

UNIVERSITE BORDEAUX 1

-=-

INSTITUT DE RECHERCHE
POUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES D'AQUITAINE

40, rue Lamartine
33400 Talence

Groupe "Didactique des Mathématiques au Collège"

Colette Baheux, Annie Berté, Joëlle Chagneau, Catherine Desnavres,
Pierre Fauré, Jean Lafourcade, Francis Reynes, Claire Sageaux.

Géométrie au cycle central
5^{ème} et 4^{ème}

« Un enchaînement d'activités »



Bordeaux, février 2000.

INTRODUCTION

Ce fascicule contient une suite ordonnée de situations pour enseigner la géométrie au collège au cycle central. Lorsque cela nous a paru utile, les « ponts » avec l'algèbre sont signalés.

Pourquoi proposer une progression de plus alors que tous les manuels en proposent une ? La question de la progression à adopter est la première que se posent les professeurs débutants dans un niveau donné puisque les programmes laissent une certaine liberté aux enseignants. La justification relative au choix de l'ordre des chapitres n'apparaît pourtant que rarement dans les manuels. En effet le professeur doit vite décider par quoi il démarre et savoir dans les grandes lignes comment il va continuer. D'après Yves Chevallard, chercheur en didactique des mathématiques, c'est, entre autre, en choisissant la progression que l'enseignant affirme sa place de maître par rapport aux élèves¹ car c'est lui qui maîtrise l'avenir pour les contenus. Il est important pour l'élève de se dire que le maître sait où il va et n'erre pas dans le programme. Aussi dès que l'enseignant a adopté une progression qu'il a légitimée, il ne la modifie que s'il a de nouveaux arguments qui peuvent le convaincre.

Nous voulons organiser une progression en partant des conceptions des élèves et d'une problématique à leur portée tout en essayant de respecter au mieux les libellés des programmes. Nous justifions nos décisions et nos choix qui dépendent étroitement de nos expérimentations en classe.

De plus, nous avons constaté que les programmes et surtout l'interprétation qui en est faite à travers les manuels ou les pratiques courantes ont souvent tendance à sous évaluer les capacités de nos élèves ou au contraire à les surestimer. Par moment, on n'aborde pas telle notion, on évite tel raisonnement alors que notre expérience prouve que les élèves peuvent y accéder. A d'autres moments, on va trop vite, on utilise un langage inutilement compliqué, on s'arrête sur des détails trop techniques au lieu de traiter les obstacles réels.

Les remarques et les questions des élèves, parfois surprenantes, nous ont conduits à mettre au point des situations qui amènent à certaines preuves souvent simples mais que l'on ne trouve pas dans les manuels. Ces situations donnent aussi l'occasion de lever une conception erronée, de faire des liens, de comprendre.

Pourquoi employer les mots « situations » et exercices, au lieu du mot « activités » en usage actuellement ? Nous utilisons le mot « situation » plus précis que le mot « activité » car il ne s'agit pas seulement de rendre l'élève « actif » mais surtout de lui permettre de donner du sens à ce qu'il apprend en le mettant en situation pour :

- se poser des questions, entrer dans une problématique
- établir des liens entre les différentes notions
- utiliser divers points de vue à propos d'une même notion
- comprendre la fonction des signes, et plus spécialement en géométrie le statut de la figure.

Aussi avons nous construit de nombreuses situations autour de l'idée « conjectures – preuves – démonstrations » de manière à laisser la plus grande liberté aux élèves et à approcher au niveau d'une classe différents aspects d'une même notion.

L'enseignant qui le désire peut utiliser notre travail pour :

- observer les élèves et mieux comprendre leurs démarches et leurs difficultés
- mettre en place des débats pendant lesquels les élèves expriment leurs conceptions, discutent de leurs erreurs et de leurs méthodes

¹ Y.Chevallard appelle cela la « topogénèse » dans la « *transposition didactique* ». Editions de la Pensée sauvage – Grenoble 1990

- permettre aux élèves de trouver eux-mêmes les réponses aux questions qu'ils se posent
- légitimer auprès de la classe l'introduction de techniques nécessaires à la résolution des problèmes, sans donner prématurément le vocabulaire dont les élèves ne verraient pas d'emblée l'utilité.

L'importance donnée à une problématique pour l'élève légitime l'ordre que nous avons adopté. L'élève doit continuellement restructurer ce qu'il sait et doit faire des liens entre les connaissances de géométrie s'étalant sur plusieurs années et aussi entre algèbre et géométrie. La tête d'un élève n'est pas un vase vide dans lequel l'enseignant déverse son savoir. L'élève dispose d'un savoir antérieur qu'il a utilisé avec succès dans un champ donné pendant plusieurs années ; il doit alors réorganiser ses connaissances pour mettre en place le savoir nouveau malgré une certaine résistance. Le savoir antérieur est d'autant plus tenace qu'aucune situation n'a permis au savoir nouveau de se construire en fonctionnant pour résoudre un problème. D'où la nécessité pour le maître d'organiser en classe des situations spécifiques ou de poser des questions ciblées qui permettent au savoir de fonctionner. D'autre part savoir changer de point de vue selon la problématique est fondamental. Par exemple pour construire l'ensemble des points équidistants des extrémités d'un segment donné, ou pour tracer l'ensemble des centres des cercles passant par deux points donnés, l'objet du savoir est dans les deux cas la médiatrice du segment mais ce n'est pas le même point de vue.

Nous avons nous-mêmes expérimenté ces situations en classe en gardant en tête l'objectif essentiel d'intéresser les élèves.

- ils sont intéressés s'ils comprennent le sens des concepts en établissant des liens entre eux.
- ils sont intéressés s'ils se sentent concernés, c'est à dire s'ils utilisent la mathématique pour appréhender le monde qui les entoure. Cette perception différente devient possible grâce à des modèles qui rendent intelligibles les phénomènes réels.

Nous avons bâti des situations pour redéfinir le rôle du dessin en géométrie et pour instaurer la nécessité de la démonstration. Dès la sixième, nous affrontons la difficulté d'élaborer une preuve et nous commençons à réfléchir au statut de la figure. Les « objets mathématiques » sont des concepts, et les dessins sont des objets matériels, par exemple un rond, dessiné avec ou sans compas, n'est en rien le concept de cercle, « invisible pour les yeux ». Le dessin est un signe au sens linguistique qui évoque le concept et qui permet de l'imaginer et de le faire fonctionner. Comprendre cette subtilité est un gros enjeu de l'enseignement de la géométrie. Les professeurs d'université ou les étudiants en mathématiques peuvent éviter d'y réfléchir longuement car ils sont arrivés à une pratique des mathématiques telle qu'ils ont bien intériorisé l'enjeu d'une démonstration. Ils savent que faire un dessin peut les aider mais ne peut servir de preuve. Pour un néophyte, l'observation du dessin est un piège redoutable qui condamne beaucoup de nos élèves à rester à jamais extérieur au jeu de la géométrie. Le problème est traité en 6^{ème} dès les premiers chapitres et tout au long de l'enseignement en collège.

Il est bien difficile pour un enseignant d'adopter une progression s'il ne l'a pas lui-même « vécue » d'autant plus que notre liste de situations n'est pas exhaustive. Conscients du fait que les professeurs satisfaits d'une progression différente de la notre auront du mal à en adopter une nouvelle, nous espérons que notre travail leur donnera des idées pour reprendre certaines questions d'une autre façon en choisissant une situation ou un enchaînement de situations qu'ils « sentent bien ». Certaines de ces situations sont des reprises de celles décrites dans la brochure « la géométrie en sixième »- IREM BX 96 des mêmes auteurs car il existe des passages obligés, des obstacles à franchir, qui se manifestent quel que soit l'âge de l'élève par des erreurs récurrentes. Pour construire nos situations, nous nous sommes appuyés sur nos connaissances en didactique des mathématiques, en pédagogie et sur les observations de nombreuses classes pendant plusieurs années.

Ce document résulte du travail d'une équipe enseignant sur le terrain et formant à l'IREM d'Aquitaine un groupe nommé « didactique des mathématiques au collège ». Notre réflexion dans le groupe enrichit les stages de formation continue que nous animons dans le cadre du PAF .

Les situations contenues dans ce document ont été mises au point, expérimentées et rédigées par :

- Colette BAHEUX	Collège Emile Combes	Bordeaux
- Annie BERTÉ	IUFM d'Aquitaine	
- Joëlle CHAGNEAU	Collège Grandchamp	Libourne
- Catherine DESNAVRES	Collège Les Lesques	Lesparre
- Pierre FAURE	Collège Cheverus	Bordeaux
- Jean LAFOURCADE	Collège du Grand Parc	Bordeaux
- Francis REYNES	Collège Grand Air	Arcachon
- Claire SAGEAUX	Collège Monséjour	Bordeaux

GUIDE PRATIQUE D'UTILISATION

- Chaque chapitre débute par la liste des savoirs visés, les conceptions des élèves à partir desquelles nous travaillons et que nous voulons faire évoluer et les objectifs de ces situations compte tenu de ces conceptions.
- Dans l'exposé des situations, ce qui est destiné à être transmis aux élèves oralement et par écrit et qu'on appelle généralement la consigne est encadré.
Par exemple :

1- Placer deux points. Combien passe-t-il de cercles par ces deux points ?

- Il est recommandé d'agrandir les figures afin d'en faciliter la lisibilité.
- *Les indications pour chaque situation, puis les remarques et les observations éventuelles réservées aux professeurs sont écrites en italique pour les distinguer de ce qui est dit aux élèves.*

Il est évident que dans l'exposé des savoirs visés, des conceptions erronées et des objectifs ainsi que dans les indications, les remarques et les observations, le langage employé est un langage « professeur » et les mots utilisés ne sont pas, la plupart du temps, ceux qu'on utilisera avec les élèves. Il s'agit dans ces commentaires d'expliquer le problème pour le professeur et les options que nous avons choisies.

- Après chaque situation, le professeur fait le point avec la classe, ce qui permet de centrer sur l'essentiel. Ce bilan utilise parfois un vocabulaire qui reprend des termes utilisés par les élèves. Par exemple :

Bilan : Il existe un cercle passant par trois points non alignés. On admet que son centre peut être à l'extérieur ou à l'intérieur du triangle.

D'autre part, les phases d'institutionnalisation aboutissent à la rédaction dans un langage adapté aux élèves mais rigoureux de ce qu'ils devront retenir. Nous préférons deux phrases plus courtes qu'une phrase plus longue contenant plusieurs informations. Par exemple :

A Retenir :

- 1- *Les médiatrices d'un triangle sont concourantes. Leur point d'intersection est à égale distance des trois sommets du triangle.*
- 2- *Par trois points non alignés passe un cercle et un seul. Son centre est le point d'intersection des trois médiatrices du triangle.*

PROGRESSION POUR LA CLASSE DE 5^{ème}

1. Enchaînement d'opérations
 - ordre de priorité des opérations
 - distributivité de la multiplication par rapport à l'addition
2. Cercle circonscrit
3. Fractions : égalité, comparaison
4. Symétrie centrale
5. Fractions : addition, multiplication
6. Détermination d'un triangle, inégalité triangulaire
7. Nombres relatifs : repérage, graphiques, comparaison
8. Somme des angles d'un triangle
9. Nombres relatifs : addition, soustraction
10. Angles et parallèles
11. Aire et périmètre
12. Proportionnalité
 - tableaux, quatrième proportionnelle
 - représentation graphique
13. Parallélogrammes
14. Parallélogrammes particuliers
15. Proportionnalité
 - pourcentages
 - échelles
 - vitesse
16. Prisme et cylindre
17. Statistiques

1-CERCLE CIRCONSCRIT

Savoirs visés:

- Par trois points distincts non alignés il passe toujours un cercle et un seul.
- Les trois médiatrices d'un triangle sont concourantes.
- Le centre du cercle circonscrit à un triangle est le point d'intersection des trois médiatrices.

Conceptions repérées chez les élèves:

- L'existence du cercle circonscrit dépend de la forme du triangle. En particulier, si les points forment un triangle avec un angle obtus, il n'y a pas de cercle passant par les trois sommets, car le centre éventuel est cherché à l'intérieur du triangle.

Objectifs:

- Conjecturer l'existence du cercle quelle que soit la position des trois points (sauf s'ils sont alignés).
- Motiver la démonstration du point de concours des médiatrices.
- Guider les élèves dans la démonstration.

Prérequis :

- Revoir la médiatrice comme ensemble des points équidistants des extrémités du segment : cette situation est décrite dans la progression de 6^{ème}. On reverra les propriétés directes et réciproques car les deux sont utiles dans les démonstrations :
 - Si un point appartient à la médiatrice, alors il est à égale distance des extrémités du segment.
 - Si un point est à égale distance des extrémités du segment, alors il appartient à la médiatrice.

Situation 1: Passe-t-il toujours un cercle par trois points?

Etape 1 : Placer deux points. Combien passe-t-il de cercles par ces deux points?

Observation:

Les élèves pensent au cercle de diamètre $[AB]$, mais aussi aux deux cercles de rayon $[AB]$ ce qui est une erreur.(fig 1)

Certains pensent ensuite qu'il n'y a que trois cercles, celui de diamètre $[AB]$ et deux autres dont les centres appartiennent au cercle de diamètre $[AB]$: en effet, pour certains élèves, un point ne peut avoir d'existence que s'il appartient à une ligne déjà tracée.(fig 2)

Fig 1

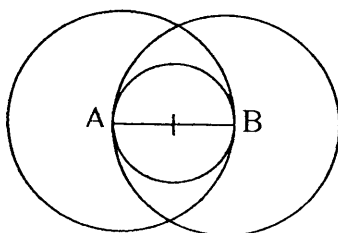
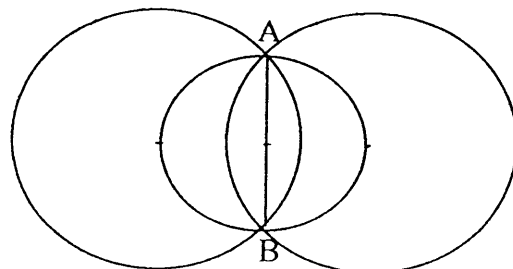


Fig 2



Bilan : Un point situé à égale distance des extrémités d'un segment est un point de la médiatrice.

Un point de la médiatrice d'un segment est situé à égale distance des extrémités du segment.

Il y a une infinité de cercles passant par deux points, leurs centres sont les points de la médiatrice.

Etape 2 : Placer trois points. Existe-t-il un ou plusieurs cercles passant par ces trois points?

Observation :

Les élèves disent très vite que l'existence du cercle dépend de la position des points. En particulier certains disent que c'est impossible si les points sont alignés ; si cette remarque n'apparaît pas, le cas sera traité plus tard.

Souvent ils placent deux points sur une horizontale du cahier et ils disent que le triangle formé par les trois points doit être rectangle isocèle, car ils choisissent le centre au milieu du segment horizontal .

D'autres élèves pensent que le cercle existe pour les triangles rectangles, la justification venant de la moitié du rectangle. Nous avons décidé d'en rester à cette preuve intuitive afin de ne pas déflorer le sujet pour le cercle circonscrit au triangle rectangle, chapitre prévu au programme de 4ème.

D'autres élèves pensent que le cercle existe pour un triangle équilatéral, d'autres pour un triangle isocèle car ils placent le centre par tâtonnement sur l'axe de symétrie.

Quelle est la place exacte du centre du cercle sur cet axe?

L'idée du rôle joué par les médiatrices dans ce problème s'introduit ainsi en référence à la première partie de la situation. S'en suit l'idée que le cercle existe pour un triangle quelconque.

Certains élèves tracent le cercle et placent trois points dessus, ils cherchent alors comment construire le centre mais n'aboutissent pas. Cependant on peut voir apparaître ainsi toutes les formes de figures comprises avec un angle obtus. Ceci permet de convaincre certains élèves qui ont tendance à penser que le cercle n'existe que pour des triangles particuliers.

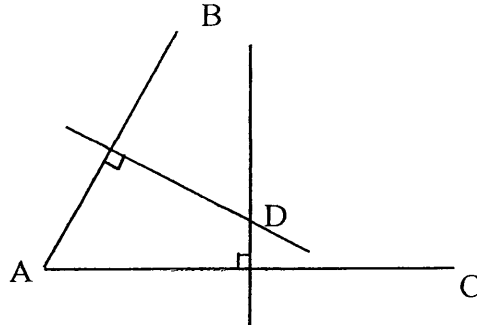
Conjecture : Il semble qu'il existe un cercle qui passe par les trois sommets de n'importe quel triangle. La médiatrice semble jouer un rôle dans ce problème.

Situation 2 : Démontrer que quand on trace deux médiatrices d'un triangle quelconque, leur point d'intersection est le centre d'un cercle passant par les trois sommets du triangle.

Sur papier blanc.

Placer deux points A et B et un troisième, C au hasard : tracer les segments [AB] et [AC] et leurs deux médiatrices. Appeler D leur point d'intersection.

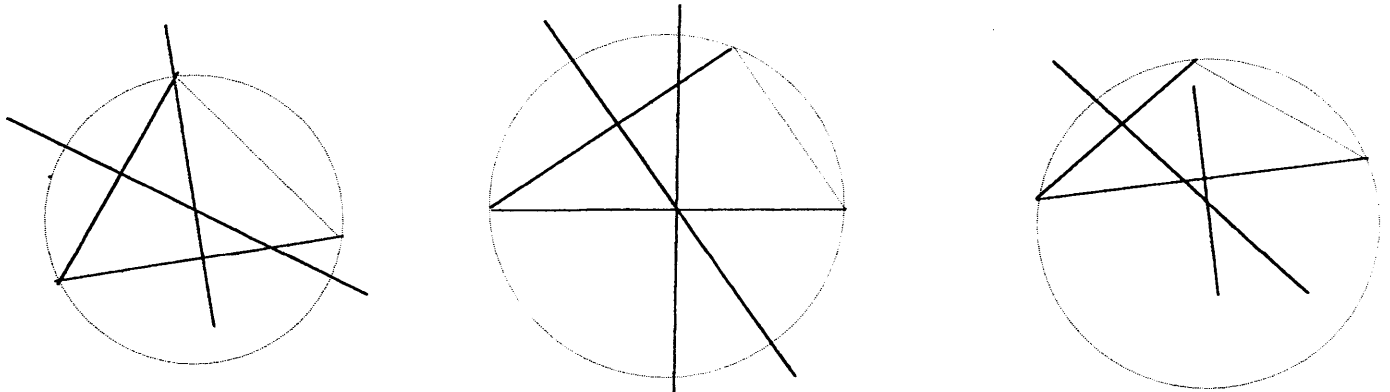
Faire des conjectures.



Observation :

a) Si le cas des points alignés apparaît le traiter d'abord.

b) Tous les cas de figure apparaissent ce qui permet de renforcer l'idée de l'existence du cercle pour tous les triangles.



c) Les conjectures qui apparaissent sont :

- $DA = DB$ et $DA = DC$
- $DA = DB = DC$
- les triangles ABD et ACD sont isocèles en D
- le cercle de centre D passe par A, B et C.

On utilise la propriété de la médiatrice : un point qui est sur la médiatrice est équidistant des extrémités du segment.

Selon les conjectures deux options se présentent :

-Si les élèves pensent à déduire des égalités précédentes que $DB = DC$ et que D appartient à la médiatrice de [BC], le problème est résolu. Ils utilisent la propriété réciproque de la médiatrice : le point D est à égale distance des deux points B et C donc D est un point de la médiatrice de [BC]. D appartient aux trois médiatrices. Elles se coupent en un seul point. Il y a un cercle unique passant par A, B, C dont le centre est D.

On constate que ces deux déductions et en particulier la transitivité de l'égalité sont loin d'être des évidences pour les élèves.

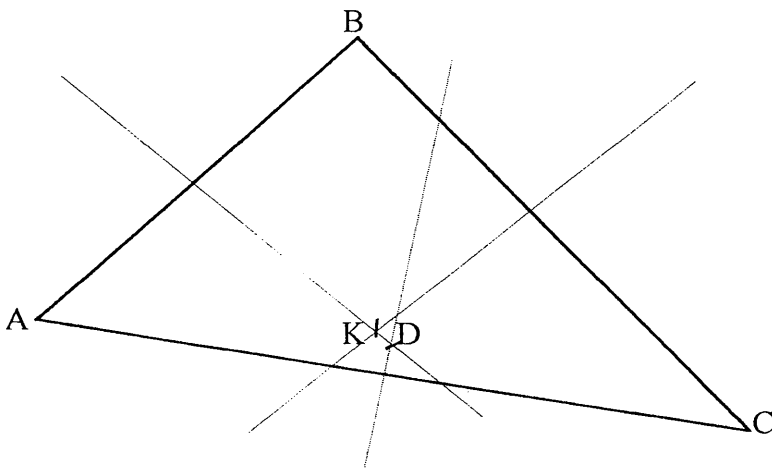
-Si les élèves ne pensent pas que le point d'intersection des 2 premières médiatrices appartient à la troisième médiatrice : on a quand même prouvé qu'il existe un cercle passant par A, B, C mais le problème de l'unicité se pose toujours. Nous proposons alors la situation suivante pour guider les élèves (voir situation 3)

Bilan : *Il existe un cercle passant par trois points non alignés. On admet que son centre peut être à l'intérieur ou à l'extérieur du triangle.*

Remarque : *on pourra utiliser l'informatique pour illustrer la dernière partie du bilan. Avec un logiciel de dessin géométrique, on peut construire le cercle circonscrit à un triangle et faire changer le triangle, on voit alors le centre « rentrer » et « sortir » du triangle, « disparaître à l'infini » et « réapparaître de l'autre côté ». On peut demander l'affichage de la mesure des angles, on s'aperçoit alors que la position du centre dépend de la présence d'un angle obtus ou droit dans le triangle.*

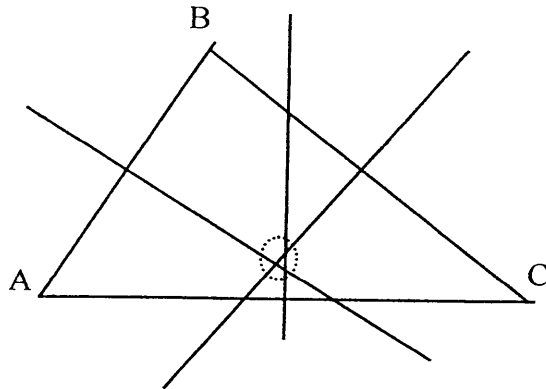
Situation 3 : Unicité du cercle, on pose la question :

Etape 1 : On calque les trois mêmes points qu'à la situation précédente et on construit deux médiatrices différentes des précédentes : le point d'intersection est-il le même ? y en a-t-il plusieurs ?



Certains élèves pensent qu'il y a plusieurs points d'intersection, peut-être trois, d'autres pensent qu'il y en a un seul. Pour les inciter à démontrer, on propose la situation suivante.

Etape 2 : Dessiner un triangle ABC. Dessiner les trois médiatrices des côtés. Parfois elles semblent former un petit triangle. Essayer de choisir le triangle ABC de départ de sorte que le petit triangle formé par les 3 médiatrices soit le plus grand possible.



Observation : Cette situation issue d'une idée de Guy Brousseau consiste à demander aux élèves un travail théoriquement impossible (agrandir le petit triangle). Cela permet de les engager à démontrer. C'est la même idée que nous utilisons en 6ème quand nous demandons de tracer un quadrilatère ayant trois angles droits et trois seulement.

Remarque : Le triangle des médiatrices ne s'agrandit pas si on agrandit le triangle de départ. Plus on fait un dessin soigné, plus le triangle formé par les médiatrices est petit. On va montrer qu'il ne s'agit pas d'un triangle mais d'un point.

On suggère alors de tracer la troisième médiatrice, puis on est quand même obligé de suggérer la transitivité de l'égalité pour terminer la démonstration.

Remarque: C'est une bonne occasion d'utiliser l'égalité d'une manière inhabituelle car le cas ne se présente pas souvent.

Situation 4 :

Reprendre le cas des points alignés s'il a été écarté au début.
Que peut on dire des médiatrices ?

Réponse: Elles sont parallèles, donc il n'y a pas d'intersection. On pourra traiter cette question en dernier si elle n'est pas apparue avant, le professeur posera alors lui même le problème des points alignés.

Remarque : La vision dynamique (ordinateur ou deux baguettes articulées) éclaire le cas des points alignés. On voit le triangle aplati et les médiatrices qui sont presque parallèles.

A Retenir :

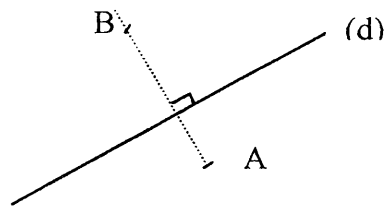
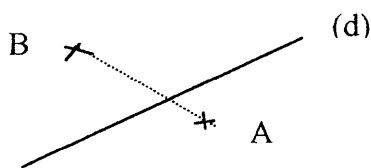
- 1- Les médiatrices d'un triangle sont concourantes. Leur point d'intersection est à égale distance des trois sommets du triangle.
- 2- Par trois points non alignés passe un cercle et un seul. Son centre est le point d'intersection des trois médiatrices du triangle.
- 3- Le cercle passant par les trois sommets d'un triangle s'appelle le cercle circonscrit au triangle.

Exercices:

1) Soient trois points A, B, C non alignés. Construire un point O tel que les deux triangles OAB et OBC soient isocèles.

2) Sur chacune des figures données, construire un cercle passant par les deux points A et B et ayant son centre sur la droite donnée (d).

(Deux cas: soit (AB) n'est pas perpendiculaire à (d) ou elle l'est)



3) Etant donné un cercle, retrouver son centre.

Même exercice avec un arc de cercle.

Observation : Donner un cercle ou un arc de cercle change les stratégies des élèves, voir commentaires dans la partie "Apports théoriques" à la fin du fascicule.

