Groupe «Didactique des Mathématiques au Collège »
IREM d'Aquitaine

Annie Berté, Joëlle Chagneau, Catherine Desnavres
Jean Lafourcade, Pierre Fauré, Claire Sageaux

Des "activités" aux situations d'enseignement en mathématique au collège

Travail réalisé avec le soutien du Ministère de l'Education Nationale
et l'appui d'André Rouchier (IUFM d'Aquitaine)
En prolongement d'un travail déjà rédigé en 1997 avec le soutien de la DLC
par Annie Berté et Catherine Desnavres par l'intermédiaire de Michèle Artigue (Paris VII)
Groupement national d'équipes de recherche en didactique des mathématiques

UNIVERSITÉ BORDEAUX 1
Sciences Technologies

Bordeaux, novembre 2002

Sommaire

Préface

« S'il n'y a pas eu de question, il ne peut y avoir de connaissance scientifique »
Gaston Bachelard
(La formation de la pensée scientifique)

Le ton est donné.

Je veux dire que la citation précédente est sûrement la mieux à même de laisser entrevoir le contenu de cet ouvrage : partant d'une analyse sans concession mais juste des diverses manières dont les Programmes, les manuels scolaires, les enseignants de mathématiques, etc..se saisissent du mot « activité » (ou encore « activités » : le pluriel en rajoute à la polysémie du mot), il s'agit d'expliciter par le menu –exemples à l'appui – ce qu'est ***« une situation d'enseignement dans laquelle un milieu a été aménagé par l'enseignant pour permettre aux élèves d'exercer une réelle activité mathématique »***.

Le meilleur témoin en est l'étude efficacement conduite dans la partie III : « cercle circonscrit à un triangle » - cas démonstratif s'il en est - : outre une autopsie vigilante des manuels de collège qui fournit aux enseignants de solides points d'ancrage pour l'analyse des « activités » proposées, c'est là que se laissent le mieux voir les interrogations, les questions auxquelles peut conduire la construction d'une situation d'enseignement mais aussi, comment des notions de didactique solidement assises peuvent participer à l'élucidation des problèmes posés.

D'autres exemples jusqu'alors inédits, d'une part, viennent appuyer une telle étude et d'autre part s'y additionnent pour montrer, qu'en ce qui concerne la question de ***la transmission d'une activité à d'autres enseignants***, une analyse didactique et mathématique offre des moyens de réponse autrement efficaces que, par exemple, la recherche à tout prix d'un « réduit » où cette activité serait décortiquée, voire codifiée.

Bien sûr – on l'aura compris – cet ouvrage s'adresse en premier lieu aux enseignants. Et parce qu'il entend aussi rester dans la ligne de leurs préoccupations directes, sa pédagogie a un prix élevé.

Mais, le résultat est là, à la hauteur de l'énergie déployée.

Pierre Henri Terracher
Directeur de l'IREM d'Aquitaine
Le 20 novembre 2002

Introduction

Quand il s'agit d'enseignement des mathématiques au collège ou au lycée, le mot «activité » est aujourd'hui passé dans le vocabulaire courant des enseignants. L'expression « activité de l'élève » est utilisée dans les programmes de collège et instructions officielles. Ces textes contiennent aussi le mot « activités » au pluriel pris dans plusieurs sens.

Ce mot est repris par les manuels et dans des documents d'origine diverse conçus pour les enseignants mais dans un seul sens cette fois : les manuels contiennent des « activités » qui sont des propositions de séquences. Les enseignants utilisent de ce fait le mot « activités » dans ce sens. Un tel glissement sémantique du singulier au pluriel qui se trouve amorcé dans les instructions officielles et qui est accentué par les manuels et la pratique des enseignants nous conduit à nous interroger.

Que signifie ce mot « activité »? Quelle est la fonction des « activités » dans le déroulement du cours de mathématiques ?

Notre groupe IREM a pris pour nom : « Didactique des mathématiques au collège » pour affirmer une volonté de référence à la recherche en didactique. Depuis très longtemps nous utilisons les mots : situations d'enseignement, situation a-didactique, analyse *a priori* d'une situation, dévolution, validation, institutionnalisation,..... Ce sont des concepts qui nous sont utiles pour analyser des séquences, apporter des améliorations à certaines déjà construites, en bâtir d'autres.

Cependant ces mots sont employés par les chercheurs en didactique de façon très précise. Nous ne voulons pas nous en servir de façon approximative loin du contexte de la recherche. C'est pour cela que nous avons, nous aussi saisi le mot « activités » pour notre pratique courante, au sens de : « situations d'enseignement dans lesquelles un milieu a été aménagé par l'enseignant pour permettre aux élèves d'exercer une réelle activité mathématique »

En revanche, ce que nous constatons dans les manuels, dans la pratique de nos collègues, dans une littérature diverse, c'est l'usage de ce mot pour décrire et transmettre aux enseignants des situations d'enseignement très variées et qui s'éloignent parfois de ce que nous concevons et pratiquons.

Nous avons vu des collègues qui croient faire la même « activité » et qui en fait réalisent en classe des leçons bien différentes. D'autres au cours de stages, déclarent ne pas être satisfaits par ce qu'ils tentent de faire et sont très demandeurs d'une méthode pour construire les dites « activités » de façon pertinente ou du moins ils demandent des exemples d'activités déjà construites.

C'est la raison de l'intitulé de ce travail que nous avons rédigé dans le but d'être utile à nos collègues.

Présentation des différentes parties de la brochure

I) L'utilisation du mot « activité » dans les programmes et les documents d'accompagnement officiels de ces programmes : nous dégageons trois sens de ce mot.

II) Enquête auprès d'enseignants de collège sur ce qu'ils entendent par « activités » et nos commentaires.

III) Nous mettons en parallèle une « activité » prise dans un manuel et une « activité » telle que nous la proposons en classe[1] , les deux traitant du même objet : le cercle circonscrit à un triangle en classe de $5^{ème}$.

IV) Nous montrons trois propositions d'une « activité » sur les aires dite « les rectangles d'Euclide » prises dans la littérature à disposition des professeurs ainsi que notre proposition. La mise en parallèle des consignes souligne l'importance des variables didactiques.

V) Nous proposons trois « activités » sur le thème : fractions et décimaux au collège
- le nombre caché
- la multiplication des décimaux
- partages

Ces « activités » sont trois moments d'une progression sur les décimaux et les fractions. Nous donnons une vue d'ensemble de notre progression.

VI) Une activité sur les racines carrées en troisième

VII) Différence entre les rôles du professeur dans un cours « classique » et dans un cours où il met en œuvre des « activités » au sens où nous l'entendons. Que fait l'élève dans les deux cas ?

[1] Géométrie au cycle central Cinquième et quatrième. Un enchaînement d'activités
Groupe didactique des mathématiques au collège
Université de Bordeaux I IREM 40 rue Lamartine 33400 TALENCE.

Partie I

LE MOT « ACTIVITE » DANS LES PROGRAMMES DE COLLEGE

« Que la méthode "active" doive être mise en pratique dans toutes les classes de mathématiques, c'est là une règle de conduite dont la valeur n'est plus contestée. L'enregistrement passif d'un certain nombre de notions et de faits ne saurait constituer un enseignement de formation intellectuelle. Il faut obliger chacun aux différents moments de la classe à prendre une part effective au travail ... D'ailleurs une bonne part de l'activité des élèves doit être associée à l'étude et à la recherche de solutions de "problèmes" ».

Cet extrait des instructions générales du 1er octobre 1946 (!!) ne semble pas dépassé en l'an 2000. On trouve encore dans les programmes actuels de collège des expressions comme « *l'activité de l'élève* », « *véritable activité mathématique* », « *activités conduites en classe* »..

Des extraits de ces programmes peuvent-ils nous éclairer sur la signification de ce mot tant utilisé ?

I .1. Activité mathématique :

Instructions générales pour le collège 1995 (I- Finalités et objectifs)
« Au collège, on constate qu'une proportion importante d'élèves s'intéressent à la pratique des mathématiques et y trouvent un plaisir. Il est en effet possible de se livrer, à partir d'un nombre limité de connaissances, à une véritable activité mathématique avec son lot de questions ouvertes, de recherches pleines de surprises, de conclusions dont on parvient à se convaincre... Les programmes des quatre années de collège ont été conçus pour permettre une véritable activité mathématique de l'élève , par la résolution de problèmes »

Après ce préambule, suivent les objectifs de l'enseignement des mathématiques au collège, énoncés de façon générale en trois points

- *entraîner à la démarche scientifique,*
- *acquérir une technique qui est un outil pour résoudre les problèmes posés dans les autres disciplines et dans la vie courante*
- *enrichir l'expression.*

Ces objectifs sont repris de façon plus spécifique en tête des programmes de 6ème (1995) . Ce sont :

- *développer les capacités de raisonnement : observation, analyse, pensée déductive*
- *stimuler l'imagination*
- *habituer l'élève à s'exprimer clairement*
- *affermir les qualités d'ordre et de soin*

C'est dans le développement du premier des trois points (entraîner à la démarche scientifique) que le mot « activité » se rencontre pour la deuxième fois dans le préambule pour tout le collège :
« A travers la résolution de problèmes, la modélisation de quelques situations et l'apprentissage progressif de la démonstration, les élèves peuvent prendre conscience petit à petit de ce qu'est une véritable activité mathématique : identifier un problème, conjecturer un résultat, expérimenter sur des exemples, bâtir une argumentation, mettre en forme une solution, contrôler les résultats obtenus et évaluer leur pertinence en fonction du problème étudié »

Ainsi dans le préambule général sur les mathématiques au collège, le mot *« activité »* est employé au singulier à deux reprises et associée chaque fois aux adjectifs *« mathématique »* et *« véritable ».* Dans un premier temps il est associé aussi aux mots *« plaisir, questions ouvertes, recherche et surprise »* et dans un deuxième temps il est associé aussi à *« résolution de problème, modélisation, conjecture, argumentation »*

Tentons de résumer ainsi : les programmes demandent d'exercer les élèves à **l'activité mathématique qui consiste à se lancer dans la résolution de problèmes à questions ouvertes, de problèmes de modélisations, de problèmes ou les élèves pourront conjecturer.**

Mais, comment concevoir ces problèmes et comment bâtir une succession de leçons avec les dits problèmes? C'est cela qui est difficile.

II. 2. Les activités : deux autres sens de ce mot

C'est sans doute parce que les auteurs de programmes ont voulu donner quelques éléments de réponse à cette question que, dans les préambules des programmes des différentes classes on va retrouver le mot « activité » mais cette fois en passant du singulier au pluriel

Accompagnements des programmes de 6ème :
« Les activités conduites en classe doivent autant que possible mêler les différentes approches numériques, géométriques, graphiques, pour que l'activité mathématique prenne un sens plus global pour l'élève...
Il convient de distinguer les activités d'apprentissage qui, en général, conduisent à travailler simultanément plusieurs compétences, des activités d'évaluation qui sont, entre autres, l'occasion de vérifier la maîtrise des capacités exigibles. »

Dans ces deux phrases le mot « *activité* » est utilisé dans trois sens différents : d'une part dans un sens déjà vu dans les généralités pour le collège « *activité mathématique* » au singulier et d'autre part au pluriel dans un premier sens que nous pouvons rendre par **« leçon active conduite par le maître »** et un deuxième sens de **« tout ce que fait l'élève pendant la classe »**

Le préambule du programme de 6ème (1995) poursuit ainsi :
« L'activité de chaque élève doit être privilégiée sans délaisser l'objectif d'acquisitions communes. Dès lors seront choisies des situations créant un problème dont la solution fera intervenir des « outils » c'est à dire des techniques ou des notions déjà acquises, afin d'aboutir à la découverte ou l'assimilation de notions nouvelles. Lorsque celles-ci auront été bien maîtrisées, elles fourniront à leur tour de nouveaux « outils » qui permettront un cheminement vers une connaissance meilleure ou différente. »

Dans ce paragraphe il est question de provoquer l'*«activité de l'élève »* par des *situations.* On se réfère de façon évidente à la didactique des mathématiques : la dialectique «outil - objet »[2], ainsi que le terme « situation". Immédiatement après le mot « situation » est remplacé par « activités ».

En effet le texte poursuit ainsi :

« Les activités choisies doivent :
- *permettre un démarrage possible pour tous les élèves donc ne donner que des consignes très claires et n'exiger que les connaissances solidement acquises par tous*

[2] Jeux de cadres et dialectique outil-objet dans l'enseignement des mathématiques par Régine DOUADY Thèse de doctorat Université de Paris VII 1984

- *créer rapidement une situation assez riche pour provoquer des conjectures*
- *rendre possible la mise en jeu des outils prévus*
- *fournir aux élèves aussi souvent que possible des occasions de contrôle de leurs résultats tout en fournissant un nouvel enrichissement ; on y parvient par exemple en prévoyant divers cheminements qui permettent de fructueuses comparaisons.*

Elles nécessitent une synthèse brève qui porte non seulement sur les quelques notions, résultats et outils de base que les élèves doivent connaître mais aussi sur les méthodes de résolution de problèmes qui les mettent en jeu »

Des caractéristiques d'une « bonne situation » sont indiquées de façon prescriptive: il faut prévoir la dévolution du problème à l'élève avec une stratégie de base pour démarrer, les outils mathématiques doivent servir ce qui suppose une analyse mathématique *a priori* de la tâche et des stratégies possibles, la validation doit être prévue ainsi que l'institutionnalisation . Les mots ne sont pas employés, mais on reconnaît certains concepts de **la théorie des situations**[3].

Enfin il n'est pas inutile de souligner comment est traitée l'hétérogénéité de la classe par les programmes (accompagnement des programmes de 3ème) :

« La phrase du préambule du programme de 6ème : il est essentiel que les connaissances prennent du sens pour l'élève à partir des questions qu'il se pose, concerne tous les élèves ; elle vaut donc tout particulièrement pour les élèves « en difficulté » chez lesquels la réduction des apprentissages mathématiques à l'acquisition d'automatismes ne fait qu'accentuer rejets et perte de sens de l'école. Il importe donc que la nature fondamentale de l'activité proposée soit la même pour tous, bien qu'elle s'appuie sur des acquis différents et qu'elle relève de complexités différentes »

Ici encore le mot « *activité* » est mis pour « situation porteuse du problème »

Conclusion :

Cette brève relecture de quelques paragraphes des programmes de collège où le mot « activité » est cité nous a montré qu'il est employé dans au moins **trois sens :**

- **1- l'activité mathématique en général,**
- **2- une situation, prévue par l'enseignant en fait un problème et ce qu'il y a autour dans l'organisation de la classe,**
- **3- ce que fait l'élève en classe quand il travaille**

Il y a des liens évidents entre les trois dans l'esprit des auteurs et c'est pour cela que l'on passe de l'un à l'autre dans le texte.

Nous allons voir à travers un exemple que les manuels ont repris le mot « activité » dans le sens 2 mais de façon plus restreinte : il s'agit du contenu de leçons introductives à des notions nouvelles. Il est d'usage de commencer les chapitres par une « activité ».

D'autre part le mot « activité » a mis l'accent sur l'action au détriment de la nature de cette action c'est à dire au détriment de la recherche du problème déjà présente dans les instructions de 1946 associée à l'activité de l'élève.

L'usage d'un mot courant, qui, de plus, est employé avec des glissements de sens, induit des dérives dans les réalisations effectives. C'est ce que nous verrons aussi dans les propos des enseignants rencontrés.

---

[3] Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques par Guy BROUSSEAU Thèse de doctorat d'état Université de Bordeaux I 1986

Partie II

LES ACTIVITÉS VUES PAR LES PROFESSEURS

Depuis quelques années, notre groupe IREM anime un stage de formation continue dont le titre est « Enseigner les maths au collège par les activités »
Nous commençons le stage en demandant aux stagiaires d'exprimer leurs attentes par rapport au thème du stage.

II. 1. Questions à des professeurs en formation continue :

Nous leur proposons trois phrases extraites des instructions officielles :

- Au collège, il est possible de se livrer à une activité mathématique véritable.
- L'activité de chaque élève doit être privilégiée....
- Dès lors seront choisies des situations créant un problème ...

Et nous posons les questions suivantes :

- Quelle est d'après vous la signification des mots « activité », « situation » et « problème » dans l'enseignement des mathématiques au collège ?
- Pouvez vous évoquer un exemple d'activité que vous avez pratiquée et qui vous a donné satisfaction ? Expliquer pourquoi.

II. 2. Leurs réponses :

a) Voici quelques éléments de définition du mot « activité » donnés par les stagiaires que nous citons textuellement en les regroupant en deux catégories.

