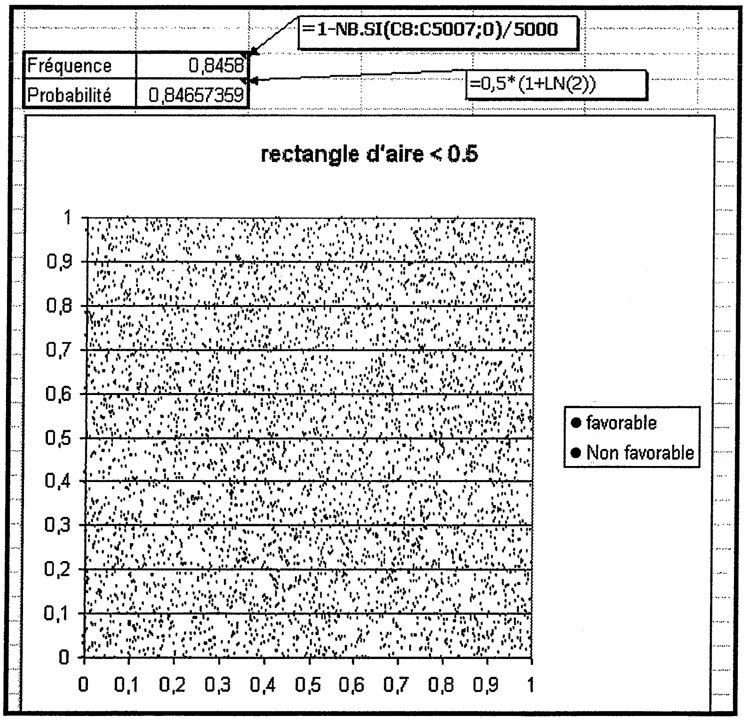
Simulation

Concernant la deuxième question, on peut envisager cette proposition de travail :

- simuler le choix au hasard de 5000 points du carré par le choix de leurs coordonnées[1] ;
- calculer la fréquence de réalisation de l'événement E ;
- représenter le nuage des 5000 points obtenus en coloriant différemment ces points selon qu'ils conduisent ou non à la réalisation de l'événement E.



			Favorable		Non Favorable	
7	x	y	x	y	x	y
8	0,20299275	0,80311039	0,20299275	0,80311039	0	0
9	0,55842052	0,45929546	0,55842052	0,45929546	0	0
10	0,95[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,00620769	0	0
11	0,12[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,30623355	0	0
12	0,73102419	0,59987571	0,73102419	0,59987571	0	0
13	0,59068689	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0	0
14	0,08146283	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0	0
15	0,03284226	0,7551787	0,03284226	0,7551787	0	0
16	0,8213375	0,56691492	0,8213375	0,56691492	0	0
17	0,88278584	0,05109[illegible]	[illegible]	[illegible]	0	0
18	0,04697843	0,58648[illegible]	[illegible]	[illegible]	0	0
19	0,0752011	0,76128282	0,0752011	0,76128282	0	0
20	0,76994025	0,79447939	0	0	[illegible]	0,79447939
21	0,79342673	0,45528557	0,7934267[illegible]	[illegible]	0	0
22	0,57086444	0,67097734	0,57086444	0,67097734	0	0



[1] Nous anticipons sur une propriété à venir (chapitre 4) en choisissant x et y indépendamment l'un de l'autre dans [0,1].

Exercice 2-36

On choisit un point M au hasard dans le carré $OIKJ$ de côté 1.

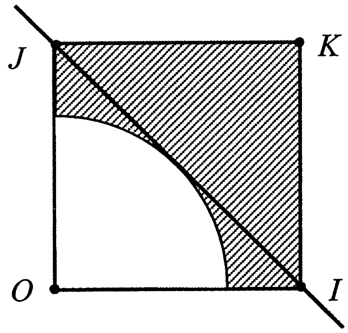
1° Quelle est la probabilité p de l'événement E :

« le cercle Γ de centre O passant M coupe la droite (IJ) » ?

2° Quelle est la probabilité q de l'événement F :

« le cercle Γ de centre O passant M coupe le segment $[I,J]$ » ?

Solution

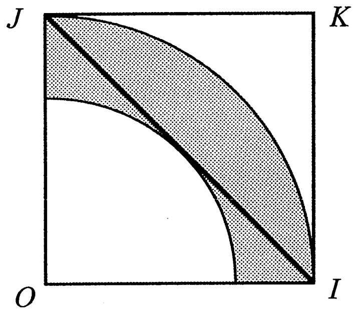


1° Le cercle Γ de centre O passant par M rencontre la droite (IJ) si et seulement si la distance de O à M est supérieure à celle de O à la droite (IJ) ou encore $OM \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Comme la zone favorable représentée ci-contre est d'aire

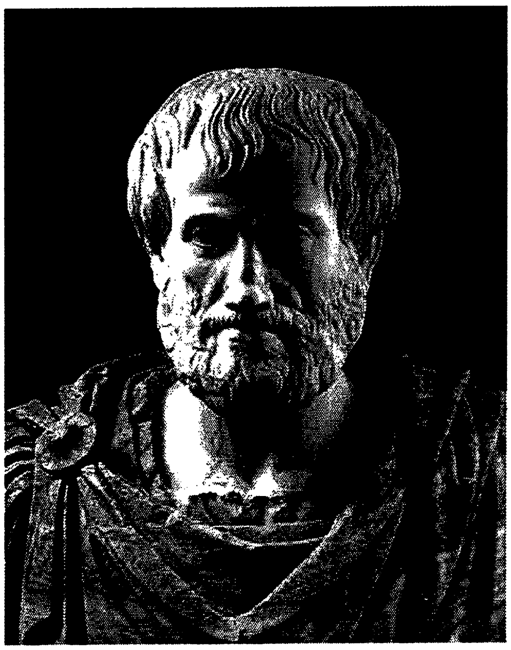
$$1-\frac{1}{4}\pi\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2,$$

la probabilité de l'événement E est $p=1-\frac{\pi}{8}$.



2° Compte tenu de ce qui précède, l'événement F est associé à l'ensemble des points du carré contenu dans la couronne partiellement dessinée ci-contre, d'aire $\frac{\pi}{4}-\pi\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$.

Par suite, $q=\frac{\pi}{8}$.



« Puisque le fait de hasard n'est ni constant ni nécessaire, la démonstration ne s'y appliquera pas. »

(Seconds Analytiques. ORGANON Tome IV)

ARISTOTE (384-322 av. J.C.)

Exercice 2-37 *Franc-carreau au singulier*

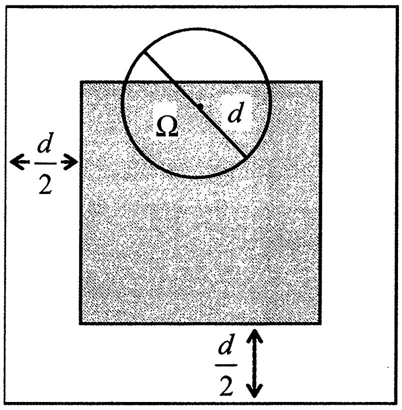
On donne un carré de côté a $(0<a)$ et on choisit dans celui-ci un point Ω au hasard.

Un réel d est fixé avec $0<d<a$. Quelle est la probabilité de l'événement E :

« le disque de centre Ω et de diamètre d est contenu dans le carré » ?

Solution

Comme l'indique la figure ci-contre, le disque de centre Ω et de diamètre d est contenu dans le carré de côté a si et seulement si Ω appartient au carré intérieur obtenu en « éliminant » de ce carré la bordure de largeur *d*/2. Ce carré intérieur étant de côté $a-d$ on obtient : $\mathbb{P}(E)=\dfrac{(a-d)^2}{a^2}=\left(1-\dfrac{d}{a}\right)^2$.



Note : Si $d>a$, l'événement E est impossible (immédiat).

Exercice 2-38 *Franc-cube*

On donne un cube d'arête a $(0<a)$ et on choisit dans celui-ci un point Ω au hasard.

Un réel d est fixé avec $0<d<a$.

Quelle est la probabilité de l'événement E :

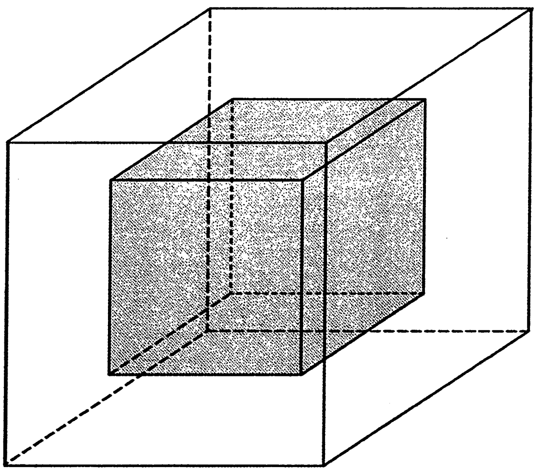
« la sphère de centre Ω et de diamètre d est contenue dans le cube » ?

Solution

Le dessin est peut-être plus difficile à réaliser que précédemment mais reste aussi facile à concevoir. En tout état de cause :

$$\mathbb{P}(E)=\frac{\text{volume de la zone grisée}}{\text{volume du cube}}=\frac{(a-d)^3}{a^3},$$

$$\mathbb{P}(E)=\left(1-\frac{d}{a}\right)^3.$$



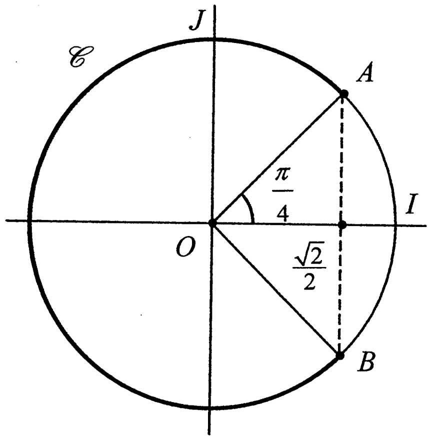
Exercice 2-39

Un point $M(x,y)$ est choisi au hasard sur le cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 1.

Est-ce que x ou y suit la loi uniforme sur $[-1,1]$?

Solution

Examinons par exemple le comportement aléatoire de l'abscisse x du point M.



L'événement $\left(x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ se réalise si et seulement si le point M est choisi sur le grand arc de cercle d'extrémités A et B, où A et B sont les points de $\mathscr{C}$ définis par $\left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OA}\right)=\frac{\pi}{4}$ et $\left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OB}\right)=-\frac{\pi}{4}$.

Le choix du point M sur le cercle $\mathscr{C}$ étant effectué selon la loi uniforme, la probabilité de l'événement $\left(x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ est égale à $\frac{3}{4}$.

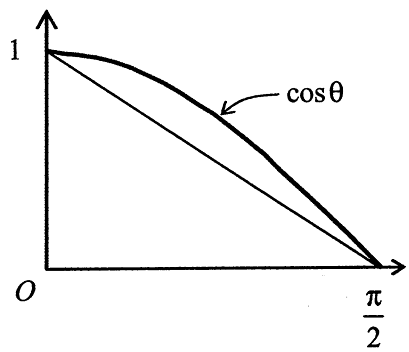
La probabilité du même événement $\left(x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ selon la loi uniforme $\mathcal{U}$ de l'intervalle $[-1,1]$ est quant à elle calculée par $\mathcal{U}\left(\left[-1,\frac{\sqrt{2}}{2}\right]\right)=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}+1}{2}=\frac{2+\sqrt{2}}{4}$.

Comme $\frac{2+\sqrt{2}}{4} \neq \frac{3}{4}$, ce « contre exemple » suffit pour affirmer que l'abscisse x du point M ne suit pas la loi uniforme sur $[-1,1]$.

Il en est évidemment de même pour l'ordonnée y du point M.

Commentaires

1- De manière plus générale, si l'on donne un réel θ de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ (par exemple), la probabilité de l'événement $(x \leq \cos\theta)$ lorsque M est choisi au hasard sur le cercle $\mathscr{C}$ est $p_\theta = 1-\frac{\theta}{\pi}$.



En revanche, la probabilité du même événement selon la loi uniforme $\mathcal{U}$ sur $[-1,1]$ est $q_\theta = \frac{1+\cos\theta}{2}$.

La représentation graphique usuelle de la fonction cosinus montre que, pour $\theta \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ $\cos\theta > 1-\frac{\theta}{\pi/2}$, soit de manière équivalente $q_\theta > p_\theta$.

2- À remplacer le cercle par une sphère, toutes choses égales par ailleurs, il serait étonnant d'être déçu (voir exercice 3-13).

Exercice 2-40

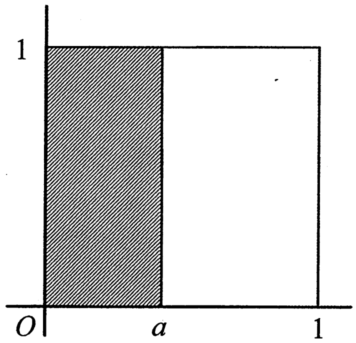
Un point $M(x,y)$ est choisi au hasard dans le carré $C=[0,1]\times[0,1]$.

1° Quelle est la loi de x ? Quelle est la loi de y ?

2° Soit I et J deux intervalles de $[0,1]$.

Montrer que les événements $(x\in I)$ et $(y\in J)$ sont indépendants.

Solution



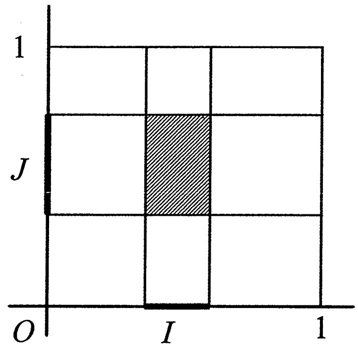
1° *Lois de x et de y*

La zone favorable à la réalisation de l'évènement $(x\le a)$ est le rectangle grisé de la figure ci-contre.

Nous avons donc : $\mathbb{P}(x\le a)=\dfrac{\text{aire du rectangle}}{\text{aire du carreau}}=a$.

Il en découle que x suit la loi uniforme sur $[0,1]$.

La loi de y est bien sûr la même.



2° *L'indépendance*

L'événement $(x\in I)\cap(y\in J)$ est décrit par le rectangle en grisé dans la figure ci-contre d'aire $\ell(I)\times\ell(J)$ où $\ell(I)$ et $\ell(J)$ désignent les longueurs des intervalles I et J.

La probabilité de l'événement $(x\in I)\cap(y\in J)$ est donc $\ell(I)\times\ell(J)$.

Comme x et y suivent la loi uniforme sur $[0,1]$, $\ell(I)$ et $\ell(J)$ sont respectivement les probabilités des événements $(x\in I)$ et $(y\in J)$.

Autrement dit : $\mathbb{P}((x\in I)\cap(y\in J))=\mathbb{P}((x\in I))\times\mathbb{P}(y\in J)$.

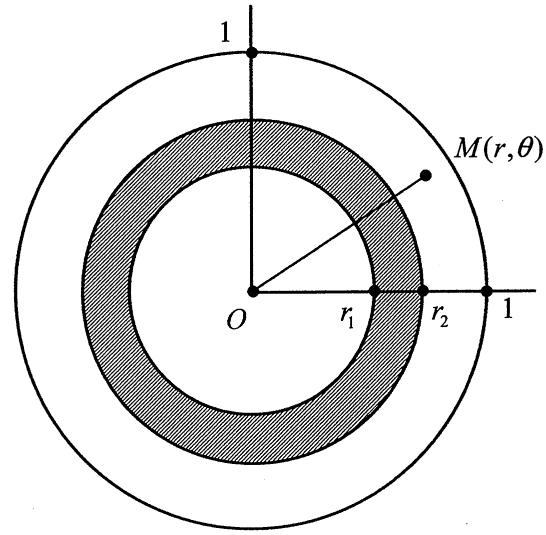
Ainsi lorsque l'on choisit M au hasard dans le carré $[0,1]\times[0,1]$, ses coordonnées sont choisies au hasard dans $[0,1]$, indépendamment l'un de l'autre.

Commentaires

1- Le résultat précédent s'étend sans difficulté au cube $\mathbb{C}=[0,1]\times[0,1]\times[0,1]$: « si un point $M(x,y,z)$ est choisi au hasard dans le cube $\mathbb{C}$, alors ses coordonnées sont choisies au hasard dans $[0,1]$, indépendamment les unes des autres ».

2- Nous ne pouvions pas moins en attendre compte tenu de la signification accordée à l'expression : « *tirer deux (ou trois) réels au hasard dans* $[0,1]$ *indépendamment les uns des autres* » (cf. page 47).

Exercice 2-41



On choisit au hasard et indépendamment l'un de l'autre deux réels r_1 et α dans l'intervalle $[0,1]$.

On désigne alors par M le point de coordonnées polaires r et $\theta = 2\pi\alpha$ (i. e. M est le point de coordonnées cartésiennes $x = r\cos(2\pi\alpha)$ et $y = r\sin(2\pi\alpha)$).

1° Soit r_1 et r_2 deux réels de l'intervalle $]0,1[$ tels que $r_1 < r_2$.

Quelle est la probabilité que M appartienne à la couronne circulaire $[r_1, r_2]$?

2° Un point M étant choisi aléatoirement dans le disque D de centre O et de rayon 1 selon le protocole précédent, peut-on considérer que M est choisi selon la loi uniforme sur D ?

Solution

1° Un point M de coordonnées polaires (r,θ) appartient à la couronne $[r_1, r_2]$ si et seulement si $r_1 \le r \le r_2$, θ étant quelconque dans l'intervalle $[0, 2\pi]$.

Ainsi l'événement $E =$ « M appartient à la couronne circulaire $[r_1, r_2]$ » est l'intersection des événements $(r \in [r_1, r_2])$ et $(\alpha \in [0,1])$, de probabilités respectives : $r_2 - r_1$ et 1.

Ces événements étant indépendants, on a donc $\mathbb{P}(E) = r_2 - r_1$.

2° Pour la loi uniforme sur D, la probabilité de l'événement « M appartient à la couronne circulaire $[r_1, r_2]$ » est calculé par :

$$\frac{\text{aire de la couronne } [r_1, r_2]}{\text{aire de } D}, \text{ soit } \frac{\pi(r_2^2 - r_1^2)}{\pi} = r_2^2 - r_1^2.$$

Il en découle que le choix aléatoire de M selon le protocole défini dans l'énoncé ne relève pas du modèle uniforme dans le disque D (on s'en serait douté).

Chapitre 3

Les lois continues

« Le fini ne se distingue de l'infini que par l'imperfection »
Pierre REVERDY

1. Des lois uniformes aux lois continues

1.1 Une situation de référence

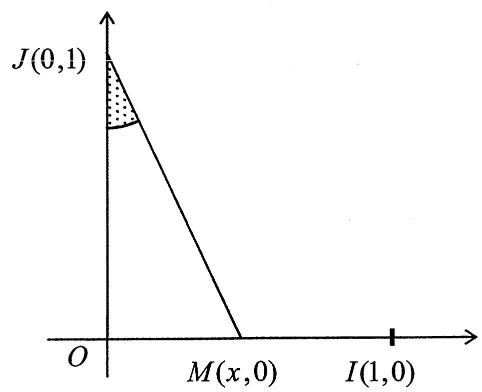
Nous ouvrirons ce chapitre par un exemple auquel nous accorderons par la suite le statut d'exemple de référence, sans pour autant le promouvoir au rang de problème phare sur le sujet.

Exemple de référence

Le plan est muni d'un repère orthonormal (O,I,J).

Un réel x étant choisi au hasard dans $[0,1]$ (c'est à dire selon la loi uniforme), notons M le point du segment $[OI]$ de coordonnées $(x,0)$.

Nous pouvons mettre au rang des évidences que l'angle $\widehat{OJM}$ varie aléatoirement, tout en restant dans l'intervalle $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$.



Peut-on préciser le comportement aléatoire de cet angle ?

Par exemple, peut-on considérer que l'angle $\widehat{OJM}$ suit la loi uniforme sur l'intervalle $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$?

Et sinon ?

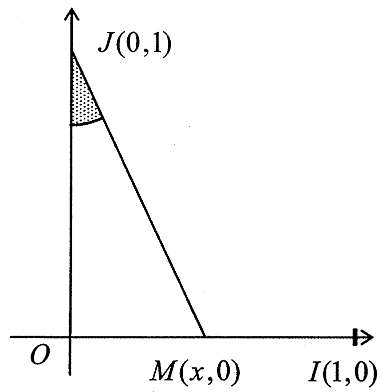
Avant d'entrer dans le vif du sujet, il est utile de faire clairement apparaître ce que nous voulons mettre en première ligne :

- non seulement, il s'agit d'**approfondir la compréhension du sens exact d'expressions telles que** « probabilité que l'angle $\widehat{OJM}$ soit égal à $\frac{\pi}{6}$ » ou « plus petit que $\frac{\pi}{6}$ » (par exemple) ;
- mais il s'agit aussi de **fonder l'idée que "toutes" les propriétés du comportement aléatoire de l'angle $\widehat{OJM}$ pourront être saisies par le calcul de probabilité d'intervalles** (de même que pour la loi uniforme sur un intervalle de $\mathbb{R}$), calcul qui s'apprivoise - " une bonne fois pour toutes " - par

celui de la probabilité que l'angle $\widehat{OJM}$ soit plus petit que θ (θ quelconque dans $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$).

Considérons par exemple « l'évènement »[1] $\left(\widehat{OJM}\leq\frac{\pi}{6}\right)$.

Quitte à radoter un peu[2], il nous faut rappeler que :



- l'évènement $\left(\widehat{OJM}\leq\frac{\pi}{6}\right)$ n'est autre que la partie A de $[0,1]$ définie[3] par :

$$A=\left\{x\in[0,1]\,/\,\widehat{OJM}\leq\frac{\pi}{6}\text{ avec } M(x,0)\right\}\;;$$

- la probabilité de $(\widehat{OJM}\leq\frac{\pi}{6})$ est calculée par $\mathcal{U}(A)$ où $\mathcal{U}$ désigne la loi uniforme sur $[0,1]$.

Cela dit, nous pouvons quitter quelques instants le giron probabiliste pour nous tourner vers quelques rudiments de trigonométrie.

Nous tenons de la croissance de la fonction tangente sur $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ les équivalences suivantes :

$$\widehat{OJM}\leq\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow\tan\widehat{OJM}\leq\tan\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow\frac{OM}{OJ}\leq\tan\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow x\leq\tan\frac{\pi}{6}.$$

Il en découle que l'évènement $\left(\widehat{OJM}\leq\frac{\pi}{6}\right)$ est l'intervalle $\left[0,\tan\frac{\pi}{6}\right]$ de $[0,1]$ dont la probabilité est $\tan\frac{\pi}{6}$ ($\frac{\sqrt{3}}{3}$ si l'on y tient vraiment).

En maintenant exactement le même point de vue, on obtient sans difficulté les résultats suivants, toujours sous l'hypothèse du choix au hasard du réel x dans $[0,1]$:

- soit a et b deux réels de l'intervalle $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ tels que $a\leq b$; la probabilité de l'évènement $(a\leq\widehat{OJM}\leq b)$ est la probabilité uniforme sur $[0,1]$ de l'évènement $\{x\in[0,1]/\tan a\leq x\leq\tan b\}$, à savoir $\tan b-\tan a$;

[1] Pourquoi entre guillemets ? En toute rigueur, nous ne savons pas a priori si nous avons à faire à une partie mesurable de $[0,1]$ (quand bien même avons nous des raisons immédiates de le penser). Sachant que, comme pour la loi uniforme, notre lot quotidien sera fait de réunions finies d'intervalles, nous abandonnons définitivement ces précautions typographiques.

[2] Ceci est le premier acte de la session de rattrapage annoncée dans le chapitre 2 (page 43)

[3] Cette égalité cruciale pour la compréhension des affaires est trop souvent occultée, hélas, dans les ouvrages et manuels de Probabilités (trop encombrante ?, trop "allant de soi" ?).

- la probabilité de l'évènement $(\widehat{OJM} = \theta_0)$ où θ_0 est un réel donné de $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ est la probabilité uniforme sur $[0,1]$ de l'événement $\{x \in [0,1] / \tan x = \theta_0\}$, c'est-à-dire zéro (parce que cet évènement est réduit à un point) ;
- etc. (nous voulons dire, sans entrer dans les détails, que nous avons sous la main quelques moyens de réponse aux interrogations de l'énoncé).

Et s'il y avait à tirer quelques premiers enseignements de l'étude précédente, nous insisterions volontiers sur la *mise en évidence de phénomènes aléatoires continus* qui ne relèvent pas nécessairement du modèle uniforme (nous reviendrons largement sur le procédé utilisé) et d'autre part sur la possibilité qui nous est offerte de *donner aux élèves une bonne prise, concrète, sensible de la notion de probabilité d'un évènement* (tel que $\widehat{OJM} \leq \frac{\pi}{6}$), notion trop riche pour être réduite d'emblée à la formule " coup de poing " : $P([a,b]) = \int_a^b (1+\tan^2 x)\,\mathrm{d}x$.

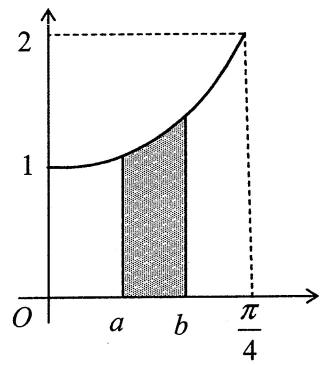
L'enchaînement est tout trouvé.

1.2 La notion de densité (premier épisode)

Du point de vue mathématique, l'affaire est d'une grande simplicité.

En effet, il n'y a pas grand chose à récupérer dans l'arsenal de l'Analyse pour établir que :

- $\tan b - \tan a = \int_a^b (1+\tan^2 x)\,\mathrm{d}x$;
- la fonction $f = 1 + \tan^2$ est continue et positive sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ et $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+\tan^2 x)\,\mathrm{d}x = 1$.



Nous pouvons alors interpréter la probabilité de l'évènement $(a \leq \widehat{OJM} \leq b)$ comme l'*aire* convenable sous la courbe représentative de la fonction f et poser que nous venons de fabriquer une loi de probabilité continue sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, notée *P*, entièrement définie par la probabilité d'intervalle :

$P([a,b]) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, la fonction *f* étant appelée densité de la loi tangente[4].

À peu de chose près, le tour est joué.

En revanche, **du point de vue didactique**, le bât blesse un peu : on ne voit pas pourquoi on accorderait un intérêt soudain à la fonction *f*. Et, par ailleurs, ce serait un piètre alibi

[4] C'est le nom que nous avons adopté pour la loi de probabilité *P*.

que de faire appel au soit disant pouvoir évocateur - de primitives, bien sûr - de l'écriture de $P([a,b])$ sous une forme $F(b)-F(a)$.

Bref, il est clair qu'à cet endroit, l'introduction de la notion de densité ne répond à aucun besoin immédiat.

Mais, comme nous l'avons déjà annoncé (voir page 17), l'étude d'exemples de phénomènes continus n'est pas une fin en soi. Elle vise d'une part à dégager une famille de propriétés communes susceptibles de fonder la notion de loi continue (évidemment à l'aide d'une densité) et d'autre part à bien préparer le terrain où va s'exercer avec pertinence la notion de densité.

Disons-le autrement. Il ne viendrait à personne l'idée d'émettre la moindre réserve quant à la notion de densité. Chacun connaît sa longue carrière en Probabilités, même sous le point de vue le plus élémentaire : calculs de moments (espérance, variance, ...) par exemple, ou encore convolution de HAAR pour obtenir la densité de la somme de deux variables aléatoires indépendantes, etc..

Il n'en reste pas moins une évidence difficile à réfuter : en dehors de la définition d'une loi continue "imposée" par le programme et de quelques exercices volontairement ciblés, la notion de densité n'est guère prégnante en Terminale S, sauf à considérer, par exemple, l'approximation continue d'un phénomène discret, la simulation discrétisée d'un phénomène continu...

En conséquence, la logique interne de la démarche adoptée conduit à mettre en place le dispositif suivant[5] :

- explorer la notion de densité à travers quelques exemples de phénomènes continus (bien noter que nous n'aurons pas à l'habiller à neuf pour sa mise en œuvre la plus judicieuse) ;
- étudier, ne serait-ce qu'une fois, un mode d'intervention de cette notion qui ne se réduise pas à ce seul aspect : « courbe de densité ; aire sous la courbe »[6] ;
- indiquer simplement aux élèves, qu'à l'instant où nous sommes, elle est bien loin d'avoir montrer tous ses effets.

1.3 Sur la construction d'une loi continue

• Il nous faut d'abord disséquer encore un peu plus notre exemple de référence.

Considérons l'application T définie par :

$$T:[0,1]\to\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$$
$$x\mapsto\widehat{OJM}\quad\text{avec } M(x,0).$$

L'étude que nous avons conduite n'avait pas d'autre objet que le calcul de la probabilité

[5] Certains y verront une ingénierie bricolée pour la circonstance (circonstance = tendance irrésistible à lorgner vers la définition d'une loi continue), d'autres un simple recul tactique pédagogiquement acceptable etc.. Le mieux est de juger sur pièce.

[6] Voir le paragraphe 2.2 de ce chapitre.

(selon la loi uniforme sur $[0,1]$), des évènements $\{x \in [0,1] / \widehat{OJM} \leq \theta\}$, $\{x \in [0,1] / \widehat{OJM} = \theta\}$ et $\{x \in [0,1] / a \leq \widehat{OJM} \leq b\}$ que, sans ambiguïté, nous pouvons respectivement noter $(T \leq \theta)$, $(T = \theta)$ et $(a \leq T \leq b)$.

Et, en convenant de noter momentanément $\mathcal{U}$ la loi uniforme sur $[0,1]$, la loi de probabilité que nous venons de construire (baptisée loi tangente) est entièrement définie par la probabilité d'intervalles :

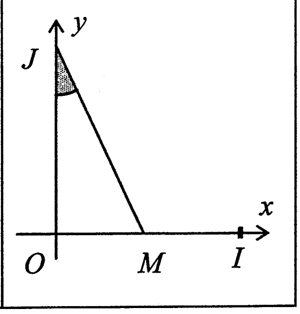
$$P([a,b]) = \mathcal{U}\left(T^{-1}([a,b])\right), \text{pour } [a,b] \subset \left[0, \frac{\pi}{4}\right].$$

Alors, à ce moment de l'histoire où nous sommes maintenant arrivés, nous voyons mal ce qui pourrait nous retenir d'appeler l'application T **variable aléatoire** à valeurs dans $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. Certes, cette avancée vaut une discussion (voir paragraphe 1.4), mais considérons, pour l'instant, qu'il ne s'agit que d'un détail.

En revanche, nous tenons de l'expérience que l'épisode « *construction d'une loi de probabilité continue à partir de la loi uniforme* » mérite un paragraphe à lui tout seul.

Le voici.

- Nous allons remettre en selle la technique du dédoublement *discret-continu* : elle présente l'avantage de fournir des explications "toutes simples" sur cette construction, d'héberger de nombreuses réponses aux questions qu'elle suscite et l'inconvénient des contraintes du genre comparatif (vite dit, il nous faudra réfléchir aussi, sur ce "qui est pareil" et ce qui ne l'est pas).

CAS DISCRET	CAS CONTINU
Description d'une expérience aléatoire	
On lance deux dés. L'ensemble Ω des issues est : $\Omega = \{(i,j) \in \mathbb{N}^2 / 1 \leq i \leq 6 \text{ et } 1 \leq j \leq 6\}$.	On tire aléatoirement un réel dans $[0,1]$. L'ensemble Ω des issues est : $\Omega = [0,1]$.
Modèle probabiliste retenu	
La loi équirépartie sur Ω notée P.	La loi uniforme sur Ω notée $\mathcal{U}$.
Introduction d'une variable aléatoire	
$S : \Omega \to [\![2,12]\!]$ $(i,j) \mapsto i+j$ (S est communément dénommée " somme des points obtenus ")	$T : [0,1] \to \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ $x \mapsto \widehat{OJM}$ où M a pour coordonnées $(x,0)$ 

<table>
<tr><th colspan="2">Un exemple d'évènement A</th></tr>
<tr>
<td>Soit n un entier entre 2 et 12.
$A=(S=n)$ désigne l'évènement :
$A=\{(i,j)\in\Omega / S((i,j))=n\}$
$A=\{(i,j)\in\Omega / i+j=n\}$</td>
<td>Soit θ un réel entre 0 et $\frac{\pi}{4}$.
$A=(T\leq\theta)$ désigne l'évènement :
$A=\{x\in\Omega / T(x)\leq\theta\}$
$A=\{x\in\Omega / \widehat{OJM}\leq\theta \text{ avec } M(x,0)\}$</td>
</tr>
<tr><th colspan="2">Probabilité de l'évènement A</th></tr>
<tr>
<td>Il s'agit de $P(A)$.
Les résultats sont archiconnus :
$n=2$, $P(A)=\frac{1}{36}$; $n=3$, $P(A)=\frac{2}{36}$;
$n=7$, $P(A)=\frac{6}{36}$, etc..</td>
<td>Il s'agit de $\mathcal{U}(A)$.
Et comme nous l'avons vu :
$\mathcal{U}(A)=\tan\theta$.</td>
</tr>
<tr><th colspan="2">Loi de probabilité sur l'univers image Ω'</th></tr>
<tr>
<td>$\Omega'=[\![2,12]\!]$ et l'on a :
pour $n=2$, $P(S=2)=\frac{1}{36}$,
pour $n=3$, $P(S=3)=\frac{2}{36}$, etc...
D'où la définition d'une loi de probabilité Π sur Ω' par le tableau « classique »:
<table>
<tr><td>$\omega\in\Omega'$</td><td>2</td><td>3</td><td>----</td><td>7</td><td>---</td><td>11</td><td>12</td></tr>
<tr><td>$\Pi(\omega)$</td><td>$\frac{1}{36}$</td><td>$\frac{2}{36}$</td><td></td><td>$\frac{6}{36}$</td><td></td><td>$\frac{2}{36}$</td><td>$\frac{1}{36}$</td></tr>
</table>
</td>
<td>$\Omega'=\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ et l'on a :
pour tout intervalle $[a,b]$ contenu dans $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$,
$\mathcal{U}(a\leq T\leq b)=\tan b-\tan a$.
D'où la définition d'une loi de probabilité Π sur Ω' par la probabilité d'intervalles : (que l'on pourrait présenter par $\Pi([a,b])=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ où $f(x)=1+\tan^2 x$, ce qui ici n'est pas crucial.</td>
</tr>
</table>

Nous venons de construire, dans le même mouvement, une loi de probabilité Π sur l'univers image Ω', avec pour différence marquante[7] *la manière de définir cette loi de probabilité* :

- tableau des issues élémentaires accompagnées de leur probabilité dans le cas discret ;
- probabilité d'intervalles dans le cas continu.

[7] Nous ne tiendrons pas compte ici, que si S peut être remplacée par n'importe quelle application de Ω dans un ensemble Ω', il n'en est plus de même pour la variable aléatoire T.

Une telle construction des lois de probabilité continues n'est pas une anecdote de faible intérêt, bien au contraire.

- D'une part, *le procédé est de portée générale.*
  Soit $\mathcal{U}$ la loi uniforme sur $[0,1]$ et X une application " raisonnable " de $[0,1]$ dans un intervalle I. En posant, pour tout $[a,b]$ contenu dans I :
  $\Pi([a,b]) = \mathcal{U}(X^{-1}([a,b]))$, on obtient une loi de probabilité Π sur I.
- D'autre part, *le transport à l'aide d'une variable aléatoire* de la loi uniforme sur $[0,1]$ en une loi continue (non nécessairement uniforme) sur un intervalle I ne fait qu'élargir au cas continu une pratique bien installée en classe de Première dans le cas discret[8] ([3] pages 21 et 22 et [5] page 17).

1.4 Variable aléatoire ou non ?

L'interrogation est légitime, ne serait-ce que parce que *l'introduction de cette notion dans le cadre des lois continues n'est pas inscrite au programme.*
Faisons le pari que nous tenons là l'une de ces mesures préventives visant à museler tous les débordements formels auxquels cette introduction pourrait éventuellement se prêter.

Pari gagné d'avance, compte tenu de l'omniprésence de la notion *en tant que telle* dans le document d'accompagnement des programmes ([4]) :

- **de manière implicite**

Exemple 1 ([4] page 72) : « la durée de vie du noyau (radioactif) est ***une quantité aléatoire***[9] qui peut être modélisée par une loi de probabilité sur l'ensemble des réels positifs ».

Exemple 2 ([4] page 135) : « la quantité $d^2 = \left(f_1 - \frac{1}{6}\right)^2 + \left(f_2 - \frac{1}{6}\right)^2 + \cdots + \left(f_6 - \frac{1}{6}\right)^2$ est soumise à la fluctuation d'échantillonnage, i. e. ***sa valeur varie***[9] d'une série de lancers à l'autre ».

- **de manière explicite**

Exemple 3 ([4] pages 134 et 135) : « on choisit un réel x au hasard dans $[0,1]$... On considère la ***variable aléatoire***[9] X qui à x fait correspondre $-\ln x$... ».

Tout compte fait, voilà d'autres raisons qui viennent s'additionner aux précédentes (paragraphe 1.3) pour une introduction *-sans débordements donc-* de la notion de variable aléatoire dans le cas continu : c'est le parti retenu dans le reste de cet ouvrage.

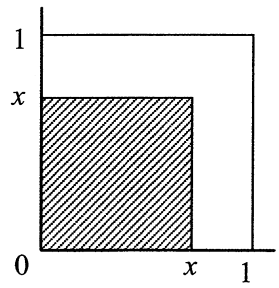
---

[8] Compte tenu de la définition de loi de probabilité continue adoptée en classe de Terminale, certaines restrictions s'imposent d'elles mêmes quant " au choix " des variables aléatoires (voir « un écueil à éviter » dans le prochain paragraphe).

[9] C'est nous qui soulignons.

Remarque 1 : **un écueil à éviter**

Même sans connaître la question de première main il est une embûche facile à deviner : la (très) modeste étude qui suit va permettre de s'en convaincre.
Soit x un réel choisi au hasard dans $[0,1]$. Désignons par S la variable aléatoire qui : à x fait correspondre l'aire du carré de côté x.



Il est évident que S est à valeurs dans $[0,1]$, que la fonction de répartition F est définie sur cet intervalle par $F(x) = \sqrt{x}$ (la probabilité de l'évènement $(S \leq x)$ est en effet égale à $\sqrt{x}$) et guère moins que F n'est pas dérivable en zéro.
Voilà donc une variable aléatoire démunie de densité au sens de la définition adoptée en Terminale (ce qui ne serait évidemment pas le cas dans un " vrai " livre de probabilités).
Moralité : un peu de circonspection s'impose.

Remarque 2 : **sur l'expression « variable aléatoire »**
Dans le cas discret, une variable aléatoire X est d'abord une application de l'univers Ω associée à une expérience aléatoire sur $V = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ (ensemble des valeurs). Mais, dès que l'on connaît la loi de probabilité de X, on jette Ω au rebut (ou presque...) et la *fonction* devient *variable aléatoire X* prenant les valeurs $x_1, x_2, ..., x_n$ avec les probabilités $p_1, p_2, ..., p_n$, d'où l'adjectif « aléatoire ».

Cela étant bien entendu, il n'y a guère à creuser plus profond pour adapter les formulations précédentes au cas continu (les simples effets du voisinage *discret-continu* présentés page 103 y pourvoient largement (Essayer)).

Cette remarque, qui rentre un peu par la bande dans notre sujet, vise à nous désolidariser d'une tendance (qui trouve un trop large écho), consistant à "tirer à vue" sur l'expression « variable aléatoire ».

2. Les lois continues

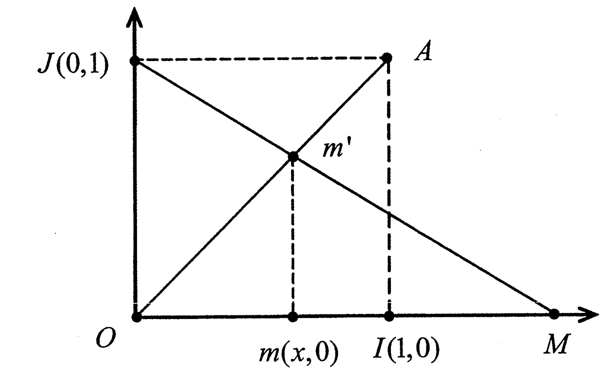
2.1 Extension à un intervalle non borné

Nous entendons faire du « bon pain » dans le Chapitre 5 (La loi exponentielle) avec l'exemple précédemment cité : « *Étude de* $X=-\ln x$ *; x pris au hasard dans* $]0,1]$ » (exemple significatif s'il en est de loi continue sur $[0,+\infty[$ [10]) ; nous le récuserons donc momentanément.

Mais, pas moins éloquente est l'étude de la situation suivante :

Le réel x étant pris au hasard dans $[0,1[$, on note (voir figure qui fait savoir que le plan est muni d'un repère orthonormal) :

- **m le point de coordonnées $(x,0)$;**
- **m' le point du segment $[OA[$ d'abscisse x ;**
- **M le point d'intersection de (Jm') avec l'axe des abscisses ;**
- **et enfin X la variable aléatoire qui à x associe la longueur de $[OM]$.**



Qu'en est-il de la distribution de X ?

La longueur OM pouvant prendre n'importe quelle valeur positive, nous tirons de cette évidence géométrique que **la variable aléatoire X est à valeurs dans** $[0,+\infty[$, ce qui tranche notablement avec les épisodes passés.

Amère pilule ? Pas vraiment : l'étude du comportement aléatoire de la longueur OM reposera encore sur le calcul de la probabilité de l'événement $(0\le X\le a)$, sauf qu'il se trouve que a est un réel positif quelconque.

D'une autre évidence géométrique[11] (un peu moindre peut-être) nous soutirons la relation $OM=\dfrac{Om}{1-Om}$, puis :

$\mathbb{P}(0\le X\le a)=\mathcal{U}\left(x\in[0,1[\,/\,\dfrac{x}{1-x}\le a\right)=\mathcal{U}\left(\left[0,\dfrac{a}{1+a}\right]\right)$ où $\mathcal{U}$ désigne la loi uniforme sur $[0,1[$, d'où :

$$\boldsymbol{\mathbb{P}(0\le X\le a)=\frac{a}{1+a}\quad(0\le a)}.$$

---

[10] Parce qu'il correspond à l'exemple phare du Programme, en la matière : la loi exponentielle (cf. paragraphe 1.2 du chapitre 5 (page 239)

[11] Le théorème de THALÈS, par exemple.

Voilà de quoi combler n'importe quel individu acclimaté au transfert de lois :
- d'une part, sont généreusement réalisées les propriétés requises permettant d'affirmer qu'en posant $P(A)=\mathcal{U}\left(X^{-1}(A)\right)$ (pour toute partie " convenable " A de $[0,+\infty[$), *P est une loi de probabilité sur* $[0,+\infty[$;
- d'autre part, il ne coûte plus rien d'avancer que la *variable aléatoire X suit la loi de probabilité P*, ou, si l'on préfère que la fonction de répartition F de X est définie par : $F(x)=P([0,x])=\dfrac{x}{x+1}$ (en l'occurrence).

À l'évidence hors piste en Terminale avec un tel "document", c'est plutôt avec **la notion de densité sur l'intervalle $[0,+\infty[$**, que nous allons nous en expliquer. Considérons pour cela la dérivée f de F (à l'œil F est dérivable). Nous avons $f(x)=\dfrac{1}{(1+x)^2}$ pour $x\geq 0$, d'où il ressort en premier lieu que *f est une fonction continue positive sur* $[0,+\infty[$.

Il est alors légitime d'écrire $F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ et de traduire l'égalité (immédiate à obtenir) $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=1$ par $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t=1$ ou encore $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t=1$.

Rassemblons ces résultats qui n'avaient pas encore percé dans le seul calcul de la probabilité de $(0\leq X\leq a)$ pour $a\geq 0$.

Nous disposons d'une fonction **f continue positive sur $[0,+\infty[$ telle que $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t=1$** (où le symbole $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ ne peut être entendu que comme la limite en $+\infty$ - dès lors qu'elle existe - de la fonction $x\mapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$).

Dans ces conditions nous pouvons construire **une loi de probabilité P sur $[0,+\infty[$** :

- définie par les probabilités d'intervalles
$P([a,b])=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, $P([a,+\infty[)=1-\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$ (ou $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$) ;
- aux attributs convenables en ce qui concerne le " passage " au complémentaire, la réunion finie, etc..

Dès lors, pour en revenir à la situation initiale (sans pour autant mettre en avant un modèle de locution à imiter et à chérir), nous acceptons l'idée que notre étude trouve un juste résumé dans la formulation :

« *La variable aléatoire X suit la loi de probabilité sur* $[0,+\infty[$ *de densité* $x\mapsto\dfrac{x}{(1+x)^2}$ ».

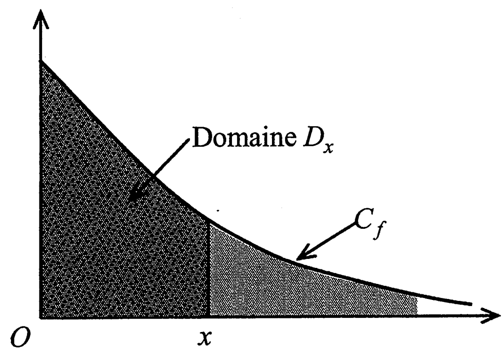
Remarques

1. Ces quelques lignes constituent à nos yeux le réduit un peu sérieux où la notion de loi de probabilité continue sur un intervalle non borné peut être présentée, codifiée (au prix de quelques exemples se coulant dans la ligne de pente de celui que nous venons d'étudier[12], joignons y l'adjectif « expliquée »).

2. Dans cette histoire, les seuls intervalles non bornés considérés sont les *intervalles limités à gauche* (du type $[a,+\infty[$).

   Ce n'est pas une marche arrière, plutôt une consigne du Programme et nous acquiesçons : chacun sait les élucubrations foisonnantes auxquelles peut se prêter une intégrale de la forme $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ ... (par exemple).

   Toujours sur ce point et quitte à encombrer notre chronique « Garde-fous » de choses inutiles, faut-il signaler que la rubrique *« intégrale généralisée »* n'est au programme d'aucune classe de l'Enseignement secondaire ?
   Que l'on sache, *le calcul d'aire sous une courbe sur un intervalle non borné* (illustration ci-après) n'a rien d'une curiosité archéologique (c'est même plutôt un lieu commun des problèmes d'Annales au Baccalauréat).
   Pourquoi lorsqu'il s'agit du calcul des probabilités, ne pourrait-on pas rester à l'intérieur de ce répertoire et s'abstenir de verser au compte d'on ne sait quelle nouveauté une surcharge inutile[13] ?



Aire du domaine $D_x = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$

Aire sous la courbe $=1$

[12] De tels exercices participent à la compréhension de ce que peut être un phénomène aléatoire décrit par une loi de probabilité continue sur un intervalle non borné, a contrario des exercices de ce calibre : « *Soit f telle fonction sur* $[0,+\infty[$. *Montrer que f est une densité... Calculer la probabilité de ..., etc.* », quand bien même, par lucidité bienveillante nous leur accorderions quelques vertus : maîtrise des définitions, sens de $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$, compréhension de la probabilité d'intervalles, etc..

[13] Paragraphe belliqueux alimenté par la rumeur sur certaines pratiques ? Oui.

2.2 Sur la notion de densité (deuxième épisode)

2.2.1 Le point de vue local

Comme nous l'avons laissé prévoir (Paragraphe 1 page 101), nous revenons sur la notion de densité avec le point de vue suivant :

« **La notion de densité ne peut se comprendre hors de ses références aux Probabilités** ».

Projet ambitieux assurément, d'autant que, jusqu'à présent - il faut bien le reconnaître - le " parcours découverte " s'est trouvé résumé le plus souvent à une visite de courtoisie[14].

On se dit alors qu'il est temps d'arriver aux choses sérieuses...

Nous avons donné un aperçu[15] d'une démarche inscrite dans le cadre graphique où se forge l'idée d'une courbe accomplie, "au dessus de la mêlée", autour de laquelle viennent s'agglutiner les histogrammes de fréquence : **la courbe de densité**. La probabilité "théorique" d'un intervalle perce alors "naturellement" *comme l'aire sous la courbe de densité.*

Désir de pédagogie ou non, il nous paraît utile de conduire une étude venant *compléter* ce point de vue, que nous qualifierons **d'étude locale au premier ordre**, parce que centrée (sobrement[16]) sur la propriété $\boldsymbol{P([a,a+h]) \sim h \times \mathrm{f}(a)}$ (où *f* est la densité de *P*).

En effet, une telle étude permettrait :

- d'une part, de sonder plus profond dans les rapports entre densité et fonction de répartition en faisant basculer **pour une fois** l'équilibre de ce duo vers la densité ;
- d'autre part, de donner l'idée que, même à ce niveau modeste, le rôle de la densité ne se réduit pas à jouer les utilités (et du coup battre en brèche les quelques opinions qui prétendraient vouloir s'en passer).

Dans notre esprit, il s'agit donc de proposer aux élèves un exemple de situation aléatoire où **l'explicitation d'une loi continue va se trouver affiliée à celle de la densité.**

Et nous avons les moyens :

- quelques compétences sur la loi uniforme donnent la faculté de construire des *variables aléatoires continues X* pour lesquelles la notion de la probabilité de $(X \leq a)$ n'est pas (au moins empiriquement) dénuée de significations ;
- et ce n'est pas en cousine appliquée que nous pouvons faire intervenir la *simulation* ; en termes prosaïques : des interprétations, des conjectures : OUI ; des résultats censés établis par soumission à la page écran : NON.

---

[14] Nous renvoyons au « premier épisode », notamment à la page 102.

[15] Nous faisons référence à l'extrait du Document d'accompagnement des programmes reproduit in extenso dans le paragraphe 4 du chapitre 1.

[16] Sans concéder aucune facilité ; ainsi sera scrupuleusement tenue à l'écart cette calembredaine « la probabilité du petit intervalle $\mathrm{d}x$ est $f(x)\mathrm{d}x$ » (?), énoncée plus qu'à son tour dans des ouvrages qu'une compassion soudaine nous recommande de laisser dans l'ombre.

2.2.2 Sur la somme de deux nombres

- **Le problème**

Deux nombres x et y étant pris au hasard dans $[0,1]$, indépendamment l'un de l'autre, on considère la variable aléatoire $S:(x,y)\mapsto x+y$.

L'objet du problème est *d'étudier la distribution de la variable aléatoire* S.

- **Les modalités**

Comme en témoigne l'exercice 4-5 du chapitre 4, *ramener* le choix au hasard et indépendamment l'un de l'autre de deux nombres dans $[0,1]$ à celui d'un point au hasard dans $[0,1]\times[0,1]$ (i.e. selon la loi uniforme du carré) permet de trancher la question en un tournemain ou presque. Il n'est donc pas idiot de situer cette étude avant l'entrée en lice de ce point de vue.

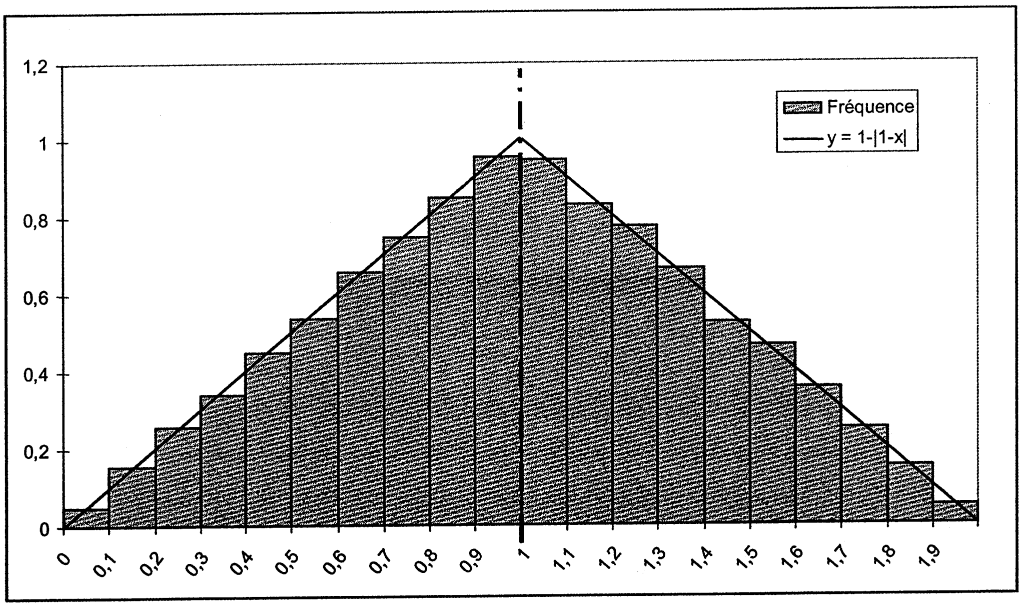
De plus, *le calcul "direct" de probabilités* (qui avait assuré notre réussite, par exemple, dans la recherche des distributions des variables aléatoires "max". (Exercice 2-28) et "min" (Exercice 2-29) au chapitre 2 va échouer[17] (et de là vient en particulier l'intérêt du problème).

Voyons alors le paysage que nous propose la simulation.

- **La simulation**

En ce qui concerne le *protocole* utilisé, nous renvoyons à l'exercice 4-5.

Un exemple :



---

[17] Nous formons l'hypothèse (à notre avis raisonnable) que les élèves ne doivent pas trop connaître la convolution de densités… et donc, que le problème sera rapidement reconnu comme spécimen de ceux dont on ne sait pas par quel bout les entamer.

- **Les conjectures**

Même sans faire preuve de physionomie, on peut tenir pour manifestes :
- la *forme triangulaire*[18] de la courbe de densité ;
- la présence *d'un axe de symétrie* Δ, d'équation $x=1$.

Remarque. Enchaîner tout de suite avec les calculs de probabilité auxquels conduisent les propriétés ainsi pressenties serait arrêter subito le travail (et faire comprendre, d'une certaine manière, que nous avons embrouillé la description des objectifs).

- **Étude de la symétrie**

Voilà une aubaine pour fouiller une nouvelle fois le graphique : « courbe de densité - aire sous la courbe ».
Cela suppose d'écarter la proposition suivante[19], parce que rangée sous la seule bannière « calcul différentiel - calcul intégral » pour se tourner résolument vers une approche probabiliste.

Proposition[20]

Soit une fonction f continue sur $[0,2]$ et la fonction F également définie sur $[0,2]$ par $F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) La droite d'équation $x=1$ est axe de symétrie de la courbe représentative de f ;

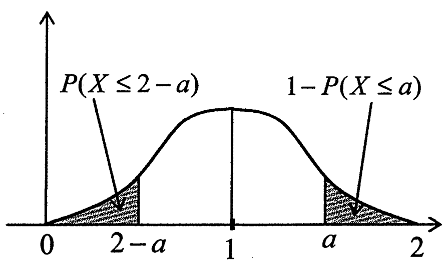
(2) Pour tout $x\in[0,2]$, $F(2-x)+F(x)=1$.

Le point de vue probabiliste

Considérons une variable aléatoire X (à valeur dans $[0,2]$) dont la courbe de densité admet la droite d'équation $x=1$ comme axe de symétrie et a un réel compris (par exemple) entre 1 et 2.

Alors comme nous l'indiquons dans la figure ci-contre, en interprétant les aires sous la courbe comme des probabilités (ce qu'elles sont) et en observant qu'elles sont égales (par symétrie), il vient[21] :

$$\mathbb{P}(X\le 2-a)=1-\mathbb{P}(X\le a).$$



---

[18] D'où elle tire le nom qui lui est généralement attribué : distribution triangulaire.

[19] La démonstration (facile) est laissée à l'entraînement du lecteur.

[20] L'intervalle $[0,2]$ ne joue aucun rôle particulier.

[21] Nous n'avons rien inventé : tout un chacun entretenant commerce avec la loi normale centrée réduite sait pertinent que ce n'est pas autrement que sont mises en place (et mémorisées) les propriétés fonctionnelles de la fonction de répartition.

Cette relation rejaillit par ricochet dans notre problème sous forme interrogative : « *Ne pouvait-on pas établir directement que pour* $0 \leq a \leq 2$,

$$\mathbb{P}(x+y \leq 2-a) = 1 - \mathbb{P}(x+y \leq a) \text{ ?»}$$

Le résultat qui suit (objet de l'exercice 2-26 du chapitre 2) est l'argument essentiel dans la réponse :

« *Si les nombres* x *et* y *sont choisis indépendamment l'un de l'autre, au hasard dans* $[0,1]$, *il en est de même des nombres* $1-x$ *et* $1-y$ »

Par suite, en notant $F(a)$ la probabilité que la somme de deux réels de ce calibre soit inférieure ou égale ou égale à a (a donné dans $[0,2]$) on a :

$$\mathbb{P}((1-x)+(1-y) \leq a) = F(a), \quad \text{soit } \mathbb{P}(x+y \geq 2-a) = F(a),$$

d'où l'égalité envisagée : $F(2-a) = 1 - F(a)$.

(Noter qu'en dérivant, on obtient $f(2-a) = f(a)$ (f étant la fonction de densité), égalité qui constitue une preuve formelle de l'invariance de la courbe $\mathscr{C}_f$ par la symétrie d'axe $x=1$, et qui, par ailleurs, participe à la démonstration de la proposition de la page précédente).

Ainsi, **à supposer connue la fonction de répartition de S sur $[0,1]$, il en sera de même sur $[0,2]$.**

Belle prise.

- **Étude de la densité sur $[0,1]$**

  Il nous intéresse de regarder de près *le modèle probabiliste simulé,* même s'il n'est pas sûr de s'offrir ainsi un succès didactique dans la classe…

Nous utiliserons une version simplifiée certes, mais qui ne change rien pour notre propos, selon les données suivantes :

- ➢ $\mathcal{D}_3$ désigne l'ensemble des décimaux de $[0,1[$ dont l'écriture décimale comporte au plus trois chiffres après la virgule ;
- ➢ l'expérience aléatoire consiste à choisir au hasard (i.e. selon le modèle équiréparti) deux nombres x et y de $\mathcal{D}_3$, indépendamment l'un de l'autre ;
- ➢ les valeurs (discrètes) de la variable aléatoire $S:(x,y) \mapsto x+y$ sont regroupées comme précédemment en classes d'amplitude $\frac{1}{10}$: $\left[\frac{k}{10}, \frac{k+1}{10}\right[$ $\quad (k \in [\![0,19]\!])$.

Alors dans ces conditions, pour $k \in [\![0,9]\!]$[22] :

$$\mathbf{\frac{1}{10} \times \frac{k}{10} \leq \mathbb{P}\left(\frac{k}{10} \leq S \leq \frac{k+1}{10}\right) \leq \frac{1}{10} \times \frac{k+1}{10}}.$$

---

[22] Seul maintenant l'intervalle $[0,1[$ nous occupe, d'où cette restriction.

En posant $x=\dfrac{i}{10^3}$ et $y=\dfrac{j}{10^3}$, avec i et j dans $[\![0,10^3-1]\!]$, nous avons l'équivalence :

$$\frac{k}{10}\leq\frac{i}{10^3}+\frac{j}{10^3}<\frac{k+1}{10}\Leftrightarrow 10^2k\leq i+j\leq 10^2k+10^2-1.$$

Le nombre N_k de couples (i,j) solutions de ces dernières égalités est alors :

$$N_k=(10^2k+1)+(10^2k+2)+\ldots+(10^2k+10^2).$$

En effet, avec $k\in[\![0,9]\!]$, il est clair que pour $p\in[\![0,10^2-1]\!]$, les solutions de

$i+j=10^2k+p$ sont les 10^2k+p+1 couples :

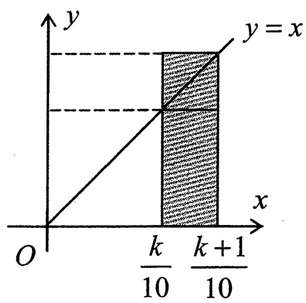
$$(0,10^2k+p),(1,10^2k+p-1),\ (2,10^2k+p-2),\ \ldots,\ \ (10^2k+p,0).$$

Nous avons donc : $\qquad N_k=10^4k+\dfrac{10^2(10^2+1)}{2}$.

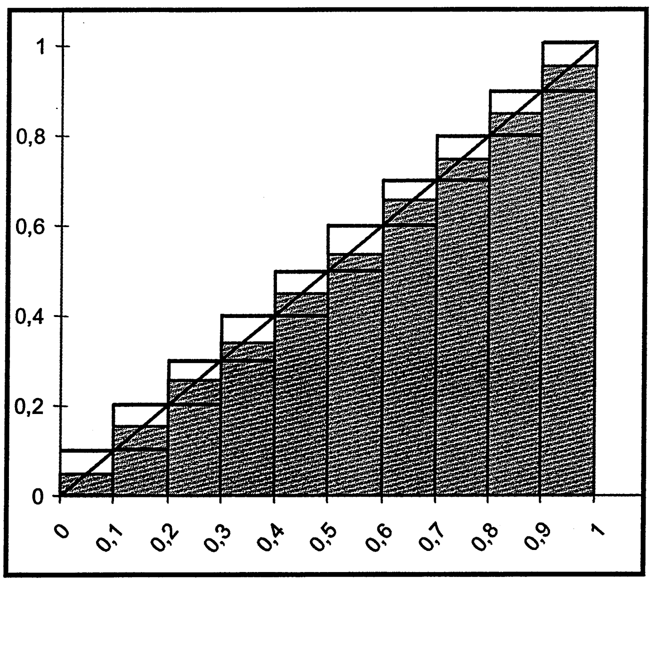
De l'encadrement immédiat : $10^4k\leq N_k\leq 10^4(k+1)$, il vient :

$\dfrac{10^4k}{10^3\times10^3}\leq\dfrac{N_k}{10^3\times10^3}\leq\dfrac{10^4(k+1)}{10^3\times10^3}$, ce que l'hypothèse d'équirépartition permet d'exprimer ainsi : $\dfrac{1}{10}\times\dfrac{k}{10}\leq\mathbb{P}\left(\dfrac{k}{10}\leq S<\dfrac{k+1}{10}\right)\leq\dfrac{1}{10}\times\dfrac{k+1}{10}$.

L'*interprétation graphique* ne sort pas de la tradition : le domaine limité par la courbe de densité et l'axe des abscisses sur l'intervalle $\left[\dfrac{k}{10},\dfrac{k+1}{10}\right[$ contient (respectivement est contenu) dans le rectangle de même base et de hauteur $\dfrac{k}{10}$ (respectivement $\dfrac{k+1}{10}$).



En reprenant la simulation précédente voici ce que l'on peut observer :



Clefs en mains, nous n'aurons guère plus que ce qui précède (l'exercice en classe de Terminale a ses limites). Mais nous pouvons admettre - et faire admettre - que l'encadrement que nous venons d'obtenir sert d'avant-garde à un résultat plus général :

pour tout réel a de $[0,1[$ et pour tout $h \geq 0$ (avec de plus $a+h<1$), nous avons :

$$\boldsymbol{h \times a \leq \mathbb{P}(a \leq S \leq a+h) \leq h \times (a+h)}.$$

En découle : $a \leq \dfrac{F(a+h)-F(a)}{h} \leq a+h$, puis par passage à la limite :

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(a+h)-F(a)}{h} = a.$$

Ainsi, la densité f est définie sur $[0,1[$ par $f(x)=x$, et pour finir, à l'aide d'une intégration élémentaire on obtient : $\boldsymbol{F(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}x^2 & \text{si } x \in [0,1[\,; \\ 1-\dfrac{1}{2}(2-x)^2 & \text{si } x \in [1,2]. \end{cases}}$

Commentaires

1. Un calcul, dont la longueur est la seule difficulté, montre que pour p et n entiers ($n > p$), lorsque l'on choisit x et y dans $\mathcal{D}_n$ (décimaux de $[0,1[$ à n chiffres ou plus après la virgule) selon la loi équirépartie et indépendamment l'un de l'autre, on a :

$$\frac{1}{10^p} \times \frac{k}{10^p} \leq \mathbb{P}\left(\frac{k}{10^p} \leq x+y < \frac{k+1}{10^p}\right) \leq \frac{1}{10^p} \times \frac{k+1}{10^p}.$$

Ceci confirme la portée générale du résultat obtenu.

2. Cet exemple évidemment n'éprouve pas tous les contours de la notion de densité[23]. Accordons lui au moins le modeste mérite de faire soupçonner que la lignée suivante, aussi nourrissante soit-elle, n'explique pas tout :

Courbe de densité → *Aire sous la courbe* → *Fonction de répartition* → *Probabilité*

Le point de vue local (au premier ordre), résumé par l'approximation affine tangente :

« $P(a+h) \sim P(a)+hf(a)$ »

apporte aussi sa contribution, que ce soit dans *l'évaluation de la densité* (comme dans la situation que nous venons d'étudier) ou dans les *protocoles de simulation* (ce n'est pas un scoop[24]), sans oublier *la loi de la radioactivité* de RUTHERFORD - SODDY (cf. chapitre 5) où il donne en classe de Terminale - du moins le pensons-nous - le meilleur de sa " vaguelette ".

---

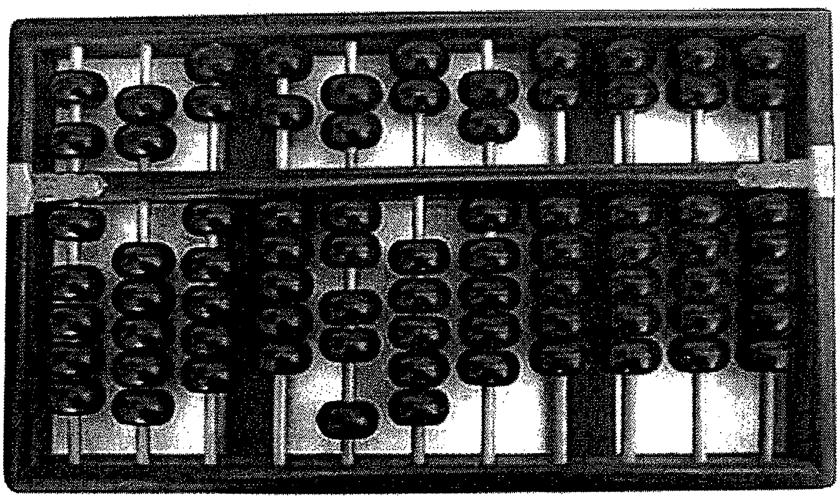
[23] Á supposer qu'il existe un tel exemple, ce qu'il serait ridicule de penser.

[24] La simulation de la courbe de densité s'inspire de cette approximation :

$$\widehat{F}\left(\frac{k+1}{10}\right)-\widehat{F}\left(\frac{k}{10}\right) \sim \frac{1}{10} \times \widehat{f}\left(\frac{k}{10}\right).$$

Détente

On tire au hasard une suite de nombres dans [0,1] indépendamment les uns des autres.
En moyenne, quel est le plus petit nombre de tirages nécessaires pour que la somme des nombres tirés soit plus grande que 1 ?



Boulier chinois

« *Entre le modèle mathématique et la réalité physique, un espace intermédiaire a été découvert, qui est celui du calcul.* »

Ivar EKELAND (Le Chaos 1995)

3- Exercices

Au programme :

- **Thème 1** *Étude de phénomènes aléatoires continus*

  (Exercices 3-1 à 3-4 et 3-7 à 3-9).

  On travaille dans le même esprit que celui qui anime l'étude de l'exemple de référence (page 99 du présent chapitre). Moins que de chercher à mettre un point sur chaque i (quoique, à la relecture...), l'objectif est centré sur la notion d'événement aléatoire et sur le mode de calcul de leur probabilité (pas de variable aléatoire donc, pour l'instant).