2- SYMETRIE CENTRALE

Savoirs visés:

- Perception globale d'une transformation
- Distinguer trois grandes catégories de transformations selon les invariants (forme et longueur)
- Distinguer trois isométries: translation, rotation, symétrie axiale.
- Deux points de vue sur la symétrie centrale:
 - le centre de la symétrie est le centre d'une rotation de 180° (image mentale de mouvement)
 - il est le milieu d'un segment joignant un point et son image (pas de mouvement)

Ceci revient à voir la symétrie comme une rotation ou comme une homothétie de rapport (-1)
Le mot d'homothétie n'est pas prononcé ni peut-être même celui de rotation.

Conceptions repérées:

- Confusion entre symétrie centrale et symétrie axiale.
- Confusion entre symétrie centrale et rotation.
- La symétrie orthogonale fait obstacle à la symétrie centrale, ce qui se traduit notamment par:
 - la diagonale d'un rectangle est axe de symétrie du rectangle.

Objectifs :

- Savoir manipuler le calque pour passer d'une figure à son image par une isométrie en distinguant ainsi les isométries directes (sans retourner le calque) et indirectes.
- Trouver le centre pour faire tourner le calque dans le cas des rotations, symétrie centrale y compris.
- "Désamalgamer" symétrie centrale et symétrie orthogonale.
- Savoir construire l'image d'un point par symétrie centrale avec les deux points de vue annoncés sur la symétrie centrale

Préambule:

- Nous avons choisi délibérément de présenter toutes les transformations ensemble car c'est par ressemblance et différence que se construit le concept étudié. Il faut donc être confronté à des comparaisons pour donner du sens à « symétrie centrale » en opposition à « symétrie axiale » et aux autres transformations.

Situation 1: Distinguer les isométries des autres transformations

Dans chaque groupe formé par deux dessins, on passe d'un dessin à l'autre par une transformation. Décrire brièvement cette transformation. Regrouper les transformations suivant les résultats qu'elles produisent. (annexe 1)

Observation : Une discussion aura lieu et on aboutira à trois classes: 1-déformation totale ou étirement dans une direction. 2-même forme avec agrandissement ou réduction. 3-même forme et mêmes longueurs. Il est inutile de prononcer les mots d'"isométrie" ou de "similitude".

Situation 2: Trois isométries importantes

Décrire brièvement la transformation qui fait passer de la maison en trait plein à la maison en trait pointillés. Regrouper ces transformations suivant le résultat qu'elles produisent.
(annexe 2)

Observations: Pour certaines figures, les élèves trouveront une translation composée avec une rotation. La manipulation minimale est une rotation dont le centre est difficile à trouver, mais il est possible que certains le trouvent. Pour faciliter la manipulation, le professeur pourra découper les figures et les recoller de façon plus espacée (dispersées sur deux pages au lieu d'une) avant de donner la photocopie aux élèves.

Bilan : On a distingué trois transformations pour faire coïncider des figures superposables : glisser sans tourner, tourner autour d'un point, ou plier.

Remarque : Les lecteurs qui sont gênés par ce type de formulations peuvent les réserver à la partie exercice, mais nous pensons qu'on peut aussi les écrire dans la partie bilan. Dans ce chapitre, il n'y a aucune démonstration, on estime donc que l'on peut utiliser un langage proche de celui des élèves et éviter tout formalisme à ce sujet.

Situation 3: Notion de symétrie centrale

Etape 1 : Dessiner un rectangle et une diagonale. Chercher une transformation qui permet de passer de l'un des triangles rectangles à l'autre.

Observation:

- Beaucoup d'élèves vont essayer une symétrie orthogonale. C'est l'occasion de rappeler les résultats de 6ème et de dire qu'on va voir une nouvelle transformation.
On pourra tracer la symétrique du rectangle par rapport à la diagonale et observer la figure. A quelles conditions y a-t-il symétrie axiale ? Les diagonales devraient être perpendiculaires ou les côtés devraient être de même longueur.

- On fait un demi-tour autour du milieu de la diagonale, ils vont utiliser le calque pour chercher la transformation.

Etape 2 : A l'aide du calque (voir mode d'emploi ci dessous), dessine les symétriques des figures suivantes par rapport au centre marqué. Observe les dessins obtenus en essayant de trouver des ressemblances et des différences entre les différents cas. (annexe 3)

Observations : On donne un papier calque rectangulaire avec son centre de symétrie et une diagonale. On utilise cet outil pour dessiner expérimentalement des figures symétriques.

On propose des feuilles de papier blanc avec une figure et un centre de symétrie.

On fait varier la position du centre, hors de la figure, sur la figure, dans la figure.

On dégagera les propriétés de la symétrie centrale intuitivement en utilisant un langage familier : les figures ont la même taille, la même forme, les deux figures sont « tête-bêche ».

Mode d'emploi du calque : Sans repère sur le calque les élèves ne peuvent pas savoir s'il ont bien fait un demi-tour ou pas : où s'arrêter ? C'est pourquoi nous proposons de placer le centre de symétrie du calque et une diagonale comme repère. Il suffit alors d'avoir une des extrémités de la diagonale sur la feuille et d'amener en coïncidence l'autre extrémité pour être sûr d'avoir un demi-tour. La situation 1 permet de justifier.

La difficulté à se servir correctement du calque fait que certains préféreront partir de figures déjà dessinées pour les observer.

Remarque: On peut penser que le calque ajoute l'idée de mouvement qui peut favoriser l'image mentale de la symétrie comme rotation de 180° pour certains élèves.

On pourra reprocher que le mouvement ne fait pas partie du concept de symétrie centrale en maths, seuls comptent la figure de départ et celle d'arrivée et pas le chemin qui passe de l'une à l'autre.

Bilan : On admet que deux figures symétriques sont superposables. Elles ont les mêmes angles, les mêmes dimensions.

Quand on joint un point du modèle avec son symétrique, on obtient un segment dont le centre de symétrie est le milieu.

Observation : Les élèves disent que le modèle et le symétrique sont à la même distance du centre.

Etape 3 : Voici une figure et un point O. Prévoir par un dessin à main levée sans calque ce que devient la figure après un demi-tour autour du point. Vérifier avec le calque. (annexe 4)

Observation : On analysera les erreurs. On trouve notamment des erreurs sur le sens de la figure : confusions avec translation ou symétrie axiale.

On se passe petit à petit du calque qui servira uniquement à vérifier.

Etape 4 : Tracer une figure symétrique d'une figure donnée sans calque sur quadrillage. (annexe 5)

Observation : Certains élèves ont des difficultés pour compter les carreaux . Ils comptent les carrés et non pas les côtés de carreaux , parfois ils comptent les noeuds du quadrillage et donc ils en trouvent un de plus .

Etape 5 : Voici une figure. Sur papier blanc, sans calque. Tracer la figure symétrique par rapport au point donné ou par rapport à l'axe donné. (annexe 6)

Observation : On commencera par une figure simple, un triangle et on fera varier la position du centre. Les élèves arrivent seuls à la méthode efficace qui consiste à trouver l'image de M en prolongeant $[OM]$ par un segment de même longueur, ce qui revient à considérer la symétrie centrale comme une homothétie de rapport (-1) plutôt que comme une rotation d'un demi-tour autour d'un point.

On a aussi proposé des tracés de symétriques par rapport à une droite pour insister encore sur les différences entre les deux symétries.

Etape 6 : (d'après ERMEL 5^e CNDP) Tracer le symétrique de cette figure complexe sur papier blanc en utilisant les instruments de dessin géométrique. Il y a plusieurs stratégies possibles. On numérote les morceaux de la figure dans l'ordre où on fait ses tracés et on explique sa méthode. (annexe 7)

Observation : Pour une figure complexe plusieurs stratégies sont possibles : on construit le symétrique d'un point ou d'un segment puis on complète la figure en utilisant les conservations d'angles, de parallélisme ...

Bilan : Le point M est l'image du point M' par la symétrie de centre O quand O est milieu du segment $[MM']$

Pour tracer la figure symétrique d'une figure, nous avons décomposé la figure en points et nous avons admis que l'image d'un segment est un segment parallèle et de même longueur, l'image d'un cercle est un cercle de même rayon, les longueurs sont conservées, les angles sont conservés.

Situation 4: Image d'une droite par symétrie centrale

Etape 1 : On se donne un point et une droite (D) ne passant pas par le point. Prévoir ce que devient (D) après un demi-tour.
Que se passe-t-il quand le point appartient à la droite?

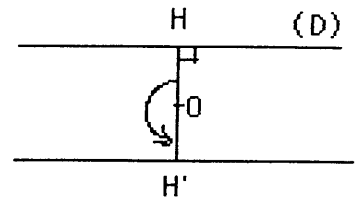
Etape 2 : Est-ce vrai dans une symétrie axiale?

Observation:

Ce n'est pas vrai si la droite n'est pas parallèle à l'axe de la symétrie. Il faut donc distinguer les deux cas. Ceci permet de réviser la symétrie axiale vue en 6ème.

Poser la question 2 une fois seulement que la 1 est résolue et le bilan écrit.

Ce bilan se justifie de la façon suivante: soit H le pied de la perpendiculaire. Lors du demi-tour, H vient en H' avec O milieu de $[HH']$. L'angle droit reste droit de sorte que la droite obtenue après le demi-tour est perpendiculaire à (HH') donc parallèle à (D)



Ceci permet de comprendre pourquoi en situation 3 on a obtenu un rectangle.

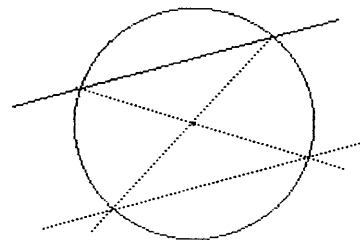
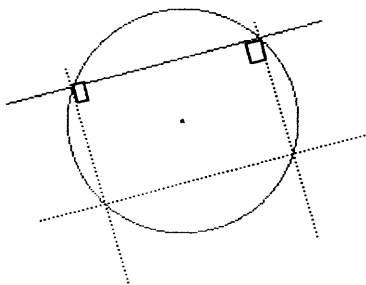
C'est la seule « démonstration » que nous ferons dans ce chapitre, tous les résultats admis ici serviront d'axiomes pour les chapitres suivants.

Remarque : Nous avons décidé de mettre l'accent sur le parallélisme de deux droites par symétrie centrale car cette propriété est spécifique de cette symétrie, cela n'est pas vrai pour la symétrie axiale. C'est une occasion d'insister encore sur les différences entre ces deux transformations

Bilan : Une droite se transforme en une droite parallèle par symétrie centrale

Etape 3 : Trouver un moyen pour construire la symétrique d'une droite donnée par rapport à un point donné dans deux cas:

- avec l'équerre non graduée seulement.
- avec la règle non graduée seulement.



Situation 5 : Axe ou centre de symétrie

Etape 1 : Tracer les symétriques des figures suivantes par rapport au point. (annexe 8)

Observation: On propose des figures et leurs centres de symétrie et d'autres figures avec un centre qui pourrait passer pour un centre de symétrie, par exemple le centre de gravité d'un

triangle équilatéral. Pour les élèves, très souvent, le triangle équilatéral a un centre de symétrie.

Etape 2 : Trouver les axes et centres de symétrie des lettres de l'alphabet en écriture bâton.

Observation: La présence d'axes et de centre de symétrie dépend de la façon dont on a dessiné les lettres.

Etape 3 : Nous avons trois disques. Comment les disposer de manière à composer une figure qui ait deux axes de symétrie? un centre de symétrie? un axe de symétrie?

Observation: Les disques peuvent être en papier découpés par les élèves ce qui permet de les déplacer. On commence par trois disques de même rayon, puis deux disques de même rayon et un troisième de rayon différent.

On peut simplifier le problème en proposant d'abord une disposition des trois disques, et le compliquer en ajoutant d'autres figures, par exemple un autre disque de même rayon ou de rayon différent des deux autres ou encore un ou plusieurs rectangles ou carrés identiques.

Bilan : Quand une figure est sa propre symétrique par rapport à un point, on dit qu'elle a un centre de symétrie.

Observation : On pourra faire ce bilan immédiatement après la première activité.

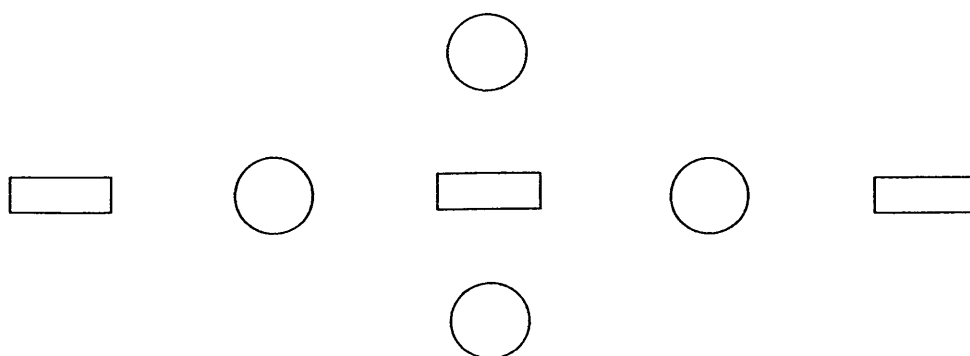
Etape 4 : Tartelettes et millefeuilles (situation tirée de ERMEL 5è CNDP)

On a trois millefeuilles représentés par des rectangles identiques et quatre tartelettes représentées par des disques identiques.

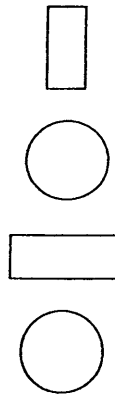
1) On propose une configuration, trouver ses axes ou centres de symétrie. Déplacer un millefeuille pour que la configuration conserve ses éléments de symétrie, même question pour une tartelette.

2) On propose une configuration dans laquelle il manque un millefeuille et deux tartelettes, placer les éléments manquants de façon que la figure ait un axe de symétrie, puis deux axes de symétrie, un centre de symétrie et pas d'axes.

1)



2)



Observation : Le professeur pourra apporter des rectangles et des disques de papier qu'il disposera au tableau avec des aimants.

On pourra imaginer d'autres configurations de départ.

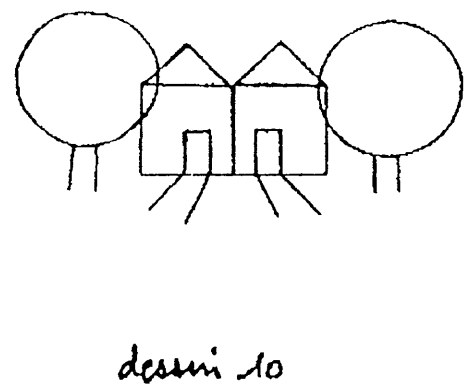
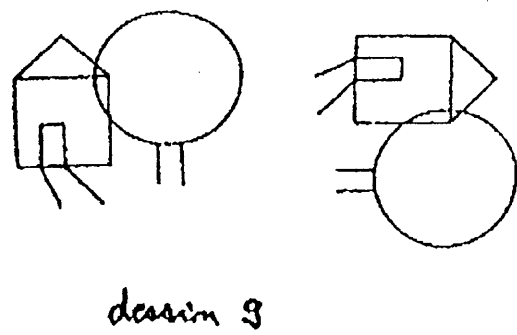
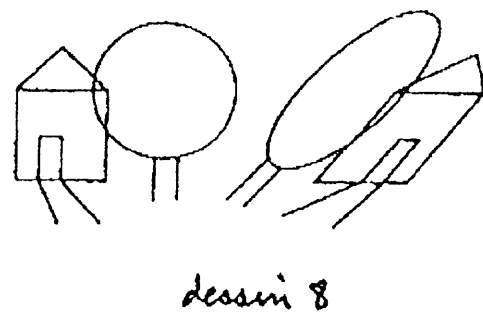
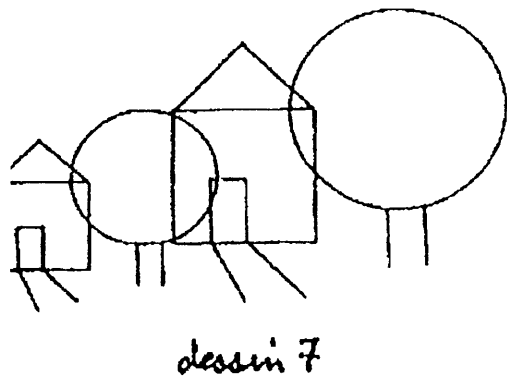
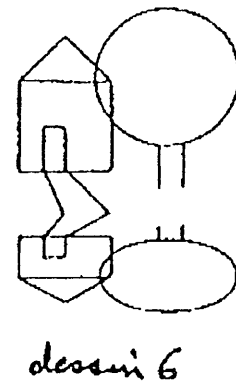
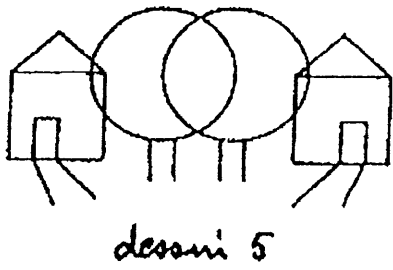
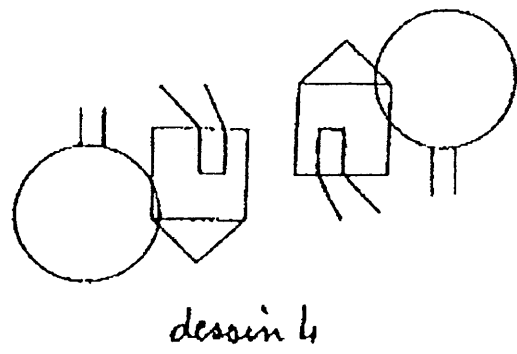
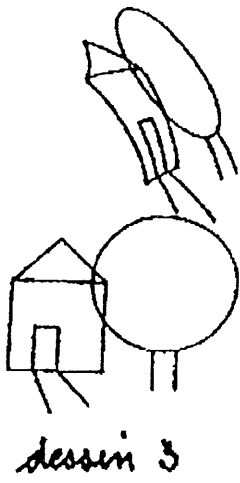
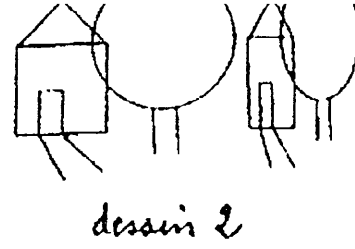
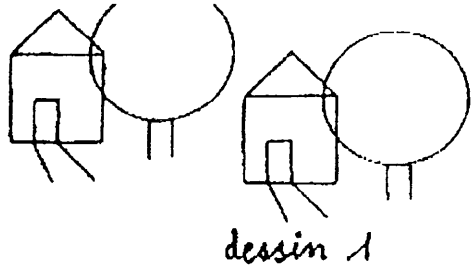
Situation 6: Figure formée par deux droites parallèles

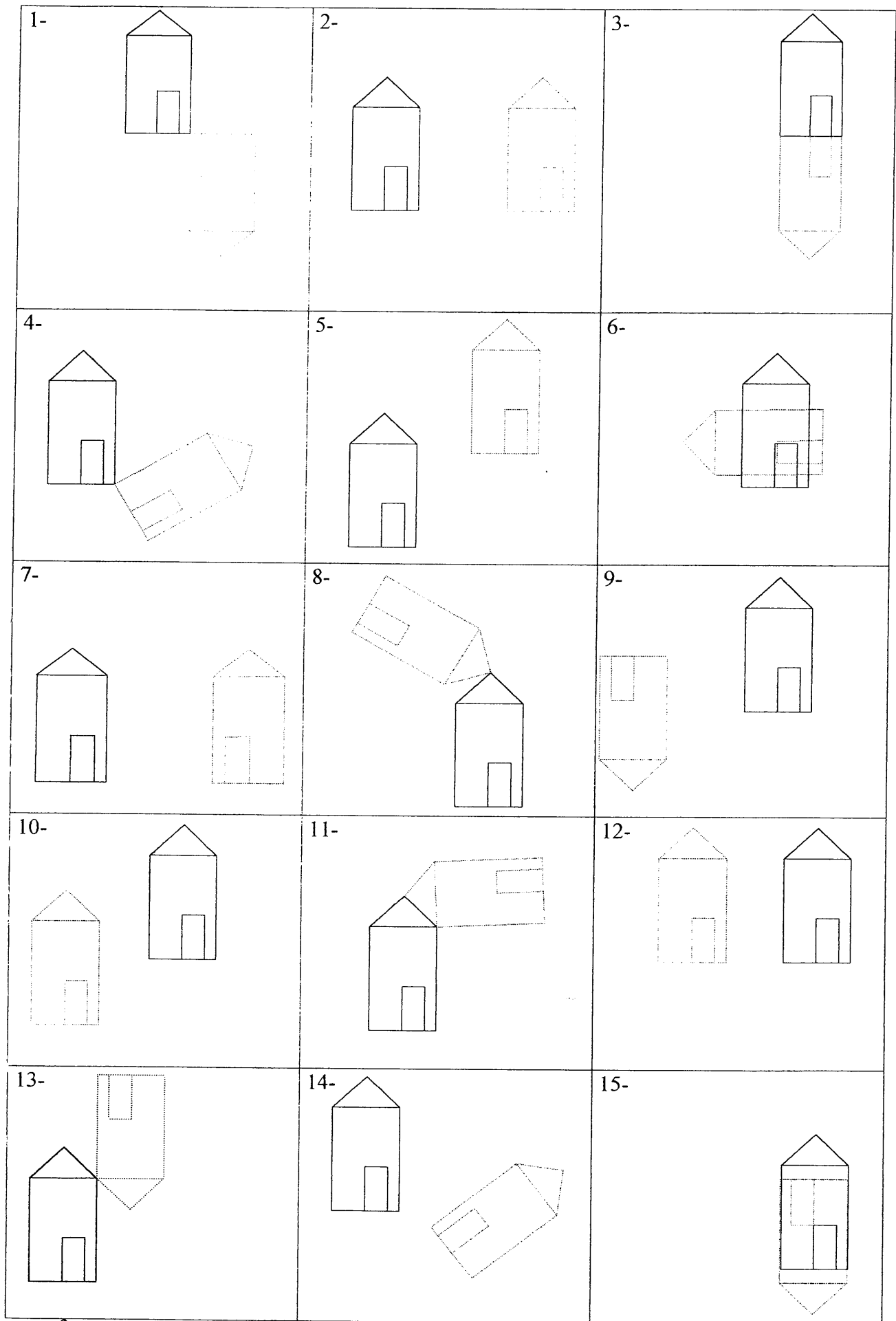
On donne deux droites parallèles. Peuvent-elles se transformer l'une dans l'autre ou en elles-mêmes par une ou plusieurs:

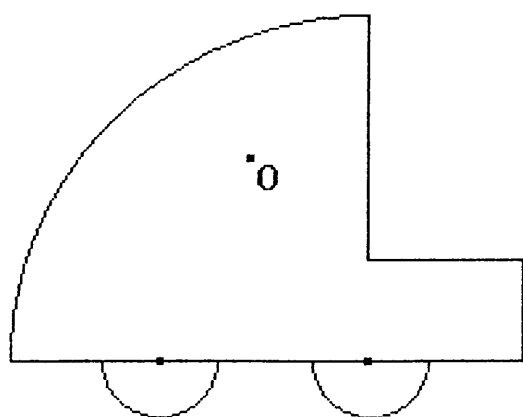
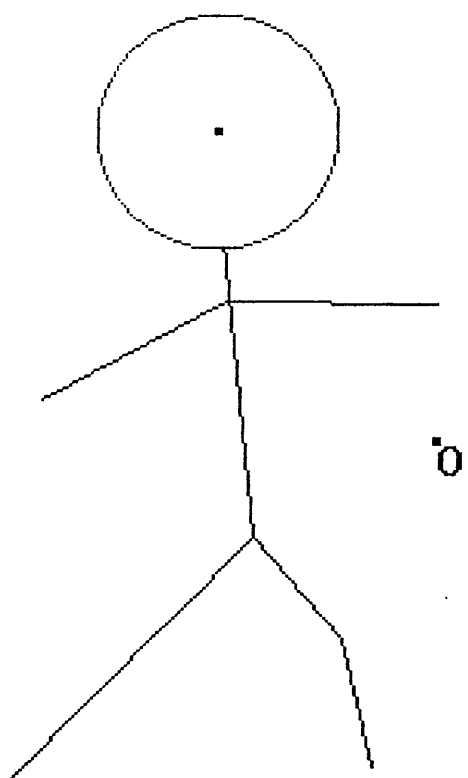
- Symétries orthogonales? Où sont tous les axes?
- Symétries centrales? Où sont tous les centres?

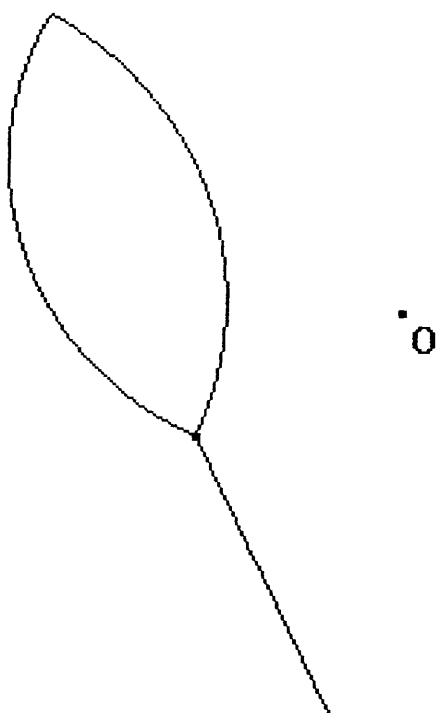
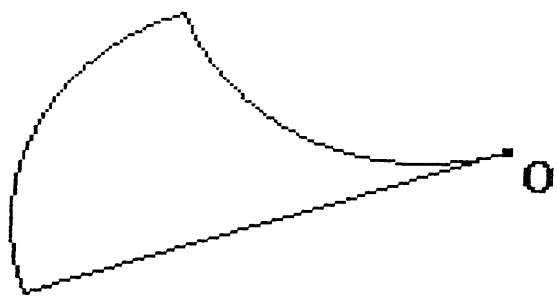
Observation : Ces propriétés seront utiles dans le chapitre «Parallélogrammes », c'est pourquoi on demande aux élèves de les noter en bilan.