   ➢ On y trouve des interprétations conformes à ce que semblent recommander les instructions officielles :

- une activité c'est ce qui est mis en œuvre pour parvenir aux objectifs mathématiques
- une activité amène l'élève à se poser des questions
- une activité permet à l'élève de prendre en charge ses connaissances, les réinvestir.
- dans une activité, la solution n'est pas évidente et n'est pas donnée par le professeur
- une activité est un moment de recherche, de réflexion, de conjectures
- au cours d'une activité, l'élève met en place des stratégies, fait des essais, des erreurs, confronte ses résultats, les valide ou les invalide.

   ➢ Par contre d'autres représentations des enseignants sont fortement influencées par l'usage des manuels où les activités sont souvent utilisées pour démarrer le chapitre et se caractérisent par le recours au concret, concret évoqué ou manipulation de matériel :

- une activité est un exercice qui sert à introduire une notion nouvelle
- une activité est une suite de questions enchaînées visant à faire découvrir un résultat
- une activité consiste à résoudre un problème concret
- une activité nécessite un support concret, découpage, figures, ...

b) Le mot « situation » évoque pour les enseignants :

- un contexte qui amène l'élève à résoudre un problème avec des connaissances qu'il a déjà ou qu'il doit inventer
- un moment de recherche où l'élève est confronté à un problème

ou plus vaguement :

- le thème dans lequel on se fixe des objectifs

<u>II. 3. Interprétation des réponses :</u>

- Pour les professeurs le mot « activité » a un sens beaucoup plus précis que le mot « situation », en effet, les documents dont ils disposent emploient le mot « activité » et très peu le mot « situation ».
- On est loin du concept de « situation » utilisé en didactique des mathématiques.

Les collègues qui avaient une idée de ce que pourrait être une « véritable activité mathématique », ont reconnu ne pas savoir comment s'y prendre pour y parvenir et n'avoir trouvé que peu d'exemples les satisfaisant dans les ouvrages dont dispose couramment un professeur de collège : manuels, quelques rares publications IREM, INRP ou CNDP.

<u>II. 4. Quelques exemples d'activités que les stagiaires ont pratiquées :</u>

- règle d'addition des relatifs à partir de déplacements d'ascenseurs
- découverte du théorème de Pythagore par un puzzle
- introduction de la symétrie centrale par deux symétries axiales d'axes perpendiculaires
- découverte de la règle des signes de la multiplication de deux nombres relatifs par un jeu de cartes blanches et noires
- notion d'agrandissement réduction par l'étude d'un modèle réduit (non construit par les élèves mais seulement observé)
- tableaux de résultats pour découvrir la fonction de la touche 1/x de la calculatrice

Certaines de ces activités, notamment les trois premières, correspondent à des exemples proposés par de nombreux manuels.
D'autres, les deux dernières en particulier, ont donné satisfaction aux enseignants qui les ont pratiquées dans des circonstances exceptionnelles, quand il y avait peu d'élèves, quand ils avaient du temps.

On peut s'interroger sur la *« véritable activité mathématique »* que les élèves peuvent mettre en œuvre dans ce type de situations.
Les professeurs en stage, après ces tentatives, ressentaient le besoin d'une autre pratique, pour faire entrer les élèves dans une véritable activité mathématique, dans le quotidien de leurs classes.

Partie III

LE CERCLE CIRCONSCRIT A UN TRIANGLE

Le professeur qui veut préparer un cours va chercher dans les manuels qui sont souvent sa seule référence. Il y trouve des « activités».

Nous avons pris un exemple d'une telle activité et nous allons l'examiner en détail.

Pour mieux mesurer la portée de cette analyse, il convient de comprendre les difficultés et les obligations auxquelles est soumis un auteur de manuels.

Un manuel est un ouvrage pour l'élève, il doit donc pouvoir être utilisé par l'élève seul, sans l'aide du professeur, c'est du moins ce à quoi les auteurs de manuels et les éditeurs semblent s'astreindre.

Les travaux proposés sont individuels, les activités sont donc guidées, afin que l'élève y réussisse sans intervention de l'enseignant.

D'autre part nous savons d'expérience que faire la critique des « activités » dans les manuels est un travail constructif.

C'est une partie du travail du professeur et c'est en ce sens que l'apport des manuels est indispensable.

Nous pensons que l'analyse de projets de séquences devrait être un élément central de la formation des enseignants tant dans les concours de recrutement que dans les formations qui suivent..

En effet les enseignants ne peuvent pas tout inventer quand ils préparent leurs cours. Il est normal qu'ils utilisent les documents existants, mais justement de façon critique.

Ils vont ainsi prendre des idées dans les « activités » des manuels, mais modifier les scénarios, le matériel, en pensant que le manuel vise une utilisation individuelle par l'élève alors que l'enseignant travaille en classe entière.

Dans quel sens faire ces modifications à partir du manuel ? C'est là que la formation professionnelle peut jouer. Il faut modifier les activités pour les traiter en groupe en tenant compte des apports des élèves.

Notre analyse pourra paraître sévère à certains : il est certes plus facile de critiquer que de construire. Aussi nous donnons en parallèle une autre « activité » se proposant d'enseigner le même objet dans le même niveau : le cercle circonscrit à un triangle en $5^{ème}$.

Notre proposition concerne la gestion d'une classe entière riche de son hétérogénéïté.

Nous pensons que les échanges entre les élèves dans la classe constituent un des éléments essentiels d'un apprentissage dans lequel le savoir prend du sens.

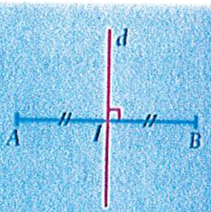
III. 1. Analyse du manuel

Nous avons choisi notre exemple « d'activité » dans TRANSMATH 5ème NATHAN, mais nous aurions pu faire le même travail de critique avec les mêmes arguments dans d'autres manuels et sur d'autre thèmes.

Le thème est abordé entre les pages 224 et 245 du manuel

Pour prendre un bon départ

- **Médiatrice d'un segment**
I est le milieu du segment [*AB*]. La droite *d* est perpendiculaire au segment [*AB*] en *I*.

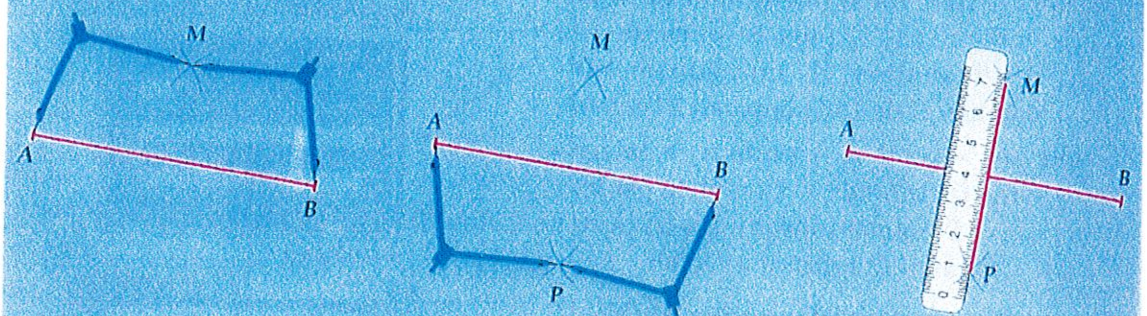


On dit alors que *d* est la **médiatrice** du segment [*AB*].

- Tout point *M* de la médiatrice du segment [*AB*] est à égale distance de *A* et de *B*, c'est-à-dire que $MA = MB$.

- Lorsque l'on sait qu'un point est à égale distance de *A* et de *B*, alors on peut affirmer qu'il se trouve sur la médiatrice du segment [*AB*].

- **Une construction** de la médiatrice avec la règle et le compas



1 Trace un segment [*AB*] de longueur 8 cm, puis place sur ce segment le point *I* tel que $AI = 6$ cm.

2 En utilisant uniquement la règle et le compas, trace la médiatrice de [*AB*], puis celle de [*AI*] et enfin celle de [*IB*].
Que peux-tu dire alors de ces trois médiatrices ?

224

Page 224 : il s'agit de s'assurer des prérequis sur la médiatrice d'un segment :

Les instructions officielles recommandent d'éviter les rappels systématiques et de proposer plutôt des situations de réinvestissement des notions déjà rencontrées l'année précédente. *« Il convient de faire fonctionner à propos de nouvelles situations et autrement qu'en terme de reprise ayant un caractère de révision les notions antérieurement étudiées »* (Programme de 6ème Organisation de l'enseignement)

Ici on trouve un rappel des propriétés de la médiatrice d'un segment, les situations de réinvestissement à proposer aux élèves sont laissées à l'initiative du professeur.

Le dessin qui illustre ces propriétés montre un segment horizontal et une médiatrice verticale. Les directions, horizontale et verticale, sont des directions privilégiées qui se constituent en obstacle à la géométrie pour les élèves : le seul angle droit possible se trouve à l'intersection d'une horizontale et d'une verticale, le triangle isocèle a nécessairement une base horizontale, ... Pour éviter de renforcer chez les élèves des modèles trop stéréotypés de figures le professeur peut essayer de varier les dessins qu'il propose.

Par contre, dans le manuel, la formulation des propriétés a été bien étudiée. Les deux propriétés directe et réciproque sont formulées séparément pour bien les distinguer. La formulation traditionnelle « si ... alors » n'est pas utilisée au profit de « quand ». En effet, l'utilisation du mot « si » peut prêter à confusion chez les élèves du fait de son utilisation habituelle en français comme expression d'une condition, dont la réalisation est souvent très incertaine (ex : si j'étais riche...) . Quand on utilise un théorème, les données, même s'il s'agit d'hypothèses au sens mathématique du terme, sont au contraire sûres et certaines. (au sens de « s'il pleut, je prends mon parapluie » qui peut se remplacer par : « quand il pleut..... »)

La construction d'une médiatrice est évoquée par un schéma. Sur ce dessin, il n'y a aucun codage. Est-on sûr que AM = MB ? Si on se fie à ce que l'on voit, AM = AP ce qui n'est pas nécessaire. De plus pour tracer la médiatrice, on se limite au segment [MP]. C'est dommage car cela n'incite pas les élèves à comprendre que la médiatrice est une droite et ne se limite pas aux points situés entre M et P.

Bas de la page 224, un exercice utilise les rappels

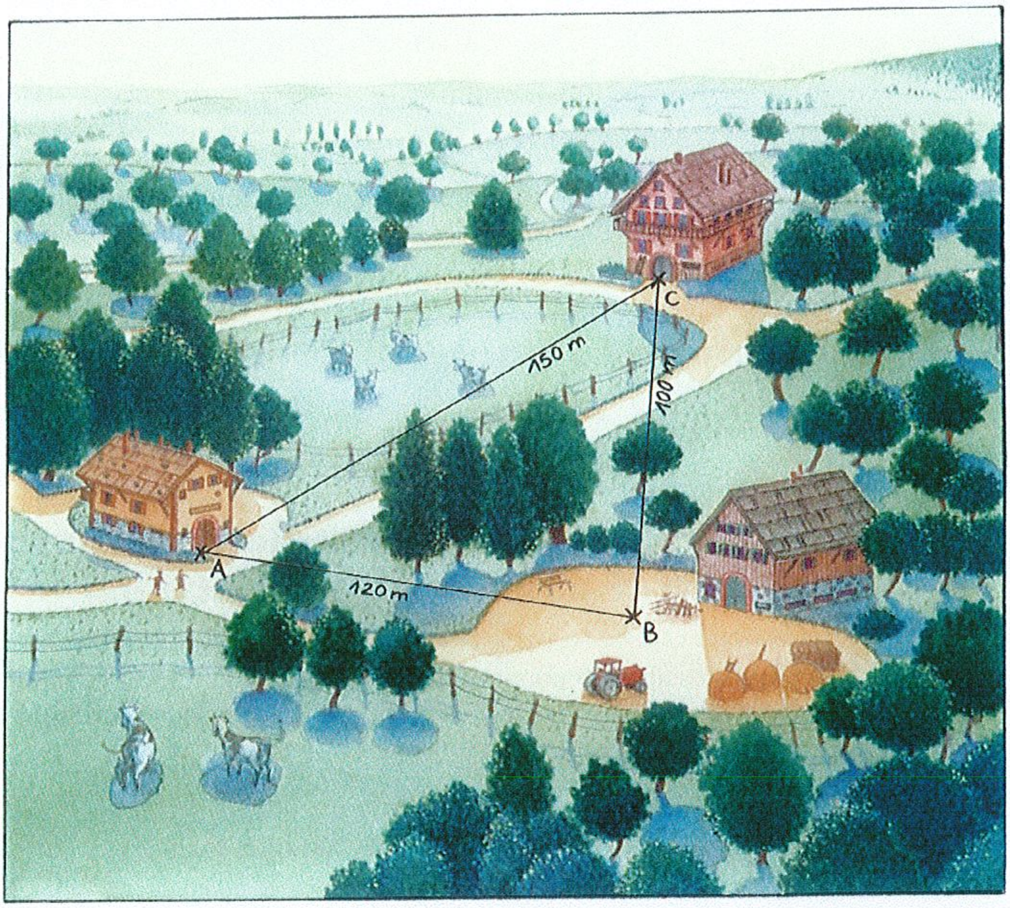
Il s'agit de tracer les médiatrices de trois segments dont les extrémités sont alignées.
Pour nous, enseignants, on voit bien en quoi ce cas particulier d'un triangle « plat » est intéressant mais le lien n'est pas fait pour les élèves avec le problème du cercle circonscrit à un triangle qui ne sera posé qu'à la page 229 !

Il est dommage de ne pas utiliser les capacités des élèves à chercher un problème . Si on pose la question sous la forme « Existe t'il un ou plusieurs cercles passant par trois points donnés ? » comme nous le proposons dans l'« activité » que nous donnons plus loin, des élèves pensent d'eux-mêmes au cas particulier des points alignés et ce cas particulier prend alors du sens parce qu'il vient à l'initiative des élèves et à l'intérieur d'un problème mathématique plus vaste.

ACTIVITÉ 5

Cercle circonscrit à un triangle

Les propriétaires de trois chalets en bois souhaitent faire installer une pompe à incendie commune aux trois chalets.



Ils sont confrontés au problème suivant : est-il possible de placer une telle pompe à égale distance des trois chalets ?
Désignons par P l'emplacement de cette pompe.

a. Explique pourquoi P doit se trouver sur la médiatrice du segment $[AC]$.
b. Recopie et complète : de même P doit se trouver sur la médiatrice du segment ▢ et sur la médiatrice du segment ▢.
c. Décalque sur la figure ci-dessus le triangle ABC puis place le point P.
d. Explique pourquoi le cercle de centre P et qui passe par A passe aussi par les points B et C ?

Il existe un cercle passant par les trois sommets d'un triangle.
Ce cercle, appelé cercle circonscrit au triangle, est centré au point d'intersection des trois médiatrices des côtés du triangle.

Page 229, activité 5 : Le cercle circonscrit

Un problème « concret »est posé : où placer la pompe ?

La question mathématique est : existe t'il un point situé à égale distance des trois points A, B, C ?

L'habillage concret d'un problème peut être utile s'il rajoute de la motivation pour les élèves, s'il donne du sens au problème mathématique. Sinon, l'allusion à la réalité peut bloquer des élèves car ils vont se poser des questions pratiques imprévues dans l' «activité » et effectivement gênantes pour arriver en un temps raisonnable au savoir visé.

La solution pratique à ce problème concret ne sera sûrement pas la solution mathématique car il y a des impératifs à respecter dans la réalité, nature du terrain, place des arbres, qui n'ont rien à voir avec le problème mathématique.

Avant de résoudre ce problème, il faut modéliser la situation de l'espace, passer du problème concret au problème géométrique sur la feuille de papier. Pour éviter justement les questions gênantes, la modélisation n'est pas demandée aux élèves, elle est déjà faite. La comprendre est donc une difficulté supplémentaire qui se rajoute à l'activité mathématique demandée.

Nous avons choisi un point de vue différent dans notre activité. Le problème ainsi posé nous paraît plus accessible aux élèves.

Nous demandons : **« Existe t'il un ou plusieurs cercles passant par trois points A, B, C ? »** La question purement géométrique a autant de sens pour les élèves que le problème concret posé dans le manuel et il n'y a pas de modélisation à faire.

Le problème concret posé par le livre n'est d'ailleurs pas résolu puisque bientôt on ne parle plus de la pompe mais du point P. Par contre les questions mathématiques de l'existence et de l'unicité de ce point ne sont pas réellement posées aux élèves.

La question de l'existence est évoquée mais la réponse est donnée immédiatement et sans justification : « Désignons par P l'emplacement de cette pompe »

Quant à la question de l'unicité, elle est admise par l'usage subtil de l'article « l' »

Regardons maintenant les tâches proposées aux élèves dans les différentes questions :

Question a) : Le mot « médiatrice » est donné, de peur peut être que les élèves n'y pensent pas. Au contraire, nous faisons le pari dans notre proposition, que nos élèves peuvent seuls, avoir l'idée de faire intervenir une médiatrice (pari gagné dans nos classes depuis plusieurs années). Il suffit de réactiver cette notion par des situations liant cercle et médiatrice avant, en posant par exemple la question : « Combien passe t'il de cercles par deux points ? »

Question b) Recopie et complète : Est ce une activité mathématique ?