- **Thème 2** *Loi continue de probabilité sur un intervalle borné, variable aléatoire, densité*

  (Exercices 3-5, 3-6 et 3-10 à 3-15)

  Pour l'essentiel : recherche de lois de probabilité obtenues à partir de la loi uniforme par transfert à l'aide d'une variable aléatoire.

  À ne pas manquer le fringant résultat de l'exercice 3-13 (par ailleurs facile à établir).

- **Thème 3** *Loi continue de probabilité sur un intervalle* $[a,+\infty[$

  (Exercices 3-16 à 3-19)

  À signaler : le commentaire de l'exercice 3-17 (destiné aux enseignants), qui détaille les circonstances où le transfert :

  « *loi uniforme sur un intervalle borné* $\to$ *loi continue sur* $[a,+\infty[$ »

  prend une forme particulièrement simple.

- **Thème 4** *Divers*

  (Exercices 3-20 et 3-21)

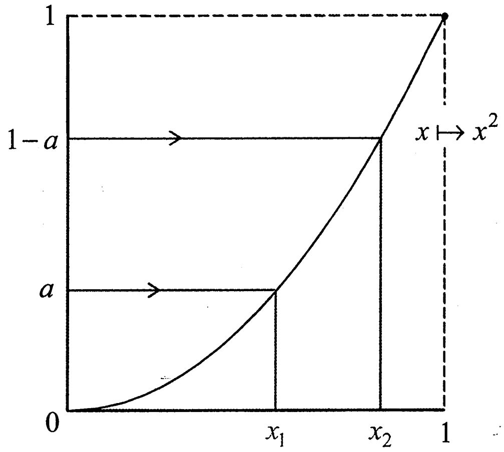
Exercice 3-1

Soit a un réel tel que $0 < a < 1$. On choisit au hasard un réel x dans $[0,1]$.

1-À l'aide de la représentation graphique de la fonction $x \mapsto x^2$, interpréter les événements $(x^2 \le a)$ et $(1-a \le x^2)$.

2-Quel est de ces deux événements le plus probable ?

Solution



1- Les événements $(x^2 \le a)$ et $(1-a \le x^2)$ sont les intervalles de $[0,1]$: $[0,x_1]$ et $[x_2,1]$ où x_1 et x_2 sont définis par la figure ci-contre.

2- Avec $x_1 = \sqrt{a}$ et $x_2 = \sqrt{1-a}$, il vient :

$\mathbb{P}(x^2 \le a) = \mathcal{U}_{[0,1]}([0,\sqrt{a}]) = \sqrt{a}$;

$\mathbb{P}(1-a \le x^2) = \mathcal{U}_{[0,1]}([\sqrt{1-a},1]) = 1-\sqrt{1-a}$.

La conjecture $\sqrt{a} \ge 1-\sqrt{1-a}$ ou de manière équivalente $\sqrt{a}+\sqrt{1-a} \ge 1$ est immédiate à établir, par comparaison des carrés :

$$(\sqrt{a}+\sqrt{1-a})^2 = 1+2\sqrt{a}\sqrt{1-a} \ge 1.$$

Ainsi l'événement $(x^2 \le a)$ est plus probable que l'événement $(1-a \le x^2)$.

Commentaires

1° Comprendre la signification d'un événement tel que $(x^2 \le a)$ ou $(1-a \le x^2)$, c'est-à-dire savoir le décrire comme une “ partie ” de $[0,1]$ (ici à l'aide d'une représentation graphique), puis, calculer sa probabilité avec une loi uniforme, constituent ce que nous voulons mettre en avant.

Cet objectif (trop modeste ?) prévaut également dans les exercices 3-2 à 3-4 sous le point de vue géométrique.

2° Nous avons en rayon de quoi combler le lecteur qui soupçonnerait une propriété plus générale et/ou qui souhaiterait s'affranchir des résultats “ lâchés ” par le calcul.

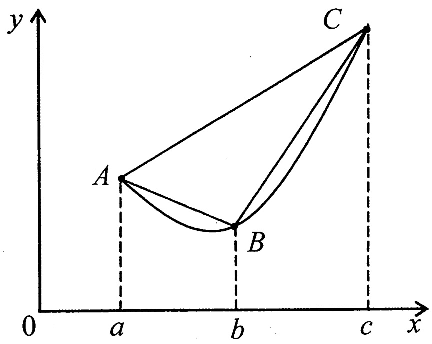
Soit f une fonction continue croissante de $[0,1]$ sur $[0,1]$ (on a donc $f(0)=0$ et $f(1)=1$) et a un réel fixé tel que $0 < a < 1$.

Un réel a étant choisi au hasard dans $[0,1]$, on considère les événements

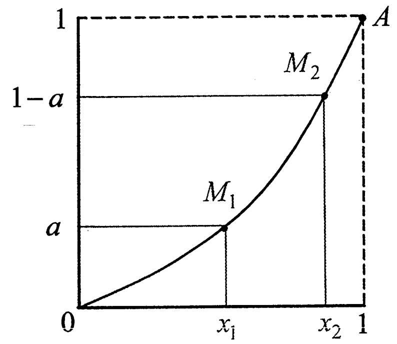
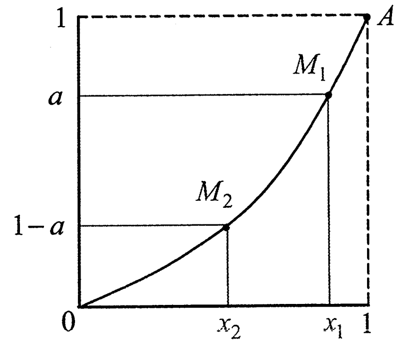
$$E_1 : (f(x) \le a) \text{ et } E_2 : (1-a \le f(x)).$$

Le résultat est que, si f est une fonction convexe sur $[0,1]$, alors $\mathbb{P}(E_1) \ge \mathbb{P}(E_2)$.

Il est de notoriété publique[1] qu'étant donné une fonction convexe, les pentes des sécantes (AB), (BC) et (AC) notées respectivement $m_{(AB)}$, $m_{(BC)}$ et $m_{(AC)}$ sont rangées dans l'ordre suivant : $m_{(AB)} \leq m_{(AC)} \leq m_{(BC)}$ (sous la condition $a < b < c$).



Nous examinerons deux cas, en gardant les notations introduites jusqu'à présent :

Cas 1 : $a < \frac{1}{2}$ d'où $x_1 < x_2$	**Cas 2 :** $a \geq \frac{1}{2}$ d'où $x_2 \leq x_1$
	

Cas 1

On a $m_{(OM_1)} \leq m_{(M_1M_2)} \leq m_{(M_2A)}$. Comme $m_{(OM_1)} = \dfrac{a}{x_1}$ et $m_{(M_2A)} = \dfrac{a}{1-x_2}$,

il vient : $\dfrac{a}{x_1} \leq \dfrac{a}{1-x_2}$, soit $1-x_2 \leq x_1$, d'où $\mathbb{P}(E_1) \geq \mathbb{P}(E_2)$.

Cas 2

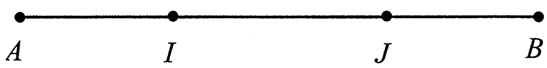
Nous avons toujours $m_{(M_2M_1)} \leq m_{(M_2A)}$.

La propriété que nous venons de rappeler indique de plus que la pente de la sécante (OM_1) est inférieure ou égale à celle de la sécante (M_2M_1). Nous en déduisons l'inégalité $m_{(OM_1)} \leq m_{(M_2A)}$ qui conduit au même résultat que dans le cas 1.

---

[1] Tout ouvrage un peu sérieux d'Analyse classique affiche ce résultat.

Exercice 3-2



Dans la figure ci-contre, le segment $[AB]$ est de longueur 1 et les points I et J sont tels que : $AI = BJ = a$ où $0 < a < 1$.
Un réel x étant pris au hasard dans $[0,1]$, on place les points M et N de $[AB]$ tels que : $AM = \sqrt{x}$ et $AN = x^2$.

Déterminer a de façon que les événements $(M \in [AI])$ et $(N \in [BJ])$ soient équiprobables.

Solution

L'événement $(M \in [AI])$ est décrit comme $\left\{x \in [0,1] / \sqrt{x} \le a\right\}$

et de même l'événement $(N \in [BJ])$ est décrit comme $\left\{x \in [0,1] / 1-a \le x^2 \le 1\right\}$.

Nous avons donc : $\mathbb{P}(M \in [AI]) = \mathcal{U}\left\{x \in [0,1] / x \le a^2\right\} = \mathcal{U}\left(\left[0, a^2\right]\right) = a^2$ et

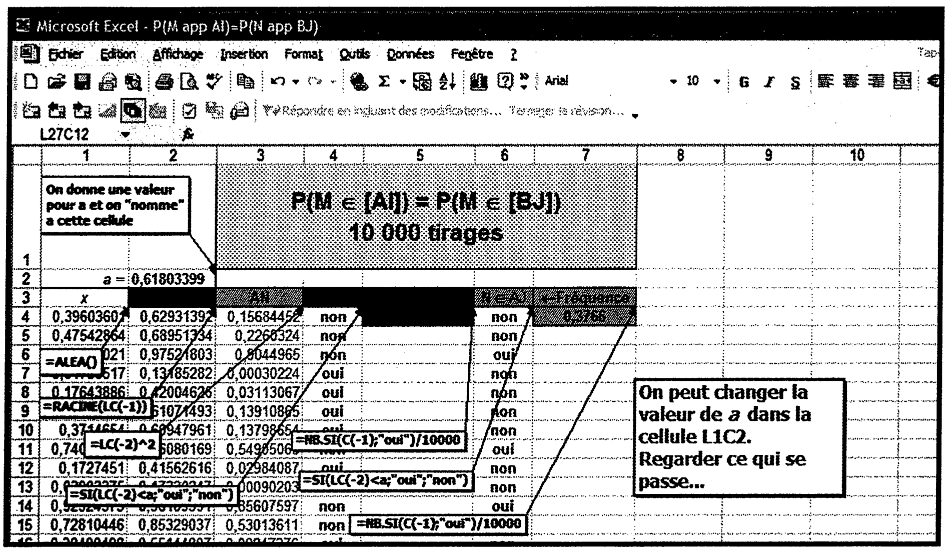
$$\mathbb{P}(N \in [BJ]) = \mathcal{U}\left\{x \in [0,1] / \sqrt{1-a} \le x \le 1\right\} = \mathcal{U}\left(\left[\sqrt{1-a}, 1\right]\right) = 1 - \sqrt{1-a}.$$

($\mathcal{U}$ désignant évidemment la loi uniforme sur $[0,1]$)

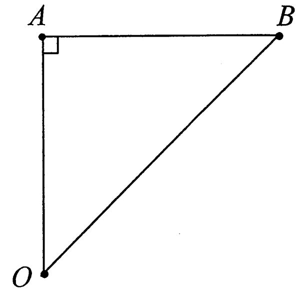
Il s'agit alors de résoudre dans $]0,1[$ l'équation $1 - \sqrt{1-a} = a^2$.
Cette équation est équivalente à
$1 - a^2 = \sqrt{1-a}$ ou encore, comme $1-a^2$ et $\sqrt{1-a}$ sont positifs, à $\left(1-a^2\right)^2 = 1-a$.
Cette dernière, écrite sous la forme $a(1-a)\left(a^2+a-1\right) = 0$, livre trois solutions :

- $a = 0$ et $a = 1$, que nous éliminons compte tenu de $0 < a < 1$;
- $a = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ (inverse du nombre d'or ...).

Simulation



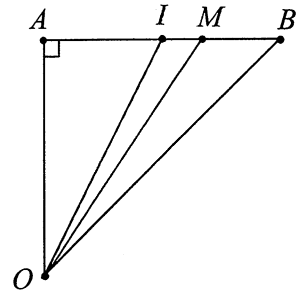
Dans les exercices 3-3 à 3-5, on considère un triangle OAB rectangle isocèle en A avec $AO = AB = a$.
Un point M est alors choisi au hasard sur le segment $[AB]$.



Exercice 3-3

Soit I le milieu de $[AB]$. Quelle est la probabilité de l'événement $(OM \geq OI)$?

Solution



Déterminer la zone favorable à la réalisation de l'événement $(OM \geq OI)$ n'est pas une grande prouesse géométrique (voir figure).

Et donc - sans calcul - $\mathbb{P}(OM \geq OI) = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 3-4

Soit ℓ un nombre compris entre OA et OB.
Quelle est la probabilité de l'événement $(OM \leq \ell)$?

Solution

Avec $AM^2 = OM^2 - OA^2$ (Pythagore), l'événement $(OM \leq \ell)$ est :

$$\left\{M \in [AB] / AM^2 \leq \ell^2 - a^2\right\}, \text{ soit } \left\{M \in [AB] / AM \leq \sqrt{\ell^2 - a^2}\right\}.$$

Le choix de M au hasard sur $[AB]$ signifiant que la longueur de AM suit la loi uniforme sur $[0, a]$:

$$\mathbb{P}(OM \leq \ell) = \mathcal{U}_{[0,a]}\left(\left[0, \sqrt{\ell^2 - a^2}\right]\right) = \frac{\sqrt{\ell^2 - a^2}}{a}.$$

L'égalité $\mathbb{P}(OM \leq \ell) = \sqrt{\left(\dfrac{\ell}{a}\right)^2 - 1}$, dit la même chose, en plus homogène.

Commentaire

La fonction de répartition F de la variable aléatoire $X : AM \mapsto OM$ définie sur $\left[a, a\sqrt{2}\right]$ par $F(x) = \sqrt{\left(\dfrac{x}{a}\right)^2 - 1}$ n'étant pas dérivable au point a, on s'abstiendra de toute tentative sur le calcul de la densité pour rester dans les limites du programme et ne pas engager le « cours » sur les intégrales généralisées…

Exercice 3-5

Quelles sont les lois des variables aléatoires X et Y définies par :

- $X : M \mapsto \text{aire}(AOM)$;
- $Y : M \mapsto \text{aire}(BOM)$?

Solution

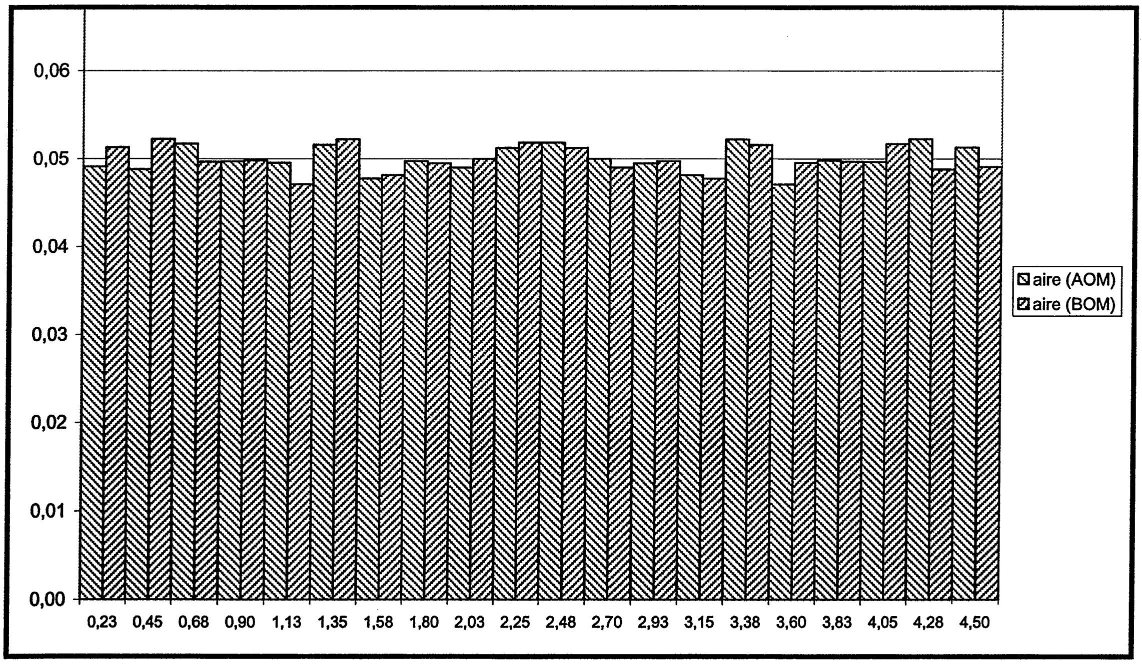
Les variables aléatoires X et Y sont manifestement à valeurs dans $\left[0, \frac{a^2}{2}\right]$ et avec $\text{aire}(AOM) = \frac{1}{2}a \times AM$ et $\text{aire}(BOM) = \frac{1}{2}a \times (a - AM)$, il est presque immédiat (via un calcul rudimentaire que, pour une fois, nous ne déclinerons pas) que X et Y suivent toutes deux la loi uniforme sur $\left[0, \frac{a^2}{2}\right]$.

Simulation

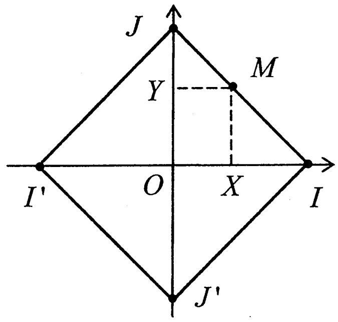
L23C10 fx

	1	2	3	4	5	6	7
1	Loi de AOM et BOM 20 000 tirages						
2	a =	3				Fréquence	
3	AM	aire (AOM)	aire (BOM)	"rang"	"Intervalle"	X	Y
4	0,93205766	1,39808649	3,10191351	0,5	0,23	0,04910	0,05130
5	1,37227354	2,0584103	2,4415897	1,0	0,45	0,04860	0,05225
6	=a*ALEA()	2,59855712	1,90144288	1,5	0,68	0,05170	0,04965
7	[illegible]	1,88049321	2,61	=a^2/2/10*LC(-1)	0,90	0,04970	0,04980
8	=LC(-1)*a/2	1,27473946	3,22526054	2,5	1,13	0,04955	0,04710
9	=(a-LC(-2))*a/2	[illegible]718055	3,33281945	3,0	1,35	0,05160	0,05220
10	1,55[illegible]	=FREQUENCE(LC(-4):L(19999)C(-4);LC(-1):L(19)C(-1))/20000				0,04775	0,04815
11	2,25[illegible]	[illegible]	[illegible]	4,0	[illegible]	0,04975	0,04950
12	2,21687154	3,32530731	1,17469269	4,5	2,03	0,04900	0,05000
13	1,529387	=FREQUENCE(LC(-4):L(19999)C(-4);LC(-2):L(19)C(-2))/20000				0,05125	0,05185
14	2,75102435	4,12653652	0,37346348	5,5	2,48	0,05185	0,05125

Cellule nommé "a"



Exercice 3-6



On choisit au hasard un point M sur le pourtour du carré $IJI'J'$ ((O,I,J) étant un repère orthonormal). Donner les lois de probabilité des variables aléatoires X et Y qui, à M font respectivement correspondre l'abscisse et l'ordonnée de M.

Solution

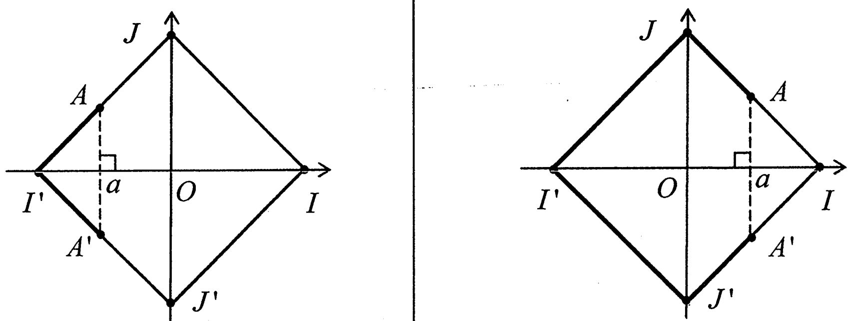
En premier lieu, il est clair que les variables aléatoires X et Y sont à valeurs dans $[-1,1]$.

• *Loi de X*

Soit a un réel de $[-1,1]$.

Précisons l'événement $(\mathrm{X} \leq a)$ en distinguant $-1 \leq a \leq 0$ et $0 \leq a \leq 1$

$-1 \leq a \leq 0$ | $0 \leq a \leq 1$



$(\mathrm{X} \leq a) = [A'I'] \cup [I'A]$ | $(\mathrm{X} \leq a) = [A'J'] \cup [J'I'] \cup [I'J] \cup [JA]$

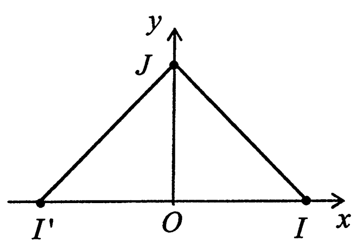
Le périmètre du carré $IJI'J'$ étant égal à $4\sqrt{2}$, nous tenons d'un calcul élémentaire de longueurs que :

- pour $-1 \leq a \leq 0$, $\quad \mathbb{P}(\mathrm{X} \leq a) = \dfrac{2(a+1)\sqrt{2}}{4\sqrt{2}} = \dfrac{a+1}{2}$;
- pour $0 \leq a \leq 1$, $\quad \mathbb{P}(\mathrm{X} \leq a) = \dfrac{2\sqrt{2} + 2(a-1)\sqrt{2}}{4\sqrt{2}} = \dfrac{a+1}{2}$.

Dans chacun des cas $\mathbb{P}(\mathrm{X} \leq a) = \mathcal{U}_{[-1,1]}([-1,a])$: la variable aléatoire X suit la loi uniforme sur $[-1,1]$.

• *Loi de Y :* la même, évidemment.

Commentaire

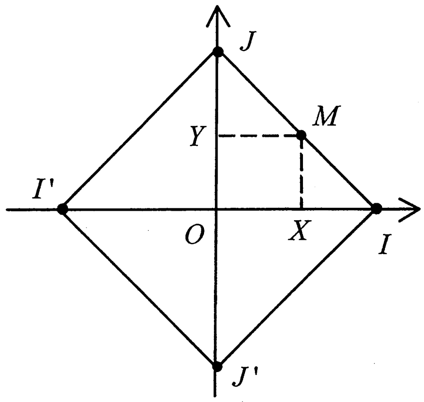


En variant le contour on peut imaginer à peu de frais des exercices du même type, mais pas trop. On évitera par exemple, l'exercice suivant :

Un point M est pris au hasard sur le pourtour du triangle $I'IJ$. Quelle est la loi de la variable aléatoire $Y : M \mapsto$ ordonnée de M. À votre avis pourquoi ?

Simulation

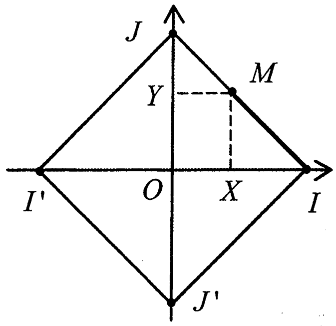
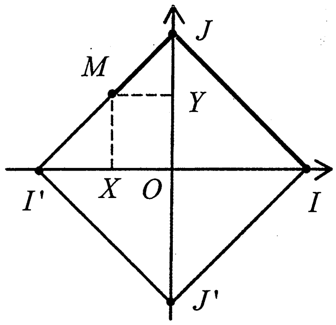
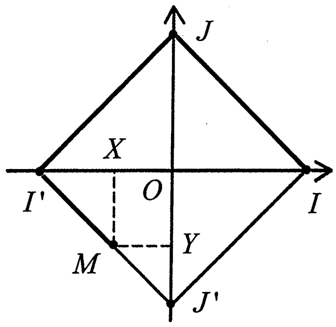
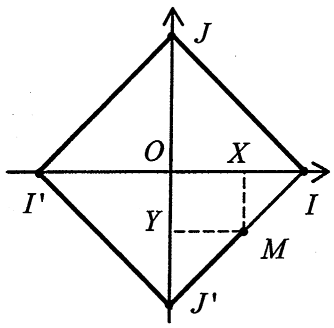
Comment simuler le choix au hasard d'un point M sur le pourtour du carré $IJI'J'$?

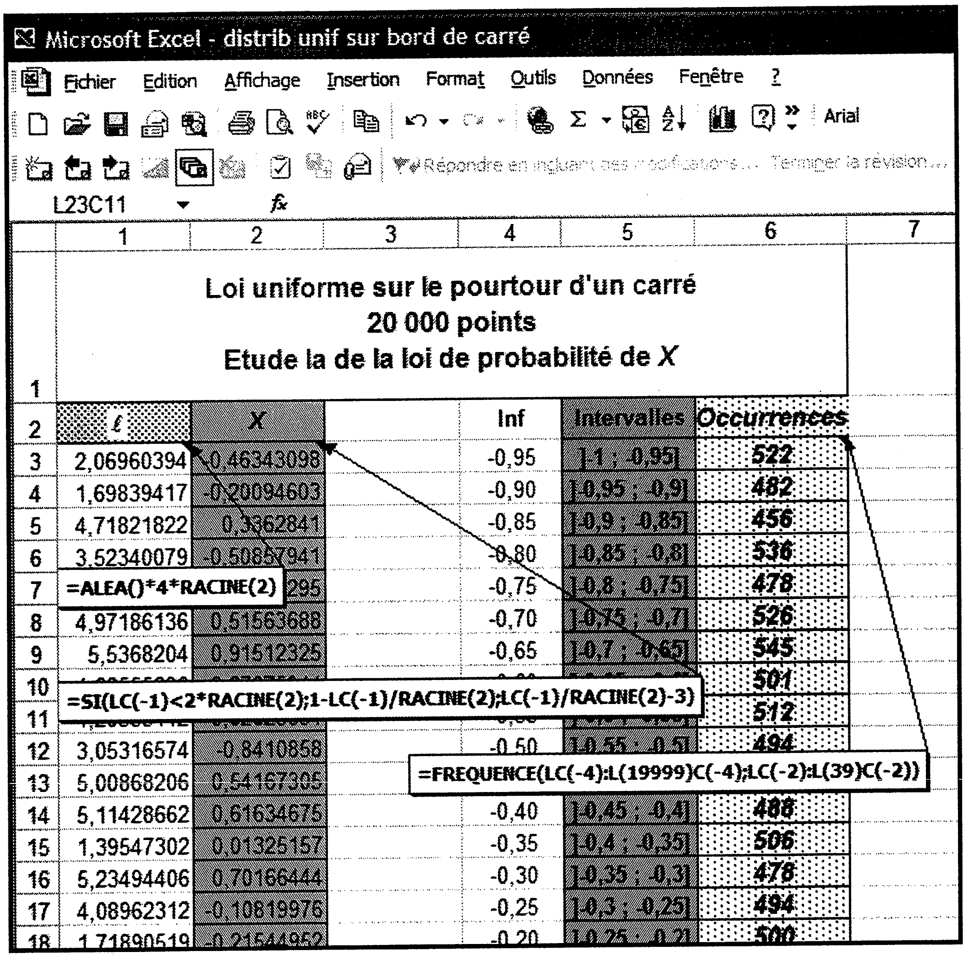


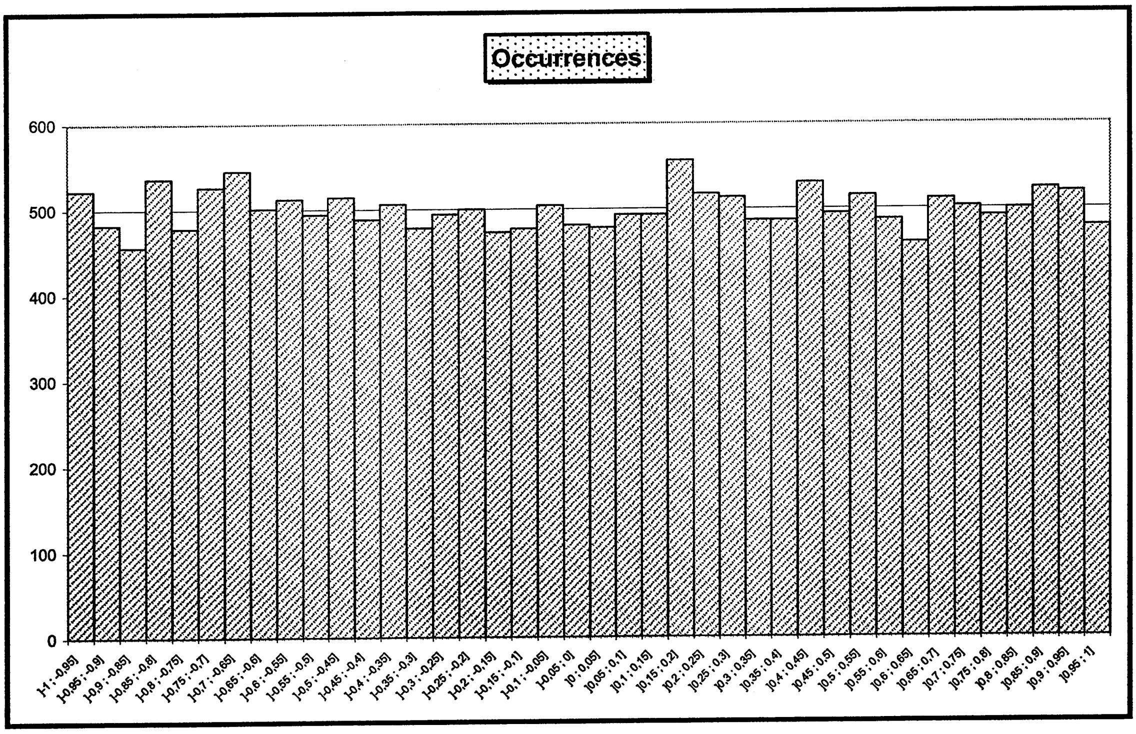
Le carré $IJI'J'$ ayant comme périmètre $4\sqrt{2}$, choisir un point au hasard sur le poutour du carré revient donc à :

- choisir un réel ℓ dans l'intervalle $\left[0,4\sqrt{2}\right[$;
- lui associer le point M sur le pourtour du carré d'abscisse curviligne ℓ (le pourtour du carré étant orienté dans le sens trigonométrique, avec I comme origine (par exemple)).

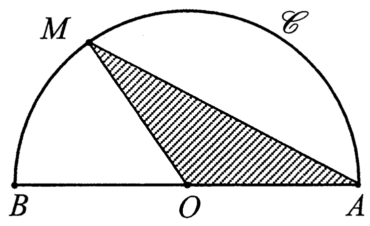
Il est naturel d'envisager quatre cas..

Ponctuel	Numérique	Figure	Conséquence
$M\in[I,J[$	$0\leq\ell<\sqrt{2}$		$X=1-\dfrac{\ell\sqrt{2}}{2}$ $Y=\dfrac{\ell\sqrt{2}}{2}$
$M\in[J,I'[$	$\sqrt{2}\leq\ell<2\sqrt{2}$		$X=1-\dfrac{\ell\sqrt{2}}{2}$ $Y=2-\dfrac{\ell\sqrt{2}}{2}$
$M\in[I',J'[$	$2\sqrt{2}\leq\ell<3\sqrt{2}$		$X=\dfrac{\ell\sqrt{2}}{2}-3$ $Y=2-\dfrac{\ell\sqrt{2}}{2}$
$M\in[J',I[$	$3\sqrt{2}\leq\ell<4\sqrt{2}$		$X=\dfrac{\ell\sqrt{2}}{2}-3$ $Y=\dfrac{\ell\sqrt{2}}{2}-4$


Microsoft Excel - distrib unif sur bord de carré
Fichier Edition Affichage Insertion Format Outils Données Fenêtre ?
Arial
L23C11
Loi uniforme sur le pourtour d'un carré
20 000 points
Etude la de la loi de probabilité de X
ℓ
X
Inf
Intervalles
Occurrences
2,06960394 -0,46343098 -0,95]-1 ; -0,95] 522
1,69839417 -0,20094603 -0,90]-0,95 ; -0,9] 482
4,71821822 0,3362841 -0,85]-0,9 ; -0,85] 456
3,52340079 -0,50857941 -0,80]-0,85 ; -0,8] 536
=ALEA()*4*RACINE(2)
-0,75]-0,8 ; -0,75] 478
4,97186136 0,51563688 -0,70]-0,75 ; -0,7] 526
5,5368204 0,91512325 -0,65]-0,7 ; -0,65] 545
=SI(LC(-1)<2*RACINE(2);1-LC(-1)/RACINE(2);LC(-1)/RACINE(2)-3)
501
512
3,05316574 -0,8410858 -0,50]-0,55 ; -0,5] 494
5,00868206 0,54167305
=FREQUENCE(LC(-4):L(19999)C(-4);LC(-2):L(39)C(-2))
5,11428662 0,61634675 -0,40]-0,45 ; -0,4] 488
1,39547302 0,01325157 -0,35]-0,4 ; -0,35] 506
5,23494406 0,70166444 -0,30]-0,35 ; -0,3] 478
4,08962312 -0,10819976 -0,25]-0,3 ; -0,25] 494
1,71890519 -0,21544952 -0,20]-0,25 ; -0,2] 500


Occurrences
600
500
400
300
200
100
0

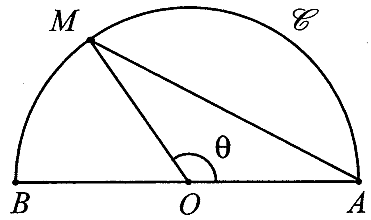
Dans les exercices 3- 7 à 3- 9, on considère un demi-cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de diamètre $[AB]$, avec $AB = 2$. Il s'agit de calculer la probabilité que l'aire du triangle AOM soit plus petite que $\frac{1}{4}$ selon le protocole de choix aléatoire de M sur $\mathscr{C}$ défini dans chacun d'eux.



Exercice 3-7

Le point M est choisi selon la loi uniforme sur le demi-cercle $\mathscr{C}$.

Solution



La longueur de l'arc $\widehat{AM}$ étant proportionnelle à l'angle $\widehat{AOM}$, choisir M au hasard sur $\mathscr{C}$ revient donc à choisir $\theta = \widehat{AOM}$ au hasard dans $[0, \pi]$.

Compte tenu de la relation $\text{aire}(AOM) = \frac{1}{2}\sin\theta$ et de l'équivalence : $\frac{1}{2}\sin\theta \leq \frac{1}{4} \Leftrightarrow \left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{6} \text{ ou } \frac{5\pi}{6} \leq \theta \leq \pi\right)$, on obtient :

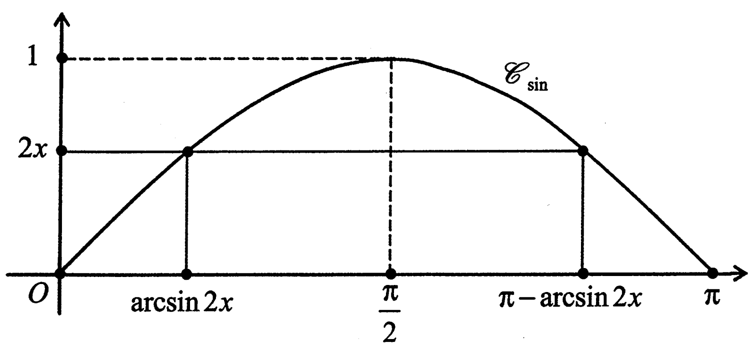
$$\mathbb{P}\left(\text{aire}(AOM) \leq \frac{1}{4}\right) = \mathcal{U}_{[0,\pi]}\left(\left[0, \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}, \pi\right]\right) = \frac{\frac{\pi}{6}}{\pi} + \frac{\frac{\pi}{6}}{\pi} = \frac{1}{3}.$$

Commentaire

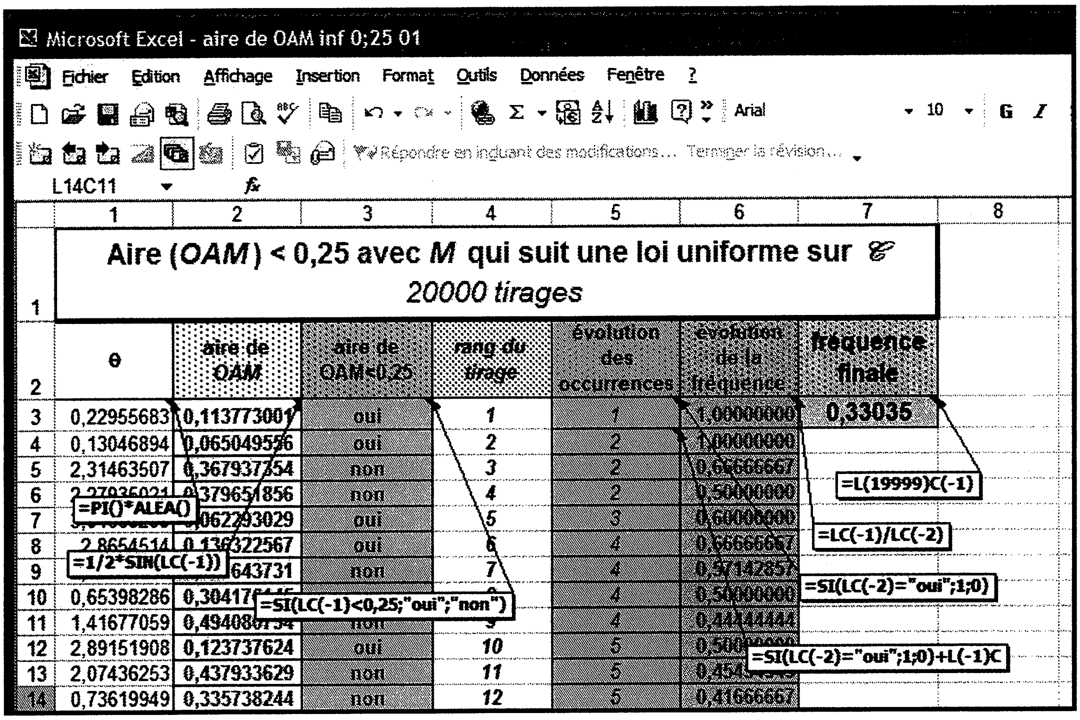
La variable aléatoire $S : M \mapsto \text{aire}(AOM)$ est à valeurs dans $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ et sa fonction de répartition F est définie par $F(x) = \frac{2}{\pi}\arcsin 2x$ (ceci n'entre pas dans les compétences des élèves de Terminale S). C'est quasiment immédiat :

- pour $0 \leq \theta \leq \pi$, on a : $0 \leq \frac{1}{2}\sin\theta \leq \frac{1}{2}$;
- et pour $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, l'inéquation $\begin{cases} \theta \in [0, \pi] \\ \frac{1}{2}\sin\theta \leq x \end{cases}$ admet pour solution :

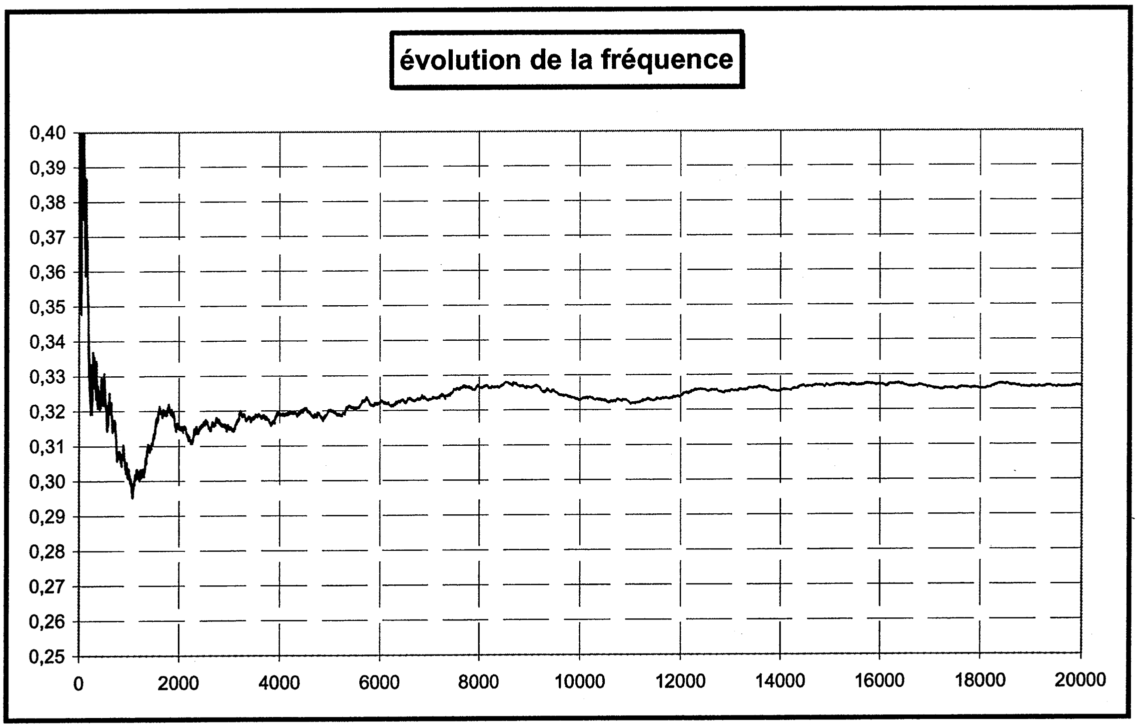
  $S = [0, \arcsin 2x] \cup [\pi - \arcsin 2x, \pi]$ (voir figure).



Simulation



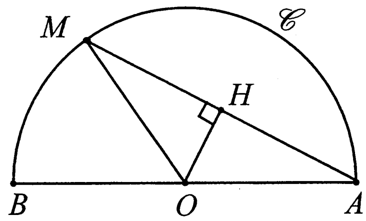
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	Aire (*OAM*) < 0,25 avec *M* qui suit une loi uniforme sur $\mathscr{C}$ *20000 tirages*							
2	θ	aire de OAM	aire de OAM<0,25	rang du tirage	évolution des occurrences	évolution de la fréquence	fréquence finale	
3	0,22955683	0,113773001	oui	1	1	1,00000000	0,33035	
4	0,13046894	0,065049556	oui	2	2	1,00000000		
5	2,31463507	0,367937354	non	3	2	0,66666667		
6	[illegible]	0,379651856	non	4	2	0,50000000		
7	[illegible]	[illegible]	oui	5	3	0,60000000		
8	[illegible]	0,136322567	oui	6	4	0,66666667		
9	[illegible]	[illegible]	non	7	4	0,57142857		
10	0,65398286	[illegible]	[illegible]	[illegible]	4	0,50000000		
11	1,41677059	[illegible]	non	[illegible]	4	0,44444444		
12	2,89151908	0,123737624	oui	10	5	[illegible]		
13	2,07436253	0,437933629	non	11	5	[illegible]		
14	0,73619949	0,335738244	non	12	5	0,41666667		



Exercice 3-8

On choisit un réel x au hasard dans $[0,2]$. Le point M de $\mathscr{C}$ est alors l'unique point de $\mathscr{C}$ tel que $AM = x$.

Solution



Avec $\text{aire}(AOM) = \frac{1}{2} OH \times AM$ (voir figure ci-contre), on obtient : $\text{aire}(AOM) = \frac{x}{2}\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}$.

Il en découle les équivalences suivantes :

$$\begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ \text{aire}(AOM) \le \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ x^4 - 4x^2 + 1 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ x^2 \le 2-\sqrt{3} \text{ ou } x^2 \ge 2+\sqrt{3} \end{cases}.$$

Ainsi, la probabilité de l'événement " $\text{aire}(AOM) \le \frac{1}{4}$ " est calculée par : $\mathcal{U}\left(\left[0,\sqrt{2-\sqrt{3}}\right] \cup \left[\sqrt{2+\sqrt{3}},2\right]\right)$, où $\mathcal{U}$ est la loi uniforme sur $[0,2]$.

Par suite : $\mathbb{P}\left(\text{aire}(AOM) \le \frac{1}{4}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} + \frac{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Commentaires

1- Le dernier raccourci de calcul est issu de la « ruse »bien connue en trigonométrie[2] :

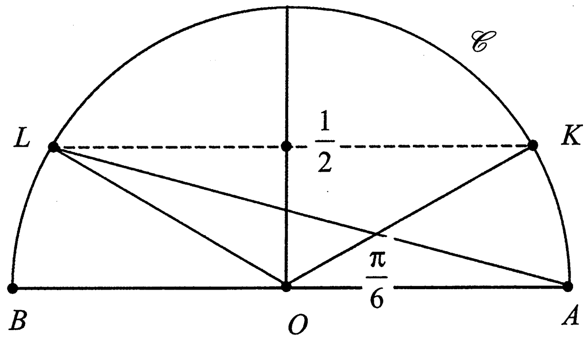
$$\left(\sqrt{3}-1\right)^2 = 2\left(2-\sqrt{3}\right) \text{ d'où } \sqrt{2-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{3}-1\right) \ ;$$

$$\left(\sqrt{3}+1\right)^2 = 2\left(2+\sqrt{3}\right) \text{ d'où } \sqrt{2+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{3}+1\right).$$

Ainsi $\sqrt{2-\sqrt{3}} - \sqrt{2+\sqrt{3}} = -\sqrt{2}$.

2- Une autre solution moins calculatoire mais prenant en compte le résultat de l'exercice 3-7 consiste à remarquer que $\text{aire}(AOM) \le \frac{1}{4}$ équivaut à :

$AM \le AK$ *ou* $AB \le AM \le AL$.



En calculant AK et AL avec la relation d'AL KASHI dans les triangles OAK et OAL :

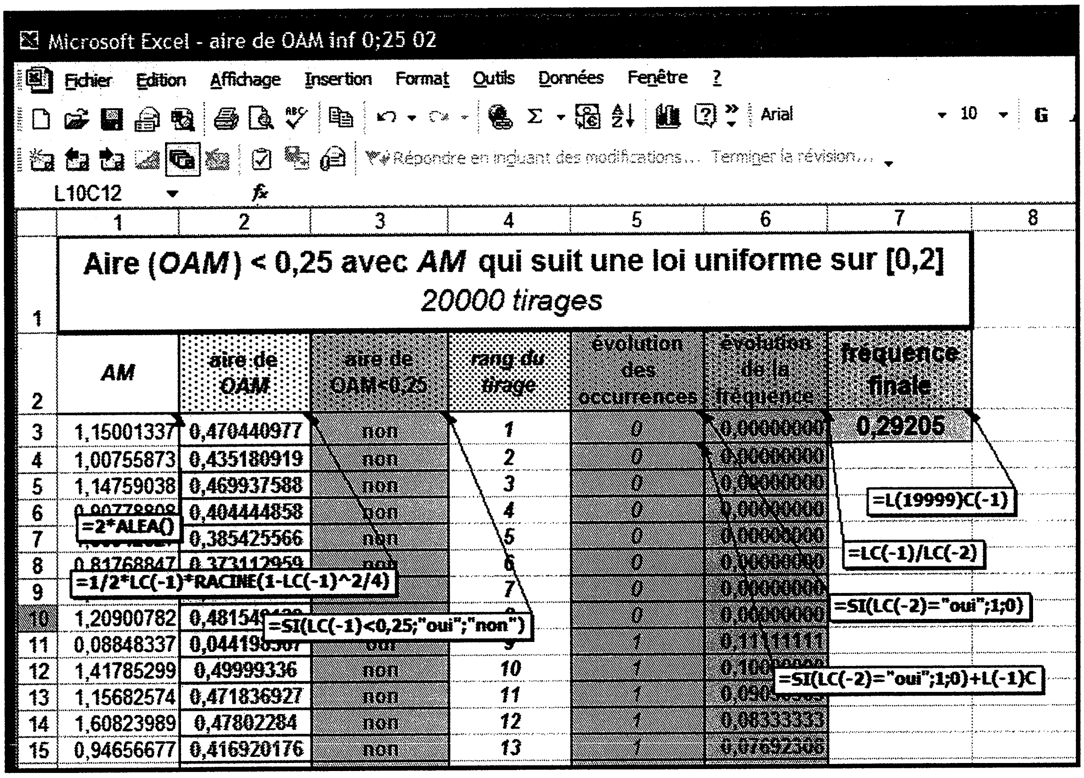
$$AK^2 = 2-2\cos\frac{\pi}{6} = 2-\sqrt{3}, \quad AL^2 = 2-2\cos\frac{5\pi}{6} = 2+\sqrt{3},$$

on retrouve l'expression de $\mathbb{P}\left(\text{aire}(AOM) \le \frac{1}{4}\right)$ précédemment obtenue.

---

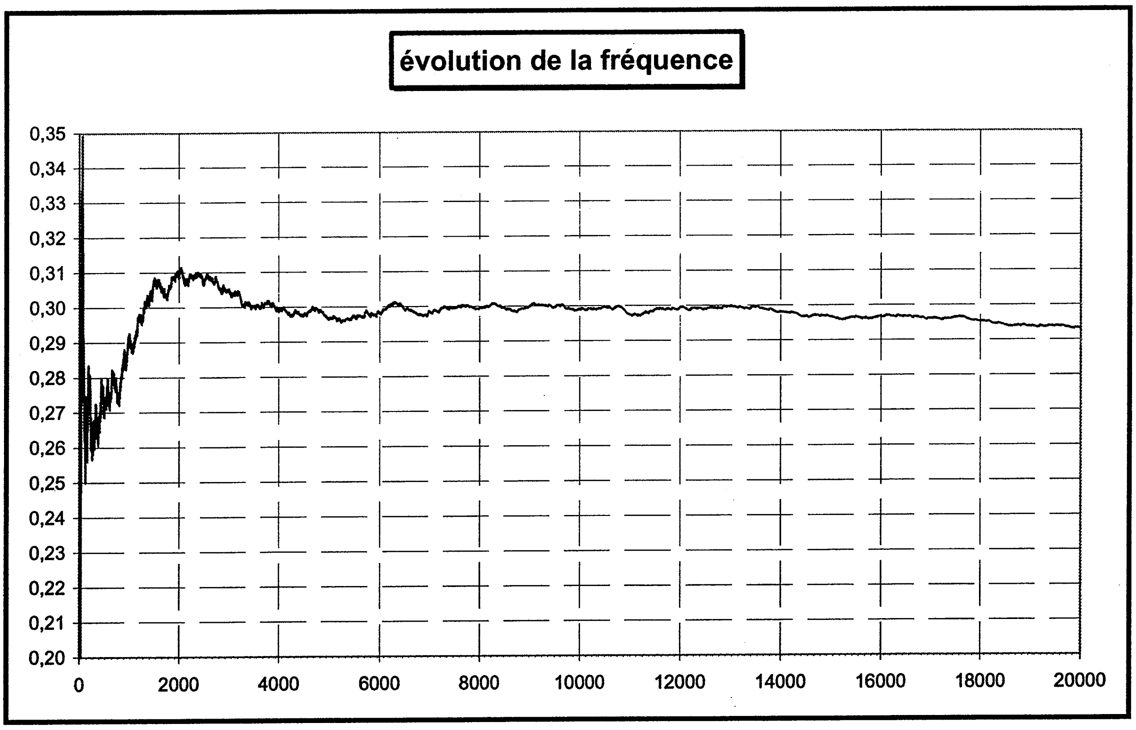
[2] Dans le calcul des lignes trigonométriques de $\frac{\pi}{12}$

Simulation



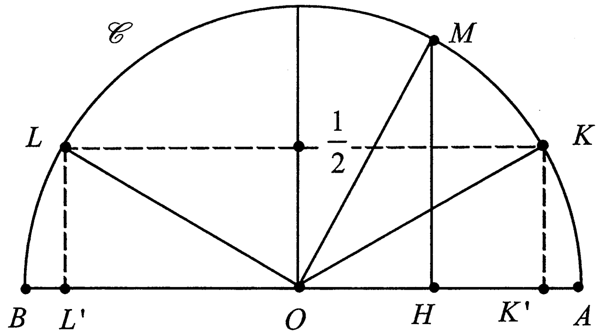
Aire (*OAM*) < 0,25 avec *AM* qui suit une loi uniforme sur [0,2]
20000 tirages

	1	2	3	4	5	6	7
2	*AM*	aire de *OAM*	aire de OAM<0,25	*rang du tirage*	évolution des occurrences	évolution de la fréquence	fréquence finale
3	1,15001337	0,470440977	non	1	0	0,00000000	0,29205
4	1,00755873	0,435180919	non	2	0	0,00000000	
5	1,14759038	0,469937588	non	3	0	0,00000000	
6	[illegible]	0,404444858	non	4	0	0,00000000	
7	[illegible]	0,385425566	non	5	0	0,00000000	
8	0,81768847	0,373112959	non	6	0	0,00000000	
9	[illegible]	[illegible]	[illegible]	7	0	0,00000000	
10	1,20900782	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0	0,00000000	
11	0,08848337	[illegible]	oui	[illegible]	1	0,11111111	
12	1,41785299	0,49999336	non	10	1	[illegible]	
13	1,15682574	0,471836927	non	11	1	[illegible]	
14	1,60823989	0,47802284	non	12	1	0,08333333	
15	0,94656677	0,416920176	non	13	1	0,07692306	



Exercice 3-9

On choisit un point H au hasard sur le segment $[AB]$. Le point M est alors l'unique point de $\mathscr{C}$ se projetant orthogonalement en H sur (AB).



Solution

Exploitons l'idée développée dans le commentaire de l'exercice 3-8.

Si l'on désigne par K' et L' les projetés orthogonaux de K et L sur (AB), on a :

$$\text{aire}(AOM) \leq \frac{1}{4} \Leftrightarrow H \in [K'A] \text{ ou } H \in [L'B].$$

D'où $\mathbb{P}\left(\text{aire}(AOM) \leq \frac{1}{4}\right) = \mathcal{U}_{[AB]}\left([K'A] \cup [L'B]\right)$.

Les segments $[K'A]$ et $[L'B]$ étant disjoints et de même longueur $1-\frac{\sqrt{3}}{2}$, il vient que :

$$\mathbb{P}\left(\text{aire}(AOM) \leq \frac{1}{4}\right) = \frac{A'K+BL'}{AB} = \frac{2-\sqrt{3}}{2} = 1-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Commentaires

1- En notant $x = AH$, l'aire du triangle AOM est exprimée par :

$$\text{aire}(AOM) = \frac{1}{2}\sqrt{2x-x^2}.$$

Par suite, tout est en place pour une solution calculatoire.

Brièvement :

$$\begin{cases} x \in [0,2] \\ \frac{1}{2}\sqrt{2x-x^2} \leq \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [0,2] \\ 2x-x^2 \leq \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [0,2] \\ \left(x-\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)\left(x-\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) \geq 0 \end{cases}$$

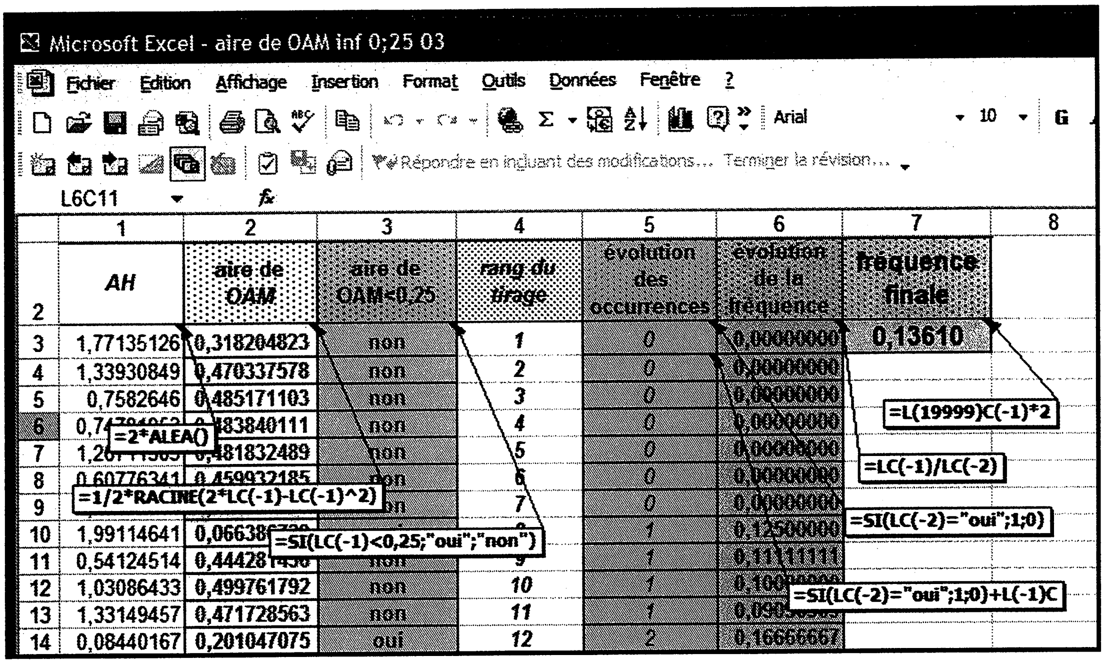
et pour conclure, par exemple :

x	0		$1-\frac{\sqrt{3}}{2}$		$1+\frac{\sqrt{3}}{2}$		2
signe étudié		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$\mathbb{P}\left(\text{aire}(AOM) \leq \frac{1}{4}\right) = \mathcal{U}_{[0,2]}\left(\left[0, 1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right] \cup \left[1+\frac{\sqrt{3}}{2}, 2\right]\right) = 1-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

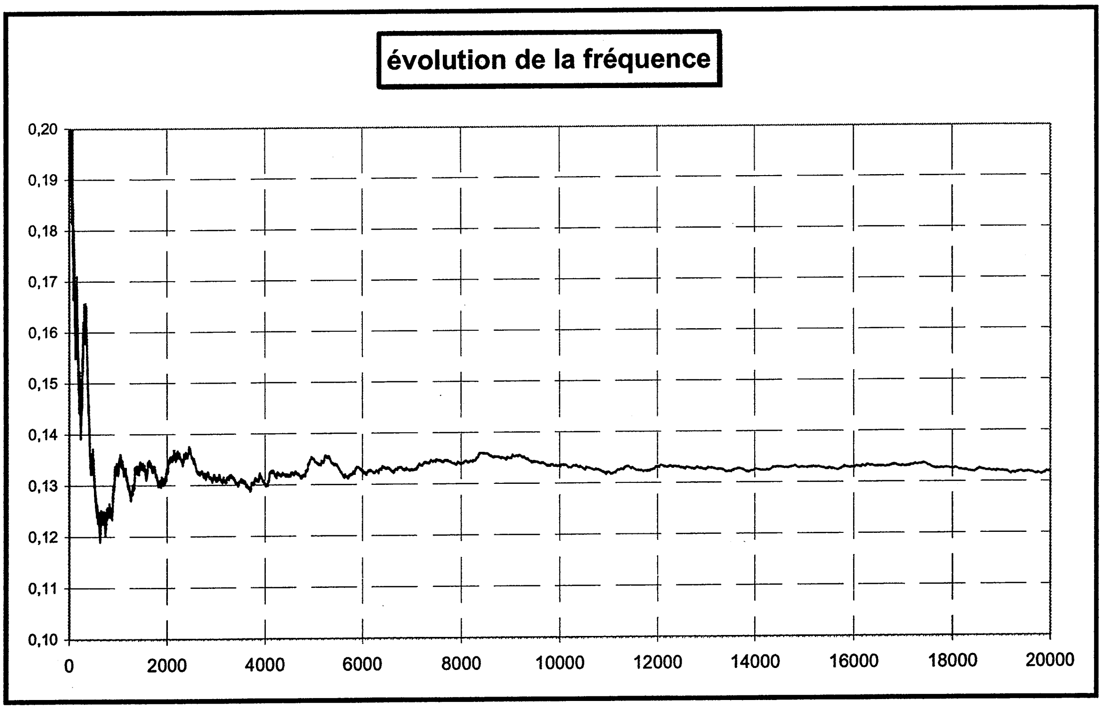
2- La série des trois exercices 3-7 à 3-9 n'a aucune ambition quant aux problèmes de modélisation. Il s'agit simplement de mettre en évidence que la conduite du calcul de la probabilité d'un même événement peut prendre des tournures différentes selon le protocole de choix aléatoire envisagé (mais c'est plus que d'observer la disparité des résultats numériques obtenus).

Simulation



Microsoft Excel - aire de OAM inf 0;25 03

	1	2	3	4	5	6	7	8
2	AH	aire de OAM	aire de OAM<0,25	rang du tirage	évolution des occurrences	évolution de la fréquence	fréquence finale	
3	1,77135126	0,318204823	non	1	0	0,00000000	0,13610	
4	1,33930849	0,470337578	non	2	0	0,00000000		
5	0,7582646	0,485171103	non	3	0	0,00000000		
6	[illegible]	[illegible]	non	4	0	0,00000000		
7	[illegible]	[illegible]	non	5	0	0,00000000		
8	0,60776341	0,459932185	non	6	0	0,00000000		
9	[illegible]	[illegible]	[illegible]	7	0	0,00000000		
10	1,99114641	[illegible]	[illegible]	[illegible]	1	0,12500000		
11	0,54124514	[illegible]	[illegible]	[illegible]	1	0,11111111		
12	1,03086433	0,499761792	non	10	1	[illegible]		
13	1,33149457	0,471728563	non	11	1	[illegible]		
14	0,08440167	0,201047075	oui	12	2	0,16666667		



Exercice 3-10

Un point M étant choisit au hasard sur un segment $[AB]$ de longueur 1, on construit d'un même côté de la droite (AB) les carrés C_1 et C_2 de côtés $[AM]$ et $[MB]$.

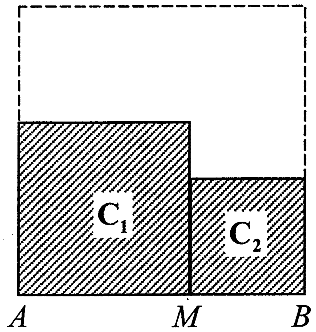
Les aires des carrés C_1 et C_2 sont des variables aléatoires désignées par X_1 et X_2.

1° Quelle est la probabilité de l'événement $(X_1 = X_2)$?

2° Préciser les fonctions de répartition des variables aléatoires X_1, X_2 et $X_1 + X_2$.

3° Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire $|X_1 - X_2|$?

Solution



Nous désignerons par x la longueur du segment$[AM]$: x suit la loi uniforme sur $[0,1]$, notée $\mathcal{U}$ dans la suite.

1° L'événement $(X_1 = X_2)$ ne se réalise que lorsque $AM = MB$ c'est à dire que lorsque le point M est choisi au milieu de $[AB]$.
Une issue ponctuelle étant de probabilité nulle, $\mathbb{P}(X_1 = X_2) = 0$.

2° Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont à valeurs dans $[0,1]$.
Avec aire$(C_1) = x^2$ et aire$(C_2) = (1-x)^2$, nous avons, pour tout réel a de $[0,1]$:

$$(X_1 \le a) = \{x \in [0,1] / x^2 \le a\} = \{x \in [0,1] / x \le \sqrt{a}\},$$

$$(X_2 \le a) = \{x \in [0,1] / (1-x)^2 \le a\} = \{x \in [0,1] / 1 - \sqrt{a} \le x\}.$$

Par suite :

$$\mathbb{P}(X_1 \le a) = \mathcal{U}\left(\left[0, \sqrt{a}\right]\right) = \sqrt{a},$$

$$\mathbb{P}(X_2 \le a) = \mathcal{U}\left(\left[1-\sqrt{a}, 1\right]\right) = \sqrt{a}.$$

Les variables aléatoires X_1 et X_2 ont la même fonction de répartition F définie sur $[0,1]$ par $F(x) = \sqrt{x}$.

- Nous tenons de l'identité remarquable

$$a^2 + b^2 = \frac{1}{2}\left((a+b)^2 + (a-b)^2\right) \text{ (voir commentaire 1), que :}$$

$$\text{aire}(C_1) + \text{aire}(C_2) = x^2 + (1-x)^2 = \frac{1}{2}\left(1 + (2x-1)^2\right),$$

d'où il découle que la variable aléatoire $X_1 + X_2$ est à valeurs dans $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

Dans ces conditions, pour $\frac{1}{2} \le a \le 1$:

$$\mathbb{P}(X_1 + X_2 \le a) = \mathcal{U}\left(\left\{x \in [0,1] / |2x-1| \le \sqrt{2a-1}\right\}\right), \text{ soit :}$$

$$\mathbb{P}(X_1 + X_2 \le a) = \mathcal{U}\left(\left[\frac{1-\sqrt{2a-1}}{2}, \frac{1+\sqrt{2a-1}}{2}\right]\right).$$

Les deux bornes de l'intervalle étant dans $[0,1]$ (voir commentaire 1), il vient finalement que : $\mathbb{P}(X_1+X_2 \leq a)=\sqrt{2a-1}$.
Autrement dit, la variable aléatoire X_1+X_2 admet pour fonction de répartition la fonction définie sur $\left[\frac{1}{2},1\right]$ par $x \mapsto \sqrt{2x-1}$.

3° Comme $\left|\text{aire}(C_1)-\text{aire}(C_2)\right|=|2x-1|$, alors :

- d'une part la variable aléatoire $X=|X_1-X_2|$ est à valeurs dans $[0,1]$;
- et d'autre part, pour $a \in [0,1]$, $\mathbb{P}(X \leq a)=\mathcal{U}\left(\left[\frac{1-a}{2},\frac{1+a}{2}\right]\right)=a$.

La variable aléatoire X est uniformément distribuée sur $[0,1]$.

Commentaires

1- Quelques détails techniques (Question 2)

- L'utilisation de l'identité remarquable $a^2+b^2=\frac{1}{2}\left((a+b)^2+(a-b)^2\right)$ n'est pas une astuce de passage au même titre que $(a+b)^2=4ab+(a-b)^2$: c'est un penchant naturel, dès lors qu'il s'agit de travailler avec deux nombres de somme constante (il y a des choses rapides à dire sur leur produit, la somme de leurs carrés, etc.).

  Mais, on peut accorder sa préférence à la disgracieuse résolution d'une inéquation du second degré avec paramètre...
- Lorsque $\frac{1}{2} \leq a \leq 1$, on a tout de suite $0 \leq 2a-1 \leq 1$, puis $0 \leq \sqrt{2a-1} \leq 1$.

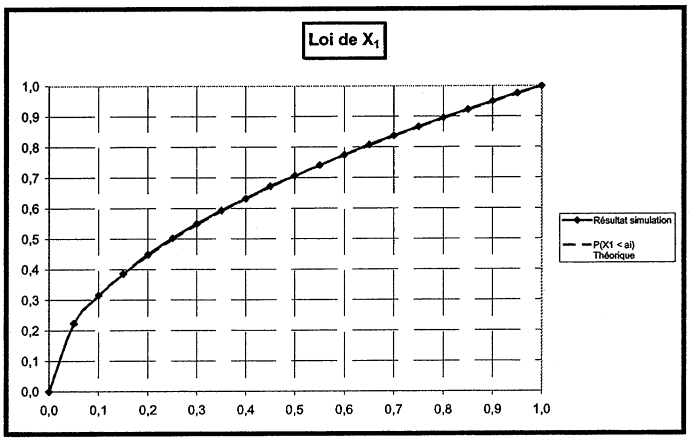
  En découlent les encadrements :

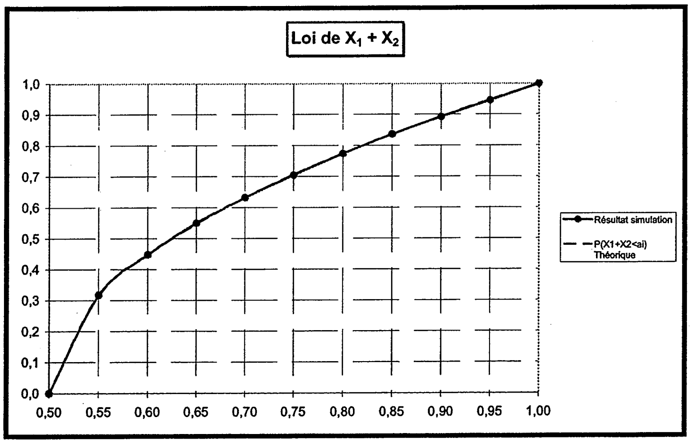
$$0 \leq \frac{1-\sqrt{2a-1}}{2} \leq \frac{1}{2} \text{ et } \frac{1}{2} \leq \frac{1+\sqrt{2a-1}}{2} \leq 1.$$

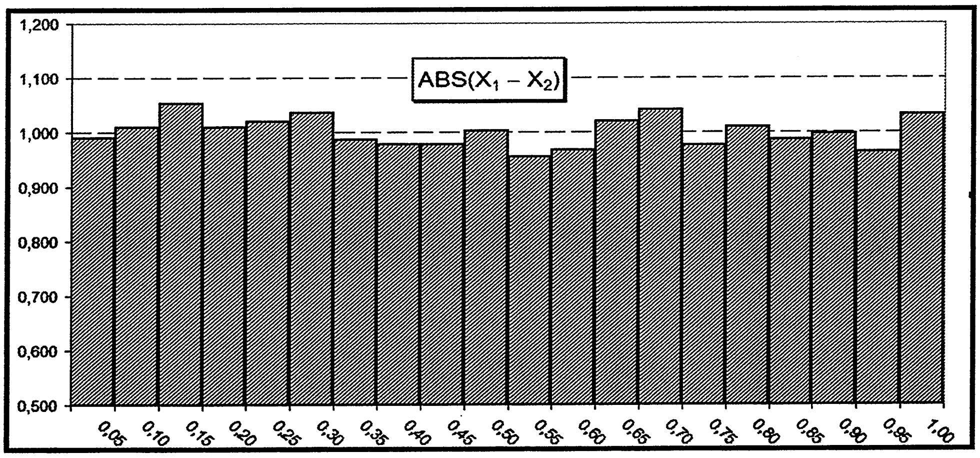
2- On notera que les fonctions de répartition des variables aléatoires X_1, X_2 et X_1+X_2 ne sont pas dérivables sur leur domaine de définition.
Voilà pourquoi l'énoncé ne fonce pas tête baissée vers la recherche des fonctions densité.