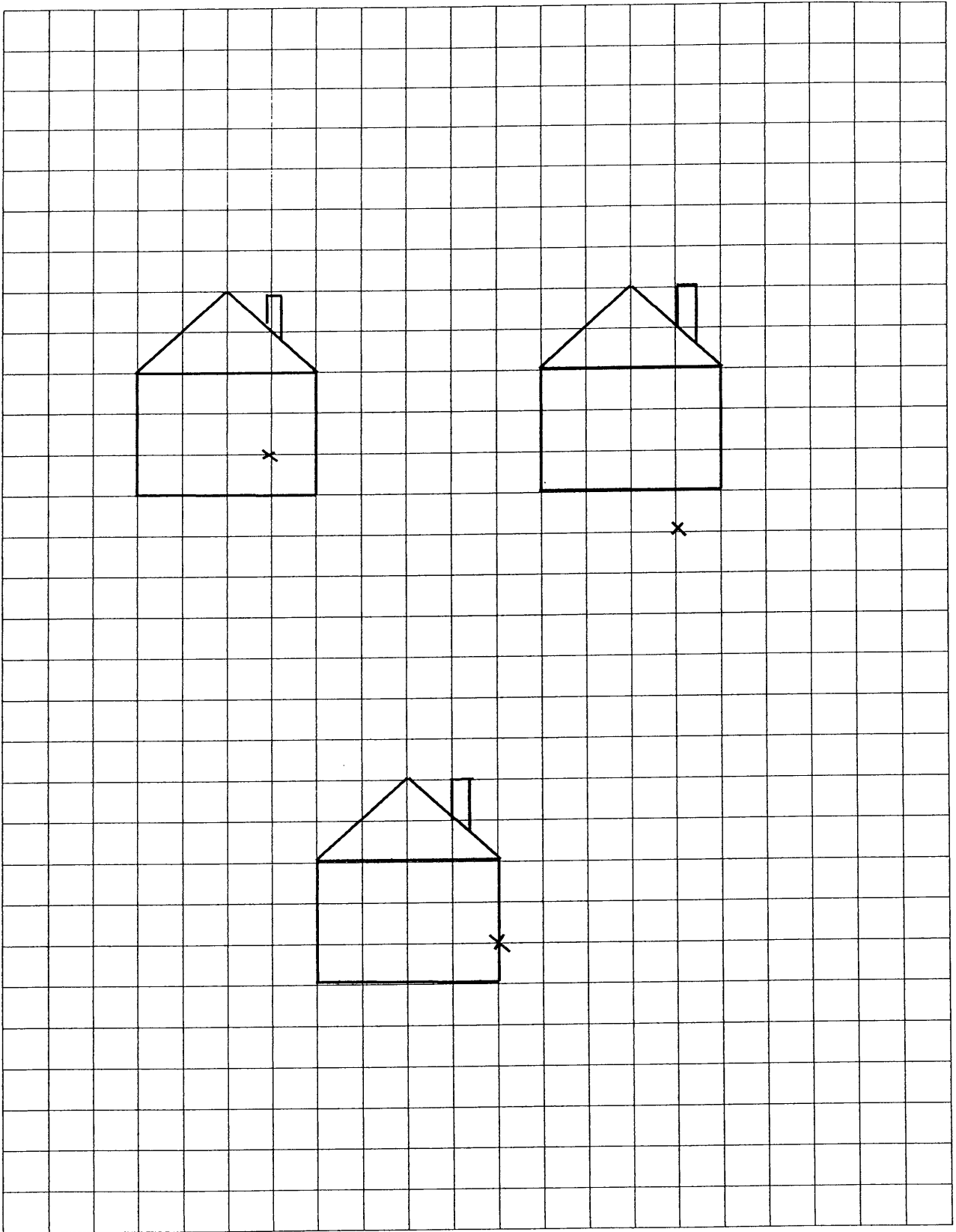
Bilan : On admet qu'il y a une infinité d'axes de symétrie perpendiculaires aux droites et un axe parallèle aux droites. Il y a aussi une infinité de centres de symétrie situés sur l'axe parallèle aux droites.

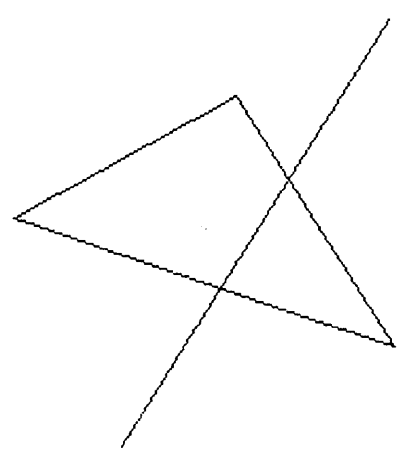
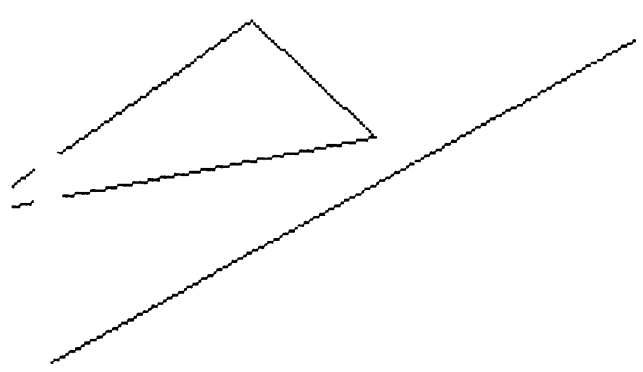
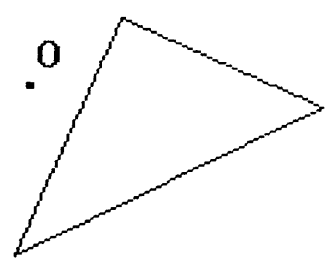
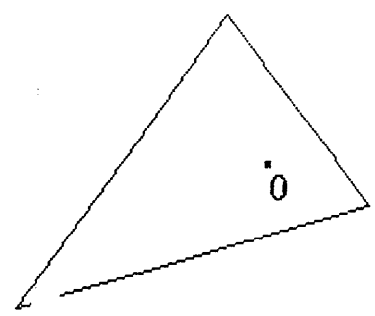


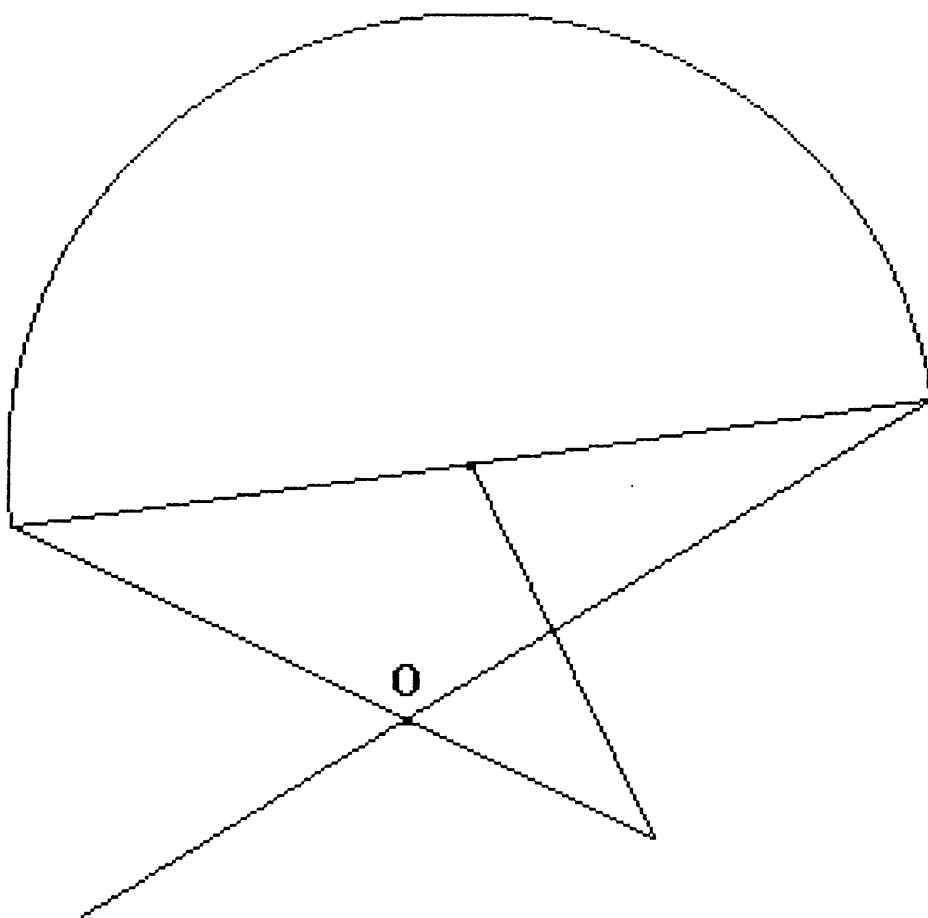


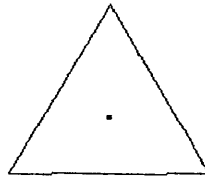
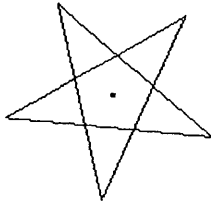
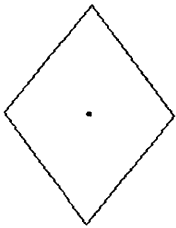
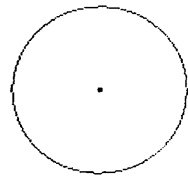
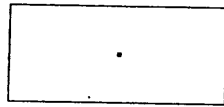
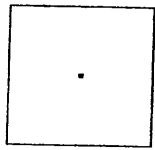
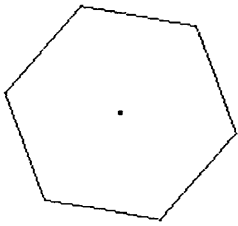












3- DETERMINATION D'UN TRIANGLE. INEGALITE TRIANGULAIRE.

Savoirs visés:

- Un triangle quelconque est déterminé par la longueur des trois côtés, par la longueur d'un côté et deux angles, ou par la longueur de deux côtés et l'angle compris entre eux.
- Condition d'existence d'un triangle connaissant les longueurs des trois côtés.
- Perpendiculaire plus courte que l'oblique

Conceptions repérées chez les élèves:

- Certains élèves croient qu'un triangle est déterminé par ses trois angles.
- Certains élèves croient que la donnée des longueurs des trois côtés ne suffit pas à déterminer un triangle et qu'il faut aussi des renseignements sur ses angles.
- Des triangles dessinés dans des positions différentes ne sont pas reconnus comme superposables.

Objectifs :

- Construction d'un triangle connaissant trois côtés, s'il existe, puis un côté et deux angles, et enfin deux côtés et l'angle compris entre eux.
- Tenter de donner un statut d'outil à l'inégalité triangulaire qui est souvent une connaissance en acte chez les élèves mais n'est pas mobilisée consciemment pour la résolution de problèmes.

Situation 1 : Détermination d'un triangle.

Les élèves ont en main un rapporteur muet gradué et une équerre.

Ils travaillent par équipe de deux

Construire un triangle ABC satisfaisant dans chaque cas aux conditions données. Si plusieurs solutions sont possibles, chaque élève d'une équipe doit faire un dessin de sorte que chaque membre de l'équipe ait un triangle non superposable à celui de son coéquipier.

1- $\hat{A} = 30^\circ$, $\hat{B} = 45^\circ$

2- $\hat{A} = 60^\circ$ AB = 5cm, AC = 8 cm

3- AB = 4cm BC = 6cm

4- $\hat{A} = 30^\circ$ AB = 8cm BC = 5cm

5- AB = 3cm AC = 8cm BC = 6cm

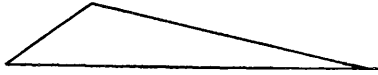
6- $\hat{A} = 75^\circ$ $\hat{B} = 30^\circ$ AB = 5cm

7- $\hat{A} = 90^\circ$ AB = 5cm BC = 8cm

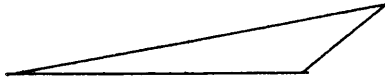
8- $\hat{A} = 60^\circ$ $\hat{B} = 25^\circ$ $\hat{C} = 95^\circ$

Observation : L'usage du rapporteur muet est plus facile, les élèves sont obligés de compter les graduations pour tracer l'angle et ainsi ils évitent les erreurs de lecture dues à la prise en compte de la mauvaise graduation du rapporteur.

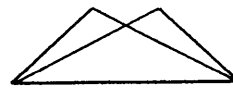
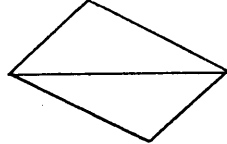
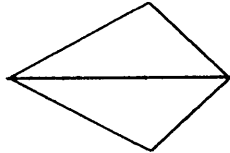
Les élèves se demandent si deux triangles dessinés dans deux positions différentes sont superposables. Ils peuvent prendre le calque pour s'en convaincre.



est-il superposable à



On admet que s'il existe une transformation qui fait correspondre 2 triangles alors ils sont superposables.



Bilan : On obtient un seul triangle ABC quand on donne :

-les longueurs des trois côtés AB, BC, AC

(Quand ça marche sinon voir activité suivante)

-un angle et deux de ses côtés $\hat{A}$, AB, AC

-un côté et les deux angles aux extrémités AB, $\hat{A}$, $\hat{B}$

Exercice: Reproduction d'un quadrilatère quelconque donné avec messages minimum à transmettre.

Observation: Le quadrilatère donné est quelconque et pour le reproduire il faut envoyer 5 renseignements car il se décompose en deux triangles par une diagonale.

Situation 2 : Condition pour avoir un triangle

Choisir trois nombres entre 2 et 10 et les écrire. Recommencer cela quatre fois en changeant les nombres. A chaque fois, tracer un triangle ayant des côtés qui ont comme longueur en centimètres ces trois nombres.

On classe les triplets des élèves dans un tableau à trois colonnes : le triangle existe, le triangle n'existe pas, il y a un doute.

Observations : Les nombres choisis par les élèves sont souvent entiers ce qui est préférable car cela multiplie les chances de tomber sur le cas limite.

Les élèves trouvent assez facilement des inégalités strictes qui caractérisent les cas où le triangle existe et le cas où il n'existe pas.

Dans la colonne « doute » on mettra les cas qui entraînent une discussion dans la classe. Cela peut être :

-des erreurs de tracés

-des cas d'égalité (2,7,9) par exemple.

-des triangles ayant un « drôle d'air » ex : est-ce un triangle?

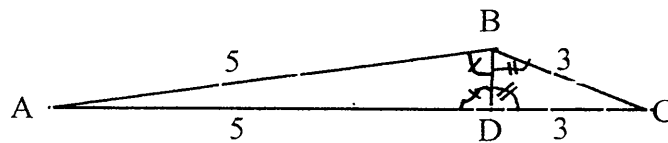
Dans les colonnes « le triangle existe » ou « le triangle n'existe pas » on peut trouver dans un premier temps des cas d'égalité.

Pour lever le doute :

-On doit admettre que le résultat « triangle » ou « pas triangle » ne dépend pas de l'ordre dans lequel on prend les côtés pour le tracé. La détermination d'un triangle vient d'être traitée.

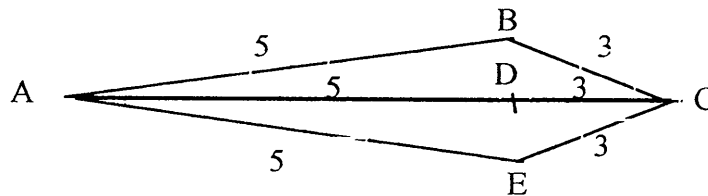
Trois méthodes pour démontrer que le triangle est plat dans les cas d'égalité.

1-Triangles isocèles : Les angles $\widehat{ABD}$ et $\widehat{ADB}$ sont égaux puisque le triangle ABD est isocèle. Les angles $\widehat{CBD}$ et $\widehat{CDB}$ sont égaux puisque le triangle BDC est isocèle. Or l'angle $\widehat{ADC} = 180^\circ$ donc l'angle $\widehat{ABC}$ aussi et B appartient à (AC).

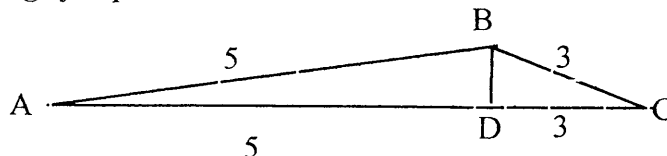


2-Cercles : Le triangle ACE est le symétrique du triangle ABC par rapport à la droite (AC).

Les points BDE appartiennent à un cercle de centre A, les points BDE appartiennent à un cercle de centre C. Ces trois points appartiendraient donc à deux cercles différents : c'est impossible car le cercle circonscrit à un triangle est unique.



3-Les médiatrices : $AD = AB$ donc le point A appartient à la médiatrice du segment [BD], de même le point C appartient à la médiatrice du segment [BD]. La droite (AC) est la médiatrice du segment [BD] donc elle le coupe en son milieu, or les points ACD sont alignés, donc D est le milieu de [BD], ce qui signifie que B = D.



Bilan: Etant donnés trois nombres a, b, c , le plus grand étant a .
 Lorsque $a < b + c$ on est sûr qu'il existe un triangle de côtés a, b, c
 Lorsque $a = b + c$ on obtient trois points alignés.
 Lorsque $a > b + c$ on ne peut pas construire le triangle de côtés a, b, c .

Remarque : L'énoncé de ce bilan est un savoir faire, il ne sera donc pas à apprendre par coeur.

Exercices :

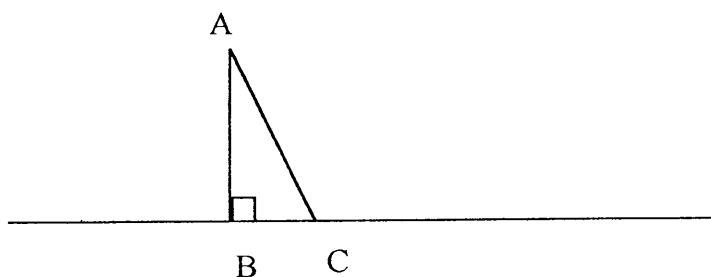
1- Un triangle a deux côtés qui mesurent 3 cm et 8 cm. Quelles peuvent être les longueurs entières du troisième côté?

2- Combien y a t-il de triangles isocèles ayant un périmètre de 12 et un côté de 2, un périmètre de 12 et un côté de 5, un périmètre de 12 et un côté de 3 ?

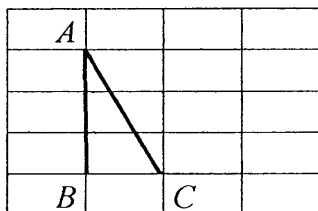
Observation : On pourra montrer deux baguettes de longueurs différentes pour expliquer ces résultats.

Situation 3 : La perpendiculaire est plus courte que l'oblique :

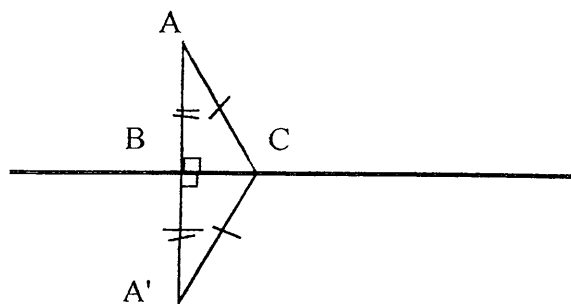
Prouver que AB est plus court que AC.



Observation : C'est une occasion de faire fonctionner l'inégalité triangulaire pour prouver. C'est important car beaucoup d'erreurs découlent de conceptions fausses à propos de cette propriété. Par exemple lors d'exercices sur quadrillage, certains élèves pensent que les segments $[AB]$ et $[AC]$ ci dessous ont la même longueur, (trois carreaux chacun). Cette erreur intervient dans le calcul de l'aire d'un parallélogramme.



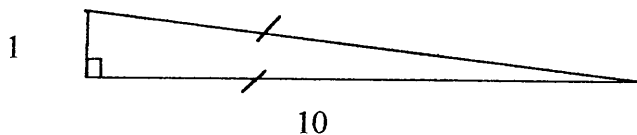
Le professeur devra guider la démonstration.



A' est le symétrique de A par rapport à la droite (BC). Dans le triangle AA'C, on applique l'inégalité triangulaire : $AC + A'C > AA'$ $2AC > 2AB$ $AC > AB$.

Cette démonstration peut convaincre des élèves que même une propriété aussi simple que celle ci peut se prouver à l'aide de mathématiques.

Exercice : Que peut on dire du triangle suivant ?



Beaucoup d'élèves tracent effectivement un triangle qui répond aux données, aux erreurs de mesure près. La propriété précédente peut les convaincre que ce triangle n'existe pas : une nouvelle occasion de montrer que le dessin ne peut servir de preuve!

4- SOMME DES ANGLES D'UN TRIANGLE.

Savoir visé :

- Somme des angles d'un triangle.

Conceptions repérées chez les élèves :

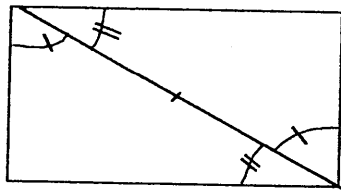
- Ils mesurent les angles au lieu de les calculer.
- Ils prennent ce qu'ils voient sur un dessin pour une preuve : c'est vrai puisque ça se voit sur le dessin!

Objectif :

- Utiliser la propriété de la somme des angles d'un triangle pour initier les élèves au raisonnement.

Situation1: Somme des angles d'un triangle

Etape 1 : Tracer un triangle rectangle. Mesurer les deux angles autres que l'angle droit. Faire une conjecture. Prouver.



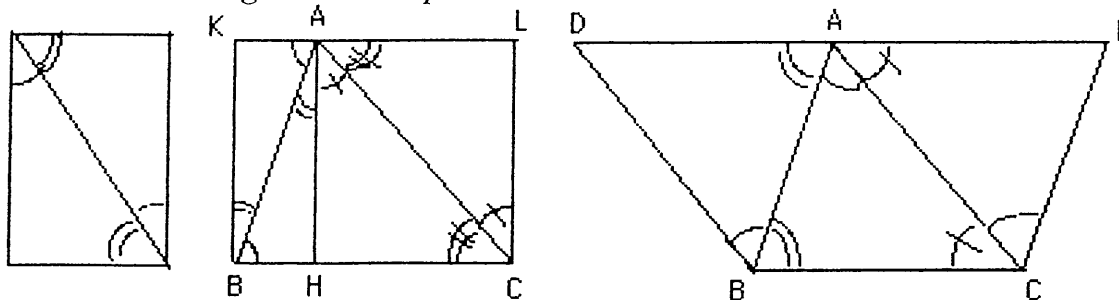
Observation:

- La solution attendue est de compléter le triangle rectangle en rectangle par symétrie centrale
- Au passage on verra le cas particulier du triangle rectangle isocèle.
- On ne commence pas par le triangle quelconque car il arrive que des élèves connaissent le résultat depuis l'école primaire sans savoir le justifier ni savoir s'en servir dans le cas particulier du triangle rectangle qui les surprend davantage.
- Des élèves, jusqu'en troisième, pensent que les angles d'un triangle rectangle sont toujours 90° , 45° , 45° . Il est donc important de travailler sur les angles d'un triangle rectangle pour que les élèves se confrontent à cette question.

Etape 2 : Mesurer les angles sur des triangles de taille et formes différentes. Faire une conjecture. Prouver.

Observations : Les élèves pensent à décomposer un triangle quelconque en deux triangles rectangles par la hauteur (on peut utiliser le résultat de l'activité 1). La preuve (1) n'est valable que si on sait que dans un triangle il y a toujours au moins une hauteur à l'intérieur, mais cela ne gêne pas les élèves : c'est même la seule qu'ils voient si le triangle a un angle obtus. On peut passer au pavage avec des triangles rectangles (preuve 2) puis au pavage avec des triangles isométriques au triangle donné (preuve 3) qui permet de passer à la

démonstration classique (4). Enfin il existe une preuve (5) totalement différente en tournant à l'extérieur du triangle. Voici ces preuves:

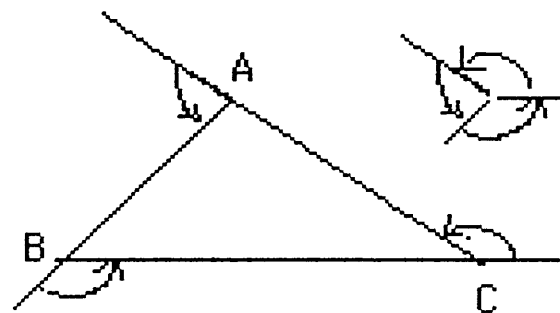


preuve 1: $\widehat{BAH} + \widehat{ABH} = 90^\circ$ et $\widehat{HAC} + \widehat{ACH} = 90^\circ$. Donc $\widehat{BAC} + \widehat{ABH} + \widehat{ACH} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

preuve 2: $\widehat{ABH} = \widehat{KAB}$ et $\widehat{ACH} = \widehat{LAC}$ par symétrie centrale des triangles rectangles par rapport au milieu de l'hypoténuse. Donc $\widehat{BAC} + \widehat{ABH} + \widehat{ACH} = 180^\circ$, de sorte que pour cette démonstration la hauteur du triangle ne sert plus qu'à tracer les triangles rectangles.

preuve 3: Par symétrie centrale de centre les milieux de $[AB]$ et $[AC]$ le triangle ABC complet est transformé en deux triangles ABD et AEC . $(AD) \parallel (BC)$ et $(AE) \parallel (BC)$ d'où l'angle plat.

preuve 4: On se rend compte que la seule chose qui sert dans la démonstration précédente c'est la parallèle à (BC) passant par A . On trace cette parallèle et on utilise l'égalité des angles alternes - internes qui résulte de la symétrie centrale.



preuve 5: On s'intéresse aux angles extérieurs du triangle. Leur somme est de 360° car on fait un tour complet autour du triangle. On peut le vérifier en dessinant ces angles extérieurs avec un sommet commun

$$180^\circ - \hat{A} + 180^\circ - \hat{B} + 180^\circ - \hat{C} = 360^\circ = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}) \text{ donc } \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180$$

A Retenir : Dans un triangle la somme des angles est toujours 180°

Exercice : Somme des angles d'un quadrilatère.