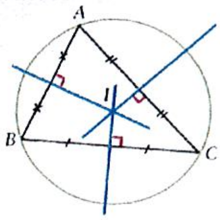
Question c) Le dessin : Que fait l'élève dont les trois médiatrices ne se coupent pas en un même point ? Cette question n'est pas évoquée dans l'activité, la réponse semble sûrement évidente. Pourtant, si nous dessinons trois droites au hasard, il n'y a pas beaucoup de chances pour qu'elles se coupent en un seul point, en général elles forment plutôt un triangle ! La démonstration de cette propriété n'est pas un exercice très facile mais elle est recommandée dans les instructions officielles comme exemple de raisonnement mathématique en 5ème(programmes de 5ème commentaires)

<u>Question d)</u> : On répond à une question que l'on ne s'est pas posée !
Jusque là, la question était : « existe t'il un point situé à égale distance des trois points A, B, C ? ».

On montre dans cette dernière partie qu'il existe un cercle passant par les trois points A, B, C ! L'existence de ce cercle n'a qu'un lointain rapport avec le problème concret posé jusque là ! De plus la réponse à cette question n'est pas très difficile à trouver, elle est écrite juste en dessous dans le cadre bleu.

5 Cercle circonscrit à un triangle

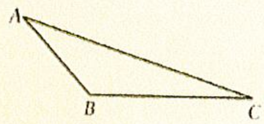
Il existe un cercle passant par les trois sommets d'un triangle. Ce cercle, appelé cercle circonscrit au triangle, est centré au point d'intersection des trois médiatrices des côtés du triangle.



$IA = IB = IC$

SAVOIR FAIRE 3 Construire le cercle circonscrit à un triangle

Exemple : construire le cercle $\mathscr{C}$ circonscrit au triangle ABC.

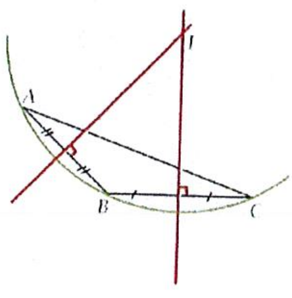


Pour construire $\mathscr{C}$ il suffit de placer son centre I.

I est le point d'intersection de la médiatrice de $[AB]$, de la médiatrice de $[BC]$ et de la médiatrice de $[AC]$.

Pour obtenir le centre I du cercle circonscrit au triangle ABC, il suffit de construire deux des trois médiatrices du triangle.

Choisissons par exemple la médiatrice de $[AB]$ et celle de $[BC]$.
Elles se coupent en I.
$\mathscr{C}$ est le cercle de centre I et de rayon IA.
Remarque : tu peux constater sur cette figure que le centre du cercle circonscrit à un triangle peut se trouver à l'extérieur de ce triangle.



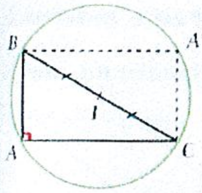
Exercice modèle 2

Énoncé

ABC est un triangle rectangle en A, I est le milieu de $[BC]$.
Explique pourquoi le cercle circonscrit à ce triangle est le cercle de diamètre $[BC]$.

Solution

Notons A' le point tel que $ABA'C$ soit un rectangle.



Dans ce rectangle les diagonales $[BC]$ et $[AA']$ ont même longueur et se coupent en leur milieu I.
Donc $IA = IB = IC = IA'$.
Le cercle de diamètre $[BC]$ passe donc par A.
C'est donc le cercle circonscrit au triangle ABC.

Commentaires

◀ Il est souvent utile de considérer un triangle rectangle comme la « moitié » d'un rectangle.

◀ En effet le cercle passe par A, B et C.

9 $ABCD$ est un carré de centre O. Explique pourquoi le cercle circonscrit à ABC a pour centre O.

CHAP. 12 - TRIANGLES 235

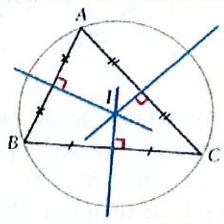
<u>Page 231, le bilan :</u>

Il reprend le bilan du cadre bleu de la page 229 agrémenté d'un dessin.
On ne parle plus de point situé à égale distance des trois sommets d'un triangle, qui était pourtant le problème que l'on était entrain de résoudre, mais seulement du cercle circonscrit.
Le dessin qui accompagne ce bilan montre un cas où le centre du cercle circonscrit est à l'intérieur du triangle.
Il faut attendre le **<u>savoir faire 3 page 233</u>** pour voir le cas où le centre est à l'extérieur du triangle et **<u>l'exercice modèle 2 page 235</u>** pour le cas du triangle rectangle.
Il semble dommage de ne pas montrer le problème dans sa globalité en dissociant ainsi les différents cas de figure. Nos observations multiples depuis 20 ans nous ont appris que certains élèves pensent que l'existence du cercle circonscrit dépend de la forme du triangle. Ici le manuel renforce leur fausse conception, alors que le problème posé aux élèves comme nous l'indiquons amène toujours un débat dans la classe qui permet au contraire de formuler cette conception et de l'abandonner

Question d) : On répond à une question que l'on ne s'est pas posée !
Jusque là, la question était : « existe t'il un point situé à égale distance des trois points A, B, C ? ».
On montre dans cette dernière partie qu'il existe un cercle passant par les trois points A, B, C ! L'existence de ce cercle n'a qu'un lointain rapport avec le problème concret posé jusque là ! De plus la réponse à cette question n'est pas très difficile à trouver, elle est écrite juste en dessous dans le cadre bleu.

5 Cercle circonscrit à un triangle

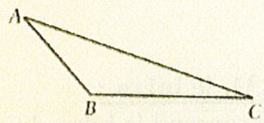
Il existe un cercle passant par les trois sommets d'un triangle. Ce cercle, appelé cercle circonscrit au triangle, est centré au point d'intersection des trois médiatrices des côtés du triangle.



$IA = IB = IC$

SAVOIR FAIRE 3 Construire le cercle circonscrit à un triangle

Exemple : construire le cercle $\mathscr{C}$ circonscrit au triangle ABC.

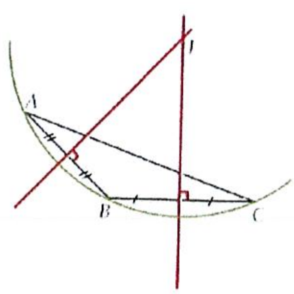


Pour construire $\mathscr{C}$ il suffit de placer son centre I.

I est le point d'intersection de la médiatrice de $[AB]$, de la médiatrice de $[BC]$ et de la médiatrice de $[AC]$.

Pour obtenir le centre I du cercle circonscrit au triangle ABC, il suffit de construire deux des trois médiatrices du triangle.

Choisissons par exemple la médiatrice de $[AB]$ et celle de $[BC]$.
Elles se coupent en I.
$\mathscr{C}$ est le cercle de centre I et de rayon IA.
Remarque : tu peux constater sur cette figure que le centre du cercle circonscrit à un triangle peut se trouver à l'extérieur de ce triangle.



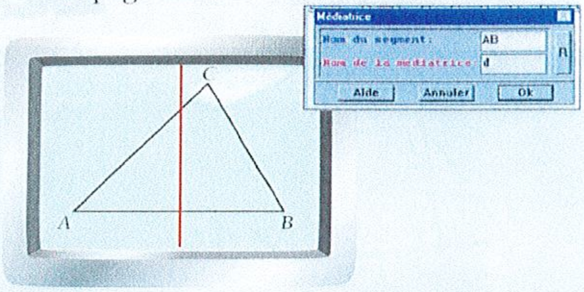
l'informatique

CONTRUIRE LE CERCLE CIRCONSCRIT À UN TRIANGLE AVEC LE LOGICIEL GEOPLANW

Commence par « créer » trois points A, B, C, puis trace les segments $[AB]$, $[BC]$ et $[CA]$. (Voir page 223).

● **Médiatrice de $[AB]$**

Clique sur « créer », « ligne », « droite » puis « médiatrice ». Il suffit alors d'indiquer le nom du segment (ici $[AB]$) et de donner un nom à la médiatrice (d). En cliquant sur « OK », la médiatrice de $[AB]$ apparaît à l'écran.

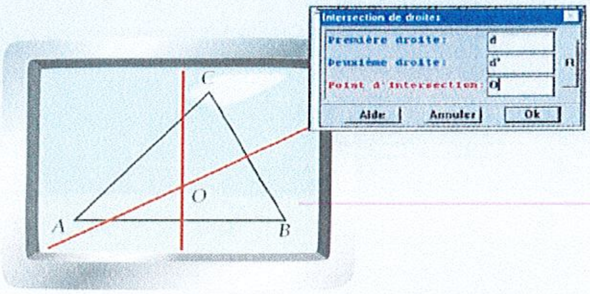


● **Médiatrice de $[BC]$**

Construis de même la médiatrice de $[BC]$.

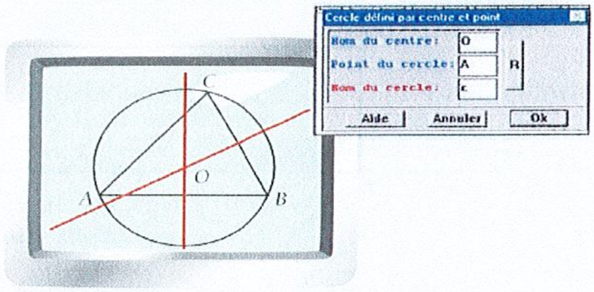
● **Point d'intersection des deux médiatrices**

Clique sur « créer », « point » et « intersection de deux droites ». Il suffit alors d'indiquer les noms des deux droites (d et d') et le nom du point d'intersection (O). En cliquant sur « OK », le point O apparaît sur l'écran.



● **Cercle de centre O et passant par A**

Clique sur « créer », « ligne », « cercle », puis « défini par centre et un point ». Il suffit alors d'indiquer le nom du centre (O), le point du cercle (A) et le nom du cercle (C). En cliquant sur « OK », le cercle apparaît à l'écran.



Remarque

Il y a d'autres constructions possibles : par exemple en revenant à la définition d'une médiatrice, ou bien, plus rapidement, en faisant tracer directement le cercle circonscrit passant par A, B et C.

<u>Page 245, une activité informatique :</u>

Elle peut permettre de comprendre l'aspect dynamique du problème en liant la position du centre à la forme du triangle, même si on ne peut pas tout justifier. Pour un triangle ayant ces trois angles aigus, le centre est à l'intérieur, pour un triangle ayant un angle obtus, le centre est à l'extérieur. Entre les deux, pour un triangle ayant un angle droit, le centre est sur l'un des côtés.
Le cas des points alignés apparaît à l'écran comme le cas limite où le centre disparaît à l'infini. Un logiciel de géométrie permet de déformer le triangle en affichant la valeur des angles et donc de voir bouger le centre du cercle en même temps.

III .2. Notre proposition

1) Analyse mathématique préalable :

a) Il y a deux façons de poser le problème dont il est question ici :

- Démontrer que les trois médiatrices d'un triangle sont concourantes et en déduire les propriétés du point d'intersection.
- Se poser la question de la construction d'un cercle passant par les trois sommets d'un triangle et en déduire que son centre est nécessairement le point d'intersection des trois médiatrices.

Il va être difficile pour le professeur d'amener les élèves à prendre en charge le problème posé selon la première formulation, d'autant plus que, pour certains, le fait que les trois médiatrices d'un triangle soient concourantes paraît évident. Ils ont déjà vu cette propriété, pour les trois axes de symétrie d'un triangle équilatéral en $6^{ème}$. On peut leur demander de fermer les yeux et de tracer trois droites au hasard et leur faire remarquer qu'il est peu probable qu'elles soient concourantes, il y a plus généralement trois points d'intersection. Quand la question se présente, nous avons prévu de susciter le doute par la mise en place d'une situation spécifique.

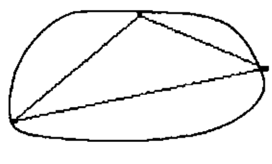
La deuxième approche en revanche est plus intéressante car les élèves sont loin d'être persuadés d'emblée de l'existence du cercle circonscrit quelque soit le triangle, surtout s'il a un angle obtus. Cela amène un débat dans la classe qui motive les démonstrations mathématiques utiles pour convaincre.

Dans cette deuxième approche, il s'agit d'un problème de construction. Sa solution experte consiste à procéder par analyse et synthèse : supposer le problème résolu et examiner la figure obtenue.
Il faut alors, de sa propre initiative, changer la question. Le cercle étant tracé, il faut se demander
- où peut se situer son centre ?
- quelles propriétés doit vérifier ce point ?

La première interrogation doit amener la seconde car le but est de rattacher le point inconnu aux trois points donnés en cherchant des propriétés caractéristiques du centre pour déterminer des lignes qui le portent.

Il faut supposer le problème résolu avant d'être convaincu que la solution existe. Cette démarche n'est pas du tout intégrée dans les pratiques des élèves de collège, elle se met en place petit à petit. C'est plutôt l'objectif de la seconde. D'autre part ce problème n'est pas le bon pour s'initier à cette pratique car il présente une difficulté supplémentaire que nous a révélée une observation fortuite dans une classe de terminale ! [4] . Une élève a dit avec dessin à l'appui : « Non on ne peut pas toujours tracer un cercle, par exemple si le triangle est ainsi, voyez la touche du cercle ! ! ! »

Implicitement l'élève imaginait le centre du cercle à l'intérieur du triangle, d'où le dessin



Dans la solution experte, on peut placer les points et tracer le cercle ensuite à main levée, ce que les élèves ne $5^{ème}$ ne peuvent pas faire comme nous venons de l'expliquer, ou bien tracer le cercle d'abord et placer ensuite trois points dessus. Dans ce cas le triangle peut vraiment être quelconque. Mais il faut inverser la chronologie des actions par rapport à la question et comprendre que le fait de

[4] Classe de terminale D. professeur Joël Brely- Lycée de Périgueux. 1987

tracer le cercle avant ne nuit pas à la généralité du choix des trois points. Quelques élèves démarrent ainsi, mais soit ils « trichent » en se disant qu'ils ont résolu le problème puisqu'ils ont trouvé un triangle et un cercle dont ils connaissent le centre, soit ils n'ont pas un niveau suffisant en mathématiques pour mener à bien l'analyse du problème. Ils essaient alors de voir comment se place le centre par rapport aux trois points, mais n'aboutissent pas et se découragent.

Cependant leur tentative n'est pas inutile car ceci fait apparaître des triangles aux formes variées, y compris avec un angle obtus. Certains élèves pensent que le cercle n'existe que pour certains cas particuliers (triangle équilatéral par exemple) pour lesquels ils savent placer le centre. Ces figures produites par leur camarades permettent de relancer la recherche pour le cas général.

b) Du point de vue du travail mathématique de l'élève , il y a quatre temps : conjecturer, se convaincre de l'existence d'au moins un cercle, se convaincre de l'unicité de ce cercle, éventuellement examiner le cas particulier des points alignés s'il n'est pas apparu avant ;

L'observation des élèves nous a montré que pour la conjecture deux questions successives (le cas de deux points puis le cas de trois points) suffisent à mettre les élèves en activité mathématique : c'est la situation 1.

L'existence du centre résulte de la propriété directe : tout point de la médiatrice d'un côté est équidistant des deux sommets correspondants. L'unicité résulte du fait que deux droites sont au plus sécantes en un point et de la propriété réciproque : si le centre existe, il ne peut se trouver ailleurs. D'où notre choix de couper la démonstration en deux : une situation 2 pour l'existence et une situation 3 pour l'unicité en imposant dans le deuxième cas un angle obtus.

Ainsi notre proposition se décompose en quatre temps que nous annonçons comme quatre « situations », la première étant formée de deux étapes. Cette organisation est le fruit de l'expérimentation avec les élèves pendant plusieurs années et de nos échanges par la suite dans le cadre du groupe IREM. Au départ la situation 2 n'était pas prévue, ce sont l'analyse mathématique et l'observation des élèves qui nous ont conduits à l'introduire.

En outre un résultat s'énonce de façon indépendante du cercle : les trois médiatrices d'un triangle sont concourantes. Nous le relions à l'unicité du cercle.

Tout professeur fait cette analyse mathématique mais s'il ne l'explicite pas pour lui-même il aura tendance à donner aux élèves tout à la fois par exemple à partir de la seule situation 1 en utilisant la maïeutique, ou comme le fait le manuel cité en faisant remplir des phrases à trou.

Expliciter l'analyse mathématique aide à comprendre qu'il vaut mieux différencier les étapes en amenant des questions distinctes à chaque fois, en d'autres termes inventer trois « situations » pour les trois principales étapes.