Simulation

	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	dans un grand				Loi de X_1			Loi de X_1+X_2			$\lvert X_1 - X_2 \rvert$	
2	lations				Résultat simulation		$P(X_1 < a_i)$	Résultat simulation		$P(X_1+X_2<a_i)$	Simulation	
3	X_1+X_2	$\lvert X_1 - X_2 \rvert$		a_i	$a_{i-1} < X_1 < a_i$	$X_1 < a_i$	Théorique	$a_{i-1} < X_1+X_2 < a_i$	$X_1+X_2 < a_i$	Théorique	$a_{i-1} < \lvert X_1 - X_2 \rvert < a_i$	histogramme
4	0,7154221	0,6563872	a_0	0,00	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000				
5	0,821396	0,9017431	a_1	0,05	0,22290	0,22290	0,22361	0,00000			0,0499	0,99
6	0,5583513	0,341617	a_2	0,10	0,08975	0,31265	0,31623	0,00000			[illegible]	1,008
7	0,6550404	0,556831	a_3	0,15	=LC(-1)	0,38495	0,38730	0,00000			=LC(-1)/0,05	1,053
8	0,5230709	0,2148066	a_4	0,20	0,06025	0,44580	0,44721	0,00000			0,05045	1,009
9	0,8253397	0,806647	a_5	0,25	=L(-1)C+LC(-1)	0,50035	0,50000	0,00000			0,051	1,02
10	0,6263496	0,502692	a_6	0,30	[illegible]	0,54690	0,54772	0,00000			0,05175	1,035
11	0,7042877	0,639199	a_7	0,35	=RACINE(LC(-3))	0,59125	0,59161	[illegible]		=LC(-1)	0,0493	0,986
12	0,8608449	0,8495233	a_8	0,40	0,04370	0,63495	0,63246	=L(-1)C+LC(-1)			0,04885	0,977
13	(-1):L(20)C(-1))/20000	577	a_9	0,45	0,03725	0,67220	0,67082	0,00000			0,0489	0,978
14	0,9356037	0,9333849	a_{10}	0,50	0,03520	0,70740	0,70711	0,00000	0,00000	0,00000	0,0501	1,002
15	0,5614645	=FREQUENCE(LC(-7):L(19999)C(-7);LC(-4):L(20)C(-4))/20000					74162	0,32140	0,32140	0,31623	0,0477	0,954
16	0,94197	0,9401809	a_{12}	0,60	0,03355	0,77430	0,77460	0,12930	0,45070	0,44721	0,04835	0,967
17	0,9106866	0,9062744	a_{13}	0,65	0,03105	0,80535	0,806	=RACINE(2*LC(-6)-1)	54850	0,54772	0,05095	1,019
18	0,9447403	0,9431228	a_{14}	0,70	0,03060	0,83595	0,83566	0,08305	0,63155	0,63246	0,05205	1,041
19	0,8456373	0,8314293	a_{15}	0,75	0,02970	=FREQUENCE(L(-1)C(-3):L(19998)C(-3);LC(-7):L(19)C(-7))/20000					0,04875	0,975
20	0,5060811	0,1102823	a_{16}	0,80	0,02680	0,89245	0,89443	0,06725	0,77560	0,77460	0,0504	1,008







Exercice 3-11

Le réel x étant choisi au hasard dans l'intervalle $[1,2]$, on considère la variable aléatoire X qui à x associe $\ln x$. Quelle est la densité de la loi de probabilité de la variable aléatoire X ?

Solution

La variable aléatoire X est à valeurs dans $[0,\ln 2]$.
Pour a appartenant à cet intervalle, l'événement $(X \leq a)$ est l'événement $\{x \in [1,2] / \ln x \leq a\}$ c'est-à-dire $\{x \in [1,2] / x \leq e^a\}$.
Ainsi $\mathbb{P}(X \leq a) = \mathcal{U}_{[1,2]}([1,e^a]) = e^a - 1$.
La fonction densité f est donc la fonction définie sur $[0,\ln 2]$ par $f(x) = e^x$.

Exercice 3-12

Le réel x étant choisi au hasard dans l'intervalle $[0,1]$, on considère la variable aléatoire X qui à x associe e^x.

Quelle est la densité de la loi de probabilité de la variable aléatoire X ?

Solution

La variable aléatoire X étant à valeurs dans $[1,e]$, considérons un réel a de cet intervalle.
L'événement $(X \leq a)$ est alors l'événement $\{x \in [0,1] / e^x \leq a\}$ ou encore : $\{x \in [0,1] / x \leq \ln a\}$. Ainsi $\mathbb{P}(X \leq a) = \mathcal{U}_{[0,1]}([0,\ln a]) = \ln a$.
La fonction densité f s'en déduit : $f(x) = \dfrac{1}{x}$ pour $x \in [1,e]$.

Commentaire

Nous ne nous écartons guère du procédé de construction d'une loi continue présenté dans le paragraphe 1-3 de ce chapitre (pages 102 à 105) et honnêtement évoqué par l'expression « transport à l'aide d'une variable aléatoire » (voir page 105).
De manière plus précise - et ceci vaut également pour l'exercice 3-10 -, nous disposons d'une bijection croissante φ de $[a,b]$ sur $[\varphi(a),\varphi(b)]$. Le choix au hasard d'un réel ξ de $[a,b]$ permet alors d'introduire la variable aléatoire $X : \xi \mapsto \varphi(\xi)$ pour laquelle : $\mathbb{P}(X \leq x) = \mathcal{U}_{[a,b]}([a,\varphi^{-1}(x)])$, avec $\varphi(a) \leq x \leq \varphi(b)$.

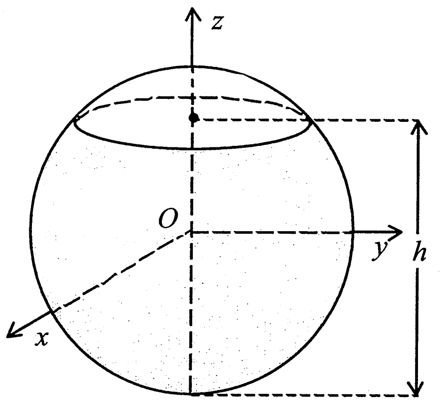
La fonction de répartition F de X est toute trouvée : $F(x) = \dfrac{\varphi^{-1}(x) - a}{b-a}$.

La densité en découle car, un bonheur ne venant jamais seul, la fonction φ retenue est telle que φ^{-1} est dérivable.

Exercice 3-13 *Au hasard sur la sphère*

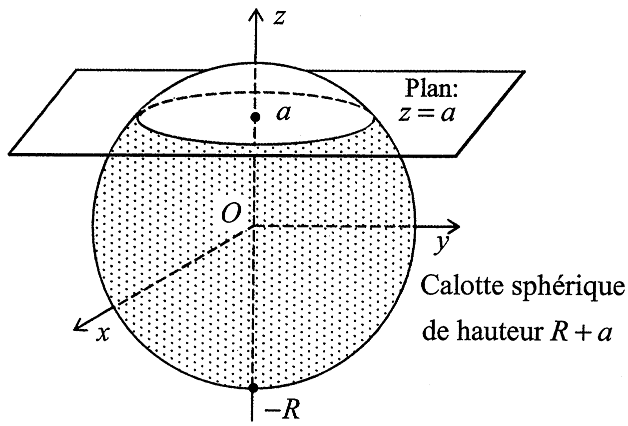
Un point M est pris au hasard sur la sphère de centre O et de rayon R.
Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire : $Z : M \mapsto$ côte de M.

Note : L'aire latérale d'une calotte sphérique de hauteur h (voir figure) est $2\pi Rh$.



Solution

Soit a un réel de $[-R,R]$.
Comme la longueur de l'intervalle $[-R,a]$ est $a+R$, l'événement $(Z \le a)$ est l'événement : « M est choisi sur la surface latérale de la calotte de hauteur $R+a$ », calotte qui se projette orthogonalement sur l'axe (Oz) selon le segment $[-R,a]$ (voir figure ci-contre).



Le point M étant choisi sur la sphère selon la loi uniforme, on a donc : $\mathbb{P}(Z \le a) = \dfrac{\text{aire de la calotte de hauteur } R+a}{\text{aire de la sphère}}$,

soit : $\mathbb{P}(Z \le a) = \dfrac{2\pi R(R+a)}{4\pi R^2} = \dfrac{R+a}{2R} = \dfrac{\text{longueur de } [-R,a]}{\text{longueur de} [-R,R]}$.

Il s'ensuit que *la variable aléatoire Z suit la loi uniforme sur* $[-R,R]$.

Commentaire

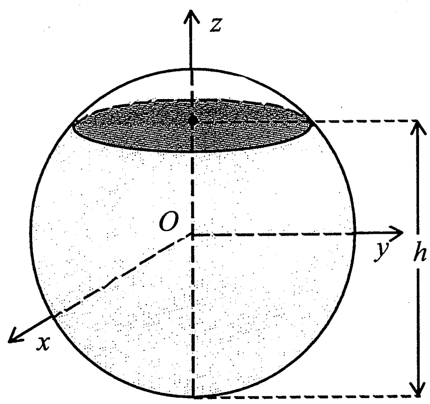
La simplicité du résultat obtenu est à rapprocher de la " complexité " de celui que l'on obtiendrait sur le cercle - hors de portée des élèves - où la loi obtenue est dite loi de l'arcsinus :

$\mathbb{P}(-1 \le Y \le a) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{\pi}\arcsin a$, la variable aléatoire Y étant ainsi définie :

$Y : M \mapsto$ ordonnée de M, avec M pris sur le cercle selon la loi uniforme.

Exercice 3-14 *Au hasard dans la boule*

Un point M est pris au hasard dans la boule de centre O et de rayon R. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire $Z : M \mapsto$ côte de M.



Note : Le volume d'une calotte sphérique de hauteur h est $\frac{\pi}{3}h^2(3R-h)$

Solution

Soit a un réel de $[-R,R]$.

L'événement $(Z \leq a)$ est décrit comme l'événement :

« Le point M est choisi dans la calotte de hauteur $R+a$ (calotte qui se projette orthogonalement sur l'axe (Oz) selon le segment $[-R,a]$) ».

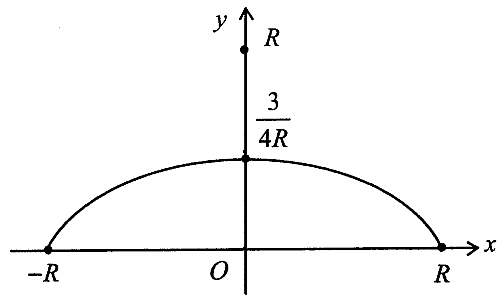
Le point M étant pris dans la boule selon la loi uniforme, la probabilité de $(Z \leq a)$ est calculée par le rapport des volumes : $\dfrac{\text{volume de la calotte de hauteur } (R+a)}{\text{volume de la boule}}$,

soit : $\dfrac{\frac{\pi}{3}(R+a)^2(3R-(R+a))}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \dfrac{(R+a)^2(2R-a)}{4R^3}$.

La variable aléatoire Z suit donc la loi de probabilité de densité f définie sur $[-R,R]$ par : $f(x) = \dfrac{3}{4R^3}(R^2-x^2)$.

En résumé

Sur l'intervalle $[-R,R]$:



- Fonction de répartition de Z :

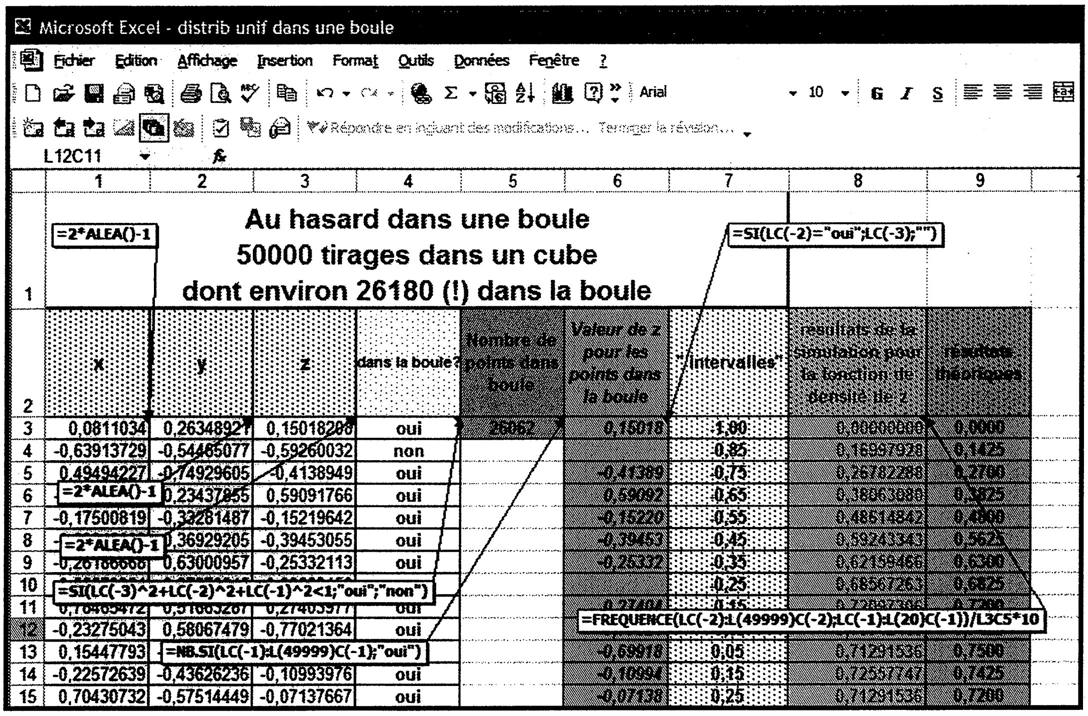
$$F(x) = \frac{(R+x)^2(2R-x)}{4R^3}$$

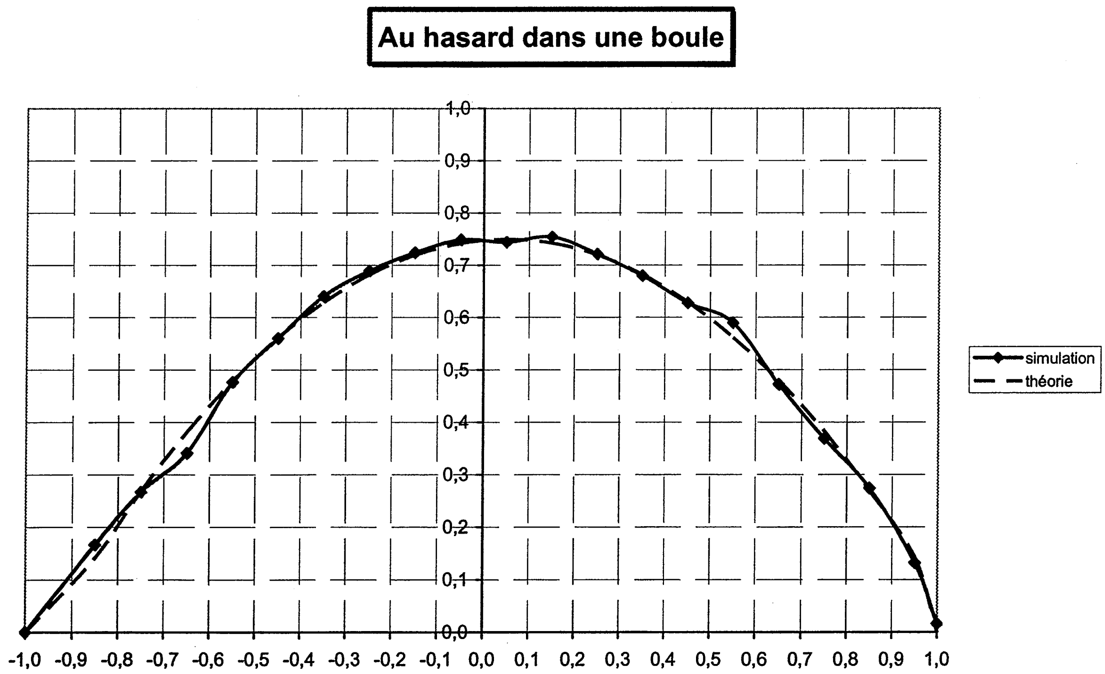
- Densité :

$$f(x) = \frac{3}{4R^3}(R^2-x^2).$$

(La courbe représentative de la densité est l'arc de parabole tracé dans le graphique ci-dessus).

Simulation

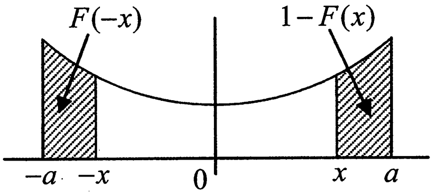

Microsoft Excel - distrib unif dans une boule
Fichier Edition Affichage Insertion Format Outils Données Fenêtre ?
L12C11
Au hasard dans une boule
50000 tirages dans un cube
dont environ 26180 (!) dans la boule
=2*ALEA()-1
=SI(LC(-2)="oui";LC(-3);"")
x
y
z
dans la boule?
"intervalles"
=SI(LC(-3)^2+LC(-2)^2+LC(-1)^2<1;"oui";"non")
=NB.SI(LC(-1):L(49999)C(-1);"oui")
=FREQUENCE(LC(-2):L(49999)C(-2);LC(-1):L(20)C(-1))/L3C5*10
0,0811034 0,26348921 0,15018208 oui
-0,63913729 -0,54465077 -0,59260032 non
0,49494227 -0,74929605 -0,4138949 oui
0,23437855 0,59091766 oui
-0,17500819 -0,33281487 -0,15219642 oui
0,36929205 -0,39453055 oui
0,63000957 -0,25332113 oui
-0,23275043 0,58067479 -0,77021364 oui
0,15447793 oui
-0,22572639 -0,43626236 -0,10993976 oui
0,70430732 -0,57514449 -0,07137667 oui


Au hasard dans une boule
1,0
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0,0
-1,0 -0,9 -0,8 -0,7 -0,6 -0,5 -0,4 -0,3 -0,2 -0,1 0,0 0,1 0,2 0,3 0,4 0,5 0,6 0,7 0,8 0,9 1,0
simulation
théorie

Exercice 3-15

La variable aléatoire X à valeurs dans $[-a,a]$ $(a>0)$ suit une loi de probabilité dont la densité f est une fonction paire sur $[-a,a]$.
Préciser les lois de probabilité des variables aléatoires :
- $Y=-X$;
- $Z=|X|$.

Solution



Nous désignons par F la fonction de répartition de X et par G et H celles des variables aléatoires Y et Z.

- La variable aléatoire Y est à valeurs dans $[-a,a]$ et pour tout x de $[-a,a]$, on a :

  $G(x)=\mathbb{P}(Y\leq x)=\mathbb{P}(-X\leq x)=\mathbb{P}(X\geq -x)$,

  $G(x)=1-\mathbb{P}(X\leq -x)=1-F(-x)$.

Il est facile de se convaincre de l'égalité $F(x)=1-F(-x)$:
- par un dessin par exemple (voir ci-dessus) ;
- ou - pour les tatillons - en dérivant :
  de $G(x)=1-F(-x)$ on obtient $G'(x)=F'(-x)=f(-x)=f(x)$ (parité de f).

Ainsi, $G(x)=F(x)$ et nous en déduisons que X et $-X$ *ont la même loi de probabilité.*

- Il est clair que la variable aléatoire $Z=|X|$ est à valeurs dans $[0,a]$.
  Par ailleurs, pour $0\leq x\leq a$, par définition de la fonction H :
  $H(x)=\mathbb{P}(|X|\leq x)=\mathbb{P}(-x\leq X\leq x)=F(x)-F(-x)=2F(x)-1$.

Conclusion : La variable aléatoire $|X|$ a pour densité sur $[0,a]$ la fonction $2f$ (la restriction de la fonction $2f$ à $[0,a]$ serait la tournure ad hoc).

Commentaires

1- Il est incontournable de proposer un exemple où X et $-X$ suivent la même loi (autre que la loi uniforme sur $[-1,1]$ qui n'interpelle pas assez) : plus que l'effet de surprise, quelques idées sur les lois de probabilité vont être remises en place.

2- On peut préférer à notre exercice une variante moins théorique mais tout aussi significative. Par exemple :

1. Vérifier que la fonction f définie sur $[-1,1]$ par $f(x)=\frac{1}{7}x^4+\frac{3}{8}x^2+\frac{97}{280}$ est la densité d'une loi de probabilité P sur $[-1,1]$.
2. Une variable aléatoire X suit la loi de probabilité P.

   Déterminer la loi de la variable aléatoire $-X$.

À charge aux enseignants de ne pas abandonner aux seuls calculs le résultat obtenu…

Exercice 3-16 *Loi de l'inverse*

1° Soit f la fonction définie sur $[1,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$.

Montrer que f est la densité d'une loi de probabilité P sur $[1,+\infty[$.

2° On choisit un réel x au hasard dans $]0,1]$.

Montrer que la variable aléatoire $X : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ suit la loi de probabilité P.

Solution

1° La fonction f est continue, positive sur $[1,+\infty[$ et $\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t = \left[-\dfrac{1}{t}\right]_1^x = 1-\dfrac{1}{x}$ d'où $\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$: f est une densité de probabilité sur $[1,+\infty[$.

2° La variable aléatoire X est à valeur dans $[1,+\infty[$ et pour $a \geq 1$, on a :

$\mathbb{P}(X \leq a) = \mathbb{P}\left(x \geq \dfrac{1}{a}\right) = \mathcal{U}\left(\left[\dfrac{1}{a},1\right]\right) = 1-\dfrac{1}{a}$ où $\mathcal{U}$ est la loi uniforme sur $]0,1]$.

Ainsi, $\mathbb{P}(X \leq a) = P([1,a])$: X suit la loi de probabilité P.

Commentaires

1- Voici une variante, dans le même style :

- La fonction f définie sur $[1,+\infty[$ par $f(t)=\dfrac{1}{2t\sqrt{t}}$ est continue, positive et $\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t = 1-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$. Il en découle que $\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$: f est donc la densité d'une loi de probabilité P sur $[1,+\infty[$.

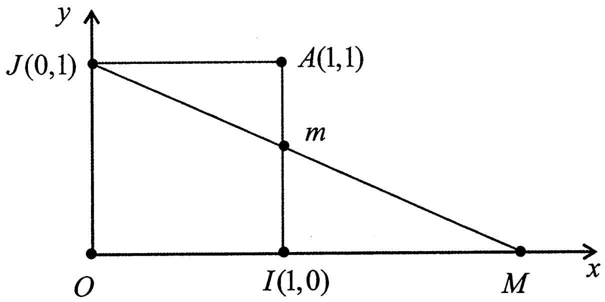
- On choisit un réel x au hasard dans $]0,1]$ et l'on considère la variable aléatoire $X : x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ qui est à valeurs dans $[1,+\infty[$.

  Pour $a \geq 1$, on a $\mathbb{P}(X \leq a) = \mathbb{P}\left(\dfrac{1}{\sqrt{a}} \leq x\right) = \mathcal{U}_{]0,1]}\left(\left[\dfrac{1}{\sqrt{a}},1\right]\right) = 1-\dfrac{1}{\sqrt{a}}$, ce qui prouve que la variable aléatoire X suit la loi de probabilité P.

2- On notera que ces deux exemples de lois continues sur un intervalle non borné s'inscrivent dans un cadre purement algébrique et installent en premier lieu la densité d'une loi de probabilité P, proposant ensuite de contrôler que telle ou telle variable aléatoire suit la loi P.

Par ailleurs on ne manquera pas d'apprécier une nouvelle fois l'à propos des notations...

Exercice 3-17



Le plan est muni d'un repère orthonormal (O,I,J).

Un point m étant choisi au hasard sur le segment $[IA[$, on désigne par X la variable aléatoire qui à m associe l'abscisse de M, où M est le point d'intersection des droites (OI) et (Jm).

Montrer que X suit la loi de probabilité P sur $[1,+\infty[$ de densité f définie par $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$.

Solution

La relation $\dfrac{MI}{MO}=\dfrac{Im}{OJ}$, par exemple obtenue par le théorème de THALÈS, conduit à $OM=\dfrac{1}{1-y}$, où y désigne l'ordonnée de m $(0\le y<1)$. La variable aléatoire X étant manifestement à valeurs dans $[1,+\infty[$, déterminons sa fonction de répartition F en calculant $F(x)=\mathbb{P}(X\le x)$ où $x\in[1,+\infty[$.

Comme $OM\le x$ équivaut à $y\le 1-\dfrac{1}{x}$ et que l'ordonnée y de m suit la loi uniforme sur $[0,1[$ (puisque m est choisi au hasard sur $[IA[$) nous avons :

$$\mathbb{P}(X\le x)=\mathcal{U}_{[0,1[}\left(\left[0,1-\frac{1}{x}\right]\right)=1-\frac{1}{x}\text{, ou encore } F(x)=1-\frac{1}{x}\text{ pour } x\ge 1.$$

La fonction F est dérivable sur $[1,+\infty[$ de dérivée f définie sur le même intervalle par $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$. La fonction f est positive, continue (ce n'est pas garanti a priori) et $\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t=1$ (simple conséquence de $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=1$) : f est donc la densité d'une loi de probabilité P sur $[1,+\infty[$.

Commentaires

1- On se gardera de croire que le contrôle des propriétés de la fonction f (**f est positive, continue et** $\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t=1$) effectué en fin de solution est superflu en classe de terminale. Le résultat qui permettrait de faire l'économie de telles vérifications n'est pas en effet à la portée des élèves[3], quand bien même sa démonstration n'est pas très exigeante.

[3] Il sort du programme d'Analyse et, par ailleurs, en tant que " machine à fabriquer des densités continues " il ne nous parait pas s'inscrire dans l'esprit du programme de Probabilité

Voici ce dont il s'agit :

Soit φ une fonction définie sur $[0,1[$ à valeurs dans $[1,+\infty[$ telle que :

- $\varphi(0)=1$ **et** $\lim\limits_{\xi\to 1}\varphi(\xi)=+\infty$;
- φ **est dérivable sur** $[0,1[$ **de dérivée** φ' **continue et strictement positive (i.e.** $\varphi'(\xi)>0$ **pour tout** ξ **de** $[0,1[$ **).**

Alors, dans ces conditions :

- φ **admet une fonction réciproque** φ^{-1} **de** $[1,+\infty[$ **dans** $[0,1[$ **dérivable ;**
- **la fonction** $f=\left(\varphi^{-1}\right)'$ **est la densité d'une loi de probabilité** P **sur** $[1,+\infty[$;
- **si** ξ **est choisi au hasard dans** $[0,1[$, **la variable aléatoire** X **qui à** ξ **fait correspondre** $\varphi(\xi)$ **suit la loi de probabilité** P **sur** $[1,+\infty[$ **.**

L'existence de la fonction φ^{-1} de $[1,+\infty[$ dans $[0,1[$ est sans problème et par ailleurs, comme la dérivée φ' ne s'annule pas, le théorème de dérivation de la fonction réciproque fonctionne : φ^{-1} est dérivable sur $[1,+\infty[$ avec $\left(\varphi^{-1}\right)'(\xi)=\dfrac{1}{\varphi'\left(\varphi^{-1}(\xi)\right)}$.

Il en ressort que la fonction $f=\left(\varphi^{-1}\right)'$ est positive (φ' l'est) et continue (φ' et φ^{-1} le sont et de plus, φ' ne s'annule pas).

Avec $\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t=\int_1^x\left(\varphi^{-1}\right)'(t)\,\mathrm{d}t=\varphi^{-1}(x)$, s'ajoute la propriété $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t=1$.

Tout se trouve réuni pour pouvoir affirmer que *f* est la densité d'une loi de probabilité continue *P* sur $[1,+\infty[$.

Enfin, pour $x\in[1,+\infty[$, nous avons :

$$\mathbb{P}(1\le X\le x)=\mathbb{P}(1\le\varphi(\xi)\le x)=\mathbb{P}\left(\varphi^{-1}(1)\le\xi\le\varphi^{-1}(x)\right)=\mathcal{U}_{[0,1[}\left(\left[0,\varphi^{-1}(x)\right]\right)=\varphi^{-1}(x),$$

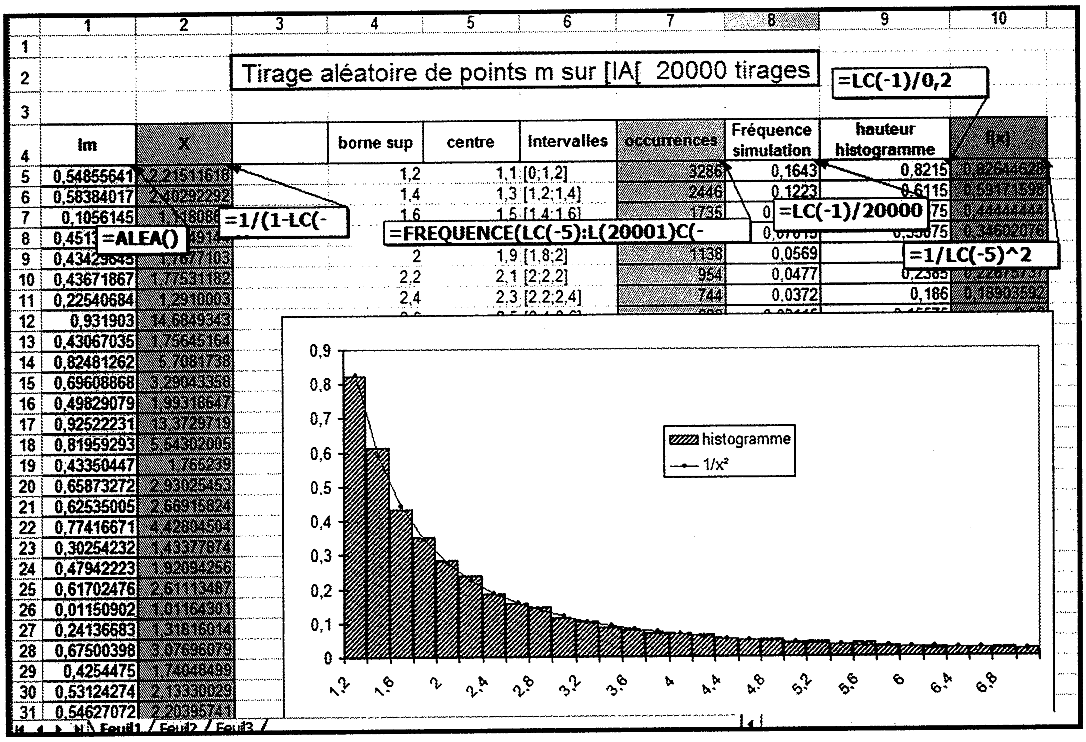
car $\varphi(0)=1$ et ξ suit la loi uniforme sur $[0,1[$.

Ainsi la fonction de répartition F de la variable aléatoire X est donnée par $F(x)=\varphi^{-1}(x)$, fonction dérivable de dérivée $\left(\varphi^{-1}\right)'=f$, d'où...

Note : changer d'intervalles et/ou de monotonie n'altère en rien la propriété qui vient d'être obtenue.

2- L'exercice à venir 3-18 est de la même veine, ce qui nous dédouane d'avance de la concision de la solution apportée.

Simulation



Gottfried Wilhelm LEIBNIZ (1646-1716)

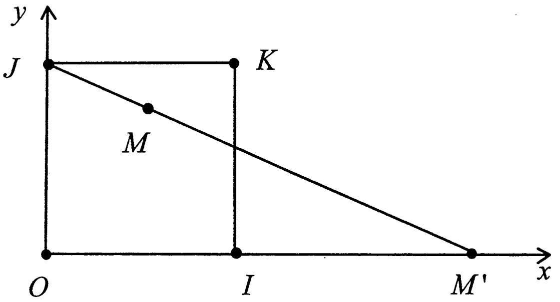
« J'ai dit plus d'une fois qu'il faudrait une nouvelle espèce de logique qui traiterait des degrés de probabilité... »

(Nouveaux essais sur l'entendement humain 1704)

Exercice 3-18

On donne le carré $OIKJ$ de côté 1 et on choisit un point M au hasard dans celui-ci. La droite (JM) coupe l'axe (OI) en un point M'.

Quelle est la loi de la variable aléatoire $X : M \mapsto$ abscisse de M' ?

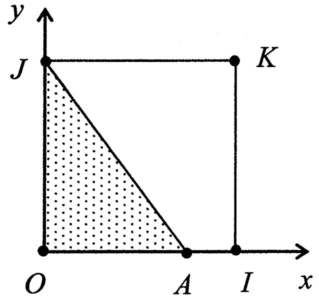


Solution

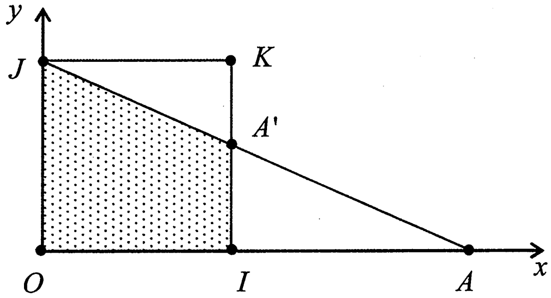
Soit a un réel positif et A le point d'abscisse a de l'axe (OI).

Nous tenons pour géométriquement évident que l'abscisse de M' est inférieure ou égale à a si et seulement si M appartient à la zone hachurée dans le carré sur chacune des figures ci-dessous.

$a \leq 1$



$a > 1$

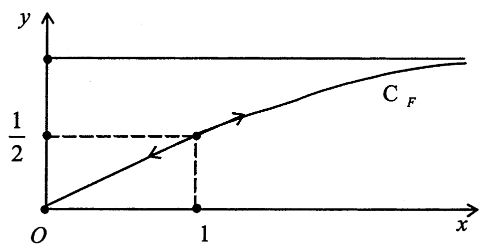


Le point M étant choisi selon la loi uniforme dans le carré (d'aire égale à 1), la probabilité de l'événement $(X \leq a)$ est évaluée par l'aire de cette zone. Ainsi :

- pour $a \leq 1$, on a $\mathbb{P}(X \leq a) = \dfrac{a}{2}$ (aire du triangle OAJ) ;
- pour $a > 1$, on a $\mathbb{P}(X \leq a) = \dfrac{a}{2} - \dfrac{(a-1)^2}{2a} = 1 - \dfrac{1}{2a}$.(aire du triangle OAJ diminuée de celle du triangle AIA')

La fonction de répartition F de la variable aléatoire X est donc définie sur $[0,+\infty[$ par :

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} & \text{pour } 0 \leq x \leq 1 ; \\ 1 - \dfrac{1}{2x} & \text{pour } 1 < x. \end{cases}$$



La courbe représentative de la fonction F (figure ci-dessus) laisse voir que F est dérivable de dérivée f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & \text{pour } x \in [0,1] ; \\ \dfrac{1}{2x^2} & \text{pour } x \in \,]1,+\infty[. \end{cases}$$

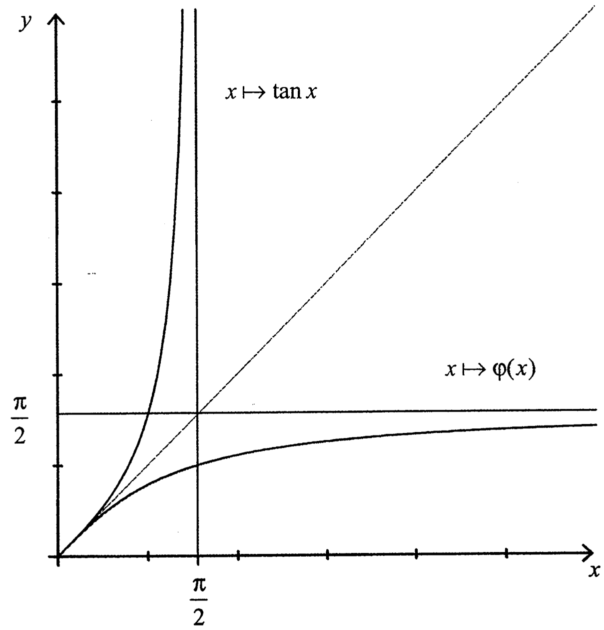
La fonction f est positive, continue sur $[0,+\infty[$ avec $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$.

Elle est donc la densité d'une loi de probabilité qui constitue évidemment la réponse à la question posée.

Exercice 3-19 *La " petite " loi de Cauchy*

1° Préliminaires

Parce que la fonction tangente est une bijection de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ sur $[0,+\infty[$, elle admet une fonction réciproque de $[0,+\infty[$ sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ notée φ



Ainsi pour $x \geq 0$

$$\varphi(x) = y \text{ équivaut à } \begin{cases} y \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right[\\ \tan y = x \end{cases}.$$

a) Préciser $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x)$.

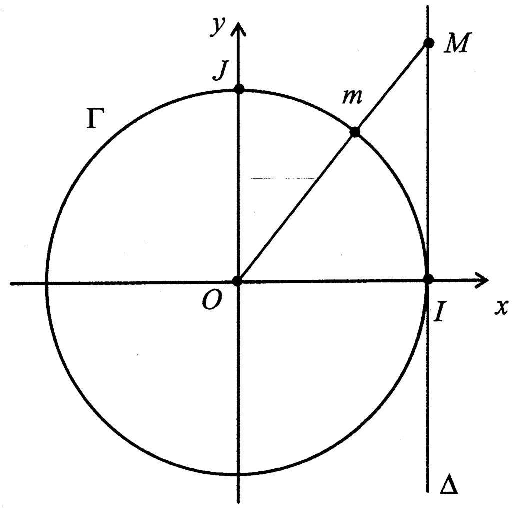
b) Quelle est la dérivée de la fonction définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ par : $x \mapsto \int_0^{\tan x} \frac{dt}{1+t^2}$?

c) En déduire que $\varphi(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$, pour tout x positif.

2° Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $f(t) = \frac{2}{\pi} \times \frac{1}{1+t^2}$

Montrer que f est la densité d'une loi de probabilité sur $[0,+\infty[$, désignée par $\mathcal{C}$.

3° Le point m est choisi au hasard sur le quart du cercle trigonométrique Γ d'extrémités I et J (J exclu), noté $\overset{\frown}{IJ}$. On désigne par M le point d'intersection de (Om) avec la tangente Δ en I à Γ. Montrer que la variable aléatoire X qui à m associe la longueur de $[IM]$ suit la loi de probabilité $\mathcal{C}$.



Solution

1° a) C'est clair : $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = \frac{\pi}{2}$.

b) Le théorème sur la composition de fonctions dérivables indique que la fonction :

$$\begin{array}{l} \left[0,\frac{\pi}{2}\right[\to [0,+\infty[\\ x \mapsto \displaystyle\int_0^{\tan x} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} \end{array} \quad \text{est dérivable.}$$

Sa dérivée est $x \to \tan' x \times \dfrac{1}{1+\tan^2 x} = \left(1+\tan^2 x\right) \times \dfrac{1}{1+\tan^2 x} = 1$.

On en déduit que $\displaystyle\int_0^{\tan x} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = x$ pour tout $x \geq 0$ (après examen des valeurs en 0),

puis que $\varphi(x) = \displaystyle\int_0^{x} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$.

2° Évident : f est continue, positive sur $[0,+\infty[$ **et d'après la question 1°)**

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty} \frac{\pi}{2} \times \varphi(x) = 1.$$

3° La variable aléatoire X est à valeurs dans $[0,+\infty[$ et pour un réel $x \geq 0$, l'événement $(X \leq x)$ n'est autre que $\left\{m \in \widehat{IJ} / IM \leq x\right\}$

Comme $IM = \tan \widehat{IOm}$ et que $0 \leq \widehat{IOm} < \dfrac{\pi}{2}$, sachant que φ est strictement croissante : $0 \leq IM \leq x$ équivaut à $0 \leq \widehat{IOm} \leq \varphi(x)$.

L'angle $\widehat{IOm}$ étant choisi au hasard dans $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$, il vient :

$$\mathbb{P}(X \leq x) = \mathcal{U}_{\left[0,\frac{\pi}{2}\right[}\left(\left[0,\varphi(x)\right]\right) = \frac{2}{\pi}\varphi(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

La variable aléatoire X suit donc la loi de probabilité $\mathcal{C}$. (« $\mathcal{C}$ » pour CAUCHY)

Commentaire

1- Toutes choses égales par ailleurs, lorsque l'angle $\left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{Om}\right)$ est choisi au hasard dans $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$, la variable aléatoire $X : m \mapsto$ ordonnée de M suit la loi dite de CAUCHY de densité définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto \dfrac{1}{\pi} \times \dfrac{1}{1+x^2}$ (la restriction à l'intervalle $[0,+\infty[$ résulte de la consigne « on ne considèrera que des intervalles bornés à gauche », voir paragraphe 2-1, page109).

2- La loi de Cauchy (ou celle que nous avons baptisée “ petite ” loi de CAUCHY pour l'occasion) est sans moment.

Par exemple, l'espérance mathématique n'est pas définie puisque l'intégrale $\displaystyle\int_0^x t\,f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x t \times \left(\frac{2}{\pi} \times \frac{1}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\ln\left(1+x^2\right)$ n'a pas de limite finie lorsque x tend vers $+\infty$.

Exercice 3-20 *Échantillons représentatifs d'une loi donnée*

Soit P une loi de probabilité sur un intervalle I de la forme $[a,b]$ ou $[a,+\infty[$, de densité f que l'on suppose non constante sur aucun sous-intervalle de I.

1) **Montrer que la fonction de répartition F est une application strictement croissante de I sur $[0,1)$, où $[0,1)$ désigne :**
   - **$[0,1]$ si I est borné (i.e. si $I=[a,b]$) ;**
   - **$[0,1[$ sinon (i.e. si $I=[a,+\infty[$).**
2) **On désigne alors par F^{-1} la fonction réciproque de F de $[0,1)$ sur I.**

   Montrer que si x est un réel choisi au hasard dans $[0,1)$, la variable aléatoire $Y: x \mapsto F^{-1}(x)$ suit la loi P.

Application **Montrer qu'en associant à chacune des valeurs $x_1, x_2, \cdots, x_n$ fournies indépendamment les unes des autres par un générateur de nombres aléatoires de $[0,1)$ les valeurs $y_1, y_2, \cdots, y_n$ définies par $y_i = F^{-1}(x_i)$, on forme un échantillon de n nombres indépendamment choisis dans I selon la loi P.**

Solution

1) Avec F croissante et $F' = f$ sur I, le résultat est immédiat.
2) Après avoir noté au passage que Y est à valeurs dans I, considérons un réel x_0 de I. L'événement $(a \leq Y \leq x_0)$ est décrit comme l'événement $\{x \in [0,1) / a \leq F^{-1}(x) \leq x_0\}$ ou encore, puisque F est strictement croissante, comme : $\{x \in [0,1) / F(a) \leq x \leq F(x_0)\}$.

   Le réel x étant choisi selon la loi uniforme dans $[0,1)$, cet événement est de probabilité $F(x_0) - F(a)$.

   Vient donc d'être obtenu que la probabilité de l'événement $(a \leq Y \leq x_0)$ est $P([a,x_0])$: *la variable aléatoire Y suit la loi de probabilité P.*

Application Seule l'indépendance est à contrôler.

Soit $(I_k)_{k=1}^n$ une famille de sous-intervalles de I.

Pour chaque entier k de $[\![1,n]\!]$ désignons par :

- A_k l'événement : $(y_k \in I_k)$;
- J_k l'image par F de l'intervalle I_k (J_k est alors un intervalle de $[0,1)$) ;
- B_k l'événement : $(x_k \in J_k)$.

Nous avons alors, en notant $\mathcal{U}$ la loi uniforme sur $[0,1)$: $P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) = \mathcal{U}\left(\bigcap_{k=1}^{n} B_k\right)$.

Le fait que les nombres $x_1, x_2, \cdots, x_n$ soient choisis au hasard dans [0,1) indépendamment les uns des autres nous assure de l'égalité $\mathcal{U}\left(\bigcap_{k=1}^{n} B_k\right) = \prod_{k=1}^{n} \mathcal{U}(B_k)$.

En découle $P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) = \prod_{k=1}^{n} P(A_k)$, ce qui signifie que les événements $(y_k \in I_k)$ pour $k = 1, 2, ..., n$ sont indépendants pour la loi P.

Commentaires

1- Anticipons sur la *loi exponentielle de paramètre* λ $(\lambda > 0)$ (voir chapitre 5), loi de probabilité sur $[0,+\infty[$ notée P_λ avec :

$\mathrm{P}_\lambda([0,x]) = F_\lambda(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ pour tout x de $[0,+\infty[$.

Avec $F_\lambda^{-1}(x) = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-x)$, on obtient que si x est choisi dans $[0,1[$ selon la loi uniforme, la variable aléatoire $T : x \mapsto -\frac{1}{\lambda}\ln(1-x)$ suit la loi exponentielle de paramètre λ.

Note : Sachant que choisir x au hasard dans $[0,1[$ revient à choisir $1-x$ au hasard dans $]0,1]$, il est sûr que la variable aléatoire $T : x \mapsto -\frac{1}{\lambda}\ln(1-x)$ suit également la loi exponentielle de paramètre λ (c'est le point de vue que nous retiendrons dans le chapitre 5).

2- *La loi normale centrée réduite* (rappel : $F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$) pose problème : F^{-1} n'est pas " connue ".

On se tire d'affaire, par exemple :

- avec le théorème central limite : si $x_1, x_2, \cdots, x_n$ sont pris dans [0,1] selon la loi uniforme, indépendamment les uns des autres, alors la variable aléatoire qui leur associe $\frac{x_1 + x_2 + \cdots x_n}{n}$ suit approximativement la loi normale de moyenne $\frac{1}{2}$ ($\frac{1}{2}$ est la moyenne de la loi uniforme sur $[0,1]$) et d'écart-type $\sqrt{\frac{1}{12n}}$ ($\sqrt{\frac{1}{12}}$ est l'écart-type de la loi uniforme sur $[0,1]$).

  Un changement de variable affine permet de se ramener alors à une loi normale de paramètres donnés.
- avec la loi de BOX-MULLER, qui affirme que si $\mathcal{U}_1$ et $\mathcal{U}_2$ sont des variables uniformes sur $]0,1]$ indépendantes, la variable aléatoire $X = \sqrt{-2\ln \mathcal{U}_1}\sin(2\pi\mathcal{U}_2)$ suit la loi de GAUSS centrée réduite.
- etc..

Exercice 3-21

Pour n entier $(n \geq 1)$ soit f_n $(n \geq 1)$, la fonction définie sur $[0,1]$ par :

$$f_n(x) = 1 - \cos(2\pi n x).$$

1. **Montrer que f_n est la densité d'une loi de probabilité continue sur $[0,1]$ notée P_n.**
2. **Soit $\mathcal{U}$ la loi uniforme sur $[0,1]$. Comparer pour $x \in [0,1]$:**

$$\lim_{n \to +\infty} \mathrm{P}_n([0,x]) \text{ et } \mathcal{U}([0,x]).$$

Solution

1. La fonction f_n est continue, positive sur $[0,1]$ et :

$$\int_0^x f_n(t)\,\mathrm{d}t = x - \frac{1}{2\pi n}\sin(2\pi n x) \text{ pour } x \in [0,1].$$

Ainsi $\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t = 1$: la fonction f_n est une densité sur $[0,1]$.

2. Avec $P_n([0,x]) = \int_0^x f_n(t)\,\mathrm{d}t = x - \dfrac{1}{2\pi n}\sin(2\pi n x)$, il vient, compte tenu de la majoration $|\sin(2\pi n x)| \leq 1$: $\lim\limits_{n \to +\infty} P_n([0,x]) = x = \mathcal{U}([0,x])$.

Commentaires

En notant F_n la fonction définie par $F_n(x) = \int_0^x f_n(t)\,\mathrm{d}t$,

on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} F_n(x) = x \quad \forall x \in [0,1]$.

Mais on peut noter que la suite $(f_n(x))$ est divergente pour tout réel x de $]0,1[$ (ce résultat viendra appuyer la remarque 1 page 246, concernant un exemple de " convergenc e en loi ").

Chapitre 4

Modélisation

« Il n'y a pas de modèle pour qui cherche ce qu'il n'a jamais vu. »

Paul ÉLUARD

1. Tirages indépendants

1.1 Le fondement du chapitre

« *Choisir au hasard et indépendamment l'un de l'autre deux nombres dans* $[0,1]$ *revient à choisir un point au hasard*[1] *dans le carré* $[0,1]\times[0,1]$. »

Cet extrait du projet de programme de Terminale S (voir [2] page 19, mais également le document d'accompagnement [4] page 140) fixe à lui seul, ou presque, le contenu de ce chapitre.

Partant, quelques commentaires s'imposent.

Il s'agit d'une acclimatation réussie, à destination des élèves, d'un résultat somme toute classique et banal issu du Calcul des Probabilités (mais qui leur est inaccessible dans ce cadre) :
« Si X et Y **sont deux variables aléatoires indépendantes suivant toutes deux la loi uniforme sur** $[0,1]$, **alors la loi du couple** (X,Y) **est la loi uniforme sur** $[0,1]\times[0,1]$. »
C'est le moins que l'on pouvait en attendre : nous voyons mal en classe de terminale décliner quoi que ce soit sur la loi d'un couple de variables aléatoires continues...

Acclimatation réussie donc, mais qui va bien au-delà d'une simple mise à portée des élèves, par ailleurs attrayante, d'une propriété dont la seule façade probabiliste ne peut que leur être étrangère. Il nous paraît important d'apprécier en quoi, **une telle transposition**[2] **préfigure une pratique** (à condition d'entendre à bon escient une pareille expression).
En premier lieu, cette transposition offre des perspectives nouvelles (insoupçonnées ?) dans la **modélisation** d'expériences aléatoires.
De plus, elle permet d'engager - sans nouveaux frais - **d'autres moyens d'attaque des problèmes**, issus pour l'essentiel de la géométrie du dessin et de la mesure.
Enfin - et ceci est une conséquence à ne pas négliger - **le champ d'intervention des concepts probabilistes** jusqu'à présent introduits va s'en trouver considérablement élargi.

En conclusion, nous tenons là, comme il se dit " *un formidable supplément au chapitre* ".

---

[1] Selon la loi uniforme, donc.

[2] Destinée aux seuls didacticiens : peut-on parler de transposition didactique ? L'expression étant aussi pratique à sortir de son chapeau quand on en a besoin que délicate à manier quand un didacticien pur et dur vous surveille, nous nous en passerons.

1.2 Un exemple à l'étude

Il ne manque pas d'exemples qui viendraient à point nommé étayer ces propos et donner de plus une idée de l'activité mathématique qu'auront à conduire les élèves sur ce sujet.

En voici un, inscrit à notre répertoire sous le nom de : « Problème de la rencontre » (voir les exercices 4-8 et 4-16) :

Deux personnes A et B ont rendez-vous en un lieu donné entre 12 h et 13 h. Les instants d'arrivée sont indépendants l'un de l'autre et on les considère comme choisis au hasard entre 12 h et 13 h. Chaque personne attend un quart d'heure avant de repartir sauf si elle est arrivée entre 12 h 45 et 13 h, auquel cas elle quitte les lieux à 13 h.
Qu'elle est la probabilité que les deux personnes se rencontrent ?

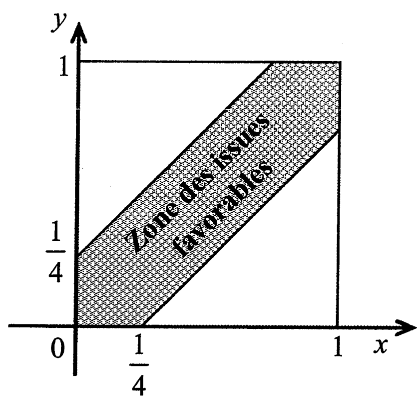
Nous ne produirons pas ici de solution détaillée[3], car notre souci est avant tout d'examiner une démarche et les compétences utiles à sa mise en œuvre.

Si l'on désigne par $12+x$ et $12+y$ les instants d'arrivée des personnes A et B (l'heure étant prise comme unité de temps), la première étape va consister à **expliciter** ce " couple d'instants d'arrivée au hasard " comme le choix aléatoire d'un point $M(x, y)$ selon la loi uniforme sur le carré $[0,1]\times[0,1]$.

Ensuite, il va falloir s'intéresser de près à la " **zone des issues favorables à la réalisation de l'événement : « les deux personnes se rencontrent »** ", c'est-à-dire rendre visible par le **dessin** une telle zone afin de pouvoir la **mesurer** (évidemment ici par un calcul d'aire, cela va de soi).

Soyons honnêtes : les quelques expériences réalisées donnent à voir que, sur ce point, les idées qui se développent ne sont pas toujours celles que nous avions prévues.

La simplicité du raisonnement qui conduit à affirmer que les personnes se rencontrent si et seulement si l'écart entre leurs instants d'arrivée est inférieur à un quart d'heure **et donc si et seulement si** $|x-y|\leq\frac{1}{4}$ (d'où la figure ci-contre) n'est qu'apparente.



Mesure de la zone des issues possibles : 1

Mesure de la zone des issues favorables : $\frac{7}{16}$

Probabilité de la rencontre : $\frac{7}{16}$

Elle masque une réelle difficulté à appréhender le phénomène en dehors de toute idée de *conditionnement* ; nous faisons allusion aux études de ce problème pas trop éloignées de :

Cas 1 : A arrive le premier.

Sous cas 1-1 : A arrive entre 12 h et 12 h 45 ;

Sous cas 1-2 : A arrive entre 12 h 45 et 13 h ;

etc..

---

[3] Voir commentaires de l'exercice 4-8.

Voilà donc un imprévu supplémentaire à rentrer dans la ligne de nos préoccupations, mais qui ne saurait achever notre dissertation sur cet exemple : quelques remarques restent à mettre en avant.

Remarque 1

Cet exercice diffère des deux suivants qui lui sont pourtant apparentés :

Exercice 1'. On choisit au hasard deux réels dans $[0,1]$ indépendamment l'un de l'autre.

Quelle est la probabilité que l'intervalle qu'ils déterminent soit de longueur inférieure ou égale à $\frac{1}{4}$?

Exercice 1". On choisit au hasard deux réels x et y dans $[0,1]$ indépendamment l'un de l'autre.

Quelle est la probabilité que $|x-y| \leq \frac{1}{4}$?

Tout cela pour dire, que, si l'approche commune à toutes ces situations : « choix d'un point au hasard dans le carré » est une possibilité offerte et pertinente[4] dans l'attaque de tels problèmes, elle ne saurait à elle seule combler toutes les attentes, attentes nourries par exemple, par *la difficulté d'interpréter* dans le domaine algébrique des propriétés telles :

- « *les personnes se rencontrent* » (cf. exemple) à l'aide d'une relation entre les instants d'arrivée ;
- « *l'intervalle est de longueur inférieure ou égale à* $\frac{1}{4}$ » (cf. exercice 1'), à l'aide d'une relation entre les bornes de l'intervalle.

En deux mots : on est prié aussi de réfléchir...

Remarque 2

La modestie des arguments géométriques utilisés dans cet exemple n'est pas accidentelle : elle sera de mise dans la plupart des exercices proposés, suite à un choix délibéré de notre part.

Cette soudaine humilité trouve quelques explications fort simples :

- le procédé a ses propres limites[5] ;

---

[4] On n'aura pas manqué de le remarquer dans le problème de la rencontre.

[5] Quand bien même serait-il manié en expert. Pour s'en convaincre, résoudre le problème suivant : « *Quelle est la probabilité que la somme de* 4 *réels pris au hasard dans* $[0,1]$, *indépendamment les uns des autres, soit plus petite qu'un réel donné à l'avance* ? » (voir commentaires de l'exercice 4-15).
Il existe par ailleurs des situations où l'on va trouver plus engageant que la modélisation par « le choix d'un point au hasard dans le carré » (voir exercice 4-12).

- nous avons déjà souligné (chapitre 2, paragraphe 1.1, page 26) notre intention d'éviter les surenchères techniques dans l'usage des lois uniformes : la représentation graphique et l'évaluation de la mesure de l'ensemble des issues favorables ne sauraient rentrer dans les mathématiques de " pointe " ;
- enfin, nous suivons l'opinion commune qui laisse entendre qu'il est difficile de convaincre des bienfaits d'une démarche en ne proposant que des situations où elle échoue…

1.3 Les rallonges utiles

1.3.1 Quelques variantes

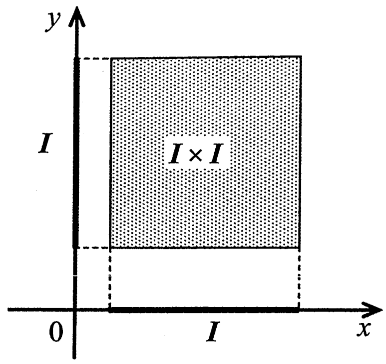
Les propriétés qui suivent s'installent naturellement dans les traces de la précédente.

- **En dimension 3**

« Le choix au hasard et indépendamment les uns des autres de trois nombres dans $[0,1]$ peut être décrit par le choix d'un point au hasard dans le cube $[0,1]\times[0,1]\times[0,1]$ (i.e. selon la loi uniforme sur ce cube). »

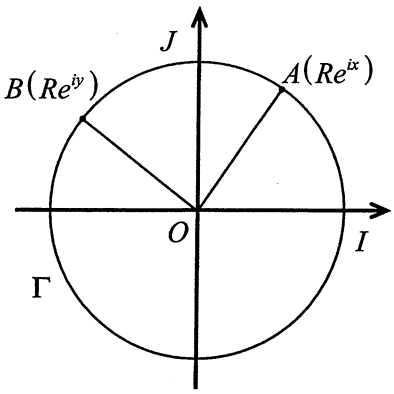
- **Avec un intervalle de $\mathbb{R}$ quelconque mais borné**

« Le choix au hasard et indépendamment l'un de l'autre de deux nombres x et y pris dans un intervalle I borné de $\mathbb{R}$, équivaut au choix d'un point $M(x,y)$ selon la loi uniforme dans le carré $I\times I=\{M(x,y)/x\in I \text{ et } y\in I\}$ (voir figure ci-contre).



- **Sur le cercle**

« Le choix au hasard et indépendamment l'un de l'autre de deux points A et B d'un cercle peut être obtenu par le choix au hasard d'un point $M(x,y)$ dans le carré $[0,2\pi[\times[0,2\pi[$ selon la loi uniforme. »



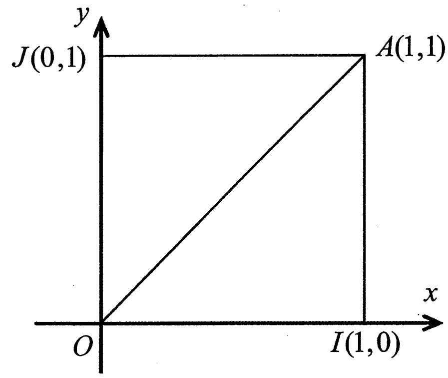
Comme l'indique la figure ci-contre, au couple (x,y) de $[0,2\pi[\times[0,2\pi[$ sont associés les points du cercle Γ d'affixes Re^{ix} et Re^{iy} (le plan étant muni d'un repère orthonormal direct (O,I,J) et Γ étant le cercle de centre O et de rayon R).

En revanche ayant essuyé quelques (minuscules) débâcles sur le sujet nous ne ferons pas rentrer dans ce bataillon de certitudes le choix au hasard de deux réels x et y contraints à une inéquation linéaire de la forme (par exemple) : $x+y\leq a$ (a réel donné à l'avance[6]).

---

[6] Voir paragraphe 2-6

1.3.2 Coïncidence des tirages



Servie par la démarche précédente, la figure ci-contre fait comprendre que lorsque l'on choisit au hasard, *indépendamment l'un de l'autre* deux réels x et y de $[0,1]$, **la probabilité de l'événement $(x=y)$ est nulle** (le segment $[OA]$ est de mesure nulle dans le carré *OIAJ*, ou, si l'on préfère, étant « réduit jusqu'à l'os », son aire est égale à zéro[7]).

Ce résultat méritait d'être signalé : comme nous allons le montrer dans le paragraphe suivant, il permet d'être attentif à certaines situations où l'équivoque est trop souvent de mise.

1.3.3 Les frontières communes : zone aveugle ?

Reprenons, en introduisant un point de vue nouveau, *le problème de la rencontre* (c.f. paragraphe 1.2, page 154).
En désignant encore par $12+x$ et $12+y$ $(0\le x\le 1$ et $0\le y\le 1)$ les instants d'arrivée des personnes A et B, considérons les événements :

$$E_0=\left(x\in\left[\frac{3}{4},1\right]\right)\cap\left(y\in\left[\frac{3}{4},1\right]\right)\ ;$$

$$E_1=\left(x\in\left[0,\frac{3}{4}\right[\right)\cap\left(y\in\left[x,x+\frac{1}{4}\right]\right)\ ;$$

$$E_2=\left(y\in\left[0,\frac{3}{4}\right[\right)\cap\left(x\in\left[y,y+\frac{1}{4}\right]\right)\ .$$

Nous pouvons mettre au rang des évidences que l'événement E : « *A et B se rencontrent* » est égal à $E_0\cup E_1\cup E_2$, que $E_0\cap E_1=E_0\cap E_2=\varnothing$ et même que $E_1\cap E_2\subset(x=y)$.

Les réels x et y étant choisis indépendamment l'un de l'autre dans $[0,1]$, " on sait " l'événement $(x=y)$ négligeable, c'est à dire de probabilité nulle. Par suite, il en est de même de l'événement $E_1\cap E_2$.

Alors, à moins de s'accorder de temps en temps cette forme de négligence où s'abandonne le détail de quelques justifications, nous ne voyons pas pourquoi, il en découlerait ipso facto que :

$$P(E_0\cup E_1\cup E_2)=P(E_0)+P(E_1)+P(E_2)$$

(où P désigne la loi de probabilité uniforme sur $[0,1]\times[0,1]$).

---

[7] On se rapportera à l'exercice 2-18, pour s'apercevoir qu'un tel résultat peut-être pris en défaut lorsque x et y ne sont pas choisis indépendamment l'un de l'autre.

Il est beaucoup moins choquant de procéder ainsi[8] :

$$P(E_0 \cup E_1 \cup E_2) = P(E_0) + P(E_1 \cup E_2) - P(E_0 \cap (E_1 \cup E_2)).$$

Comme E_0 est disjoint de E_1 et E_2, il l'est également de leur réunion, et donc $P(E_0 \cap (E_1 \cup E_2)) = 0$.

Comme $P(E_1 \cap E_2) = 0$, la relation : $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$ livre

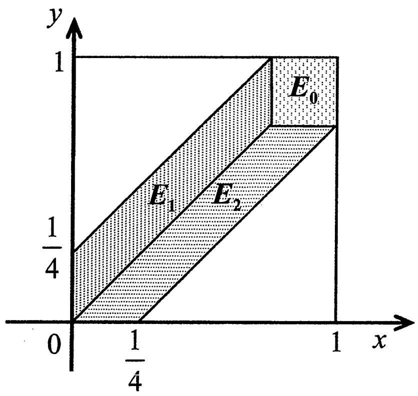
$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$, d'où finalement :

$$P(E_0 \cup E_1 \cup E_2) = P(E_0) + P(E_1) + P(E_2).$$

Les évaluations (immédiates) $P(E_0) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4}$, $P(E_1) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{4}$ et $P(E_2) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{4}$ permettent de cueillir une nouvelle fois $P(E) = \frac{7}{16}$ (c.f. résultat page 154).

Remarque

Le recours aux probabilités géométriques - en restant dans le cadre précédemment défini -. éclipse la question de la mesure de l'intersection de E_1 et de E_2. Il n'est de regarder la figure ci-contre pour comprendre que la " frontière commune " à E_1 et E_2 se trouve noyée dans la " masse " de la zone des issues favorables à la rencontre et de manière plus générale **que la représentation géométrique** (zone possible, zone favorable) **va occulter le problème dont nous venons de nous soucier**.



Notre travail déboucherait donc sur une trouvaille inutile ? Bien sûr que non ; à replacer de telles études dans un contexte plus vaste " *Problème de la rencontre de n personnes* ", (où n est quelconque (voir exercice 4.-16)), ou encore : " *n points sur un même demi-cercle* " (voir exercice 4-17), etc., il ne nous paraît pas superflu de préparer en amont un argument plus crédible que le machin passe-partout : « *c'est négligeable pour le problème...* ».

Quant à la propriété générale annoncée, nous la formulerons ainsi :

Soit P une loi de probabilité continue et E_1, E_2,... , E_n des événements tels que $P(E_i \cap E_j) = 0$ pour tout (i, j) tel que $i \neq j$.

Alors, on a : $$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(E_i).$$

[8] D'autant plus que ce qui suit préfigure le résultat général ainsi que sa démonstration.

Démonstration par récurrence[9]

Soit $n+1$ événements $(E_i)_{1\le i\le n+1}$ tels que pour $i\neq j$ $P(E_i\cap E_j)=0$.

On a : $P\left(\bigcup_{i=1}^{n+1}E_i\right)=P\left(\left(\bigcup_{i=1}^{n}E_i\right)\cup E_{n+1}\right)=P\left(\bigcup_{i=1}^{n}E_i\right)+P(E_{n+1})-P\left(\bigcup_{i=1}^{n}(E_i\cap E_{n+1})\right)$.

Les données permettent d'appliquer l'hypothèse de récurrence au rang n :

- d'une part, $P\left(\bigcup_{i=1}^{n}E_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(E_i)$;

- d'autre part, en posant $F_i=E_i\cap E_{n+1}$ $(1\le i\le n)$,

comme $P(F_i)=0$ pour $1\le i\le n$ (et donc a fortiori $P(F_i\cap F_j)=0$ pour $i\neq j$), il vient :

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}F_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(F_i)=0,$$

d'où l'égalité :

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n+1}E_i\right)=\sum_{i=1}^{n+1}P(E_i).$$

(Noter que la proposition recouvre un résultat utilisé en passant dans la démonstration :

$P(E_i)=0$ *pour tout i*, $1\le i\le n$, *implique* $P\left(\bigcup_{i=1}^{n}E_i\right)=0$,

résultat auquel on pourra accorder une certaine autonomie).