La somme des angles d'un quadrilatère est de 360° car on peut le partager en deux triangles par une diagonale.

On aura besoin de cette propriété dans la leçon sur les parallélogrammes c'est pourquoi nous la traitons ici.

Situation 2: Angles des triangles particuliers

Trouver les mesures des angles d'un triangle:

- 1- équilatéral
- 2- isocèle et dont un des angles vaut 60°
- 3- isocèle dont un des angles vaut 45°
- 4- isocèle dont un des angles vaut 90°

Observation : Ce travail est une initiation à la manipulation de conditions suffisantes .On reprendra un travail analogue avec les quadrilatères.

Les élèves font un dessin et conjecturent les valeurs des angles.

Pour le 2 : On envisagera les deux cas, l'angle de 60° est au sommet principal ou bien à la base. Ces deux cas sont envisagés par des élèves différents de la classe quand ils font un dessin. Dans chacun des cas la démonstration qui sera rédigée par un élève est différente.

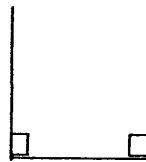
Pour le 3 : Cette fois ci la conclusion n'est pas la même suivant que l'angle de 45° est placé au sommet principal ou à la base.

Pour le 4 : On pourra démontrer qu'il n'est pas possible d'avoir un triangle isocèle avec un angle de 90° à la base.

Deux démonstrations sont proposées par les élèves :

- Il y aurait alors deux angles de 90° $90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ donc le troisième angle vaut 0° . Ce n'est pas un triangle mais un segment.

- Deux droites perpendiculaires à une même troisième droite sont parallèles, le triangle aurait deux côtés parallèles ce qui est impossible!



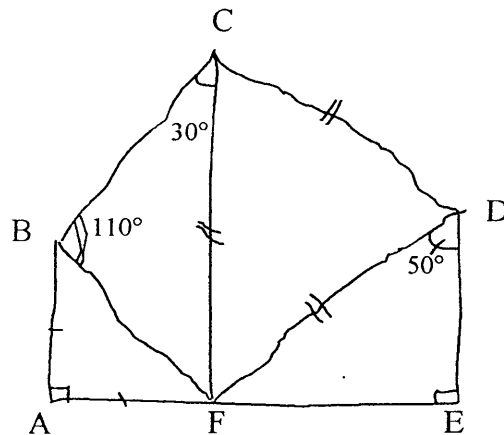
A Retenir :

- Quand un triangle est équilatéral alors on est sûr qu'il a trois angles de 60° .
- Quand un triangle isocèle a un angle de 60° , on est sûr que c'est un triangle équilatéral.
- Quand un triangle isocèle a un angle de 45° à la base, on est sûr que c'est un triangle rectangle.

Situation 3 : Démontrer en utilisant les angles.

On distribue une feuille blanche avec la figure à main levée suivante.

- 1) Réaliser la figure en utilisant les instruments de géométrie sur la feuille blanche.
- 2) Que peut on dire des points A, F et E ?



Observations : Les mesures des angles ont été choisies de façon à ce que l'angle $\widehat{AFE}$ semble plat. En fait on a :

aux données $\widehat{BFC} = 180^\circ - (110^\circ + 30^\circ) = 40^\circ$

aux données $\widehat{CFD} = 60^\circ$ et $\widehat{AFB} = 45^\circ$

$\widehat{EFD} = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$

donc $\widehat{AFE} = 45^\circ + 40^\circ + 60^\circ + 40^\circ = 185^\circ$

Des élèves trompés par l'aspect de la figure à main levée, commencent leur dessin en supposant que A, F et E sont alignés. Ils dessinent le segment [AE] d'abord. D'autres commencent par le triangle ABF puis l'angle de 110° , etc. D'autres encore commencent par le triangle DEF. Ils sont amenés à calculer des angles pour pouvoir faire le dessin.

Certains élèves pensent donc que les points A, F et E sont alignés et d'autres pensent qu'ils ne le sont pas.

De ce doute installé dans la classe, par la confrontation des différents dessins, vient la nécessité de prouver, par autre chose que la figure, que les points A, F et E sont ou ne sont pas alignés.

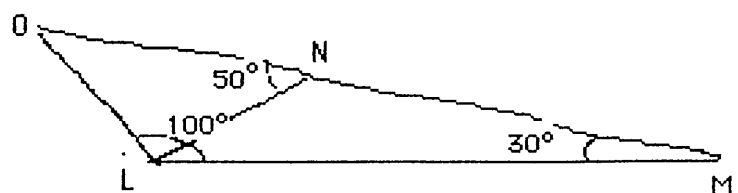
Les élèves calculent alors des mesures d'angles et arrivent à la démonstration ci dessus.

Exercices: Très nombreux et classiques. Ajouter les exercices suivants:

1- OLM est un triangle et $N \in [OM]$

La figure a été faite à main levée.

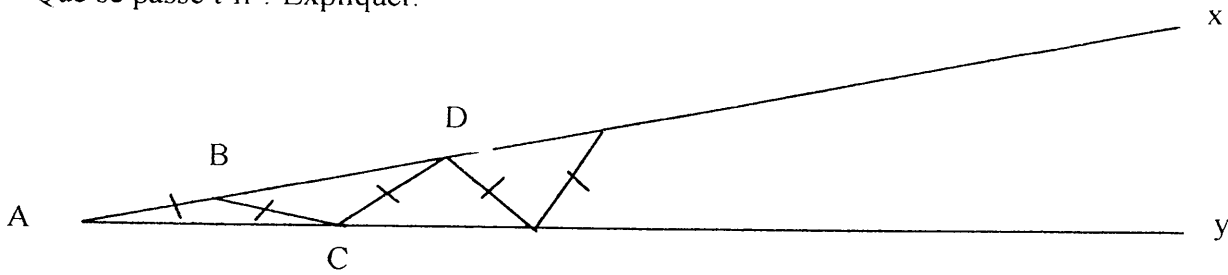
La construire avec les instruments au choix en respectant les données de l'énoncé



Solution: On commence par tracer [LM] et l'angle de 30° puis

$\widehat{LON} = 50^\circ$ donc OLN est isocèle ou bien $\widehat{LNM} = 130^\circ$ donc $\widehat{NLM} = 20^\circ$

2- Voici un angle $\widehat{xAy}$ de 10° . Placer un point B sur la demi droite $[Ax)$ à 2 cm de A. Tracer un triangle ABC isocèle en B, le point C étant un point de la demi-droite $[Ay)$. Tracer un triangle BCD isocèle en C, D étant un point de $[Ax)$. Continuer à tracer de la même façon des triangles isocèles.
Que se passe t'il ? Expliquer.



Solution : Au 9^{ème} triangle isocèle, l'angle à la base est de 90° , ce qui est impossible. Donc le dessin s'arrête après 8 triangles.

— — — — —

5- ANGLES ET PARALLELES

Savoir visé :

- Symétrique d'un angle permettant de mettre en place le vocabulaire alterne - interne, opposé par le sommet en rappelant les propriétés de la symétrie et égalité de ces angles.

Conceptions repérées chez les élèves :

- Ayant rencontré le plus souvent les angles alternes internes et correspondants quand les droites parallèles sont horizontales, certains élèves ont du mal à repérer ces angles lorsque les parallèles sont dans une autre position.
- Les élèves ont du mal à isoler les "bonnes paires" d'angles dans une figure complexe.

Objectifs :

- Faire des conjectures et les justifier en utilisant les propriétés de la symétrie, poursuivre l'initiation au raisonnement.
- Apprendre à structurer sa perception d'une figure pour y reconnaître une sous figure déjà connue. Cette difficulté se retrouve dans d'autres cas par exemple pour le théorème de Thalès en quatrième et troisième. Le même problème se pose lors de la reconnaissance de la structure d'une expression algébrique, une égalité remarquable, la présence d'un facteur commun, des expressions opposées...

Exemples : Reconnaître $a^2 - b^2$ dans $4x^2 - 25$
Voir un facteur commun dans $7x - 21$
Voir que $2 - x$ et $x - 2$ sont opposés

Situation 1 : Symétriques d'angles

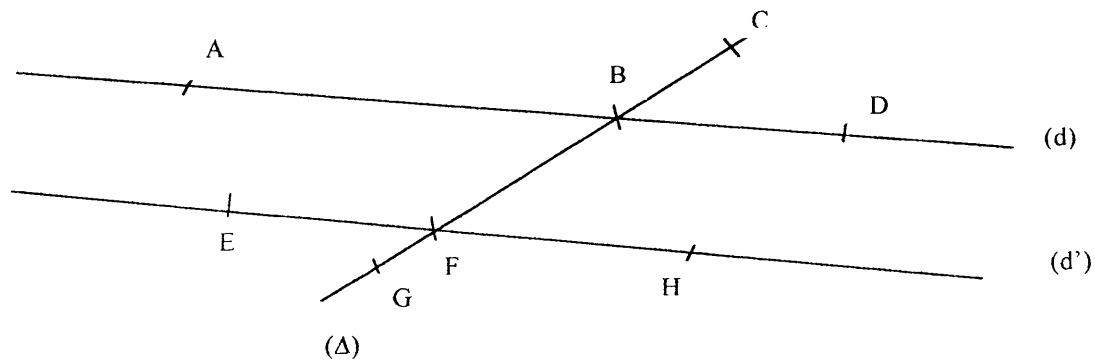
Dessiner les symétriques des angles suivants par rapport au point I. On pourra faire les dessins dans l'ordre que l'on veut, certains pouvant paraître plus faciles que d'autres.
Faire des conjectures sur les figures obtenues et les justifier en utilisant les propriétés de la symétrie. (annexe 1)

Les conjectures attendues sont : les angles symétriques sont égaux, les droites symétriques sont parallèles.

A Retenir : Le symétrique d'un angle par rapport à un point est un angle de même mesure. Ses côtés sont parallèles à l'angle de départ.

Situation 2 : Angles et parallèles

Les droites (d) et (d') sont parallèles, cite des paires d'angles égaux et justifie les réponses.



Exemples de preuves attendues :

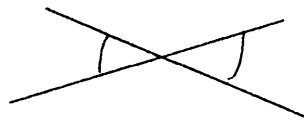
$\widehat{ABC} = \widehat{FBD}$, ils sont symétriques par rapport à B.

$\widehat{ABF} = \widehat{BFH}$, ils sont symétriques par rapport au milieu de [BF] car les droites (d) et (d') sont parallèles.

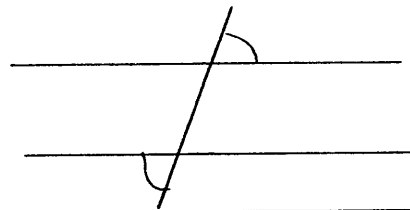
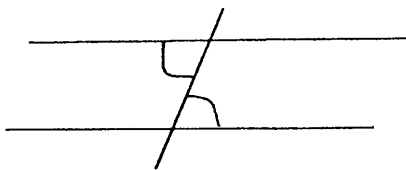
$\widehat{CBD} = \widehat{BFH}$ car $\widehat{CBD} = \widehat{ABF}$ par symétrie par rapport à B et $\widehat{ABF} = \widehat{BFH}$ par symétrie par rapport au milieu de [BF].

Observation : A mesure que les élèves citent une paire d'angles, la colorier. Ne colorier qu'une paire d'angles sur la même figure, sinon on n'y voit plus rien. Effacer entre chaque proposition.

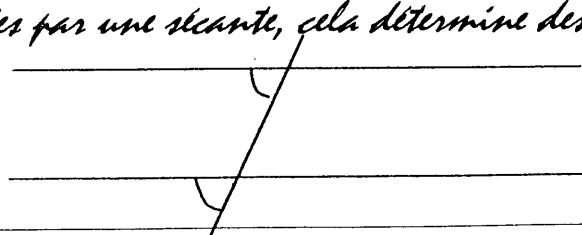
A Retenir : Deux droites sécantes déterminent deux paires d'angles opposés par le sommet qui sont égaux.



Quand deux droites parallèles sont coupées par une droite sécante, cela détermine deux paires d'angles alternes internes qui sont égaux



Quand deux droites parallèles sont coupées par une sécante, cela détermine des angles correspondants qui sont égaux.



On admet que quand deux droites sont coupées par une sécante en formant deux angles alternes internes égaux ou deux angles correspondants égaux, alors elles sont parallèles.

Exercices :

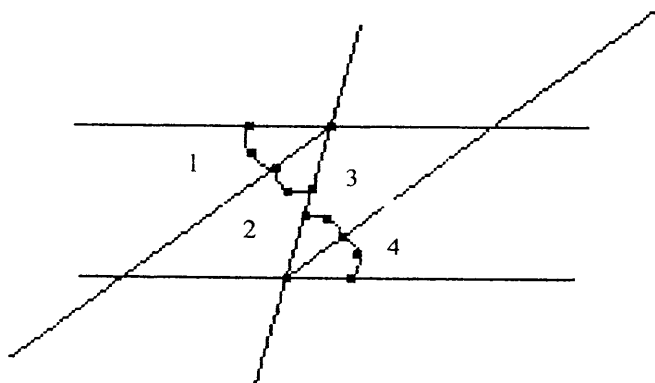
1) Tracer un angle de même mesure que celui ci en utilisant seulement une règle non graduée.

Observation : Les élèves utilisent un angle opposé par le sommet en prolongeant les côtés.

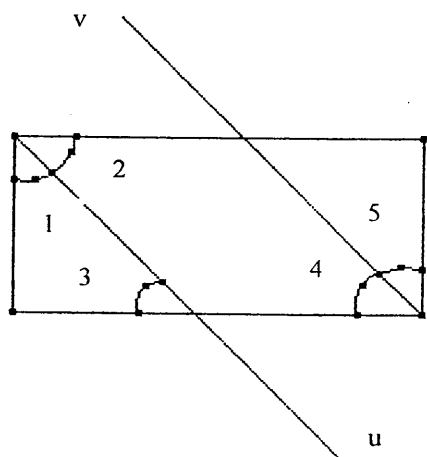


2) Montrer que les bissectrices de deux angles alternes internes égaux sont parallèles.

Les angles 1, 2, 3 et 4 sont égaux donc les angles 2 et 3 sont égaux. Les angles 2 et 3 sont alternes internes et égaux donc les deux bissectrices sont parallèles.



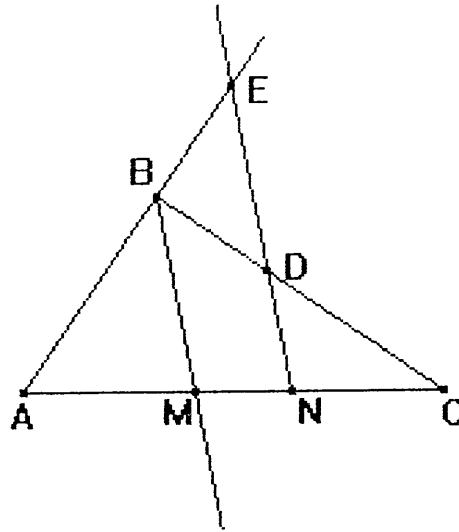
3) Montrer que les bissectrices de deux angles opposés d'un rectangle sont parallèles.



Les angles 1 et 2 sont égaux à 45° , de même les angles 4 et 5 car (u) et (v) sont les bissectrices des angles droits du rectangle. Les angles 2 et 3 sont égaux car ils sont alternes internes et les côtés du rectangle sont parallèles. Les angles 3 et 4 sont donc des angles correspondants égaux donc les deux bissectrices sont parallèles.

Les élèves justifient oralement les égalités d'angles puis les utilisent pour justifier le parallélisme. On pourra leur demander de rédiger par écrit quelques unes de ces justifications. Cet exercice est difficile car il y a beaucoup d'angles égaux et les élèves ont du mal à différencier les données des conclusions.

4) ABC est un triangle, (BM) est la bissectrice de l'angle $\hat{B}$ et (EN) est parallèle à (BM), elle coupe (BC) en D et (AB) en E.
Faire des conjectures.



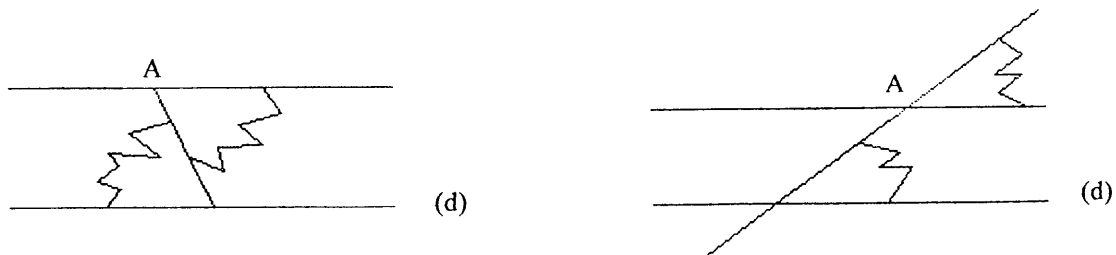
Observations : Les élèves disent tout ce qu'ils voient comme propriété de la figure qui ne soit pas une donnée. On les démontre une par une successivement, ainsi on obtient un classement qui conduit à la démonstration de la conjecture la plus complexe.

Cette mise en œuvre sera reprise pour d'autres exercices et ceci jusqu'en troisième. Au début les démonstrations se font à l'oral en commun puis on commence à demander des rédactions écrites simples.

Conjectures attendues :

- $\widehat{ABM} = \widehat{MBD}$ (car (BM) est la bissectrice de l'angle $\hat{B}$).
- $\widehat{MBD} = \widehat{BDE}$ (car ils sont alternes internes et les droites sont parallèles)
- $\widehat{ABM} = \widehat{BED}$ (car ils sont correspondants et les droites sont parallèles)
- BED est un triangle isocèle.

5) On plie une feuille de papier pour obtenir un gabarit d'angle quelconque, tracer à l'aide de ce gabarit une parallèle à la droite (d) passant par le point A.



Les deux méthodes attendues utilisent deux angles alternes internes ou bien deux angles correspondants.

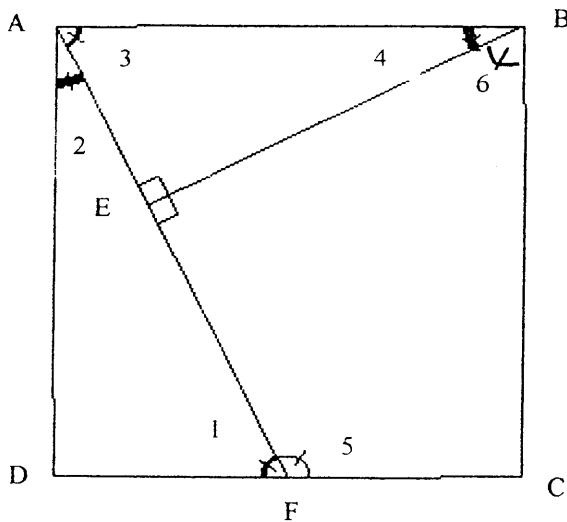
Situation 3 : Angles complémentaires et supplémentaires

On donne la figure ci dessous.

ABCD est un carré, F est le milieu de [DC], le triangle ABE est rectangle en E.

Découper les trois pièces.

Avec ce puzzle, on peut faire un rectangle, un trapèze quelconque, un trapèze isocèle, un triangle rectangle, un parallélogramme. Prouver pour chaque forme qu'elle a bien la nature prévue.



Observations : On peut prouver que les angles 1 et 3 sont égaux car ils sont alternes internes et les côtés du carré sont parallèles.

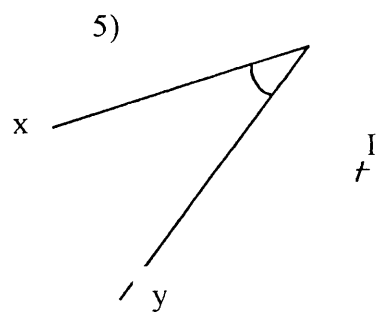
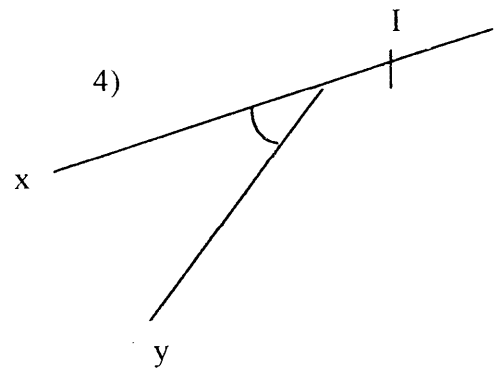
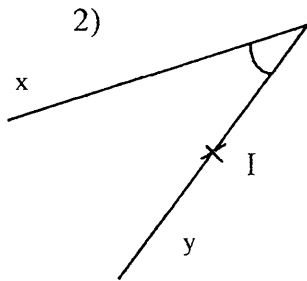
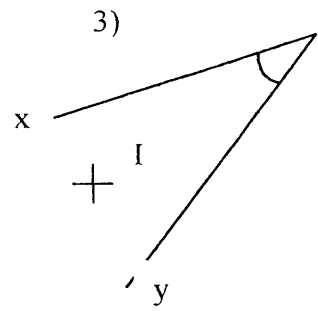
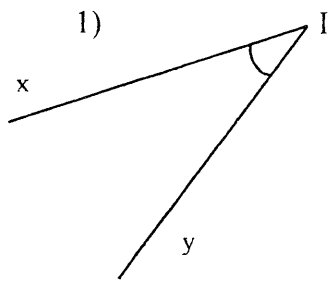
Donc $(2) = 90^\circ - (1)$ et $(4) = 90^\circ - (3)$ donc les angles 2 et 4 sont égaux.

De plus $(5) = 180^\circ - (1)$.

On a aussi $(6) = 90^\circ - (4) = (1)$

On introduira à cette occasion le vocabulaire angles complémentaires et supplémentaires.

On utilisera ces notions pour justifier la nature des figures obtenues



6- AIRE ET PERIMETRE

Savoirs visés :

- Savoir calculer l'aire d'une figure usuelle.
- Les formules d'aire pour le parallélogramme, le triangle, le disque.
- Unités d'aire et conversions.

Conceptions erronées repérées :

- Confusion aire et périmètre.
- Deux surfaces ne peuvent avoir la même aire que si elles sont superposables.
- L'aire d'un parallélogramme s'obtient en faisant le produit des côtés.
- Pour le disque, confusion entre le diamètre et le rayon.

Objectifs :

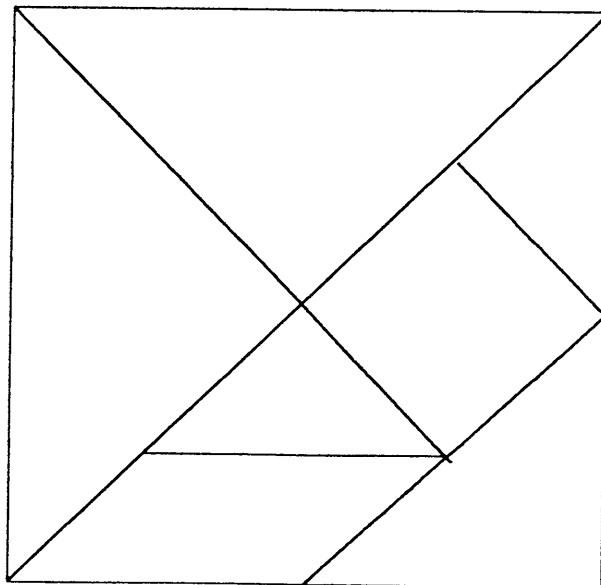
- Renforcer l'idée de la conservation de l'aire par déplacement de morceaux de figure.
- Permettre aux élèves de trouver (ou de retrouver) seuls les formules.

Situation1 : Différencier aire et périmètre

Travail à la maison : Voici un puzzle dit Tangram, le découper. En assemblant les 7 pièces du Tangram, réaliser une figure sans trous.

Travail en classe :

Peut-on comparer les aires et périmètres des figures des élèves de la classe?



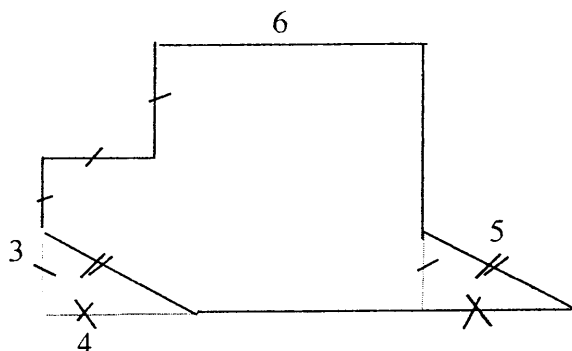
Observations : Des élèves pensent :

- 1) que le périmètre est le même que celui du carré initial.
- 2) que toutes les figures ont le même périmètre.

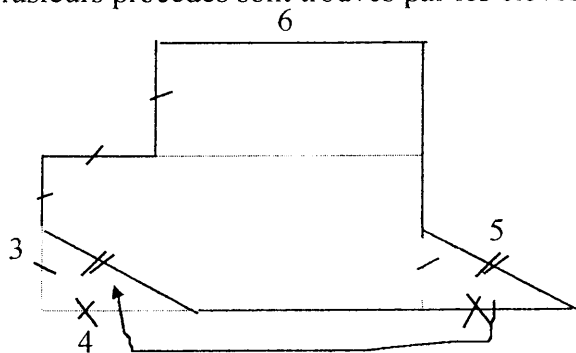
Remarque : Toutes les figures obtenues à partir du Tangram ont la même aire mais elles n'ont pas forcément le même périmètre.

Situation 2 : Manipuler les propriétés de l'aire

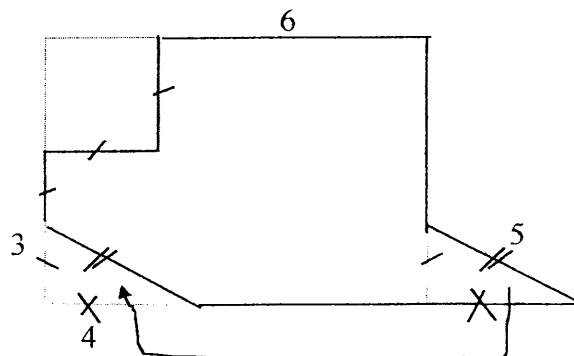
Calculer l'aire de cette figure et son périmètre.