2) Insertion dans une progression :

Le fait que la plupart des élèves puissent, avec ce que nous proposons, avoir une activité mathématique ne résulte pas seulement des situations que nous donnons ici mais aussi du fait que ces situations sont articulées avec les précédentes, en particulier des situations vues en $6^{ème}$ mettant en scène la propriété de la médiatrice (surtout la réciproque : tous les points équidistants de deux

points donnés sont alignés) que nous conseillons au professeur de 5ème de reprendre avant d'aborder le cercle circonscrit.

La mémoire de la classe est attachée à l'enseignant et ne fonctionne que sur un an, car elle comporte le vocabulaire spécifique des phrases notées comme étant à retenir, les circonstances particulières dans lesquelles ce savoir est apparu dans la classe et des éléments qui ne sont pas institutionnalisés mais que l'on garde en mémoire.

Sans organisation de la progression entre les situations et sans mémoire de la classe, il ne peut y avoir d'activité mathématique des élèves.

3) Eléments pour une fiche de préparation de la leçon :

Savoirs visés:
- Par trois points distincts non alignés il passe toujours un cercle et un seul.
- Les trois médiatrices d'un triangle sont concourantes.
- Le centre du cercle circonscrit à un triangle est le point d'intersection des trois médiatrices.

Conceptions repérées chez les élèves:
- L'existence du cercle circonscrit dépend de la forme du triangle. En particulier, si les points forment un triangle avec un angle obtus, il n'y a pas de cercle passant par les trois sommets, car le centre éventuel est cherché à l'intérieur du triangle.

Objectifs:
- Conjecturer l'existence du cercle quelle que soit la position des trois points (sauf s'ils sont alignés).
- Motiver la démonstration du point de concours des médiatrices.
- Guider les élèves dans la démonstration.

Prérequis :
- Revoir la médiatrice comme ensemble des points équidistants des extrémités du segment : cette situation est décrite dans la progression de 6 ème. On reverra les propriétés directes et réciproques car les deux sont utiles dans les démonstrations :

  - Si un point appartient à la médiatrice, alors il est à égale distance des extrémités du segment.

  -Si un point est à égale distance des extrémités du segment, alors il appartient à la médiatrice.

4) Déroulement en classe :

Dans la présentation de ce déroulement, :
- les remarques en italiques sont des observations destinées au professeur. La plupart du temps elles donnent des indications sur les réponses et les réactions des élèves
- les phrases encadrées en police ordinaire sont les consignes et questions proposées aux élèves
- les phrases encadrées en gras et police spéciale sont la trace écrite à retenir et copiée dans le cahier
Nous donnons tout cela en détail car aucun mot, aucune formulation ne sont en général anodins

Situation 1: ***Passe-t-il toujours un cercle par trois points?***

Etape 1 : Placer deux points. Combien passe-t-il de cercles par ces deux points?

Observation:

Les élèves pensent au cercle de diamètre [AB], mais aussi aux deux cercles de rayon [AB] ce qui est une erreur.(fig 1)

Certains pensent ensuite qu'il n'y a que trois cercles, celui de diamètre [AB] et deux autres dont les centres appartiennent au cercle de diamètre [AB] : en effet, pour certains élèves, un point ne peut avoir d'existence que s'il appartient à une ligne déjà tracée.(fig 2)

Fig 1

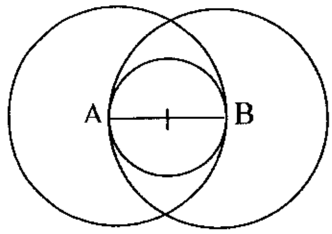
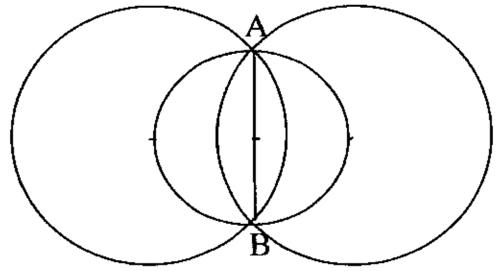


Fig 2



Bilan : Un point situé à égale distance des extrémités d'un segment est un point de la médiatrice.

Un point de la médiatrice d'un segment est situé à égale distance des extrémités du segment.

Il y a une infinité de cercles passant par deux points, leurs centres sont les points de la médiatrice.

Etape 2 : Placer trois points. Existe-t-il un ou plusieurs cercles passant par ces trois points?

Observation :

a) Au cours de la mise en commun, les élèves disent très vite que l'existence du cercle dépend de la position des points. En particulier certains disent que c'est impossible si les points sont alignés ; si cette remarque n'apparaît pas, on ne cherche pas à la provoquer, le cas sera traité plus tard.

Souvent ils placent deux points sur une horizontale du cahier et ils disent que le triangle formé par les trois points doit être rectangle isocèle, car ils choisissent le centre au milieu du segment horizontal.

D'autres élèves pensent que le cercle existe pour les triangles rectangles, la justification venant de la moitié du rectangle. Nous avons décidé d'en rester à cette preuve intuitive afin de ne pas déflorer le sujet pour le cercle circonscrit au triangle rectangle, chapitre prévu au programme de 4ème.

D'autres élèves pensent que le cercle existe pour un triangle équilatéral, d'autres pour un triangle isocèle car ils placent le centre par tâtonnement sur l'axe de symétrie.

b) ***Remarques sur la consigne :*** *au lieu de demander s'il passe un cercle par trois points, le professeur pourrait demander s'il passe un cercle par les trois sommets d'un triangle, mais cela rompt la continuité avec l'étape 1.*

On pourrait craindre qu'en parlant de points au lieu de triangle les cas particuliers (triangle rectangle, équilatéral, etc...) qui permettent aux élèves de démarrer des conjectures n'apparaissent pas et qu'ils restent dans une problématique pratique : chercher par tâtonnement à tracer un cercle en partant de trois points quelconques : cela marche ou non sans aller plus loin.

En fait même si le mot triangle n'est pas prononcé par le professeur, les élèves distinguent bien les cas en termes de triangle et arrivent au triangle isocèle, important pour introduire la médiatrice du fait de son axe de symétrie.

c) Quelle est la place exacte du centre du cercle sur cet axe de symétrie du triangle isocèle ?

L'idée du rôle des médiatrices dans ce problème doit s'introduire en référence à l'étape 1et il doit s'en suivre que le cercle existe pour un triangle quelconque.

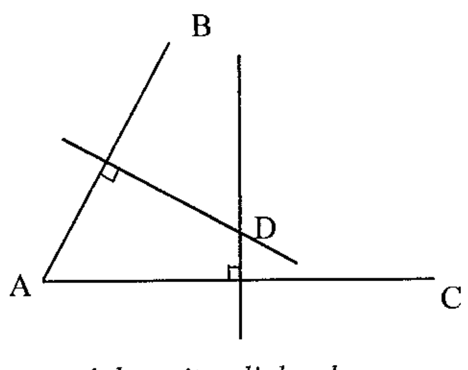
En fait la deuxième médiatrice qui n'est pas en direction. verticale privilégiée comme celle de la base du triangle isocèle envisagé par les élèves arrive difficilement. Comme nous l'avons dit plus haut, les élèves qui ont commencé à tracer le cercle en premier ont pu produire des figures avec des triangles quelconques. Ceci permet au professeur, lors de la mise en commun, d'introduire les trois points quelconques de la situation suivante.

A ce stade un début de conjecture est là. Mais on est loin de la démonstration. Certains élèves ne sont pas persuadés qu'il est possible de tracer un cercle pour tous les triangles

Conjecture : **Il semble qu'il existe un cercle qui passe par les trois sommets de n'importe quel triangle. La médiatrice semble jouer un rôle dans ce problème.**

Situation 2 : ***Démontrer que quand on trace deux médiatrices d'un triangle quelconque, leur point d'intersection est le centre d'un cercle passant par les trois sommets du triangle.***

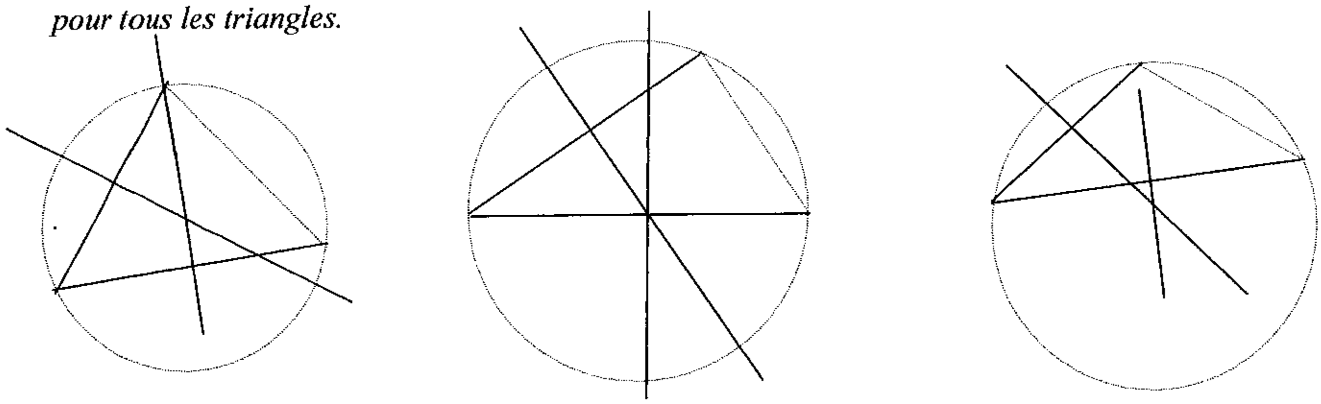
Sur papier blanc. Placer deux points A et B et un troisième, C au hasard : tracer les segments [AB] et [AC] et leurs deux médiatrices. Appeler D leur point d'intersection. Faire des conjectures.



Observation :

a) Si le cas des points alignés apparaît le traiter d'abord.

b)Tous les cas de figure apparaissent ce qui permet de renforcer l'idée de l'existence du cercle pour tous les triangles.



c) *Les élèves font des conjectures suffisamment diverses pour qu'en les regroupant, et en cherchant à démontrer les plus faciles d'abord, ils arrivent ainsi à l'existence du cercle.*

Demander aux élèves de faire des conjectures est une méthode générale pour construire une réelle « activité mathématique de démonstration ». La diversité des conjectures écrites au tableau permet ensuite à tous de démontrer des résultats partiels en choisissant eux-mêmes pour commencer les conjectures qu'ils jugent facilement démontrables et d'arriver ainsi au résultat final.

Les conjectures qui apparaissent sont :

- *DA = DB et DA = DC*
- *DA = DB = DC*
- *les triangles ABD et ACD sont isocèles en D*
- *le cercle de centre D passe par A, B et C.*

On utilise la propriété de la médiatrice : un point qui est sur la médiatrice est équidistant des extrémités du segment.
Selon les conjectures deux options se présentent :

- Si les élèves pensent à déduire des égalités précédentes que DB = DC et que D appartient à la médiatrice de [BC], le problème est résolu. Ils utilisent la propriété réciproque de la médiatrice : le point D est à égale distance des deux points B et C donc D est un point de la médiatrice de [BC]. D appartient aux trois médiatrices. Elles se coupent en un seul point . Il y a un cercle unique passant par A, B, C dont le centre est D.

On constate que ces deux déductions et en particulier la transitivité de l'égalité sont loin d'être des évidences pour les élèves.

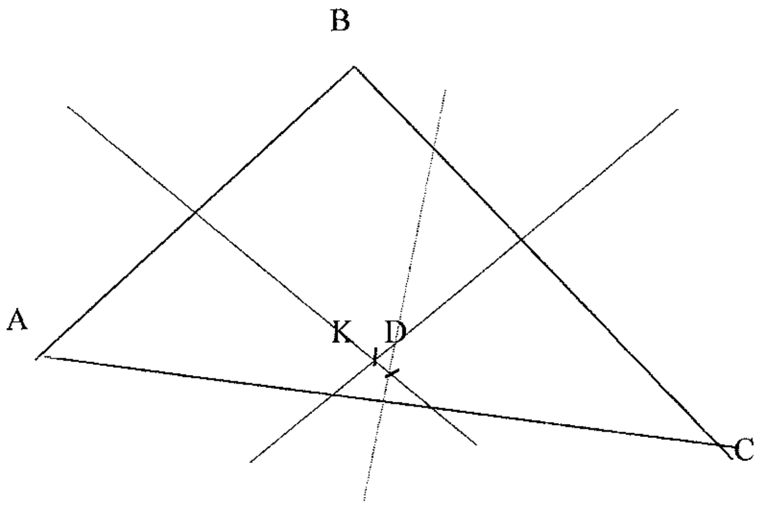
- Si les élèves ne pensent pas que le point d'intersection des 2 premières médiatrices appartient à la troisième médiatrice : on a quand même prouvé qu'il existe un cercle passant par A, B, C mais le problème de l'unicité se pose toujours. Nous proposons alors la situation suivante pour guider les élèves (voir situation 3)

Bilan : Il existe un cercle passant par trois points non alignés. On admet que son centre peut être à lintérieur ou à lextérieur du triangle.

Remarque : On pourra illustrer la dernière partie du bilan avec un logiciel de dessin géométrique. On peut construire le cercle circonscrit à un triangle et faire changer le triangle, on voit alors le centre « rentrer » et « sortir » du triangle, « disparaître à l'infini » et « réapparaître de l'autre côté ». On peut demander l'affichage de la mesure des angles, on s'aperçoit alors que la position du centre dépend de la présence d'un angle obtus ou droit dans le triangle.

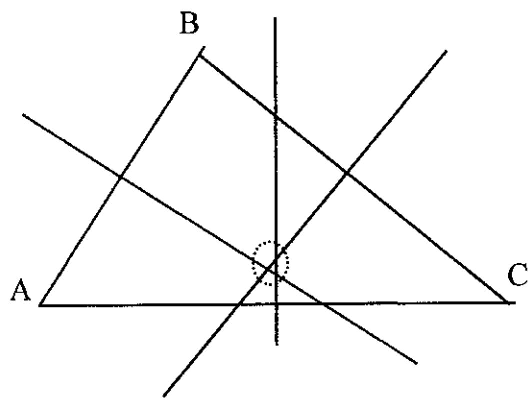
Situation 3 : ***Unicité du cercle, on pose la question :***

Etape 1 : Calquer les trois mêmes points qu'à la situation précédente et construire deux médiatrices différentes des précédentes : le point d'intersection est il le même ? Y en a t-il plusieurs ?



Certains élèves pensent qu'il y a plusieurs points d'intersection, peut-être trois, d'autres pensent qu'il y en a un seul. Pour les inciter à démontrer, on propose la situation suivante.

Etape 2 : Dessiner un triangle ABC. Dessiner les trois médiatrices des côtés. Parfois elles semblent former un petit triangle. Essayer de choisir le triangle ABC de départ de sorte que le petit triangle formé par les 3 médiatrices soit le plus grand possible.



Observation : - Nous avons utilisé un travail de Guy Brousseau[5] pour cette situation 3 étape 2. C'est l'intérêt pour le professeur d'avoir quelques connaissances en didactique. Cela lui permet de trouver des idées pour mettre les élèves en activité.
- Cette situation consiste à demander aux élèves un travail théoriquement impossible : agrandir le petit triangle. Cela permet de les engager à démontrer. C'est la même idée que nous utilisons en 6ème quand nous demandons de tracer un quadrilatère ayant trois angles droits et trois seulement.

Remarque : Le triangle des médiatrices ne s'agrandit pas si on agrandit le triangle de départ. Plus on fait un dessin soigné, plus le triangle formé par les médiatrices est petit. On va montrer qu'il ne s'agit pas d'un triangle mais d'un point.

On suggère alors de tracer la troisième médiatrice, puis le professeur est souvent obligé de suggérer la transitivité de l'égalité pour terminer la démonstration.
Remarque: C'est une bonne occasion d'utiliser l'égalité d'une manière inhabituelle car le cas ne se présente pas souvent.

Situation 4 :

Reprendre le cas des points alignés s'il a été écarté au début. Que peut on dire des médiatrices ?

Réponse: Elles sont parallèles, donc il n'y a pas d'intersection. On pourra traiter cette question en dernier si elle n'est pas apparue avant, le professeur posera alors lui même le problème des points alignés.
Remarque : La vision dynamique (ordinateur ou deux baguettes articulées)éclaire le cas des points alignés. On voit le triangle aplati et les médiatrices qui sont presque parallèles.

A Retenir :

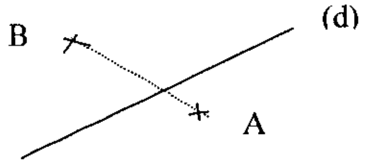
1-Les médiatrices d'un triangle sont concourantes. Leur point d'intersection est à égale distance des trois sommets du triangle.
2- Par trois points non alignés passe un cercle et un seul. Son centre est le point d'intersection des trois médiatrices du triangle.
3- Le cercle passant par les trois sommets d'un triangle s'appelle le cercle circonscrit au triangle.