---

[9] Nous évitons la formule du crible (ou de Poincaré) qui rend immédiate cette proposition :

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}E_i\right)=\sum_{p=1}^{n}\left((-1)^{p-1}\sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_p\le n}P\left(E_{i_1}\cap E_{i_2}\cap\ldots E_{i_p}\right)\right).$$

2. Problèmes de modélisation

2.1 Un terrain miné

Un ouvrage consacré à l'enseignement des Probabilités continues en classe de Terminale ne saurait faire l'impasse sur quelques unes des questions particulièrement embarrassantes que soulève la **modélisation** en Probabilités, en tout état de cause plus épineuses que celles déjà introduites dans le débat à propos de la modélisation uniforme (chapitre 2 ; paragraphe 1.2).

Nous avancerons à pas mesurés, car le terrain est un brin miné :

- **par l'air du temps**. La modélisation est en vogue dans l'enseignement secondaire[10]. C'est tout frais et il y aurait matière à s'interroger sur l'aspect tardif de son introduction soudaine à ce niveau, alors que : « *la modélisation est une pratique scientifique majeure qui concerne un nombre croissant de domaines.* » (voir [4], page 23) ;
- **par la polysémie de l'expression** que ne sauraient amoindrir - bien au contraire - quelques acceptions perfides du mot « *modèle* » ;
- **par la difficulté du sujet**. « *Modéliser est une des principales modalités de l'interaction entre les mathématiques et les autres sciences. Mais la pratique de la modélisation de situations réelles est difficile…* » (toujours [4], page 23).
  C'est un domaine où les chausse-trappes sont nombreuses, variées, que les lacunes de la formation initiale peuvent entretenir à peu de frais ;
- **par l'idéologie**. Nous voulons dire que chacun y va de son point de vue, parfois d'une extrême subtilité. C'est légitime et il n'entre pas dans notre propos d'inculper qui que ce soit. Mais, on ne peut manquer d'observer, plus souvent ici qu'ailleurs, **qu'une idée qui semble acquise sur le papier ne l'est pas tant que ça dans la réalité…**

2.2 Initiation à la modélisation probabiliste

Un choix perspicace nous semble-t-il, est donc de " dire des choses " utiles et simples, plutôt qu'encombrantes et habilement mijotées, en réfléchissant au diapason d'une **pratique** : **celle qui fait référence aux capacités des usagers**, dans le sens accordé, en quelques mots justes, par le document d'accompagnement des Programmes ([4], page 24) :

« *On initiera les élèves à la modélisation grâce à l'étude de certaines situations réelles, qu'on simplifiera volontiers à l'extrême* [11] *et pour lesquelles le modèle grossier ainsi établi devient éclairant ou permet une prévision.* »

---

[10] Au moins dans les Programmes…

[11] C'est nous qui soulignons.

Quelques **exemples** choisis, les uns parmi les plus classiques, les autres inédits[12] vont nous servir d'appuis. Sûrement moins prestigieux comme support de réflexion qu'une analyse théorique solidement ficelée[13], nous leur confions cependant la charge de montrer que :

- si la panoplie des **modèles uniformes usuels** est méconnue des élèves, il ne se passera rien. C'est " on ne peut plus clair ", comme il l'est dit dans [4] (page 23) :
  « *Observer, simplifier, penser une situation à l'aide de concepts théoriques [...], représenter certains types de variabilité par des lois de probabilité, exigent au minimum de connaître les concepts, de savoir [...] quels types de calculs peuvent être faits sur des familles de lois de probabilité. Aussi est-il nécessaire d'étudier les concepts en jeu et d'acquérir des savoirs.* »

- **certains repères doivent être aménagés auprès des élèves dans l'étude des phénomènes aléatoires** (et notamment des phénomènes aléatoires continus).

  On sait bien que le probabiliste n'est pas l'artiste dans sa mansarde oublieux du monde réel et qu'après tout, c'est son boulot de se débrouiller du chaudron ou fermentent dans le même bouillon des situations aléatoires, les unes où le modèle est explicite ou à considérer comme tel, les autres où il est implicite et encore bien d'autres (la plupart) où se pose avec acuité le problème du choix du modèle..., sans oublier (par exemple) la question de l'adéquation avec les données, etc..
  Mais ce serait " noyer les élèves dans la vase " que les faire jouer à ce jeu là et d'une pédagogie trompeuse que de mettre dans le même sac étiqueté « Phénomènes aléatoires » des situations où vont s'entrecroiser devant leurs regards crédules, réalité, idéalisation de la réalité, construction abstraite, formalisation, etc..
  Des repères donc, pour l'instant inarticulés, que nous proposons d'élaborer par l'examen attentif de la question :

  « **Quel est le sens exact de ce qui est demandé aux élèves ?** »

2.3 Des modèles explicites

• Le *problème de la rencontre* (copieusement décortiqué dans le paragraphe 1. 2 de ce même chapitre) est le prototype de l'étude de situations aléatoires où le modèle probabiliste se trouve clairement installé d'entrée de jeu.
En effet, les seuls ingrédients aléatoires dans l'histoire, à savoir les instants d'arrivée des deux personnes, *sont déclarés sans ambiguïté comme pris au hasard*[14]

---

[12] À notre connaissance.

[13] Sur ce point, nous renvoyons le lecteur intéressé à l'article de Jean Claude GIRARD et Michel HENRY « *Expérience aléatoire et Modélisation* » dans les Actes de la troisième Université d'été (METZ 1997) de la commission inter-IREM de Probabilités et Statistiques ([23] pages 107 à 130). Excellent article ; prévoir cependant de « s'équiper un peu » pour recevoir quelques idées.

[14] C'est à dire, comme nous en avons convenu, selon la loi uniforme de cet intervalle.

indépendamment l'un de l'autre dans un intervalle réel de longueur 1.
De la même veine, sont, par exemple, les problèmes suivants (que l'on retrouvera accompagnés de quelques autres dans les exercices de ce chapitre) :

- « **Deux réels sont choisis indépendamment l'un de l'autre au hasard dans** $[0,1]$.
Quelle est la probabilité que leur somme soit plus petite qu'un réel donné à l'avance ? »

- « **Trois réels** x, y **et** z **sont choisis au hasard dans** $[0,1]$ **indépendamment les uns des autres.**
Quelle est la probabilité de pouvoir construire un triangle de côtés x, y **et** z **?** »
Variante : remplacer " triangle " par " triangle acutangle " ;

- etc..

Rendons-nous à l'évidence : dans de tels thèmes d'étude, l'exigence de modélisation probabiliste en direction des élèves se résume finalement (le plus souvent) en **une reconstruction du modèle en termes, cette fois, de loi uniforme dans le carré, le cube, etc.** (via les résultats probabilistes présentés dès l'entame de ce chapitre (paragraphe 1. 1 et 1. 3)). Par ailleurs, de par la nature même des problèmes abordés, *la confrontation modèle - résultats expérimentaux* est totalement absente des débats.

- Il n'empêche ; nous tenons là matière à agglomérer.

Il existe une phase initiale à tout processus de modélisation – probabiliste ou non – qui consiste à dégager de la situation concrète ce qu'il est pertinent d'abstraire, de simplifier, d'idéaliser :

- ainsi, dans le « *Problème de la rencontre* », nous avons considéré que les personnes A et B « apparaissent et disparaissent instantanément » du lieu de rendez-vous, ce qui - avouons-le - est tout à fait étranger aux pratiques coutumières des promeneurs, quelque soit le mode de locomotion adopté ;

- anticipant sur la *Problème de Franc-Carreau* (paragraphe 2. 5) nous verrons par ailleurs que ce sont les représentations idéalisées de la géométrie euclidienne (en tant que modèle mathématique de l'espace physique qui nous entoure) qui vont prendre le pas sur la réalité concrète, en assimilant par exemple les joints du carrelage à des segments de droite ;

- etc..

Nous pensons que cette phase initiale dans la modélisation mérite une toute autre place que celle, qui, à l'ordinaire lui est chichement mesurée :

- d'une part, les élèves ne sont pas de ces professionnels, qui, sur un tel sujet, ont l'oreille suffisamment exercée pour s'accommoder de quelques *implicites* ;

- d'autre part, les choix à opérer sur ce qu'il est pertinent d'abstraire, de simplifier, d'idéaliser n'émanent ni de la routine, ni de l'arbitraire, mais de **compétences scientifiques** concernant par exemple la géométrie, la cinématique (comme nous l'avons vu) mais aussi la physique, l'économie, etc..

Notons alors, qu'avec une classe de problèmes qui mettent une sourdine à la question du modèle probabiliste, l'occasion est fournie d'accorder une attention particulière à cette démarche.

• La recherche et la résolution de tels exercices participent à l'évidence de la maîtrise des modèles uniformes[15]. Mais leur mérite ne s'arrête pas là : ils apportent du concret à la notion même d'aléatoire[16].

Pour nous expliquer là-dessus, nous suggérons simplement au lecteur de proposer les exercices[17] qui suivent à ses élèves et d'analyser leurs réactions : nous n'en dirons pas plus[18].

« **1. On considère deux réels a et b fixés distincts dans $[0,1]$. Chacun d'eux est inscrit dans une enveloppe. Un joueur doit deviner quel est le plus grand des deux nombres. Lui est accordé le droit de choisir l'une des deux enveloppes au hasard et de prendre connaissance du nombre qui y est inscrit.**
On demande quelle est la probabilité que le joueur a de gagner avec la stratégie suivante :

- si le nombre inscrit dans l'enveloppe tirée est plus grand que $\frac{1}{2}$, il déclare que ce nombre est le plus grand ;

- sinon, il déclare que c'est l'autre.

2. Même question, mais cette fois les deux réels sont choisis au hasard dans $[0,1]$, indépendamment l'un de l'autre, toutes choses restant égales par ailleurs. »

---

[15] Maîtrise que nous avons qualifiée d'indispensable (paragraphe 2. 2, page161).

[16] Même si quelques uns d'entre eux peuvent paraître "artificiels".

[17] Ces exercices sont respectivement référencés dans cet ouvrage sous les numéros 2.-21 et 4-14.

[18] Nous sommes sûrs de notre coup, le terrain étant déjà bien balisé par les réactions d'étudiants et d'enseignants en formation. (Coup de pouce : ne pas manquer d'observer un certain trouble concernant le choix aléatoire ou non de deux réels et le fait que la probabilité recherchée dépende ou non de ces deux réels...)

2.4 Des modèles implicites ?

Le Mémoire sur le jeu de Franc-Carreau[19] (1733) de Georges Louis Leclerc, comte de BUFFON, est le premier exemple connu de problème de Probabilités dans un contexte purement géométrique.

Parce que riche de leçons à tirer en ce qui concerne divers aspects de la modélisation, et bien que d'approche exigeante, il nous servira de support tout au long de ce paragraphe.

BUFFON

2.4.1 Le jeu de Franc-Carreau

BUFFON se propose d'étudier le problème suivant :

« *Dans une chambre pavée de carreaux égaux, on jette en l'air un écu ; l'un des joueurs parie que cet écu après sa chute se trouvera à franc-carreau, c'est à dire sur un seul carreau ; le second parie le contraire.*
À quelle condition le jeu est-il équitable ? »

Nous donnerons de ce problème la version simplificatrice suivante (mais non réductrice pour les propos à venir) :

« **On jette une pièce de monnaie (un disque donc) sur un carrelage formé de carreaux isométriques.**
Quelle est la probabilité que la pièce se trouve à franc-carreau (c'est à dire entièrement contenue dans un seul carreau) ? »

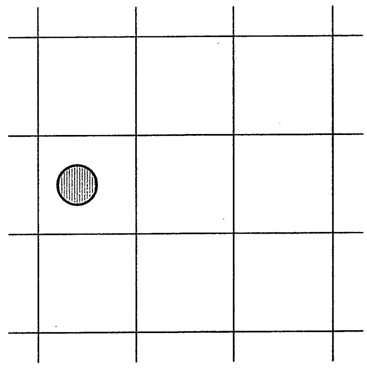
---

[19] La documentation utilisée est présente dans l'ouvrage de la Commission inter-IREM d'Épistémologie et d'Histoire des Mathématiques : « LA MÉMOIRE DES NOMBRES ». De manière plus précise, nous faisons référence à l'article de Frédéric METIN « *BUFFON et le problème de l'aiguille : le mémoire sur le jeu de Franc-Carreau de 1733* » (voir [29]), article dont la préoccupation première n'est pas la modélisation probabiliste mais plutôt les « *rapports passionnés, conflictuels* » de BUFFON avec les nombres.
À signaler également l'article de l'équipe Intégration des Outils Informatiques de l'IREM de Montpellier dans [21] (pages 133 à 143) : « *Le Jeu de Franc-Carreau. Expérimentation et simulation* ». (Les amateurs de travaux bien achevés sur la simulation vont trouver de quoi les satisfaire.)

2.4.2 Analyse du problème sur le jeu de Franc-Carreau

Nous conduirons l'étude de ce problème (ainsi que l'analyse de la solution qu'en donne BUFFON) selon une **démarche** éprouvée, organisée en plusieurs étapes, chacune d'elles indiquant soigneusement son objectif spécifique : décrire une expérience aléatoire, simplifier, idéaliser cette expérience, choisir un modèle probabiliste, effectuer un calcul de probabilités, etc..

• Description de l'expérience aléatoire[20]



Une position de franc-carreau

On jette une pièce de monnaie sur un sol pavé de carreaux de forme carrée, isométriques : voilà pour le **protocole expérimental** (imprécis et vague, mais pas davantage que le lancer de dé…).

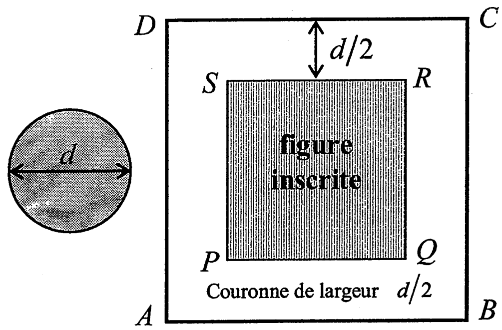
On s'intéresse à deux **issues** contraires l'une de l'autre : une fois immobilisée sur le carrelage, la pièce se trouve à franc-carreau (comme par exemple dans la figure ci-contre) ou non.

• Simplification et idéalisation de l'expérience

Nous supposerons que le diamètre de la pièce est plus petit que le côté du carré faute de quoi[21]… , ignorerons les facéties d'un goût douteux (il est sûr que la pièce retombe, qu'elle ne s'immobilise pas sur la tranche, etc.) pour proposer une première *simplification* en considérant que les joints du carrelage sont sans épaisseur[22].

Cela dit, il est très facile, malgré les explications amphigouriques de BUFFON (voir ci-après), d'obtenir une condition géométrique traduisant que la pièce se trouve en position de franc-carreau, dans **un carreau donné**.

La pièce de diamètre d se trouve à franc-carreau dans le carré $ABCD$, si et seulement si son centre est à l'intérieur du carré $PQRS$ obtenu après suppression dans le carré $ABCD$ de la bordure (ou couronne) de largeur $\frac{d}{2}$; c'est, on ne peut plus clair.



[20] Quand bien même il y aurait parfois redondance avec l'énoncé (ici c'est le cas), nous jugeons indispensable la description précise du protocole expérimental et des issues que l'on entend observer.

[21] Il est évident qu'une pièce à franc-carreau dans un carré a un diamètre inférieur au côté du carré, d'où l'inutilité de se lancer dans un calcul de probabilités lorsque le diamètre de la pièce est plus grand que le côté du carré : la pièce ne sera jamais à franc-carreau.

[22] BUFFON rajoute cependant : « *je n'ai pas cru qu'il fût nécessaire d'avertir que les joints des carrelages ayant quelque largeur, ils donnent de l'avantage au joueur qui parie pour le joint…* »

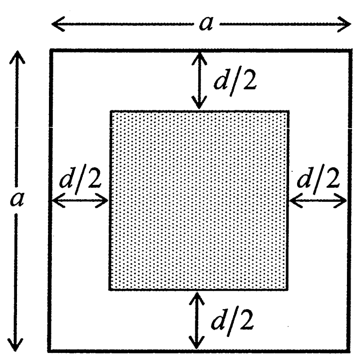
Note : les expressions « figure inscrite » et « couronne » visent à rendre un peu plus compréhensibles les arguments développés par BUFFON, qui, en toute rigueur épurée n'a pas jugé utile de les accompagner d'une figure (la partie du texte consacrée à la démonstration de cette propriété géométrique - **et elle seule** - a été soulignée par nos soins).

Je cherche d'abord le sort du premier joueur & du second; pour le trouver, j'inscris dans l'un des carreaux une figure semblable, éloignée des côtés du carreau, de la longueur du demi-diamètre de l'écu ; le sort du premier joueur sera à celui du second, comme la superficie de la couronne circonscrite est à la superficie de la figure inscrite ; cela peut se démontrer aisément, car tant que le centre de l'écu est dans la figure inscrite, cet écu ne peut être que sur un seul carreau, puisque par construction cette figure inscrite est partout éloignée du contour du carreau, d'une distance égale au rayon de l'écu ; & au contraire dès que le centre de l'écu tombe au dehors de la figure inscrite, l'écu est nécessairement sur deux ou plusieurs carreaux, puisque alors son rayon est plus grand que la distance du contour de cette figure inscrite au contour du carreau ; or, tous les points où peut tomber ce centre de l'écu sont représentés dans le premier cas par la superficie de la couronne qui fait le reste du carreau ; donc le sort du premier joueur est au sort du second, comme cette première superficie est à la seconde; ainsi pour rendre égal le sort de ces deux joueurs, il faut que la superficie de la figure inscrite, soit égale à celle de la Couronne, ou ce qui est la même chose, qu'elle soit la moitié de la surface totale du carreau.

Voici donc une deuxième **formulation simplifiée**[23] de notre problème :

« On jette une pièce de monnaie de diamètre d sur un carrelage régulier formé de carreaux identiques au carreau ci-contre.

Quelle est la probabilité que le centre de la pièce s'immobilise sur une partie grisée du carrelage ? »



• Les hypothèses probabilistes

Par son extraordinaire capacité d'ajustement de la réalité à ses désirs, BUFFON nous fait prendre pour argent comptant deux positions qui pour le moins méritent d'être examinées de plus près :

1. *Le modèle uniforme sur un carreau*

Il considère que la position du centre de la pièce dans un carreau suit une distribution uniforme dans ce carreau, puisque, selon lui, c'est le rapport des superficies (aires) qui va sceller le sort de chaque joueur. (cf. la dernière partie du texte de BUFFON).

L'affirmation « cela peut se démontrer aisément » ne peut être alors - nous le savons qu'une " *bidouillerie* "...Confirmation est donnée par la suite, si besoin

[23] Nous en resterons là, bien qu'il soit possible d'aller plus avant dans cette voie, avec, par exemple : « On choisit aléatoirement un point du carrelage. Quelle est la probabilité qu'il soit dans une partie grisée ? »

en était, où la soi-disant preuve est entièrement dévolue en fait à établir le critère géométrique que nous venons d'énoncer.[24]

2. " *Un carreau suffit* "

C'est un tour de passe-passe pratiqué par la quasi-totalité des auteurs préoccupés du problème : chacun s'accorde à considérer comme allant de soi que la probabilité de franc-carreau **sur tout le carrelage** est calculée par celle de franc-carreau **sur un carreau.**

Ferions nous mine de nous inquiéter pour presque rien ?

Ce n'est pas si sûr (à suivre...).

Remarques

- Si nous faisons nôtre les hypothèses précédentes, le calcul de probabilités est des plus élémentaires.

En désignant par a le côté d'un carreau du carrelage, l'aire de la zone grisée du carreau est $(a-d)^2$, d'où **la probabilité de franc-carreau** :

$$\frac{(a-d)^2}{a^2}=\left(1-\frac{d}{a}\right)^2.$$

- Nous n'en avons évidemment pas fini avec *la modélisation probabiliste dans le problème du jeu de Franc-Carreau.* Nous consacrons le prochain paragraphe à ce problème, en tenant compte de la constante exigence annoncée :

« Quelle incidence sur le travail proposé aux élèves ? »

2.4.3 Divers modèles probabilistes

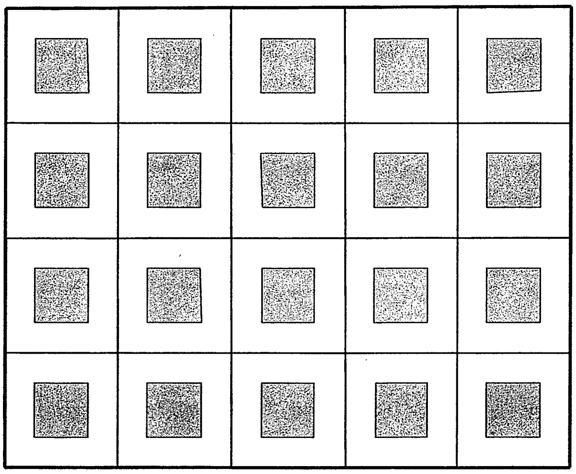
Dans un premier temps, nous arrêterons notre travail à la description de *divers modèles probabilistes* concernant le problème de Franc-Carreau, aux *calculs de probabilités* qu'ils permettent de conduire et aux *premières comparaisons* auxquels ils se prêtent, réservant pour après - car il faudra s'y donner un peu plus de peine - remarques et commentaires.

- Premier modèle : « Un damier uniforme »

Nous ferons, de fait, deux hypothèses :

(H_1) *Le centre de la pièce tombe à l'intérieur d'un damier rectangulaire carrelé analogue à celui de la figure ci-après* :

[24] Nous ne résistons pas à signaler que, dans une situation analogue, un peu plus loin dans le Mémoire, BUFFON « justifie » le choix du modèle uniforme par cette phrase sublime qui le dispense de la moindre charge d'explications :
« *Ceci n'a besoin pour être pleinement démontré que d'être bien entendu* ».



(H_2) *La position du centre de la pièce dans le damier suit la distribution uniforme dans le damier.*

Découle immédiatement de ces hypothèses et de la définition même de la loi uniforme sur un rectangle que la probabilité de franc-carreau est calculée par :

$\dfrac{\text{aire de la zone grisée d'un carreau}}{\text{aire du carreau}}$, qui n'est autre que le résultat obtenu précédemment.

• Deuxième modèle : « Le carreau uniforme »

Cette fois, l'hypothèse est faite que, *quel que soit le carreau dans lequel vient s'immobiliser le centre de la pièce, la position de ce dernier suit la distribution uniforme du carreau.*

Et là encore, la probabilité de franc-carreau s'obtient par le rapport :

$$\frac{\text{aire de la zone grisée d'un carreau}}{\text{aire du carreau}}.$$

Explication de la cueillette :

Désignons par $(C_n)_{n=1}^{+\infty}$ la famille au plus dénombrable des carreaux constitutifs du carrelage et par G_n $(n \geq 1)$ la zone grisée du carreau C_n. Convenons de noter de plus (cela n'a rien d'innovant) :

- C_n l'événement : « le centre de la pièce s'immobilise dans le carreau C_n » ;

- G_n l'événement : « le centre de la pièce s'immobilise dans la partie grisée du carreau C_n » ;

- p_n la probabilité de l'événement C_n ;

- $G = \biguplus_{n \geq 1} G_n$ la réunion disjointe des événements G_n.

Nous avons alors à notre disposition les propriétés suivantes :

(1) $\sum_{n \geq 1} p_n = 1$ (c'est clair) ;

(2) la probabilité de franc-carreau est la probabilité de l'événement G ;

(3) la probabilité de G_n sachant C_n est : $\dfrac{\text{aire}(G_n)}{\text{aire}(C_n)}$ nombre indépendant de n noté p.

Dés lors :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(G) &= \sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}(G_n) = \sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}(G_n \cap C_n)\\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}(G_n / C_n)\times\mathbb{P}(C_n) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\text{aire}(G_n)}{\text{aire}(C_n)}\times p_n\\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} p\times p_n = p\times\sum_{n=1}^{+\infty} p_n = p\end{aligned}$$

et c'est fini.

- Comparaison de deux modèles

Il est immédiat que le modèle du " damier uniforme " implique que la distribution du centre de la pièce dans chaque carreau du damier est celle de la loi uniforme ; il ne l'est pas moins que la réciproque est fausse (un contre-exemple est facile à bâtir).

- Remarques et commentaires

1- *Explicitation des lois de probabilité*

Dans la première modélisation, c'est " on ne peut plus simple " : l'univers Ω est l'ensemble des points du damier et la loi de probabilité est la loi uniforme sur Ω.

Dans la seconde, c'est légèrement moins idyllique :

- l'univers Ω est la réunion des carreaux C_n : $\Omega = \bigcup_{n\geq 1} C_n$;

  - la loi de probabilité P est définie ainsi :

    pour toute partie mesurable A de Ω, $P(A) = \sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\mu(A\cap C_n)}{\mu(C_n)}\times p_n$

    où μ désigne la mesure de LEBESGUE (on peut vérifier qu'effectivement, P est bien une loi de probabilité).

2- *Confrontation modèle - résultas expérimentaux*

Une feuille de format A_2 pavée de 160 carreaux (16×10) de 4 cm de côté et une pièce de 5 Euros (diamètre : 2 cm) nous ont permis d'engager l'expérience à peu de frais, selon **le protocole expérimental** suivant :

- la " feuille A_2 " est étalée sur le bureau et le lanceur confortablement assis devant la feuille ;
- lorsque le centre de la pièce sort du damier des 160 carreaux, le " coup " est annulé ;
- 1 000 lancers valides de la pièce de 5 Euros sont effectués ;
- 6 séries de 1000 lancers sont réalisées par 6 volontaires.

Les résultats obtenus : $26{,}2\%$, $26{,}1\%$, $26{,}7\%$, $24{,}1\%$, 27%, et $23{,}8\%$ brutalement confrontés à la valeur théorique[25] : 25% ne sauraient en rien accréditer tel ou tel modèle probabiliste[26] mais simplement fournir des présomptions assez fortes sur la vraisemblance de la probabilité à laquelle chacun d'eux nous a conduit.
Ajoutons, qu'à vue d'œil - i.e. sans endosser le rôle du fiévreux enquêteur - le dispositif expérimental tel que nous l'avons décrit correspond mieux à la seconde modélisation qu'à la première. Parmi les explications qui ne peuvent manquer de foisonner, en voici une, toute simple : lancer 1'000 fois une pièce de monnaie sur une feuille de papier n'est pas ce qu'il y a de plus émoustillant pour un expérimentateur d'aléatoire ; aussi évite-t-il au maximum les coups déclarés nuls : les lancers « convulsifs » sont rarissimes et, par suite, comme on pouvait s'y attendre, les carreaux périphériques de la feuille sont délaissés au bénéfice des carreaux centraux. Notons qu'avec cette seconde modélisation **il n'est pas " idiot " (bien au contraire) d'additionner les résultats obtenus** : ce qui donne 1539 positions de franc-carreau sur 6000 lancers[27]. En effet, si la suite $(p_n)_{n\geq 1}$ varie d'un lanceur à un autre, ceci est sans importance, puisque nous avons vu que p était indépendant de la suite $(p_n)_{n\geq 1}$.

3- *Un tour de passe-passe*

Adoptée par BUFFON et bien d'autres, la démarche chronologiquement décrite par :
Étape 1 : on ramène le problème de franc-carreau à un seul carreau ;
Étape 2 : on adopte tel modèle probabiliste sur un carreau (loi uniforme par exemple).
véhicule implicitement l'idée que l'étape 1 relève de la seule simplification de la situation à l'étude, **alors qu'elle s'inscrit pleinement dans le processus de modélisation probabiliste**, via la propriété de conditionnement : « $\mathbb{P}(G_n / C_n)$ ne dépend pas de n ».

Séduisant et subtil, ce tour de passe-passe ne saurait être mis tel quel dans des mains inexpertes, n'est-ce pas ?

2.4.4 En conclusion

Le problème de Franc-Carreau semble faire une jolie carrière (star-system oblige ?). Pourtant, l'autopsie (volontairement) scrupuleuse que nous venons de pratiquer nous laisse circonspects quant à sa pertinence didactique :

- **il ne peut s'agir d'un exemple " simple " de problème de modélisation**, ne serait ce que parce que le modèle implicite d'uniformité (sur tout le carrelage) largement sous-tendu par l'idée que nous nous faisons du protocole expérimental ne se développe pas comme prévu par la plupart de ses promoteurs (sauf à ne pas y regarder de près) ;

---

[25] Avec l'un ou l'autre des modèles (1) ou (2), la probabilité p de franc-carreau est calculée par $\left(1-\frac{d}{a}\right)^2$, soit, avec $a=4$ et $d=2$, $p=0{,}25$.

[26] En revanche, ils permettraient d'écarter " presque sûrement " une modélisation qui, dans le cas $a=4$ et $d=2$, livrerait une probabilité de franc-carreau égale à $0{,}5$ (par exemple).

[27] Soit $25{,}65\%$.

- à moins d'esquiver ce raisonnement délicat et ambigu qui permet de se ramener à un seul carreau, nous avons du mal à voir dans ce problème une situation propice à l'introduction des lois uniformes.

Bref, exemple tout à fait édifiant à bien des égards.[28]

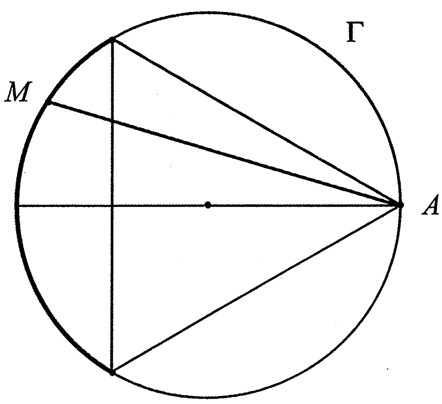
2.5 Des modèles à foison

Dans son ouvrage « *Calcul des probabilités* » publié en 1889, Joseph BERTRAND (1822-1900) discute du problème suivant[29] :

« **Une corde est tracée au hasard sur un cercle. Quelle est la probabilité qu'elle soit plus longue que le côté du triangle équilatéral inscrit dans le cercle ?** »

Selon le sens que l'on voudra accorder à l'expression « *tracer au hasard une corde dans un cercle* », on produira des solutions diverses (certaines proposées par BERTRAND lui-même).

Voici quelques morceaux choisis (nous noterons Γ le cercle considéré, O son centre et R son rayon).



- Solution 1

Convenons que " choisir au hasard " une corde d'un cercle, c'est marquer l'une des extrémités A sur le cercle et " choisir au hasard " l'autre extrémité sur le cercle Γ (au sens de la loi uniforme sur Γ).

Dans ce cas, la probabilité est $\frac{1}{3}$.

- Solution 2

Comme nous voulons comparer la longueur d'une corde " choisie au hasard " à $R\sqrt{3}$ (longueur du côté du triangle équilatéral inscrit dans Γ), proposons que la longueur de la corde soit " choisie au hasard " parmi toutes les longueurs possibles, c'est à dire selon la loi uniforme sur $[0,2R]$.

Dans ces conditions, la probabilité est $1-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

---

[28] Cela ne signifie pas pour autant que le problème est à mettre au panier.

Une activité conduite dans [13] (ou [24]) par exemple, consiste à :

- discrétiser le problème (la position au centre de la pièce est par exemple l'un des pixels d'un rectangle donné sur l'écran de l'ordinateur) ;
- faire l'hypothèse d'équirépartition (c'est la version discrète du modèle (1) : " loi uniforme sur le damier ") ;
- effectuer diverses simulations ;
- etc.

Une telle activité reste intéressante dès lors que l'on ne cherche pas à lui attribuer des mérites qu'elle ne saurait avoir (cf. ce qui précède) …

[29] Ce problème étant l'objet des exercices 4-18 à 4-21, nous n'entrons pas ici dans le détail des solutions.

• Solution 3

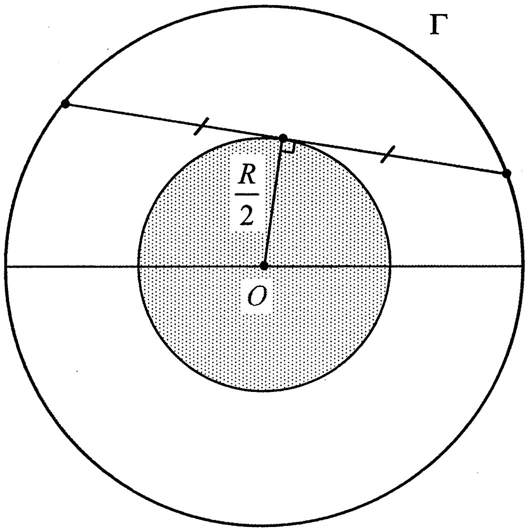
Focalisons encore un peu sur la longueur de la corde. Comme la longueur ℓ d'une corde est calculée en fonction de sa distance d au centre du cercle par $\ell = 2\sqrt{R^2 - d^2}$, convenons que le " choix au hasard " de la corde est induit par le choix de sa distance au centre selon la loi uniforme sur $[0, R]$.

Cette fois, la probabilité est $\frac{1}{2}$.

• Solution 4

Il est connu que tout point intérieur au cercle, distinct du centre[30], est le milieu d'une unique corde de ce cercle.

Faisons notre alors le point de vue suivant : tout protocole de " choix aléatoire " d'un point dans le disque de frontière Γ est un protocole de " choix aléatoire " de la corde ayant ce point pour milieu.



Ainsi (mais ceci n'est qu'un exemple parmi tant d'autres), si nous décidons que le " choix aléatoire " du point dans le disque s'effectue selon la loi uniforme du disque, *la probabilité* (calculée par le rapport des aires des deux disques dans la figure ci-contre) *est égale à* $\frac{1}{4}$.

• Etc..

Bien d'autres protocoles de " choix au hasard " d'une corde dans un cercle peuvent être envisagés (et sur ce sujet, l'imagination ne fait pas défaut[31]).

Citons encore le choix d'un point (x, y) dans le carré $[0, 2\pi[\times[0, 2\pi[$ selon la loi uniforme auquel est associée la corde d'extrémités A et B d'affixes respectives $R\,e^{ix}$ et $R\,e^{iy}$ (le plan étant muni d'un repère ad hoc), où l'on retrouve - sans surprise[32] - la probabilité $\frac{1}{3}$.

[30] Pour toute loi continue sur le disque, la probabilité de " choisir " le centre est nulle. Nous ignorerons donc cet aspect des affaires.

[31] Consulter par exemple [26] (pages 8 et 9) et [7] (page 192).

[32] Voir les commentaires de l'exercice 4-21.

• Commentaires

1- Ce grand classique des Probabilités géométriques déjà passé à la postérité sous le nom de « **paradoxe de Bertrand** » (on comprend aisément pourquoi) fournit matière à en appeler à l'attention du lecteur.
Pour qui n'est pas familier du problème de la corde de BERTRAND, les résultas précédents peuvent paraître désarmants. Mais, n'en concluons pas trop vite que « c'est un peu n'importe quoi ». À bien y réfléchir, en effet, il n'est pas si saugrenu que cela que **des modélisations différentes du " choix aléatoire " de la corde conduisent à des probabilités différentes** (à vrai dire, c'est même le contraire qui serait étonnant[33]).

2- Par ailleurs, **rien** dans l'énoncé du problème tel qu'il est libellé, **ne permet d'opter pour un modèle plutôt que pour un autre** : inutile donc de s'évertuer à vouloir trancher l'affaire.
Ainsi, faut-il en conclure que dans l'étude de la situation précédente, **l'explicitation du choix du modèle probabiliste est une exigence première, un préalable incontournable.**

3- *Qu'en est-il pour nos élèves ?*
À considérer que les remarques précédentes ne sont pas des anecdotes de faible intérêt (et sans nous pousser du col, nous pouvons affirmer qu'il en est ainsi), alors **l'objectif didactique** d'un problème tel celui de la corde de BERTRAND est :

- d'abord de prendre à revers l'idée d'un modèle probabiliste « naturel », forcément accueilli en champion par les élèves ;
- ensuite de les " convaincre " que ce qu'ils perdent en illusion (un tel modèle n'existe pas), ils le gagnent en lucidité (en posant à leur niveau le problème du choix d'un modèle).

Cet objectif est très ambitieux : il impose une réelle mise à plat auprès des élèves des tenants et aboutissants de la démarche qui inspire le travail qui leur est proposé.

Faute de quoi, dans le meilleur des cas, elle sera pratiquée comme une orthodoxie méticuleuse, le prof étant le gardien du temple…

2.6 Un modèle pour un autre ?

2.6.1 Tirages aléatoires de nombres réels soumis à une condition linéaire[34]

• Voici une nouvelle question embarrassante :

« Comment choisir au hasard trois réels positifs de somme donnée ? »

Question mal allurée s'il en est par la tournure trop lâche sur l'intervention du hasard : où est l'expérience aléatoire ? quel est le protocole expérimental ? quelle " dose "

---

[33] Nous ne sommes pas en contradiction avec ce qui a pu être écrit sur le problème de Franc-Carreau où deux modélisations différentes livrent le même résultat, puisque étonnés nous fûmes…

[34] Nous n'étudierons qu'un exemple : c'est suffisant pour réfléchir.

d'uniformité est sous-entendue (à supposer qu'elle le soit) ? quelle nuance accorder à la dépendance des réels choisis ? etc..
Question trouble donc - à se prendre les pieds dans le tapis, mais qui a suscité notre curiosité.

• *D'une part*, certains problèmes de probabilité, qui, sans occuper une place considérable ne sont pas de petites notules, rangent dans leurs énoncés des formules avoisinantes. Nous en citerons deux :

- le (célèbre) **problème du bâton brisé** : **Quelle est la probabilité, en brisant au hasard un bâton en trois morceaux, de pouvoir construire un triangle avec les trois morceaux ainsi obtenus ?** ;
- le **problème** (inédit ?[35]) **du triangle acutangle** : **On choisit au hasard les angles d'un triangle. Quelle est la probabilité qu'il soit acutangle[36] ?**

Qu'on nous permette d'ouvrir une parenthèse en trois points :

1- Ces problèmes relèvent de l'interrogation initiale.
En effet, dans le premier cas, si l'on désigne par ℓ la longueur du bâton, alors les longueurs x, y et z des morceaux " choisis " par brisures aléatoires sont telles que $x+y+z=\ell$.
Ce n'est pas moins évident dans le second, puisque les angles α, β et γ d'un triangle sont liés par $\alpha+\beta+\gamma=\pi$.

2.- Sous des dehors communs, ils diffèrent cependant par leurs " références implicites au protocole expérimental "[37].
Si « choisir les angles d'un triangle au hasard » *ne veut pas dire grand chose* - et « briser aléatoirement un bâton en trois morceaux » *guère plus* - nous acceptons l'idée d'une formulation évocatrice d'une expérience réalisable en vraie grandeur dans le cas du problème du bâton brisé, alors qu'en ce qui concerne le problème du triangle acutangle, l'énoncé donne plutôt dans l'abstraction " saturée de vide " pour entamer une démarche concrète.
Quant à la part de hasard, tant pour l'un que pour l'autre, elle reste pour l'instant en coulisse...

3- Nous délaisserons le problème du bâton brisé : on possède en effet pour ce cas exemplaire de suffisamment de textes inspirés sur lesquels s'appuyer[38].

---

[35] À notre connaissance, il semblerait bien qu'il le soit.

[36] Triangle acutangle : triangle dont les angles sont aigus.

[37] Si des guillemets s'imposent, c'est bien à cet endroit (voir plus loin).

[38] C'est volontiers que nous citons l'article de Joëlle FONTANA et Maryse NOGUÈS (IREM de Montpellier) « *Simulation et modélisation : étude d'un exemple* » (voir [22]) convaincant à bien des égards, notamment dans ce que l'on peut envisager dans la classe.

En revanche, le second problème sera parcouru dans ses moindres méandres[39]. (Fin de la parenthèse).

- *D'autre part*, en ce qui concerne **la modélisation**, autant dire que l'on ne sait plus très bien où l'on est…
  Un peu tout de même.
  Nous tenons de l'expérience[40] qu'au lieu d'apporter un répit bien venu (*i.e.* auquel on serait en droit de s'attendre à la 175ème page de cet ouvrage), le problème du triangle acutangle vient grossir les rangs de ceux qui nous confrontent à de nouveaux défis.

  Parmi la poignée de modélisations proposées dans l'étude de cette situation (modélisations que nous qualifierons de " classiques ", dans la mesure où nous ne les considérons pas comme des découvertes à breveter) :

  - certaines conduisent à des résultats semblables (simulation) et / ou identiques (calcul théorique) ce qui, quelque part, agace un peu. En rester là courrait le risque de passer sous silence une question finalement aussi nécessaire que le reste :
    « **Ne serait-ce pas la même modélisation sous des masques variés** ? » ;

  - d'autres font contrepoids par la réponse sensiblement différente que la simulation apporte :
    est-ce un effet de la fluctuation d'échantillonnage ?,
    et sinon, parce qu'il nous faut aussi gérer le quotidien[41] :
    comment expliquer que, convaincus de simuler un modèle, nous puissions en arriver à en simuler un autre ?

- Dans cette approche un peu émiettée des propos à venir manque peut être de souligner que les questions soulevées s'adressent a priori aux enseignants, mais également, que pour le lecteur trop souvent déçu (comme nous) de ces explications à l'emporte-pièce qui ne tiennent pas leurs promesses : « c'est évident », nous ne concéderons aucune facilité quant à la teneur des réponses (pas de preuves maquillées).

---

[39] Voir le paragraphe suivant ainsi que les exercices 4-22 à 4-26 qui tentent d'adapter une telle étude en direction des élèves.

[40] Stages de formation continue.

[41] Le lecteur infaillible ne tiendra pas compte de cette remarque.

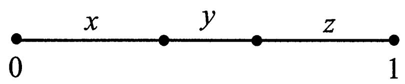
2.6.2 Une même modélisation ?

- Divers modèles

Voici cinq modélisations du choix au hasard de trois réels positifs x, y et z de somme égale à 1[42].

➤ *Modèle $\mathcal{M}_1$*

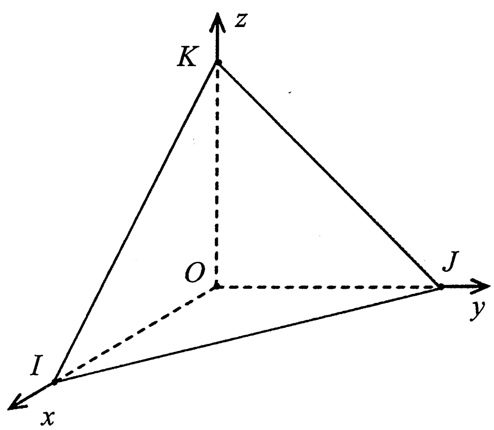
On choisit au hasard deux nombres de $[0,1]$, indépendamment l'un de l'autre, définissant ainsi trois intervalles de $[0,1]$.



Les réels x, y et z sont les longueurs de ces intervalles.

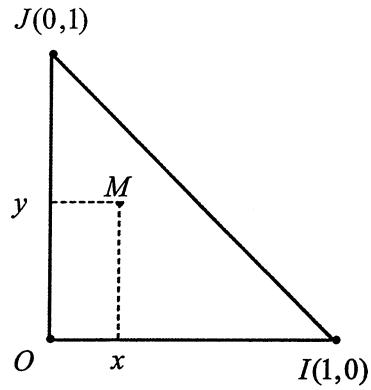
➤ *Modèle $\mathcal{M}_2$*

L'espace $\mathcal{E}$ étant muni d'un repère orthonormal (O,I,J,K), il est clair que le triangle *IJK* (désigné par $\mathcal{T}$) est l'ensemble des points $M(x,y,z)$ de $\mathcal{E}$ à coordonnées positives de somme 1.
Le choix au hasard des réels x, y et z est modélisé par le choix d'un point $M(x,y,z)$ dans le triangle $\mathcal{T}$ selon la loi uniforme dans ce triangle.



➤ *Modèle $\mathcal{M}_3$*

Un point $M(x,y)$ étant choisi au hasard dans le triangle *OIJ*, on convient que les réels choisis sont x, y et $z=1-x-y$.



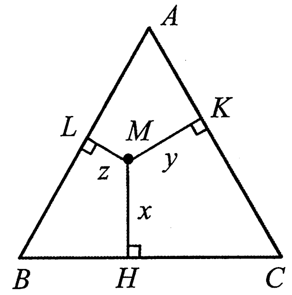
[42] Il est clair, en effet, que la somme peut-être supposée égale à 1.

➢ *Modèle $\mathcal{M}_4$*

Il s'appuie sur le théorème de VIVIANI (voir exercice 4-23). « *Étant donné un triangle équilatéral et un point M intérieur à ce triangle, la somme des distances de M aux côtés est égale à la hauteur du triangle* ».
La modélisation est alors la suivante :

- un triangle équilatéral ABC, de hauteur 1 étant donné, on choisit au hasard un point M à l'intérieur du triangle ;

- les réels x, y et z sont alors choisis ainsi : $x = MH$, $y = MK$ et $z = ML$.



➢ *" Le " Modèle $\mathcal{M}_0$*

Nous savons qu'étant donné un triangle ABC, pour tout point M à l'intérieur du triangle, il existe des réels x, y et z, avec $x+y+z=1$, tels que M soit le barycentre du système de points $\{(A,x),(B,y),(C,z)\}$ ((x,y,z) sont les coordonnées barycentriques du point M (sous-entendu par la suite : dans le repère (A,B,C))). Nous pourrons modéliser le choix au hasard de trois réels (x,y,z) positifs de somme 1 en définissant ces réels comme les coordonnées barycentriques d'un point M choisi dans le triangle selon la loi uniforme.

- Où se forge une méthode de comparaison

➢ Baptiser $\mathcal{M}_0$ le dernier modèle présenté n'est pas une faute de marquage mais plutôt le signe annonciateur d'une modélisation de référence.
Confirmation dans le résultat suivant :

Le modèle $\mathcal{M}_0$ ne dépend pas du triangle considéré.

En d'autres termes :

Considérons deux triangles ABC et $A'B'C'$ et pour tout point M du triangle ABC de coordonnées barycentriques (x,y,z) dans le repère (A,B,C), désignons par M' le point du triangle $A'B'C'$ de mêmes coordonnées barycentriques dans le repère (A',B',C').

Alors le point M suit la loi uniforme du triangle ABC si et seulement si le point M' suit la loi uniforme du triangle $A'B'C'$.

Et ça se montre, la démonstration reposant entièrement sur la propriété **d'invariance affine de l'intégrale**[43] :

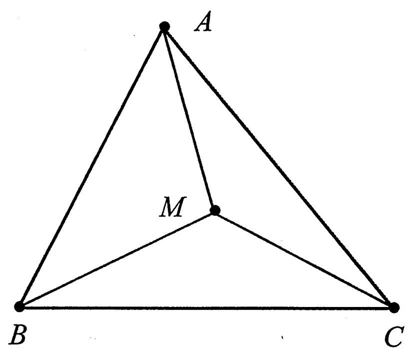
[43] Pour une démonstration de cette propriété, on pourra consulter [6] par exemple : elle est installée dans le cadre qui nous intéresse, celui des espaces affines euclidiens.

Soit f une bijection affine du plan affine euclidien $\mathcal{P}$. Pour toute partie Ω mesurable bornée de $\mathcal{P}$, $f(\Omega)$ est une partie mesurable bornée de $\mathcal{P}$ et :

$$\mu(f(\Omega)) = \left|\det \vec{f}\right| \times \mu(\Omega)$$

où $\vec{f}$ est l'application linéaire associée à f, et μ la mesure de LEBESGUE dans le plan $\mathcal{P}$.

Muni de ce résultat, il suffit de considérer l'application f qui au point $M(x,y,z)$ dans le repère (A,B,C)[44] associe le point $M'(x,y,z)$ dans le repère (A',B',C') : manifestement il s'agit d'une bijection affine.



- Enfin, manière de tout avoir sous la main le moment voulu, rappelons qu'étant donné un point M intérieur au triangle (A,B,C), M est le barycentre du système pondéré :

$$\{(A, aire(MBC)), (B, aire(MCA)), (C, aire(MAB))\},$$

ou encore :

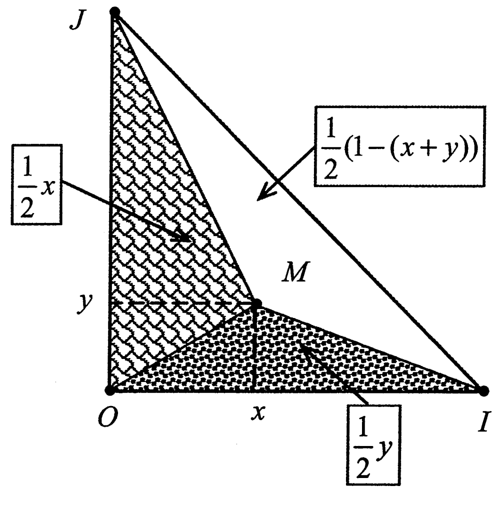
les coordonnées barycentriques de M dans le repère (A, B, C) sont :

$$x = \frac{\boldsymbol{aire(MBC)}}{\boldsymbol{aire(ABC)}},\ y = \frac{\boldsymbol{aire(MCA)}}{\boldsymbol{aire(ABC)}} \text{ et } z = \frac{\boldsymbol{aire(MAB)}}{\boldsymbol{aire(ABC)}}.$$

- Nous sommes prêts.

- Comparaison des modèles

1- Les *modèles* $\mathcal{M}_3$ et $\mathcal{M}_4$ sont identiques au *modèle* $\mathcal{M}_0$; c'est immédiat pour le *modèle* $\mathcal{M}_4$ et guère moins pour le *modèle* $\mathcal{M}_3$, comme l'indique la figure ci-contre (où ont été calculées les aires des triangles *MOI*, *MOJ* et *MIJ*).

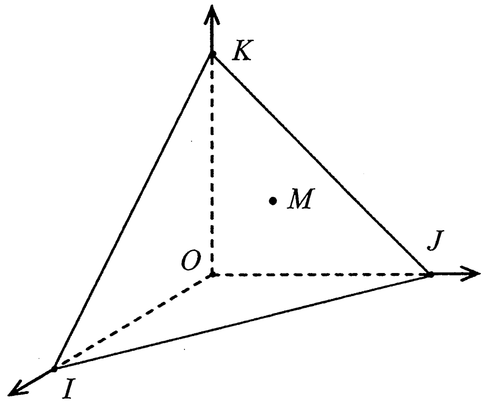


[44] À cet endroit l'expression « $M(x,y,z)$ dans le repère (A,B,C) » n'est pas ambiguë : il ne peut s'agir que des coordonnées barycentriques.

2- En ce qui concerne le *modèle* $\mathcal{M}_2$, les égalités :

$$\begin{cases} \overrightarrow{OM} = x\,\overrightarrow{OI} + y\,\overrightarrow{OJ} + z\,\overrightarrow{OK} \\ x+y+z=1 \end{cases}$$

montrent que les coordonnées cartésiennes (dans le repère (O,I,J,K) d'un point M du plan (I,J,K) sont aussi les coordonnées barycentriques de M dans le repère (I,J,K).



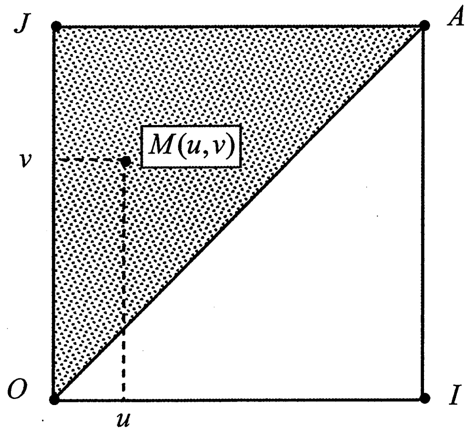
C'est fini.

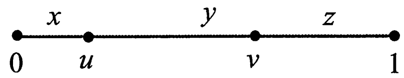
3- Nous pouvons présenter *la modélisation selon* $\mathcal{M}_1$ ainsi :

- la découpe du segment de longueur 1 est réalisée à l'aide des coordonnées u et v d'un point $M(u,v)$ choisi au hasard dans le triangle OAJ (où l'on a $u < v$)[45].

-dans ces conditions, les longueurs x, y et z obtenues sont :

$x = u$, $y = v - u$ et $z = 1 - v$.



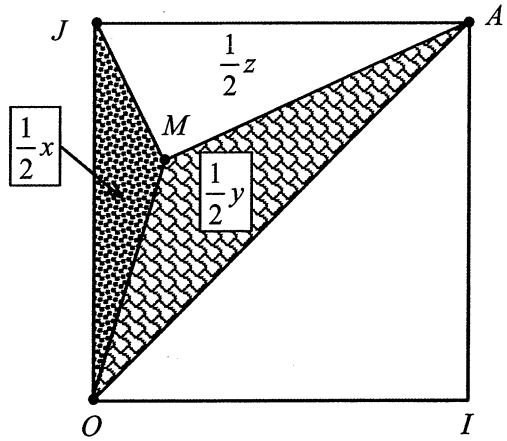


On en déduit immédiatement que :

$aire(MOJ) = \dfrac{x}{2}$, $aire(MAJ) = \dfrac{z}{2}$ et

$aire(MAO) = \dfrac{y}{2}$.

En d'autres termes (x,y,z) sont les coordonnées barycentriques de M dans le repère (A,J,O), ce qui identifie les *modèles* $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_0$.



- Commentaires

1- Le recours au *modèle* $\mathcal{M}_0$ n'est qu'une aisance didactique de passage[46] ; la proposition : « $\mathcal{M}_0$ *ne dépend pas du triangle considéré* » est plus simple d'accès et plus facile à mettre en œuvre[47] que la propriété d'invariance affine qui lui sert de base.

---

[45] Il fallait bien choisir.

[46] Sous forme d'une géométrisation qui, mathématiquement, n'est pas indispensable.

[47] Et parce qu'elle ne fait pas explicitement référence à la théorie de la mesure, elle serait plus facilement à la portée de qui voudrait l'admettre.

2- Nous comprenons maintenant que tous les modèles précédents fourniront la même valeur pour la probabilité cherchée dans le problème du triangle acutangle (par exemple).
Il en sera évidemment de même en ce qui concerne le problème du bâton brisé, le fait d'obtenir le même résultat dans les deux trouvant une explication fort simple dans un calcul élémentaire[48].

3- Certains jugerons trop " technique " à leur gré l'étude que nous venons de conduire (qui, rappelons-le, n'est pas destinée aux élèves). Mais, nous songeons à cette question légitime d'un élève, face à l'un ou l'autre des problèmes, à son tour déconcerté par la réponse têtue : « $\frac{1}{4}$ » que produisent certains modèles :

« *Hasard ou perversité ?* ».

On peut aimer l'idée d'avoir des explications à donner[49]...

4- Poursuivons dans cette humeur buissonnière en revisitant le problème du triangle acutangle avec l'énoncé suivant.
« On choisit au hasard trois points d'un cercle Γ, indépendamment les uns des autres. Quelle est la probabilité d'obtenir ainsi un triangle acutangle ? »

- *Remarque 1* : deux triangles semblables ayant leurs angles égaux et tout triangle étant semblable à un triangle inscrit dans un cercle donné (évident), nous venons de construire un nouveau modèle de choix au hasard des angles d'un triangle.

- *Remarque 2* : sachant que trois points d'un cercle sont les sommets d'un triangle acutangle si et seulement si les trois sommets n'appartiennent pas à un même demi-cercle, le résultat ci-après (qui fait l'objet de l'exercice 4-17) donne une solution rapide de ce problème :
« *On choisit n points au hasard sur un cercle, indépendamment les uns des autres.*
La probabilité qu'ils soient tous dans un même demi-cercle est $\frac{n}{2^{n-1}}$ ».
Dès lors avec $n=3$, la probabilité d'obtenir un triangle acutangle est $1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$, encore !

- « *Hasard ou perversité ?* »
En le disant autrement : **cette nouvelle modélisation est-elle identique aux précédentes ?** (c'est la colle du chapitre).

---

[48] Basé sur la remarque suivante :
$x<y+z$ équivaut à $2x<x+y+z$ soit $x<\frac{S}{2}$ avec $S=x+y+z$.

[49] Par ailleurs, ne saurions nous pas en présence de l'une de ces situations où la technique est accessoire en regard d'une entreprise qui voudrait saisir (un tant soit peu) le dessous des cartes ?

2.6.3 Un modèle peut en cacher un autre

• Une nouvelle modélisation

Le *modèle* $\mathcal{M}'$ de choix au hasard des angles d'un triangle se définit ainsi :

- on choisit au hasard un réel α de $[0,\pi]$;
- on choisit au hasard un réel β de $[0,\pi-\alpha]$;
- enfin on pose $\gamma=\pi-(\alpha+\beta)$.

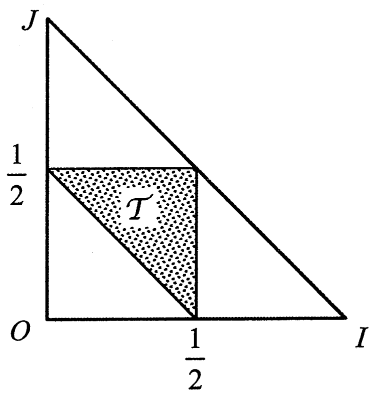
Ce modèle peut être décrit de la manière suivante :

- on choisit au hasard indépendamment l'un de l'autre deux réels x et y de $[0,1]$;
- on pose $\alpha=\pi x$, $\beta=\pi(1-x)y$ et $\gamma=\pi-(\alpha+\beta)$.

• Comparaison avec les modèles précédents

Avec le *modèle* $\mathcal{M}'$, la probabilité d'obtenir un triangle acutangle est $-\frac{1}{2}+\ln 2$ (voir exercice 4-26), ce qui suffit pour affirmer qu'il n'a rien à voir avec les modèles précédents (selon lesquels la probabilité est $\frac{1}{4}$).

Mais il faut bien avouer qu'un tel constat - par les seuls calculs - n'explique rien, à proprement parler, sur cette modélisation. D'où :



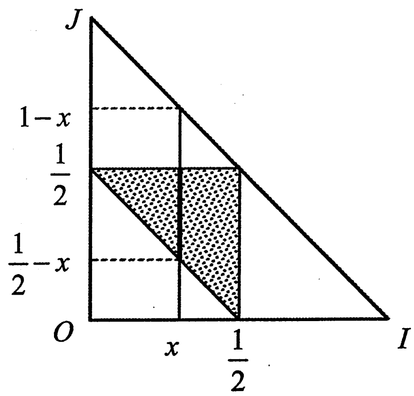
• Le modèle $\mathcal{M}'$ passé au crible

En réduisant à l'essentiel, le problème peut être formulé ainsi.

Un point $M(x,y)$ est choisi aléatoirement[50] dans le triangle OIJ selon le protocole suivant :

- **x est pris au hasard dans $[0,1]$;**
- **y est pris au hasard dans $[0,1-x]$.**

Quelle est la probabilité de l'événement A :
" M est choisi dans le triangle $\mathcal{T}$? "



Pour x fixé dans $[0,1]$, la probabilité $\varphi(x)$ que $M(x,y)$ soit dans le triangle $\mathcal{T}$ est :

- 0, si $\frac{1}{2}<x\leq 1$;
- $\mathcal{U}_{[0,1-x]}\left(\left[\frac{1}{2}-x,\frac{1}{2}\right]\right)$, lorsque $0\leq x\frac{1}{2}$, comme en rend compte la figure ci-contre ($\mathcal{U}_{[0,1-x]}$ étant la loi uniforme sur $[0,1-x]$).

---

[50] Et non " au hasard " qui, par convention est synonyme de loi uniforme.

Ainsi : $\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1-x} & \text{si } x\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right];\\ 0 & \text{si } x\in\left]\dfrac{1}{2},1\right].\end{cases}$

On a alors : $P(A)=\int_0^1 \varphi(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 \dfrac{x}{1-x}\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{2}+\ln 2$, ce qui suscite quelques remarques.

Remarques

1- Désignons par X la variable aléatoire $X=$ “ abscisse de M ” et convenons de noter, avec une attention soutenue[51], $P(A/X=x)$, le nombre $\varphi(x)$.

L'égalité précédente n'est autre que $P(A)=\int_0^1 P(A/X=x)\,\mathrm{d}x$.

Cette égalité, qui se généralise sous certaines conditions à $P(A)=\int_{-\infty}^{+\infty} P(A/X=x)f(x)\,\mathrm{d}x$ (f étant la densité de la variable aléatoire X), s'inscrit dans le cadre théorique **des lois de probabilité conditionnelle et de l'espérance mathématique conditionnelle** bien au delà des ambitions de cet ouvrage (on pourra consulter sur ce sujet l'ouvrage de Dominique FOATA et Aimé FUCHS “ Calcul des probabilités ” ([16], chapitre 12) ou évidemment ([18], chapitre 5)).

2- Bien que ce soit par un procédé plus rudimentaire que sera proposée aux élèves la résolution du problème précédent, la méthode que nous venons d'utiliser conserve quelques mérites :

- d'abord, si l'on se réfère au cas discret, elle est moins sortie du chapeau qu'il n'y paraît ;
- ensuite, elle laisse soupçonner pourquoi le *modèle* $\mathcal{M}'$ n'a aucune chance de s'identifier aux modèles précédents (c'est flagrant avec le *modèle* $\mathcal{M}_3$ qui propose la loi uniforme sur le triangle *OIJ* pour le calcul de la probabilité du même événement A) ;
- enfin, nous l'utiliserons ça et là à titre de “ contrôle ”. (voir par exemple “ Devinez le plus grand ” Exercices 4-13 et 4-14)

- Sur le choix du modèle

Concernant le choix du modèle, il est pour le moins surprenant que, plus souvent qu'à son tour[52], le *modèle* $\mathcal{M}'$ soit spontanément l'heureux élu.
En effet, d'une part (comme nous l'avons souligné) les libellés des problèmes du bâton brisé et du triangle acutangle ne laissent sous-entendre aucun modèle implicite plutôt qu'un autre et d'autre part la loi uniforme qui transparaît dans chacun des *modèles* $\mathcal{M}_i$

[51] L'événement $(X=x)$ étant de probabilité nulle, il ne peut s'agir d'une probabilité conditionnelle au sens convenu jusqu'à présent.

[52] Majoritairement en tout état de cause.

$(0 \leq i \leq 4)$ ne recueille pas ici les faveurs qui lui sont si souvent accordées sans apprêt. Nous soupçonnons bien le caractère intéressé du choix du *modèle* $\mathcal{M}'$ quant à la *simulation* (il aurait la réputation d'être " facile " à simuler) mais cela n'explique pas tout :

ne serait-il pas, de temps en temps, pris pour un autre ?

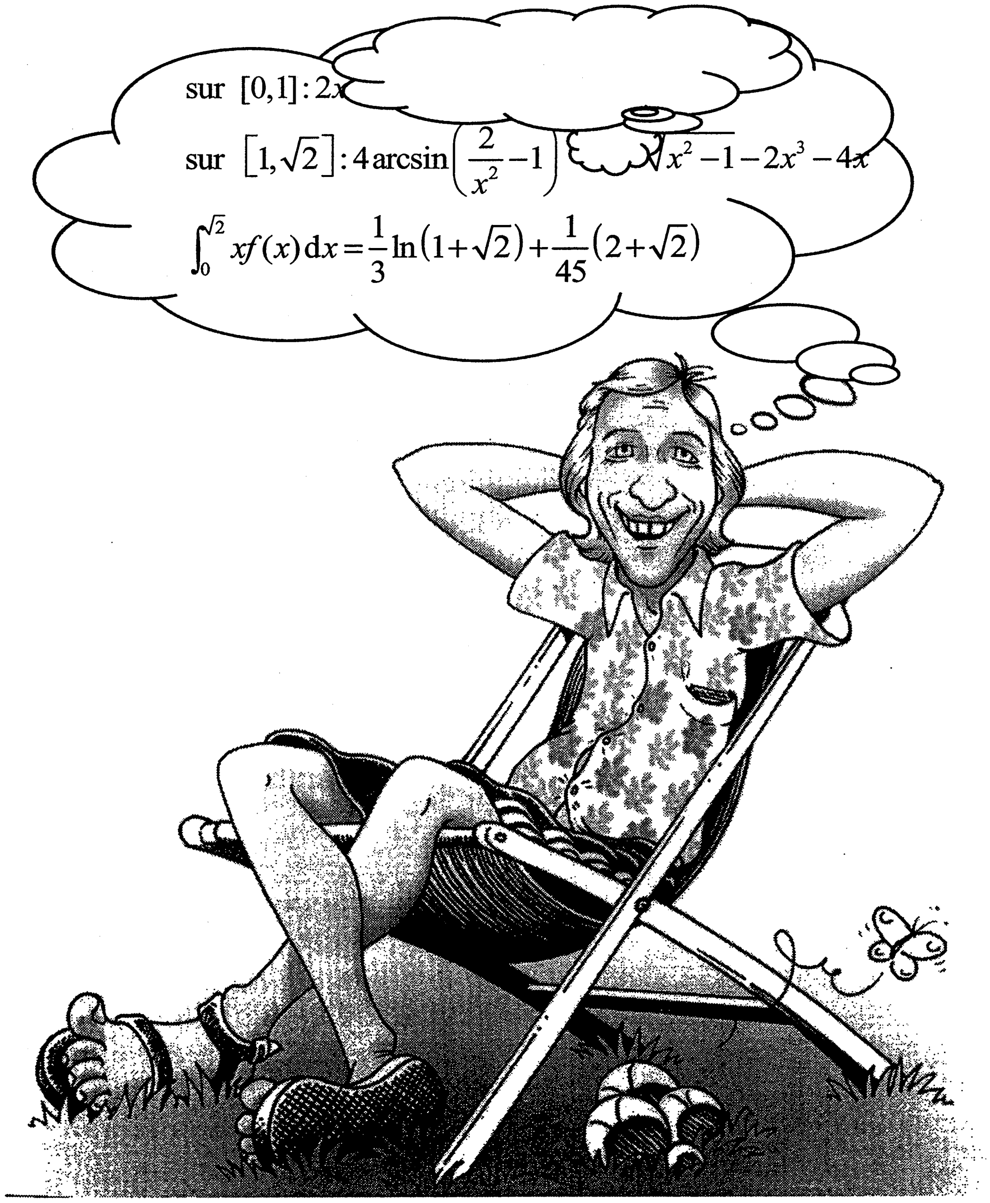
John VON NEUMANN (1903-1957)

« *Les sciences n'essayent pas d'expliquer ; c'est tout juste si elles tentent d'interpréter : elles font essentiellement des modèles. Par modèle, on entend une construction mathématique qui, à l'aide de certaines interprétations verbales, décrit les phénomènes observés. La justification d'une telle construction mathématique réside uniquement et précisément dans le fait qu'elle est censée fonctionner.* »

Détente

On choisit au hasard et indépendamment l'un de l'autre deux points dans un carré de côté 1.

Quelle est la longueur moyenne du segment obtenu ?



3- Exercices

Trois rubriques organisent le contenu de ce paragraphe

- **Thème 1** « *Avec les probabilités géométriques* »
  (Exercices 4-1 à 4-8)
  Ce titre - un peu expéditif - tend à raccourcir la démarche consistant à identifier le choix au hasard de deux ou trois nombres dans $[0,1]$, indépendamment les uns des autres, à celui d'un point dans le carré ou le cube , selon la loi uniforme. Que ce soit pour un " simple " calcul de probabilité (exercices 4-3, 4-4, 4-6 et 4-7) ou pour la recherche de la loi de probabilité d'une variable aléatoire (exercices 4-1, 4-2, 4-5 et 4-8), cette série d'exercices n'a guère d'autres exigences.