Plusieurs procédés sont trouvés par les élèves.



Par déplacement et par addition



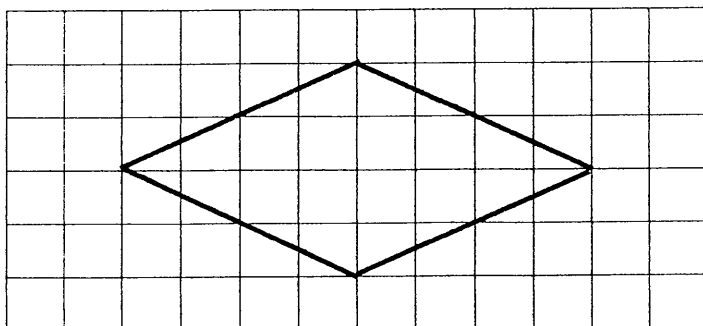
Par déplacement et par soustraction

Observation : Il s'agit ici de réactiver les procédés de calcul vus en 6^{ème}.

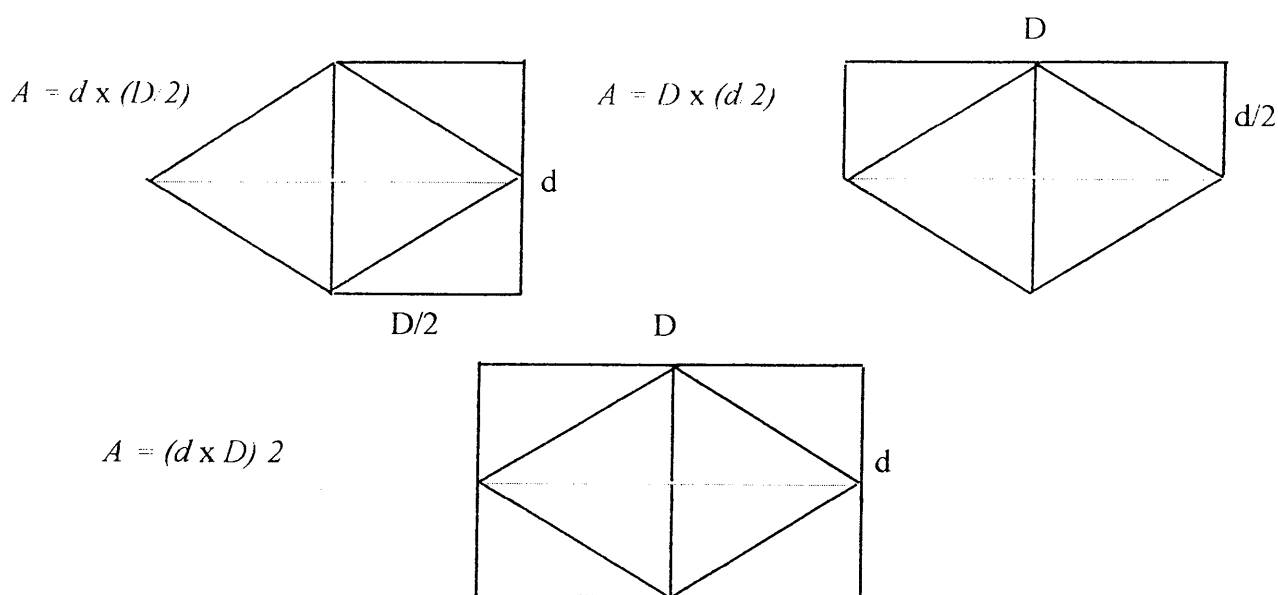
Des élèves qui ont bien vu qu'il fallait déplacer le triangle pour calculer l'aire de la figure, veulent aussi le faire pour calculer le périmètre. C'est encore une occasion de rappeler que deux figures ayant la même aire n'ont pas forcément le même périmètre.

Situation 3 : Découverte de la formule de l'aire du losange

Sur quadrillage, on donne la figure suivante, trouver une formule qui donne l'aire, l'unité étant le carreau.



Observations : Les élèves trouvent les procédés suivants :



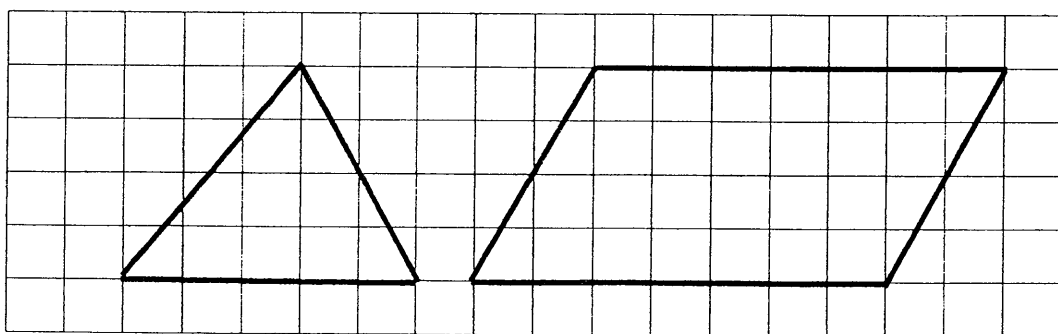
A la correction, on reproduit la figure **sans le quadrillage**, on demandera aux élèves de préciser sur le dessin quelles sont les mesures à prendre pour calculer l'aire, on en déduira la ou les formules.

L'apparition de plusieurs procédés permet d'effectuer un travail de comparaison des différentes formules.

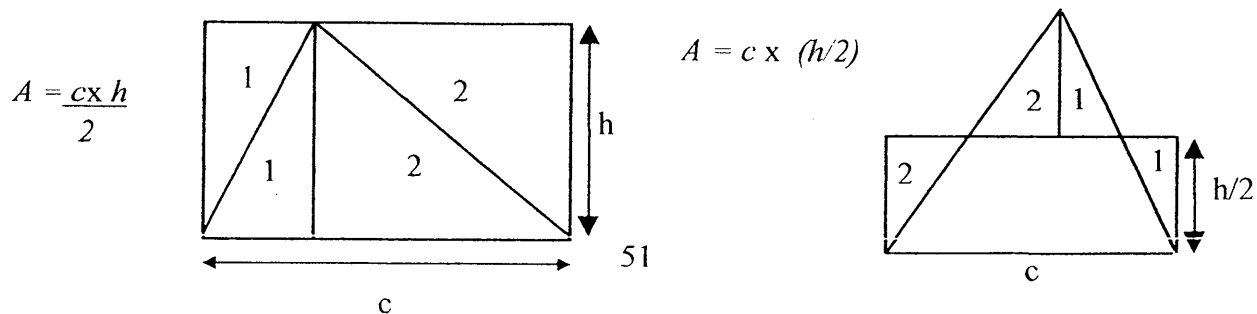
On ne demande pas aux élèves de retenir cette formule.

Situation 4 : Découverte de la formule de l'aire d'un triangle et de celle d'un parallélogramme

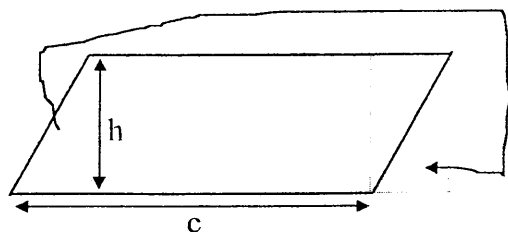
Toujours sur quadrillage, on donne ensuite un triangle (qui a ses trois angles aigus) et un parallélogramme.



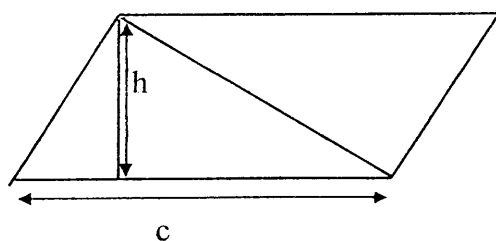
Les élèves trouvent les procédés suivants :



et pour le parallélogramme :



$$A = c \times h$$

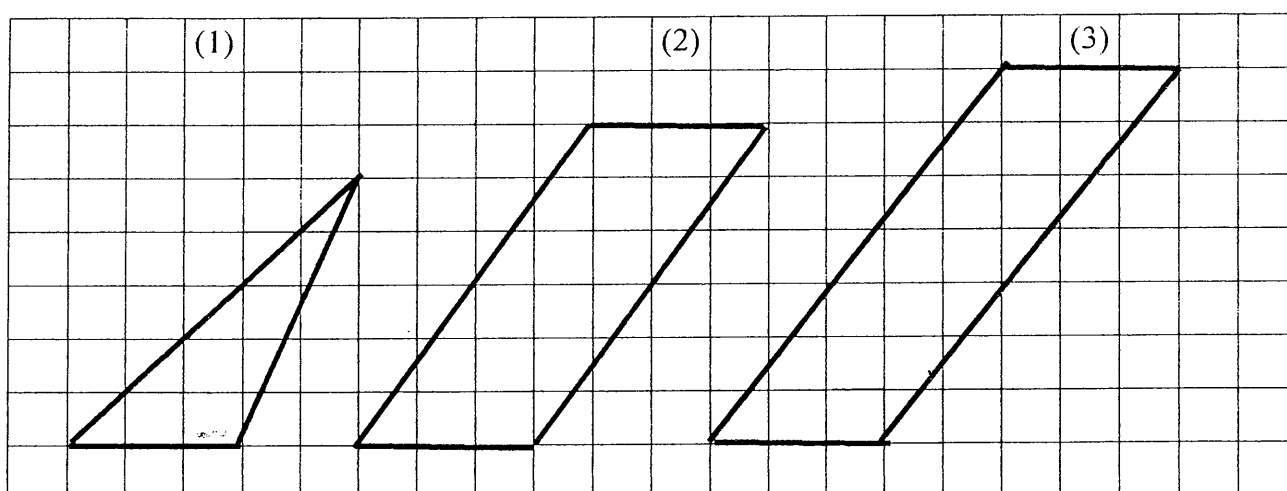


$$A = \frac{c \times h}{2} \times 2 = c \times h$$

Observation : On donne un triangle et un parallélogramme en même temps car certains élèves commencent par le triangle pour en déduire la formule pour le parallélogramme et d'autres font l'inverse.

Situation 5 : Quand la hauteur se trouve à l'extérieur de la figure.

Sur quadrillage, on donne les deux figures suivantes :

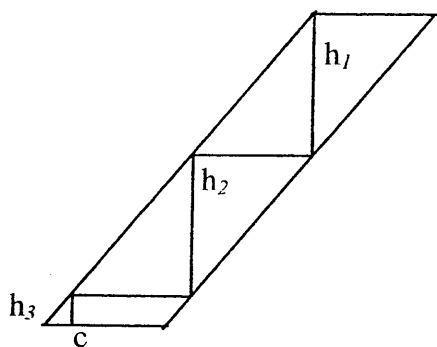


Observation : Les démarches utilisées précédemment ne fonctionnent plus car la hauteur se trouve à l'extérieur de la figure.

Les élèves trouvent les procédés suivants :

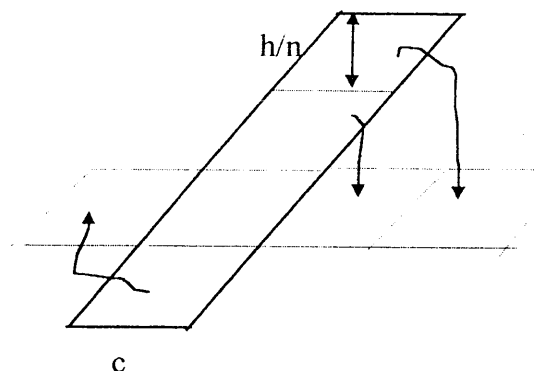
Pour la figure 3 :

$$A = (c \times h_1) + (c \times h_2) + (c \times h_3) = c \times (h_1 + h_2 + h_3) = c \times h$$



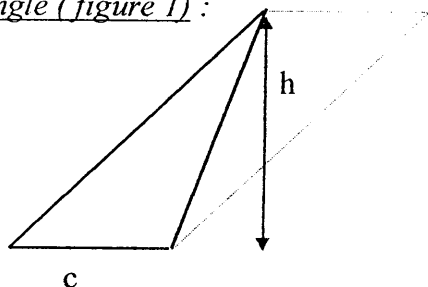
Pour la figure 2 :

$$A = h \cdot n \times cn$$



puis pour le triangle (figure 1) :

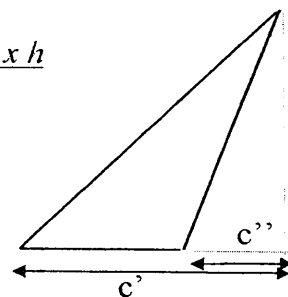
Méthode 1 :



et on utilise la formule du parallélogramme : $A = (c \times h) \div 2$

Méthode 2 :

$$A = \frac{(c' \times h)}{2} - \frac{(c'' \times h)}{2} = \frac{(c' - c'') \times h}{2} = \frac{c \times h}{2}$$



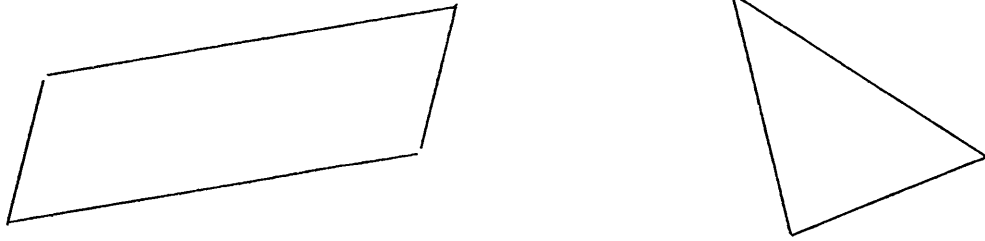
Certains élèves sont surpris que la même formule « marche » aussi pour des triangles de cette forme.

Certains élèves pensent à changer de côté et de hauteur pour retrouver la situation précédente, ici les mesures ne sont pas des nombres entiers de carreaux. Pourtant certains élèves pensent que si (voir la perpendiculaire plus courte que l'oblique, dans le chapitre sur l'inégalité triangulaire.)

Situation 6 : La hauteur n'est pas toujours verticale

Sur papier blanc, les contours de la feuille étant déchirés pour éviter le recours à la verticale et à l'horizontale.

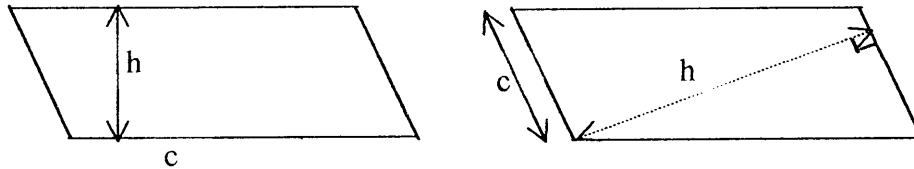
On donne les deux figures suivantes : mesurer les longueurs nécessaires et calculer leur aire.



Remarque : Cette fois ci on travaille sur papier blanc afin que les élèves s'habituent à manipuler les formules au lieu de recourir à chaque fois au quadrillage. On fera remarquer à l'occasion de ces exemples que la hauteur d'un triangle ou d'un parallélogramme peut-être à l'extérieur de la figure ou ne pas être verticale mais rien ne sera institutionnalisé à ce sujet. Un travail plus approfondi sur les hauteurs sera fait en 4ème.

A retenir : Il y a généralement deux façons de calculer l'aire d'un parallélogramme et trois façons de calculer celle d'un triangle.

Aire du parallélogramme = côté $\times$ hauteur correspondante

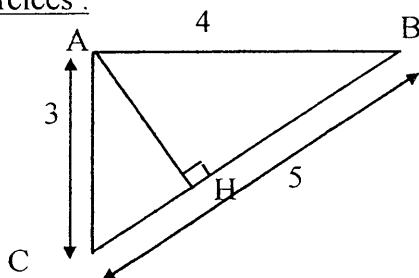


Aire du triangle = (côté $\times$ hauteur correspondante) : 2

On fera trois dessins différents pour les trois hauteurs de façon à éviter les problèmes de concours des hauteurs.

Exercices :

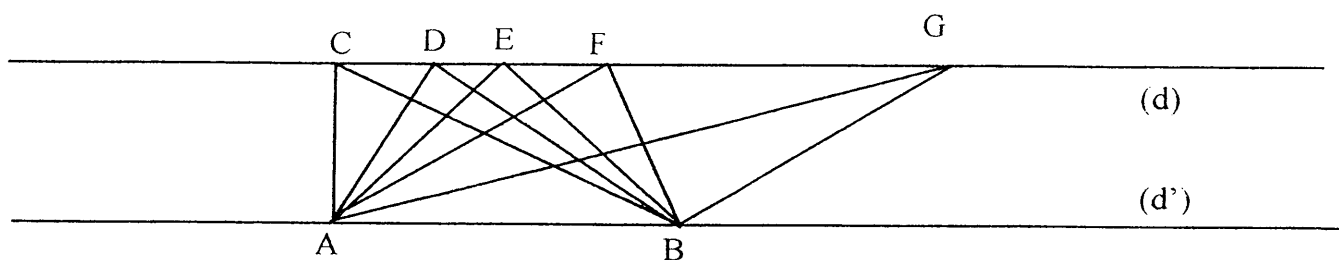
1)



Calculer l'aire de ce triangle rectangle.
Calculer la hauteur AH.

2) Les droites (d) et (d') sont parallèles.

Comparer les aires des triangles ABC, ABD, ABE, ABF, ABG.



Situation 7: Les unités d'aire

Rendre à chaque objet son aire. (d'après Cinq sur Cinq Hachette)

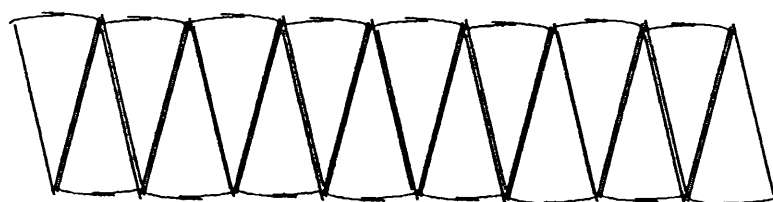
Terrain de golf	0,0374 m ²
Table	500 000 000 dm ²
Timbre	3 000 000 mm ²
Feuille de cahier	0,00052 m ²
Ecran télé	0,000012 hm ²

Observation : Pour résoudre cet exercice, on choisit une unité convenable à priori pour un objet et on convertit.

A retenir : Tableau des unités d'aire

Situation 8 : Aire du disque

Découper un disque en 16 secteurs égaux. Les disposer de la façon suivante.



A quel quadrilatère ressemble cette figure ?
Exprimer son aire de manière approximative.

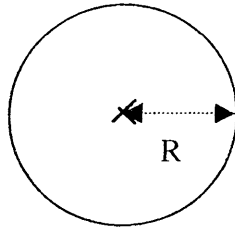
Observation : On fera découper et éventuellement coller les secteurs à la maison, en s'aidant d'une ligne du cahier pour « coller droit », afin d'éviter que le bricolage ne s'éternise.

Les élèves voient que l'aire du disque est pratiquement égale à celle du parallélogramme de hauteur R, le rayon du cercle et de base le demi - périmètre du cercle :

$$(\pi \times D) : 2 = \pi \times (D/2) = \pi \times R$$

On en déduit la formule $R \times (\pi \times R) = \pi \times R \times R$

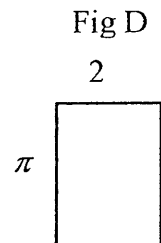
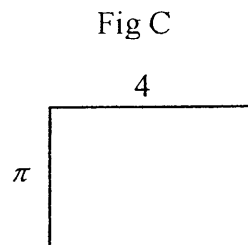
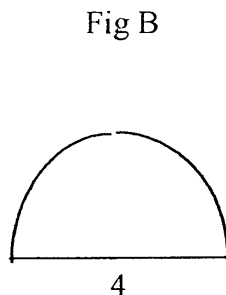
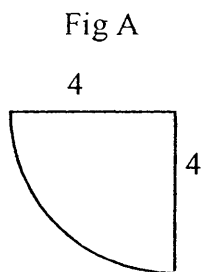
A Retenir : Aire du disque = $\pi \times \text{rayon} \times \text{rayon}$



Exercice : Comparer les aires et les périmètres des figures suivantes sans calculatrice et sans poser d'opérations :

Observation :

Les élèves confondent diamètre et rayon.



Pour les calculs on incite les élèves à garder la lettre π le plus longtemps possible, cela permet de réinvestir des calculs algébriques simples. Pour vérifier, on calculera une valeur approchée avec $\pi \approx 3,14$ ou la touche π de la calculatrice ou seulement un ordre de grandeur avec $\pi \approx 3$.

figure A : périmètre $\frac{2 \times 4 \times \pi}{4} + 4 + 4 = 2\pi + 8$

aire $\frac{4 \times 4 \times \pi}{4} = 4\pi$

figure B : périmètre $\frac{4 \times \pi}{2} + 4 = 2\pi + 4$

aire : $\frac{2 \times 2 \times \pi}{2} = 2\pi$

7- PARALLELOGRAMMES

Savoirs visés :

- Les propriétés d'un parallélogramme.
- Quelques propriétés suffisantes pour reconnaître un parallélogramme.

Conceptions repérées chez les élèves :

- Ce chapitre est difficile, les élèves ont énormément de mal à distinguer les propriétés directes des propriétés réciproques, du fait qu'il y a presque toujours équivalence.

Objectifs :

- Utiliser les propriétés du parallélogramme pour continuer l'initiation au raisonnement et notamment distinguer une propriété et sa réciproque.
- Nous avons choisi de démontrer tout ce qui est accessible au niveau cinquième, chaque fois que c'est possible. On donne au moins une idée de la démonstration, si la mise en forme est trop complexe. Quand c'est trop difficile, on précise ce que l'on admet. Certaines démonstrations qui utilisent la propriété de la symétrie $s(A \cap B) = s(A) \cap s(B)$ sont très difficiles.
- On utilise dans ce chapitre de nombreux résultats des chapitres précédents qu'il faudra s'assurer d'avoir institutionnalisé auparavant, par exemple, la somme des angles d'un quadrilatère ou l'ensemble des centres de symétrie de deux droites parallèles.

Définition : On appelle parallélogramme un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles deux à deux.

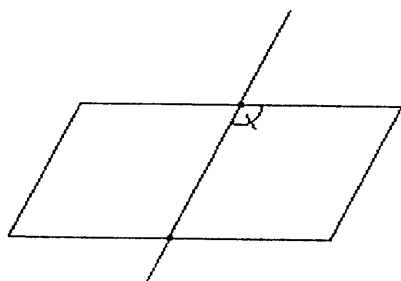
Toutes les constructions se font sur du papier blanc sauf consigne contraire.

Situation 1 :

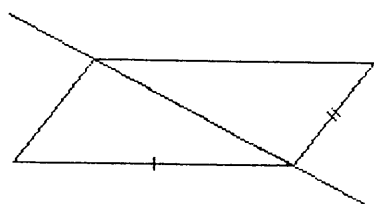
Un parallélogramme peut-il avoir un centre ou des axes de symétrie ?

Observations : Les élèves pensent que les diagonales ou bien les droites qui joignent les milieux de deux côtés opposés sont des axes de symétrie d'un parallélogramme quelconque.

Ils font le dessin du symétrique puis se rendent compte que la droite choisie n'est pas un axe de symétrie. Si on demande alors si on pouvait prévoir ce résultat, ils disent :



Il faudrait un angle droit et on aurait alors un rectangle.

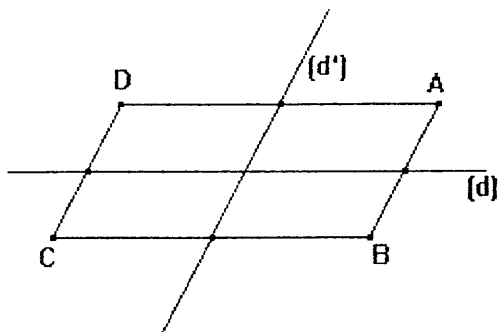


Ces côtés devraient avoir la même longueur, on aurait alors un losange.

On en profitera pour faire remarquer d'ores et déjà qu'un losange et un rectangle sont des parallélogrammes, et on fera le parallèle (si l'on peut dire !) avec la vie courante pour préciser le vocabulaire.

"Un carré est un rectangle." → "Un caniche est un chien."

"C'est un carré ou un rectangle". → "C'est un caniche ou un chien" (!)



Puis le professeur pourra justifier au tableau de la manière suivante qu'il y a bien un centre de symétrie.

(d) est l'ensemble des centres de symétrie des droites (AD) et (BC), (d') est l'ensemble des centres de symétrie des droites (AB) et (DC), leur point d'intersection est donc un centre de symétrie pour le parallélogramme.

A Retenir : Un parallélogramme a un centre de symétrie mais n'a pas d'axe de symétrie.

Propriétés d'un parallélogramme :

- Ses côtés opposés sont parallèles et de la même longueur.
- Ses diagonales se coupent en leur milieu.
- Ses angles opposés sont égaux.

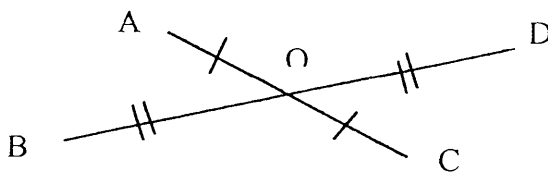
Observation : Les propriétés d'un parallélogramme se déduisent immédiatement des propriétés de la symétrie.

Situation 2 :

Comment construire un quadrilatère ayant un centre de symétrie ?

Un quadrilatère a un centre de symétrie, quelles sont ses propriétés ?