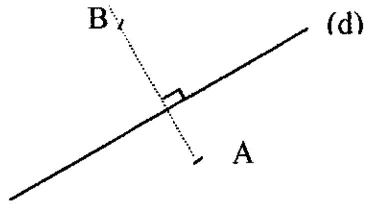
Exercices:

1) Soient trois points A, B, C non alignés. Construire un point O tel que les deux triangles OAB et OBC soient isocèles.

[5] *Etudes de questions d'enseignement. un exemple : la géométrie* par Guy Brousseau dans la Revue de didactique de l'IMAG de Grenoble n° 45 (1983)

2) Sur chacune des figures données, construire un cercle passant par les deux points A et B et ayant son centre sur la droite donnée (d).
(<u>Deux cas:</u> soit (AB) n'est pas perpendiculaire à (d) ou elle l'est)





3) Etant donné un cercle, retrouver son centre.

Même exercice avec un arc de cercle.

<u>III.3 A propos de la recherche du centre d'un cercle :</u>

Une étude précise de ce qui se passe dans différentes classes lors de la résolution de l'exercice 3 a été faite dans le travail fourni en 1997 pour le Ministère de L'Education Nationale(Catherine Desnavres et Annie Berté).

Les trois problématiques en géométrie : problématique pratique, problématique de modélisation et problématique théorique que nous devons à René Berthelot et Marie-Hélène Salin[6] d'une part et l'analyse praxéologique (tâche, technique, technologie , théorie) que nous devons à Yves Chevallard[7] d'autre part, ont servi d'outils pour analyser cet exemple.

Voici un extrait de l'analyse praxéologique que l'on peut lire dans le fascicule « La géométrie au cycle central. Un enchaînement d'activités Irem de Bordeaux 2000 »

<u>Exemple : Cercle circonscrit à un triangle</u>
<u>Tâche à accomplir</u> *retrouver le centre d'un cercle.*

*Plusieurs **<u>techniques</u>** sont possibles qui varient suivant les élèves, leur niveau, ce qui a été vu avant ...*

Voici des techniques trouvées par nos élèves de la 6ème à la 4ème :

1) *Tracer les médiatrices de deux cordes et prendre leur point d'intersection.*
2) *Tracer la médiatrice d'une corde et prendre le milieu du diamètre obtenu.*
3) *Tracer un triangle rectangle ayant ces trois sommets sur le cercle et prendre le milieu de l'hypoténuse.*
4) *Tracer deux triangles rectangles ayant leurs trois sommets sur le cercle et prendre le point d'intersection des deux hypoténuses.*
5) *Tracer un rectangle ayant ces quatre sommets sur le cercle et prendre le point d'intersection de ses diagonales.*
6) *Tracer un triangle quelconque ayant ces trois sommets sur le cercle et prendre le point d'intersection de ses trois médiatrices.*

---

6 *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire*- René Berthelot et Marie-Hélène Salin- Thèse- Université de Bordeaux 1- 1992

7 *La notion d'organisation praxéologique* dans Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques- Actes de l'Université d'été 4-11 juillet 1998- IREM de Clermont-Ferrand

7) Rechercher en tâtonnant la corde ayant la plus grande longueur.

Certaines de ces techniques peuvent fonctionner même si on ne connaît qu'un arc de cercle (1, 6,) D'autres nécessitent le cercle complet (2, 3, 4, 5, 7).

La technique 7 qui ne sera pas considérée comme correcte bien qu'assez efficace sur le plan de la précision obtenue est employée par beaucoup d'élèves, surtout dans les petites classes. On peut estimer que ces élèves en restent à une problématique pratique.

Quand on recherche un point par une construction en mathématique, il est sous entendu que ce point doit être défini par des propriétés mathématiques (intersection, milieu,...), c'est pourquoi on n'admet pas la méthode 7 dans laquelle le point est obtenu par tâtonnement. Ce contrat implicite n'est pas assimilé par les élèves les plus jeunes, il faut le leur expliquer.

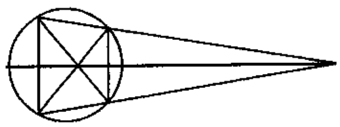
Les techniques 1, 2 ou 6 se rencontrent souvent quand on pose ce problème à la fin de la leçon sur le cercle circonscrit à un triangle.

Quand on pose ce problème avec un cercle complet dans la leçon sur la médiatrice en 6ème, la technique 2 est majoritaire.

Les techniques 3, 4 et 5 se rencontrent plutôt en 4ème quand on vient d'étudier le cercle circonscrit au triangle rectangle.

Il existe d'autres techniques, qui permettent de retrouver le centre du cercle à la règle seule, par exemple :

- *Tracer deux cordes parallèles, à l'aide des deux côtés de la règle, n'ayant pas la même longueur et joindre leurs extrémités. Quand on joint les deux points d'intersection, on a un diamètre. On recommence et on prend l'intersection des deux diamètres.*



- *Tracer deux paires de cordes parallèles, toujours avec les deux côtés de la règle, tracer les diagonales des deux trapèzes . Quand on joint les points d'intersection, on obtient un diamètre, et on recommence.*

*Les **technologies** qui accompagnent ces techniques peuvent être différentes, on évoquera des propriétés, des théorèmes, par exemple :*

- *Pour la 3 ou la 4 le cercle circonscrit à un triangle rectangle.*
- *Pour la 1 ou la 2, la médiatrice d'une corde passe par le centre du cercle.*
- *Pour la 6, le centre du cercle circonscrit à un triangle quelconque.*
- *L'axe de symétrie, pour la technique à la règle seule.*

La technologie n'est pas toujours accessible à un élève qui emploie une technique au niveau d'enseignement où il est. Il peut avoir trouvé sa technique grâce à des connaissances culturelles (par exemple les diagonales du rectangle).

*Toutes ces technologies sont fédérées par une **théorie** :La médiatrice d'un segment est l'ensemble des points équidistants des extrémités du segment.*

Pour la technique7, la théorie est différente . Il s'agit de l'inégalité triangulaire qui dit que pour toute corde qui coupe le cercle en deux points A et B, on a $AB \leq AC + CB$ où C est le centre du cercle et il y a égalité quand les trois points sont alignés, c'est à dire quand [AB] est un diamètre.

III.4. Transmettre une activité à d'autres enseignants :

Aussi soigneusement que soit rédigée « une activité » la transmission aux enseignants et la réalisation qu'ils feront en classe peut s'éloigner de ce que les auteurs ont prévu.

Par exemple voulant réaliser cette activité sur le cercle circonscrit, un professeur arrivé à l'étape 2, a posé la question aux élèves « existe-t-il un cercle passant par trois points donnés ? » et, en même temps, croyant bien faire, il a placé lui-même trois points au tableau de façon à ce qu'ils soient les sommets d'un triangle ayant un angle obtus. Il craignait que sans cette intervention, ce cas ne soit pas envisagé par les élèves .

Rien de ce qui est censé se produire après n'a eu lieu. En effet les élèves ont placé sur leur cahier trois points disposés à peu près comme le professeur l'avait fait au tableau obtenant ainsi un triangle avec un angle obtus.

La recherche par les élèves de cas particuliers ne pouvait pas se faire. Les élèves démunis avec un tel triangle se plaçaient dans ce que nous appelons une problématique pratique et essayaient de trouver un centre par tâtonnement avec leur compas.

Certains s' interdisaient de sortir de la figure et concluaient à l'impossibilité car le centre est à l'extérieur du triangle. D'autres trouvaient par approximations successives et tout était fini. Ils concluaient que parfois c'est possible, parfois non. Personne n'avait besoin de faire des mathématiques.

Les conséquences de cette initiative spontanée sont significatives. Très souvent des activités vont être totalement changées par ce type d'interventions visant à guider les élèves pour sécuriser le professeur.

a- S'agit-il d'un manque dans notre rédaction?

Peut-être, et c'est pour cela que nous explicitons ce cas ici. En effet l'erreur du professeur est « logique ». Il avait pensé dès l'étape 1 que les élèves allaient placer les deux points en position d'extrémités d'un segment horizontal. Jugeant avec raison que cela serait peut-être préjudiciable à la suite, il a, en même temps qu'il donnait la consigne pour les deux points, marqué deux points au tableau de façon quelconque. Les élèves ont reproduit la position des points sur leur cahier. La question en est devenue un peu plus difficile pour eux mais sans conséquence négative sur le déroulement de la leçon. Il a reproduit logiquement le même geste pour l'étape 2 avec trois points. Mais du coup le déroulement a été changé.

b- S'agit-il d'une faiblesse de conception de l'activité ?

Elle n'est pas «verrouillée », nous introduisons une part de contingence en ce sens que rien dans l'organisation ne permet au professeur d'être sûr que les élèves vont démarrer en envisageant des triangles particuliers. Nous affirmons cependant que cela va se produire pour deux raisons :

- nous faisons confiance aux élèves qui, comme des mathématiciens en situation de recherche, essaieront d'abord de trouver la solution du problème dans des cas particuliers. Cela nous semble de plus en plus nécessaire pour concevoir des situations à mesure que l'on monte dans les niveaux d'enseignement.
- nous savons qu'ils vont se référer à des figures prototypiques (triangle équilatéral inscrit dans un cercle comme dans certains panneaux routiers de STOP) ou parce que l'obstacle des directions privilégiées va amener un triangle avec un côté horizontal et le centre du cercle au milieu de ce côté, d'où le triangle rectangle.

Dans la transmission aux professeurs il est important de ne pas raconter les réactions des élèves que nous avons observées comme s'il s'agissait d'anecdotes. Transmettre les faits comme des anecdotes les intéressera dans l'instant mais ils n'en tireront aucun profit ensuite.

Nous transmettons des observations qui sont reliées le plus possible à des concepts de didactique, ce qui leur donne une consistance pour les enseignants.

De même transmettre une leçon sans justifier les choix didactiques par une argumentation solide n'aide pas les professeurs car ils déformeront le scénario même sans le vouloir

Dans la transmission des « activités » il nous semble important de dégager certaines techniques générales pour construire une « activité ». Ainsi nous avons vu à propos du cercle circonscrit qu'il est parfois intéressant de demander aux élèves de tracer une figure qui n'existe pas. Cela motive une démonstration. De même il est souvent utile de proposer une figure et de demander aux élèves d'écrire des conjectures sur le cahier. Le bilan étant fait au tableau, ils doivent trouver la conjecture la plus facile à démontrer, le faire, et ainsi de proche en proche.

On voit combien nous sommes loin de ce qui était proposé par le manuel.

III.5. En guise de conclusion de cette partie

Dans les activités proposées dans les manuels, **il manque des moments a- didactique en d'autres termes des moments où l'élève peut oublier le professeur et doit faire preuve d'initiative pour résoudre un vrai problème mathématique.**

Les questions, les indications du manuel guident pas à pas l'élève qui n'a plus aucune initiative et donc pas d'activité mathématique. C'est ce que nos « activités » essaient d'éviter.

Dans la suite de ce document, nous avons essayé de rédiger des exemples d'activités qui ne se trouvent pas dans les fascicules que nous avons déjà publiés dans le cadre de l'IREM. Nous nous sommes rendus compte qu'il est très difficile de communiquer à d'autres les « bons indices » qui font qu'une activité « marche ».

Dans notre groupe, nous nous connaissons bien, et nous pensions faire avec nos élèves, la même activité sous le même titre.

Au moment de la rédaction, nous avons constaté que nos procédures étaient différentes suivant la personnalité et les habitudes de chacun et ces différences ont des conséquences sur les réactions des élèves.

Une activité prise dans un document deviendra performante dans la classe lorsque l'enseignant se la sera appropriée en faisant sa propre analyse didactique et mathématique, quitte à changer quelques éléments.

Néanmoins dans la conception d'une « activité » il y a certains choix de variables qui ont des conséquences importantes sur son déroulement. Dans la communication de l'activité, il est fondamental de les préciser et d'en expliciter les raisons.

Pour aider les professeurs à mieux respecter les consignes données par les instructions officielles, il faudrait que les éditeurs de manuels sortent deux documents différents :

- **un livre destiné aux élèves composé d'un recueil d'exercices avec un résumé de cours et d'une partie documentaire pour que les élèves prennent l'habitude de le consulter .**

- **un véritable livre du professeur avec des activités pour la classe, accompagnées d'indications sur leur analyse en termes mathématique et didactique, sur leur mise en œuvre.(gestion de la classe, matériel,...)**

Partie IV

ACTIVITE DITE « RECTANGLES D'EUCLIDE »

Nous allons présenter trois énoncés différents issus de publications diverses pour une même activité « Les rectangles d'Euclide », puis nous exposerons notre proposition en détaillant pour cette dernière, la mise en œuvre et en donnant des observations pour le professeur.
Nous procèderons enfin à une analyse comparée de ces quatre propositions et nous vous montrerons une production d'élève.

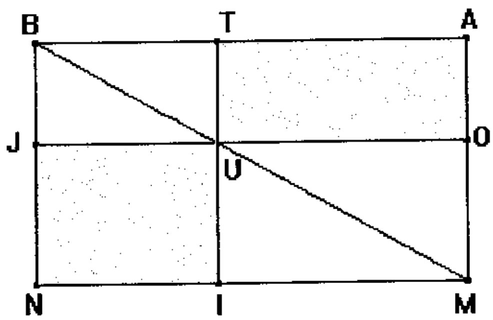
IV.1. Les trois propositions des manuels :

Proposition 1 : Comprendre la géométrie 6 ème Hatier

sans mesurer

a) Complète les phrases suivantes (sans mesurer) :
  - Le triangle BUT a même aire que le triangle ……..
  - Le triangle NOU a même aire que le triangle …….
  - Le triangle BAN a même aire que le triangle ……..

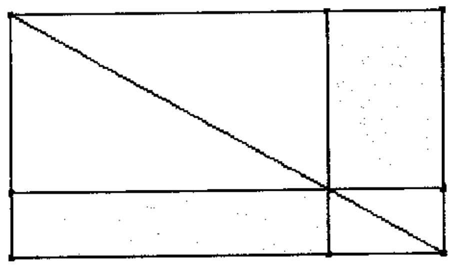
b) Pourquoi, sans mesurer, peut-on être certain que les rectangles JUIN et AOUT ont la même aire ?



Proposition 2 : Petit x Activités mathématiques au collège Hors série IREM de Grenoble

Les aires hachurées sont elles égales ?

Quels arguments donnerais-tu pour convaincre ?



Proposition 3 : Initiation au raisonnement déductif au collège
Arsac Chapiron Colonna Germain Guichard Mante Presses universitaires de Lyon

Trace un rectangle ABCD tel que AB = 8 cm et BC = 5 cm.
Place un point E sur [AC] tel que AE = 3 cm.
Trace la parallèle à (AD) qui passe par E ; elle coupe [AB] en N et [DC] en L.
Trace la parallèle à (AB) qui passe par E ; elle coupe [AD] en M et[BC] en K.

Parmi ces deux rectangles, EMDL et ENBK, quel est celui qui a la plus grande aire ?

IV.2. Notre proposition :

Niveau : cycle central (en cours d'année de 5ième ou début de 4ième)

Cette activité peut être faite en dehors des chapitres de la progression dans le cadre du travail sur le raisonnement, la preuve et les moyens de convaincre.

Objectifs :

- Montrer les limites de l'utilisation du dessin et des mesures.
- Décider avec la classe de ce qu'est une preuve convaincante dans le cadre du cours de mathématiques
- Travailler sur la notion d'aire et plus particulièrement sur le calcul d'une aire par différence .

Remarque : l'objectif n'est pas, dans cette activité, l 'acquisition d'une nouvelle connaissance.

Pré requis

- Calcul de l'aire du rectangle
- Calcul d'une aire par différence

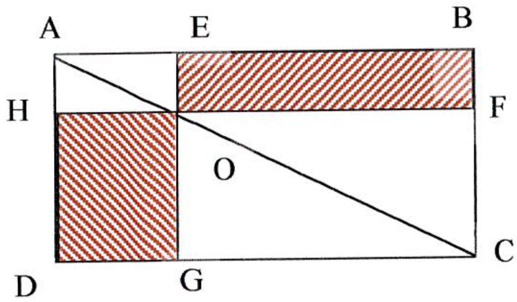
Enoncé :

Le professeur trace au tableau la figure à main levée en la commentant

« Je trace un rectangle ABCD. Je trace sa diagonale [AC].
Je prends un point O quelconque de cette diagonale.
Par O je trace la parallèle à (AB) qui coupe [AD] en H et [BC] en F
Par O je trace la parallèle à (AD) qui coupe [AB] en E et [DC] en G »

Il hachure les surfaces des rectangles EOFB et HOGD

Des deux surfaces hachurées, quelle est celle qui a la plus grande aire ? Justifier votre réponse.