- **Thème 2** « *Quelques exercices de modélisation* »
  (Exercices 4-9 à 4-15)
  Si cette démarche tient encore le haut de l'affiche, l'origine, le contexte dans lesquels se situent les exercices proposés (géométrique : 4-9, 4-10, 4-12 ; numérique : 4-15 ; jeux et stratégies : 4-13, 4-14 ; vie courante - si l'on ose dire : 4-11 ; etc.) réclament une besogne accrue dans l'activité de modélisation : introduction de données aléatoires, explicitation du modèle probabiliste, interprétation des hypothèses, simplification et idéalisation de la situation à l'étude, ...

- **Thème 3** « *Florilèges* »
  (Exercices 4-16 à 4-27)
  Quelques classiques (" *n* points sur un même demi-cercle ", " corde de BERTRAND ") et quelques autres (" problème de la rencontre généralisé ", " triangles acutangles "...).

Exercice 4-1 *Loi du maximum*

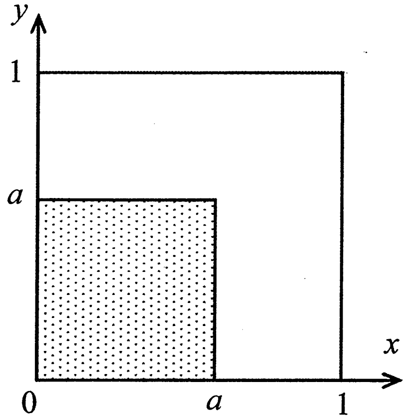
À l'aide des probabilités géométriques (c'est-à-dire avec les lois uniformes dans le carré, le cube), déterminer la loi du maximum de deux ou trois nombres pris au hasard dans $[0,1]$, indépendamment les uns des autres.

Solution

- *Cas de deux réels.*

  Nous pouvons décrire le choix au hasard de deux nombres x et y dans $[0,1]$, indépendamment l'un de l'autre par le choix au hasard dans le carré $[0,1]\times[0,1]$ d'un point $M(x,y)$.

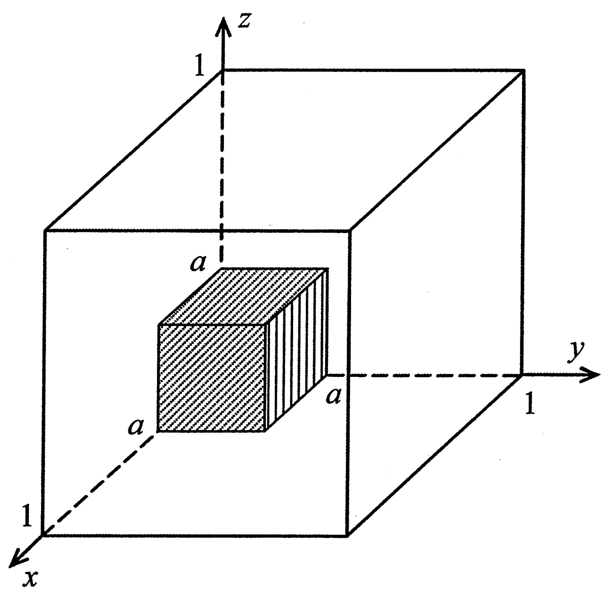
  L'événement : « $\max(x,y)\leq a$ » (pour a donné dans $[0,1]$) est alors l'ensemble des points $M(x,y)$ tels que $0\leq x\leq a$ et $0\leq y\leq a$. Il est représenté dans la figure ci-contre par le carré de côté a, d'aire a^2.



  Nous obtenons ainsi $\mathbb{P}(\max(x,y)\leq a)=a^2$, d'où se déduit que la variable aléatoire " $\max(x,y)$ " - sous les conditions de l'énoncé - suit la loi de probabilité sur $[0,1]$ de densité $x\mapsto 2x$.

- *Cas de trois réels.*

  De la même manière, mais en utilisant cette fois le choix d'un point au hasard dans le cube de côté 1, la probabilité de l'événement :
  « $\max(x,y,z)\leq a$ » est calculée par le volume du cube de côté a.
  Autrement dit :
  $\mathbb{P}(\max(x,y,z)\leq a)=a^3$.



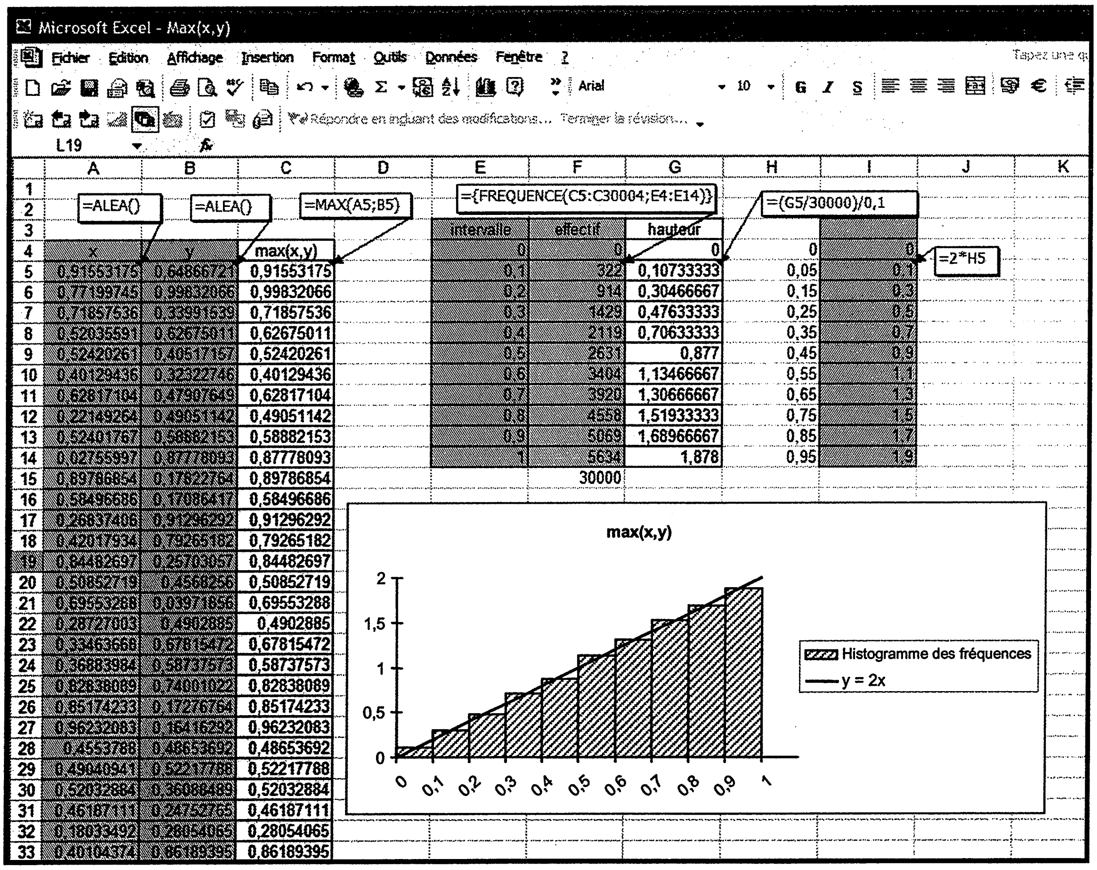
Commentaires

1. On ne manquera pas de souligner les limites du procédé (quand bien même il s'agirait du premier exemple de sa mise en œuvre), limites fixées par la capacité à raisonner en dimension n ($n \geq 4$) privé du support de la figure : le point de vue probabiliste (voir ci-après) développé dans l'exercice 2-30 (par exemple) est ici loin devant.
   Ce ne sera pas toujours le cas…

2. *Le point de vue probabiliste*
   Si l'on choisit n nombres $x_1, x_2, ..., x_n$ au hasard dans $[0,1]$, indépendamment les uns des autres, comme l'événement $(\max(x_1, x_2, ..., x_n) \leq a)$ est l'intersection des événements $(x_i \leq a)$ pour $i = 1,2,...,n$, sa probabilité est le produit des probabilités de ces derniers (indépendance) toutes égales à a (loi uniforme sur $[0,1]$).
   Ainsi $\mathbb{P}(\max(x_1, x_2, ..., x_n) \leq a) = a^n$.

Simulation

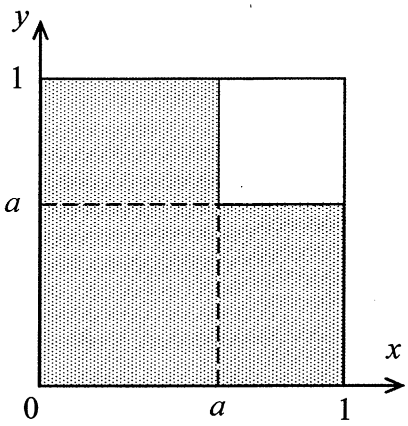
Nous nous limitons au cas de deux nombres (la figure comporte la courbe de densité)



Exercice 4-2 *Loi du minimum*

À l'aide des probabilités géométriques, déterminer la loi du minimum de deux ou trois nombres pris au hasard dans $[0,1]$, indépendamment les uns des autres.

Solution



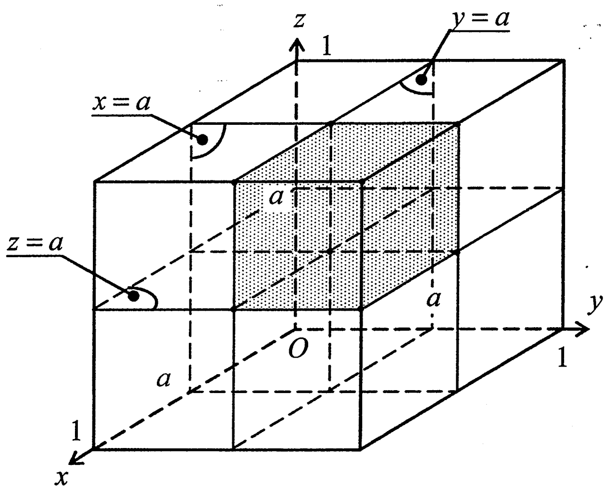
- *Cas de deux réels.*

  En substituant le choix au hasard de deux nombres x et y dans $[0,1]$, indépendamment l'un de l'autre, le choix au hasard dans le carré $[0,1]\times[0,1]$ d'un point $M(x,y)$, l'événement : « $\min(x,y)\leq a$ » (pour a donné dans $[0,1]$) qui n'est autre que la réunion des deux événements : $(x\leq a)$, $(y\leq a)$, peut être représenté comme indiqué dans la figure ci-dessus.

  En découle immédiatement que $\mathbb{P}(\min(x,y)\leq a)=1-(1-a)^2$.

- *Cas de trois réels*

  Nous procédons de la même manière en impliquant cette fois le choix d'un point au hasard dans le cube de côté 1. Noter que, pour des raisons de lisibilité, c'est l'événement contraire à " $\min(x,y,z)\leq a$" qui a été représenté dans la figure ci-contre (il s'agit d'un cube de côté $1-a$).



  On en déduit que :

  $$\mathbb{P}(\min(x,y,z)\leq a)=1-(1-a)^3.$$

Commentaire

Dans le cas de n nombres $x_1, x_2, ..., x_n$, toutes choses égales par ailleurs, le point de vue probabiliste s'impose.

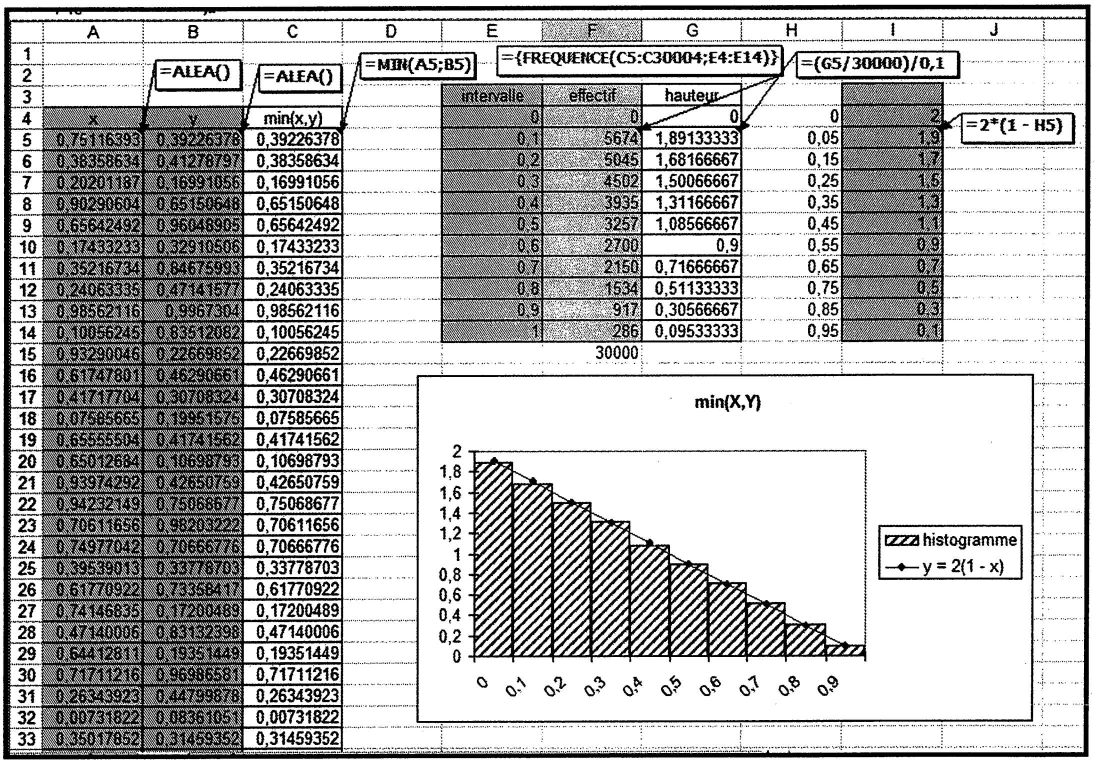
Avec $a\in[0,1]$, $\left(\min(x_1,x_2,...,x_n)>a\right)=\bigcap\limits_{i=1}^{n}E_i$ où E_i est l'événement $(x_i>a)$ de probabilité $1-a$.

L'indépendance des tirages assure que : $\mathbb{P}\left(\min(x_1,x_2,...,x_n)\leq a\right)=1-(1-a)^n$.

Simulation

Lorsque $n=2$, la densité de la variable aléatoire " min " est la fonction définie sur $[0,1]$ par $x \mapsto 2-2x$.

Voici ce que l'on peut obtenir par simulation en portant la courbe représentative de la densité sur l'histogramme des fréquences.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1										
2										
3					intervalle	effectif	hauteur			
4	x	y	min(x,y)		0	0	0	0	2	
5	0,75116393	0,39226378	0,39226378		0,1	5674	1,89133333	0,05	1,9	
6	0,38358634	0,41278797	0,38358634		0,2	5045	1,68166667	0,15	1,7	
7	0,20201187	0,16991056	0,16991056		0,3	4502	1,50066667	0,25	1,5	
8	0,90290604	0,65150648	0,65150648		0,4	3935	1,31166667	0,35	1,3	
9	0,65642492	0,96048905	0,65642492		0,5	3257	1,08566667	0,45	1,1	
10	0,17433233	0,32910506	0,17433233		0,6	2700	0,9	0,55	0,9	
11	0,35216734	0,84675993	0,35216734		0,7	2150	0,71666667	0,65	0,7	
12	0,24063335	0,47141577	0,24063335		0,8	1534	0,51133333	0,75	0,5	
13	0,98562116	0,9967304	0,98562116		0,9	917	0,30566667	0,85	0,3	
14	0,10056245	0,83512082	0,10056245		1	286	0,09533333	0,95	0,1	
15	0,93290046	0,22669852	0,22669852			30000				
16	0,61747801	0,46290661	0,46290661							
17	0,41717704	0,30708324	0,30708324							
18	0,07585665	0,19951576	0,07585665							
19	0,65555504	0,41741562	0,41741562							
20	0,65012684	0,10698793	0,10698793							
21	0,93974292	0,42650759	0,42650759							
22	0,94232149	0,75068677	0,75068677							
23	0,70611656	0,98203222	0,70611656							
24	0,74977042	0,70666776	0,70666776							
25	0,39539013	0,33778703	0,33778703							
26	0,61770922	0,73358417	0,61770922							
27	0,74146835	0,17200489	0,17200489							
28	0,47140006	0,83132398	0,47140006							
29	0,64412811	0,19351449	0,19351449							
30	0,71711216	0,96986581	0,71711216							
31	0,26343923	0,44799878	0,26343923							
32	0,00731822	0,08361051	0,00731822							
33	0,35017852	0,31459352	0,31459352							

Adolphe QUETELET (1796-1874)

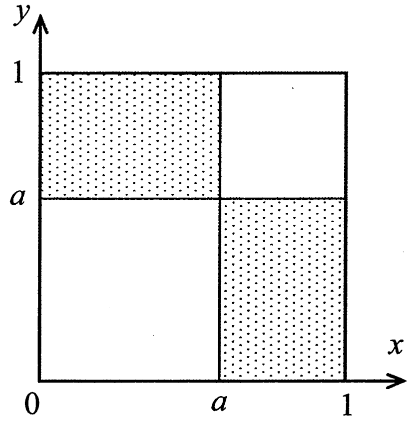
« Tout est prévu, tout est réglé : notre ignorance seule nous porte à croire que tout est abandonné au caprice du hasard. »

(Du système social et des lois qui le régissent 1848)

Exercice 4-3

Reprendre l'exercice 2-25 (page 79) en utilisant la loi uniforme du carré $[0,1]\times[0,1]$.

Solution



Rappelons qu'un réel a étant fixé dans $[0,1]$, il s'agit de calculer la probabilité que x et y ne soient pas pris dans le même intervalle I ou J, avec $I=[0,a]$ et $J=]a,1]$.

La zone favorable à la réalisation de cet événement est formée des deux rectangles $I\times J$ et $J\times I$, d'aire commune égale à $a(1-a)$.

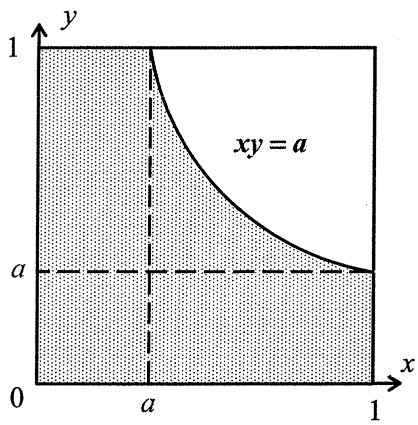
On retrouve la probabilité $p=2a(1-a)$.

Exercice 4-4 *Valeur médiane du produit*

Deux réels étant pris au hasard dans $[0,1]$, indépendamment l'un de l'autre, on considère l'événement E : « leur produit est inférieur à $0{,}1867$ »

Quel est de E et de son complémentaire $\overline{E}$ le plus probable ?

Solution



De manière générale, évaluons la probabilité de l'événement E_a défini, pour a fixé dans $]0,1[$, par :

E_Ω : « le produit des deux nombres est inférieur ou égal à a ».

En décrivant le choix des deux réels x et y par celui d'un point $M(x,y)$ au hasard dans le carré $[0,1]\times[0,1]$ (ce qui est tout à fait licite), nous sommes donc amenés à calculer l'aire du domaine grisé dans la figure ci-contre, à savoir : $a\times 1+\displaystyle\int_a^1 \frac{a}{x}\,\mathrm{d}x = a - a\ln a$.

Avec $a=0{,}1867$, on a $\mathbb{P}(E)\approx 0{,}50003$, **d'où le résultat :** E **est plus probable que** $\overline{E}$.

Commentaire

Le nombre a_0, unique solution dans $]0,1[$ de l'équation $x-\ln x=\dfrac{1}{2}$ (dont $0{,}1867$ est une valeur approchée à 10^{-4} près), est donc la valeur médiane des produits de deux nombres pris au hasard dans $[0,1]$ indépendamment l'un de l'autre.

Exercice 4-5 *Somme de deux nombres*

On choisit au hasard dans [0,1] deux réels x et y indépendamment l'un de l'autre.

Quelle est la loi de la variable aléatoire $S:(x,y)\mapsto x+y$ " somme de x et de y " ?

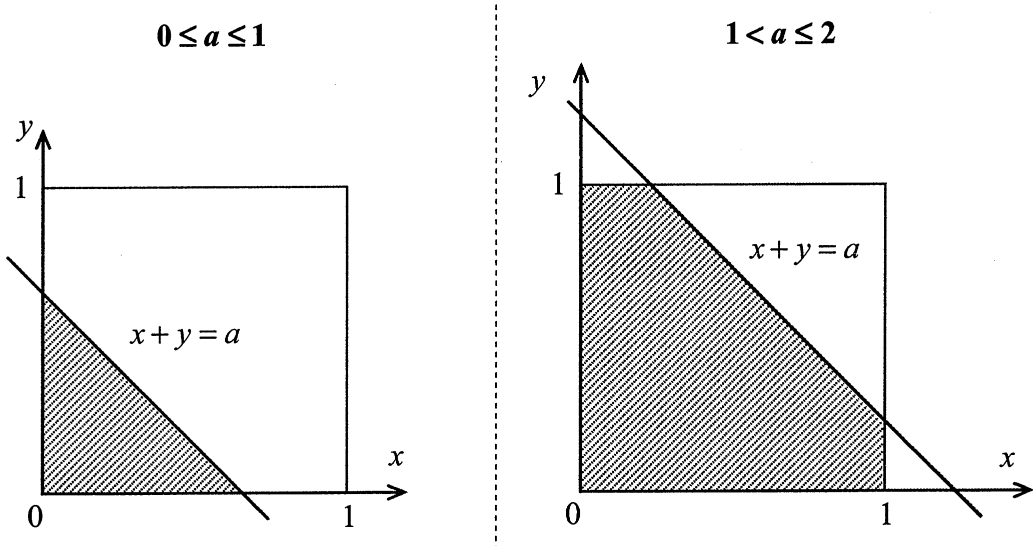
Solution

La variable aléatoire S est à valeur dans $[0,2]$.

Déterminons la fonction de répartition F de la variable aléatoire S en calculant la probabilité de l'événement $(S\leq a)$ où a est un réel donné de $[0,2]$.

Les conditions sont réunies pour valider le choix de x et y par celui d'un point $M(x,y)$ dans le carré $[0,1]\times[0,1]$ selon la loi uniforme du carré, ce qui permet d'évaluer la probabilité de l'événement $(x+y\leq a)$ par un calcul d'aire.

Deux cas sont à envisager :



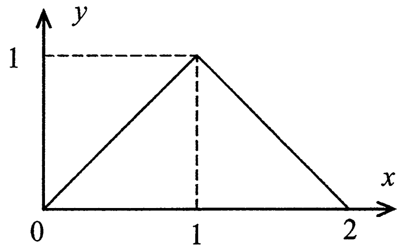
Aire de la zone favorable : $\dfrac{a^2}{2}$.

Aire de la zone favorable : $1-\dfrac{(2-a)^2}{2}$ (voir commentaire 1).

La fonction de répartition F de la variable aléatoire S est donc définie dans $[0,2]$ par :

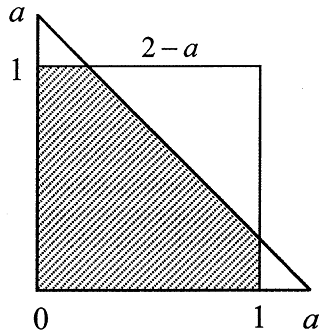
$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{2} & \text{si } x\in[0,1]\,;\\[2mm] 1-\dfrac{(2-x)^2}{2} & \text{si } x\in]1,2].\end{cases}$$

Par suite, la densité de probabilité f est définie par $f(x)=\begin{cases}x & \text{si } x\in[0,1]\\ 2-x & \text{si } x\in]1,2]\end{cases}$, ou encore par $f(x)=1-|1-x|$ (voir le second graphique de la simulation).



Note : la forme triangulaire de la courbe représentative de la densité donne son nom à la distribution de la variable aléatoire S : *distribution triangulaire de SIMPSON.*

Commentaires



1. La figure ci-contre fournit tous les ingrédients utiles à l'évaluation de l'aire de la zone favorable dans le cas $1 < a \leq 2$:

$$\begin{cases} 1-\dfrac{1}{2}(2-a)^2 & \text{avec le carré ;} \\ \dfrac{1}{2}a^2 - 2\times\dfrac{1}{2}(a-1)^2 & \text{avec les triangles.} \end{cases}$$

2. Il nous paraît utile d'expliciter - ne serait-ce qu'une fois, à titre d'exemple - la démarche probabiliste qui s'appuie sur la notion de produit de convolution. Voici le résultat essentiel :
« *Soit* X *et* Y *deux variables aléatoires indépendantes de densités respectives* f *et* g *définies sur* $]-\infty,+\infty[$.
Alors, la densité h *de la variable aléatoire* $X+Y$ *est calculée par :*
$$h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t \text{ ».}$$
Dans le cas qui nous préoccupe ici : « X et Y indépendantes suivant la loi uniforme sur $[0,1]$ », nous aurons donc : $h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\varphi(x-t)\,\mathrm{d}t$ où φ est la densité définie sur $]-\infty,+\infty[$ de $\mathcal{U}_{[0,1]}$ (φ est nulle en dehors de $[0,1]$, intervalle sur lequel elle prend la valeur 1).
Compte tenu des relations :
   - $\varphi(t) = 0$, pour $t < 0$,
   - $\varphi(x-t) = 0$, pour $x-t<0$ (i.e. $t > x$), il vient :
$$h(x) = \int_0^x \varphi(t)\varphi(x-t)\,\mathrm{d}t.$$
Considérons par exemple, la facette[1] $[1,2]$. Pour $1 \leq x \leq 2$:
$$h(x) = \int_0^1 \varphi(t)\varphi(x-t)\,\mathrm{d}t + \int_1^x \varphi(t)\varphi(x-t)\,\mathrm{d}t$$
$$h(x) = \int_0^1 \varphi(x-t)\,\mathrm{d}t = \int_{x-1}^x \varphi(u)\,\mathrm{d}u \quad \text{(en posant } u = x-t\text{),}$$
$$h(x) = \int_{x-1}^1 \varphi(u)\,\mathrm{d}u = 2-x \quad \text{puisque } x-1 \leq 1 \leq x.$$
On obtiendrait de la même manière les diverses expressions de h sur chacun des intervalles $]-\infty,0]$, $[0,1]$ et $[2,+\infty[$.

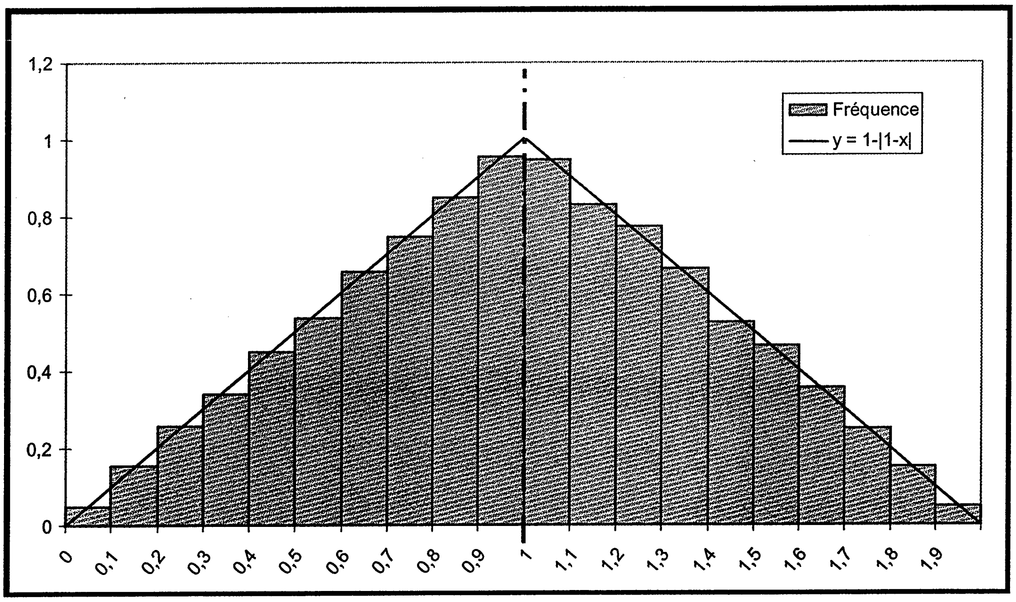
---

[1] Expression empruntée à [19] où l'on trouvera de nombreux exemples de tels calculs.

Simulation

La feuille de calcul que nous avons utilisée est présentée ci-après : elle n'appelle pas de commentaires particuliers.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1										
2	=ALEA()	=ALEA()	=A5+B5		={frequence(C5:C30004;E5:E24)}		=(F4/30000)/0,1		=H4	
3					intervalle	effectif	hauteur			
4	x	y	x + y		0	0	0	0	0	
5	0,1454993	0,97213725	1,11763655		0,1	177	0,059	0,05	0,05	
6	0,57128882	0,83882526	1,41011408		0,2	497	0,16566667	0,15	0,15	
7	0,31416408	0,61676778	0,93093186		0,3	765	0,255	0,25	0,25	
8	0,48770065	0,91941342	1,40711407		0,4	1091	0,36366667	0,35	0,35	
9	0,77055414	0,82353412	1,59408826		0,5	1277	0,42566667	0,45	0,45	
10	0,13992709	0,43525717	0,57518425		0,6	1621	0,54033333	0,55	0,55	
11	0,87195798	0,71061799	1,58257596		0,7	1945	0,64833333	0,65	0,65	
12	0,19055914	0,69261923	0,88317837		0,8	2302	0,76733333	0,75	0,75	
13	0,4247958	0,13091586	0,55571167		0,9	2538	0,846	0,85	0,85	
14	0,93600095	0,67662684	1,61262779		1	2834	0,94466667	0,95	0,95	
15	0,36353154	0,45453357	0,81806511		1,1	2845	0,94833333	1,05	0,95	=2 - H15
16	0,18553885	0,38835282	0,57389167		1,2	2489	0,82966667	1,15	0,85	
17	0,22440146	0,05809191	0,28249337		1,3	2363	0,78766667	1,25	0,75	
18	0,73194752	0,66795619	1,39990372		1,4	1923	0,641	1,35	0,65	
19	0,20910043	0,78667237	0,99577281		1,5	1641	0,547	1,45	0,55	
20	0,12071014	0,70560948	0,82631962		1,6	1353	0,451	1,55	0,45	
21	0,00207064	0,54705074	0,54912138		1,7	1011	0,337	1,65	0,35	
22	0,79664458	0,05773416	0,85437874		1,8	731	0,24366667	1,75	0,25	
23	0,21853623	0,4556188	0,67415504		1,9	446	0,14866667	1,85	0,15	
24	0,84367892	0,98197443	1,82565334		2	151	0,05033333	1,95	0,05	
25	0,18216676	0,27106579	0,45323255							



Exercice 4-6

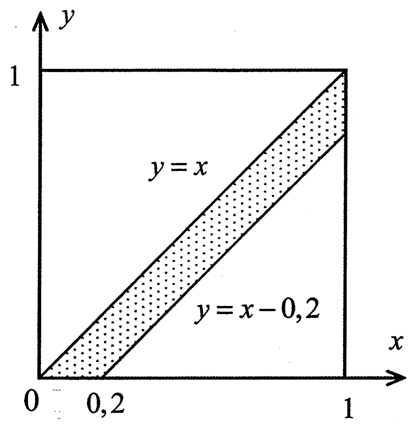
On tire successivement au hasard deux réels x et y dans $[0,1]$, indépendamment l'un de l'autre.

Quelle est la probabilité que l'intervalle $[y, y+0,2]$ contienne x ?

Solution

Il n'y a guère de difficultés, via le choix du point $M(x,y)$ au hasard dans le carré $[0,1]\times[0,1]$, à représenter la zone favorable à la réalisation de l'événement A :

$A=$ « $[y, y+0,2]$ contient x ».



Un calcul d'aire élémentaire livre alors :

$$\mathbb{P}(A)=1-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times 0,8^2\right)=0,18.$$

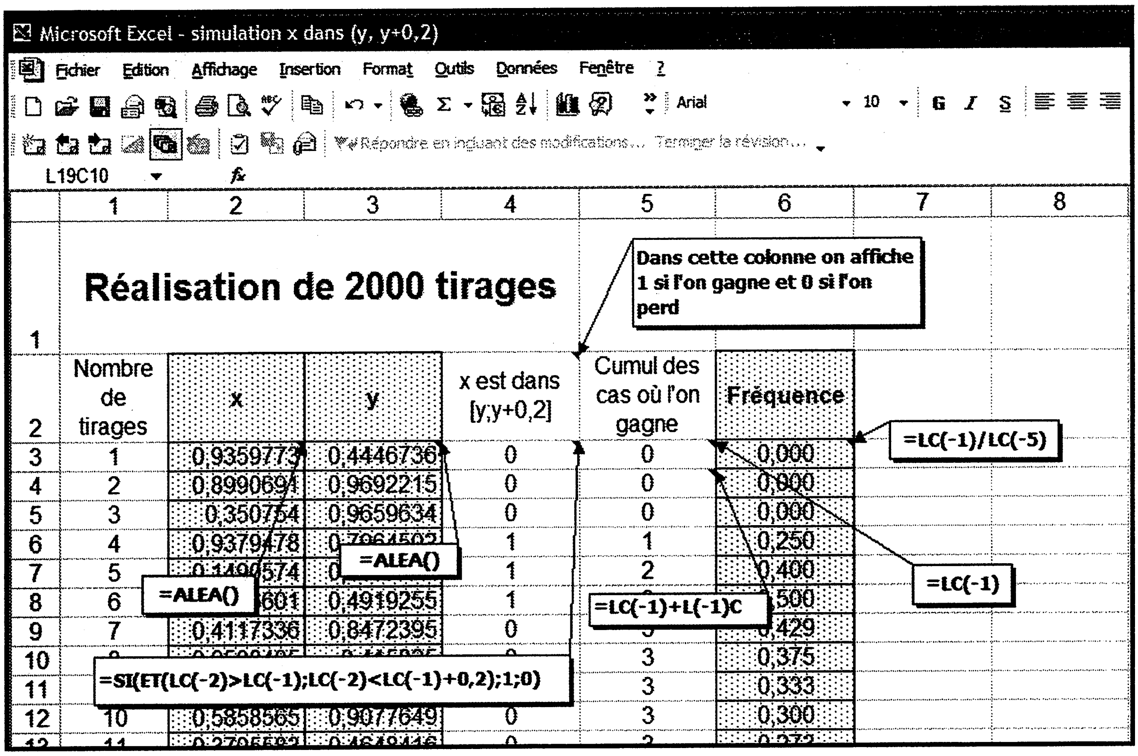
Commentaires

1. Cet exercice fait suite à l'exercice 2-10 (page 59) où l'on s'intéressait pour x *fixé dans* $[0,1]$ et y pris au hasard dans $[0,1]$ à l'événement « $[y, y+0,2]$ contient x », de probabilité :
   - x pour $0\le x<0,2$;
   - $0,2$ pour $0,2\le x\le 1$.

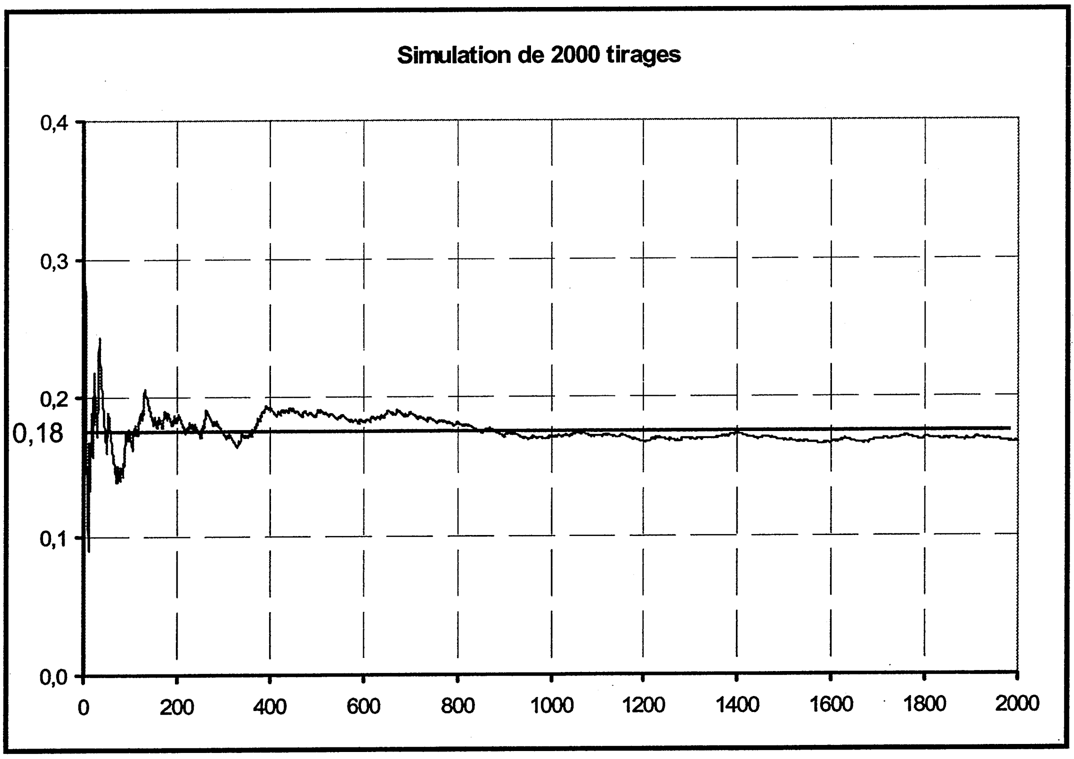
2. L'occasion nous est fournie d'effectuer l'un des contrôles que permet la notion de loi de probabilité conditionnelle (voir remarque page 182 du chapitre 4).
   En désignant par X la variable aléatoire $X=x$, le résultat que nous venons de rappeler signifie que la probabilité de A conditionnelle à $\{X=x\}$ est :
   $$\mathbb{P}(A/\{X=x\})=\begin{cases} x & \text{si } 0\le x<0,2;\\ 0,2 & \text{si } 0,2\le x\le 1.\end{cases}$$
   Comme la variable aléatoire X suit la loi uniforme sur $[0,1]$, la " théorie " dit que l'on doit d'avoir l'égalité $\mathbb{P}(A)=\int_0^1 \mathbb{P}\big(A/\{X=x\}\big)\,\mathrm{d}x$.
   Il en est bien ainsi comme le montrent les égalités :
   $$\int_0^{0,2} x\,\mathrm{d}x=0,02 \quad\text{et}\quad \int_{0,2}^1 0,2\,\mathrm{d}x=0,16.$$

3. En remplaçant $0,2$ par un réel a de $[0,1]$ fixé à l'avance et toutes choses égales par ailleurs, la probabilité de l'événement : « l'intervalle $[y, y+a]$ contient x » est égale à $a\left(1-\dfrac{a}{2}\right)$ (immédiat).

Simulation



	1	2	3	4	5	6
2	Nombre de tirages	x	y	x est dans [y;y+0,2]	Cumul des cas où l'on gagne	Fréquence
3	1	0,9359773	0,4446736	0	0	0,000
4	2	0,8990694	0,9692215	0	0	0,000
5	3	0,350754	0,9659634	0	0	0,000
6	4	0,9379478	[illegible]	1	1	0,250
7	5	0,1490574	[illegible]	1	2	0,400
8	6	[illegible]601	0,4919255	1	[illegible]	[illegible]500
9	7	0,4117336	0,8472395	0	[illegible]	[illegible]429
10	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	3	0,375
11	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	3	0,333
12	10	0,5858565	0,9077649	0	3	0,300



Exercice 4-7

On tire successivement trois réels x, y et z dans $[0,1]$ indépendamment les uns des autres.

Quelle est la probabilité d'obtenir un triplet ordonné, c'est à dire : soit $x<y<z$, soit $z<y<x$.

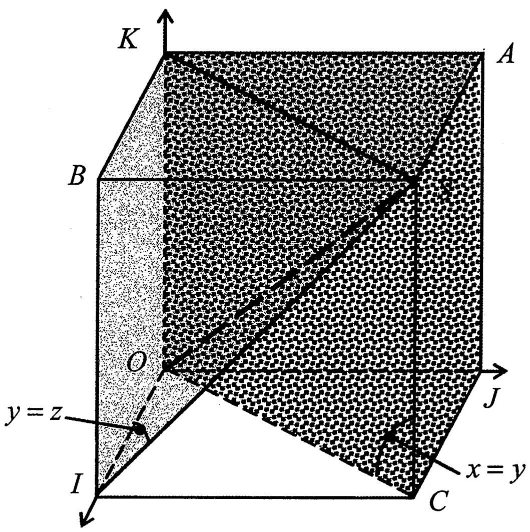
Solution

En considérant le choix d'un point $M(x,y,z)$ dans le cube $[0,1]\times[0,1]\times[0,1]$ selon la loi uniforme (ce qui est tout à fait légitime compte tenu des hypothèses), nous voilà confrontés à un problème de représentation de solides (dans le cube) et à celui du calcul de leur volume.

➢ *$x<y<z$ dans le cube*

Voici le détail (une fois n'est pas coutume) de la construction :

- on construit le plan $(x=y)$, d'où le prisme droit (en pointillé) intersection du cube et du demi-espace $(x<y)$ (prisme $OCJKSA$) ;
- on obtient de même (en gris foncé) le prisme $OAKISB$ intersection du cube et du demi-espace $(y<z)$;
- le solide cherché est alors le tétraèdre $OSAK$ (noter que le tracé de $[OS]$ s'impose puisque (OS) est la droite d'intersection des plans $(x=y)$ et $(y=z)$).



Ce tétraèdre étant de volume $\frac{1}{6}$, on en déduit que la probabilité de l'événement $(x<y<z)$ est $\frac{1}{6}$.

➢ *$x>y>z$ dans le cube*

Nous laissons à voir cette fois qu'il s'agit du tétraèdre $OICS$ également de volume $\frac{1}{6}$.

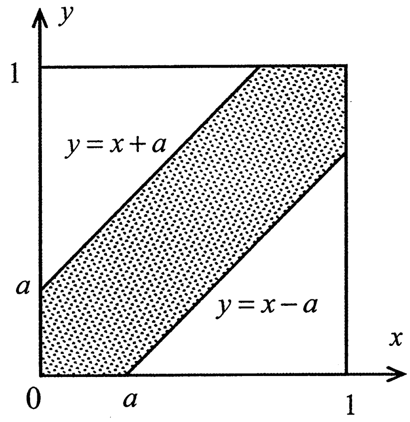
➢ *Conclusion* : la probabilité d'obtenir un tirage ordonné est $\frac{1}{3}$.

Commentaire

En toute rigueur, le premier solide est le tétraèdre $OKSA$ privé des segments $[OA]$, $[OS]$ et $[KS]$, ce dont nous avons l'air de nous soucier comme d'une guigne ; comme ces restrictions n'influent en rien sur le calcul, on voit mal qui pourrait trouver à redire.

Exercice 4-8 *Loi de l'écart*

Deux réels sont choisis au hasard dans [0,1] indépendamment l'un de l'autre, déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire $Z : \mapsto |x-y|$.



Solution

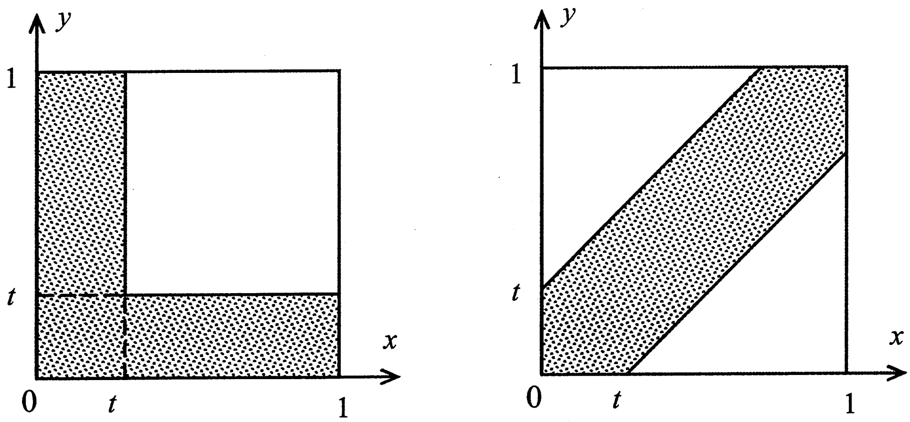
Il est clair que la variable aléatoire Z est à valeur dans $[0,1]$ et pas moins que, pour $a \in [0,1]$, l'événement $(Z \leq a)$ est représenté graphiquement dans la figure ci-contre.

Le calcul d'aire livre $\mathbb{P}(Z \leq a) = 1-(1-a)^2$.

Commentaires

1. L'occasion est fournie de mettre en évidence deux variables aléatoires « radicalement » différentes de même loi de probabilité[2]. De manière plus précise, deux réels x et y étant choisis au hasard dans $[0,1]$, indépendamment l'un de l'autre, nous tenons de l'exercice 4-2 et du résultat précédent que les deux variables aléatoires $Z_1 : (x,y) \mapsto \min(x,y)$ et $Z_2 : (x,y) \mapsto |x-y|$ **suivent la même loi de probabilité, propriété affermie par le graphique suivant.**

$0 \leq t \leq 1$



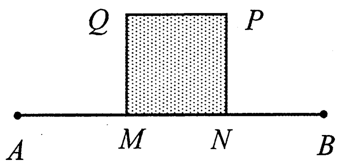
Événement : $\min(x,y) \leq t$ — **Événement :** $|x-y| \leq t$

Probabilité : $1-(1-t)^2$ — **Probabilité :** $1-(1-t)^2$

---

[2] Pour un résultat plus général voir [12], page 76.

2. *Prolongement*



On choisit au hasard deux points M et N sur le segment $[AB]$ de longueur 1, indépendamment l'un de l'autre et l'on considère le carré $MNPQ$ bâti sur $[MN]$.

Pour quelle valeur du réel a $(0 \leq a \leq 1)$ l'événement " aire$(MNPQ) \leq a$ " ***et son contraire sont-ils équiprobables ?***

En désignant par x et y les longueurs AM et AN, nous sommes renvoyés à l'exercice précédent via l'équivalence :

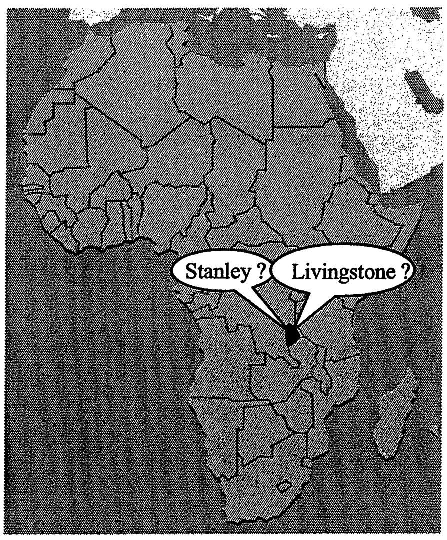
$$(x-y)^2 \leq a \Leftrightarrow |x-y| \leq \sqrt{a}.$$

La réponse est $a = \dfrac{3}{2} - \sqrt{2}$.

3. *Le problème de la rencontre*

Nous avons vu que le problème de la rencontre, dès lors qu'il est énoncé avec le libellé retenu au paragraphe 1-2 (page 154) soulève comme difficulté majeure d'affilier sa résolution à celle du présent exercice " Loi de l'écart ". Tel quel, il serait donc à rattacher plutôt au prochain thème d'exercices (4-9 à 4-15) : " Problèmes de modélisation " ; à chacun de lui accorder la juste place qu'il estime (application d'un " standard " des probabilités géométriques : loi de l'écart, ou incitation à faire toucher du doigt quelques questions sur la modélisation).

Quant au cas général (nombre quelconque de personnes, toutes choses égales par ailleurs), il est à la charge de l'exercice 4-16.



Exercice 4-9

On choisit au hasard et indépendamment les uns des autres trois points P , Q et R sur un segment $[AB]$.

Les événements :

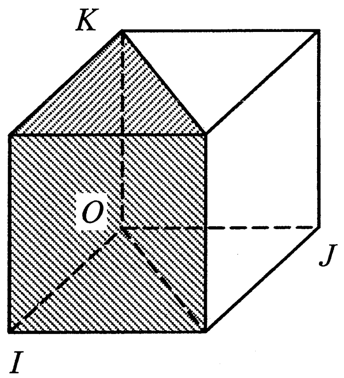
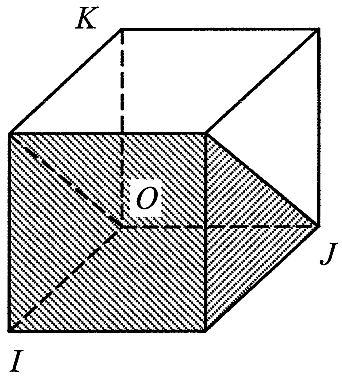
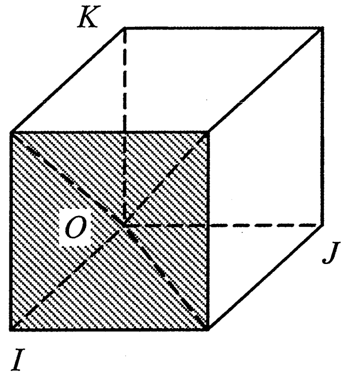
« Q est entre A et P » et « R est entre A et P » sont-ils indépendants ?

Solution

On peut supposer que le segment $[AB]$ est de longueur 1 et poser $AP = x$, $AQ = y$ et $AR = z$.

Le problème est alors le suivant :
« *On choisit trois réels* x, y *et* z *au hasard dans* $[0,1]$, *indépendamment les uns des autres. Les événements* $(y < x)$ *et* $(z < x)$ *sont-ils indépendants ?* »

Le choix d'un point $M(x,y,z)$ au hasard dans le cube $[0,1]\times[0,1]\times[0,1]$ permet de calculer les probabilités des événements : $(y<x)$, $(z<x)$ et $(y<x)\cap(z<x)$.

		
$\mathbb{P}(y<x)=\frac{1}{2}$	$\mathbb{P}(z<x)=\frac{1}{2}$	$\mathbb{P}((y<x)\cap(z<x))=\frac{1}{3}$

Ces événements ne sont pas indépendants puisque $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$ est différent de $\frac{1}{3}$.

Commentaires

1. Soit x un réel *fixé* dans $]0,1[$.

   Si l'on choisit au hasard dans $[0,1]$ et indépendamment l'un de l'autre deux réels y et z, alors les événements $(y < x)$ et $(z < x)$ sont indépendants (c'est une tautologie).

2. Considérons l'expérience aléatoire suivante :

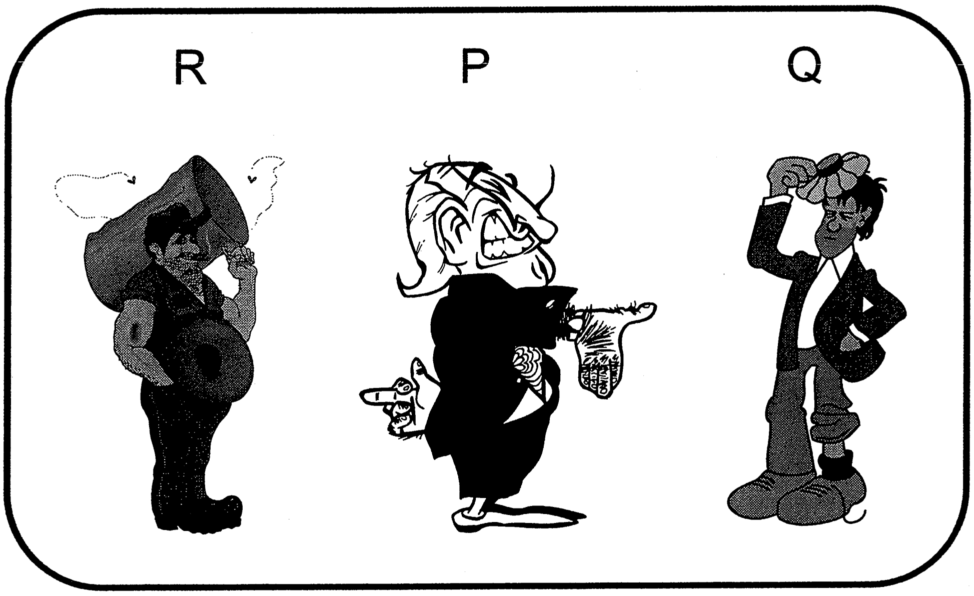
   « *On place aléatoirement trois personnes côte à côte avec équirépartition sur les rangements de gauche à droite, par exemple.* »

   (i.e. $\Omega = \{PQR, PRQ, QPR, , QRP, RPQ, RQP\}$ est muni de loi équirépartie)

   Alors, les événements semblables à ceux précédemment décrits, à savoir :
   « Q est à gauche de P », « R est à gauche de P » et « Q et R sont à gauche de P » ont pour probabilités respectives : $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$ (les mêmes que dans l'exercice).

   Les deux premiers événements ne sont donc pas indépendants.

   (À ranger dans l'escarcelle des petites questions sur l'indépendance dans le cas discret).



Exercice 4-10

On choisit trois réels x, y et z au hasard dans $[0,1]$, indépendamment les uns des autres.

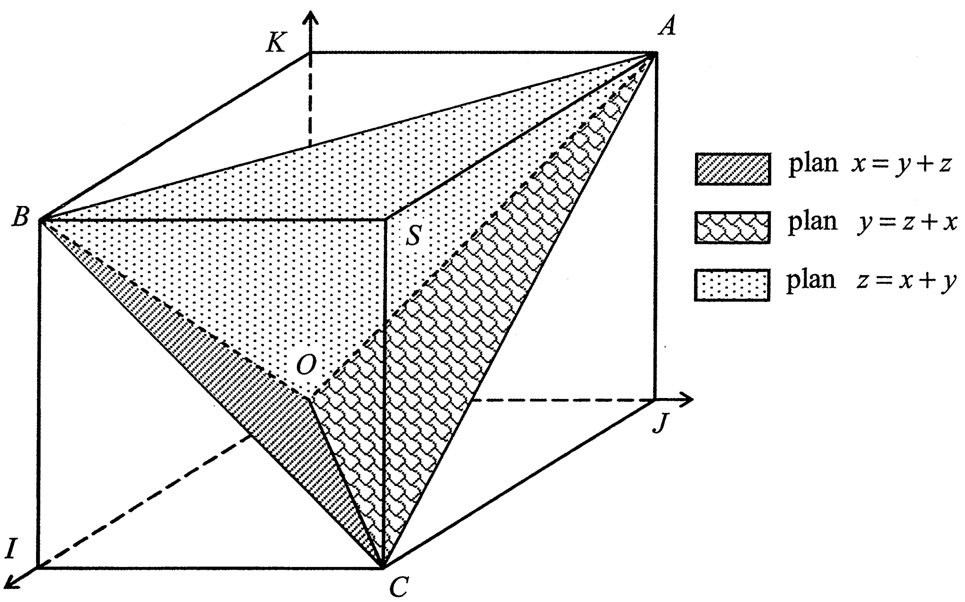
Quelle est la probabilité de construire un triangle de côtés x, y et z ?

Solution

Il existe un triangle de côtés x, y et z si et seulement si $\begin{cases} x < y+z \\ y < z+x \\ z < x+y \end{cases}$.

Comme sont réunies les conditions permettant de traduire le choix des réels x, y et z par celui d'un point $M(x,y,z)$ dans le cube $\mathbf{C} = [0,1]\times[0,1]\times[0,1]$, selon la loi uniforme du cube, nous sommes conduits à représenter l'intersection du cube avec chacun des demi-espaces précédents.

Voilà la figure obtenue (en détaillant) :



Le solide qui nous intéresse est le cube $\mathbf{C}$ amputé des trois tétraèdres $IOBC$, $JOCA$ et $KOAB$, tous de volume $\frac{1}{6}$; son volume est donc : $1 - 3\times\frac{1}{6} = \frac{1}{2}$.

La probabilité cherchée est égale à $\frac{1}{2}$.

Exercice 4-11 *Le problème des guichets* (*d'après* [19])

Un bureau de poste comporte deux guichets.

Trois personnes A, B et C entrent simultanément dans le bureau de poste. Les deux personnes A et B vont respectivement vers les deux guichets libres à ce moment là et C attend que l'un des deux guichets se libère.

Une unité de temps étant choisie, on fait l'hypothèse que les durées de passage aux guichets sont des variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi uniforme sur $[0,1]$.

Quelle est la probabilité que C quitte la poste en dernier ? (Les durées des mouvements des personnes sont considérées comme nulles).

Solution

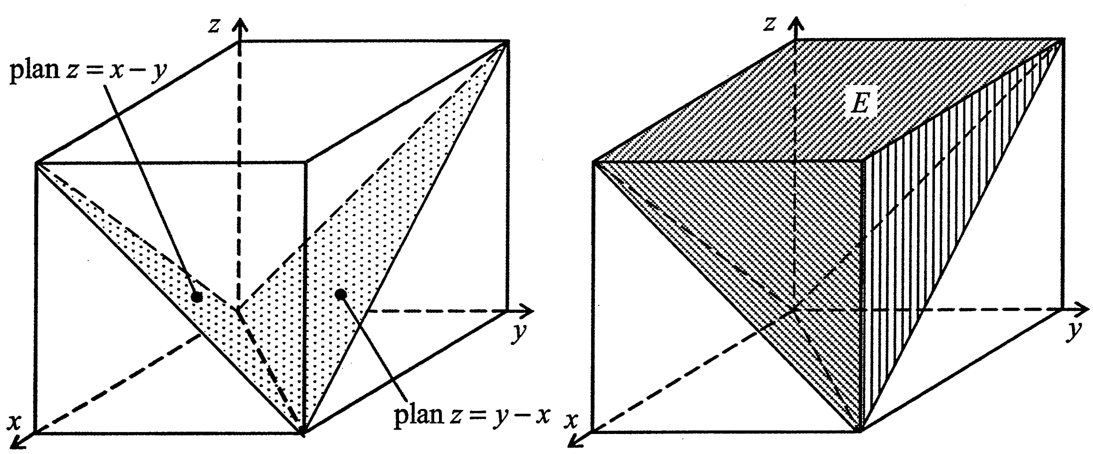
Soit x, y, z les temps de présence respectifs des personnes A, B et C aux guichets.

La personne C repart de la poste à l'instant $\min(x,y)+z$. Elle quitte donc la poste en dernier si et seulement si : $\min(x,y)+z > x$ et $\min(x,y)+z > y$ ou encore : $\min(x,y)+z > \max(x,y)$, inégalité équivalente à $z > \max(x,y)-\min(x,y)$.

La probabilité que C quitte la poste en dernier est donc la probabilité que $z > \max(x,y)-\min(x,y)$, où x, y, z sont trois réels choisis indépendamment l'un de l'autre au hasard dans $[0,1]$.

Un tel choix étant équivalent à celui d'un point $M(x,y,z)$ selon la loi uniforme dans le cube $[0,1]\times[0,1]\times[0,1]$, il s'agit donc de calculer le volume de la partie E du cube définie par : $E=\left\{(x,y,z)\in[0,1]^3 \,/\, z > \max(x,y)-\min(x,y)\right\}$.

En distinguant $x \leq y$ et $x > y$ et en sectionnant le cube par les plans d'équation $z = x - y$ et $z = y - x$, on obtient la partie E du cube représentée dans la figure ci-après, dont le volume se calcule sans difficulté : $V = 1 - 2\times\left(\frac{1}{3}\times 1\times\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3}$.



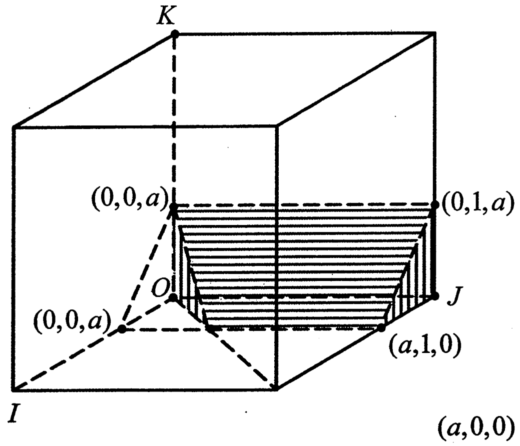
La probabilité que C quitte la poste en dernier est $\frac{2}{3}$.

Commentaires

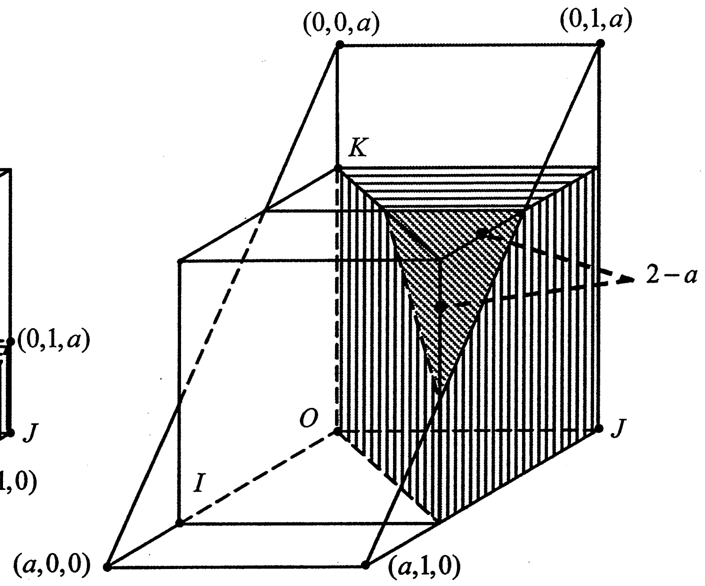
1. Cet exercice fournit l'occasion de faire le point sur les savoirs et savoir-faire mis en jeu :
   - interprétation et traitement algébrique des données (il s'agit de " voir " que la probabilité cherchée est celle de l'événement $(z > \max(x,y) - \min(x,y))$;
   - explicitation du choix au hasard dans $[0,1]$ de trois nombres indépendamment les uns des autres à l'aide de la loi uniforme dans le cube de côté 1 ;
   - équation d'un demi-espace ;
   - sections planes d'un cube ;
   - calculs de volumes.
2. On peut faire observer que $\max(x,y) - \min(x,y) = |x-y|$, mais cette remarque n'ajoute pas grand chose à la solution.
3. *Prolongement.*
   Le temps passé par la personne C dans le bureau de poste est une variable aléatoire T à valeurs dans $[0,2]$ dont on peut - toujours par modélisation avec la loi uniforme dans le cube- faire calculer la fonction de répartition.
   On obtient, pour $0 \le a \le 2$ (voir figures ci-après)

$$\mathbb{P}(T \le a) = \begin{cases} a^2 - \dfrac{1}{3}a^3 & \text{si } 0 \le a < 1 ; \\ 1 - \dfrac{1}{3}(2-a)^3 & \text{si } 1 \le a \le 2. \end{cases}$$

$$\min(x,y) + z \le a \quad (\textit{lorsque } x \le y)$$



Le cas $0 \le a < 1$



Le cas $1 \le a \le 2$

À titre d'information, la durée moyenne du séjour de la personne C dans le bureau de poste est $E(T) = \dfrac{5}{6}$.

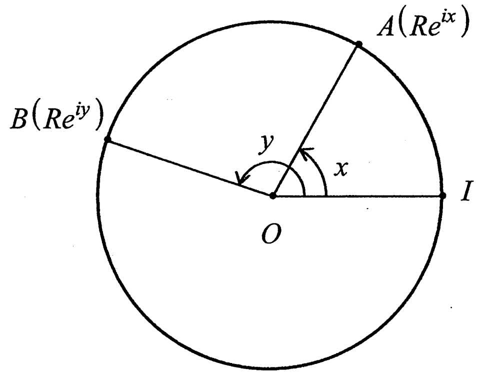
Exercice 4-12 *Deux points sur un même quart de cercle*

Deux points A et B sont choisis au hasard sur un cercle Γ de centre O et de rayon R, indépendamment l'un de l'autre. Quelle est la probabilité de l'événement E :

$E =$ " les deux points appartiennent à un même quart de cercle " ?

Nous envisagerons deux méthodes de résolution de cette question.

1ère méthode



On utilise la propriété suivante énoncée dans le paragraphe 1-3-1 « Sur le cercle » (page 156) : « *le choix au hasard et indépendamment l'un de l'autre de deux points A et B d'un cercle peut être obtenu par le choix au hasard d'un point $M(x,y)$ dans le carré* $[0,2\pi[\times[0,2\pi[$ *selon la loi uniforme* ».

Les points A et B étant définis comme indiqués dans la figure ci-dessus, calculer la probabilité de E après avoir effectué une représentation graphique dans le carré $[0,2\pi[\times[0,2\pi[$.

2ème méthode

On considère :

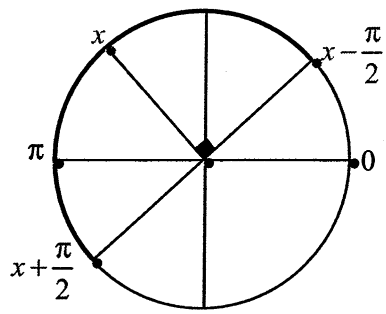
- **les points A' et B' de Γ définis par $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OA'})=(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OB'})=\dfrac{\pi}{2}$;**
- **les quarts de cercle Γ_A d'extrémités A et A' et Γ_B d'extrémités B et B' ;**
- **les événements E_A et E_B définis par : $E_A =$ " $B\in\Gamma_A$ " et $E_B =$ " $A\in\Gamma_B$ ".**

Établir que $E = E_A \cup E_B$ et en déduire la probabilité de E.

Solution

1ère méthode

Nous sommes amenés à distinguer trois cas :



➢ **1er cas :** $x\in\left[\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right]$.

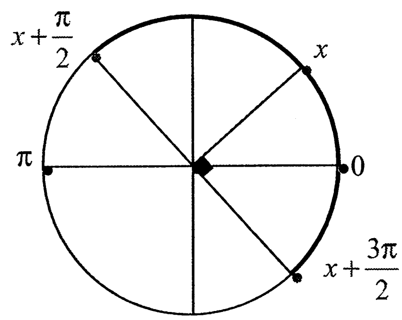
Les points A et B appartiennent à un même quart de cercle si et seulement si

$$x-\frac{\pi}{2}\le y\le x+\frac{\pi}{2}.$$

➢ **2ème cas :** $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Les points A et B appartiennent à un même quart de cercle si et seulement si

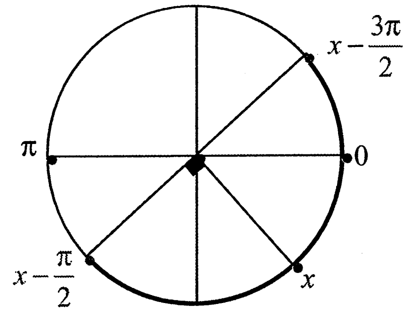
$$y \leq x + \frac{\pi}{2} \text{ ou } y \geq x + \frac{3\pi}{2} .$$



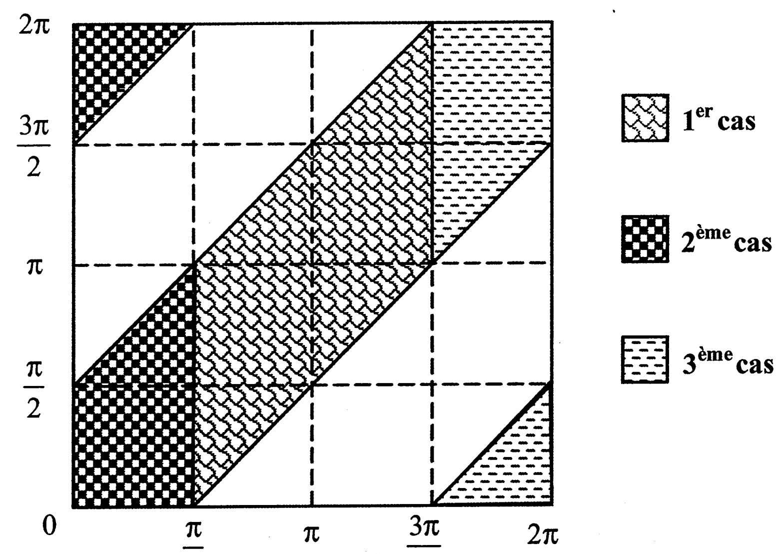
➢ **3ème cas :** $x \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$.