Observation : Plaçons d'abord le centre de symétrie O . Si on place un premier sommet A , le sommet C est son symétrique par rapport à O , donc O est le milieu de $[AC]$. De même avec les sommets B et D . O est donc le milieu des segments $[AC]$ et $[BD]$. Le symétrique du segment $[AB]$ est le segment $[CD]$ donc ils ont la même longueur et sont parallèles. Même chose pour les segments $[AD]$ et $[BC]$. Le quadrilatère $ABCD$ a ses côtés opposés parallèles deux à deux, donc c'est un parallélogramme.



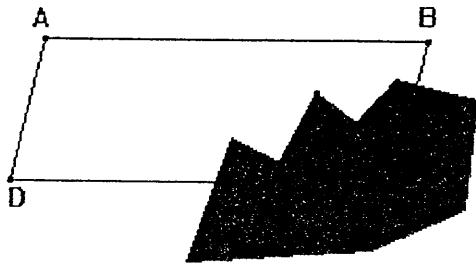
A Retenir :

Quand un quadrilatère a un centre de symétrie, alors on est sûr que c'est un parallélogramme.

Quand un quadrilatère a ses diagonales qui se coupent en leur milieu, alors on est sûr que c'est un parallélogramme.

Exercice : Le parallélogramme incomplet.

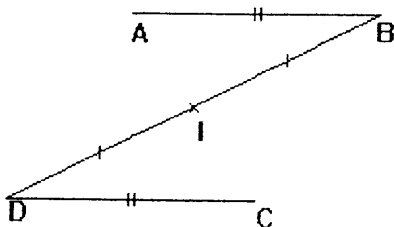
Objectif : utiliser les propriétés nécessaires.



ABCD est un parallélogramme. Tracer un segment de même longueur que le segment $[AB]$, que le segment $[AD]$, que le segment $[AC]$, sans rien tracer dans la partie tachée. Justifier les constructions.

Situation 3 : Des propriétés suffisantes.

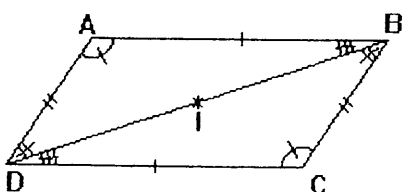
Etape 1 : Un quadrilatère a deux côtés parallèles et de même longueur. Peut-on être sûr que c'est un parallélogramme ?



Soit I le milieu de $[BD]$. Par la symétrie de centre I , la demi-droite $[BA)$ a pour image la demi-droite $[DC)$ car elles sont parallèles (et dans le bon sens). Or $AB = DC$, donc A a pour image C par la symétrie de centre I . I est le centre de symétrie du quadrilatère $ABCD$.

Observation : La preuve se fait à l'oral par un jeu de questions réponses. On a décidé de ne pas insister sur le problème de sens de la demi-droite en effet cela nous amènerait à parler du quadrilatère croisé et cela ne semble pas souhaitable. Les élèves n'y pensent pas d'eux-mêmes comme à un quadrilatère, inutile de semer plus le trouble dans leur esprit. Cette omission ne gênera pas le raisonnement par la suite et l'ambiguïté sera levée avec les vecteurs en troisième.

Etape 2 : Un quadrilatère a ses côtés opposés de même longueur. Peut-on être sûr que c'est un parallélogramme ?



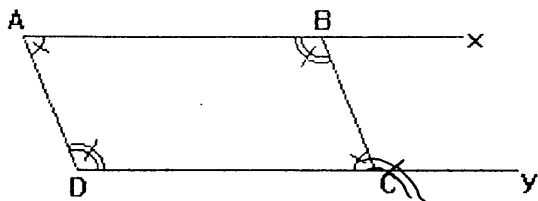
ABD et BCD sont deux triangles superposables car ils ont leur trois côtés de même longueur.
Ils ont donc leurs trois angles égaux.

$\widehat{ADB} = \widehat{DBC}$ et ils sont alternes internes donc les droites (BC) et (AD) sont parallèles.

$\widehat{ABD} = \widehat{BDC}$ et ils sont alternes internes donc les droites (AB) et (CD) sont parallèles.
 ABCD a ses côtés opposés parallèles donc c'est un parallélogramme.

Observation : Cette démonstration simple peut être trouvée par les élèves.

Etape 3 : Quand un quadrilatère a ses angles opposés égaux, peut-on être sûr que c'est un parallélogramme ?



$\widehat{DAB}$ et $\widehat{ABC}$ sont supplémentaires car la somme des quatre angles d'un quadrilatère vaut 360° .

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360^\circ$$

$$2\hat{A} + 2\hat{B} = 360$$

$$2(\hat{A} + \hat{B}) = 360$$

$$\hat{A} + \hat{B} = 180$$

$$\widehat{ABC} = \widehat{BCy} \text{ car } \widehat{BCy} = 180 - \hat{C} = 180 - \hat{A} = \hat{B}$$

$\widehat{ABC}$ et $\widehat{BCy}$ sont alternes internes et égaux donc (AB) // (DC).

$\widehat{ADC}$ et $\widehat{BCy}$ sont correspondants et égaux donc (AD) // (BC).

Etape 4 : Quand un quadrilatère a deux côtés parallèles et deux côtés opposés de même longueur, peut-on être sûr que c'est un parallélogramme ?

On trouve le trapèze isocèle qui vérifie la propriété et qui n'est pas un parallélogramme.

Observation : Cette question a été posée pour bien faire comprendre ce que c'est qu'une condition suffisante en montrant une qui ne l'est pas.

*A chaque étape on fera retenir une condition suffisante sous la forme :
 Quand un quadrilatère a alors on est sûr que c'est un parallélogramme.*

Situation 4 : Construire un parallélogramme

Construire un parallélogramme en utilisant :

- 1) le quadrillage du cahier
- 2) le compas et la règle non graduée
- 3) l'équerre et la règle non graduée
- 4) la règle graduée uniquement

Préciser dans chaque cas grâce à quelle propriété on peut être sûr que c'est un parallélogramme.

Observation :

- 1) deux côtés sont parallèles et de même longueur
- 2) les côtés opposés ont la même longueur
- 3) les côtés opposés sont parallèles
- 4) les diagonales se coupent en leur milieu

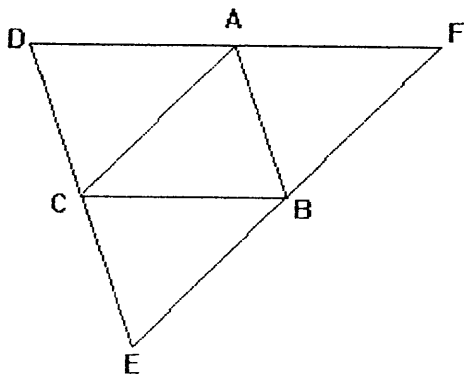
A Retenir : La construction d'un parallélogramme au compas

Situation 5 : Nommer un parallélogramme

Etant donnés A, B, C trois points non alignés, construire un parallélogramme ayant A, B et C comme sommets.

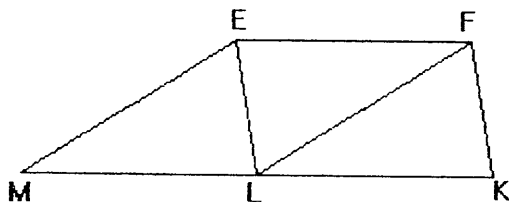
Combien y a t il de possibilités ?

Bilan : Etant donnés trois points A, B, C non alignés, il y a trois parallélogrammes différents ayant A, B, C comme sommets. Ils se nomment ABCD, ABEC et ACBF

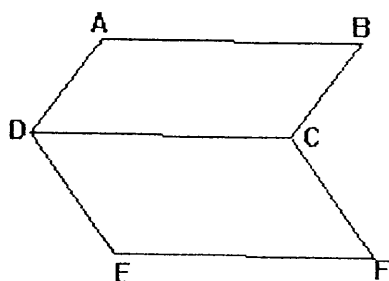


Exercices :

1) EFKL est un parallélogramme, construire le parallélogramme EFLM.



2) ABCD est un parallélogramme, CDEF est un parallélogramme, montrer que ABFE est un parallélogramme.

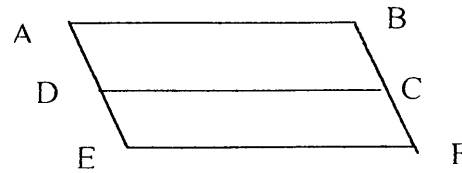


ABCD est un parallélogramme donc $[AB]$ et $[CD]$ sont parallèles et de même longueur.

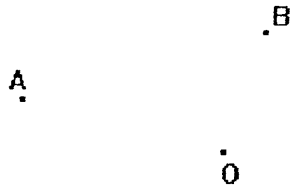
CDEF est un parallélogramme donc $[CD]$ et $[EF]$ sont parallèles et de même longueur.

Les deux côtés $[AB]$ et $[EF]$ sont parallèles et de même longueur donc ABFE est un parallélogramme.

Les élèves font souvent deux parallélogrammes séparés ou bien ce dessin. On discutera de la validité de chaque dessin et on déterminera lequel est le plus pertinent.



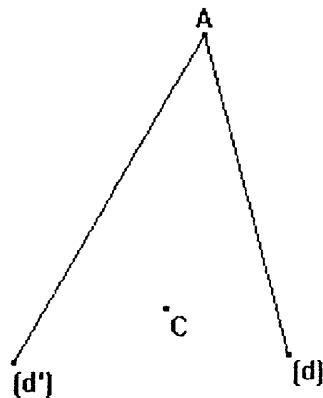
3) Construire le parallélogramme ABCD sachant que O est son centre.



4) Placer les points B et D tels que ABCD soit un parallélogramme, $AB = 6 \text{ cm}$ et $BC = 4 \text{ cm}$ en utilisant le compas.



5) Construire le parallélogramme ABCD sachant que B est un point de (d) et D est un point de (d')



8-PARALLELOGRAMMES PARTICULIERS

Savoirs visés :

- Quelques propriétés suffisantes des quadrilatères particuliers .

Conceptions erronées :

- Les élèves confondent les propriétés nécessaires et suffisantes .

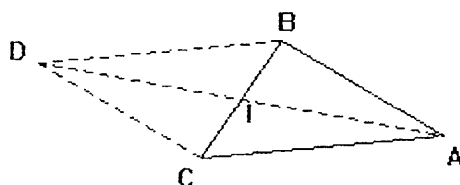
Objectifs :

- On ne redémontre pas dans cette leçon les propriétés nécessaires des rectangles ,des losanges et des carrés car elles sont connues depuis la 6^{ème} grâce aux propriétés de la symétrie axiale mais on les rappelle et on les utilise .
- On met l'accent sur les propriétés suffisantes .

On complète le tableau de l'annexe 1 qui récapitule les propriétés des quadrilatères au fur et à mesure.

Situation 1 : Propriétés des côtés des parallélogrammes particuliers.

Etape 1 : ABC est un triangle , I est le milieu de [BC]. D est le symétrique de A par rapport à I
Quelle est la nature du quadrilatère ABDC ?



Etape 2 : Comment choisir ABC pour que le quadrilatère ABDC soit un rectangle ?

Observation : On demande aux élèves de faire la liste des données, puis de faire des conjectures que l'on démontre à l'oral.

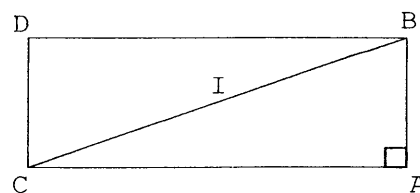
ABDC est rectangle en A .

ABDC est un parallélogramme donc $(AC) \parallel (BD)$

or $(AC) \perp (AB)$ donc $(AB) \perp (BD)$.

$(AB) \parallel (CD)$ et $(AB) \perp (BD)$ donc $(CD) \perp (BD)$.

ABDC a trois angles droits donc c'est un rectangle .

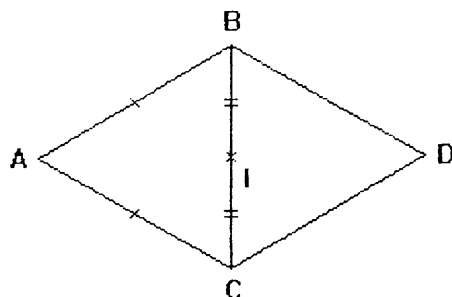


A Retenir : Quand un parallélogramme a deux côtés consécutifs perpendiculaires, alors on est sûr que c'est un rectangle.

Observation : On ne dit pas "Quand un parallélogramme a un angle droit " mais "Quand un parallélogramme a deux côtés consécutifs perpendiculaires "car certains élèves confondent

l'angle droit entre les côtés et l'angle droit entre les diagonales : et ils croient que si un parallélogramme a un angle droit (entre ses diagonales, sous entendu!), c'est un losange.

Etape 3 : Comment faut il choisir le triangle ABC pour que le quadrilatère ABDC soit un losange ?



Observation : La démonstration se fait avec les élèves à l'oral. On demande aux élèves de faire la liste des données, puis de faire des conjectures que l'on démontre à l'oral.
 ABC est un triangle isocèle en A. $AB = AC$ et ABDC est un parallélogramme donc $AB = CD$ et $AC = BD$. Donc $AB = AC = CD = BD$.
 ABDC a ses quatre côtés de même longueur donc c'est un losange.

A Retenir : Quand un parallélogramme a deux côtés consécutifs de même longueur alors on est sûr que c'est un losange.

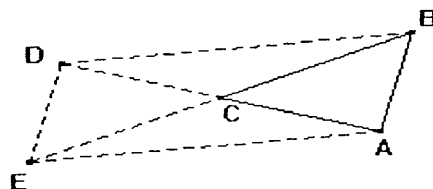
Etape 4 : Comment faut il choisir le triangle ABC pour que le quadrilatère ABDC soit un carré ?

Observation : Le carré étant à la fois un rectangle et un losange d'après ce qui précède on a le bilan suivant pour le carré

A Retenir : Quand un parallélogramme a deux côtés consécutifs de même longueur et perpendiculaires alors on est sûr que c'est un carré.

Situation 2 : Propriétés des diagonales des parallélogrammes particuliers.

Etape 1 : ABC est un triangle. D est le symétrique de A par rapport à C. E est le symétrique de B par rapport à C. Quelle est la nature du quadrilatère ABDE ?



Etape 2 : Comment faut il choisir le triangle ABC pour que le quadrilatère ABDE soit un rectangle ?

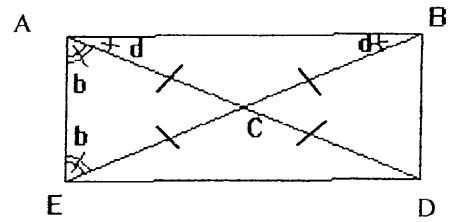
Observations

ABC est un triangle isocèle en C. Dans le triangle ABE,

$$b + (b + d) + d = 180^\circ$$

$$b + d = 90^\circ$$

ABDE a un angle droit en A, les côtés [AB] et [AE] sont perpendiculaires donc c'est un rectangle.



A Retenir : Quand un parallélogramme a ses diagonales de même longueur alors on est sûr que c'est un rectangle.

Etape 3 : Comment choisir le triangle ABC pour que le quadrilatère ABDE soit un losange ?

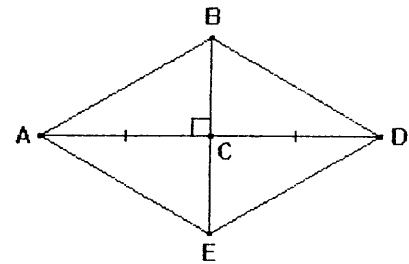
Observations : *ABC est un triangle rectangle en C.*

(BE) est la médiatrice du segment [AD] car elle est perpendiculaire et elle passe par le milieu de [AD]. Donc $BA = BD$ et $EA = ED$.

De même (AD) est la médiatrice du segment [BE] donc $BA = AE$

On a $AE = ED = AB = BD$

ABDE a quatre côtés de la même longueur donc c'est un losange.



Cette démonstration est la plus difficile, il faudra guider les élèves qui ne pensent pas spontanément à la médiatrice.

A Retenir : Quand un parallélogramme a ses diagonales perpendiculaires alors on est sûr que c'est un losange.

Etape 4 : Comment faut-il choisir le triangle ABC pour que le quadrilatère ABDE soit un carré ?

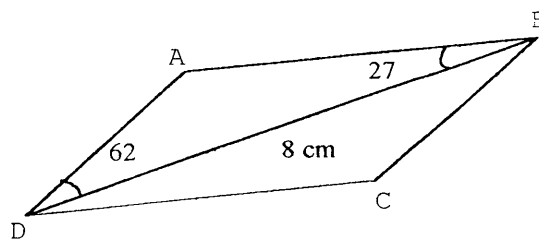
Observation : *Le carré étant à la fois un rectangle et un losange d'après ce qui précède on a le bilan suivant pour le carré*

A Retenir : Quand un parallélogramme a ses diagonales de même longueur et perpendiculaires alors on est sûr que c'est un carré.

Exercices :

- 1) Construire un carré ayant une diagonale qui mesure 4 cm .
- 2) Construire un losange ayant des diagonales qui mesurent 6 et 8 cm .
- 3) Construire un rectangle ayant un côté de 6 cm et une diagonale de 8 cm .
- 4) Reproduire le parallélogramme ABCD en respectant les dimensions données sur la figure :
Est-ce un rectangle ?

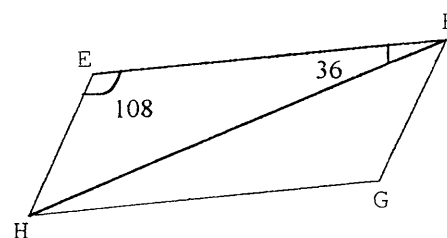
(non ! $62 + 27 = 89^\circ$, ABD n'est pas rectangle !)



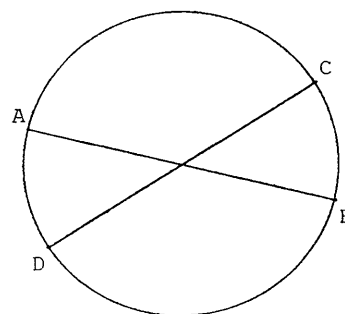
- 5) Reproduire le parallélogramme EFGH en respectant les dimensions données sur la figure :

Est-ce un losange ?

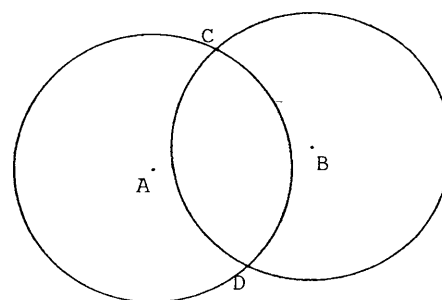
(oui ! $180 - (108 + 36) = 36$ donc EFH est isocèle !)



- 6) [AB] et [CD] sont deux diamètres d'un même cercle .
Quelle est la nature du quadrilatère ACBD ?
Si (AB) et (CD) sont perpendiculaires ,
quelle est alors la nature du quadrilatère ACBD ?



- 7) Deux cercles de même rayon de centres A et B se coupent en C et D .
Quelle est la nature de ACBD ?



Observation : On utilise le tableau récapitulatif pour trouver les propriétés utiles à la résolution des exercices. On insistera sur la différence entre deux propriétés analogues commençant par :

"Quand un quadrilatère a" ou par "Quand un parallélogramme a"

QUADRILATERE

PARALLELOGRAMME

RECTANGLE

LOSANGE

CARRRE

9- PRISMES DROITS ET CYLINDRES

Savoirs visés :

- Prisme et cylindre : description, patron, représentation en perspective, volume.
- Unités de volume, conversions.

Conceptions repérées chez les élèves :

- Le passage de la dimension 2 à la dimension 3 pose problème car il nécessite la lecture du codage par la perspective.
Il n'y a pas de règles de perspective cavalière données de manière rigoureuse comme en dessin technique. En effet ces règles sont des conventions et non des nécessités mathématiques.
Comment expliquer par exemple que la plupart des pavés représentés dans les manuels soient dessinés vus du haut à droite ?

Objectifs :

- De la même façon qu'à l'école en géométrie plane, au collège en géométrie dans l'espace on apprend à reconnaître des formes, à les représenter suivant un code (la perspective cavalière), à lire des représentations planes.
- On apprend du vocabulaire.
- On ne fera pratiquement aucun raisonnement, on ne commence à raisonner en géométrie dans l'espace qu'au lycée.

Situation 1 : Description de prismes droits

On distribue deux types de bandes de papier bristol rectangulaires de 20 cm sur 5 cm, de 17 cm sur 15 cm. Chaque élève aura une bande.

Etape 1 : Plier chaque bande entre deux et quatre fois puis recoller les deux extrémités de façon à fabriquer une boîte sans fond ni couvercle. (on leur montre un pli.)

Observation : On a choisi les dimensions 20 cm et 5 cm de façon à obtenir peut être des cubes parmi les solides fabriqués en pliant le côté de 20 cm en quatre. Les élèves qui auront la bande de 17 cm sur 15 cm pourront plier dans le sens de la largeur ou de la longueur.

Nous avons limité le nombre de pli à quatre afin d'éviter les prismes ayant un trop grand nombre de faces latérales.

Des élèves peuvent coller avec de la colle en superposant une partie de la bande, d'autres colleront bord à bord avec du scotch. Certains ne feront pas leur collage sur une arête, ainsi une face latérale pourra être partagée en deux.

On peut observer suivant les élèves, des pavés, des cubes, des prismes à bases triangulaires ou autre.

Etape 2 : Compléter le solide obtenu en rajoutant un fond et un couvercle à votre boîte.

Observation : Nous avons fourni du papier bristol plus rigide et non du papier ordinaire afin que les élèves puissent poser leur prisme sur une base et la décalquer sans qu'elle soit trop

déformée. En effet certains élèves auront des bases qu'il n'est pas facile de construire à la règle et au compas et cette construction n'est pas notre objectif. Il ne s'agit pas ici d'obtenir une construction rigoureuse mais de concevoir que les deux bases sont des polygones superposables.

On décrira les solides obtenus en insistant sur les faces rectangulaires.

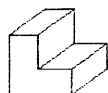
Etape 3 : Découper selon des arêtes pour obtenir un patron, les faces doivent être attachées et rester entières.

Observation : On pourra obtenir différents types de patrons et notamment des patrons ayant les faces latérales autour d'une des bases, modèle que l'on retrouvera ensuite. Là encore l'objectif n'est pas d'avoir un patron exact mais de pouvoir compter les faces, les arêtes, observer la disposition des faces, ...

Bilan : Les solides observés dans cette situation s'appellent des prismes droits.

Situation 2 : Reconnaître des prismes droits.

Le professeur a apporté en classe divers objets , une boîte à thé, du Toblerone, une boîte d'allumettes, un fromage de Chavroux, une boîte de camembert, une balle, un prisme oblique (fabriqué par le professeur), un prisme de la forme ci dessous.



Quels sont ceux qui sont des prismes droits ?

Bilan : Un prisme droit est un solide qui a de deux bases identiques en forme de polygone et des faces latérales rectangulaires.

Situation 3 : Patrons

Etape 1 : Reconnaître des patrons (voir annexe 1)

Observation : Dans le patron 1) les dimensions d'une des faces latérales sont fausses.

Dans le patron 2) les triangles ayant des positions différentes ne se ressemblent pas, des élèves pensent que ce patron est faux car les faces ne sont pas superposables.

Dans le patron 5) une des faces latérales n'est pas rectangulaire.

Dans le patron 6) il y a une face en trop mais des élèves pensent que le patron est faux car un cube n'est pas un prisme et non à cause de la face supplémentaire.

Les patrons 3) et 4) sont justes .

Etape 2 : Compléter des patrons (voir annexe 2)

Observation : La présence du cadre à ne pas dépasser impose une forme précise au patron.

Dans le cadre 1) il y a suffisamment de place pour dessiner n'importe quel patron.

Dans le cadre 2) les faces latérales doivent toutes se trouver sur la droite.

Dans le cadre 3) les faces latérales sont de part et d'autre des bases.

Dans le cadre 4) il faut dessiner les bases en utilisant le compas.

Dans le cadre 6) le prisme n'existe pas car les longueurs des faces latérales ne peuvent pas être les trois côtés d'un triangle. Les élèves devront justifier leur réponse en utilisant l'inégalité triangulaire.

Etape 3 : Dessiner le patron d'un prisme à base triangulaire et construire l'objet.

On fournit aux élèves un prisme, par exemple un emballage de Toblerone (un pour deux ou trois élèves peut suffire). Relever les informations nécessaires pour dessiner le patron de ce prisme puis le construire pour vérifier.

Observation : Les élèves relèvent les informations nécessaires pour construire la base triangulaire (voir détermination d'un triangle), souvent les trois côtés puis ils relèvent la hauteur du prisme, on insistera sur le fait qu'il s'agit de la distance entre les bases, la dimension commune à toutes les faces latérales rectangulaires.

Bilan : Faire coller le patron dans le cahier .

Situation 4 : Dessiner un prisme à base triangulaire en perspective ;

Etape 1 : On fabrique en utilisant par exemple le jeu KNEX ou le matériel ZOME un squelette de prisme à base triangulaire que l'on place dans le faisceau lumineux d'un rétro projecteur. Quand on reste dans une zone assez proche du plan de l'écran , on peut voir une ombre qui ressemble à une perspective cylindrique. Si on s'éloigne trop, on obtient une perspective conique.

En projetant sur un tableau blanc, on peut faire repasser l'ombre obtenue avec un feutre. On montrera que l'on peut faire varier l'aspect de la représentation en faisant varier dans l'espace la position du solide. On étudiera les représentations en perspective cavalière quand l'une des faces est représentée en vraie grandeur. On fera remarquer que c'est la face de devant et celle de derrière qui sont représentées en grandeur réelle quand elles sont parallèles au plan de l'écran.

On pourra suivre avec une baguette les arêtes pour montrer où se trouvent les segments qui les représentent.

On gardera en évidence le prisme à base triangulaire que l'on vient d'utiliser pour que les élèves puissent venir l'observer s'ils le souhaitent.

Observation : Le matériel ZOME utilisé dans une recherche INRP "Les débuts de la géométrie au collège" peut se trouver dans un catalogue de jeux pour les jeunes enfants "EVEIL ET JEUX". Il s'agit de tiges de plastique qui s'emboîtent à l'aide de sphères percées de trous, avec lesquelles on peut construire des squelettes de solides.