Remarques :

1) Le professeur pourra justifier rapidement que EOFB est un rectangle et qu'il en est de même pour OFCG, OHDG et OHAE

2) Les mesures ne sont pas données de façon intentionnelle.

3) Pour la consigne on peut hésiter entre deux formulations « Des deux surfaces hachurées, quelle est celle qui a la plus grande aire ?» qui semble un peu induire en erreur et « comparer les aires des deux parties hachurées » qui suscite peut-être moins un débat dans la classe.

Organisation :

Les élèves sont regroupés par 4 pour qu'ils puissent avancer dans l'activité et élaborer une preuve ensemble .

Ils disposent de leur cahier de recherche et de tout leur matériel, y compris la machine à calculer.

Phase 1 : Premier temps de recherche (10 mn)

Stratégies « attendues » :

a) Certains groupes vont tracer une figure, mesurer, calculer les aires à partir de ces mesures et trouver des résultats voisins mais différents.
b) D'autres vont penser que la réponse dépend de la position du point O sur la diagonale.
c) D'autres vont penser à l'égalité des aires en la justifiant par la « compensation des formes ». (ex :« l'un est fin et long », l'autre est « large et court »)

Phase 2 : Mise en commun :

Chaque groupe expose oralement ce qu'il a trouvé. Le professeur peut choisir l'ordre des résultats exposés du raisonnement le moins élaboré au plus élaboré.
(Le professeur peut noter au tableau les résultats obtenus par les groupes qui ont mesuré)
Les conclusions des différents groupes sont contradictoires et un débat s'installe. Les élèves font notamment des remarques sur l'imprécision des mesures. Ils arrivent à l'idée de l'égalité des aires.
(un logiciel de géométrie peut être utilisé pour renforcer cette conjecture en faisant varier le point O sur la diagonale.)

Phase 3 : De l'idée à la preuve....

Le professeur demande aux élèves de se remettre en groupes et relance la recherche :
« Les surfaces hachurées ont-elles la même aire ? et cela quelle que soit la figure ? Quelle que soit la position du point O ?. »
Il demande aux différents groupes d'écrire une justification sur une affiche.

Si les groupes n'ont pas d'idées deux coups de pouces peuvent être donnés :

- La diagonale d'un rectangle le partage en deux triangles de même aire
- On peut exprimer les aires des surfaces hachurées en utilisant les aires d'autres parties de la figure

Remarque : Si un groupe a trouvé, on peut demander aux élèves de ce groupe de donner une indication aux autres groupes .

Phase 4 : Les différentes justifications

Chaque groupe expose son affiche au tableau .
La classe prend connaissance de toutes les productions et se met d'accord pour sélectionner la ou les plus convaincantes (avec une discussion sur ce qu'est une preuve en mathématique.)

Bilan : Les élèves et le professeur décident d'une rédaction commune de la preuve ; Elle sera copiée dans le cahier.

Remarque : Dans cette activité, on peut remplacer les rectangles par des parallélogrammes .

Prolongements pour la troisième :

En troisième on peut proposer aux élèves la même figure mais la question ne porte plus sur les rectangles. La question peut être : faire des conjectures à partir de cette figure.

Il est peu probable que les élèves conjecturent l'égalité des aires des rectangles . En revanche ils vont conjecturer le parallélisme des droites (HE), (BD) et (GF) qui sont les diagonales des trois rectangles.

Pour le prouver on va écrire les rapports. Ceux qui écriront AH/HD = AO / OC = AE/EB peuvent récupérer AHxEB = HDxAE qui donne l'égalité des aires des rectangles

Cette figure est connue comme donnant une méthode géométrique pour construire la quatrième proportionnelle x à trois nombres donnés a, b, c.

Pour construire cette quatrième proportionnelle, une méthode consiste à tracer deux droites sécantes quelconques en A et porter par exemple sur la première droite AH = a, HD = b, et sur la seconde droite AO = c , puis de tracer par D la parallèle à (HO) qui coupe l'autre droite en C de sorte que OC = x.

Cette figure donne la méthode suivante : construire AH = a, HD = b et AE = c avec l'angle EAH = 90° .

On termine la figure avec des rectangles (au lieu de triangles) et on récupère alors EB = x

IV.3 Comparons ces quatre propositions :

Dans la proposition 1, le travail est très guidé. On précise qu'il ne faut pas mesurer donc toute la première phase de conjectures n'a plus lieu. Or c'est précisément dans cette phase que le doute s'installe et que la démonstration se trouve motivée.

Nous avons choisi de faire cette activité en $5^{ème}$ ou en $4^{ème}$ plutôt qu'en $6^{ème}$ comme la proposition 1, en effet les élèves maîtrisent mieux la notion d'aire d'un rectangle et d'un triangle rectangle qui sont utiles ici mais dont l'acquisition n'est pas le but de l'activité. En $4^{ème}$, les élèves ont plus de possibilités d'utiliser des lettres pour formuler leurs réponses. (cf production d'élève ci dessous)

Dans la proposition 2, on ne sait pas si les figures sont des rectangles. Nous avons choisi de dire qu'il s'agit de rectangles comme dans la proposition 3. Nous pensons que c'est plus clair ainsi, il n'y a pas d'ambiguïté sur le statut de la figure. Le fait de justifier que nous avons bien des rectangles n'est pas l'objectif de cette activité, aussi dans notre proposition, c'est le professeur qui le fait, très rapidement .

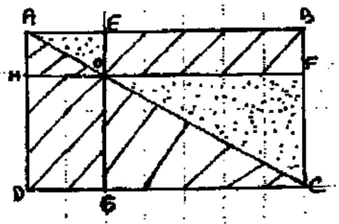
Dans la proposition 2, les points de la figure ne sont pas nommés, nous avons choisi de le faire afin de faciliter la communication lors de la mise en commun mais cela n'empêche pas les élèves d'introduire des désignations supplémentaires. (voir production d'élève)

Dans la proposition 3, le tracé de la figure est à la charge des élèves. Certains élèves peuvent avoir des difficultés à faire la figure. Nous avons choisi de faire une figure à main levée afin que tous les élèves puissent démarrer, et de la réaliser en même temps que l'on dicte les consignes afin que chaque élève fasse sa propre figure.

Nous ne donnons donc pas de mesures pour inciter les élèves à prouver que leurs conjectures sont vraies pour toutes les figures. Cela n'empêche pas les élèves de mesurer.

Nous posons la question comme dans la proposition 3, afin de renforcer le doute, pour qu'il y ait débat dans la classe.

Voici pour illustrer notre propos, la production d'élève à laquelle il est fait référence dans les remarques ci dessus.



Des deux aires achurées, quelle est la plus grande?
Justifier votre réponse.
2,3 x 1,5 = 3,45
0,9 x 4 = 3,6
Les deux aires achurées sont-elles égales sur toutes les figures, ou non?
Les triangles ABC et ACD sont identiques et si on enleve AOH + OGC dans le triangle ADC et si on enlève AOE + OFC dans le triangle ABC on enlève la même chose donc EOBF et HODG ont la même aire.

ABC = ADC = $\mathcal{R}$
AOH = AOE = a
OGC = OFC = b

OHDG = ADC - AOH - OGC = $\mathcal{R}$ - a - b
OEBF = ABC - AOE - OFC = $\mathcal{R}$ - a - b
Donc OHDG = OEBF

Partie V

ACTIVITES SUR LE THEME FRACTIONS ET DECIMAUX

Ces activités sont trois moments d'une progression sur les fractions et les décimaux.
Nous donnons une vue d'ensemble de notre progression.

Une activité prend tout son sens quand elle est enchaînée à d'autres.

V.1 Progression fractions et décimaux en sixième :

Voici la description très rapide d'un enchaînement possible de situations permettant de reconstruire rapidement la notion de nombre décimal à partir des fractions et fractions décimales.

1) Partager des bandes, des disques, des rectangles pour introduire des fractions inférieures à 1 comme codage des parts d'un tout.

2) Transmettre la mesure d'un segment en utilisant une unité que l'on peut fractionner, pour le reproduire à distance. Par exemple : $1 + \frac{1}{4}$; $5 + \frac{1}{2} + \frac{3}{4}$

3) Mesurer avec des dixièmes, des centièmes et notation décimale. Exemple : $4 + \frac{5}{10} = 4{,}5$

   Repérer un point sur une droite graduée : en plaçant des fractions sur des bandes graduées en demis, en tiers, en quarts, etc... et en les superposant.
   Utilité des fractions supérieures à 1 pour désigner les points situés après 1 dans le but de retrouver la place d'un point sur une droite. Notion d'abscisse.
   Graduer avec des décimaux

4) Différents points de vue sur les fractions considérées comme mesure de longueur d'un segment : $\frac{3}{4}$ est vu comme $3 \times \frac{1}{4}$ ou comme 3 partagé en 4 parts égales.

5) Equations de la forme a x ... = b. $\frac{b}{a}$ apparaît comme le quotient de b par a.

On voit alors $\frac{3}{4} = 3 : 4 = 0{,}75$ et pour les fractions décimales $\frac{45}{10} = 45 : 10 = 4{,}5$

6) Multiplication d'un entier par une fraction

Les conceptions de la fraction $\frac{3}{4}$, comme $3 \times \frac{1}{4}$ (déjà vu) ou comme $\frac{1}{4}$ de 3 et introduction de différentes méthodes pour multiplier un entier par une fraction à partir de partages d'unités.

7) Multiplier un décimal par une fraction et appliquer un pourcentage

8) La multiplication des décimaux : la multiplication a été introduite comme addition répétée de décimaux. Par exemple : $3 \times 2{,}5 = 2{,}5 + 2{,}5 + 2{,}5$ mais que signifie $2{,}5 \times 3{,}2$?

- on traitera d'une part la technique
- d'autre part le sens : le prix d'un rôti de 1,350 kg à 7,2 € le kilo, les élèves veulent utiliser la proportionnalité en décomposant 1,350 kg en 1 kg + 300g + 50g. Ils doivent s'apercevoir que le produit des décimaux donne le même résultat plus rapidement.

V.2 Le nombre caché :

Niveau : classe de $6^{ième}$

Cette activité peut-être mise en place soit comme $1^{ère}$ activité du chapitre pour réactiver les nombres décimaux soit en cours de chapitre au moment du travail sur l'ordre.

Objectifs :

- Faire prendre conscience qu'il y a d'autres nombres que les nombres entiers.
- On peut intercaler un nombre décimal entre deux nombres entiers .
- On peut intercaler un nombre décimal entre deux nombres décimaux.
- Comparer deux nombres décimaux.

Enoncé :

Le professeur écrit un nombre sur un papier qu'il cache. Les élèves doivent deviner ce nombre. Pour cela, ils vont faire des propositions auxquelles le professeur ne peut répondre que par deux phrases : « ton nombre est trop grand » (« trop grand ») ou « ton nombre est trop petit » (« trop petit »)

Organisations :

- Choix d'un nombre : le professeur peut commencer dans un premier temps par un nombre entier.

- Le professeur donne la parole à tour de rôle à chaque élève ou à chaque groupe d'élève (on peut les mettre par deux)

Les réponses peuvent être discutées par les autres élèves

Les élèves travaillent sur leur cahier de recherche et peuvent noter ce qu'ils veulent.

Certains utilisent des symboles ou des abréviations ↑↓ $<$ $>$ g p

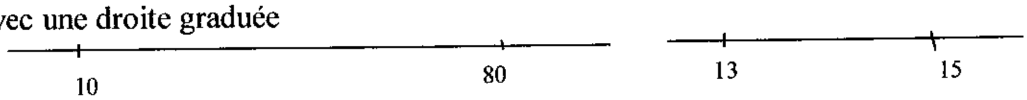
d'autres forment des colonnes + grand | + petit

- Le professeur peut inviter les élèves à faire le point au bout de quelques propositions permettant ainsi à ceux qui sont perdus de « raccrocher » et demander à un élève d'aller au tableau noter un premier bilan : « le nombre caché est entre..... et .... »

On voit alors apparaître différentes notations

Exemple : $\boxed{14{,}27}$ *(meilleur choix que 14,25 d'après les observations qui suivent)*

- En toutes lettres
- 10 - ....- 80
- 10 < ......> 80 ou mieux 10 < .... < 80
- avec une droite graduée



Remarques :

1) *Le nombre caché est représenté par des pointillés, un trou, un point d'interrogation mais très rarement une lettre .*

2) *On se rend compte que c'est l'ordre croissant qui est privilégié.*

3) Le professeur peut introduire la droite graduée, pour une bonne visualisation, en cours d'activité ou à la fin en demandant aux élèves comment ils se représentent tous ces nombres dans leur tête.

Observations :

En général les élèves ne pensent d'abord qu'à des entiers. Certains affirmant même qu'entre 14 et 15 c'est impossible il n'y a rien....

Apparaissent alors les nombres décimaux, tout d'abord sous la forme de 14 et demi, 14,5 puis éventuellement « 14 un quart »

Remarque à propos de 14 un quart : on peut prendre le temps alors de faire noter au tableau comment ils l'écrivent ; Il peut apparaître 14 ¼ 14 et ¼ 14 + ¼ 14/4 14,25 14,15 (venant de ¼ d'heure :15 min)

On discute alors de la pertinence et l'exactitude de ces notations.

Les élèvent affinent leurs propositions en tenant compte des réponses données par le professeur à leurs camarades et arrivent à un nombre situé entre 14,2 et 14,3.

Cap difficile à nouveau. Certains pensent encore que c'est impossible... Il peut arriver d'avoir comme proposition : « 14,2 et demi » ou « 14,2,5 » (écriture qui peut paraître cohérente avec le système décimal mais rejetée par les autres élèves) pour 14,25

Le jeu repart et les élèves arrivent finalement à trouver le nombre cherché $\boxed{14{,}27}$ et le professeur peut retrouver son papier et le montrer à la classe.

Bilan : Entre deux nombres décimaux on peut toujours intercaler un nombre décimal.

Suites possibles :

Le professeur peut poursuivre le jeu en choisissant par exemple

- un nombre décimal positif inférieur à 1
- un nombre avec un zéro aux dixièmes
- un nombre décimal avec trois chiffres après la virgule

A la fin de l'année on peut reprendre cette activité avec des nombres négatifs

Options possibles :

- Un travail peut être fait en amont avec la recherche d'un mot dans le dictionnaire sur le même principe
- On peut également demander aux élèves de proposer des encadrements mais la consigne est plus difficile
- Les élèves peuvent aussi être mis en petits groupes de 3 ou 4 élèves. C'est le groupe qui joue contre le professeur qui a choisi le nombre. Mais un seul membre du groupe pose la question, cela oblige les élèves à se concerter pour se mettre d'accord sur la question à poser. Cette concertation préalable fait avancer la réflexion du groupe tout entier.

V. 3. La multiplication des décimaux :

Niveau : 6[ième]
Place dans le processus d'apprentissage : cette activité vient après avoir mis en place la technique de la multiplication des décimaux.

Objectifs :

- Travailler sur les ordres de grandeur
- Utiliser la technique de la multiplication
- Si k>1 axk > a
- Si k<1 axk < a

Conception erronée : les élèves pensent que la multiplication est une opération qui agrandit toujours (cela vient certainement de l'introduction de la multiplication avec des entiers naturels comme itération d'additions). Il s'agit de mettre cette conception en défaut.

Organisation :
Pour chaque item, le professeur écrit un produit au tableau et 4 propositions de résultats. Les élèves doivent choisir un de ces résultats et expliquer par écrit pourquoi ils l'ont choisi.
Un débat est mené après chaque item et une vérification est faite avec la calculatrice ;

1)	19,9 x 5,8	= ?	$\boxed{115{,}42}$	116,2	117,162	117,002

Justification : le nombre de chiffres après la virgule.
Certains élèves proposent 116,2 (alignement de la virgule comme pour l'addition)

2)	30,5 x 19,9	= ?	5,65	$\boxed{606{,}95}$	60,95	5893,45

Le critère avec le nombre de chiffres après la virgule « ne marche plus ».
Justification : C'est l'ordre de grandeur qui permet de conclure :30,5 $\approx$ 30 19,9 $\approx$ 20 30,5 x 19,9 $\approx$ 600
Quelques élèves pensent que c'est 5893,45 car il 4 chiffres avant la virgule ! ou parce que 5 x 9 = 45

3)	4,1 x 19,9	= ?	86,38	82,03	$\boxed{81{,}59}$	81,51

Les deux précédents critère ne peuvent pas s'appliquer ici.
Justification : C'est le dernier chiffre qui permet de trouver : il faut ici que ce soit 9

4)	388 x 1,03	= ?	385,24	$\boxed{399{,}649}$	378,14	380,44

Justification : 399,64 est le seul nombre supérieur à 388

5)	60,32 x 0,83	= ?	70,0006	66,6666	60,3216	$\boxed{50,0656}$

Justification : 50,0656 est le seul nombre inférieur à 60,32

On peut continuer avec deux nombres inférieurs à 1 :

6)	0,83 x 0 ,72	= ?	1,4306	$\boxed{0,5976}$	0,7286	0,9416

Justification : 0,5976 est le seul nombre inférieur à 0,83 et 0,72

V. 4. Multiplication d'un entier par un décimal :

Niveau $6^{ème}$: Pour introduire la multiplication d'un entier par une fraction
Niveau $5^{ème}$: Révision sur les fractions, peut servir d'introduction à la somme d'un entier et d'une fraction (voir prolongement)

Prérequis : Notion de fraction dans un partage
Egalité de fractions dans des cas simples $\frac{1}{4}=\frac{3}{12}$

Objectifs :
1) Différents sens d'une fraction traduisant un partage :
$\frac{3}{4}$ c'est 3 unités partagées en 4 ou bien $3 \times \frac{1}{4}$.