Les points A et B appartiennent à un même quart de cercle si et seulement si

$$x - \frac{\pi}{2} \leq y \text{ ou } y \leq x - \frac{3\pi}{2} .$$



Nous sommes ainsi conduits à la représentation graphique de la zone favorable à la réalisation de E, ci-dessous :



Seulement intéressé par le rapport d'aires, un comptage élémentaire de carreaux montre que la probabilité de E est $\frac{1}{2}$.

$2^{ème}$ méthode

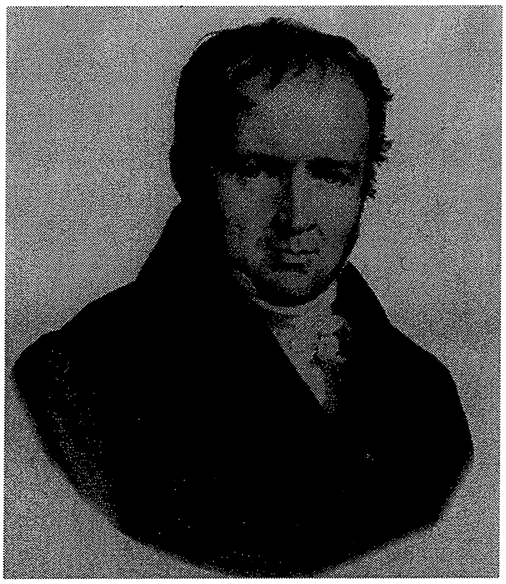
L'égalité $E = E_A \cup E_B$ étant à mettre au rang des évidences premières, intéressons nous aux probabilités des événements E_A, E_B et $E_A \cap E_B$:

- les événements E_A, E_B sont tous deux de probabilité $\frac{1}{4}$ (il s'agit du quotient $\frac{\text{longueur d'un quart de cercle}}{\text{longueur du cercle}}$) ;
- l'événement $E_A \cap E_B$ est l'événement $(A = B)$ de probabilité nulle (cf. paragraphe 1-3-2 « coïncidence des tirages » page 157).

Il en découle que la probabilité de E est égale à $\frac{1}{2}$ $(\frac{1}{4}+\frac{1}{4})$.

Commentaires

1. La remarque de la page 155 (note 5 de bas de page) trouve confirmation dans cet exemple : il n'est pas exclus que - même en dimension 2 - le recours aux probabilités géométriques (avec la loi uniforme dans un carré) puisse se faire damer le pion par une méthode plus directe ($2^{ème}$ méthode).
2. Nous reprendrons cette dernière méthode - en l'adaptant - à l'exercice 4-17 - " n points sur un même demi-cercle ".



Siméon Denis POISSON (1781-1840)

« *Un problème relatif aux jeux de hasard, proposé à un austère janséniste par un homme du monde, a été à l'origine du calcul des probabilités.* »

(Recherche sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile 1887.)

Exercice 4-13 *Deviner le plus grand (Version 2 Stratégie 1)*

Deux réels sont choisis au hasard dans $[0,1]$ indépendamment l'un de l'autre. Chacun des nombres est inscrit dans une enveloppe. Le joueur doit deviner dans laquelle des enveloppes est inscrit le plus grand des deux nombres. Pour cela, il a le droit de choisir au hasard une des enveloppes et de prendre connaissance du nombre inscrit dans cette enveloppe (ce nombre sera appelé dans la suite « nombre lu »).

Le joueur adopte la stratégie S_1 suivante.

Il tire un nombre z au hasard dans $[0,1]$ et décide que :

- **si $z <$ " nombre lu ", alors « nombre lu » est le plus grand ;**
- **si $z \geq$ " nombre lu ", alors c'est l'autre nombre le plus grand.**

Calculer la probabilité p_1 de gagner avec cette stratégie.

Solution

Désignons par x le « nombre lu » par le joueur et par y celui (inconnu) inscrit dans l'enveloppe restante.

La stratégie S_1 est gagnante dans deux cas seulement qui s'excluent mutuellement :

- soit $z < x$ et $y \leq x$;
- soit $z \geq x$ et $y \geq x$.

Les réels x, y et z étant choisis au hasard dans $[0,1]$ indépendamment les uns des autres, un tel choix équivaut à celui d'un point $M(x,y,z)$ selon la loi uniforme du cube $\mathbf{C}$ défini par : $\mathbf{C} = \{M(x,y,z)/0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1; 0 \leq z \leq 1\}$.

L'événement " gagné " (noté G) peut alors être décrit comme :

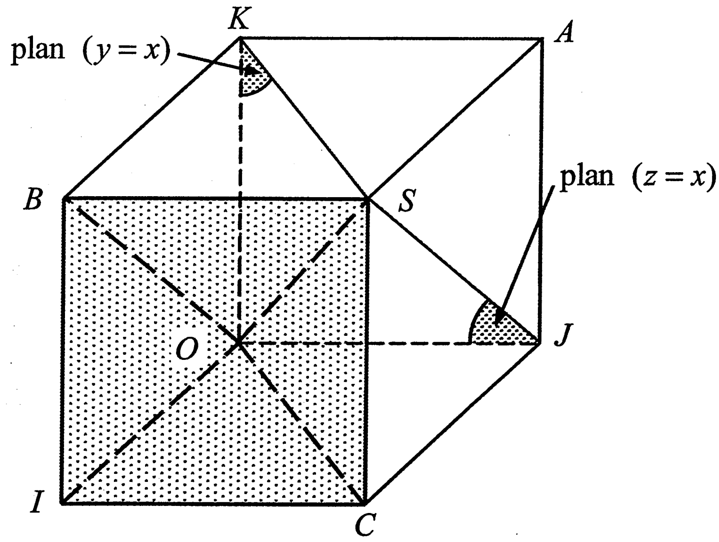
$$G = \{M(x,y,z) \in \mathbf{C}/\,(z<x) \cap (y \leq x)\} \uplus \{M(x,y,z) \in \mathbf{C}/\,(z \geq x) \cap (y \geq x)\},$$

la réunion étant disjointe.

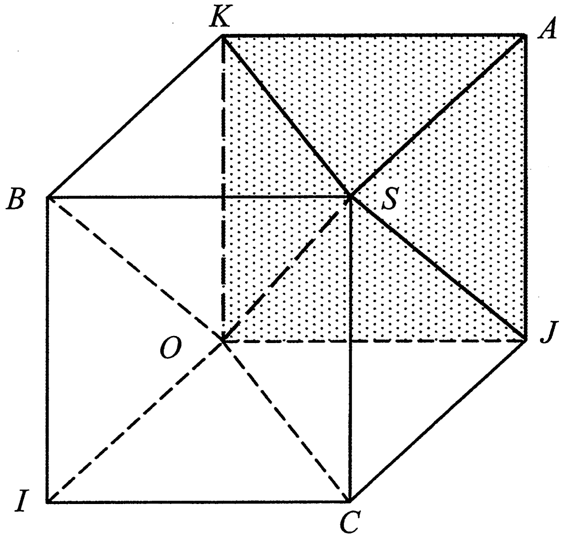
Ceci conduit à un calcul de volumes, via les représentations graphiques suivantes :

- $\{M(x,y,z) \in \mathbf{C}/\,(z<x) \cap (y \leq x)\}$

  On obtient la pyramide de sommet O et de base le carré $BICS$, dont le volume est égal à $\frac{1}{3}$;



- $\{M(x,y,z) \in \mathbf{C} / (z \geq x) \cap (y \geq x)\}$. Cette fois il s'agit de la pyramide de sommet S et de base le carré $OJAK$ dont le volume est aussi égal à $\dfrac{1}{3}$.



Conclusion : la probabilité de gagner avec la stratégie S_1 est égale à $\dfrac{2}{3}$.

Commentaires

Soit X la variable aléatoire : $X = |y - x|$.

Nous tenons de l'exercice 4-8 que la fonction de répartition F de la variable aléatoire X est définie sur [0,1] par $F(t) = 2t - t^2$.

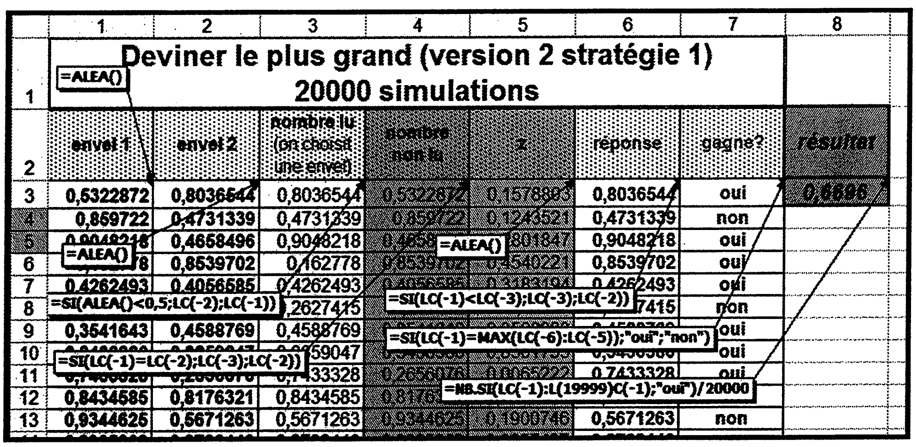
Par ailleurs, nous avons vu que la probabilité de gagner avec la stratégie S_1 lorsque $X = t$ est calculée par $\dfrac{1}{2} + \dfrac{t}{2}$ (voir exercice 2-20 " Deviner le plus grand " (version 1 ; stratégie 1)).

Autrement dit la probabilité de G ($G =$ " gagner ") conditionnelle à $\{X = t\}$ est $\varphi(t) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{t}{2}$.

D'où, en utilisant que la propriété de gagner est donnée par $\int_0^1 \varphi(t)\,\mathrm{d}F(t)$ (cf. remarque page 182 du chapitre 4), on obtient $\mathbb{P}(G) = \displaystyle\int_0^1 \left(\frac{1}{2} + \frac{t}{2}\right)(2 - 2t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 (1 - t^2)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{3}$.

Voilà contrôlé de la manière annoncée dans cette même remarque le résultat précédemment obtenu à l'aide des probabilités géométriques.

Simulation



	1	2	3	4	5	6	7	8
1	Deviner le plus grand (version 2 stratégie 1) 20000 simulations							
2	envel 1	envel 2	nombre lu (on choisit une envel)	nombre non lu	z	réponse	gagne?	résultat
3	0,5322872	0,8036544	0,8036544	0,5322872	0,1578893	0,8036544	oui	0,6696
4	0,859722	0,4731339	0,4731339	0,859722	0,1243521	0,4731339	non	
5	0,9048218	0,4658496	0,9048218	[illegible]	[illegible]	0,9048218	oui	
6	[illegible]	0,8539702	0,162778	0,8539702	0,4540221	0,8539702	oui	
7	0,4262493	0,4056585	0,4262493	[illegible]	[illegible]	0,4262493	oui	
8	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	non	
9	0,3541643	0,4588769	0,4588769	[illegible]	[illegible]	[illegible]	oui	
10	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	oui	
11	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,2656076	0,0065222	0,7433328	oui	
12	0,8434585	0,8176321	0,8434585	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	
13	0,9344625	0,5671263	0,5671263	0,9344625	0,1900746	0,5671263	non	

Exercice 4-14 *Deviner le plus grand (Version 2 Stratégie 2)*

Les données sont celles de l'exercice précédent (Exercice 4-13).

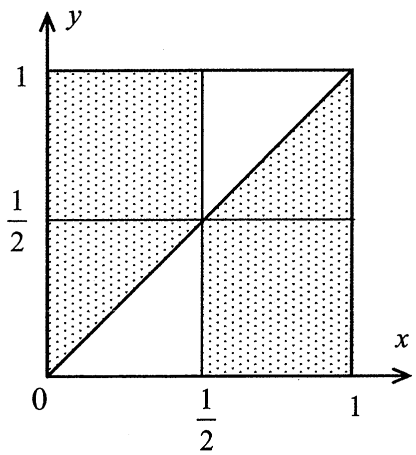
Le joueur adopte la stratégie S_2 :

- **si " nombre lu " $\geq \frac{1}{2}$, alors il déclare que " nombre lu " est le plus grand ;**
- **si " nombre lu " $< \frac{1}{2}$, alors il déclare que c'est l'autre nombre le plus grand.**

Quelle est la probabilité de gagner avec la stratégie S_2 ?

Solution

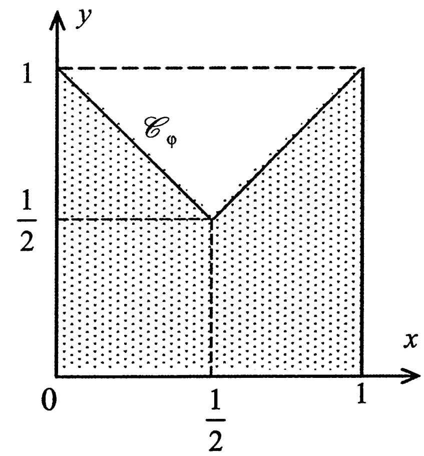
En désignant toujours (cf. Exercice 4-13) par x le " nombre lu " et par y le nombre inconnu restant dans la seconde enveloppe, la stratégie S_2 est gagnante dans deux cas seulement qui s'excluent mutuellement :



- soit $x < \frac{1}{2}$ et $y \geq x$;
- soit $x \geq \frac{1}{2}$ et $x \geq y$.

La mise en œuvre (tout à fait licite) du choix d'un point $M(x, y)$ dans un carré de côté 1, montre que la probabilité de gagner selon la stratégie S_2 (qui est calculée par l'aire de la zone grisée ci-contre) est égale à $\frac{3}{4}$.

Conclusion : la probabilité de gagner avec la stratégie S_2 est $\frac{3}{4}$.

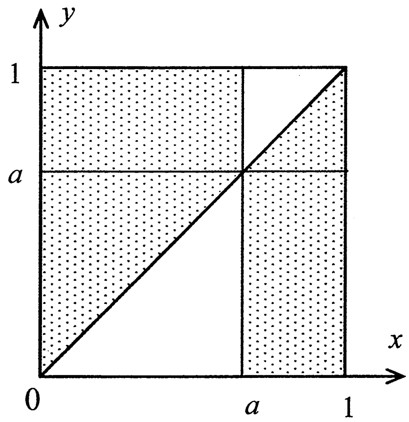


Commentaires

1. Soit X la variable aléatoire : $X =$" **nombre lu** ".
   Il est clair que la probabilité de gagner conditionnelle à $\{X = x\}$ est $\varphi(x)$ définie sur $[0,1]$ par :
   $$\varphi(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{si } x < \frac{1}{2}; \\ x & \text{si } x \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$
   Comme X suit la loi uniforme sur $[0,1]$, on se doit de trouver : $\mathbb{P}(G) = \int_0^1 \varphi(x)\,\mathrm{d}x$.

   Comme l'indique la figure ci-dessus, c'est le cas.

2. Une question naturelle est de se demander s'il est possible d'améliorer la stratégie S_2, par exemple en remplaçant $\frac{1}{2}$ par un réel fixé a dans $[0,1]$, autrement dit en développant la stratégie suivante :



   - si " nombre lu " $> a$, on déclare que le " nombre lu " est le plus grand ;
   - sinon, on change.

   En gardant les notations précédentes, on voit que cette stratégie est gagnante lorsque :

   - soit $x \geq a$ et $y \leq x$;
   - soit $x < a$ et $y \geq x$.

   En raisonnant comme précédemment, la probabilité de gagner avec cette stratégie est (cf. figure ci-dessus) : $1-\left(\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}(1-a)^2\right)$, soit encore : $\frac{3}{4}-\frac{1}{4}(1-2a)^2$.

   En découle que cette probabilité est inférieure ou égale à $\frac{3}{4}$ avec égalité si et seulement si $a=\frac{1}{2}$.

   Si ce résultat nous semble à la portée des élèves, il n'en va plus de même avec le suivant.

3. " *Le* " *borélien optimal*[3]

   Soit A un borélien de $[0,1]$. Toutes choses égales par ailleurs, on définit la stratégie $S(A)$ de la manière suivante :

   - si " le nombre lu " x appartient à A, on déclare x le plus grand ;
   - sinon on change.

   La stratégie $S(A)$ est gagnante si et seulement si :

   $(x \in A \text{ et } y < x) \uplus (x \notin A \text{ et } x \leq y)$ (réunion disjointe).

   La probabilité p_A de gagner avec la stratégie $S(A)$ est donc :

   $p_A = \iint_{\substack{x \in A \\ y < x}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_{\substack{x \notin A \\ x \leq y}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, soit, d'après le théorème de FUBINI :

---

[3] D'après une idée de M. GRANGÉ, Université Bordeaux 1 (le lecteur - s'il le souhaite - pourra adopter l'étude qui suit, au cas (plus simple) d'un intervalle ; avec $A=[a,b]$ ($a<b$) on obtiendra directement $p_A=\frac{1}{2}+a(1-a)-b(1-b)\leq\frac{1}{2}+a(1-a)\leq\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ avec égalité si et seulement si $a=\frac{1}{2}$ et $b=1$)

$$p_A = \int_{x\in A}\left(\int_0^x \mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x + \int_{x\in \overline{A}}\left(\int_x^1 \mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$ ($\overline{A}$ étant le complémentaire de A dans $[0,1]$).

Ainsi, $p_A = \int_A x\,\mathrm{d}x + \int_{\overline{A}} (1-x)\,\mathrm{d}x$.

Avec $\int_A (1-x)\,\mathrm{d}x + \int_{\overline{A}} (1-x)\,\mathrm{d}x = \int_{[0,1]} (1-x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$, d'où l'on tire :

$\int_{\overline{A}} (1-x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} - \int_A (1-x)\,\mathrm{d}x$, il vient $p_A = \frac{1}{2} + \int_A (2x-1)\,\mathrm{d}x$,

que l'on peut écrire ainsi :

$$p_A = \frac{1}{2} + \int_{A\cap\left[0,\frac{1}{2}\right]} (2x-1)\,\mathrm{d}x + \int_{A\cap\left[\frac{1}{2},1\right]} (2x-1)\,\mathrm{d}x .$$

Comme $2x-1 \leq 0$ sur $\left[0,\frac{1}{2}\right]$, on a :

$$p_A \leq \frac{1}{2} + \int_{A\cap\left[\frac{1}{2},1\right]} (2x-1)\,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{2} + \int_{\frac{1}{2}}^1 (2x-1)\,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Observons que l'égalité $p_A = \frac{3}{4}$ ne se produit que lorsque

$\int_{A\cap\left[\frac{1}{2},1\right]} (2x-1)\,\mathrm{d}x = \int_{\left[\frac{1}{2},1\right]} (2x-1)\,\mathrm{d}x$, autrement dit lorsque $A = \left[\frac{1}{2},1\right]$ " à un borélien négligeable près " (i. e. $A\,\Delta\left[\frac{1}{2},1\right]$ est négligeable)

En conclusion, nous voyons que cette étude apporte une réponse partielle à la question (ouverte) :

Au jeu « Deviner le plus grand », existe-t-il une stratégie avec laquelle la probabilité de gagner est strictement plus grande que $\frac{3}{4}$?

Simulation

	1	2	3	4	5	6	7
1	**Deviner le plus grand (version 2 stratégie 2) 20000 simulations**						
2	envel 1	envel 2	nombre lu (on choisit une envel)	nombre non lu	réponse	gagne?	résultat
3	0,9695582	0,2419291	0,9695582	0,2419291	0,9695582	oui	0,7506
4	0,1319599	0,2155701	0,1319599	0,2155701	0,2155701	oui	
5	0,6794093	0,5249835	0,5249835	0,6794093	0,5249835	non	
6	[illegible]	0,3220754	0,7629431	0,3220754	0,7629431	oui	
7	0,3142697	0,5041669	0,5041669	0,3142697	0,5041669	oui	
8	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	oui	
9	0,0367962	0,0047951	[illegible]	[illegible]	[illegible]	non	
10	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	oui	
11	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,9819352	0,9819352	oui	
12	0,4303427	0,2915276	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	
13	0,8154194	0,6654773	0,8154194	0,6654773	0,8154194	oui	
14	0,9045037	0,8636349	0,9045037	0,8636349	0,9045037	oui	

=ALEA()
=ALEA()
=SI(ALEA()<0,5;LC(-2);LC(-1))
=SI(LC(-2)>0,5;LC(-2);LC(-1))
=SI(LC(-1)=MAX(LC(-6):LC(-5));"oui";"non")
=SI(LC(-1)=LC(-2);LC(-3);LC(-2))
=NB.SI(LC(-1):L(19999)C(-1);"oui")/20000

Exercice 4-15 *Somme de trois nombres*

Trois réels étant pris au hasard dans $[0,1]$, indépendamment les uns des autres, on désigne par S la variable aléatoire :

$S =$ " somme des nombres ".

Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire S ?

Solution

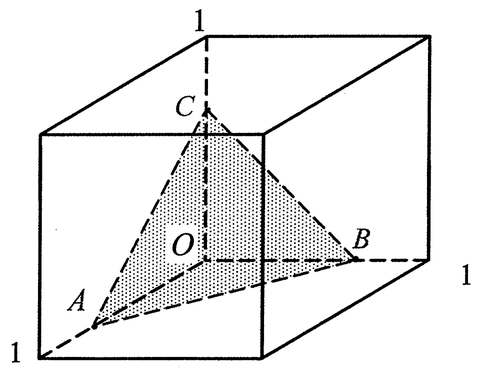
Nous allons déterminer la fonction de répartition F de la variable aléatoire S en tenant compte des remarques suivantes :

- la variable aléatoire S est à valeurs dans $[0,3]$;
- nous pouvons considérer que le choix des réels x, y et z - compte tenu des hypothèses - s'effectue par celui d'un point $M(x,y,z)$ dans le cube $[0,1]\times[0,1]\times[0,1]$, selon la loi uniforme du cube ;
- l'évaluation de la probabilité de l'événement $(S \leq a)$ passe par le calcul du volume du solide S_a de l'espace obtenu comme intersection avec le cube précédent du demi-espace d'équation $x+y+z \leq a$ (a réel appartenant à $[0,3]$).

Après avoir observé que le plan $\mathscr{P}_a$ d'équation $x+y+z=a$ rencontre les axes de coordonnées aux points $A(a,0,0)$, $B(0,a,0)$ et $C(0,0,a)$ et que, pour $a>0$, le demi-espace d'équation $x+y+z \leq a$ est parmi les deux demi-espaces limités par le plan $\mathscr{P}_a$ celui qui contient l'origine, nous sommes amenés à distinguer trois cas.

- **$0 \leq a \leq 1$**

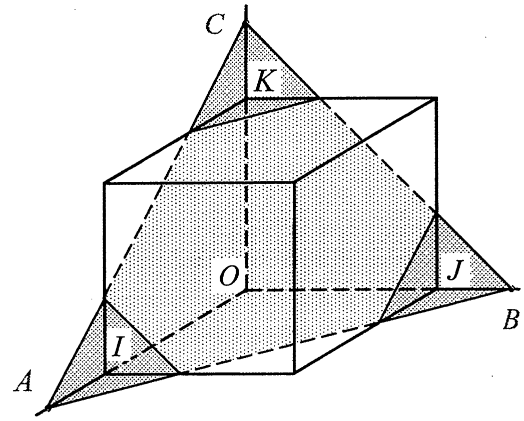
  Le solide S_a est le tétraèdre trirectangle $OABC$ de sommet O, dont le volume est (immédiatement[4]) calculé par $\frac{1}{6}a^3$. Ainsi $F(a)=\frac{1}{6}a^3$.



[4] Cette phrase a été écrite avant le 17 juin 2003.

➤ **$1 < a \leq 2$**

Cette double inégalité assure que (AB) - par exemple - rencontre le cube ; dès lors il n'y a aucune difficulté à représenter le solide S_a. Comme le solide S_a est obtenu en amputant le tétraèdre $OABC$ des trois "petits" tétraèdres trirectangles isocèles de sommets I, J et K, son volume est :



$\dfrac{1}{6}a^3 - 3\times\left(\dfrac{1}{6}(a-1)^3\right)$ (puisque, par exemple $IA = a-1$).

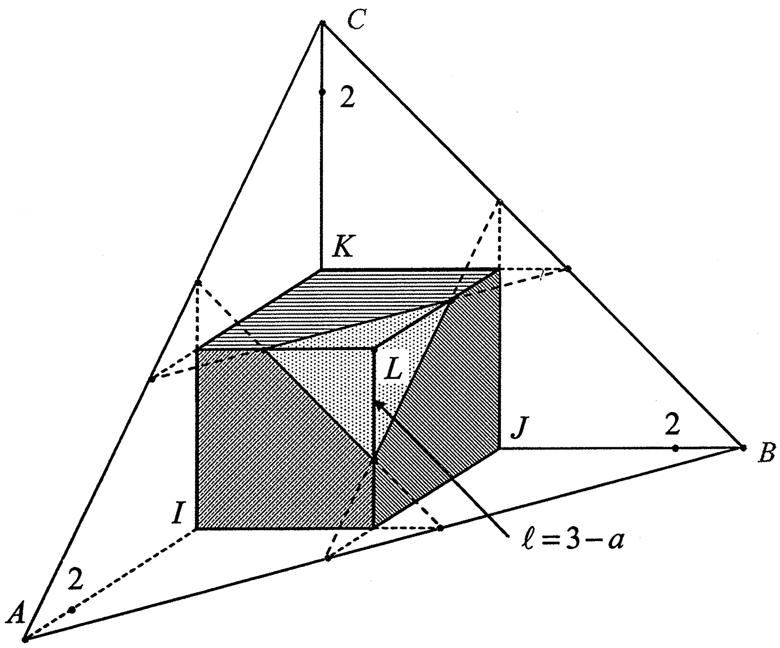
Par suite, pour $1 < a \leq 2$: $F(a) = \dfrac{1}{6}a^3 - \dfrac{1}{2}(a-1)^3$.

➤ **$2 < a \leq 3$**

C'est en représentant les intersections du plan $\mathscr{P}_a$ avec les plans $x=1$, $y=1$ et $z=1$ (voir figure ci-dessous) que l'on obtient la section du cube avec ce plan. Le solide S_a est alors obtenu en tronquant le cube du "petit" tétraèdre trirectangle isocèle de sommet, le sommet L du cube.

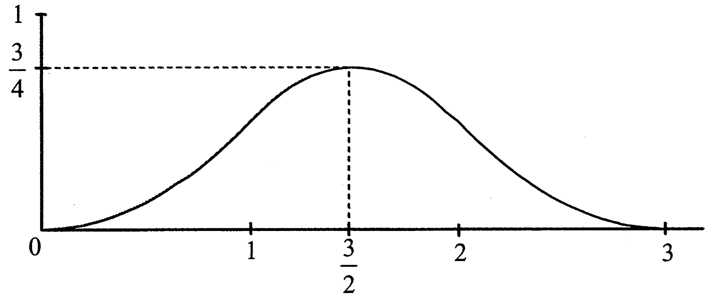
L'arête au sommet de ce tétraèdre étant égal à $3-a$ (voir commentaire 1), son volume est $\dfrac{1}{6}(3-a)^3$ et par suite celui de S_a est $1-\dfrac{1}{6}(3-a)^3$.

Il en découle que pour $2 < a \leq 3$: $F(a) = 1-\dfrac{1}{6}(3-a)^3$.



La fonction de densité f est par suite définie sur $[0,3]$ par :

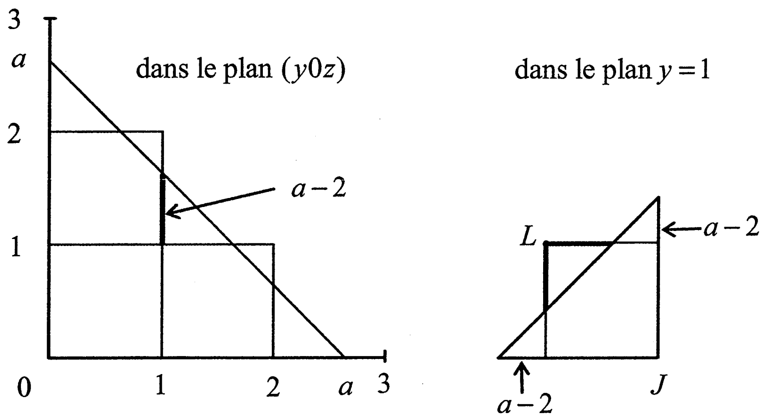
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}x^2 & \text{si } x\in[0,1]\,;\\ \dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{3}{2}(x-1)^2 & \text{si } x\in]1,2]\,;\\ \dfrac{1}{2}(3-x)^2 & \text{si } x\in]2,3].\end{cases}$$



Commentaires

1. *Un peu de Géométrie dans l'Espace*

- Un tétraèdre $OABC$ est dit trirectangle isocèle de sommet O lorsque :
  - les droites (OA), (OB) et (OC) sont deux à deux orthogonales ;
  - $OA=OB=OC$ (cette longueur commune est appelée arête au sommet).
- Lorsque $2<a\le 3$, le calcul de l'arête au sommet du tétraèdre trirectangle isocèle de sommet L peut être effectué à l'aide de deux sections planes :



D'où la longueur de l'arête : $1-(a-2)=3-a$.

2. *Généralisation*

La somme de n variables aléatoires indépendantes ($n\ge 2$), chacune de loi uniforme sur $[0,1]$ est une variable aléatoire à valeur dans $[0,n]$ dont la densité f_n est donnée par :

$$f_n(x)=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{\left((x-k)^+\right)^{n-1}}{(n-1)!}$$

où, pour un réel x quelconque, x^+ désigne $\max(x,0)$.

Ce résultat s'obtient par récurrence sur l'entier naturel n, à l'aide d'un produit de convolution (pour une démonstration complète, voir par exemple [16]).

Exercice 4-16 *Le problème de la rencontre généralisée*

Soit t un réel fixé ($0 \leq t \leq 1$).

On choisit au hasard n nombres réels $t_1, t_2, ..., t_n$ dans $[0,1]$ indépendamment les uns des autres, et l'on désigne par I_k (pour $k = 1, 2, ..., n$) l'intervalle défini par :

- **si $t_k + t \leq 1$ alors $I_k = [t_k, t_k + t]$;**
- **si $t_k + t > 1$ alors $I_k = [t_k, 1]$.**

Il s'agit de calculer la probabilité de l'événement E :

« les intervalles $I_1, I_2, ..., I_n$ ont au moins un point en commun ».

1- Montrer que $E = E_0 \cup E_1 \cup ... \cup E_n$ où :

- **E_0 est l'événement : « $t_k \geq 1 - t$ » pour tout k ($1 \leq k \leq n$) ;**
- **E_i, pour $i = 1, 2, ..., n$ est l'événement :**
  « $t_i < 1 - t$ et $t_k \in [t_i, t_i + t]$ » pour tout k ($1 \leq k \leq n$).

2- Calculer les probabilités des événements E_0, E_i ($1 \leq i \leq n$), $E_0 \cap E_i$ ($1 \leq i \leq n$) et $E_i \cap E_j$ (pour $i \neq j$ dans $[\![1, n]\!]$).

En déduire que la probabilité de E est $t^n + n(1-t)t^{n-1}$.

3- Poser et résoudre le problème de la rencontre (cf. exercice 4-8) généralisé à n personnes ($n \geq 2$), avec un temps d'attente quelconque t (t en heure, $0 < t < 1$).

Solution

1- Évident ; quelques détails cependant pour les plus exigeants :

- E_0 est contenu dans E (rien à dire) ;
- $E \cap \overline{E_0}$ ($\overline{E_0}$: complémentaire de E_0) n'est autre que l'événement : « il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que pour tout $k = 1, 2, ..., n$, t_k appartient à l'intervalle I_i ».

  Autrement dit $E \cap \overline{E_0} = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$, d'où...

2- Les réels $t_1, t_2, ..., t_n$ étant choisis indépendamment les uns des autres dans $[0,1]$ selon la loi uniforme $\mathcal{U}$ dans $[0,1]$, nous avons :

- $\mathbb{P}(E_0) = \mathcal{U}\left(\bigcap_{i=1}^{n} (t_i \in [1-t, 1])\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathcal{U}([1-t, 1]) = t^n$;
- $\mathbb{P}(E_i) = \mathcal{U}\left((t_i \in [0, 1-t[) \cap \left(\bigcap_{k=1}^{n} (t_k \in [t_i, t_i + t])\right)\right)$;

  $\mathbb{P}(E_i) = \mathcal{U}([0, 1-t[) \times \prod_{k=1}^{n} \mathcal{U}(t_k \in [t_i, t_i + t])$.

On a $\mathcal{U}([0,1-t]) = 1-t$ et par ailleurs $\mathcal{U}\left(t_k \in [t_i, t_i + t]\right) = \begin{cases} 1 \text{ si } k = i\,; \\ \text{t si } k \neq i. \end{cases}$

D'où $\mathbb{P}(E_i) = (1-t)t^{n-1}$.

- Les événements E_0 et E_i sont incompatibles pour $i = 1, 2, ..., n$.
- Quant à l'événement $E_i \cap E_j$, avec i et j distincts dans $[\![1,n]\!]$, il est manifestement contenu dans l'événement $(t_i = t_j)$ de probabilité nulle (cf. paragraphe 1-3-2 page 157).

Il résulte de la proposition du paragraphe 1-3-3 (page 158) que la probabilité de E est égale à $t^n + n(1-t)t^{n-1}$.

3- • Voici l'énoncé attendu :

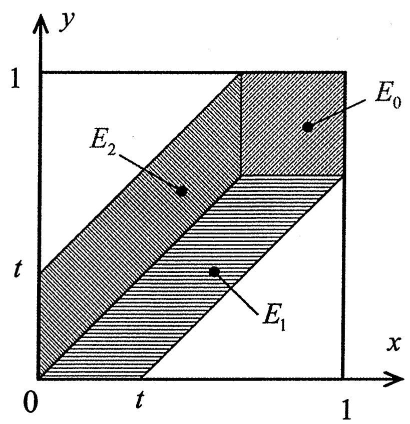
Soit un entier n supérieur ou égal à 2 ; n personnes se rendent en un même lieu entre 12 heures et 13 heures dans les conditions suivantes :

- *les instants d'arrivée des personnes sont supposés choisis au hasard entre 12 heures et 13 heures indépendamment les uns des autres ;*
- *chaque personne attend t heures ($0 < t < 1$) sauf si elle arrive après ($13 - t$) heures auquel cas, elle s'en va à 13 heures.*

Quelle est la probabilité que ces personnes se rencontrent ?

• Quant à la résolution de ce problème de la rencontre généralisé, elle découle immédiatement de ce qui précède en désignant par $12+t_1, 12+t_2, ..., 12+t_n$ les instants d'arrivée (en heures) des n personnes : c'est on ne peut plus clair.

Commentaires

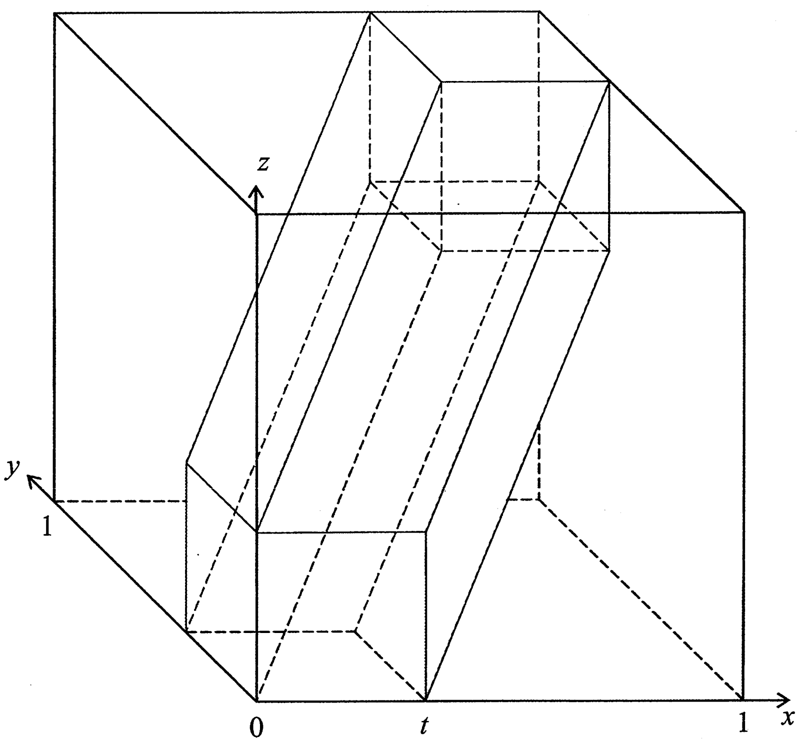


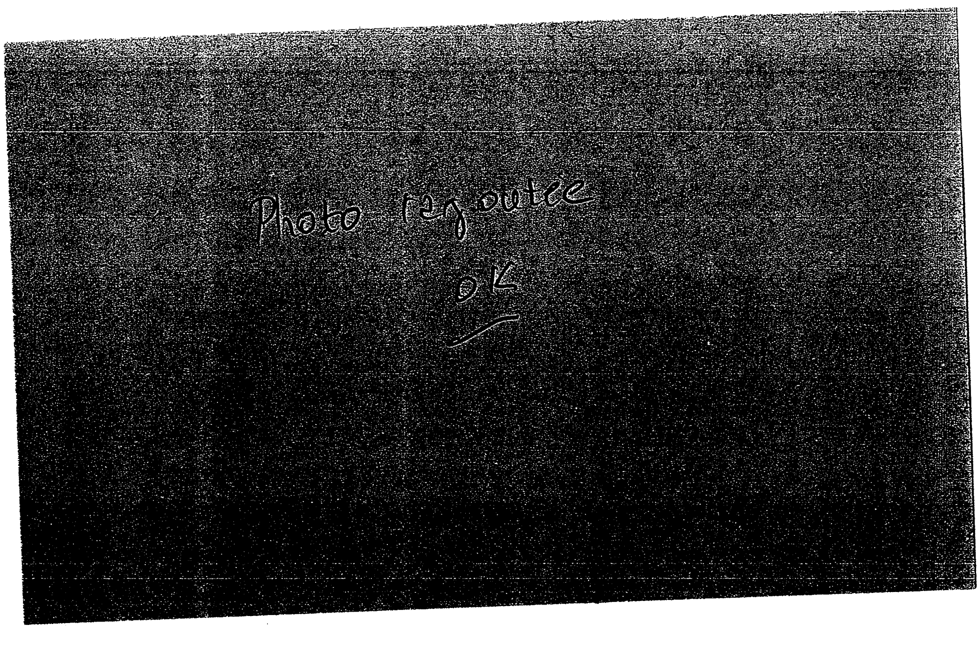
1. Lorsque $n = 2$, le résultat précédemment obtenu : $t^2 + 2(1-t)t$ ne diffère (heureusement) pas de celui fourni par les probabilités géométriques à l'exercice 4-8 : $1-(1-t)^2$.

Trouver une explication à cette égalité - qui ne soit pas réduite au seul calcul - renvoie à l'interprétation graphique des événements E_0, E_1 et E_2 (cf. figure ci-contre) ce qui, à nos yeux, n'est pas une activité décalée dans la mise en œuvre de la propriété : choisir au hasard de deux réels t_1, t_2 dans [0,1] indépendamment l'un de l'autre, revient à choisir le point $M(t_1, t_2)$ au hasard dans le carré $[0,1] \times [0,1]$.

2. Inspirés par la remarque précédente, nous cédons à la tentation d'une semblable démarche dans le cas $n = 3$. Ce parcours a ses exigences comme le confirme la représentation graphique ci-dessous, où chacun reconnaîtra :

- l'événement E_0 (cube en rouge de côté égal à t) ;
- les événements E_1, E_2 et E_3 (prismes obliques à base carrée de hauteur $(1-t)$). On notera la représentation non conventionnelle du repère qui laisse deviner - à juste titre - que la figure ne saurait être réalisée en un tournemain (la réclamer en terminale relève de compétences déplacées concernant les exigences en géométrie " spatiale ").



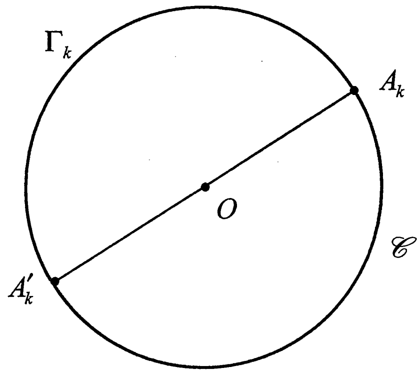


Exercice 4-17 *n points sur un même demi-cercle*

Soit un entier n supérieur ou égal à 3. On choisit au hasard et indépendamment les uns des autres n points $A_1, A_2, ..., A_n$ sur un cercle $\mathscr{C}$.

Quelle est la probabilité que ces points appartiennent à un même demi-cercle ?

Solution



- Pour tout entier k appartenant à $[\![1,n]\!]$, désignons par Γ_k le demi-cercle fermé (i.e. extrémités comprises) obtenu en parcourant le cercle $\mathscr{C}$ dans le sens trigonométrique à partir du point A_k et par E_k l'événement : " les points $A_1, A_2, ..., A_n$ appartiennent au même demi-cercle Γ_k ".

  Il est clair alors que l'événement E : " les points $A_1, A_2, ..., A_n$ appartiennent au même demi-cercle " est tel que : $E = E_1 \cup E_2 \cup ... \cup E_n$.

  La solution est organisée par le calcul des probabilités des événements E_k et $E_k \cap E_l$ (avec $k \neq l$).

- *Calcul de* $\mathbb{P}(E_k)$ $(k \in [\![1,n]\!])$

  Notons en premier lieu que la probabilité de l'événement $(A_i \in \Gamma_k)$ (pour i et k dans $[\![1,n]\!]$) est égale à : $\frac{1}{2}$ si $i \neq k$ et 1 si $i = k$.

  Avec $E_k = \bigcap_{i=1}^{n} (A_i \in \Gamma_k)$ et compte tenu de l'indépendance des événements $(A_i \in \Gamma_k)$ pour i dans $[\![1,n]\!]$, on en déduit : $\mathbb{P}(E_k) = \frac{1}{2^{n-1}}$.

- *Calcul de* $\mathbb{P}(E_k \cap E_l)$ $(k \neq l)$

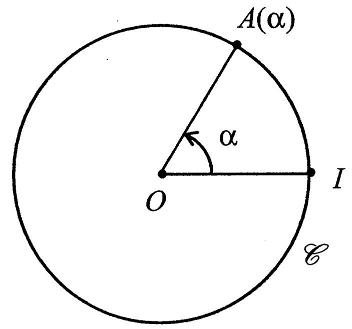
  L'événement $E_k \cap E_l$ implique $A_k \in \Gamma_l$ et $A_l \in \Gamma_k$, ce qui ne peut se produire que dans deux cas : soit $A_l = A_k$, soit $A_l = A'_k$ (point diamétralement opposé à A_k sur le cercle $\mathscr{C}$).

  Ces deux événements étant chacun de probabilité nulle (voir commentaire 2), il en découle que $\mathbb{P}(E_k \cap E_l) = 0$, pour $k \neq l$.

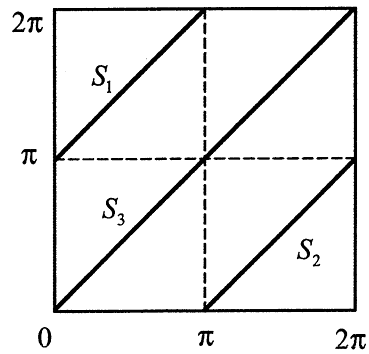
- Nous savons alors que, dans ces conditions (cf. la proposition du chapitre 4, page 158) la probabilité de E est la somme des probabilités des événements E_k $((1 \leq k \leq n)$, d'où le résultat final : $\mathbb{P}(E) = \frac{n}{2^{n-1}}$.

Commentaires

1. La situation suivante : $A_2 = A_1'$ et $A_2 = A_3 = ... = A_n$, montre que l'événement $E_k \cap E_l$ (avec $k \neq l$) n'est pas nécessairement réduit à " $A_k = A_l$ ".



2. De la définition même de la loi uniforme sur un cercle, choisir un point A au hasard sur le cercle $\mathscr{C}$, c'est choisir au hasard un réel α dans $[0,2\pi[$ et lui associer le point $A(\alpha)$ de $\mathscr{C}$ tel que $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA(\alpha)}) = \alpha$, I étant un point de $\mathscr{C}$ fixé à l'avance[5].
   Le choix au hasard de deux points de $\mathscr{C}$ indépendamment l'un de l'autre revient donc au choix d'un point $M(\alpha,\beta)$ dans le carré $[0,2\pi[\times[0,2\pi[$ selon la loi uniforme de ce carré.



   Nous tiendrons pour évident que :
   - d'une part, dans un tel choix la probabilité de l'événement : « M appartient à la réunion des segments S_1, S_2 et S_3 » est égale à zéro ;
   - d'autre part, les points $A(\alpha)$ et $B(\beta)$ du cercle $\mathscr{C}$ sont confondus ou diamétralement opposés sur $\mathscr{C}$ si et seulement si le point $M(\alpha,\beta)$ appartient à $S_1 \cup S_2 \cup S_3$.

   Voilà donc, en toute rigueur justifié que l'union des événements $(A_k = A_l) \cup (A_l = A_k')$ est de probabilité nulle.

Simulation

Nous traiterons ici le cas $n = 5$.

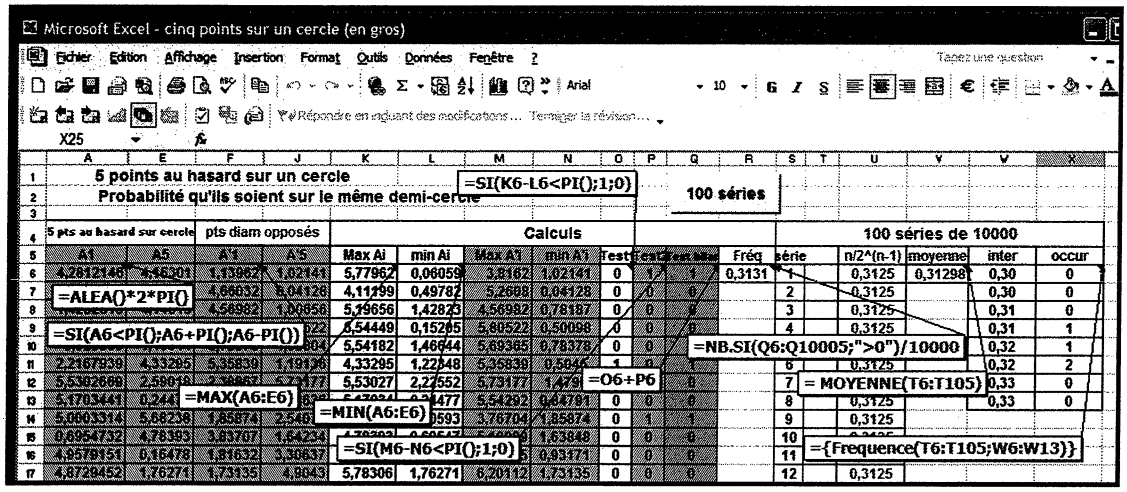
Le choix de cinq points au hasard et indépendamment les uns des autres sur le cercle $\mathscr{C}$ est effectué par le choix dans les mêmes conditions de cinq réels $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_5$ dans l'intervalle $[0,2\pi[$: pour $i = 1, 2, ..., 5$, θ_i est la mesure dans $[0,2\pi[$ de l'angle $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA_i})$ (cf. commentaire 2).

Pour installer le protocole de simulation, il nous faut élucider la question :
« *Par quelle condition (portant sur les nombres* $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_5$*) traduire la propriété : " les cinq points sont sur un même demi-cercle " ?* ».

[5] C'est le point de vue qui sera retenu dans la simulation.

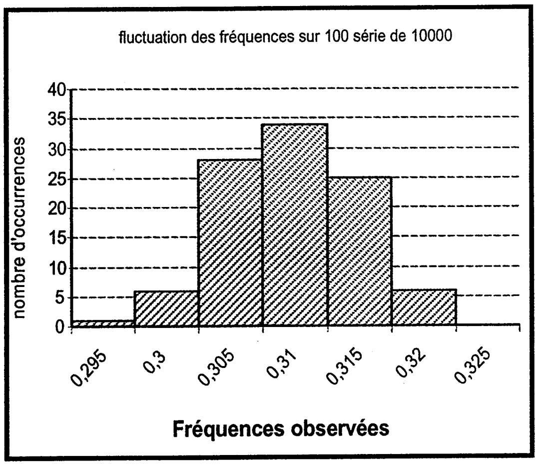
Nous ferons deux remarques :

1. Les cinq points appartiennent à un même demi-cercle ne contenant pas le point I, (sauf peut-être à ses extrémités) si et seulement si : $\max\limits_{1\leq i\leq 5}\theta_i \leq \min\limits_{1\leq i\leq 5}\theta_i + \pi$.
2. L'image d'un demi-cercle contenant I par la symétrie centrale S_O est un demi-cercle ne contenant pas I - sauf peut-être à ses extrémités.
   D'où l'idée d'introduire les symétriques A_i' des points A_i par S_O et les mesures θ_i' dans l'intervalle $[0, 2\pi[$ des angles $\left(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA_i'}\right)$ qui sont donc définies ainsi :
   $$\begin{cases} \text{si } 0 \leq \theta_i \leq \pi \text{ alors } \theta_i' = \theta_i + \pi\,; \\ \text{si } \pi < \theta_i < 2\pi \text{ alors } \theta_i' = \theta_i - \pi. \end{cases}$$
   La condition d'appartenance des cinq points à un même demi-cercle est alors :
   $$\max_{1\leq i\leq 5}\theta_i - \min_{1\leq i\leq 5}\theta_i \leq \pi \quad \text{ou} \quad \max_{1\leq i\leq 5}\theta_i' - \min_{1\leq i\leq 5}\theta_i' \leq \pi.$$
   Cela permet de réaliser la feuille de calcul qui suit.

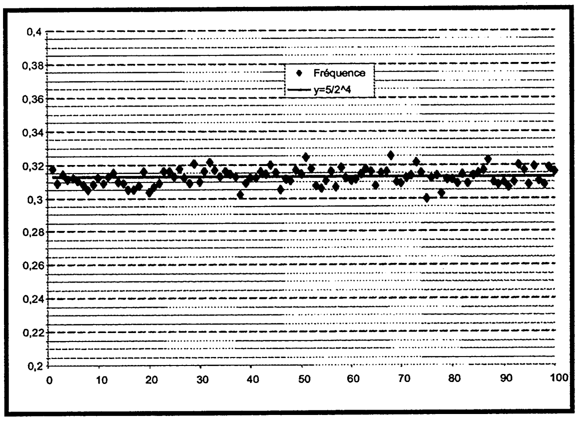


Note : les colonnes B, C, D, G, H et I correspondant aux points A_2, A_3, A_4, A_2', A_3' et A_4' ont été masquées afin d'obtenir une copie d'écran plus lisible, mais elles existent bel et bien.

Précisions : Le choix de 5 points au hasard sur le cercle est simulé 10 000 fois et cette expérience est répétée 100 fois à l'aide d'une macro. Le graphique 1 représente ainsi la répartition des 100 fréquences observées d'apparition de l'événement étudié et le graphique 2 le nuage de ces fréquences autour de la valeur théorique.



Graphique 1



Graphique 2

Antoine COURNOT (1801-1877)

« Les explications que j'ai données... sur le double sens du mot de probabilité, qui tantôt se rapporte à une certaine mesure de nos connaissances, et tantôt à une mesure de possibilité des choses, indépendamment de la connaissance que nous en avons ; ces explications, dis-je, me semblent propres à résoudre les difficultés qui ont rendu jusqu'ici suspecte à de bons esprits toute la théorie de la probabilité mathématique. »

(Exposition de la théorie des chances et de la probabilité - 1843)

Exercices 4-18 à 4-21 *La corde de BERTRAND*

C'est dans son ouvrage « *Calcul des probabilités* » publié en 1889 que Joseph BERTRAND (1822-1900) discute du problème suivant :

> ***« Une corde est tracée au hasard sur un cercle.***
> ***Quelle est la probabilité qu'elle soit plus grande que le côté du triangle équilatéral inscrit dans le cercle ? »***

Nous désignerons par E cet événement et considérerons dans toute la suite un cercle Γ, de centre O et de rayon R.

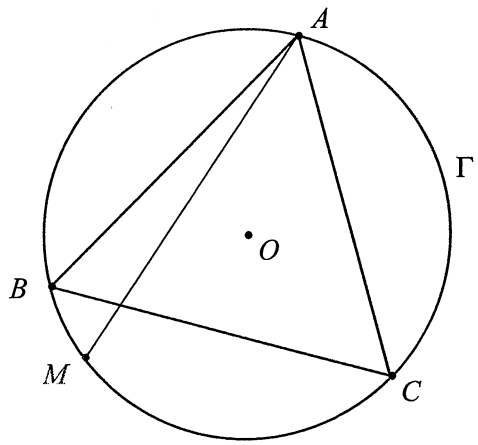
L'objectif de cette série d'exercices (4-18 à 4-21) est d'examiner divers protocoles permettant de " tracer au hasard une corde d'un cercle " et d'évaluer pour chacun d'eux la probabilité de l'événement E.

Exercice 4-18 *Une extrémité est fixée*

Une extrémité A de la corde est fixée sur le cercle Γ et l'autre extrémité est choisie au hasard sur Γ (i.e. selon la loi uniforme sur Γ).

Solution

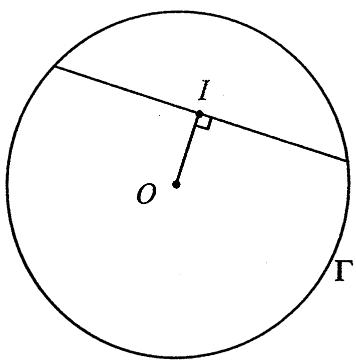
Construisons les points B et C de Γ tels que le triangle ABC soit équilatéral (de sens direct par exemple).



Nous postulerons qu'il est d'une évidence première que, pour $M \in \Gamma$, la corde $[AM]$ est plus longue que le côté du triangle équilatéral ABC si et seulement si M appartient au " petit " arc géométrique $\overset{\frown}{BC}$, d'extrémités B et C.

La probabilité de E est donc $\mathcal{U}_\Gamma(\overset{\frown}{BC}) = \dfrac{1}{3}$.

Dans les exercices 4-19 et 4-20, nous ferons appel à la propriété géométrique suivante, illustrée par la figure ci-contre :
Soit I un point intérieur à Γ distinct de O ; il existe une unique corde de Γ admettant I comme milieu.
On peut donc convenir que tout protocole de choix aléatoire d'un point I dans le disque privé de O (notation D_O) est un protocole de choix aléatoire de la corde de milieu I.

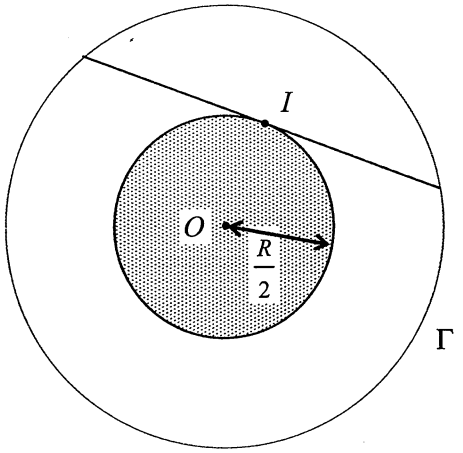


Exercice 4-19 *(Protocole 2)*

Le point I est choisi dans D_O selon la loi uniforme de D_O .

Solution

➢ *Préliminaires géométriques[6] (laissés au lecteur)*



- Toute tangente au cercle de rayon $\frac{R}{2}$ a pour longueur le côté du triangle équilatéral inscrit dans Γ.
- La longueur de la corde de milieu I décroît avec OI.

➢ *Calcul de la probabilité de E*

La corde de milieu I est donc plus grande que le côté du triangle équilatéral inscrit dans Γ si et seulement si I appartient au disque de centre O et de rayon $\frac{R}{2}$ (privé du point O) noté Δ_O.

Le point I étant choisi selon la loi uniforme dans D_O, la probabilité de E est donc :

$$\frac{\text{aire}(\Delta_O)}{\text{aire}(D_O)}, \text{ soit : } \mathbb{P}(E) = \frac{\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2}{\pi R^2} = \frac{1}{4}.$$

Exercice 4-20 *(Protocole 3)*

Le milieu I de la corde est choisi au hasard de façon que la distance OI suive la loi uniforme sur $]0,R[$.

Solution

D'après les remarques de l'exercice 4-19, avec ce protocole, la probabilité de E est égale à $\frac{\frac{R}{2}}{R} = \frac{1}{2}$.

[6] Le rôle des calculs (longueurs de la corde de milieu I , côté du triangle équilatéral, etc.) est secondaire.

Exercice 4-21 *(Protocole 4)*

Le plan du disque est identifié au plan complexe par le choix d'un repère orthonormal direct $(O,\vec{i},\vec{j})$.

La construction " au hasard " d'une corde de Γ s'effectue alors en deux temps :

1. **On choisit au hasard dans $[0,2\pi[$ deux réels x et y indépendamment l'un de l'autre.**
2. **On trace la corde de Γ ayant pour extrémités les points M et N d'affixes Re^{ix} et Re^{iy}.**

Solution

➢ *Préliminaires géométrique (laissés au lecteur)*

- La longueur du côté du triangle équilatéral inscrit dans le cercle de rayon R est $R\sqrt{3}$.
- Avec $M(Re^{ix})$ et $N(Re^{iy})$, la distance MN est : $MN=2R\left|\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\right|$.

  Cela résulte d'un calcul, toujours le même :
  $$e^{ix}-e^{iy}=e^{i\left(\frac{x+y}{2}\right)}\left(e^{i\left(\frac{x-y}{2}\right)}-e^{-i\left(\frac{x-y}{2}\right)}\right)=2i\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)e^{i\left(\frac{x+y}{2}\right)}.$$

➢ *Modélisation avec la loi uniforme dans le carré* $[0,2\pi[\times[0,2\pi[$

Les conditions définissant le choix aléatoire des réels x et y permettent de l'expliciter comme choix d'un point (x,y) dans le carré $[0,2\pi[\times[0,2\pi[$, selon la loi uniforme dans ce carré.

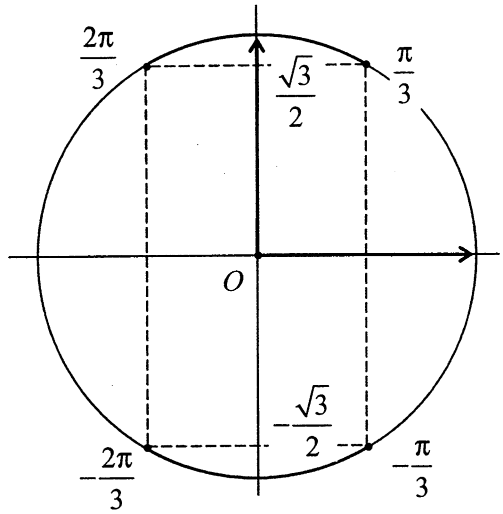
Sous ce point de vue, l'événement E est alors :
$$E=\left\{(x,y)\in[0,2\pi[\times[0,2\pi[\ /\ \left|\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\right|\geq\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}.$$

➢ *Calcul de la probabilité de* E

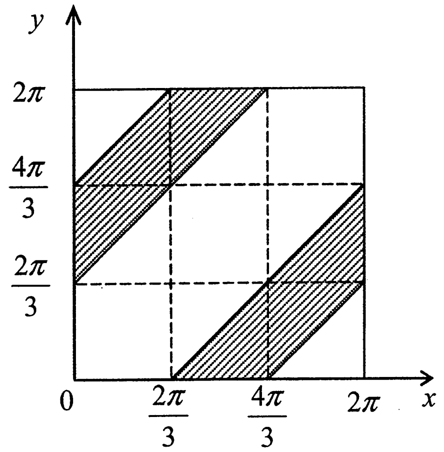
- Avec $0\leq x\leq 2\pi$ et $0\leq y\leq 2\pi$, nous avons : $-\pi<\frac{x-y}{2}<\pi$.
- Alors, comme l'illustre la représentation graphique suivante, viennent les équivalences :

$$\left|\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\right| > \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{3} < \frac{x-y}{2} < \frac{2\pi}{3} \\ \text{ou} \\ -\frac{2\pi}{3} < \frac{x-y}{2} < -\frac{\pi}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{2\pi}{3} < y < x + \frac{4\pi}{3} \\ \text{ou} \\ x - \frac{4\pi}{3} < y < x - \frac{2\pi}{3}. \end{cases}$$



Ceci conduit à la représentation graphique de E dans le carré $[0,2\pi[\times[0,2\pi[$ (zone hachurée), d'où il découle que la probabilité de E est $\frac{1}{3}$ (par simple décompte de demi-carreaux : $\frac{6}{2\times 9} = \frac{1}{3}$).



Commentaires

1. Comme nous allons le voir, on gagne en confort avec la méthode déjà utilisée dans les exercices 4-12 (" Deux points sur un même quart de cercle ") et 4-17 (" n points sur un même demi-cercle ").

   Soit M' et N' les points de Γ définis par $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = (\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{ON'}) = \frac{\pi}{3}$ $[2\pi]$ et par Γ_M et Γ_N les " petits " arcs de cercle d'extrémités respectives M, M', N et N'.

   Alors, il est immédiat de constater que :

   - la corde $[MN]$ est plus *petite* que le côté du triangle équilatéral inscrit dans Γ si et seulement si $M \in \Gamma_N$ ou $N \in \Gamma_M$;
   - les événements $(M \in \Gamma_N)$ et $(N \in \Gamma_M)$ sont chacun de probabilité $\frac{1}{3}$ et leur intersection est de probabilité nulle car confondue avec l'événement $(M = N)$.

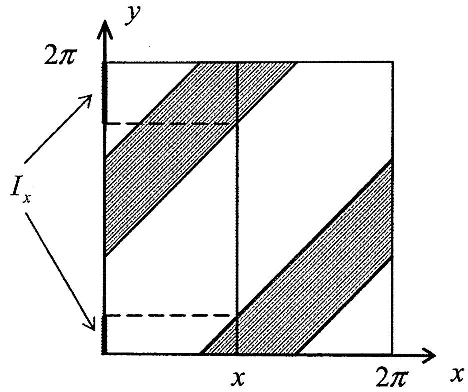
   On en déduit la probabilité du *complémentaire* de E : $\frac{2}{3}$, puis celle de E : $\frac{1}{3}$.

2. Interprétons dans le contexte que nous venons d'introduire le résultat obtenu dans l'exercice 4-18.
   Dire, qu'une extrémité étant fixée, lorsque l'on choisit l'autre extrémité au hasard sur Γ la probabilité que la corde ainsi définie ait une longueur plus grande que *etc.* est

égale à $\frac{1}{3}$, signifie que :

pour tout x fixé de $[0,2\pi[$, *la probabilité uniforme sur* $[0,2\pi[$ *de l'événement* I_x *est égale à* $\frac{1}{3}$, *avec :* $I_x = \{y \in [0,2\pi[/(x,y) \in E\}$

(cf. illustration ci-contre).



Par suite, avec $\mathbb{P}(E) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_E \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ et le théorème de FUBINI $\iint_E \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi} \left(\int_{I_x} \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$, il vient :

$$\mathbb{P}(E) = \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{I_x} \mathrm{d}y \right) \right) \mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{3} \mathrm{d}x = \frac{1}{3}.$$

Voilà donc expliqué - sans référence aux lois de probabilité conditionnelle selon un choix délibéré de notre part - pourquoi, compte tenu de l'exercice 4-18, le protocole de choix au hasard de la corde que nous avons adopté ici ne pouvait conduire qu'à la probabilité $\frac{1}{3}$.

Joseph BERTRAND (1822-1900)

« *Comment oser parler des lois du hasard ? Le hasard n'est-il pas l'antithèse de toute loi ?* »

(Calcul des probabilités 1889)

Exercices 4-22 à 4-26 *Les triangles acutangles (premier épisode)*

Dans les exercices 4-22 à 4-26, on se propose :

- **d'étudier divers modèles de choix aléatoire des angles d'un triangle ;**
- **et pour chacun d'eux, d'évaluer la probabilité de l'événement « le triangle est acutangle » (i.e. le triangle a tous ses angles aigus).**

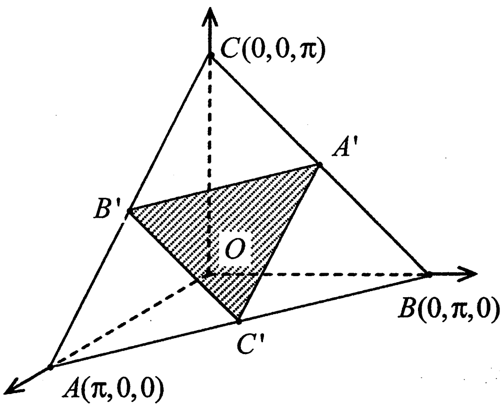
En désignant par x, y et z les angles du triangle mesurés en radian, il est clair que la question peut être formulée ainsi : « ***Ayant défini un modèle de choix aléatoire de trois réels*** x, y ***et*** z ***tels que*** $0<x<\pi$, $0<y<\pi$ $0<z<\pi$, $x+y+z=\pi$, ***quelle est la probabilité de l'événement*** E ***défini par :***
$E=\left(x<\frac{\pi}{2}\right)\cap\left(y<\frac{\pi}{2}\right)\cap\left(z<\frac{\pi}{2}\right)$? »

Exercice 4-22 *Une modélisation dans l'espace*

L'espace est muni d'un repère orthonormal.

1. **Représenter graphiquement le domaine τ de l'espace défini par :**
$$\tau=\{M(x,y,z)\,/\,0<x<\pi,\ 0<y<\pi,\ 0<z<\pi,\ x+y+z=\pi\}.$$
2. **Calculer la probabilité de E sachant que le choix aléatoire des angles x, y et z est modélisé par le choix d'un point $M(x,y,z)$ dans le domaine τ selon la loi uniforme dans ce domaine.**

Solution



1. Le domaine τ est l'intérieur du triangle ABC représenté graphiquement dans la figure ci-contre.
2. L'événement E est alors l'intérieur du triangle $A'B'C'$, triangle des milieux du triangle ABC.
   En effet, examinons par exemple l'intersection du triangle τ par le demi-espace d'équation $x<\frac{\pi}{2}$ qui - notons le, contient l'origine.

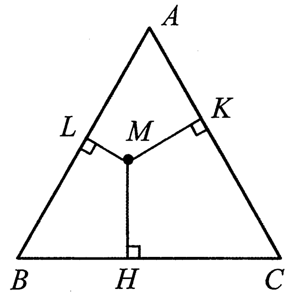
   Comme le plan d'équation $x=\frac{\pi}{2}$ est parallèle au plan (Oyz) et de plus contient les points B' et C', cette intersection n'est autre que le quadrilatère $BCB'C'$ (qui se trouve, en l'occurrence, être un trapèze).

   Un calcul d'aire élémentaire livre alors $\mathbb{P}(E)=\frac{1}{4}$.

Exercice 4-23 *Une modélisation dans le plan : le théorème de Viviani*

1. **Soit ABC un triangle équilatéral, M un point intérieur au triangle et $x = MH$, $y = MK$, $z = ML$ (voir figure).**

   Montrer que $x+y+z$ est égal à la hauteur du triangle équilatéral.