Etape 2 : Dessiner en perspective le prisme à base triangulaire que l'on a fabriqué dans la situation 3.

Etape 3 : Reconnaître des prismes à partir de leurs représentations en perspective (annexe 3)

A Retenir : On complètera les dessins de l'annexe 4 par les mots bases, arêtes, face latérale, sommet.

Situation 5 : Patron d'un cylindre

On donne plusieurs dessins de patrons (annexe 5.2) Quels sont ceux qui sont des patrons de cylindre ?

Observation : Les élèves disent que certains des rectangles sont trop petits ou trop grands. On parle alors des calculs nécessaires pour s'assurer que la longueur du rectangle est égale au périmètre du disque de base.

A Retenir : Dans le patron d'un cylindre, la longueur du rectangle est égale au périmètre du disque de base $l = 2\pi r$

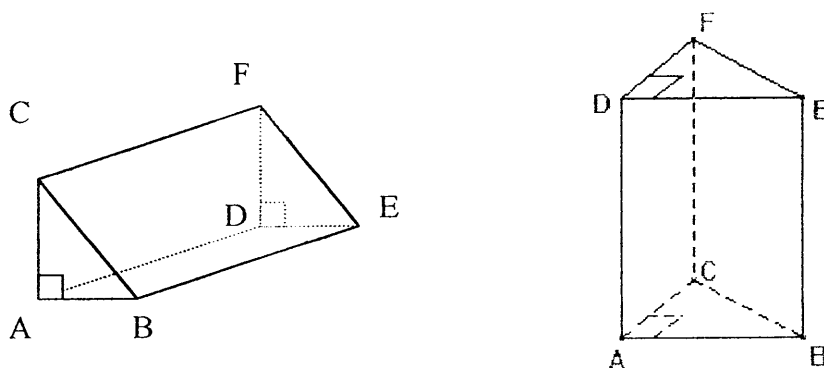
Situation 6 : Dessin en perspective d'un cylindre

On donne plusieurs dessins, quels sont ceux qui peuvent être des représentations en perspective d'un cylindre ? (annexe 5. 1)

Observation : On pourra valider en montrant au rétroprojecteur l'ombre d'un cylindre de plastique transparent (bouteille de coca coupée) où le tour des bases aura été garni de scotch opaque ainsi qu'une hauteur du cylindre.

Situation 7 : Volume d'un prisme

Etape 1 : Voici un prisme dont les bases sont des triangles rectangles. (le professeur montre l'objet) Il est dessiné dans deux positions différentes. Dans chaque groupe vous allez vous mettre d'accord sur une méthode pour calculer le volume de ce prisme et sur les données dont vous allez avoir besoin.



Observation : Les élèves sont par deux. Le professeur apporte deux prismes à bases en forme de triangles rectangles identiques de façon à reconstituer le pavé qu'il montrera dans les groupes où les élèves n'auraient pas l'idée de compléter le prisme. Les informations demandées par les élèves pourront être formulées aussi bien en français (les côtés du triangle, la hauteur) qu'en utilisant les lettres (AB, BE, ...)

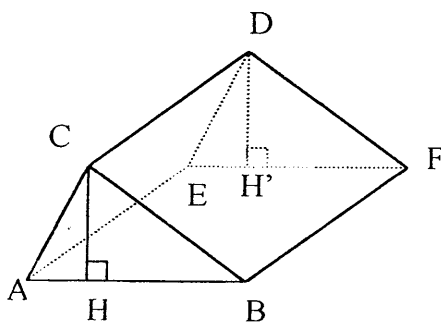
Des élèves confondent la hauteur du prisme AD et la hauteur du triangle AC (voir le dessin de gauche). Lors de la mise en commun, on se mettra d'accord sur ce que l'on appelle la hauteur d'un prisme. Le professeur guide les formulations des élèves pour arriver à une formule du type :

Volume = Aire du triangle x Hauteur du prisme

Avant d'établir cette formule il y a un travail de transformation d'écriture à faire (sur les nombres) pour passer de :

$$\frac{AB \times AC \times CD}{2} \quad \text{à} \quad \frac{AB \times AC}{2} \times CD$$

Etape 2 : Même consigne pour un prisme dont les bases sont deux triangles quelconques. Le voici dessiné ci dessous.



Observation : Le professeur pourra montrer deux prismes dont les bases sont des triangles rectangles permettant de reconstituer le prisme ABCDEF et éventuellement pour les élèves qui en auraient besoin les deux autres prismes permettant de reconstituer le pavé. Deux méthodes apparaissent, utiliser la formule établie à l'étape précédente sur les deux prismes ACHEDH' et CHBFDH' ou bien reconstituer un pavé et recommencer le raisonnement comme à l'étape précédente.

On arrive à des formules du type :

Volume = Aire de AHC x CD + Aire de BHC x CD

Que l'on transformera en :

Volume = (aire de AHC + aire de BHC) x CD

Puis en :

Volume = aire de ABC x CD

A Retenir :

Volume d'un prisme

$V = \text{aire de base} \times \text{hauteur du prisme}$

On demande aux élèves d'admettre que cette formule s'applique pour un prisme à base quelconque. On vérifiera que cela fonctionne pour un pavé et un cube.

Remarque : Dans la situation précédente, on utilise le volume du pavé qui n'a été étudié en sixième que pour des dimensions entières ou à la rigueur pour des dimensions du type (3 ; 4 et 1,5) et par comptage . Rien n'est prévu dans les instructions officielles pour étudier la formule du volume d'un pavé dans le cas de dimensions décimales. On admet cette formule et elle devient exigible en cinquième.

Les professeurs qui le souhaitent pourront faire, avant la situation sur le volume du prisme, un exercice où les élèves devront évaluer le nombre de centimètres cubes dans un pavé de dimensions 3,6 cm ; 4,8 cm et 6,3 cm par exemple. Pour cela on passe au dénombrement par comptage du nombre de millimètres cubes, puis on convertit, l'égalité entre un centimètre cube et mille millimètres cubes étant connue depuis la sixième. On admet ensuite que la formule se généralise à toutes les dimensions possibles pour les arêtes d'un pavé.

Situation 8 : Réinvestissement du volume du pavé :

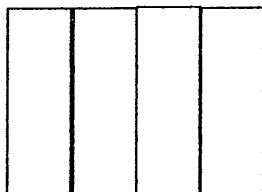
Avec une feuille format 24 x 32, on fabrique deux prismes à bases carrées

1) en pliant la feuille suivant la longueur

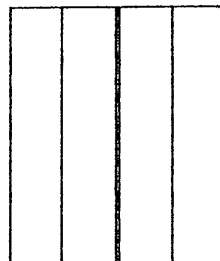
2) en pliant la feuille suivant la largeur

Les deux prismes obtenus ont ils le même volume ? Sinon quel est le plus grand des deux ?

1)



2)



Observation : Les élèves disent que les deux prismes ont le même volume puisqu'on les a fabriqués avec la même feuille de papier.

On recommence alors avec une demi feuille, on fabrique les prismes

3) en pliant la feuille suivant la longueur

4) en pliant la feuille suivant la largeur

Si les prismes 1 et 2 ont le même volume, alors 3 et 4 aussi. Or le prisme 4 est la moitié du prisme 2 (même base et hauteur moitié). Donc le prisme 3 devrait avoir un volume deux fois plus petit que le prisme 1. On peut constater que le prisme 3 a un volume 4 fois plus petit que le prisme 1, donc les prismes 1 et 2 n'ont pas le même volume.

Les élèves conjecturent alors que c'est le prisme 1 qui a le plus grand volume et que c'est le double de celui du prisme 2.

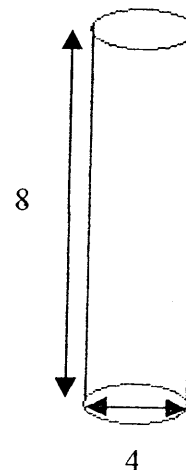
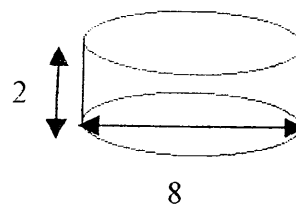
On leur fait calculer les deux volumes en utilisant la formule, le rapport entre les deux volumes est 24/32.

Situation 9 : Volume d'un cylindre.

On donne la formule du volume d'un cylindre

$$\text{Volume} = \text{Aire de base} \times \text{Hauteur} = \pi \times R^2 \times H$$

Comparer les volumes des deux cylindres suivants :



A Retenir :

Volume d'un cylindre

$$V = \text{aire de base} \times \text{hauteur du cylindre}$$

$$V = \pi \times r^2 \times h$$

Exercice : Peut-on rentrer un litre d'eau dans une casserole cylindrique de 14 centimètres de diamètre et de 7 centimètres de hauteur ?

Observation : On profitera de cet exercice pour revoir les tableaux d'unités de volume et de capacité et les conversions.

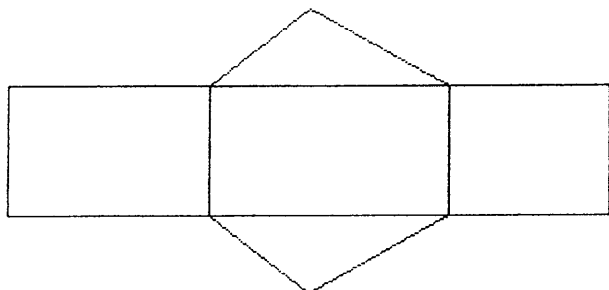
A Retenir : *Tableau de conversion des unités de volume*

$$1 \text{ litre} = 1 \text{ dm}^3$$

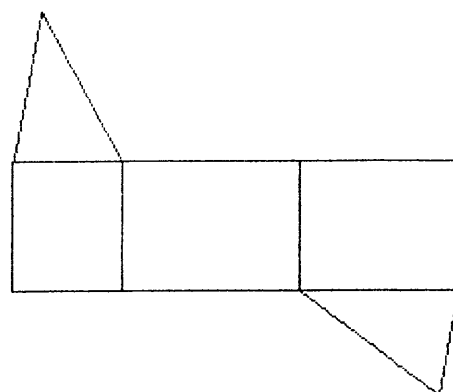
Annexe 1

Parmi les dessins ci dessous, quels sont ceux qui sont des patrons de prismes droits ? Justifier les réponses.

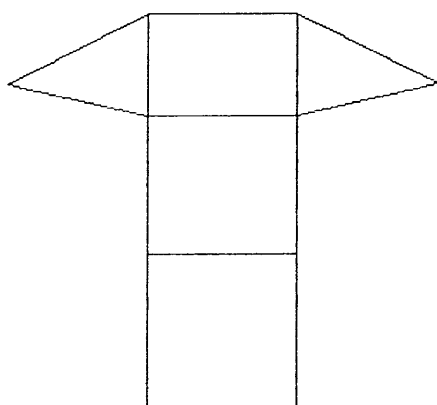
1)



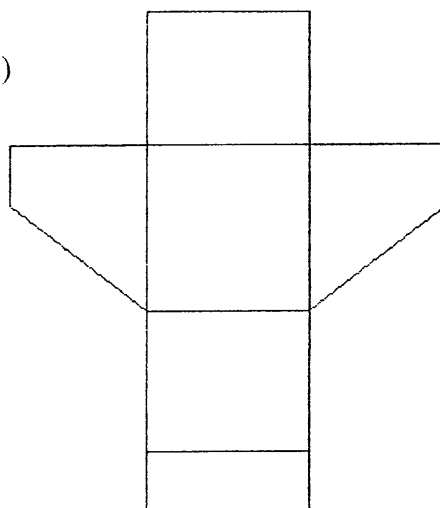
2)



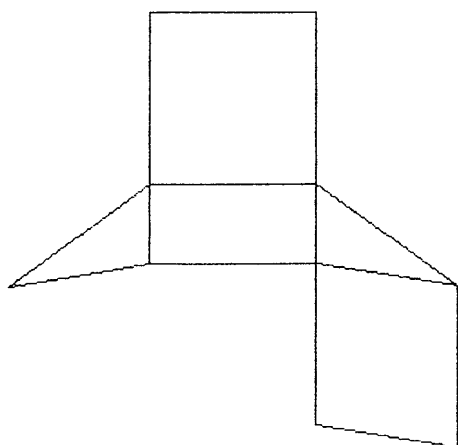
3)



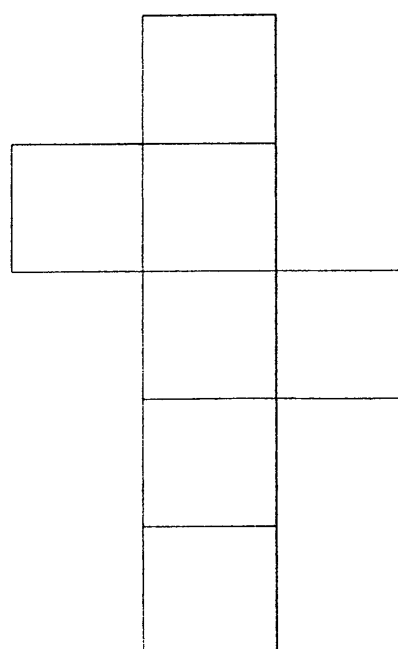
4)



5)



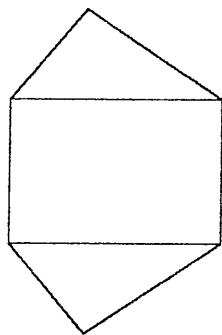
6)



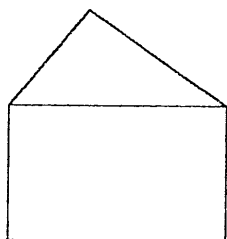
Annexe 2

Quand c'est possible, compléter les patrons de ces prismes droits, sans sortir du cadre.

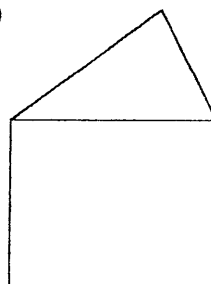
1)



3)



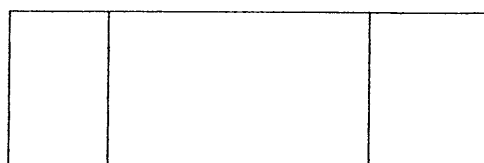
2)



4)

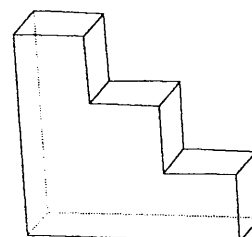
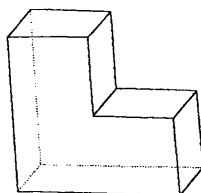
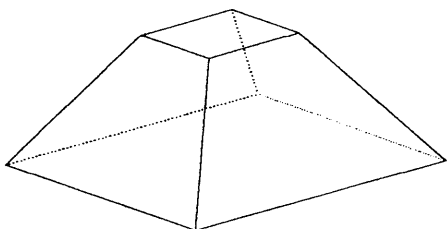
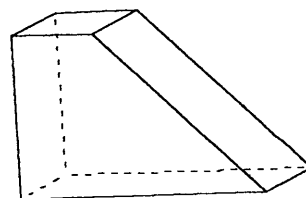
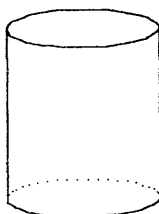
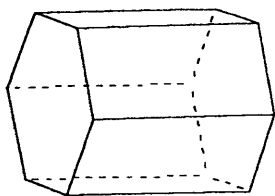
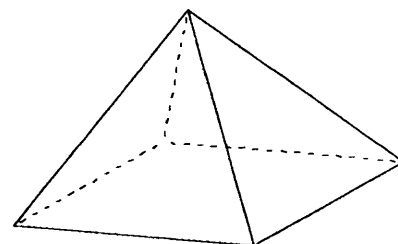
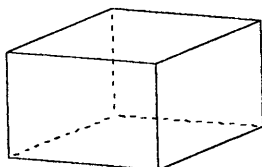
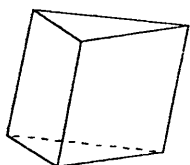


5)



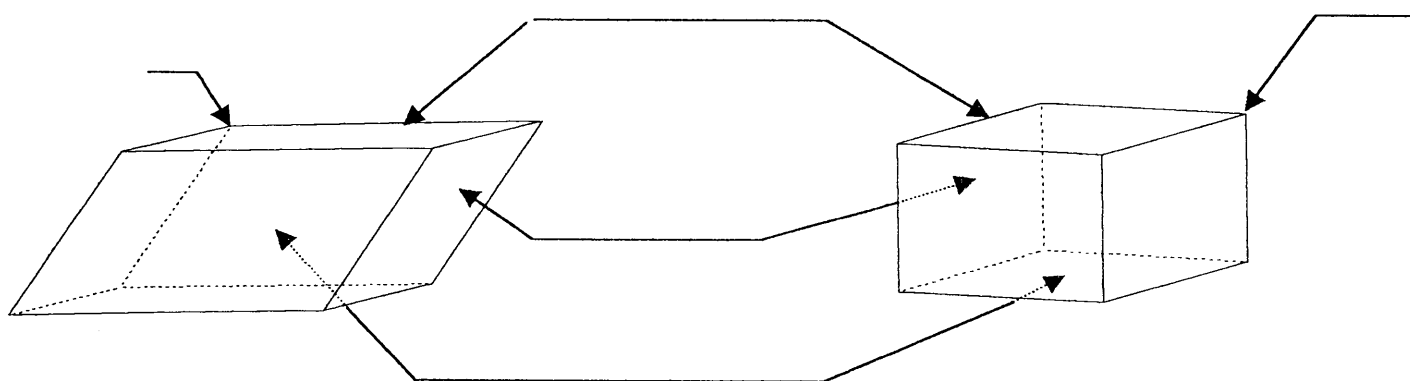
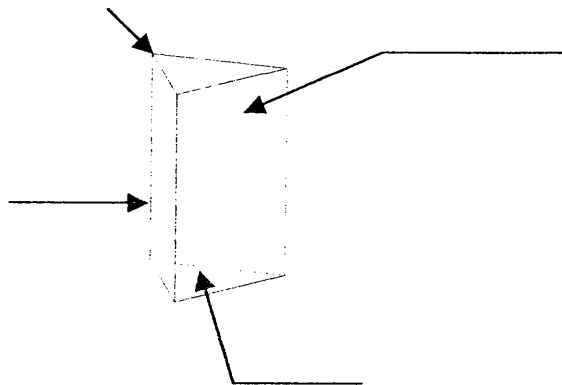
Annexe 3

- 1- Parmi ces solides, certains ne sont pas des prismes droits . Barre-les.
- 2- Quand le solide est un prisme droit , colorie en rouge une base et en bleu une face latérale.
(arrange-toi pour que les couleurs ne se superposent pas) .



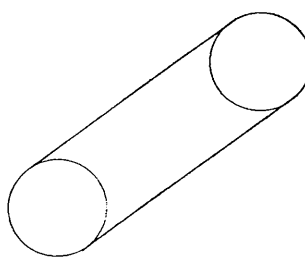
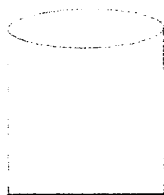
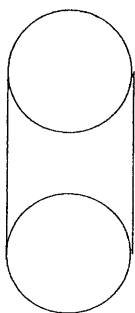
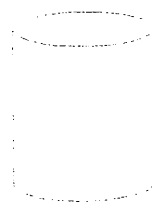
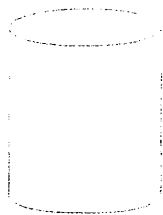
Annexe 4

Compléter les dessins suivants avec les mots : arête ; base ; sommet ; face latérale .

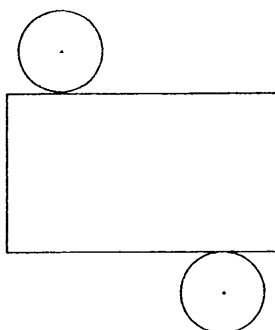
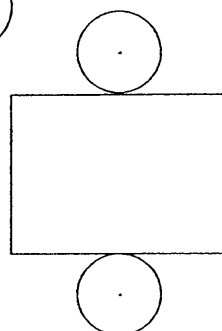
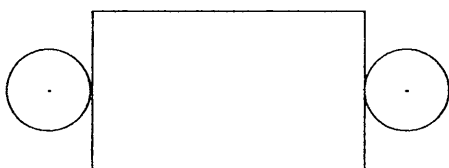
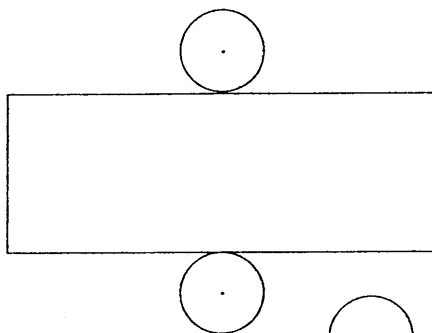
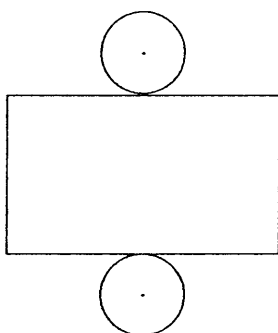


Annexe 5

1- Quels sont les dessins en perspective de cylindre ?



2- Quels sont les patrons de cylindre ?



PROGRESSION POUR LA CLASSE DE 4^{ème}

- 1- Algèbre 1 :
 - opérations avec des nombres relatifs (addition et soustraction)
 - distributivité
 - calcul littéral : ex : $2x + 3x = 5x$
 - égalités
 - «petites équations » $ax = b$; $a + x = b$.
- 2- Raisonner en utilisant des résultats connus sur les triangles et les quadrilatères .
- 3- Multiplication et division des nombres relatifs (en option la notion d'inverse) .
- 4- Triangle rectangle et cercle .
- 5- Opérations sur les nombres en écriture fractionnaire .
- 6- Milieux des côtés d'un triangle :
 - théorème de la droite des milieux dans un triangle et sa réciproque .
 - médianes et centre de gravité d'un triangle .
- 7- Algèbre 2 :
 - suppression des parenthèses
 - double distributivité
 - travail sur le carré
- 8- Distance d'un point à une droite :
 - tangente
 - bissectrices d'un triangle
 - hauteurs d'un triangle
- 9- Equations du type $ax + b = cx + d$.
- 10- Théorème de Pythagore .
- 11- Proportionnalité .
- 12- Triangles déterminés par deux parallèles coupant deux sécantes .
- 13- Puissances .
- 14- Cosinus d'un angle aigu .
- 15- Statistiques .
- 16- Translations.
- 17- Ordre et opérations .
- 18- Pyramides et cônes .

1-Raisonner en utilisant les résultats connus sur TRIANGLES ET QUADRILATERES

Savoirs visés :

- Savoir faire une liste de données à partir d'un texte ou d'une figure codée .
- Savoir faire une figure et la coder à partir d'un texte.
- Savoir faire des conjectures à partir d'une figure.
- Apporter des arguments pour convaincre et les organiser en preuve.

Conceptions erronées repérées chez les élèves :

- La preuve est faite en décrivant ce que l'on voit sur la figure ou en mesurant sur la figure, ce qui révèle une conception erronée des objets géométriques confondus avec les dessins matériels.
- Les élèves donnent toutes les propriétés au lieu de la seule utile.
- Confusion entre théorème et réciproque : pour démontrer qu'un quadrilatère est un parallélogramme les élèves disent : « un parallélogramme a des diagonales qui se coupent en leur milieu, c'est le cas ici, donc ce quadrilatère est un parallélogramme. »
- Les élèves croient que toute condition nécessaire est suffisante : pour démontrer qu'un quadrilatère est un losange les élèves disent : « ce quadrilatère a ses diagonales perpendiculaires donc c'est un losange. »

Objectifs :

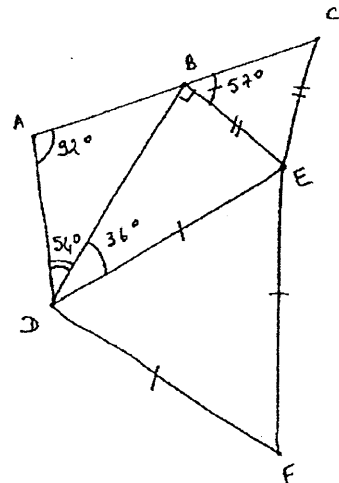
- Dans un premier temps, commencer à savoir donner une preuve géométriquement acceptable même si la forme est à revoir.
- Progresser ensuite dans la forme des démonstrations.
- Même si ce chapitre semble être une répétition du programme de 5^{ème} , il sert à harmoniser les connaissances et les pratiques des élèves. Certaines variables didactiques ont été modifiées afin d'adapter ces situations au programme de 4^{ème} .

Situation 1 : les points alignés

Cette figure est reproduite au tableau ou distribuée aux élèves .

Cette figure a été faite à main levée.

- 1- les points A, B et C sont-ils alignés ? Expliquer pourquoi.
- 2- les points C, E et F sont-ils alignés ? Expliquer pourquoi .



Observations :

- Parfois un élève demande si l'on peut faire la figure et certains répondent « on ne peut pas car on n'a pas les dimensions »...

- Les élèves sont surpris car les points A,B,C ont l'air aligné sur le dessin, de sorte qu'ils ne se hasardent plus à conclure pour les trois autres.

Quelques élèves (peu nombreux) tracent la figure du mieux qu'ils peuvent et constatent l'alignement des points. C'est l'occasion de revenir sur le crédit que l'on peut apporter aux dessins.

$$\widehat{ABD} = 180 - (92 + 54) = 34^\circ$$

$$\widehat{ABC} = 34 + 90 + 57 = 181^\circ \text{ donc les points A, B et C ne sont pas alignés.}$$

$$\widehat{BED} = 90 - 36 = 54^\circ$$

$$\widehat{BEC} = 180 - 2 \times 57 = 180 - 114 = 66^\circ$$

$$\widehat{DEF} = 60^\circ$$

$$\widehat{CEF} = 54 + 66 + 60 = 180^\circ \text{ donc les points C,E,F sont alignés.}$$

Variables : a- On peut donner au départ une longueur, ce qui incite les élèves à réaliser la figure en vraie grandeur.

b- Si on ne l'a pas fait, on peut, à la fin de l'activité, demander aux élèves : « Combien faut-il donner de longueurs (et lesquelles) pour que vous puissiez réaliser la figure en vraie grandeur ? »

A Retenir:

1- Ce que l'on « voit » sur un dessin ne peut être considéré comme une preuve !