2) Différentes façons de calculer une fraction d'une quantité.

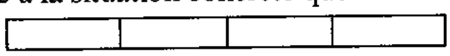
Remarque : Cette situation ouvre en même temps les objectifs 1 et 2 avec des points de vue différents selon les élèves. Il faudra faire un bilan précis pour bien distinguer ces points de vue et dissocier les différents points acquis.

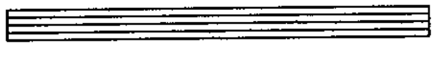
Organisation : Les élèves travaillent individuellement, ils disposent d'une feuille blanche sur laquelle sont reproduites plusieurs bandes de papier rectangulaires identiques de 1cm sur 9 cm, de ciseaux et de colle.

Consignes : *Chaque bande de papier représente un cake. Tous les cakes sont identiques.*
Vous êtes 4 invités et vous voulez partager équitablement un cake entre vous quatre.
a) Expliquez sur la feuille réponse comment vous réalisez le partage en utilisant des dessins, des phrases, des découpages, des calculs...
b) Collez sur la feuille réponse les parts de chacune des quatre personnes.
c) Ecrivez comment on peut désigner la part d'une personne à l'aide d'une fraction.

Déroulement : Cette étape est d'abord destinée à s'assurer que tous les élèves ont bien compris ce que l'on attend d'eux.
Le professeur passe dans les rangs et incite les élèves a bien montrer sur la feuille réponse comment ils font pour réaliser le partage. Il dit aux élèves que certains vont passer au tableau et qu'il faudra savoir expliquer ce que l'on a fait.

Remarque : Si des élèves coupent les bandes en quatre de diverses façons, le professeur fait référence à la situation concrète que l'on est en train de modéliser, un cake se coupe en tranches.



Et non : 

Ou bien 

Les dimensions des bandes de papier ont été choisies afin d'éviter le plus possible ce problème.

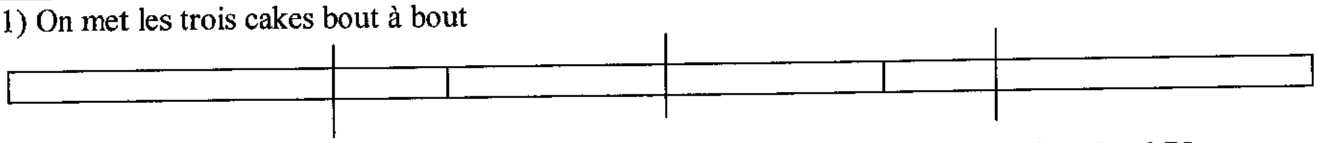
Stratégies attendues : On fera une brève mise en commun au tableau pour cette première étape.
Les élèves nomment une part $\frac{1}{4}$, ils calculent la longueur d'une part en divisant 9 par 4 ils trouvent 2,25 ou 2,2 pour ceux qui mesurent au millimètre près, ou bien ils plient la bande en 4 . C'est pourquoi on a choisi 4 parts, le calcul de la longueur n'est pas obligatoire.

Etape 2 : *Mêmes consignes mais vous avez* ***trois cakes*** *à partager entre quatre personnes.*

Stratégies attendues : Ces stratégies différentes sont données à la classe lors de la mise en commun au cours de laquelle des élèves exposent leur méthode au tableau.
Le professeur sélectionne les productions qu'il souhaite voir exposées en observant les élèves pendant qu'ils travaillent.

Plusieurs méthodes pour faire les découpages suivant les élèves :

1) On met les trois cakes bout à bout

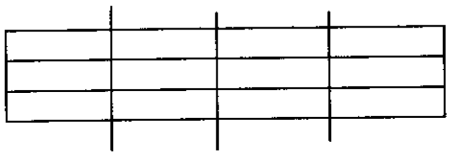


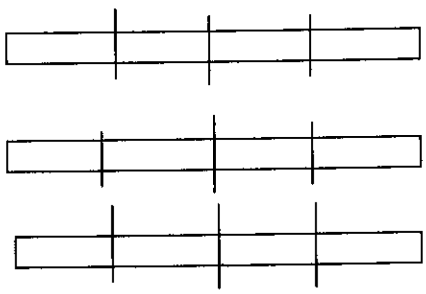
Ce partage s'accompagne des calculs de la longueur d'une part : 9 x 3 = 27 27 : 4 = 6,75

Et la part d'une personne est notée : $\frac{3}{4}$ ou $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ ou $\frac{1}{4}$ (de trois gâteaux)

La proposition de noter $\frac{1}{4}$ la part d'une personne conduit les élèves à préciser qu'il s'agit d'**un quart de trois gâteaux** par comparaison avec l'étape 1 ou il s'agissait **d'un quart d'un gâteau.**

2) On met les cakes les uns sous les autres ou on les coupe séparément.





Ce partage s'accompagne des calculs : 9 : 4 = 2,25 2,25 x 3 = 6,75

Et la part d'une personne est notée : $\frac{3}{4}$ ou 3 x $\frac{1}{4}$ ou $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$ ou $\frac{3}{12}$ (de trois gâteaux)

On reconnaît que $\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$ et on précise à nouveau que c'est $\frac{3}{12}$ de trois gâteaux par référence à l'étape 1.

Bilan :
Différents sens de la fraction $\frac{3}{4}$:
$\frac{3}{4} = 3 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ de 3.
Différentes façons de calculer la longueur d'une part :
9 x 3 = 27 — 9 : 4 = 2,25
27 : 4 = 6,75 — 2,25 x 3 = 6,75

Un élève évoque $\frac{3}{4}$ = 0,75. On peut demander comment retrouver 6,75 en utilisant 0,75 et 9 ?

On a alors 0,75 x 9 = 6,75 = $\frac{3}{4}$ x 9

Prolongements : Si on est en 5ème on peut exploiter l'écriture $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ que l'on peut laisser de côté en 6ème. On peut aussi exploiter cette écriture dès la 6ème suivant le niveau de la classe.

On pourra faire une étape 3 avec 7 cakes ou 11 cakes.

On obtient $\frac{7}{4} = 1 + \frac{3}{4}$

$= 7 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ de 7

$\frac{11}{4} = 2 + \frac{3}{4}$

$= 11 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ de 11

Partie VI

UNE ACTIVITE SUR LES RACINES CARREES EN TROISIEME

Nous présentons ici une activité élaborée par notre groupe pour introduire les techniques d'opérations sur les racines carrées en troisième.

D'après une idée de REPERES IREM N°8 Juillet 92

Objectif : confronter les élèves à des propriétés et des « non-propriétés » afin qu'ils doutent et se posent eux-mêmes les questions qui motiveront les démonstrations.

Savoirs visés :
Pour $a \geqslant 0$ $b \geqslant 0$

$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$

$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ $b \neq 0$

Sans retenir les formules utilisation sur des exemples numériques de :

$a\sqrt{b} = \sqrt{a^2 b}$

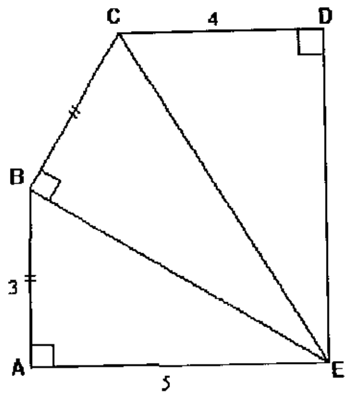
$\frac{\sqrt{a}}{b} = \sqrt{\frac{a}{b^2}}$ $b \neq 0$

Prérequis :Il est utile d'avoir travaillé avant sur les carrés de nombres positifs

$$x^2 < y^2 \Leftrightarrow x < y$$

Exercice préliminaire dans le but de familiariser les élèves à des longueurs écrites sous la forme de racines carrées :

L'unité est le centimètre.
Calculer les longueurs BE, CE et DE



Etape 1

Ces deux problèmes amènent les élèves à rencontrer les questions suivantes :

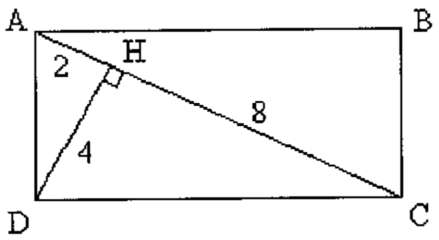
$$\sqrt{20} \times \sqrt{80} = \sqrt{20 \times 80} \ ?$$

$$\sqrt{80} + \sqrt{5} = \sqrt{85} \ ?$$

Ils sont traités en parallèle pour faire naître le doute dans l'esprit des élèves sur le fait qu'une propriété fonctionne pour la multiplication et ne fonctionne pas pour l'addition. Le but est de les amener à poser eux-mêmes les questions.

Il faut interdire la calculatrice sinon les élèves obtiennent directement $\sqrt{20} \times \sqrt{80} = 40$ et il n'y a plus de surprise sur le résultat du problème 1.

Problème 1



Calculer l'aire du rectangle ABCD en utilisant deux méthodes différentes.

$1^{ère}$ *méthode:*

Aire du triangle ACD = $\frac{10x4}{2} = 20$

Aire du rectangle ABCD = 20 x 2 = 40

$2^{ième}$ *méthode* : en utilisant le Théorème de Pythagore dans les triangles rectangle AHD et DHC

DC = $\sqrt{80}$

AD = $\sqrt{20}$

Aire du rectangle ABCD = $\sqrt{20}$ x $\sqrt{80}$

Dans un premier bilan avec la classe on peut déduire de ce qui précède que $\sqrt{20} \times \sqrt{80} = 40$

Un calcul peut-il expliquer cette égalité ?

$\sqrt{20 \times 80} = \sqrt{1600} = 40$

Une élève a trouvé une démonstration pour ce cas particulier :

$A^2 = (\sqrt{20} \times \sqrt{80})^2 = 20 \times 80 = 1600$

donc $A = \sqrt{1600} = 40$

Il semble donc que $\sqrt{20} \times \sqrt{80} = \sqrt{20 \times 80}$

On peut tester cette conjecture sur d'autres exemples numériques

$\sqrt{4} \times \sqrt{25} = 2 \times 5 = 10$

$\sqrt{4 \times 25} = \sqrt{100} = 10$

conjecture

$\boxed{\text{pour } a \geqslant 0 \text{ et } b \geqslant 0 \ \sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}}$

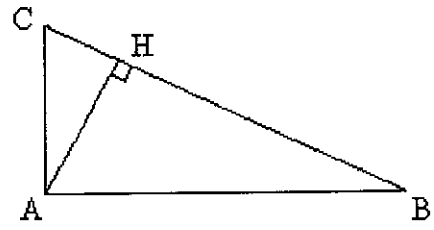
démonstration dans le cas général:

on élève au carré :

$(\sqrt{a} \times \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 \times (\sqrt{b})^2 = a \times b$

Donc $\boxed{\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}}$ par définition

Problème 2



Dans le triangle ABC rectangle en A

AC = 5 AB = 10 AH = $\sqrt{20}$

Calculer BC de deux façons différentes

Remarque : AH = $\sqrt{20}$ ne devrait pas trop surprendre les élèves compte tenu du travail fait dans l'exercice préliminaire.

$1^{ère}$ *méthode*

BC = $\sqrt{125}$ (Théorème de Pythagore dans le triangle rectangle CAB)

$2^{ème}$ *méthode* :

BH = $\sqrt{80}$

HC = $\sqrt{5}$

BC = $\sqrt{80} + \sqrt{5}$

On arrive donc à $\sqrt{80} + \sqrt{5} = \sqrt{125}$

surprenant et beaucoup moins naturel que $\sqrt{85}$

Il semble donc que $\sqrt{80} + \sqrt{5} \neq \sqrt{85}$

Où est l'erreur pensent les élèves ! (*conflit socio-cognitif*)

Comment les convaincre ?

1) les élèves cherchent des valeurs approchées avec la machine à calculer

$\sqrt{80} + \sqrt{5} \approx 11{,}18034$

$\sqrt{85} \approx 9{,}2195445$

$\sqrt{125} \approx 11{,}18034$

Ils sont convaincus que ce n'est pas égal mais se demandent quel rapport il y a entre 80, 5 et 125.

2) On peut prendre d'autres exemples

$\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$

$\sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$

3) démonstration dans ce cas particulier par le calcul de $(\sqrt{80} + \sqrt{5})^2$

4) démonstration dans le cas général selon le niveau de la classe :

$\boxed{\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}}$ $a \geqslant 0$ $b \geqslant 0$

$(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = a + b + \mathbf{2}\sqrt{\mathbf{a}}\sqrt{\mathbf{b}}$
$(\sqrt{a+b})^2 = a + b$

L'égalité n'est donc vérifiée que si a = b = 0

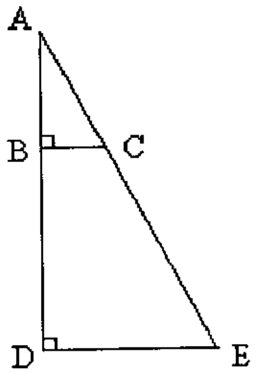
On peut remarquer que $\sqrt{a+b} \leqslant \sqrt{a} + \sqrt{b}$

Remarque
$\sqrt{125} = \sqrt{25 \times 5} = \sqrt{25} \times \sqrt{5} = \underline{5\sqrt{5}}$

$\sqrt{80} + \sqrt{5} = \sqrt{16 \times 5} + \sqrt{5} = 4\sqrt{5} + 1\sqrt{5} =$
$\underline{5\sqrt{5}}$

Utilité de la forme $a\sqrt{b}$ .Ce n'est pas « gratuit » Nous avons prévu de travailler cette technique dans l'étape 3.
On pourra revenir sur cette question après l'étape 3 ou bien la traiter tout de suite pour introduire la technique, l'étape 3 devenant alors inutile.

Etape 3



AD = 6 AB = 2 BC = 1
Calculer AE de différentes façons

1ère méthode :
AC = $\sqrt{5}$ en appliquant le Théorème de Pythagore dans le triangle rectangle ABC
On en déduit en utilisant le théorème de Thalès que $\underline{AE = 3\sqrt{5}}$

2ième méthode :
DE = 3 en utilisant le Théorème de Thalès
$\underline{AE = \sqrt{45}}$ en appliquant le Théorème de Pythagore dans le triangle rectangle ADE

Donc $3\sqrt{5} = \sqrt{45}$

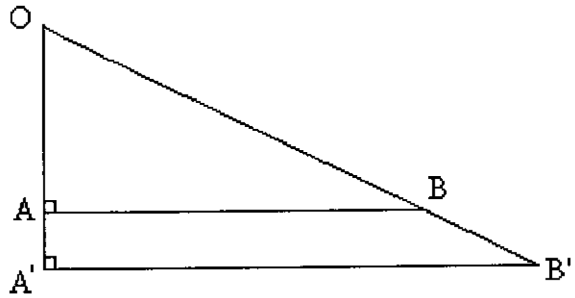
Peut-on justifier ce résultat par le calcul ?

On peut utiliser la propriété de l'étape1 $\sqrt{45} = \sqrt{9} \times \sqrt{5}$ donc on retrouve bien
$\sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

On peut poursuivre et démontrer la formule $\boxed{\sqrt{a^2 b} = a\sqrt{b}}$

Etape 4

(facultative selon le temps et la motivation des élèves)



Sur la figure
OA = 2 OA' = 3 OB = 6

Calculer $\frac{AB}{A'B'}$ de différentes façons.