2. **On modélise alors le choix des réels x, y et z de la manière suivante :**
   - **on donne un triangle équilatéral de hauteur π ;**
   - **on choisit au hasard un point M à l'intérieur du triangle ;**
   - **on pose $x = MH$, $y = MK$ et $z = ML$ (cf. figure précédente).**

Quelle est dans ce cas la probabilité de E ?

Solution

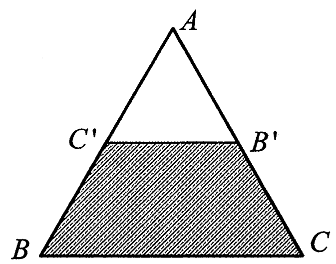
1. Désignons par a le côté du triangle équilatéral ABC et par h sa hauteur. L'égalité : $\text{aire}(ABC) = \text{aire}(MBC) + \text{aire}(MCA) + \text{aire}(MAB)$ fournit

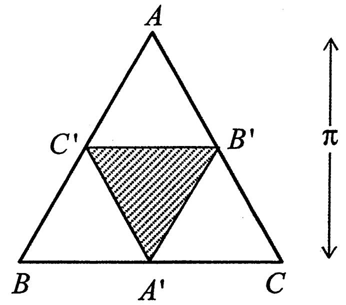
   $$\frac{1}{2} \times a \times h = \frac{1}{2} \times a \times x + \frac{1}{2} \times a \times y + \frac{1}{2} \times a \times z,$$

   soit $x + y + z = h$

   (résultat pompeusement appelé « théorème » de VIVIANI).

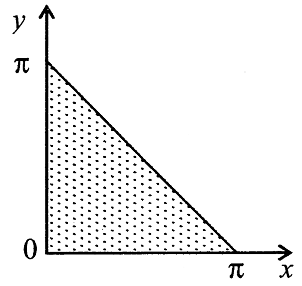
2. Dans cette modélisation, l'inégalité $\left(x < \frac{\pi}{2}\right)$ - par exemple - signifie que le point M est choisi à l'intérieur du trapèze $BC'B'C$ (A', B', et C' désignant les milieux des côtés du triangle ABC).





L'évènement E se représente alors par l'intérieur du triangle $A'B'C'$, d'où une nouvelle fois : $\mathbb{P}(E) = \frac{1}{4}$.

Exercice 4-24 *Une autre modélisation dans le plan*

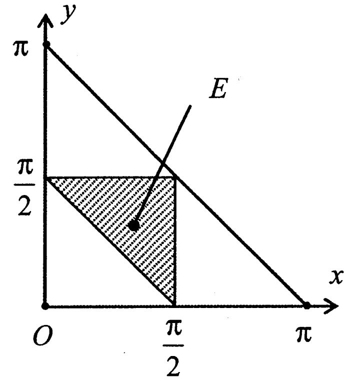


Le choix des réels x, y et z est modélisé ainsi :

- **on choisit un point $m(x,y)$ au hasard dans le triangle représenté ci-contre ;**
- **on pose $z=\pi-(x+y)$.**

Quelle est la probabilité de E ?

Solution



Avec $z=\pi-(x+y)$, l'événement E est donc :

$$E=\left(x<\frac{\pi}{2}\right)\cap\left(y<\frac{\pi}{2}\right)\cap\left(x+y>\frac{\pi}{2}\right).$$

Le point $m(x,y)$ étant choisi selon la loi uniforme dans le triangle de référence, la représentation graphique ci-contre fait conclure à $\mathbb{P}(E)=\frac{1}{4}$ (encore).

Exercice 4-25 Une simulation

Des raisons de syntaxe[7] conduisent à adopter la mesure des angles du triangle α, β et γ en degrés : $0<\alpha<180$, $0<\beta<180$, $0<\gamma<180$, $\alpha+\beta+\gamma=180$.

On modélise alors le choix aléatoire des réels α, β et γ de la façon suivante :

- **α est pris au hasard dans $]0,180[$;**
- **β est pris au hasard dans $]0,180-\alpha[$;**
- **γ est défini par $\gamma=180-(\alpha+\beta)$.**

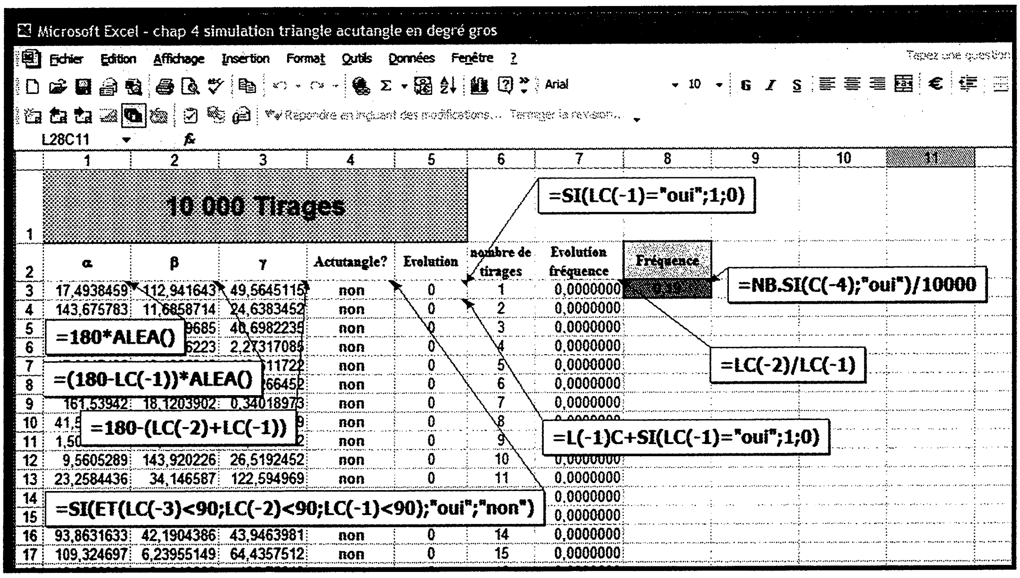
Simuler le modèle ainsi décrit et comparer la fréquence de l'événement E aux résultats obtenus jusqu'à présent.
Commentaires ? Remarques ?

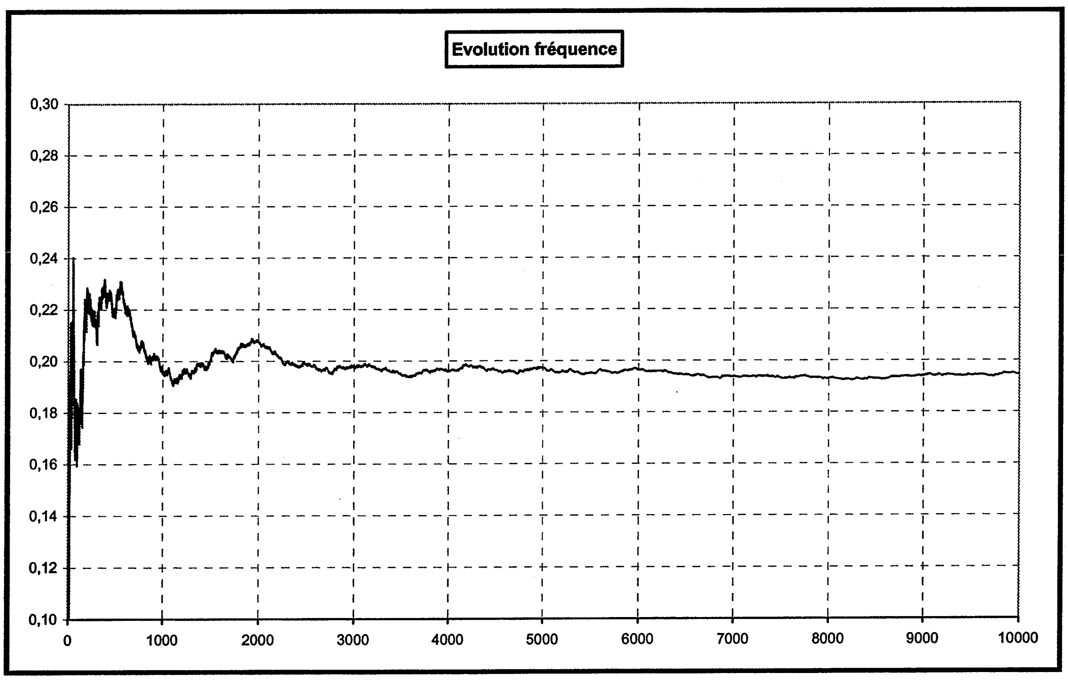
***Note* : L'étude " théorique " de cette modélisation est l'objet de l'exercice 4-26.**

[7] Il est certainement plus commode d'écrire « $0<\alpha<180$ » que « $0<\alpha<Pi(\ )$ » et peut-être pas moins significatif pour les élèves.

Solution

➢ *Simulation*





➢ *Commentaires et remarques*

La stabilisation des fréquences semble s'effectuer autour de 19,5%. L'écart avec le résultat fourni par les modèles précédents (un peu plus de 5%) aurait du mal à trouver sa seule explication dans la fluctuation d'échantillonnage.
Aussi, faut-il conclure que cette modélisation ne s'apparente sûrement pas à celles qui viennent d'être étudiées dans les exercices précédents.

Exercice 4-26

1° Montrer que la modélisation adoptée à l'exercice 4-25 peut être décrite ainsi :

- **on choisit un réel x au hasard dans $]0,1[$ et l'on pose $\alpha = 180x$;**
- **on choisit un réel y au hasard dans $]0,1[$ indépendamment de x et l'on pose $\beta = 180(1-x)y$;**
- **on pose $\gamma = 180-(\alpha+\beta)$.**

2° Évaluer la probabilité de E en modélisant le choix du couple (x,y) par celui d'un point $m(x,y)$ dans le carré $[0,1]\times[0,1]$, selon la loi uniforme dans ce carré.

Solution

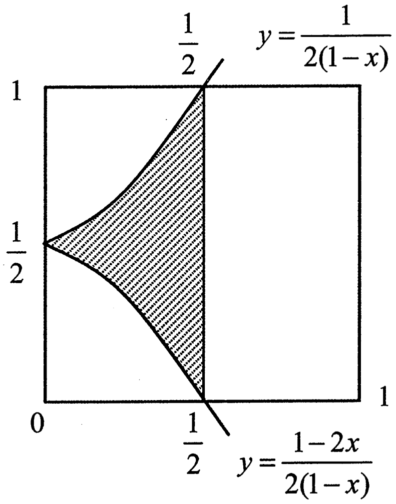
1° Étant familiers des transports par voie affine de la loi uniforme d'un intervalle à un autre, nous avons immédiatement :

- si x suit $\mathcal{U}_{]0,1[}$, alors $\alpha = 180x$ est choisi au hasard dans $]0,180[$;
- si y suit $\mathcal{U}_{]0,1[}$, alors $\beta = 180(1-x)y$ est choisi au hasard dans

$$]0,180-180x[=]0,180-\alpha[.$$

2° Dans ces conditions, le système d'inégalités

$$\begin{cases} 0<\alpha<90 \\ 0<\beta<90 \\ 0<\gamma<90 \end{cases} \quad \text{s'écrit} \quad \begin{cases} 0<x<\dfrac{1}{2} \\ 0<y<\dfrac{1}{2(1-x)} \\ \dfrac{1-2x}{2(1-x)}<y \end{cases}.$$



Tout cela nous conduit à la représentation graphique[8] ci-contre et au calcul de $\mathbb{P}(E)$ par :

$$\mathbb{P}(E)=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2(1-x)}-\frac{1-2x}{2(1-x)}\right)\mathrm{d}x, \quad \text{soit :}$$

$\mathbb{P}(E)=\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\left(-1+\frac{1}{1-x}\right)\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}+\ln 2$, avec comme valeur approchée (sous forme de pourcentage) 19,3%.

---

[8] L'égalité $\dfrac{1}{2(1-x)}+\dfrac{1-2x}{2(1-x)}=1$ justifie la présence d'un axe de symétrie (droite d'équation $y=\dfrac{1}{2}$).

Exercice 4-27 *Les triangles acutangles (deuxième épisode)*

On choisit au hasard trois réels x, y et z dans $]0,1]$, indépendamment les uns des autres.

Quelle est la probabilité de pouvoir construire un triangle acutangle de côté x, y et z ?

Note : **Il nous sera commode de désigner par $\tau(x,y,z)$ un triangle (s'il existe) de côtés x, y et z.**

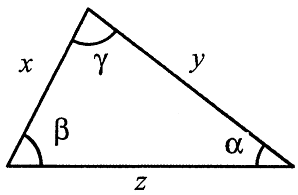
Solution

➢ *Préliminaires mathématiques*

Soit x,y et z trois réels strictement positifs avec $x \le z$ et $y \le z$. Alors il existe un triangle $\tau(x,y,z)$ acutangle si et seulement si $z^2 < x^2 + y^2$.

En premier lieu, avec $x \le z$ et $y \le z$, il existe un triangle $\tau(x,y,z)$ si et seulement si $z < x + y$ (ceci est parfaitement clair).

Par ailleurs, la relation d'Al Kashi :



$\cos\gamma = \dfrac{x^2+y^2-z^2}{2xy}$ et ses deux variantes auxquelles chacun pense[9] :

$\cos\beta = \dfrac{x^2+z^2-y^2}{2xz}$, $\cos\alpha = \dfrac{y^2+z^2-x^2}{2yz}$ montrent qu'un tel triangle est acutangle si et seulement si $z^2 < x^2 + y^2$.

Ceci résulte des deux remarques suivantes :

- un triangle est acutangle si et seulement si le cosinus de chacun de ses angles est un réel strictement positif ;
- les conditions $0 < x \le z$ et $0 < y \le z$ imposent $\cos\beta > 0$ et $\cos\alpha > 0$.

L'implication banale : ($z^2 < x^2 + y^2 \Rightarrow z < x + y$) fait conclure.

➢ *Avec la loi uniforme dans le cube* $\mathbb{C}=]0,1]\times]0,1]\times]0,1]$

L'événement E : « il existe un triangle $\tau(x,y,z)$ acutangle » est la réunion des trois évènements :

---

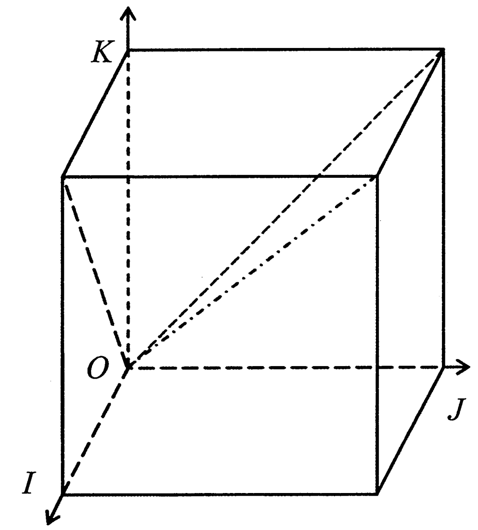
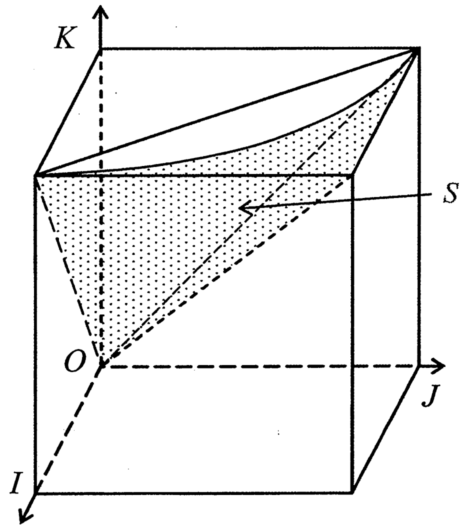
[9] **Inutiles si l'on est convaincu que le plus grand des angles d'un triangle est opposé au sommet du plus grand côté.**

$$E_3=\{(x,y,z)\in\mathbb{C}\,/\,x\leq z,\,y\leq z,\,z^2<x^2+y^2\}\ ;$$

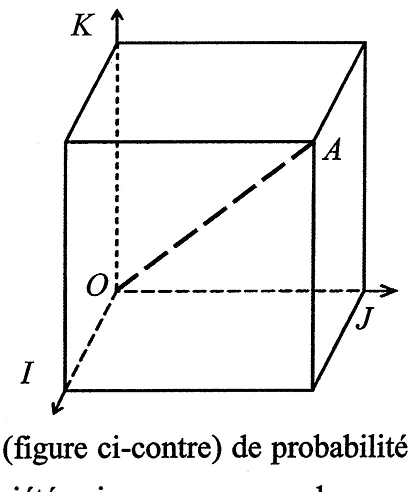
$$E_1=\{(x,y,z)\in\mathbb{C}\,/\,y\leq x,\,z\leq x,\,x^2<y^2+z^2\}$$

$$E_2=\{(x,y,z)\in\mathbb{C}\,/\,z\leq y,\,x\leq y,\,y^2<z^2+x^2\}$$

Représentons (par exemple) E_3 dans le cube :

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>L'ensemble des points $M(x,y,z)$ du cube tel que $x\leq z$ et $y\leq z$ est la pyramide de sommet O et de base la face « supérieure » du cube de volume $\frac{1}{3}$.</td>
<td>L'intérieur du cône d'équation $z^2=x^2+y^2$ (défini par $z^2\geq x^2+y^2$) rencontre le cube selon un solide S contenu dans la pyramide précédente, de volume $\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}\pi$.</td>
</tr>
</table>

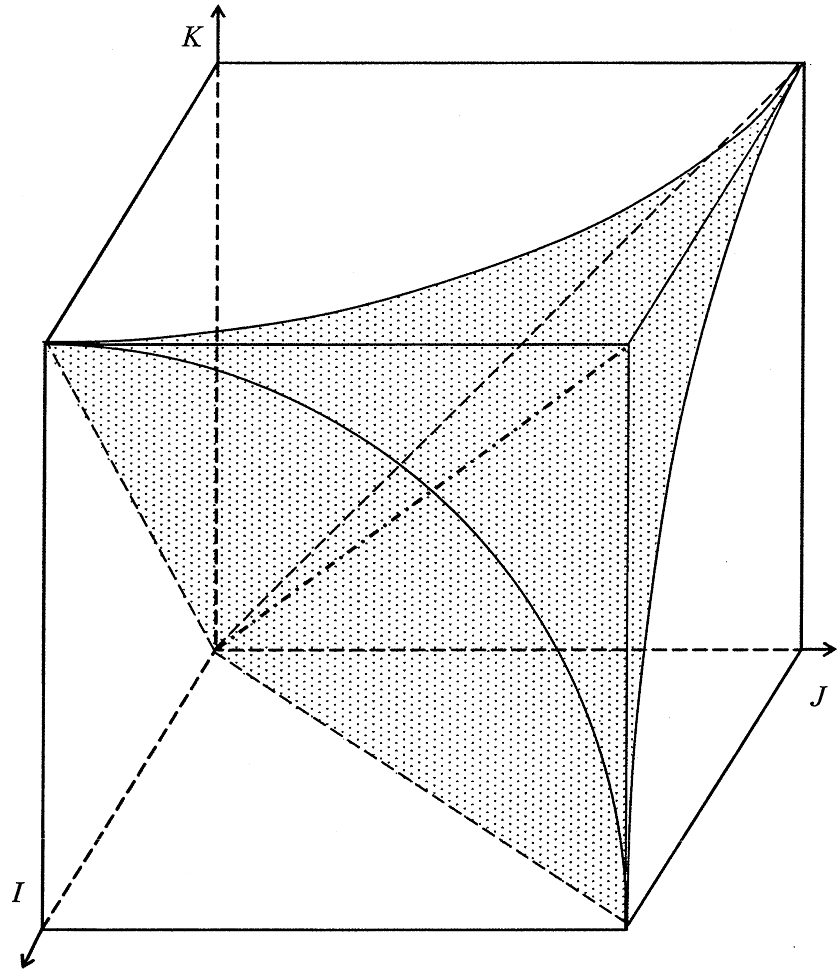
Ainsi, E_3 est le solide complémentaire de S dans la pyramide, de volume : $\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}\pi=\frac{1}{3}\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$.



Par symétrie, il en est de même de E_1 et E_2.

La conclusion $\mathbb{P}(E)=1-\frac{\pi}{4}$ (21,46 % environ) est correcte mais un peu hâtive, car E_1, E_2 et E_3 ne sont pas deux à deux disjoints. En effet, $E_1\cap E_2$ (par exemple) est l'ensemble de points $M(x,y,z)$ du cube $\mathbb{C}$ tels que $x=y=z$. Il s'agit donc du segment $]OA]$ (figure ci-contre) de probabilité uniforme (dans le cube) nulle. Et c'est donc la propriété mise en exergue dans ce chapitre (page 158) : « $P(E_i\cap E_j)=0$, pour $i\neq j\Rightarrow P\left(\bigcup_{i=1}^{n}E_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(E_i)$ », qui nous permet de dénouer l'affaire (puisque $E_1 \cap E_2 = E_1 \cap E_3 = E_2 \cap E_3$).

Bref, sans restriction, $\mathbb{P}(E) = 1 - \dfrac{\pi}{4}$.



Représentation graphique de E dans le cube

Commentaires

1. Cet exercice[10] est à réserver aux élèves suivant l'enseignement de spécialité, compte tenu de la référence aux surfaces (cônes).
   À ce sujet, on ne manquera pas d'attirer leur attention sur le fait que l'intérieur du cône d'équation $z^2 = x^2 + y^2$ est l'ensemble des points $M(x, y, z)$ tels que $z^2 \geq x^2 + y^2$ (et non le contraire), comme il est facile de le voir en sectionnant le cône par le plan $z = k$ (k réel).
2. Le préliminaire mathématique concernant les triangles acutangles nous semble devoir être dégagé du contexte purement probabiliste (en clair : l'insérer en tant que tel dans l'énoncé).

[10] Que nous pensons inédit

Chapitre 5

La loi exponentielle

« Je m'amuse à vieillir...
C'est une occupation de tous les instants. »

Paul LÉAUTAUD

Introduction

Nous ne reviendrons pas sur les conditions de la promotion de la loi exponentielle dans les programmes de terminale S qui pourraient laisser à penser que cette loi de probabilité fait un peu figure de "produit de substitution" (faute de loi normale[1], voilà l'exponentielle...) et que la place qui lui est ainsi accordée est imméritée : la douzaine de pages consacrées à la loi exponentielle dans le document d'accompagnement des programmes[2] tendrait même à prouver le contraire.

De fait - et c'est ce que nous avons choisi d'examiner tout au long de ce chapitre - les travaux qu'elle permet d'engager sont à même de **faire comprendre à des élèves de terminale S ce que peut être une loi de probabilité continue "bien" adaptée à la description de certains phénomènes aléatoires.**

Figure de proue de cette démarche ? L'étude de la radioactivité dont le document d'accompagnement des programmes ne manque pas de battre la réclame : « *lieu de convergence thématique entre la physique, les mathématiques et les sciences de la Terre.* »[3]

Rien d'étonnant à cela, si l'on songe à la résolution affichée dans les programmes d'amorcer l'évolution vers des « sciences mathématiques », formule dont l'usage « témoigne de la fin du clivage entre *mathématiques pures* et *mathématiques appliquées,* au service des autres disciplines. »[4]

Cela dit, aussi emblématique soit-il, le thème de la radioactivité ne saurait à lui seul accaparer notre réflexion : d'autres situations sont tout autant instructives quant **aux diverses manières dont peut opérer le modèle exponentiel** dans l'étude de phénomènes aléatoires.

C'est ce dernier point qui a retenu notre attention et finalement fixé l'organisation et le contenu de ce chapitre.

---

[1] Nous renvoyons au paragraphe 1-1 « Chronique d'un changement de programme » page 11.

[2] Voir[4], pages 69 à 81.

[3] Nous tenons là, à coup sur, un exemple "exemplaire" d'un *vrai travail interdisciplinaire.*
Ne pouvant éliminer le risque de voir cette dernière expression pervertie, précisons ce que nous entendons par là : « *Les liaisons entre les divers domaines de la connaissance ne relèvent pas de la seule volonté d'unification : toute rencontre de savoirs se construit autour d'une problématique et c'est via un enseignement problématisé que peut se construire une rencontre des disciplines qui soit signifiante autant pour ceux qui enseignent que pour ceux qui sont enseignés.* » (Rudolph BKOUCHE [20] p 144).
Bref, voilà bien un exemple qui nous situe aux antipodes de cet œcuménisme à la mode sur les savoirs globaux...

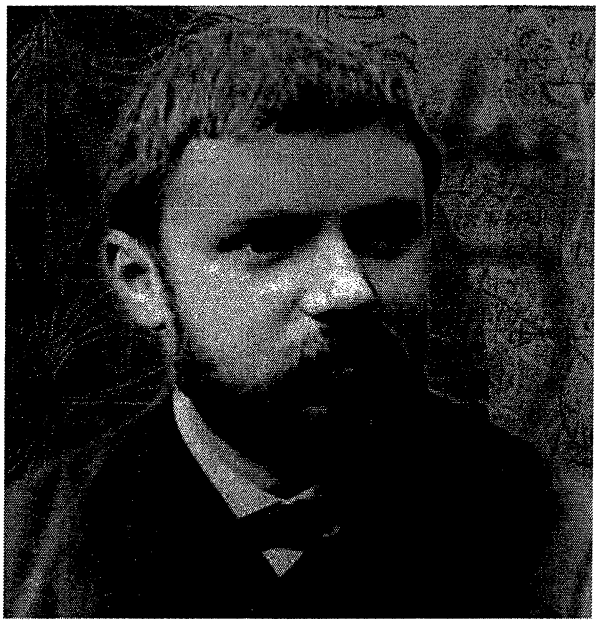
[4] [2], page 1.

En d'autres termes plus explicites, pour répondre à la question :

« *Comment la loi exponentielle peut-elle participer à la description des phénomènes aléatoires ?* »,
tout en nous tenant dans les limites autorisées[5], voici les morceaux que nous avons choisis :

- par **transport** de la loi uniforme ;
- comme **approximation** d'une loi discrète ;
- en tant que loi **limite** ;
- à l'aide de l'**équation fonctionnelle** $f(x+y)=f(x)\times f(y)$;
- avec **l'équation différentielle** $y'+ay=b$, a, b constantes réelles.

Précisons enfin que la structure de ce chapitre diffère des précédentes : chacun des morceaux choisis ci-dessus est conçu comme un *thème d'étude* (sous des dehors d'exposé magistral, mais, "dehors" trompeurs s'il en est), rehaussé par des *remarques, analyses, commentaires...,* car reste l'idée de donner à voir **la cohérence interne** de chacun d'eux.



Henri POINCARÉ (1854-1912)

« *On ne peut guère donner une définition satisfaisante de la probabilité.* »

(Calcul des Probabilités 1896)

[5] i.e. sans dépasser les compétences des élèves sur la fonction exponentielle : par exemple, la recherche des solutions de l'équation fonctionnelle s'effectue dans le cadre restreint des fonctions dérivables, voire **monotones** (voir plus loin).

1. Généralités sur la loi exponentielle

1.1 La loi exponentielle de paramètre λ $(\lambda > 0)$

• Soit λ un réel strictement positif et f la fonction définie sur $I = [0, +\infty[$ par $f(s) = \lambda e^{-\lambda s}$.

Sans barguigner un seul instant :

- f est *continue, positive* sur I ;
- pour tout $t \geq 0$ $\int_0^t \lambda e^{-\lambda s} ds = 1 - e^{-\lambda t}$, égalité à encadrer pour toute la suite, d'où découle : $\lim_{t \to +\infty} \int_0^t f(s) ds = 1$, à écrire encore $\int_I f(s) ds = 1$.

Tout se trouve réuni pour pouvoir affirmer que ***f*** **est la densité d'une loi de probabilité sur** $[0; +\infty[$ **appelée loi exponentielle de paramètre** λ**.**

Nous noterons P_λ cette loi de probabilité et mettrons en évidence deux résultats majeurs concernant le calcul des probabilités d'intervalles :

$$\boldsymbol{\forall t \geq 0,\ P_\lambda([0,t]) = 1 - e^{-\lambda t}} \text{ et } \boldsymbol{P_\lambda([t, +\infty[b) = e^{-\lambda t}}$$

• L'extension de la définition précédente à une **variable aléatoire** est sans surprise.

Nous dirons qu'une variable aléatoire T à valeurs dans $[0, +\infty[$ suit la loi exponentielle de paramètre λ (en abrégé " T *suit* $\mathcal{E}(\lambda)$"), lorsque la probabilité de l'événement $(0 \leq T \leq t)$ - noté simplement $(T \leq t)$ - est calculée par $\int_0^t \lambda e^{-\lambda s} ds$.

Autrement dit :

$$\mathbb{P}(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t},\quad \mathbb{P}(T > t) = e^{-\lambda t} ;$$

la fonction F définie sur $[0, +\infty[$ par $F(t) = \mathbb{P}(T \leq t)$, *fonction de répartition de la variable aléatoire T, est telle que* $F(t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda s} ds$.

1.2 Un premier exemple

Le **transport de la loi uniforme** sur $]0,1]$ par une variable aléatoire bien choisie permet de construire "à la main" une loi de probabilité exponentielle de paramètre donné -dont on pourrait se saisir comme situation introductive[6]- que nous exploiterons dans la **simulation**.

---

[6] D'autant que les lois continues sur un intervalle non borné ne seraient pas une nouveauté.

Construction d'une variable aléatoire suivant $\mathcal{E}(\lambda)$

Proposition

Soit λ un réel positif. Si le réel x est choisi au hasard dans $]0,1]$ (i.e. selon la loi uniforme de $]0,1]$), alors la variable aléatoire T qui à x associe $-\frac{1}{\lambda}\ln x$ suit la loi exponentielle de paramètre λ.

Il est clair tout d'abord que T est à valeurs dans $[0,+\infty[$.

Soit t un réel positif ou nul. Les équivalences :

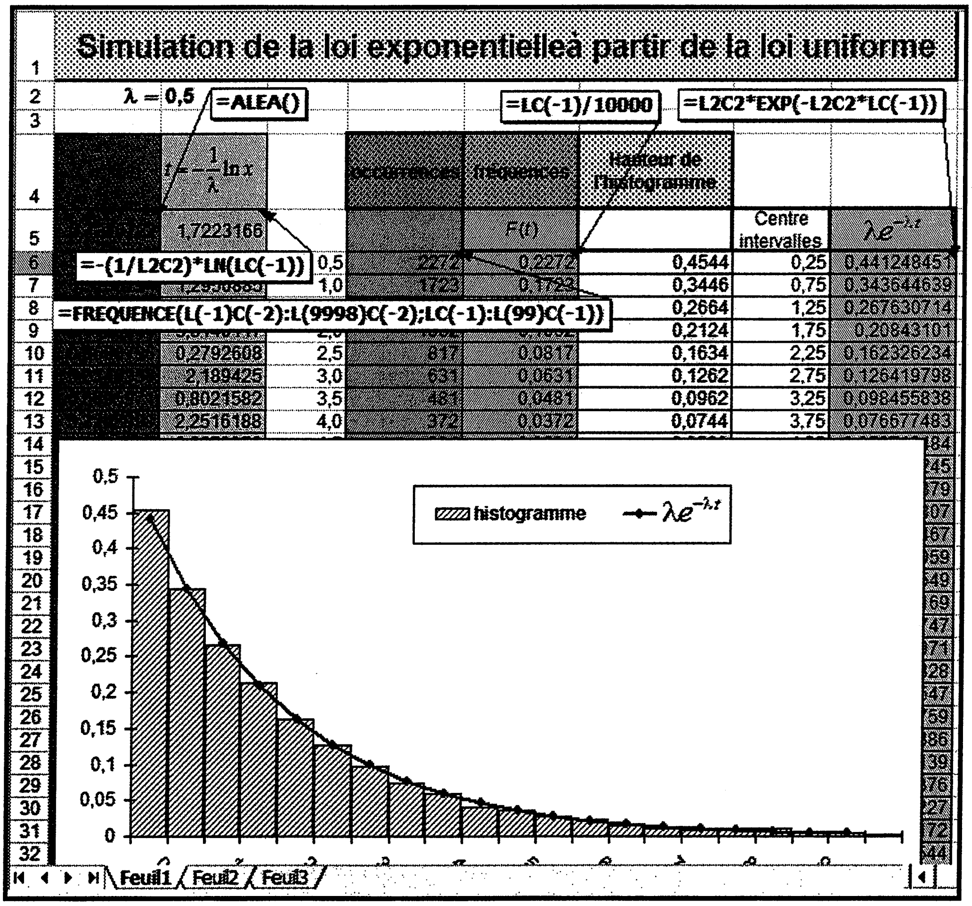
$$(T \le t) \Leftrightarrow -\frac{1}{\lambda}\ln x \le t \Leftrightarrow x \ge e^{-\lambda t} \text{ livrent :}$$

$\mathbb{P}(T \le t) = \mathcal{U}_{]0,1]}\left(\left\{x \in \,]0,1] / x \ge e^{-\lambda t}\right\}\right) = 1 - e^{-\lambda t}$, ce qui montre que T suit la loi $\mathcal{E}(\lambda)$.

Application à la simulation.

D'après ce qui précède, en associant à chacune des valeurs $x_1, x_2, \cdots, x_n$ données par un générateur de nombres aléatoires de $]0,1]$ (fonction ***ALEA()*** d'Excel par exemple) les n valeurs $t_1, t_2, \cdots, t_n$ définies par : $t_i = -\frac{1}{\lambda}\ln x_i$,

on forme un échantillon de taille n de la variable aléatoire T de loi exponentielle de paramètre λ (cf. un exemple ci-dessous).



1.3 Sur le paramètre λ

Une intégration par parties depuis longtemps inscrite dans la tradition des classes de terminales fournit :

$$\int_0^t sf(s)\,\mathrm{d}s = -te^{-\lambda t} + \int_0^t e^{-\lambda s}\mathrm{d}s, \text{ d'où l'on tire } \lim_{t\to+\infty}\int_0^t sf(s)\,\mathrm{d}s = \frac{1}{\lambda},$$

$$\text{soit : } \int_0^{+\infty} sf(s)\,\mathrm{d}s = \frac{1}{\lambda}.$$

Le lecteur rompu à la définition des moments d'une variable aléatoire ne manquera pas de présenter cette formule par : « *l'espérance mathématique* [7] *d'une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre* λ *est* $\dfrac{1}{\lambda}$ ».

Mais parce que, en ce qui concerne les lois continues, la notion d'espérance mathématique ne figure pas dans les programmes[8], nous trouvons là matière à nous interroger :

- existe-t-il des situations où il serait utile et pertinent pour les élèves de pouvoir interpréter d'une telle manière le paramètre λ de la loi exponentielle ?
- et si oui, comment leur permettre d'accéder à cette interprétation ?

Nous répondrons OUI sans hésiter à la première question : « *la loi de durée de vie sans vieillissement* » constitue, comme chacun pourra le voir, un exemple convaincant de la justesse de cette affirmation[9].

La seconde question, en revanche, exige une répartie plus mesurée. On aurait du mal en effet à introduire la notion d'espérance mathématique (dans le cas continu) sans imposer[10] dans le symbole $\int_I xf(x)\mathrm{d}x$ **une vision élargie de** $\sum_{i=1}^{n} x_i p_i$ (cas discret).

C'est le point de vue adopté par le document d'accompagnement des programmes ([4]), page 74). C'est un certain culot mais il serait trop coriace, à ce niveau, de faire autrement[11]...

Adoucissons un peu le propos en faisant remarquer que la mobilisation de l'intégrale $\int_I xf(x)\mathrm{d}x$ dans le calcul de l'espérance est limitée en classe de Terminale à la seule exponentielle (nous l'utiliserons cependant dans quelques rares exercices pour quelques lois "cousines").

---

[7] Il en est de même de l'écart type, comme le montre facilement des calculs tout aussi primesautiers que les précédents.

[8] Nous approuvons sans réserve cette mise à l'écart dictée par la raison...

[9] Uniquement pour appuyer nos dires, signalons que le paramètre λ s'interprète comme l'inverse de la durée de vie moyenne.

[10] Qu'on le veuille ou non, c'est le mot juste.

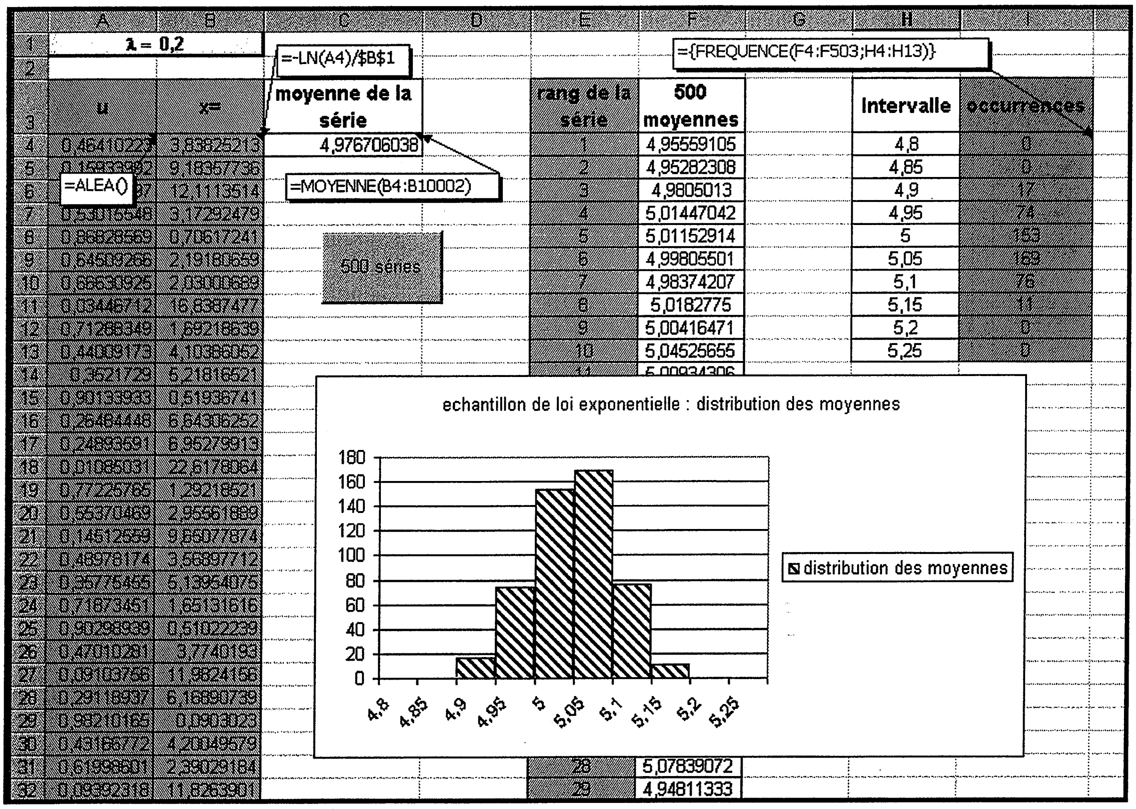
[11] Pour se faire une idée de la difficulté de l'affaire, consulter l'ouvrage de RENYI par exemple ([18.], pages 193-194).

Et ne concluons pas trop vite ce paragraphe sur le paramètre λ sans signaler une intéressante activité de *simulation* - en tout état de cause, une activité qui en vaut bien une autre- : **obtenir la distribution des moyennes** de n échantillons, de taille 10000 (par exemple) de nombres choisis dans $[0,+\infty[$ selon la loi exponentielle[12] (n étant à fixer), pour une valeur "fréquentable" du paramètre λ (ci-après, un exemple pour le lecteur enthousiasmé à cette idée).

Simulation

Dans la feuille de calcul ci-dessous :

- La colonne A affiche 10000 tirages d'un nombre suivant la loi uniforme sur $]0,1]$;
- La colonne B affiche 10000 tirages suivant la loi exponentielle (images des précédents par la fonction $x \to \dfrac{-\ln x}{\lambda}$) et la moyenne de cette série est calculée en colonne C ;
- Une macro commande génère 500 séries de 10000 nombres choisis selon la loi exponentielle et reporte les moyennes de ces séries dans la colonne F ;
- Le graphique représente la distribution de ces moyennes.



---

[12] Nombres obtenus par le transport de la loi uniforme sur $]0,1]$.

2. Exemple de convergence en loi[13] vers la loi exponentielle

Ce paragraphe est, somme toute, de facture et d'objectif modestes :

- donner un aperçu de *la loi exponentielle en tant que loi limite* (en un certain sens) d'une suite de lois continues ;
- éprouver sous divers points de vue (graphique, numérique, fonctionnel, …) *la qualité de l'ajustement asymptotique* ainsi obtenu, la démarche étant engagée par une *simulation* propice aux conjectures, compte tenu de la situation retenue.

2.1 Le problème à l'étude

Soit n un entier naturel donné ($n \geq 1$). On tire au hasard dans $[0,n]$ (c'est-à-dire selon la loi uniforme de $[0,n]$) et indépendamment les uns des autres n réels $t_1, t_2, ..., t_n$; X_n est alors la variable aléatoire à valeurs[14] dans $[0,+\infty[$ qui leur fait correspondre le réel $\min\{t_1, t_2, ..., t_n\}$.

Examiner à la loupe la *distribution de* X_n est la consigne.

2.2 Une première approche : la simulation

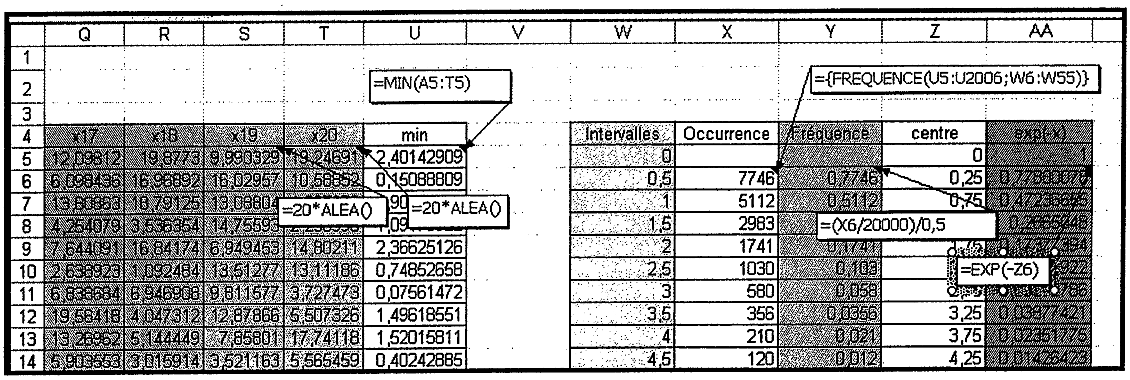
➢ *Objectif et protocole*

Simuler 2000 tirages de 20 nombres choisis au hasard dans $[0,20]$ et déterminer le minimum de ces réels pour chaque tirage.

Tracer l'histogramme des fréquences.

Représenter la fonction $x \mapsto e^{-x}$ sur le même graphique… une fois convaincu de l'utilité d'un tel tracé (voir remarques ci-après).

➢ *Feuille de calcul*



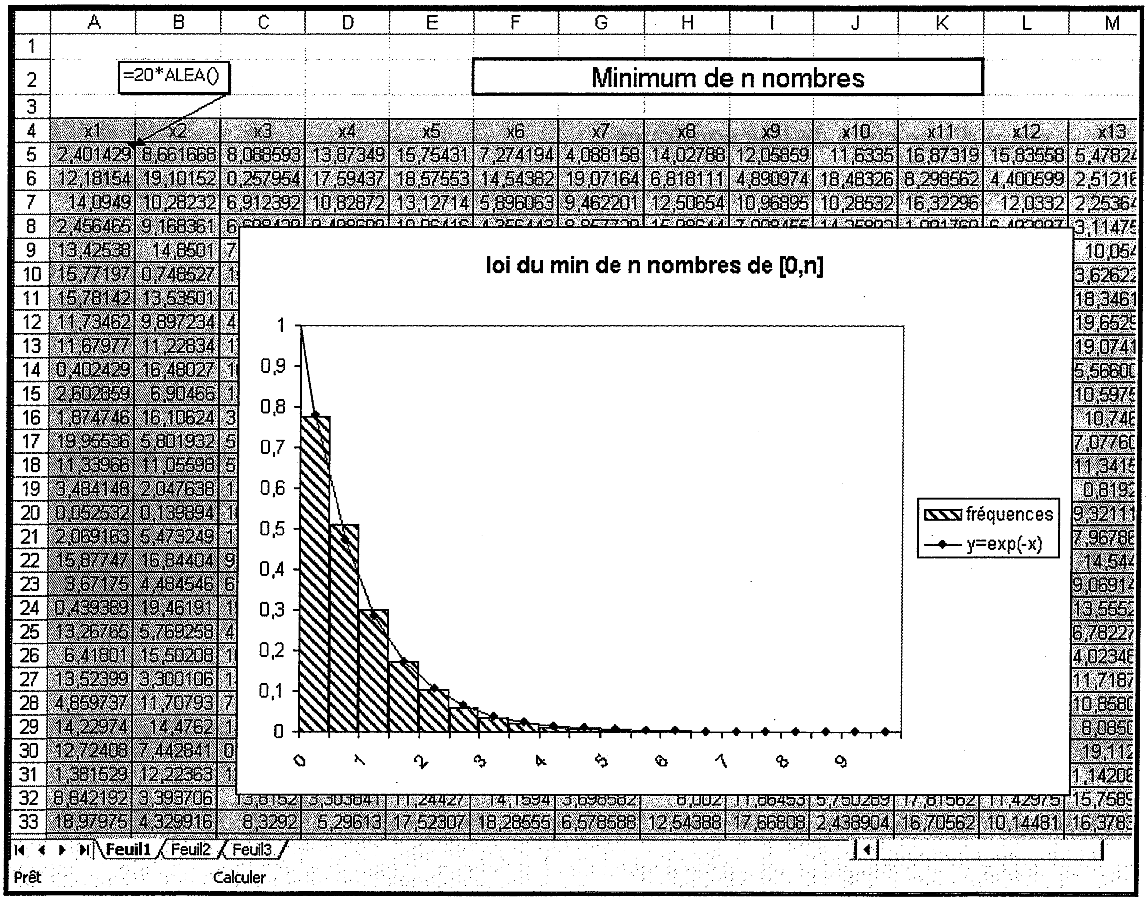
	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	AA
1											
2					=MIN(A5:T5)				={FREQUENCE(U5:U2006;W6:W55)}		
3											
4	x17	x18	x19	x20	min		Intervalles	Occurrence	Fréquence	centre	exp(-x)
5	12,09812	19,8773	9,990329	19,24691	2,40142909		0			0	1
6	6,098436	16,96892	16,02957	10,58852	0,15088809		0,5	7746	0,7746	0,25	[illegible]
7	13,80863	18,79125	13,08804	[illegible]	[illegible]		1	5112	0,5112	0,75	[illegible]
8	4,254079	3,536354	14,75593	[illegible]	[illegible]		1,5	2983	[illegible]	[illegible]	[illegible]
9	7,644091	16,84174	6,949453	14,80211	2,36625126		2	1741	0,1741	[illegible]	[illegible]
10	2,638923	1,092484	13,51277	13,11186	0,74852658		2,5	1030	0,103	[illegible]	[illegible]
11	6,838684	6,946908	9,811577	3,727473	0,07561472		3	580	0,058	[illegible]	[illegible]
12	19,58418	4,047312	12,87866	5,507326	1,49618551		3,5	356	0,0356	3,25	0,03877421
13	13,26962	5,144449	7,85801	17,74118	1,52015811		4	210	0,021	3,75	0,02351775
14	5,903553	3,015914	3,521163	5,565459	0,40242885		4,5	120	0,012	4,25	0,01426423

---

[13] L'expression est sans aucune signification pour un élève. La conséquence est qu'il faut "jeter" le titre mais garder l'idée.

[14] Pour les besoins de la cause.

➢ *Représentation graphique*



➢ *Remarques*[15]

1- *L'affaissement* irrésistible de l'histogramme ("vers la droite") ne peut manquer de sauter aux yeux. Et les soupçons que nous pouvons avoir sur cet anéantissement trouvent rapidement confirmation[16] dans quelques calculs, calculs d'autant moins inutiles qu'ils présagent celui à venir, de portée générale (voir prochain paragraphe).
Quelques exemples :
• pour $n=5$, la probabilité théorique que les cinq points aient été choisis dans l'intervalle $[2,5]$ (autrement dit que $X_5 \geq 2$) est inférieure à 8% ;
• pour $n=8$, la probabilité théorique de l'évènement ($X_8 \geq 4$) est de l'ordre de $0,4\%$;
• etc..

---

[15] Ces remarques ne sont pas saugrenues dès lors que n'est pas porté sur le graphique la courbe représentative de la fonction $x \mapsto e^{-x}$: il est donc perspicace de décaler dans le temps un tel tracé (a contrario de ce que nous faisons, pour des raisons évidentes d'encombrement).

[16] Aux fluctuations d'échantillonnage près.

2- Assurément, le contexte tire dans le sens d'un atterrissage forcé de la loi exponentielle dans notre problème.
Avancer que c'est le seul chaperon à mener vers la conjecture : « *la variable aléatoire* X_n *suit "à peu près" une loi exponentielle*[17] » est un pas que nous ne franchirons pas, sauf à considérer les élèves dépourvus de la moindre vision graphique d'une décroissance exponentielle...
Muni d'une telle conviction, un coup d'œil un peu exercé sur les différents graphiques au *voisinage de zéro* "montre" que, parmi les lois exponentielles, celle de paramètre 1 ne peut être que l'heureuse élue.

2.3 L'étude théorique

➢ *La fonction de répartition* F_n *de la variable* X_n

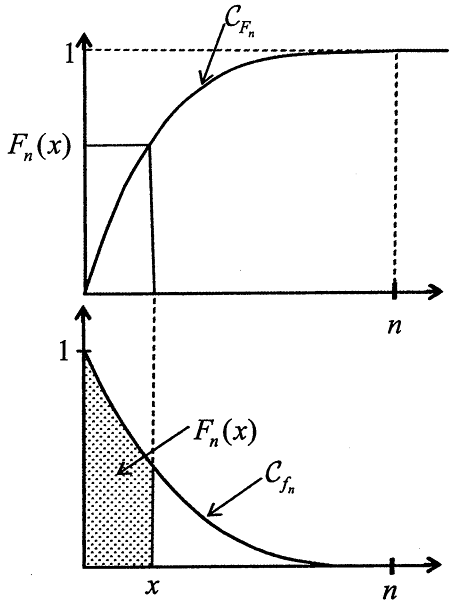
Il est évident que pour $x \geq n$, $F_n(x) = 1$.

Pour $0 \leq x \leq n$, l'évaluation de la probabilité de l'événement $(X_n \leq x)$ s'envisage naturellement en considérant l'événement contraire.

Avec $(X_n > x) = \bigcap_{i=1}^{n} (x_i > x)$ et compte tenu de l'indépendance des tirages, il vient :

$$\mathbb{P}(X_n > x) = \prod_{i=1}^{n} \mathcal{U}_{[0,n]}([x,n]) = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{n-x}{n} \right) = \left(1 - \frac{x}{n} \right)^n,$$

d'où $F_n(x) = 1 - \left(1 - \dfrac{x}{n} \right)^n$.



En résumé :

$$F_n(x) = \begin{cases} 1 - \left(1 - \dfrac{x}{n} \right)^n & \text{pour } x \in [0,n] ; \\ 1 & \text{pour } x \in [n, +\infty[. \end{cases}$$

La fonction F_n est dérivable sur $[0, +\infty[$ de dérivée :

$$f_n(x) = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{x}{n} \right)^{n-1} & \text{pour } x \in [0,n] ; \\ 0 & \text{pour } x \in [n, +\infty[. \end{cases}$$

(la fonction f_n étant continue, le programme est respecté : f_n est la densité de la loi de probabilité de la variable aléatoire X_n).

---

[17] Variantes acceptables à cette heure : « X_n suit une loi exponentielle » (carrément) ou encore « X_n suit de plus en plus une loi exponentielle »

➢ *Les suites* $(F_n(x))_{n\geq 1}$ *et* $(f_n(x))_{n\geq 1}$ avec $x \geq 0$.

Rappel : **pour x fixé dans** $[0,+\infty[$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\dfrac{x}{n}\right)^n = e^{-x}$.

Trois ingrédients sont impliqués dans cette proposition :

• $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\ln(1+h)}{h}=1$ (nombre dérivé de ln en 0) ;

• l'égalité $\ln\left(1-\dfrac{x}{n}\right)^n = (-x)\times\dfrac{\ln\left(1-\dfrac{x}{n}\right)}{\left(-\dfrac{x}{n}\right)}$, qui ne saurait avoir lieu que pour $n > x$;

• la continuité de la fonction exponentielle, dont on tirera le meilleur parti ici par la propriété : « si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{u_n} = e^{\ell}$ ».

Soit alors x fixé dans l'intervalle $[0,+\infty[$. Pour tout entier n strictement plus grand que x, on a :

$$\left[\begin{array}{l} F_n(x) = 1-\left(1-\dfrac{x}{n}\right)^n \ ; \\ f_n(x) = \left(1-\dfrac{x}{n}\right)^{n-1} = \left(1-\dfrac{x}{n}\right)^n \times \dfrac{1}{1-\dfrac{x}{n}}. \end{array}\right.$$

En découle, d'après ce qui précède : $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n(x) = 1-e^{-x}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = e^{-x}$.

Remarques

1- Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$ (sa fonction de répartition est donc $F(x) = 1-e^{-x}$).

La propriété que nous avons obtenue « $\forall x \in [0,+\infty[$, $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n(x) = F(x)$ » exprime ici la convergence en loi de la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ vers X (la même propriété, restreinte aux points de continuité de F, fournirait dans le cas général la “ vraie ” définition de la convergence en loi)

Quant à la propriété $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = e^{-x}$, elle vient conforter ce que suggère la représentation graphique obtenue par simulation : la suite des densités des variables aléatoires X_n tend vers la densité de la variable aléatoire X (ceci méritait d'être souligné[18]).

---

[18] Soit $X_n\,(n \geq 1)$ une variable aléatoire à valeurs dans $[0,1]$ de densité f_n définie par $f_n(x) = 1-\cos(2\pi n x)$. On note F_n sa fonction de répartition. (Alors (cf. exercice 3-21), on a :

• $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(x) = x$, ce qui prouve que la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire uniformément répartie sur $[0,1]$) ;

• mais la suite $(f_n(x))_{n\geq 1}$ diverge pour tout réel x de $]0,1[$.

2- L'évaluation du *minimum moyen* de n nombres pris au hasard dans $[0,n]$, indépendamment les uns des autres est un simple exercice de calcul intégral (avec changement de variable affine à la clef). En effet :

$$E(X_n)=\int_0^n xf_n(x)\mathrm{d}x=\int_0^n x\left(1-\frac{x}{n}\right)^{n-1}\mathrm{d}x,$$

soit avec le changement de variable (naturel) $u=1-\dfrac{x}{n}$:

$$E(X_n)=\int_0^1 n^2(1-u)u^{n-1}\mathrm{d}u=n^2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{n}{n+1}\ \text{(naturel ?)}.$$

Émile BOREL (1871-1956)

« *La première question est de construire un schéma mathématique présentant avec la réalité d'assez étroits rapports...* »

(Le hasard 1914)

3. Le point de vue fonctionnel

Ce paragraphe prend en charge l'étude d'un phénomène aléatoire que nous désignerons par « *loi de durée de vie sans vieillissement* », qui :

- d'une part est affilié aux phénomènes exponentiels par **l'équation fonctionnelle** de la fonction du même nom ;
- d'autre part permet d'apporter aux élèves de réels enseignements sur le rôle des **hypothèses en ce qui concerne la modélisation.**

Et parce que les variables aléatoires impliquées dans cette étude sont à valeurs dans l'intervalle $[0,+\infty[$, nous allons en premier lieu faire un sort à l'équation fonctionnelle :

$$(E) \qquad \boldsymbol{f(s+t)=f(s)\times f(t)} \ \textbf{ sur } \left[\mathbf{0,+\infty}\right[,$$

trop souvent renvoyée à tort (par paresse ou routine ?) à l'équation fonctionnelle sur $\mathbb{R}$.

3.1 L'équation fonctionnelle (*E*) : $f(s+t)=f(s)\times f(t)$ sur $[0,+\infty[$

Une idée : « se ramener aux fonctions additives sur $[0,+\infty[$, via la fonction logarithme », appuyée de deux lemmes, permet de trancher l'affaire dans un cadre assez général.

3.1.1 Fonctions additives sur $[0,+\infty[$

Lemme 1

Soit φ ***une fonction additive sur*** $I=[0,+\infty[$ (***i.e. pour tout*** $(s,t)\in I\times I$: $\varphi(s+t)=\varphi(s)+\varphi(t)$), ***bornée sur*** $[0,1]$. ***Alors*** $\varphi(t)=\varphi(1)\times t$ ***pour tout*** $t\in I$.

Démonstration

Soit g la fonction définie sur I par $g(t)=\varphi(t)-\varphi(1)\times t$. Alors banalement :

- g est additive sur I ;
- g est bornée sur $[0,1]$ (si M majore $|\varphi|$ sur $[0,1]$, alors $|g(t)|\leq 2M$ pour tout $t\in[0,1]$) ;
- g est périodique sur I de période 1 et par suite g est bornée sur I.

En découle que g est nulle. En effet, à supposer qu'il existe t_0 dans I tel que $g(t_0)\neq 0$, nous tirons de la relation $g(nt_0)=ng(t_0)$, pour tout entier $n\geq 1$ (lieu commun des fonctions additives), que $\lim\limits_{n\to+\infty}|g(nt_0)|=+\infty$, ce qui vient contredire que g est bornée sur I. Par suite : $\varphi(t)=\varphi(1)\times t$ pour tout $t\in I$.

3.1.2 Sur les solutions non triviales de (E)

Nous désignons par solutions triviales[19] de (E)

- la fonction nulle sur $[0,+\infty[$, notée f_0 ;
- la fonction « mort-né »[20], notée f_1 et définie par $f_1(t)=\begin{cases}1 & \text{si } t=0\,;\\ 0 & \text{si } t>0\,.\end{cases}$.

Lemme 2

Toute solution non triviale de l'équation fonctionnelle (E) est une fonction à valeurs strictement positives.

Démonstration

Soit f une solution de (E).

- Si f s'annule en 0, alors f est nulle sur I comme l'indique l'égalité $f(t)=f(0)\times f(t)$ pour tout $t\in I$.

- Supposons que f s'annule en $t_0>0$. Pour tout entier $n\geq 1$, f s'annule aussi en $\dfrac{t_0}{n}$: cela résulte du " cliché " $\left[f\left(\dfrac{t_0}{n}\right)\right]^n=f(t_0)$.

Soit alors $t>0$. Il existe $n\geq 1$ tel que $0<\dfrac{t_0}{n}\leq t$, d'où

$f(t)=f\left(t-\dfrac{t_0}{n}+\dfrac{t_0}{n}\right)=f\left(t-\dfrac{t_0}{n}\right)\times f\left(\dfrac{t_0}{n}\right)=0$ (égalité tout à fait licite car $\left(t-\dfrac{t_0}{n}\right)\in I$).

Ainsi f est nulle sur $]0,+\infty[$.Comme $f(0)$ est soit 0, soit 1 (évident), f est soit la fonction nulle, soit la fonction « mort-né ».

La démonstration s'achève à l'aide de la remarque : $f(t)\geq 0$ pour tout $t\in I$, issue de la redite $f(t)=\left(f\left(\dfrac{t}{2}\right)\right)^2$.

3.1.3 Théorème

Toute solution de (E) majorée sur $[0,1]$ et minorée sur $[0,1]$ par un réel strictement positif est une fonction exponentielle.

Démonstration

Soit f une solution de (E) et m et M deux réels strictement positifs tels que : $0<m\leq f(t)\leq M$ pour tout $t\in[0,1]$.

---

[19] Il est immédiat de vérifier que ces fonctions sont des solutions de (E).

[20] Cette appellation sera justifiée dans le paragraphe 3.2.1.

Comme f n'est ni la fonction nulle, ni la fonction « mort-né » - c'est clair -, d'après le lemme 2, f est à valeurs strictement positives.

On peut donc introduire la fonction φ définie sur I par $\varphi(t) = \ln f(t)$, qui se trouve trivialement additive sur I et bornée sur $[0,1]$.

Par le lemme 1, φ est de la forme $t \mapsto \alpha t \left(\alpha \in \mathbb{R}\right)$ d'où résulte : $f(t) = \exp(\alpha t)$ pour tout $t \in I$.

Découlent de ce théorème deux corollaires immédiats :

Corollaire 1

Les solutions continues de (E) sont la fonction nulle ou les fonctions exponentielles.

Corollaire 2

Les solutions monotones de (E) sont les solutions triviales ou les fonctions exponentielles.

3.1.4 Remarques

1. Dans le cas de l'équation fonctionnelle *sur* $[0,+\infty[$, on ne peut resservir "l'astuce" qui fait merveille *sur* $\mathbb{R}$:

$$f(t) = f(t - t_0 + t_0) = f(t - t_0) \times f(t_0) \ \forall t \in \mathbb{R},$$

   permettant d'établir que si f s'annule en un point, f est partout nulle.

2. Dans le théorème précédent, l'intervalle $[0,1]$ n'est pas décisif. Les amateurs de généralisation bon marché réaccomoderont le Lemme 1 pour remplacer $[0,1]$ par n'importe quel intervalle $[a,b]$ de $[0,+\infty[$, toutes choses égales par ailleurs.

3. La recherche de **solutions monotones de (*E*)** appelle plusieurs commentaires :

   - On peut dans ce cas proposer une démonstration directe du théorème 3.1.3. Supposons par exemple f décroissante. D'après le lemme 2, si f n'est pas l'une des solutions triviales de (*E*), on a $\forall t \geq 0 \quad f(t) > 0$, puis pour tout réel t de $[0,1]$ $0 < f(1) \leq f(t) \leq f(0) = 1$: il n'y a plus qu'à recopier suite et fin.

   - Une autre démonstration plus classique, ignorante du lemme 1, pourrait être envisagée si elle n'impliquait la *densité de* $\mathbb{Q}$ *dans* $\mathbb{R}$ et quelques notions sur la *continuité.*

     En deux mots, en supposant f décroissante et solution non triviale de (*E*) :

     - par le lemme 2, on a $f(1) > 0$ et l'on peut donc poser $\alpha = \ln f(1)$;

     - un bricolage algébrique permet d'obtenir que pour tout rationnel positif r, on a $f(r) = \mathrm{e}^{\alpha r}$;

- soit x un réel positif. Il existe une suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de rationnels positifs supérieurs à x, de limite x.

Ainsi :

$f(r_n) \leq f(x)$ (car f est décroissante) ;

$f(r_n) = \mathrm{e}^{\alpha r_n}$ (d'après ce qui précède) ;

$\mathrm{e}^{\alpha r_n} \leq f(x)$ d'où $\mathrm{e}^{\alpha x} \leq f(x)$ par passage à la limite via la continuité de l'exponentielle.

Avec un raisonnement analogue, on obtiendrait $f(x) \leq \mathrm{e}^{\alpha x}$, d'où le résultat visé.

- L'insistance que nous accordons aux solutions décroissantes de (E) tient dans la nature même des problèmes probabilistes que nous allons aborder qui commande la recherche de solutions de ce type.

4. (Une dernière remarque destinée aux seuls lecteurs friands d'exposés aboutis.)
Il n'est pas difficile, moyennant l'axiome du choix, de fabriquer une fonction "*fausse-exponentielle*" sur $\mathbb{R}$ (ou sur $[0,+\infty[$) c'est-à-dire une fonction F définie sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\begin{cases} (1)\ F(x+y) = F(x)\times F(y) \quad \text{pour tous réels } x \text{ et } y; \\ (2)\ F(x) = \mathrm{e}^{x} \ \text{ si et seulement si } x \text{ est rationnel.} \end{cases}$$

Pour cela, considérons $\mathbb{R}$ comme espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$. L'axiome du choix permet alors de construire[21] une forme linéaire φ de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{Q}$, telle que $\varphi(1) = 1$, c'est-à-dire une application φ de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{Q}$ satisfaisant :

$$\begin{cases} \varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y) \quad \text{pour tous réels } x \text{ et } y \ ; \\ \varphi(rx) = r\varphi(x) \quad \text{pour tout } x \text{ réel et (attention) pour tout } r \text{ rationnel.} \end{cases}$$

En posant - comme chacun s'y attend - $F(x) = \mathrm{e}^{\varphi(x)}$, s'annoncent les propriétés suivantes :

- $F(x+y) = \mathrm{e}^{\varphi(x+y)} = \mathrm{e}^{\varphi(x)+\varphi(y)} = \mathrm{e}^{\varphi(x)}\times\mathrm{e}^{\varphi(y)} = F(x)\times F(y)$ pour tous réels x et y ;

[21] L'axiome du choix assure de l'existence d'une base de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{Q}$, en tant que $\mathbb{Q}$-espace vectoriel (base de HAMEL) et l'on peut supposer, sans nuire à la généralité, que cette base contient 1. Notons la $(e_i)_{i\in I}$. Soit x un réel et sa décomposition dans la base $(e_i)_{i\in I}$: $x = \sum_{i\in I} r_i e_i$, où $(r_i)_{i\in I}$ sont les coordonnées de x (donc des nombres rationnels) toutes nulles sauf pour un ensemble fini d'indices (dépendant de x évidemment). Posons alors $\varphi(x) = \sum_{i\in I} r_i$: l'application φ fait l'affaire.

- pour tout r rationnel $F(r) = \mathrm{e}^{\varphi(r)} = \mathrm{e}^{r\varphi(1)} = \mathrm{e}^{r}$;
- enfin, si $F(x) = \mathrm{e}^{x}$, nous avons $\varphi(x) = x$, ce qui montre que x est rationnel (puisque φ est à valeurs dans $\mathbb{Q}$).

D'où le « monstre ».

3.2 La loi de durée de vie sans vieillissement[22]

D'abord - c'est un début - la loi de durée de vie sans vieillissement est un thème du Programme.

Ceci posé, ce n'est pas tout :

- le côté minimaliste des hypothèses - de fait, une unique hypothèse - ne peut que contribuer à débrider les esprits des élèves, **quant aux problèmes de modélisation** ;
- par ailleurs, nous trouvons là un terrain privilégié leur permettant d'apprécier cette prouesse inégalée du calcul des Probabilités : **opérer** (sous certaines conditions) **le passage du caractère aléatoire de l'avenir de chaque individu d'une population au caractère déterministe de l'évolution de cette population**.

Et quitte à bien faire, autant marquer franchement chacune de ces étapes.

3.2.1 Le sort de chacun ou la loi microscopique

Nous formons l'hypothèse que la durée de vie d'un individu (au sens statistique du terme) est une variable aléatoire T à valeurs dans $[0,+\infty[$, où pour $t \geq 0$ l'événement $(T \geq t)$ signifie que l'individu est encore vivant à l'instant t.

Nous dirons alors que T suit une loi de durée de vie sans vieillissement s'il existe un modèle probabiliste dans lequel :

la probabilité que l'individu soit vivant à l'instant $t+h$ sachant qu'il est vivant à l'instant t ne dépend pas de t (ceci pour t et h positifs ou nuls quelconques).

En particulier - et c'est cette seule donnée que nous formaliserons - si un individu a vécu t unités de temps, alors il vivra encore h unités de temps avec la même probabilité que s'il venait de naître, soit :

$$\textbf{pour tout } t \textbf{ et } h \textbf{ positifs ou nuls } \mathbb{P}(T \geq t+h \,/\, T \geq t) = \mathbb{P}(T \geq h)$$

(puisqu'il est certain que l'événement $(T \geq 0)$ est l'événement certain).

C'est cette insensibilité à l'usure du temps - endroit peu ordinaire pour chacun d'entre nous - qui vaut le nom de "sans vieillissement" ou parfois "d'absence de mémoire" (l'individu ne se souvient pas d'avoir vieilli).

[22] Tenu au courant, il est probable que O. WILDE l'aurait appelée « loi de DORIAN GRAY »...

- Notre propos est d'établir qu'une telle variable aléatoire suit une loi exponentielle en montrant que la fonction G définie par $G(t) = \mathbb{P}(T \geq t)$ vérifie l'équation fonctionnelle de l'exponentielle sur $[0, +\infty[$.

  L'argumentation est simpliste : elle consiste à remarquer l'inclusion des événements $(T \geq t+h) \subset (T \geq t)$ (avec t et h positifs) d'où se déduisent sur le champ que :

  - G est décroissante sur $[0, +\infty[$, puisque $\mathbb{P}(T \geq t+h) \leq \mathbb{P}(T \geq t)$;

  - l'intersection des événements $(T \geq t+h) \cap (T \geq t)$ n'est autre que l'événement $(T \geq t+h)$, ce qui autorise n'importe qui connaissant son cours sur les probabilités conditionnelles à écrire :

$$\mathbb{P}(T \geq t+h \,/\, T \geq t) = \frac{\mathbb{P}((T \geq t+h) \cap (T \geq t))}{\mathbb{P}(T \geq t)} = \frac{\mathbb{P}(T \geq t+h)}{\mathbb{P}(T \geq t)}.$$

  Une connexion immédiate avec l'hypothèse initiale :

$$\mathbb{P}(T \geq t+h \,/\, T \geq t) = \mathbb{P}(T \geq h) \quad (t \geq 0, h \geq 0),$$

  livre $\mathbb{P}(T \geq t+h) = \mathbb{P}(T \geq t) \times \mathbb{P}(T \geq h)$, soit :

$$G(t+h) = G(t) \times G(h) \text{ sur l'intervalle } [0, +\infty[.$$

  Ainsi, **G est une solution décroissante de l'équation fonctionnelle de l'exponentielle sur $[0, +\infty[$.**

- Nous éliminons la *fonction nulle* qui renverrait l'individu dans un monde virtuel ainsi que la *fonction « mort-né »* (qui trouve là le sens de sa dénomination) par simple bon sens appuyé d'un peu de compassion...

  Dès lors, d'après le corollaire 2 du théorème 3.1.3, (en faisant avec le reste) il vient que G est une exponentielle ; mieux :

  il existe $\lambda > 0$ tel que $G(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}$ pour tout réel $t \geq 0$.

  Il s'ensuit que :

  - **la variable T : « durée de vie » suit une loi exponentielle de paramètre λ** ;

  - le réel positif λ étant l'inverse de l'espérance mathématique de T, **$\frac{1}{\lambda}$ est la durée de vie moyenne de l'individu.**

3.2.2 L'évolution de la population ou, du microscopique au macroscopique

Nous nous intéressons maintenant à une population d'individus (toujours au sens statistique du terme), selon les données suivantes :

(1) **chaque individu "meurt sans vieillir" avec la même espérance de vie, *i.e.* la durée de vie de chaque individu suit la loi de durée de vie sans vieillissement, avec la même espérance mathématique ;**

(2) **la mort d'un individu laisse de marbre le reste de la population, ou, si l'on préfère : les durées de vie des individus sont des variables aléatoires indépendantes ;**

(3) **à un instant donné, que l'on supposera l'instant 0 pour fixer les idées, la population comporte N_0 individus.**

Alors dans ces conditions à l'instant $t > 0$, le nombre moyen N_t d'individus survivants parmi ces N_0 individus est $N_t = N_0\,\mathrm{e}^{-\lambda t}$.

Remarque préliminaire (avant démonstration et sûrement inutile...)

Aucune hypothèse n'est faite sur l'âge de chacun des N_0 individus, par définition même de ce qu'est une loi de durée de vie sans vieillissement.

Démonstration

Pour la population des N_0 individus, nous avons N_0 répétitions indépendantes d'une même épreuve aléatoire à deux issues contraires :

♥ Succès : être survivant à l'instant *t*, de probabilité $e^{-\lambda t}$;

♠ Échec : être mort avant l'instant *t*.

La variable aléatoire X_t = « nombre de survivants dans la population à l'instant *t* » suit donc la *loi binomiale* $\mathcal{B}(n, p)$ de paramètres : $n = N_0$ et $p = \mathrm{e}^{-\lambda t}$.

Son espérance mathématique (on le sait) est alors calculée par :

$$E(X_t) = n\,p = N_0\,\mathrm{e}^{-\lambda t}$$

D'où le résultat annoncé :

le nombre moyen de survivants à l'instant *t* est : $N_t = N_0\,\mathrm{e}^{-\lambda t}$.

3.2.3 Commentaires et remarques

1. *La réciproque*

Si une variable aléatoire *T*, à valeurs dans $[0,+\infty[$ suit la loi exponentielle de paramètre λ, alors *T* suit la loi de durée de vie sans vieillissement (comme il sera vu à l'exercice 5-1).

La question (naturelle) de la réciproque à la propriété établie en 3.2.1 trouve donc ici sa réponse.

2. *Vivant ou mort*

Les évènements $(T < t+h)$ et $(T \geq t+h)$ étant complémentaires, on a :

$$\mathbb{P}(T < t+h \,/\, T \geq t) + \mathbb{P}(T \geq t+h \,/\, T \geq t) = 1.$$

Cette relation prouve que si l'une des probabilités ci-dessus ne dépend pas de *t*, alors l'autre aussi.

L'interprétation est que, toutes choses égales par ailleurs, la loi de durée de vie sans vieillissement peut être également définie par :

« *si un individu a vécu t unités de temps, alors il* ***décédera*** *dans les h unités de temps à venir avec la même probabilité que s'il venait de naître* ».

Quand bien même elle ne laisserait pas présager un avenir immense, cette version de la durée de vie sans vieillissement - certain la trouveront comme allant de soi - mérite d'être signalée aux élèves.

3. *Simplification*

La vie est plus simple en supposant (c'est la proposition effectuée dans [4], page 73) qu'il existe une fonction f continue positive sur $[0,+\infty[$ telle que :

$$\mathbb{P}(0 \leq T \leq t) = F(t) \text{ avec } F(t) = \int_0^t f(s)\,\mathrm{d}s \text{ et } \lim_{t \to +\infty} F(t) = 1.$$

L'une des facilités que l'on peut aménager réside dans le fait que la fonction G définie par $G(t) = 1 - F(t)$ est **la solution dérivable** de l'équation fonctionnelle de l'exponentielle, conditionnée par $G(0) = 1$.

4. *Désintégration radioactive et applications*

« *Tout se passe donc comme si chaque atome radioactif avait à chaque instant la même probabilité de se briser pendant la seconde suivante [...], cette probabilité ne pouvant être modifiée [...] par le vieillissement spontané de l'atome lui même. [...] l'étude mathématique des phénomènes radioactifs est manifestement du domaine de la théorie des probabilités.* »

Avec cette citation d'Émile BOREL puisée dans la publication de la commission INTER-IREM Lycées Techniques « *La statistique inférentielle en quatre séances* » ([14], page 179) (citation qui donne le ton de l'ouvrage : pertinent, ouvert et enrichissant (à consulter impérativement)), chacun vient de se voir confirmer qu'il n'entrait donc pas dans notre sujet de développer les divers aspects concernant la radioactivité (et ses applications) et que nous préférions mettre le lecteur sur la voie d'articles bien informés.

Et de ce point de vue, l'annexe du Document d'accompagnement des programmes « **Étude de la radioactivité en Terminale S** » (voir [4] page 69 à78) n'est pas moins incontournable : tout y est (datation comprise) et bien fait.

4. Le point de vue différentiel

Étudier un exemple où, *par l'entremise d'une équation différentielle*, la loi exponentielle permet de rendre compte d'un phénomène aléatoire est un objectif mesuré.

Plus ambitieux est celui de **saisir le « pourquoi » d'une telle équation différentielle :**

- quelles sont les hypothèses qui la pilotent ?
- quelle est leur signification ?

Voilà balisé le contenu de ce paragraphe que nous allons entamer ex abrupto (comprendre : « des mathématiques, rien que des mathématiques »).

4.1 Préliminaires mathématiques

➢ *Tout au long de ce paragraphe :*

- la fonction f est la densité d'une loi de probabilité continue sur $[0,+\infty[$, F est la fonction définie sur le même intervalle par : $F(t)=\int_0^t f(s)\mathrm{d}s$ et l'hypothèse est faite que $F(t)<1$ pour tout $t\geq 0$;
- T est une variable aléatoire à valeurs dans $[0,+\infty[$ de fonction de répartition la fonction F.

➢ *Taux de défaillance instantané (ou d'avarie, selon le contexte)*
On démontre très facilement (voir ci-après) que pour tout $t\geq 0$:

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}}\frac{\mathbb{P}(t\leq T\leq t+h/T\geq t)}{h}=\frac{F'(t)}{1-F(t)}$$ (taux de défaillance instantané à l'instant t).

Le passage à la limite (quand h tend vers 0) dans les égalités ci-après suffit :

$$\frac{\mathbb{P}(t\leq T\leq t+h/T\geq t)}{h}=\frac{1}{h}\times\frac{\mathbb{P}(t\leq T\leq t+h)}{\mathbb{P}(T\geq t)}=\frac{F(t+h)-F(t)}{h}\times\frac{1}{1-F(t)}.$$

➢ Nous avons alors la proposition suivante (pour l'instant "venue de nulle part", nous en sommes bien d'accord) mais prometteuse en "révélations" à venir :

Proposition

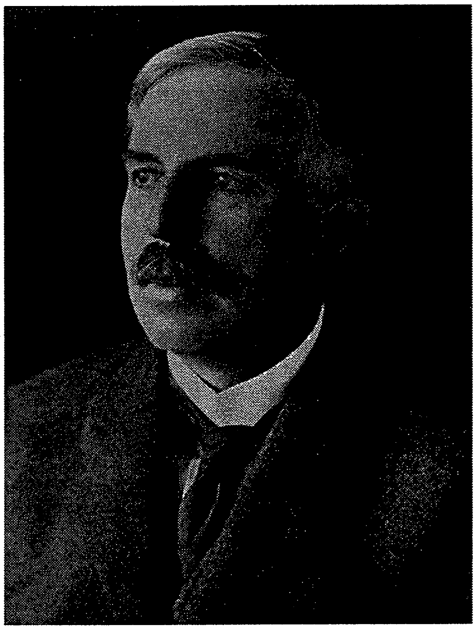
Le taux de défaillance instantané est constant (i.e. égal à un réel $\lambda>0$) si seulement si la variable aléatoire T suit la loi exponentielle de paramètre λ.

Démonstration

- Lorsque $\dfrac{F'(t)}{1-F(t)}=\lambda$ pour tout $t\in[0,+\infty[$, F est une fonction solution de l'équation différentielle $y'+\lambda y=\lambda$, donc de la forme $F(t)=1+Ae^{-\lambda t}$ (A réel).
La condition $F(0)=0$ livre $A=-1$, d'où $F(t)=1-e^{-\lambda t}$ pour $t\in[0,+\infty[$.
- La réciproque est triviale (voir exercice 5-2).

4.2 Nouveau regard sur la désintégration radioactive

« La loi de décroissance radioactive a été explicitée pour la première fois par RUTHERFORD et SODDY en 1902. On peut l'énoncer ainsi : la probabilité pour qu'un atome radioactif se transforme durant un instant $\mathrm{d}t$ *est* $\lambda \mathrm{d}t$*, la quantité* λ*, appelée constante radioactive étant caractéristique du solide considéré et pouvant donc servir à l'identifier.* λ *ne dépend « pas de l'âge » de l'atome, c'est à dire du temps qui le sépare de l'instant de sa formation (« les atomes ne vieillissent pas ») »*
(d'après Encyclopædia Universalis[23]).



Ernest RUTHERFORD (1871-1937)

Ce que nous devons comprendre pourrait donc s'écrire :

$$\mathbb{P}(t \leq T \leq t+h / T \geq t) \sim \lambda h \quad \text{(pour } h \text{ voisin de 0)},$$

où T désigne évidemment la durée de vie d'un atome radioactif.

En classe de Terminale, il sera mieux vu de proposer la loi de RUTHERFORD et SODDY sous la forme :

$$\lim_{h \to 0} \frac{\mathbb{P}(t \leq T \leq t+h / T \geq t)}{h} = \lambda \quad (\lambda > 0).$$

Ayant reconnu dans l'égalité précédente, la propriété : « *le taux de défaillance instantané est constant ou égal à* λ », notre proposition précédente commence tout doucement à prendre du sens, puisqu'elle procure comme conclusion :

« La variable aléatoire « durée de vie d'un atome radioactif » suit une loi exponentielle ».

Commentaire

Il est amusant de constater que deux modélisations a priori d'aspects différents : « durée de vie sans vieillissement », « taux de désintégration instantané constant », conduisent au même résultat.
Mais il va sans dire, que c'est pour d'autres considérations bien plus nobles qu'il nous paraîtrait dommage de tenir cette dernière en dehors de la classe.

---

[23] Voir[28].

4.3 Quelques notions sur la fiabilité

- Pour démêler quelque peu le terme, guère avancés par le Dictionnaire[24], nous nous tournons vers la définition adoptée par la commission électronique internationale (C. E. I.) et par la plupart des spécialistes :
  « caractéristique d'un dispositif, exprimé par la probabilité qu'il accomplisse une fonction requise, dans des conditions données, pendant un temps donné »
  Il y aurait donc " des probabilités dans la fiabilité ".
  Ça alors !

- *Une approche fréquentiste*
  Débrouiller un peu quelques idées sur le sujet ne peut donc être tenu à cet endroit pour une curiosité de " trou de serrure " ; *en particulier il s'agit de s'interroger sur le sens de la quantité* $\dfrac{F'(t)}{1-F(t)}$, *en tant que taux de défaillance instantané.*
  Notre carburant ici sera l'**approche fréquentiste**, car, si elle n'explique pas tous les aspects, elle les éclaire pourtant.
  Considérons un parc d'appareils ou de systèmes[25] réputés identiques subissant des défaillances (panne, avarie, mort,...) selon les données suivantes :

  - **à l'instant $t=0$, n_0 appareils sont mis en service ;**
  - **pour $t \geq 0$, on désigne par N_t le nombre d'appareils en panne à l'instant t ;**
  - **un appareil en panne n'est ni réparé, ni remplacé.**

  Soit t un instant fixé ; intéressons nous à la période $[t, t+h]$ $(h>0)$:

  - en début de période, $n_0 - N_t$ appareils sont opérationnels ;
  - le nombre d'appareils tombés en panne durant cette période est $N_{t+h} - N_t$.

  Par suite, le taux de défaillance (ou d'avarie) moyen durant cette période est calculé par : $\dfrac{N_{t+h}-N_t}{n_0-N_t}$.
  Le quotient $\dfrac{1}{h} \times \dfrac{N_{t+h}-N_t}{n_0-N_t}$ apparaît donc comme *le taux de défaillance moyen par unité de temps* sur cette période $[t, t+h]$.
  Franchissons le pas : **le taux de défaillance instantané à l'instant *t*,** noté $\lambda(t)$ sera la limite de ce rapport lorsque h tend vers 0 :

$$\lambda(t) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \times \frac{N_{t+h}-N_t}{n_0-N_t}.$$

---

24 « *Aptitude (?) d'un système, d'un matériel à fonctionner sans incident pendant un temps donné* » (PETIT ROBERT)

25 Le terme est à prendre dans un sens très large : système technologique, économique, organique, etc....

C'est là que s'introduit la fonction $\widehat{F}$ définie par $\widehat{F}(t)=\dfrac{N_t}{n_0}$, qui est **la proportion d'appareils en panne à l'instant *t*.**

Alors, des relations :

$$N_t = n_0\widehat{F}(t)\ ;\ N_{t+h} = n_0\widehat{F}(t+h)\ \text{ et }\ n_0 - N_t = n_0\left(1-\widehat{F}(t)\right),$$

nous tirons $\lambda(t)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\widehat{F}(t+h)-\widehat{F}(t)}{h}\times\dfrac{1}{1-\widehat{F}(t)}$.

Voilà pourquoi, si la durée de vie ou de fonctionnement d'un système est une variable aléatoire *T* satisfaisant les hypothèses du paragraphe 4-1, **le taux de défaillance instantané du système à l'instant *t* se définit par :**

$$\lambda(t)=\frac{F'(t)}{1-F(t)}$$

(où F est la fonction de répartition de T (rappel)).

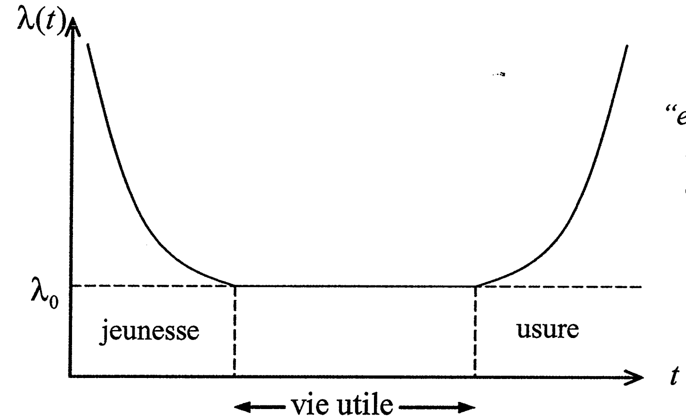
➢ *Taux de défaillance instantané constant*

Notre proposition du paragraphe 4-1 conduit sans détour à :

« *la durée de fonctionnement d'un système est une variable aléatoire de loi exponentielle si et seulement si le taux de défaillance instantané est constant* ».

➢ *Commentaires*

1- La célèbre courbe dite « *en baignoire* » rend fidèlement compte d'un phénomène fréquent concernant un système ou un équipement (électronique ou non), plus ou moins marqué selon le type de matériel.



La courbe "en baignoire" du taux de défaillance instantané

On distingue généralement trois périodes :

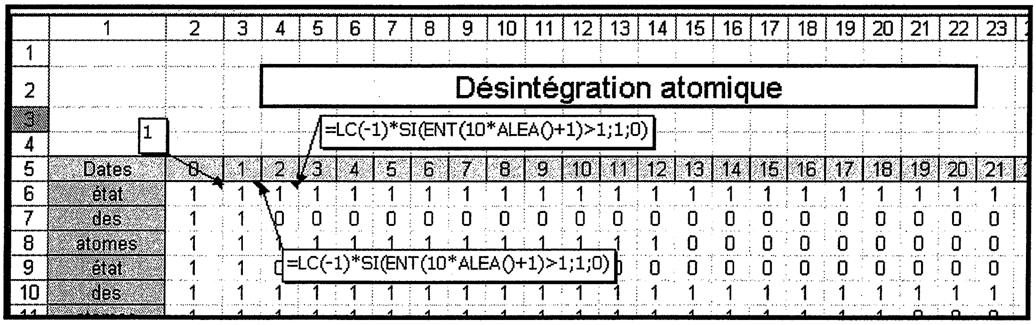
- la période des avaries de jeunesse où le taux de défaillance instantané est une fonction décroissante ;
- la période des défaillance *progressives* (ou avaries d'usure) ; le taux de défaillance instantané croît ;
- la vie utile pendant laquelle le taux de défaillance est sensiblement constant où les défaillances sont dites *catalectiques*[26]. C'est durant cette période que la

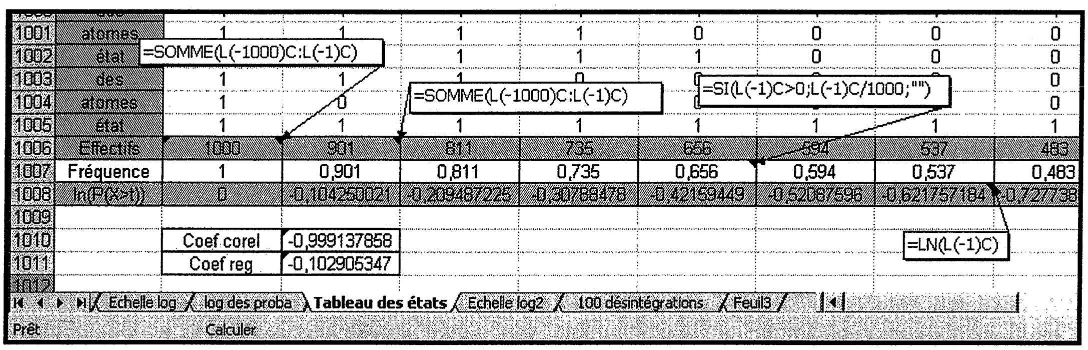
[26] L'éclatement d'un pneu dû à une crevaison correspond à ce type de défaillance alors que résultant d'une usure, il correspond à une défaillance progressive (d'après [28]).

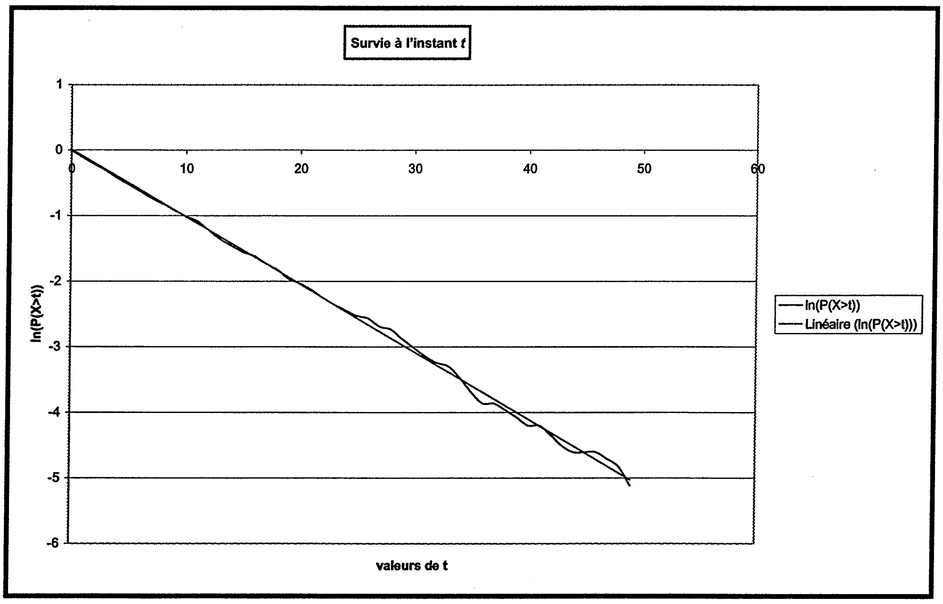
durée de vie (ou de fonctionnement) de l'équipement peut être assimilée à une variable de loi exponentielle.

2- L'étude précédente bien que rustique trouverait difficilement sa place - telle quelle - dans une classe de terminale.
Il n'empêche : on peut se rattraper en **simulant** une version discrète (il ne peut en être autrement) d'un tel phénomène, qui " donne à voir " (cf. ci-après).
Certains, d'ailleurs, commenceront par là avec leurs élèves ; accordons leur un bon point : c'est ce que nous voulions faire…
Mais parce que , l'art d'œuvrer à l'envers permet parfois d'épingler une présentation, une démarche, un scénario, quelques trouvailles… qui ne seraient jamais arrivés en sifflant, il n'était peut-être pas idiot que cet ouvrage s'achève (ou presque) ainsi…

4.4 Simulation : " La décimation permanente "







5. Exercices

Les thèmes proposés suivent fidèlement le déroulement du présent chapitre.

Thème 1 « *Loi exponentielle* »
(Exercices 5-1 à 5-5)
Simples exercices de base sur la loi exponentielle incluant les réciproques annoncées (cf. loi de durée de vie sans vieillissement et taux de défaillance instantané constant).

Thème 2 « *Loi de durée de vie sans vieillissement* »
(Exercices 5-6 à 5-10)
Les classiques bien sûr : calculs de la demi-vie (exercice 5-6), de la probabilité de vivre au delà de l'espérance de vie (exercice 5-7), etc., mais aussi quelques interrogations un peu plus subtiles (voir l'exercice 5-8)

Thème 3 « *À partir de la loi exponentielle...* »
(Exercices 5-11 et 5-12)
Exercices 5-11 : de la loi exponentielle à la loi uniforme.
Exercices 5-12 : de la loi exponentielle à une loi gamma.

Thème 4 « *Systèmes composés* »
(Exercices 5-13 à 5-15)
Étude d'un ensemble de systèmes - sous certaines conditions - en série, parallèles, mixtes... (tout à fait basique en théorie de la fiabilité).

Exercice 5-1

La variable aléatoire T à valeurs dans $[0,+\infty[$ suit la loi exponentielle de paramètre λ $(\lambda > 0)$.
Montrer qu'elle est " sans mémoire "[1], c'est à dire :
$\mathbb{P}(T \geq t+h / T \geq t) = P(T \geq h)$ **pour t et h positifs quelconques.**

Solution
Désignons par F la fonction de répartition de T.

Nous avons : $\mathbb{P}(T \geq t+h / T \geq t) = \dfrac{1-F(t+h)}{1-F(t)}$,

d'après l'expression d'une probabilité conditionnelle, d'où :

$$\mathbb{P}(T \geq t+h / T \geq t) = \frac{e^{-\lambda(t+h)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda h} = 1-F(h) = P(T \geq h).$$

Commentaire
Cet exercice fait écho à la remarque 1 du paragraphe 3.2.3 (page 254)

Exercice 5-2

La variable aléatoire T à valeurs dans T à valeurs dans $[0,+\infty[$ suit la loi exponentielle de paramètre λ $(\lambda > 0)$.
Montrer que pour tout réel positif t, on a :

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h>0}} \frac{\mathbb{P}(t \leq T \leq t+h / T \geq t)}{h} = \lambda .$$

Solution
Uniquement pour ne pas avoir à tourner les pages[2] :

$$\frac{\mathbb{P}(t \leq T \leq t+h / T \geq t)}{h} = \frac{1}{h} \times \frac{\mathbb{P}(t \leq T \leq t+h)}{\mathbb{P}(T \geq t)} = \frac{F(t+h)-F(t)}{h} \times \frac{1}{1-F(t)}.$$

La fonction F définie sur $[0,+\infty[$ par $F(t) = 1-e^{-\lambda t}$ étant dérivable, de dérivée f avec $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$, on a : $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h>0}} \dfrac{F(t+h)-F(t)}{h} = \lambda e^{-\lambda t}$.

En découle le résultat énoncé : $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h>0}} \dfrac{\mathbb{P}(t \leq T \leq t+h / T \geq t)}{h} = \lambda$

Commentaire
Dans le même esprit que l'exercice 5-1

---

[1] Ou encore « good as new » ([8] chapitre 3).

[2] Nous ne faisons que reprendre le contenu du paragraphe 4.1 (page 256).

Exercice 5-3

Soit λ un réel positif. Prouver que $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x te^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda^2}$.

Solution

Avec une intégration par parties on obtient : $\int_0^x te^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{\lambda}xe^{-\lambda x} + \frac{1}{\lambda}\int_0^x e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t$,

puis : $\int_0^x te^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{\lambda}xe^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x} + \frac{1}{\lambda^2}$.

Par suite $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x te^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda^2}$.

Commentaire

Il s'agit de s'affranchir d'un résultat du calcul intégral - nous le noterons $\int_0^{+\infty} te^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda^2}$ - que l'on va resservir dans le calcul de l'espérance mathématique de variables aléatoires.

Exercice 5-4 [3]

La durée de fonctionnement d'une ampoule électrique est une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle.

La probabilité que cette durée excède 100 heures est 0,9.

1° Quelle est la probabilité de fonctionner plus de 200 heures ?

2° Quelle est la durée de fonctionnement qu'elle peut atteindre avec la probabilité de 0,95 ?

Solution

Il existe $\lambda > 0$ tel que $\mathbb{P}(T \le t) = 1 - e^{-\lambda t}$ et l'énoncé indique que $\mathbb{P}(T \ge 100) = 0,9$.

La valeur de λ s'en déduit par l'équation $e^{-\lambda\times 100} = 0,9$:

de solution $\lambda = \frac{1}{100}\ln\left(\frac{10}{9}\right) \approx 0,001$

1° La probabilité de fonctionner plus de 200 heures est

$$\mathbb{P}(T \ge 100) = e^{-\lambda\times 200} = \left(e^{-\lambda\times 100}\right)^2 = 0,9^2 = 0,81.$$

2° Nous cherchons $t_0 > 0$ tel que $\mathbb{P}(T \ge t_0) = 0,95$ ou encore $e^{-\lambda t_0} = 0,95$.

Avec $\lambda = \frac{1}{100}\ln\left(\frac{10}{9}\right)$, vient $t_0 = 100\times\frac{\ln 0,95}{\ln 0,9}$,

soit environ 48 heures 41 minutes.

Commentaire

Simple exercice d'application, sans prétention aucune.

---

[3] D'après [15]

Exercice 5-5

Cet exercice est extrait de l'ouvrage (truculent) de Gérard FRUGIER : Exercices ordinaires de Probabilités ([17]).

« Chaque jour, à 20 heures, Jacques attends Madeleine avec ses lilas. Le temps qu'il doit patienter avant son arrivée suit une loi exponentielle de moyenne 5 heures. Si elle arrive avant 22 heures, ils vont manger des frites chez Eugène par le tram 33, sinon il rentre seul chez lui par le tram 21.

Quel est le nombre moyen de tickets de tram qu'il utilise en septante jours ? »

***Notes* :**

1. **s'ils prennent le tram 33, c'est bien sûr Jacques qui fournit le ticket de tram à Madeleine ;**
2. **septante = soixante-dix.**

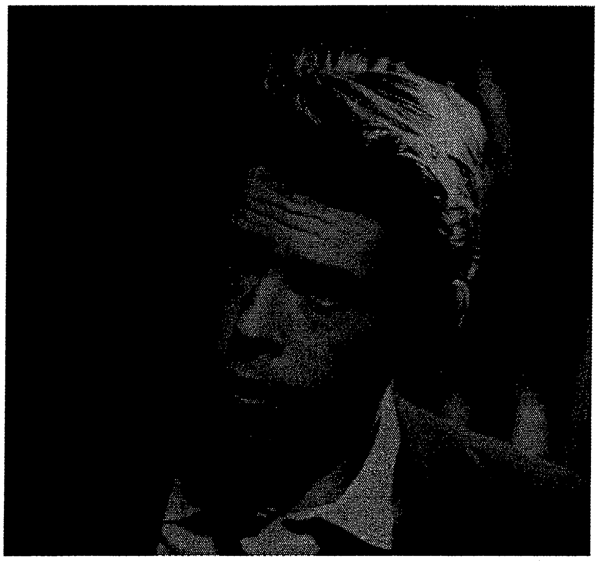
Solution

Il nous faut rajouter aux 70 tickets utilisés par Jacques (que ce soit par le tram 33 ou le tram 21) le nombre moyen de tickets fournis à Madeleine, qui est, selon les préceptes de la loi binomiale, $70 \times p$ où p est la probabilité que Madeleine arrive avant 22 heures[4].

L'heure étant l'unité de temps, la probabilité p est donnée par $p = P(T \leq 2)$ où T est la variable aléatoire égale au temps d'attente, qui d'après l'énoncé suit la loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{5}$.

Avec $\mathrm{P}(T \leq 2) = 1 - e^{-\frac{1}{5}\times 2}$, on obtient $p = 1 - e^{-0,4} \approx 0,33$.

D'où la réponse : 93 tickets, soit nonante-trois tickets (environ).



[4] Nous formons l'hypothèse que les heures d'arrivée de Madeleine durant les 70 jours sont indépendantes les unes des autres.

Dans les exercices 5-6 à 5-9, on considère un individu statistique dont la durée de vie est une variable aléatoire T à valeurs dans $[0,+\infty[$ qui suit la loi exponentielle de paramètre λ $(\lambda > 0)$.

Exercice 5-6 *Demi-vie*

Le temps de demi-vie τ est défini par $\mathbb{P}(T \leq \tau) = \frac{1}{2}$.

Montrer qu'il est aussi défini par l'égalité : $\mathbb{P}(T \leq \tau) = \mathbb{P}(T \geq \tau)$ et calculer sa valeur en fonction de λ.

Solution

La première partie de la question trouve sa réponse dans la relation :

$$\mathbb{P}(T \leq t) + \mathbb{P}(T \geq t) = 1 \quad (t \geq 0 \text{ quelconque}).$$

Quant à la seconde, il suffit de résoudre sur $[0,+\infty[$, l'équation $1 - e^{-\lambda t} = \frac{1}{2}$; on obtient immédiatement $\tau = \frac{1}{\lambda} \ln 2$.

Commentaire

Le nombre τ est la *valeur médiane* de la loi exponentielle de paramètre λ encore appelée *période* dans le cas de la désintégration radioactive.

Exercice 5-7

Montrer que la probabilité de vivre au delà de l'espérance de vie ne dépend pas du paramètre λ et évaluer cette probabilité.

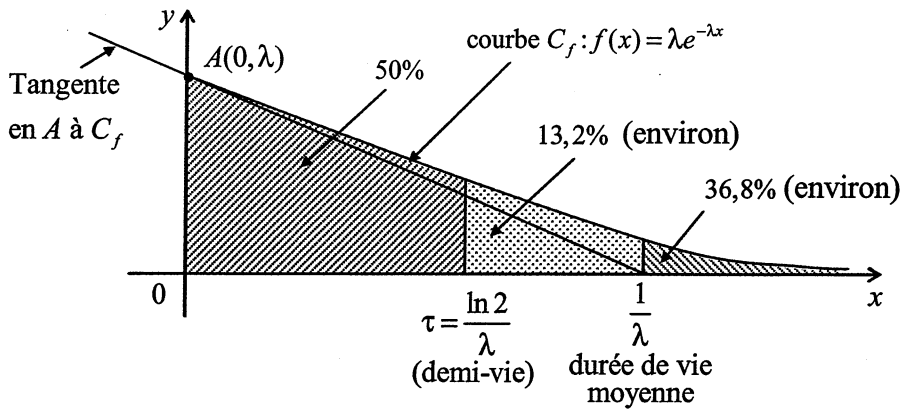
Solution

L'espérance de vie est $E(T) = \frac{1}{\lambda}$ (voir paragraphe 3.2.1, page 253).

Par conséquent, $\mathbb{P}(T > E(T)) = e^{-\lambda E(T)} = e^{-1} \approx 36{,}8\%$.

Commentaire

Le graphique ci-dessous résume les deux résultats précédents :



Exercice 5-8

Soit h un réel strictement positif fixé.

Répondre d'abord " intuitivement " puis en argumentant à chacune des questions suivantes :

1° Soit s et t deux réels tels que $0 \leq s \leq t$.
Le décès durant la période $[t, t+h]$ est-il plus probable que durant la période $[s, s+h]$?

2° Existe-t-il un instant t ($t \geq 0$) tel que le décès durant la période $[t, t+h]$ soit le plus probable ?

3° Quelle est la limite lorsque t tend vers $+\infty$ de la probabilité de décès durant la période $[t, t+h]$?

Solution

La probabilité de décès durant l'intervalle de temps $[t, t+h]$ est :

$$P(t \leq T \leq t+h) = e^{-\lambda t} - e^{-\lambda(t+h)} = e^{-\lambda t}(1-e^{-\lambda h}) = e^{-\lambda t} \cdot \mathbb{P}(0 \leq T \leq h).$$

En posant $\varphi(t) = \mathbb{P}(t \leq T \leq t+h)$, nous obtenons donc : $\varphi(t) = e^{-\lambda t}\varphi(0)$.

Il s'ensuit que la fonction φ décroît sur $[0, +\infty[$ de $\varphi(0)$ à 0 (car $\lim\limits_{t \to +\infty} \varphi(t) = 0$), ce qui répond à l'ensemble des questions.

Commentaires

Si ces résultats déduits du calcul infirment l'opinion commune qui voudrait que « le risque de décéder entre 10 et 11 ans est moindre qu'entre 80 et 81 ans », n'en concluons pas pour autant que cet exercice cache des choses pas nettes.

Non seulement la loi de durée de vie d'un individu comme vous et nous ne relève pas du modèle exponentiel (le peu que nous en savons permet d'accréditer cette idée...), mais, de plus, même enfermée dans son équation particulière, la loi de durée de vie sans vieillissement n'autorise nullement la confusion entre la probabilité de décès durant le temps $[t, t+h]$ ($\mathbb{P}(t \leq T \leq t+h)$) et celle de décéder avant l'instant $t+h$ *sachant que* l'individu est vivant à l'instant t ($\mathrm{P}(T \leq t+h / T \geq t)$), que nous savons indépendante de t.

Bien au contraire, puisque $\mathrm{P}(t \leq T \leq t+h) = \mathrm{P}(T \geq t) \times \mathrm{P}(T \leq t+h / T \geq t)$.

Dès lors, à y réfléchir un tant soi peu, il ne reste rien pour s'étonner.

Exercice 5-9

Pour quelle valeur de t la probabilité de décéder durant l'intervalle $[t,2t]$ est-elle maximale ? Calculer cette probabilité.

Solution

Nous avons $\mathbb{P}(t \le T \le 2t) = e^{-\lambda t} - e^{-2\lambda t} = e^{-\lambda t}(1-e^{-\lambda t})$.

Inutile de s'engager dans le calcul de variations : les nombres $e^{-\lambda t}$ et $1-e^{-\lambda t}$ étant de somme constante ($e^{-\lambda t}+(1-e^{-\lambda t})=1$), leur produit est maximum lorsque les nombres sont égaux : $e^{-\lambda t}=1-e^{-\lambda t}$. On trouve immédiatement $t=\tau$ (demi-vie, cf. exercice 5-5)

Exercice 5-10

La probabilité qu'un atome de Radon-220 ne soit pas désintégré en 40 secondes sachant qu'il ne l'est pas en 12 secondes est $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Quelle est la probabilité qu'il soit désintégré avant 76 secondes sachant qu'il ne l'ait pas en 20 secondes ?

Solution

Désignons par T la durée de vie (en secondes) d'un atome de Radon-220 : T est une variable aléatoire qui suit la loi de durée de vie sans vieillissement.

Nous avons donc : $\mathbb{P}(T \ge 40/T \ge 12) = \mathbb{P}(T \ge 28+12/T \ge 12) = \mathbb{P}(T \ge 28) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Par ailleurs, $\mathbb{P}(T \le 76/T \ge 20) = 1-\mathbb{P}(T \ge 20+56/T \ge 20) = 1-\mathbb{P}(T \ge 56)$.

Or, $\mathbb{P}(T \ge 56) = \mathbb{P}(T \ge 2\times 28) = (\mathbb{P}(T \ge 28))^2$, d'où, $\mathbb{P}(T \ge 56) = \dfrac{1}{2}$.

Commentaires

1- L'égalité ci-dessus montre que la demi-vie d'un atome de Radon-220 est 56 secondes, et donc la constante radioactive λ du Radon-220 est $\lambda = \dfrac{\ln 2}{56}$ (cf. exercice 5-5).

2- L'égalité $\mathbb{P}(T \ge 28) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ permettrait d'emblée de calculer λ (par la relation $e^{-\lambda\times 28} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$). Nous nous en sommes volontairement passés afin de faire ressortir les propriétés qui caractérisent la loi de durée de vie sans vieillissement (en particulier l'égalité $\mathbb{P}(T \ge 2h) = (\mathbb{P}(T \ge h))^2$ directement issue de :

- $\mathbb{P}(T \ge 2h/T \ge h) = \dfrac{\mathbb{P}(T \ge 2h)}{\mathbb{P}(T \ge h)}$ (conditionnement) ;
- $\mathbb{P}(T \ge 2h/T \ge h) = \mathbb{P}(T \ge h)$ (loi de durée de vie sans vieillissement).

Exercice 5-11 *De la loi exponentielle à la loi uniforme*

La durée de fonctionnement d'un système est une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle, la durée moyenne de fonctionnement étant 10 000 heures.
Le système est mis en marche le jour J à 0 heure.

1° Soit n un entier ($n \geq 1$). Quelle est la probabilité p_n que le système soit tombé en panne l'un des n premiers jours et ce entre midi et quatorze heures ?

2° Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$ et interpréter.

Solution

Nous traiterons le problème dans sa généralité en remplaçant la tranche horaire " midi – quatorze heures " par la tranche horaire $[t_1, t_2]$ ($0 \leq t_1 < t_2 \leq 24$).

1° L'événement : " le système tombe en panne l'un des n premiers jours dans la tranche horaire $[t_1, t_2]$ " est la réunion disjointe des évènements :

$(t_1 \leq T \leq t_2)$, $(24 + t_1 \leq T \leq 24 + t_2)$,..., $(24(n-1) + t_1 \leq T \leq 24(n-1) + t_2)$.

En notant (pour l'instant) λ le paramètre de la loi exponentielle, nous avons ainsi :

$$p_n = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(24k + t_1 \leq T \leq 24k + t_2) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{-\lambda(24k+t_1)} - e^{-\lambda(24k+t_2)}\right),$$

soit $p_n = (e^{-\lambda t_1} - e^{-\lambda t_2}) \times \sum\limits_{k=0}^{n-1} (e^{-24\lambda})^k$.

Finalement : $p_n = \dfrac{e^{-\lambda t_1} - e^{-\lambda t_2}}{1 - e^{-\lambda 24}} \times \left(1 - (e^{-24\lambda})^n\right)$.

2° Comme $0 < e^{-24\lambda} < 1$, il vient que :

$$\lim_{n\to+\infty} p_n = \frac{e^{-\lambda t_1} - e^{-\lambda t_2}}{1 - e^{-\lambda 24}}.$$

L'interprétation n'a rien de surhumain : $p = \lim\limits_{n\to+\infty} p_n$ est la probabilité que le système tombe en panne dans la tranche horaire $[t_1, t_2]$.

Avec $\lambda = 10^{-4}$ et $0 \leq t \leq 24$, $e^{-\lambda t}$ est bien approximée[5] par $1 - \lambda t$, d'où l'on déduit : $p \approx \dfrac{t_2 - t_1}{24}$.

---

[5] L'erreur est inférieure à 3×10^{-6}, comme le montre l'encadrement $0 \leq e^{-x} - (1 - x) \leq \dfrac{x^2}{2}$, pour $x \geq 0$ (voir commentaire 1)

Commentaires

1- *Sur la qualité de l'approximation.*

L'inégalité $e^{-t} \geq 1-t$ pour $t \geq 0$ est classique en terminale : étude de la fonction $t \mapsto e^{-t}-(1-t)$ ou " intégration de l'inégalité " $e^{-u} \leq 1$ pour $u \geq 0$.

Dès lors, avec $x \geq 0$, on obtient :

$$\int_0^x e^{-t}\mathrm{d}t \geq \int_0^x (1-t)\mathrm{d}t, \text{ soit : } 1-e^{-x} \geq x-\frac{x^2}{2}$$

Finalement, $0 \leq e^{-x}-(1-x) \leq \dfrac{x^2}{2}$ pour tout $x \geq 0$.

Par suite, avec $\lambda = 10^{-4}$ et $0 \leq t \leq 24$, il vient :

$$0 \leq e^{-\lambda t}(1-\lambda t) \leq \frac{\lambda^2 t^2}{2} \leq 10^{-8} \times \frac{24^2}{2}.$$

Comme $\dfrac{24^2}{2} = 288 \leq 3\times 10^2$, l'erreur commise est inférieure à 3×10^{-6}.

2- Si l'on désigne par H la **variable aléatoire** à valeurs dans $[0,24]$ $\boldsymbol{H}$ **= "heure de la panne"**, alors nous pouvons avancer que H suit à peu près (mais de très près) **la loi uniforme** sur $[0,24]$.

3- Une telle conclusion serait évidemment prise en défaut avec des durées moyennes de fonctionnement "faibles".

Par exemple, avec $\lambda = \dfrac{1}{24}$[6], c'est presque un coup sûr de parier sur la panne durant la tranche $[0,12]$, puisque $\mathbb{P}(0 \leq H \leq 12) = \dfrac{1-e^{-\frac{1}{2}}}{1-e^{-1}} \approx 0{,}96$.

[6] Donnée qui serait ridicule dans le contexte : elle signifie que la durée de vie moyenne de fonctionnement du système est un jour.
Dès lors, à quoi bon ?

Exercice 5-12

1° *Préliminaire*

Soit λ un réel strictement positif et f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par :

$$f(x)=\lambda^2 x e^{-\lambda x}.$$

Montrer que f est une densité de probabilité sur $[0,+\infty[$ (on notera P la loi de probabilité ainsi définie) et déterminer la fonction de répartition d'une variable aléatoire de loi P.

On admet alors le résultat suivant :

« Si deux variables aléatoires indépendantes suivent la loi exponentielle de paramètre λ, leur somme est une variable aléatoire qui suit la loi P ».

2° L'unité de longueur étant le mètre, la longueur d'une galerie creusée par une taupe dans le jardin est une variable aléatoire à valeur dans $[0,+\infty[$ qui suit une loi exponentielle de moyenne égale à 10.

a) Quelle est la probabilité qu'une taupe creuse une galerie de plus de 30 m sachant qu'elle a déjà creusé 10 m ?

b) Reprendre la question précédente avec la longueur totale des galeries creusées par deux taupes évoluant indépendamment l'une de l'autre.

Solution

1° La fonction f est continue, positive sur $[0,+\infty[$ et à l'aide d'une intégration par parties, il vient : $F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t=1-(\lambda x+1)\,e^{-\lambda x}$.

Par suite :

- $\lim_{x\to+\infty} F(x)=1$ (i. e. $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t=1$), ce qui prouve que f est la densité d'une loi de probabilité P sur $[0,+\infty[$;
- F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire de la loi P.

2° a) La longueur de la galerie creusée par une taupe est une variable aléatoire X qui suit la loi exponentielle de paramètre $0,1$.

Nous avons donc :

$$\mathbb{P}(X\geq 30 / X\geq 10)=\frac{\mathbb{P}(X\geq 30)}{\mathbb{P}(X\geq 10)}=\frac{e^{-0,1\times 30}}{e^{-0,1\times 10}}=\frac{1}{e^2}\approx 0,135.$$

b) Les hypothèses sont réunies pour pouvoir affirmer que la longueur totale des galeries creusées par les deux taupes est une variable aléatoire S qui suit la loi P de densité $f(x)=0,1^2 x e^{-0,1x}$ et de fonction de répartition F avec $F(x)=1-(0,1x+1)e^{-0,1x}$.

En conséquence :

$$\mathbb{P}(X\geq 30 / X\geq 10)=\frac{\mathbb{P}(X\geq 30)}{\mathbb{P}(X\geq 10)}=\frac{1-F(30)}{1-F(10)}=\frac{2}{e^2}\approx 0,27$$

Commentaires

1- Signalons le résultat général :

« La somme de n variables aléatoires indépendantes suivant la même loi exponentielle de paramètre λ ($\lambda > 0$) suit la loi de densité

$x \mapsto \dfrac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\lambda x}$, appelée loi gamma de paramètres n et λ. »

2- On peut envisager le calcul de l'espérance mathématique de la loi P de deux manières :

- par le calcul de $\int_0^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x$:

$$\int_0^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \lambda^2 x^2 e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{+\infty} \lambda x e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\lambda}.$$

(intégration par parties et évaluation de l'espérance mathématique de la loi exponentielle) ;
- par la linéarité de l'espérance mathématique :

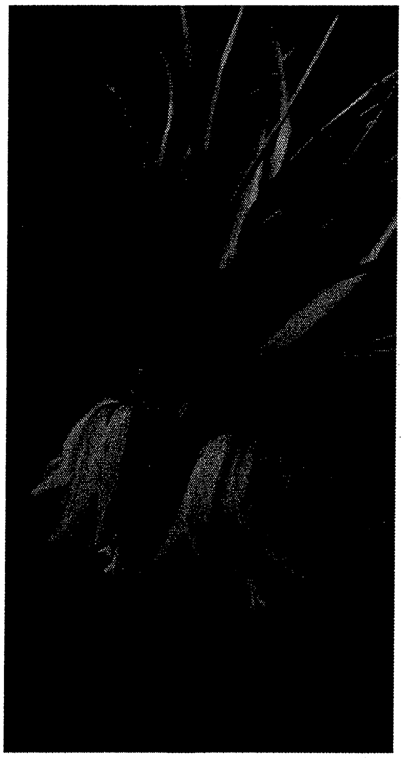
Si X et Y suivent la loi $\mathcal{E}(\lambda)$, alors $E(X) = E(Y) = \dfrac{1}{\lambda}$, d'où $E(X) + E(Y) = \dfrac{2}{\lambda}$.

De plus si X et Y sont indépendantes et suivent toutes les deux la loi $\mathcal{E}(\lambda)$, la variable aléatoire $X + Y$ suit la loi P.

En découle que l'espérance mathématique de P est $\dfrac{2}{\lambda}$.

« D'autre part, quelques catalogues de jardinerie prêtent à certaines plantes (fritillaire impériale...) le pouvoir d'éloigner taupes et rongeurs. Cela n'est malheureusement nullement prouvé. »

(1001 Trucs et Astuces pour le Jardin)



Fritillaria imperialis

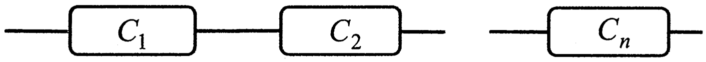
Exercices 5-13 à 5-13 *Fiabilité des systèmes*

Dans les exercices 5-13 à 5-15, nous proposons d'étudier quelques exemples de systèmes composés sous les hypothèses suivantes :

- **les durées de fonctionnement des composants $C_1, C_2, ..., C_n$ du système sont des variables aléatoires $T_1, T_2, ..., T_n$ qui suivent toutes des lois exponentielles de paramètres respectifs $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$;**
- **les variables aléatoires $T_1, T_2, ..., T_n$ sont supposées indépendantes.**

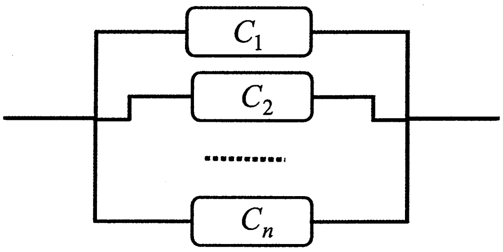
Parce que faciles d'accès, nous prenons à notre compte la terminologie et l'imagerie adoptées en théorie de la fiabilité des systèmes :

- ***composants en série***



Ce système est panne lorsque l'un des composants du système est en panne ;

- ***composants en parallèles***
  Ce système est panne lorsque tous les composants du système sont en panne.



Nous désignerons par T la variable aléatoire « durée de fonctionnement du système » et par F la fonction de répartition de T, à savoir $F(t) = \mathbb{P}(T \leq t)$.

Exercice 5-13 *Composants en série*

Montrer que T suit la loi exponentielle de paramètre λ définie par $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_n$.

Solution

Le système en série est en fonctionnement à l'instant t si et seulement si il en est de même pour chacun de ses composants.

L'événement $(T > t)$ est donc égal à $\bigcap_{i=1}^{n} (T_i > t)$,

d'où $\mathbb{P}(T > t) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(T_i > t)$ (hypothèse d'indépendance),

On en déduit : $\mathbb{P}(T > t) = \prod_{i=1}^{n} e^{-\lambda_i t} = e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_n)t}$.

Autrement dit, avec $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_n$:

$$\mathbb{P}(T > t) = 1 - e^{-\lambda t} \text{ ; } T \text{ suit la loi de paramètre } \lambda.$$

Commentaires

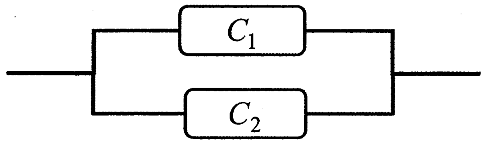
Comme il est dit dans [8] « *le système en série est, en fait, la façon la plus fragile d'associer les composants entre eux* » (c'est on ne peut plus clair).

Exercice 5-14 *Composants en parallèle*

1° Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par : $f(t)=2\lambda\left(e^{-\lambda t}-e^{-2\lambda t}\right)$ où λ est un réel positif donné.

Montrer que f est la densité d'une loi de probabilité P sur $[0,+\infty[$.

2° Les composants C_1 et C_2 montés en parallèles suivent la même loi exponentielle de paramètre λ.



Montrer que la durée de fonctionnement de T du système suit la loi P.

3° Calculer la durée moyenne de fonctionnement du système sachant qu'elle est donnée par $\lim\limits_{t\to+\infty}\left(\int_0^t sf(s)\mathrm{d}s\right)$.

Solution

1° La fonction f est positive et continue sur $[0,+\infty[$ et, pour tout $t\geq 0$:

$$F(t)=\int_0^t f(s)\mathrm{d}s=\left(1-e^{-\lambda t}\right)^2 \text{ d'où } \lim_{t\to+\infty}\left(\int_0^t f(s)\,\mathrm{d}s\right)=1.$$

Ainsi f est une densité de probabilité sur $[0,+\infty[$.

2° Le système est en panne à l'instant t si et seulement si les deux composants le sont. Nous avons donc :

$$\mathbb{P}(T\leq t)=\mathbb{P}\left((T_1\leq t)\cap(T_2\leq t)\right)=\mathbb{P}(T_1\leq t)\times\mathbb{P}(T_2\leq t),$$

car T_1 et T_2 sont des variables aléatoires indépendantes.

Ainsi $\mathbb{P}(T\leq t)=\left(1-e^{-\lambda t}\right)^2$ (i. e. T suit la loi de probabilité P).

3° Lorsque x tend vers $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\int_0^x \lambda e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t\right)=\frac{1}{\lambda} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty}\left(\int_0^x 2\lambda e^{-2\lambda t}\,\mathrm{d}t\right)=\frac{1}{2\lambda}$$

(en considérant les résultats sur l'espérance mathématique des lois exponentielles).

Nous en déduisons : $E(T)=\dfrac{2}{\lambda}-\dfrac{1}{2\lambda}=\dfrac{3}{2\lambda}$.

Commentaires

1- Le résultat est conforme à l'intuition : la durée moyenne de fonctionnement d'un système "en parallèle" est supérieure à celle de chacun de ses composants.

2- Dans le cas d'un système composé de n éléments en parallèle, tous de durée moyenne de fonctionnement égale à $\dfrac{1}{\lambda}$, la durée moyenne de fonctionnement du système est

$$E(T)=\frac{1}{\lambda}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right).$$

C'est assez simple du reste :

on a $F(t) = (1-e^{-\lambda t})^n$, (évident)

puis $E(T) = \int_0^{+\infty} (1-F(t))\,\mathrm{d}t$ (résultat de portée générale[7] qui s'établit ici à l'aide d'une simple intégration par parties).

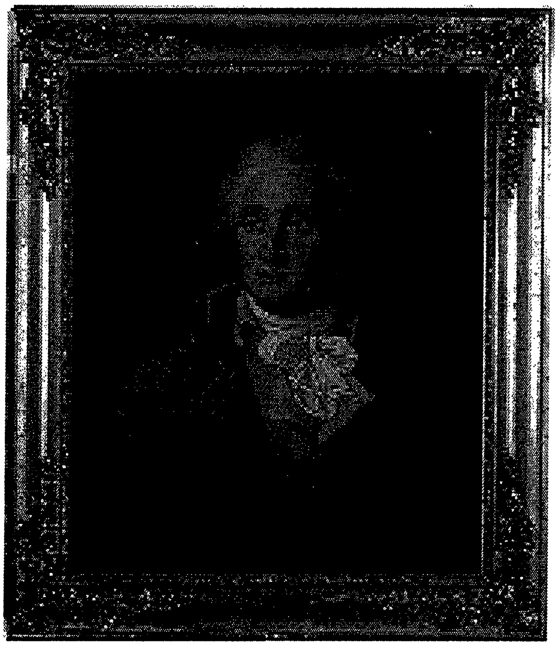
Le changement de variable $x = 1-e^{-\lambda t}$ livre

$$E(T) = \frac{1}{\lambda}\int_0^1 \frac{1-x^n}{1-x}\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right).$$

3- Le taux de défaillance instantané du système à l'instant t, $\lambda(t)$ est (cf. page 256)

$$\lambda(t) = \frac{F'(t)}{1-F(t)} = 2\lambda\left(1-\frac{1}{2-e^{-\lambda t}}\right).$$

Il reste strictement inférieure à λ (taux de défaillance instantané constant de chacun des deux composants C_1 et C_2) et pour donner une idée, il reste inférieur à $\frac{\lambda}{2}$ durant la période $\left[0, \frac{1}{\lambda}\ln\left(\frac{3}{2}\right)\right]$ ($4\,000$ heures environ pour des composants C_1 et C_2 fonctionnant chacun $10\,000$ heures en moyenne).



Marquis de CONDORCET (1743-1794)

« *Concluons qu'il ne serait pas entièrement impossible de réduire toute cette théorie des probabilités à un calcul assez réglé si de bons génies voulaient concourir par des recherches, des observations, une étude suivie, et une analyse du cœur et de l'esprit, fondés sur l'expérience, à cultiver cette branche si importante de nos connaissances, et si utile dans la pratique continuelle de la vie.* »

(Encyclopédie Méthodique. Mathématiques 1784)

---

[7] Qu'on peut étudier à l'aide du théorème de Fubini par exemple (voir [16] chapitre 11)

Exercice 5-15 *Systèmes mixtes*

Le système est formé de trois composants C_1, C_2 et C_3 et toutes choses égales par ailleurs, on suppose que :

- $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$;
- **le système fonctionne tant que deux composants au moins sont en état de marche.**

1° Montrer que la variable aléatoire T « durée de fonctionnement du système » a pour fonction de répartition F définie par :

$$F(t) = 1 - 3e^{-2\lambda t} + 2e^{-3\lambda t}.$$

2° On note f la dérivée de F et l'on admet que la durée moyenne de fonctionnement du système est : $E(T) = \lim\limits_{x \to +\infty}\left(\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t\right)$.

Prouver que $E(T) = \dfrac{5}{6\lambda}$.

Solution

1° L'événement $(T \leq t)$ est la réunion des évènements :

$$(T_1 \leq t) \cap (T_2 \leq t) \cap (T_3 > t)$$
$$(T_1 \leq t) \cap (T_2 > t) \cap (T_3 \leq t)$$
$$(T_1 > t) \cap (T_2 \leq t) \cap (T_3 \leq t)$$
$$(T_1 \leq t) \cap (T_2 \leq t) \cap (T_3 \leq t).$$

Les variables aléatoires T_1, T_2 et T_3 étant indépendantes, chacun de ces trois premiers évènements a pour probabilité $(1 - e^{-\lambda t})^2 e^{-\lambda t}$; quant au dernier sa probabilité est $(1 - e^{-\lambda t})^3$.

Comme à l'évidence ces évènements sont disjoints, il vient :

$$\mathbb{P}(T \leq t) = 3e^{-\lambda t}(1 - e^{-\lambda t})^2 + (1 - e^{-\lambda t})^3, \quad \text{soit} \quad \mathbb{P}(T \leq t) = (2e^{-\lambda t} + 1)^2 (1 - e^{-\lambda t})^2.$$

Tous calculs faits, on obtient : $\mathbb{P}(T \leq t) = 1 - 3e^{-2\lambda t} + 2e^{-3\lambda t}$.

2° La fonction *f* est alors définie par $f(t) = 6\lambda(e^{-2\lambda t} - e^{-3\lambda t})$.

Par suite, en bousculant un peu les coutumes concernant l'usage de la notation :

$$\int_0^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t = 6\lambda\left(\int_0^{+\infty} te^{-2\lambda t}\,\mathrm{d}t - \int_0^{+\infty} te^{-3\lambda t}\,\mathrm{d}t\right) = 6\lambda\left(\frac{1}{4\lambda^2} - \frac{1}{9\lambda^2}\right) \text{ (exercice 5-3)}$$

Ainsi $E(T) = \dfrac{5}{6\lambda}$.

Bibliographie

TEXTES OFFICIELS

[1] PROGRAMME DE MATHÉMATIQUES
Classe de Terminale de la Série Scientifique B. O. n° 4 du 30 août 2001

[2] PROJET DE PROGRAMME POUR LA TERMINALE S
GEPS de Mathématiques, Projet Terminale S 8 janvier 2001

[3] PRÉSENTATION GÉNÉRALE DE TRAMES DES PROGRAMMES DE MATHÉMATIQUES POUR LES CLASSES DE PREMIÈRE ET TERMINALE S GTD de Mathématiques, version du 13 janvier 2000

[4] DOCUMENT D'ACCOMPAGNEMENT, Mathématiques, classe de Terminale, série ES, série S

[5] DOCUMENT D'ACCOMPAGNEMENT DE PREMIÈRE S GEPS de Mathématiques 8 janvier 2001

OUVRAGES CITÉS

[6] ARNAUDIES J.-M. et FRAYSSE H. *Compléments d'Analyse. Cours de Mathématiques* 3
Classes préparatoires et premier cycle universitaire
Dunod 1987

[7] BERLOQUIN P. *Les Jardins du Sphinx*
Dunod 1981

[8] BON J.-L. *Fiabilité des systèmes*
Masson 1995

[9] BOURSIN J.-L. *Comprendre les Probabilités*
Cursus/Armand Colin 1989

[10] BOURSIN J.-L. *Les structures du hasard*
Points Sciences
Éditions du Seuil 1986

[11] CARNEC H., DAGOURY J.-M., SEROUX R. et THOMAS M. *Itinéraires en statistiques et probabilités*
Ellipses Édition 2000

[12] COTTRELL M., GENON-CATALOT V., DUHAMEL C. et MEYRE T. *Exercices de probabilités*
Licence, maîtrise, écoles d'ingénieurs
Cassini 1999

[13] DACUNHA-CASTELLE D. et DUFLO M. *Probabilités et Statistiques 1. Problèmes à temps fixe*
Masson 1982

[14] DUTARTE P., KERN C. avec la collaboration de la COMMISSION INTER-IREM LYCÉES TECHNIQUES *La statistique inférentielle en quatre séances*
IREM de Paris Nord 2002

[15] ENGEL A. *Les certitudes du hasard*
Aleas Éditeur 1990

[16] FOATA D. et FUCHS A. *Calcul des probabilités*
Cours, exercices et problèmes corrigés
Dunod 1998

[17] FRUGIER G. *Exercices ordinaires de probabilités*
Ellipses Éditions Marketing 1992

[18] RENYI A. *Calcul des probabilités*
Dunod Paris 1966

[19] ROQUE J.-L. *Progresser et réussir en Mathématiques 1. Probabilités et Statistiques*
Espace Études Éditions 2000

ARTICLES CITÉS

[20] BKOUCHE R. *À quoi sert l'école ?*
Revue Repères n° 44 juillet 2001
Topiques Éditions

[21] COMBES M., LACAGE M., RAVIER J.-M. et SALLES J. *Le jeu de Franc-Carreau. Expérimentation et simulation*
Des statistiques à la pensée statistique
IREM de Montpellier 2001

[22] FONTANA J et NOGUÈS M. *Simulation et modélisation ; étude d'un exemple*
Des Statistiques à la pensée statistique
Éditeur IREM de Montpellier 2001

[23] GIRARD J.-C. et HENRY M. *Expérience aléatoire et Modélisation*
Actes de la troisième Université d'Été de la commission Inter-IREM de Probabilités et Statistiques (Metz 1997)
Éditeur J.-F. Pichard IREM de Rouen

[24] GIRARD J.-C., HENRY M., PICHARD F. *Quelle place pour l'aléatoire au Collège* ?
Actes du Colloque Inter-IREM Premier Cycle : « Les enjeux d'un enseignement pour tous » (Lille 21 à 23 juin 1999)
Éditeur IREM de Lille 1999

[25] HENRY M. *À propos du programme de statistique en Seconde : remarques sur la simulation informatique*
Mathématiques vivantes Bulletin de l'IREM de Besançon n° 67 juin 2002
Presses Universitaires Franc-Comtoises

[26] HENRY M. *Des lois de probabilités continues en Terminale S : pourquoi et pour quoi faire* ?
Revue Repères n° 51 avril 2003
Topiques Éditions

[27] JANVIER M. *Les nombres pseudo-aléatoires*
Des statistiques à la pensée statistique
IREM de Montpellier 2001

[28] JOHNSON A. et TEILLAC J. *Radioactivité*
Encyclopædia Universalis
Encyclopædia Universalis Éditeur à Paris

[29] METIN F. *Buffon et le problème de l'aiguille : le mémoire sur le jeu de franc-carreau de 1733*
La mémoire des nombres
Actes du X$^{\text{ème}}$ colloque Inter-IREM d'Épistémologie et d'Histoire des Mathématiques (27-28 mai 1994)
IREM de Basse Normandie Caen 1997

[30] PARZYSZ B. *Quelques questions à propos de tables et de générateurs de nombres aléatoires*
Statistique au Lycée
Commission Inter-IREM " Statistique et Probabilités " Brochure APMEP (à paraître)
Édition APMEP

[31] PEYRACHE G. *Fiabilité*
Encyclopædia Universalis
Encyclopædia Universalis Éditeur à Paris

Fiche signalétique de l'ouvrage

Titre L'esprit des lois continues

Auteurs BARBAZO Éric, BOUSCASSE Jean-Marie, POMÈS Roland, PUYOU Jacques, PUYOU Michel, TERRACHER Pierre-H.

Éditeur IREM D'AQUITAINE

Date Octobre 2003

Mots clés Densité - Fiabilité - Fonction de répartition - Loi de durée de vie sans vieillissement - Loi de probabilité - Loi exponentielle - Loi uniforme - Modélisation - Simulation - Tirages indépendants - Variable aléatoire.

Résumé Cet ouvrage est destiné aux enseignants désireux d'affermir leurs connaissances sur quelques notions élémentaires concernant les lois de probabilité continues (loi de probabilité, densité, fonction de répartition, variable aléatoire, ...).

Il ne s'agit pas de s'inscrire dans la lourdeur des circuits habituels (en redonnant par exemple une $n^{\text{ième}}$ version d'un cours sur ce sujet) mais plutôt d'articuler ces notions aux thèmes essentiels du programme de la classe de terminale scientifique (loi à densité continue, loi uniforme, loi exponentielle, ...).

Au centre du propos, donc :

- une analyse scientifique et didactique des contenus mis en jeu ;
- une démarche pour l'introduction des lois continues en terminale (appuyée sur l'expérimentation) ;
- l'étude solide de questions que peut soulever la modélisation probabiliste.

Des séries d'exercices résolus, commentés, répertoriés par centre d'intérêt (ayant pour la plupart vocation à être exploités dans la classe) et des protocoles éprouvés de simulation (sur EXCEL) constituent les renforts pédagogiques de l'ouvrage.

Nombre de pages 284 (culotté pour un thème occupant trois lignes dans un programme...)

ISBN 2-85665-10-2003

Index

Cet ouvrage est destiné aux enseignants désireux d'affermir leurs connaissances sur quelques notions élémentaires concernant les lois de probabilité continues (loi de probabilité, densité, fonction de répartition, variable aléatoire, ...).

Il ne s'agit pas de s'inscrire dans la lourdeur des circuits habituels (en redonnant par exemple une $n^{\text{ième}}$ version d'un cours sur ce sujet) mais plutôt d'articuler ces notions aux thèmes essentiels du programme de la classe de terminale scientifique (loi à densité continue, loi uniforme, loi exponentielle, ...).

Au centre du propos, donc :

- une analyse scientifique et didactique des contenus mis en jeu ;
- une démarche pour l'introduction des lois continues en terminale (appuyée sur l'expérimentation) ;
- l'étude solide de questions que peut soulever la modélisation probabiliste.

Des séries d'exercices résolus, commentés, répertoriés par centre d'intérêt (ayant pour la plupart vocation à être exploités dans la classe) et des protocoles éprouvés de simulation (sur EXCEL) constituent les renforts pédagogiques de l'ouvrage.

Les auteurs

BARBAZO Éric — BOUSCASSE Jean-Marie
POMES Roland — PUYOU Jacques
PUYOU Michel — TERRACHER Pierre-Henri

travaillent à l'IREM d'AQUITAINE Université BORDEAUX 1

ISBN : 978-2-85633-020-3
EAN : 9782856330203