1ère méthode :

En appliquant le théorème de Thalès on obtient

$\frac{AB}{A'B'} = \frac{2}{3}$

2ième méthode :

Avec le théorème de Pythagore dans les triangles rectangles OAB et OA'B'

$AB = \sqrt{32}$

$A'B' = \sqrt{72}$

Et $\frac{AB}{A'B'} = \frac{\sqrt{32}}{\sqrt{72}}$

Donc $\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{72}} = \frac{2}{3}$

Remarque $\sqrt{\frac{32}{72}} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$

Il semble donc que $\sqrt{\frac{32}{72}} = \frac{\sqrt{32}}{\sqrt{72}}$

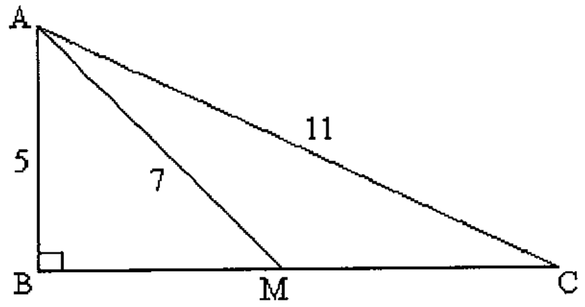
Conjecture $\boxed{\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}}$ $a \geq 0$ $b > 0$

Démonstration pour le cas général

$a \geqslant 0$ $b > 0$

$\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 = \frac{(\sqrt{a})^2}{(\sqrt{b})^2} = \frac{a}{b}$ donc $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ par définition

Etape 5



M est-il le milieu de [BC] ?

BM = $\sqrt{24}$ (théorème de Pythagore dans le triangle rectangle ABM)
BC = $\sqrt{96}$ (théorème de Pythagore dans le triangle rectangle ABC)

A-t-on $\sqrt{24} = \dfrac{\sqrt{96}}{2}$?

Les élèves sont tentés d'écrire $\dfrac{\sqrt{96}}{2} = \sqrt{48}$. C'est ce que nous voulons mettre en défaut !

<u>1ère méthode</u> : $\dfrac{\sqrt{96}}{2} = \dfrac{\sqrt{96}}{\sqrt{4}} = \sqrt{\dfrac{96}{4}}$ d'après l'étape 4

donc $\dfrac{\sqrt{96}}{2} = \sqrt{24}$

<u>2ième méthode</u> :

$\sqrt{24} = \sqrt{4 \text{ x } 6} = \sqrt{4} \text{ x } \sqrt{6}$ d'après le problème 1
$= 2\sqrt{6}$

$\sqrt{96} = \sqrt{16 \text{ x } 6} = \sqrt{16} \text{ x } \sqrt{6}$ d'après le problème 1
$= 4\sqrt{6}$

donc $\dfrac{\sqrt{96}}{2} = \sqrt{24}$

De deux façons différentes on a prouvé que BM $= \dfrac{BC}{2}$. Finalement M est bien le milieu de [BC].

Partie VII

TRAVAILLER EN UTILISANT DES « ACTIVITES », UN AUTRE METIER POUR LE PROFESSEUR ET POUR L'ELEVE .

Nous avons choisi de privilégier le moment où l'on présente le savoir, que nous appellerons le cours. Cela ne signifie pas que le travail d'étude soit limité à ce moment là , mais c'est celui qui présente le plus de difficultés pour le professeur et où on verra le mieux les différences entre les deux approches. Les autres moments ne sont pas examinés ici.

Nous allons préciser le rôle du professeur avant et pendant le cours et le rôle de l'élève dans le cas d'un cours que l'on qualifiera de « classique » et dans le cas d'un cours utilisant des « activités ».

7.1 Le professeur avant le cours :

a) Cours « classique » :

- fixe la progression en fonction de la logique mathématique
- fixe les objectifs de savoirs mathématiques.
- prévoit des rappels.
- prévoit l'ordre de présentation des notions mathématiques à l'intérieur de la leçon dans une logique de clarté de l'exposé et de cohérence des concepts mathématiques entre eux .

  Par exemple pour un cours d'arithmétique, il se demande s'il fera :

  I) Diviseurs

  II) Multiples ... ou le contraire
- prévoit la formulation du cours écrit sur le cahier.
- prévoit les questions à poser aux élèves.
- prévoit les exemples traités en cours.
- prévoit un découpage dans le temps.
- prévoit les exercices d 'application .

b) Activités :

Pour ce qui est du fond, le professeur

- fixe la progression et les objectifs de savoir mathématique de la séquence en fonction des élèves
- choisit l'activité proposée pour que les élèves atteignent ces objectifs, il se base sur les observations faites les années précédentes ou sur ses connaissances en didactique.
- doit faire une analyse mathématique des tâches assignées aux élèves .
- prévoit différentes étapes de l'activité où les élèves sont confrontés à des obstacles. Pour franchir ces obstacles le savoir mathématique en jeu est nécessaire. L'activité choisie doit amener les élèves à se poser des questions et à douter.
- prévoit les différentes stratégies possibles pour réaliser la tâche, les erreurs. Ces stratégies doivent impliquer des activités mathématiques.
- prévoit une validation des résultats.

Pour ce qui est de la forme , le professeur prévoit :

- des consignes simples et claires pour que les élèves puissent avoir une idée de la tâche qu'ils ont à réaliser et sachent démarrer.
- les aides éventuelles.
- la gestion de la classe (travail individuel , de groupe) .
- la forme de la production à réaliser (oral , écrit , affiche ..)

- les moyens de valider les différentes stratégies : qui valide et comment ? le prof, l'élève, le groupe, la classe .
- une phase de formulation de la réponse .Qui formule ? Sous quelle forme ?
- ce qui sera à retenir et sous quelle forme . Qui formule le bilan ? Les élèves, le prof...

La préparation de la classe est plus lourde pour un cours par activités car il y a davantage de choses à prévoir. L'analyse du contenu mathématique se fait non pas du seul point de vue de la cohérence de l'exposé mais aussi de celui des obstacles pour l'élève et des stratégies que les élèves peuvent mettre en œuvre pour les dépasser.

7.2 Le professeur pendant le cours :

a) Cours « classique » :
- utilise une activité de manuel où l'élève découvre la notion (voir analyse d'une activité de manuel).
- présente les notions de la manière la plus simple et la plus claire possible en les illustrant d'exemples et de contre exemples.
- propose des séries d'exercices de difficultés graduées.
- fait participer les élèves par un jeu de questions-réponses de façon à résoudre des exercices ou à formuler certains énoncés du cours.

b) Activités :
- présente les consignes et s'assure de leur compréhension.
- organise la gestion de la classe.

Pendant le temps de recherche :
- rappelle la production attendue et s'assure qu'elle correspond à la consigne.
- encourage les élèves à faire des essais.
- observe les élèves sans intervenir .Il peut cependant donner un coup de pouce en corrigeant des erreurs sans conséquence directe sur l'apprentissage visé ou en permettant à certains élèves de démarrer. Le prof décide alors de faire un traitement individuel ou collectif de ces erreurs.
- prend connaissance des différentes stratégies et réponses. Cela permet d'organiser la mise en commun des travaux.

Au cours de la phase de validation et de formulation des résultats :
- gère le débat entre les élèves ou les groupes
- suscite la formulation des résultats et de stratégies.
- aide à l'argumentation, à l'élaboration de l'histoire de leur recherche.
- guide vers une conclusion commune.
- spécifie aux élèves ce qui est à retenir et introduit le vocabulaire nouveau.

On peut distinguer en fait deux phases dans la validation:
- Avant de présenter son travail , l'élève ou le groupe valide seul sa stratégie soit par rétroaction interne de l'activité *(ce qui est produit permet ou non de réaliser le résultat attendu)* soit par un processus externe à l'activité qui peut être « empirique » *(calque, calculatrice , pliage...)* ou « intellectuel » *(vérifier que $a = bq + r$ pour valider la division).*
- La validation finale se fait avec la classe entière par débat , confrontation des résultats et des méthodes : il faut alors argumenter pour convaincre.

Pendant un cours « classique », le prof intervient beaucoup tout au long du travail. Il y a peu de surprise dans le déroulement .
Pendant un cours par activités, le prof intervient au début pour lancer le travail et à la fin pour faire le bilan ; il intervient très peu en cours de travail.

Par contre ,il est amené, souvent instantanément :
- à prendre de nombreuses décisions concernant la gestion des erreurs et des aides éventuelles à apporter aux élèves.
- à faire des choix pour organiser la mise en commun.

Pour ce qui est de la gestion des erreurs :
- l'erreur a t'elle ou non des conséquences sur l'activité mathématique visée ?*(simple erreur de calcul dans une démarche correcte, ...)*
- faut il la corriger tout de suite, ou attendre la fin de l'activité ?
- l'erreur intéresse t'elle un individu seulement ou bien un groupe ou est elle intéressante pour la classe entière ?(*au lieu de chercher l'axe de symétrie d'une figure, un élève dessine le symétrique de la figure par rapport à un axe*)

Pour ce qui est de l'aide en cours d'activité :
L'aide est elle à apporter
- à un élève ou un groupe d'élèves ? *(mauvaise compréhension de la consigne ou bien un élève n'arrive pas à démarrer l'activité, il ne voit pas ce qu'il pourrait faire, ...)*
- à toute la classe , il faudra alors interrompre la recherche. (*pour relancer le travail qui piétine, ...)*

Pour ce qui est de l'organisation de la mise en commun :
- quelles productions va t'on présenter ?
    - que faire de productions que l'on n'attendait pas ?
    - que faire si ce que l'on attendait n'est pas apparu ?
- dans quel ordre présente t-on les productions ?
    - toutes ensemble : il faudra distinguer les justes des fausses.
    - les unes après les autres : *si on commence par celui qui a tout juste, que reste t'il à dire pour convaincre les autres ?*
      Si on commence par une production fausse, espérons qu'elle ne soit pas trop convaincante !
- qui présente les productions ?
    - des élèves au tableau
    - le professeur *(dans la classe, j'ai vu ...)* Cela permet de gagner du temps.

Il est parfois commode de reporter le débat à la séance suivante pour examiner les productions recueillies et faire ses choix tranquillement.

Pour ce qui est de la gestion du débat :
- faut il donner la parole à ceux qui sont volontaires ? Dans quel ordre ? *Si on commence par un bon élève, il risque de convaincre plus par sa réputation que par la qualité de ses arguments. Si on commence par un mauvais élève (ils sont rarement volontaires) il risque de ne pas savoir s'exprimer.*

- comment donner la parole à un maximum d'élèves ? penser à interroger celui qui ne parle pas souvent et qui cette fois est volontaire (*on peut le valoriser en choisissant de présenter sa production*) ou même relancer celui qui ne parle jamais (*et toi, qu'est ce que tu en penses ?....)*

<u>7.3 L'élève :</u>

<u>a) Cours classique :</u>

- écoute le discours du professeur.
- copie la leçon.
- répond aux questions du professeur.
- résout les exercices en imitant les exemples du cours pour les applications directes ou en utilisant le cours pour les exercices plus difficiles. Il cherche, fait des essais. Il regarde la correction modèle du professeur et essaie de l'imiter.

<u>b) Activités :</u>

- écoute la consigne et demande éventuellement des compléments d'information .
- imagine ce que l'on attend de lui, même si la solution ne lui est pas immédiatement accessible.
- fait des essais, investit ses connaissances antérieures, prend des initiatives.
- peut recommencer en changeant de stratégie.
- prend conscience de l'inefficacité des ses connaissances et doit les remettre en cause.
- réalise la production attendue.
- met au propre ses recherches dans le but d'exposer son travail, de justifier ses résultats et de défendre son point de vue.
- prend connaissance du travail des autres, le critique et argumente pour défendre le sien.
- tente de formuler ce qui est à retenir, le note. Il sait distinguer ce qu'il doit savoir de ce qui est superflu.
- sait ce qu'il doit retenir et ce qu'il doit étudier.

Pendant un cours « classique », l'élève intervient peu. Une partie de la classe est occultée au profit des bons élèves qui monopolisent souvent la parole.

Pendant un cours par activités, l'élève s'implique beaucoup plus dans ses apprentissages. Il est guidé par la tâche à accomplir et ne peut éviter de confronter ses connaissances au problème posé pour réaliser la production demandée. Il exprime son point de vue et le défend. Il prend l'habitude de ne pas mépriser ceux qui ont commis des erreurs puisqu'elles permettent d'avancer dans la résolution du problème.

Conclusion

La construction de situations permettant aux élèves d'avoir une «véritable activité mathématique » relève de ce que l'on appelle en didactique l'ingénierie didactique.

Quelques idées générales peuvent guider cette construction comme nous avons pu le voir dans ce document, sans qu'il existe une recette.

De plus aucune ingénierie didactique, aussi experte qu'elle soit , ne pourra mettre les élèves en activité, si une certaine relation n'est établie dans la classe. Inversement les bonnes relations personnelles ne sont pas suffisantes.

Nous avons pu observer que le **climat de confiance mutuelle** s'installe progressivement au cours du premier trimestre par l'exemple que le professeur donne dans ses relations avec les élèves

.Dans ces conditions, un élève prend facilement des initiatives, ne craint pas de s'exprimer, de communiquer ses procédures et a confiance en l'usage que le professeur va faire de ses productions.

Pas de moqueries pas de sanctions des erreurs qui servent au contraire de point d'appui aux apprentissages.

Lors des phases de recherche, les élèves appellent le professeur quand ils pensent avoir trouvé une solution, mais aussi quand ils rencontrent une difficulté ou quand ils sont bloqués.

Le professeur utilise ensuite ces observations pour sélectionner les travaux qui seront exploités lors de la mise en commun.

L'expression des élèves est essentielle lors des débats de preuve pour faire évoluer les conditions de l'apprentissage. Pour pouvoir favoriser la richesse des interventions, il faut que le professeur ait confiance dans ce que les élèves sont capables de trouver.

L'imagination et l'ingéniosité de nos élèves est étonnante et ce ne sont pas toujours les « meilleurs » qui trouvent des solutions pertinentes ; il arrive même que certains élèves trouvent une procédure à laquelle le professeur n'avait pas pensé.

Mais, ce climat ne résulte pas seulement d'une bonne relation pédagogique et la qualité de la conception des situations est nécessaire.

La seule formation pédagogique des professeurs est insuffisante car la confiance ne s'installe pas vraiment si l'enseignant se limite à demander la résolution d'exercices classiques d'application. Dans ce cas, ce sont toujours les mêmes « bons » élèves qui ont la parole. C'est ce que nous appelons « le cours classique » et en reprenant les interventions des élèves, le professeur va instaurer un enseignement par maïeutique.

La parole des élèves peut même fonctionner comme un piège. Comment peut-on être sûr qu'un élève a compris quand c'est le professeur qui reprend et développe quelques-uns de ses mots ? Quelles sont les garanties d'un réel apprentissage ?

Le climat de confiance dont nous parlons résulte autant de la relation pédagogique que de la nature du travail demandé, de l'organisation de la situation qui donne l'occasion à tous les élèves de s'exprimer.

Dans une « activité » bien construite , la parole de certains élèves sert non à conclure mais à relancer l'activité mathématique de tous. C'est un effet à la fois pédagogique et didactique. Les deux aspects sont pour nous indissociables.

Bibliographie

BERTHELOT René et SALIN Marie-Hélène, *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire.* Thèse Université Bordeaux 1, 1992

BROUSSEAU Guy, *Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques.* Thèse de doctorat d'état.Université Bordeaux 1, 1986

BROUSSEAU Guy, *Etude de questions d'enseignement. Un exemple : la géométrie.* La Revue de Didactique de l'IMAG de Grenoble n° 45, 1983

CHEVALLARD Yves, *La notion d'organisation praxéologique,* Analyses des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques, Actes de l'Université d'été 4-11 Juillet 1998 IREM de Clermont-Ferrand

DOUADY Régine, *Jeux de cadres et dialectique outil-objet dans l'enseignement des mathématiques.* Thèse de doctorat Université de Paris VII, 1984

IREM de BORDEAUX Groupe « Didactique des mathématiques au collège », *Géométrie au cycle central Cinquième et quatrième. Un enchaînement d'activités.,* IREM Université Bordeaux 1, 2000

Groupe "Didactique des Mathématiques au Collège"
IREM d'Aquitaine

**Annie Berté, Joëlle Chagneau, Catherine Desnavres,
Jean Lafourcade, Pierre Fauré, Claire Sageaux**

Des "activités" aux situations d'enseignement en mathématique au collège.

Ce document présente une réflexion sur la signification du mot "activité" pour les enseignants et sur la fonction des "activités" dans le déroulement du cours de mathématiques.
Cet ouvrage propose de passer de la notion d'"activité", tellement galvaudée dans les manuels, à la notion de *situation d'enseignement.*
Dans ce but, l'enseignant est amené à aménager un milieu pour permettre à l'élève d'exercer une véritable activité mathématique.
Les lecteurs trouveront ici quelques exemples de situations d'enseignement de la sixième à la troisième.
L'objectif est de fournir aux enseignants quelques repères pour construire eux-mêmes des situations de ce type.

Public concerné :
Professeurs de Collège et de Seconde de Lycée
Etudiants préparant le CAPES externe ou interne de mathématiques
Formateurs de professeurs en formation initiale ou continue

Mots clés :
"activités" / collège / situation d'enseignement.

IREM d'Aquitaine
40, rue Lamartine 33400 Talence

I.S.B.N. : 2-85665-09-2002