2- Rappels des propriétés vues en 6^{ème} et 5^{ème} sur les angles des triangles :

- somme des angles d'un triangle
- propriétés des angles des triangles particuliers.

Situation 2 : quadrilatères incomplets

La fiche en annexe 1 est distribuée aux élèves.

Pour chaque quadrilatère, construire sur les droites déjà tracées :

- un segment de longueur AC
- un segment de longueur BD
- un segment de longueur AD+DC

avec les contraintes suivantes : - ne rien tracer en dehors du cadre

- ne pas utiliser les graduations de la règle

Remarques : - Le professeur choisit de donner les quatre exercices ensemble ou séparément les uns après les autres .

- Nous n'autorisons pas la mesure pour éviter que les élèves ne prennent l'habitude de faire confiance aux relevés numériques qu'ils effectuent sur le dessin.

- Les démarches utilisées seront justifiées oralement en rappelant les propriétés des quadrilatères.

Bilan : tableau récapitulatif sur les propriétés des quadrilatères particuliers (à compléter par les élèves).

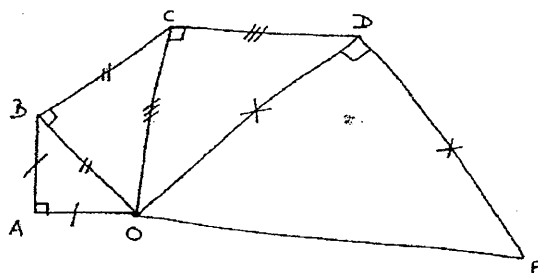
(annexe 2)

Situation 3 : La spirale

Le professeur dessine cette figure codée au tableau à main levée .

Faire des conjectures à propos de cette figure.

Essayer d'apporter des preuves à certaines d'entre elles.



Observations : - Il s'agit de faire différencier par les élèves : les données ,les conjectures, les preuves.(Cela peut être fait en trois temps et écrit à trois endroits différents du tableau, chaque phase demandant un travail écrit des élèves puis une mise en commun du groupe classe). Les échanges sont importants et permettent d'accepter ou de réfuter certaines preuves:

- Cette figure peut être proposée à tous les niveaux (6^{ème}, 5^{ème}, 4^{ème} ou 3^{ème}) mais les preuves et les démonstrations prennent alors des formes de plus en plus construites.

- Cette figure très « riche » permet aux élèves de faire de nombreuses conjectures :

- $(AB) \parallel (OC)$; $(BC) \parallel (OD)$; $(OA) \parallel (CD)$...

- $\widehat{AOC} = \widehat{BOD} = \widehat{COE} = 90^\circ$

- Il y a des angles de 45° , des trapèzes rectangles ...

- Les points A, O, E sont alignés

- «Le triangle OBC est deux fois plus grand que le triangle AOB » (Il est intéressant de faire préciser s'il s'agit des dimensions ? de l'aire ?..)

- Les preuves sont accessibles aux élèves.

On peut organiser avec les élèves un ordre qui facilite un enchaînement des preuves.

On peut ensuite leur demander de tracer la figure et de continuer la spirale en prévoyant l'alignement d'autres points.

Situation 4 : Angles et triangles

Que peut-on dire :

d'un triangle qui a un angle de 48° et un angle de 66° ?

d'un triangle qui a un angle de 66° et un angle de 24° ?

d'un triangle qui a deux angles de 60° ?

d'un triangle isocèle qui a un angle de 60° ?

Observation :

Les preuves peuvent être apportées sans faire les figures ou seulement des figures à main levée.

On travaille ici avec les propriétés suffisantes pour des triangles, on (re)verra plus loin les propriétés suffisantes concernant les quadrilatères particuliers.

A Retenir : 1- Lorsqu'on sait qu'un triangle a deux angles égaux, on est sûr qu'il est isocèle.

2- Lorsqu'on sait qu'un triangle isocèle a un angle de 60° , on est sûr qu'il est équilatéral.

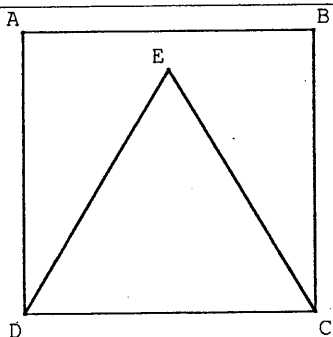
Situation 5 : Le triangle équilatéral dans le carré :

Le texte et la figure sont donnés ensemble .

ABCD est un carré

DEC est un triangle équilatéral

Calculer la mesure de l'angle EAB .



Observations :

Le codage de la figure est à la charge des élèves. Ils ont du mal à « voir » que le triangle ADE est isocèle de sommet principal D : ce triangle n'est en effet pas dessiné dans la position privilégiée et l'un de ses côtés est « vertical ».

Les élèves qui codent les données sur la figure voient plus facilement ce triangle isocèle.

On peut signaler que certains élèves placent E au milieu de [AB] si on ne leur donne pas la figure au tableau.

Situation 6 : Quadrilatères particuliers (conditions suffisantes) :

Il ne s'agit pas de redonner ici toutes les propriétés suffisantes vues en 5ème mais d'en réactiver certaines à l'aide de deux ou trois exercices. (extraits de Hachette 5ème)

1-Tracer un triangle ABC tel que :

$AC=6\text{cm}$, $\widehat{BAC} = 110^\circ$ et $\widehat{ACB} = 35^\circ$

Soit D le point d'intersection de la parallèle à la droite (AC) passant par B et de la parallèle à la droite (AB) passant par C.

Quelle est la nature du quadrilatère ABDC ?

2-Tracer un triangle EFG tel que :

$FG = 8\text{cm}$, $\widehat{EFG} = 65^\circ$ et $\widehat{FGE} = 25^\circ$.

Soit H et I les symétriques respectifs de F et de G par rapport à E.

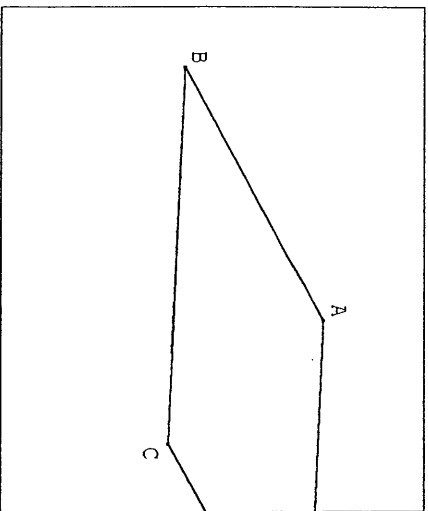
Quelle est la nature du quadrilatère IFGH ?

3-Tracer un losange EFGH de centre O.

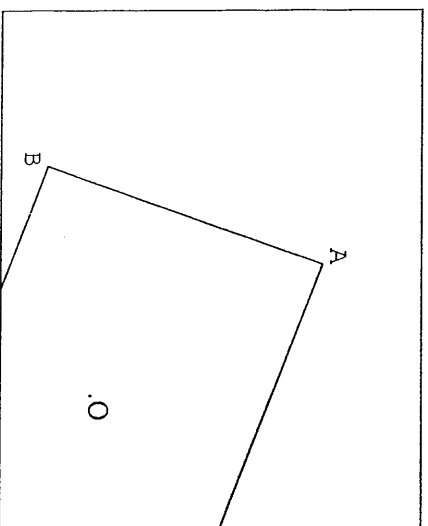
Le cercle de centre O qui passe par E coupe (FH) en M et N.

Quelle est la nature du quadrilatère EMGN ?

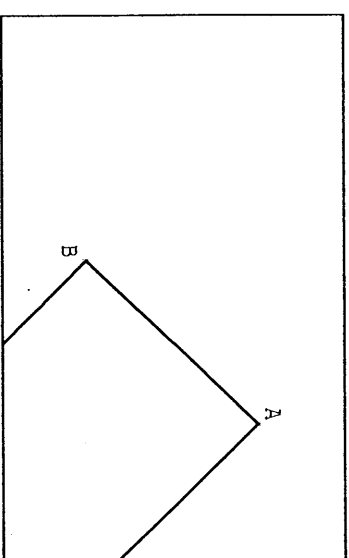
Bilan : On (re)donnera le tableau élaboré avec les élèves en 5^{me}. (annexe 3)



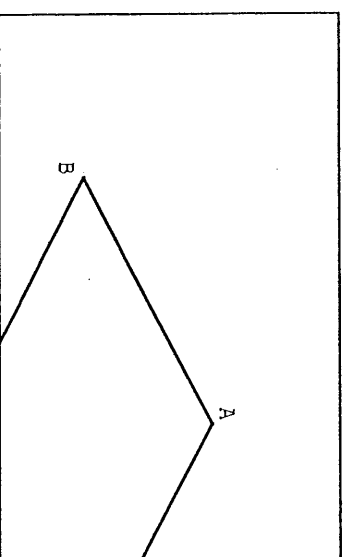
1 - ABCD est un parallélogramme.



3 - ABCD est un rectangle . O est le point d'intersection des diagonales



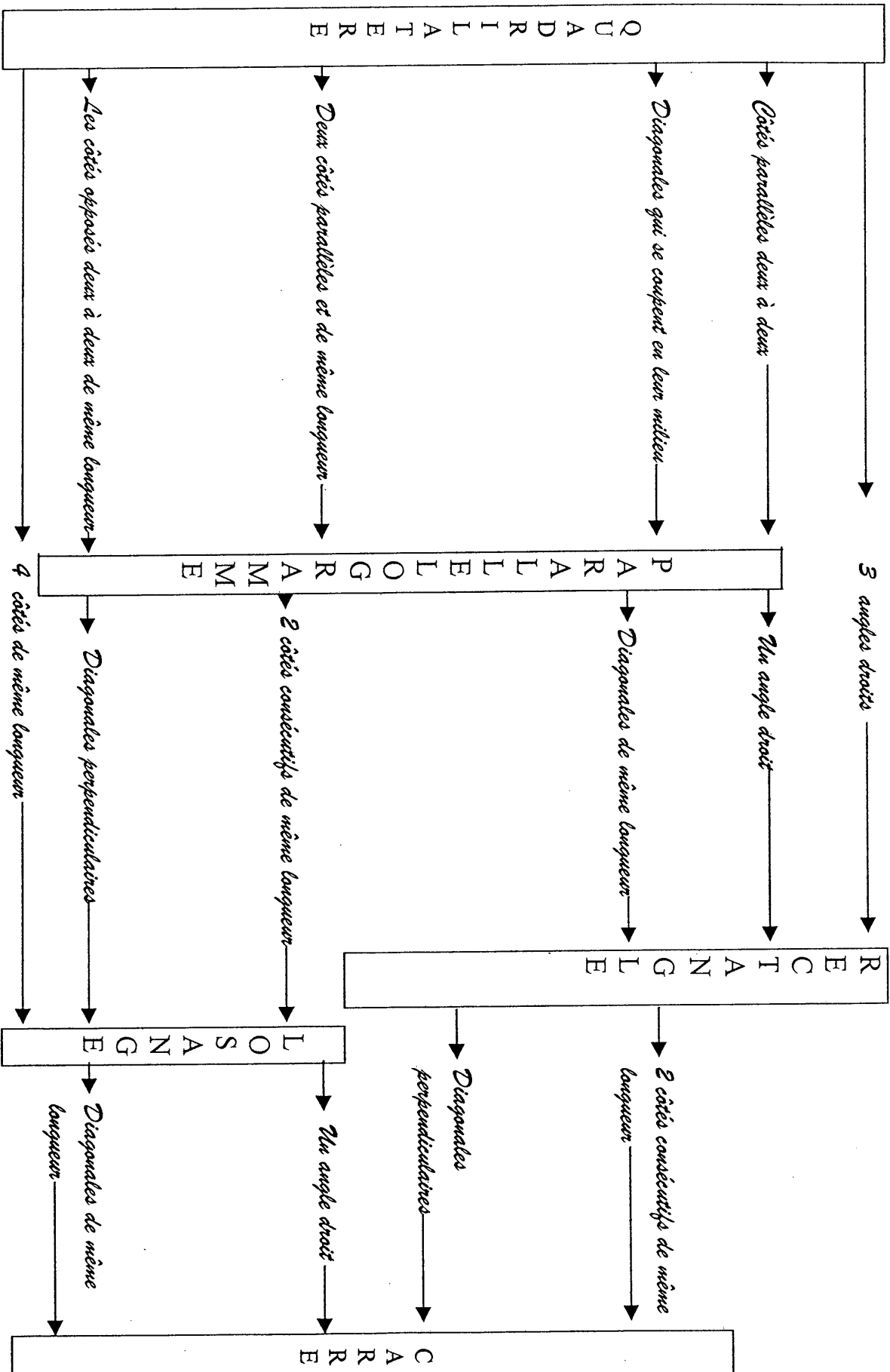
2 - ABCD est un carré



4 - ABCD est un losange

LES PROPRIETES DES QUADRILATERES

alors on peut dire que...	Lorsqu'un quadrilatère est un.....	PARALLE- LOGRAMME	LOSANGE	RECTANGLE	CARRE
	Ses côtés opposés sont parallèles...				
	Ses côtés opposés sont de même longueur				
	Ses 4 côtés sont de même longueur				
	Ses angles opposés sont égaux				
	Ses 4 angles sont droits				
	Ses diagonales ont le même milieu				
	Ses diagonales sont perpendiculaires				
	Ses diagonales sont de même longueur				
	Il possède au moins un axe de symétrie (préciser)				
	Il possède un centre de symétrie				
	Ses diagonales sont les bissectrices des angles				
	Deux angles consécutifs sont supplémentaires				



2- TRIANGLE RECTANGLE ET CERCLE

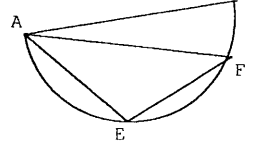
Savoirs visés :

- Connaître pour un triangle rectangle le centre et le rayon de son cercle circonscrit.
- Caractériser les points d'un cercle de diamètre donné par la propriété de l'angle droit.

Conceptions erronées repérées chez les élèves :

Les élèves ont du mal à énoncer le deuxième théorème et à en énoncer toutes les données .

Par exemple : « un triangle inscrit dans un cercle est un triangle rectangle »
ou « un triangle inscrit dans un demi-cercle est un triangle rectangle »
(formulation souvent utilisée mais ambiguë et à la limite incorrecte).



Objectifs :

- Continuer le travail « données-conjectures-preuves-démonstration ».
- Différencier le théorème direct et la réciproque.
- Formuler ces deux théorèmes de différentes façons compréhensibles par les élèves et choisir la formulation la mieux adaptée à un problème donné.
- Utiliser les résultats vus dans le chapitre 1.

Situation1 :

Etape 1 : Etant donnés deux points A et B, combien y a-t-il de cercles passant par A et B ?

Où sont situés leurs centres ?

Observations: Même si cette situation a été proposée en 5^{ème} nous la reprenons de nouveau ici car les élèves ont du mal à reconnaître la notion de médiatrice.

A retenir : 1-On appelle médiatrice d'un segment la droite qui passe par le milieu du segment et qui est perpendiculaire à ce segment.

2-Lorsqu'on sait qu'un point appartient à la médiatrice d'un segment, on peut affirmer qu'il est situé à égale distance des extrémités de ce segment.

3-Lorsqu'un point est situé à égale distance des extrémités d'un segment, on est sûr qu'il appartient à la médiatrice de ce segment.

Etape 2 : Etant donnés trois points A,B,C, combien peut-on tracer de cercles passant par ces trois points ?

Observations : les élèves ne reconnaissent que rarement « le cercle circonscrit au triangle » même s'ils l'ont vu en 5^{ème}. Cette question est bien plus ouverte que « tracer le cercle circonscrit au triangle ABC » ou « tracer le cercle passant par les trois sommets du triangle ABC ».

A Retenir :

- 1- Par trois points non alignés, il passe un cercle et un seul.
- 2- Les médiatrices d'un triangle sont concourantes. Leur point d'intersection est le centre du cercle circonscrit au triangle.

Situation 2 : Cercle circonscrit au triangle rectangle :

Tracer un triangle rectangle et son cercle circonscrit.
Quelles conjectures peut-on faire ?

Observations : On s'attend à ce que les élèves dans leur majorité tracent les médiatrices et constatent qu'elles se coupent « sur un côté » et mieux encore « au milieu de ce côté ».

La conjecture étant émise, nous proposons aux élèves de démontrer et nous leur demandons s'ils ont des idées pour le faire. Deux pistes peuvent émerger :

- a- Soit on complète le triangle par un rectangle.
- b- Soit on trace deux ou trois médiatrices et on prouve qu'elles se coupent au milieu de l'hypoténuse.

On propose alors deux situations allant vers l'une ou l'autre de ces démarches.

Démonstration a :

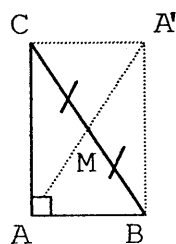
ABC est un triangle rectangle en A

M est le milieu de [BC]. Placer le point A' symétrique de A par rapport à M.

Quelles conjectures peut-on faire ?

Observations : Dans ce cas, les élèves ont déjà conjecturé le rectangle.

Il faut ensuite organiser la démonstration pour conclure que M est le centre du cercle circonscrit au triangle.
M est le milieu de [CB] et M est aussi le milieu de [AA'] (car A' est le symétrique de A par rapport à M), donc ABA'C est un parallélogramme.



De plus ce parallélogramme a un angle droit ($\hat{A}$) donc c'est un rectangle (utilisation des propriétés revues dans le chapitre 1, annexe 3).

Or dans un rectangle, les diagonales sont de même longueur et se coupent en leur milieu donc

$$MA = MB = MC (= MA')$$

M est donc situé à égale distance de A,B,C ; il est par conséquent le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

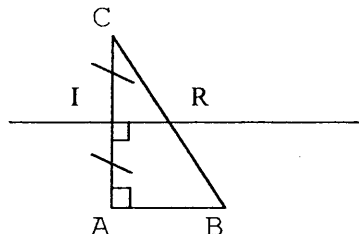
Remarques : - On démontre ici que « si un triangle est rectangle, le milieu de l'hypoténuse est à égale distance des trois sommets ».

- On peut faire remarquer aux élèves qu'il existe un cercle passant par les 4 sommets d'un rectangle, et leur demander s'il en est de même avec tous les quadrilatères. On amorce ici une question qui sera approfondie dans la situation 4.

Démonstration b :

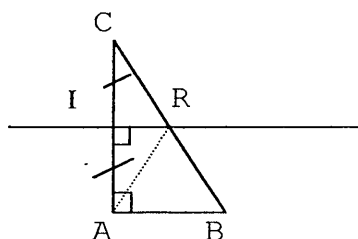
On donne aux élèves la figure suivante ainsi codée .

On leur demande de faire des conjectures.



Observations : les conjectures émises sont :

- (IR) médiatrice de [AC]
- (IR) // (AB)
- $RA = RC$
- RAC triangle isocèle
- RAB triangle isocèle
- R milieu de [BC]
- $\widehat{ACR} = \widehat{CAR}$
- $\widehat{ABR} = \widehat{IRC}$
- $\widehat{IRA} = \widehat{RAB}$
- $\widehat{RAB} = \widehat{RBA}$



Peu d'élèves s'autorisent à tracer le segment [AR].

Les élèves peuvent justifier toutes ces affirmations. On peut les y aider en proposant un ordre qui permet de les enchaîner plus facilement.

Cette démonstration est possible ici avec les angles, sans utiliser le théorème sur « milieux et parallèles » qui sera vu dans le chapitre suivant .

Elle peut être rédigée ou non (selon le niveau de la classe et selon le temps que le professeur désire accorder à cette situation).

Remarques :

- On prouve ici que « si on trace la médiatrice d'un côté de l'angle droit d'un triangle rectangle, cette droite passe par le milieu de l'hypoténuse » : ce qui est un peu différent de la conclusion de la démonstration a.

- On prouve également que le milieu de l'hypoténuse est situé à égale distance des trois sommets du triangle et que, par conséquent, il est le centre du cercle circonscrit.

- Nous avons choisi de formuler le bilan en envisageant deux « points de vue » ; chaque formulation sera plus opérationnelle que l'autre selon les exercices posés par la suite.

A Retenir : 1- Quand on sait qu'un triangle est un triangle rectangle, on peut affirmer que le milieu de l'hypoténuse est à égale distance des trois sommets.

2- Lorsqu'un triangle est un triangle rectangle, on est sûr que le centre de son cercle circonscrit est le milieu de l'hypoténuse.

Ce qui correspond à :

1- $\left. \begin{array}{l} \text{ABC triangle rectangle} \\ \text{M milieu de [BC]} \end{array} \right\} \text{alors } MA = MB = MC$

2- $\left. \begin{array}{l} \text{ABC triangle rectangle en A} \\ \text{M centre du cercle circonscrit} \end{array} \right\} \text{alors M est le milieu de [BC]}$

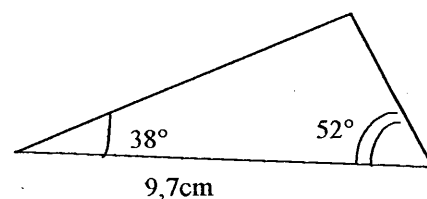
ou

$\left. \begin{array}{l} \text{ABC triangle rectangle} \\ \text{M milieu de [BC]} \end{array} \right\} \text{alors M est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC}$

Remarque : nous ne formulons plus ce théorème en terme de « médiane », cette propriété a disparu des programmes.

Exercices :

1) Combien mesure le rayon du cercle circonscrit à ce triangle ?



2) Tracer un triangle ABC rectangle en A avec $AB = 4,9$ cm et $BC = 10$ cm . Placer I le milieu de [BC] , J le milieu de [AC] et K le milieu de [AB] . L est le symétrique de I par rapport à J et M le symétrique de A par rapport à K . Faire des conjectures sur les quadrilatères ABMI et AICL . Les prouver .

Observation : si les deux quadrilatères semblent être des losanges, un seul l'est. Nous poursuivons ici notre travail sur « l'impression que donne un dessin peut être trompeuse ».

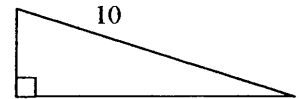
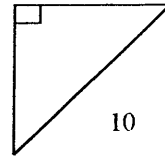
Situation 3 : Triangles rectangles de même hypoténuse :

Tracer deux triangles rectangles de même hypoténuse.
Que peut-on dire de leurs sommets ?

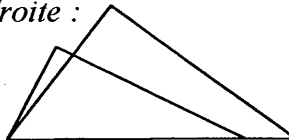
Observations :

- Relever, au tableau, les différents types de dessin tracés par les élèves crée un débat intéressant au sein de la classe.

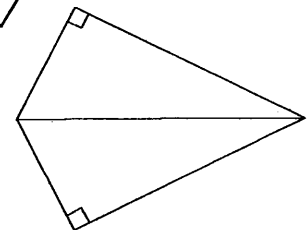
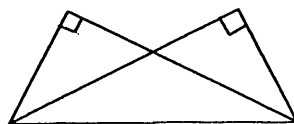
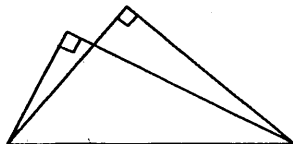
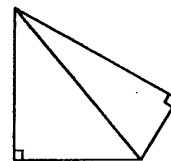
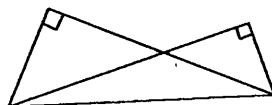
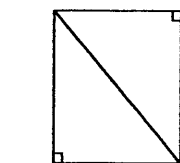
- Certains élèves tracent deux triangles différents avec des hypoténuses de même longueur (confusion segment / longueur).



- D'autres confondent segment et droite :



- Cette consigne amène les élèves à faire diverses figures dont voici quelques exemples :



- Le fait que les quatre sommets soient cocycliques est une propriété commune à ces six cas de figure.

- Il nous semble intéressant d'établir ce résultat en bilan. Les élèves qui le retiendront pourront l'utiliser dans certains exercices et leur tâche sera facilitée car cette démonstration est souvent difficile à rédiger pour eux .

A Retenir : Lorsque deux triangles rectangles ont la même hypoténuse, on peut affirmer que leurs sommets sont situés sur un cercle dont le diamètre est l'hypoténuse commune.

Remarque : Un élève qui utiliserait ce théorème un jour de brevet aurait-il le maximum de points ?

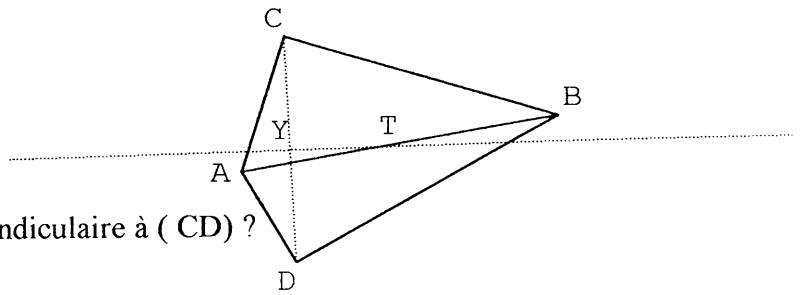
Exercice :

ABC est un triangle rectangle en C

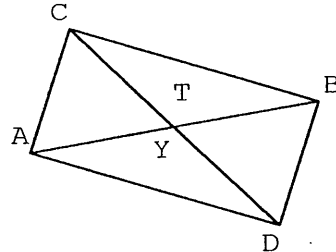
BAD est un triangle rectangle en D

T milieu du segment [AB]

Y milieu de [CD] . Est-ce que (YT) est perpendiculaire à (CD) ?



Remarque : la figure n'est pas donnée et on voit apparaître le cas où ACBD est un rectangle et où $T = Y$, ce qui gêne les élèves .



Situation 4 : points d'un cercle de diamètre donné :

Tracer un cercle de diamètre [AB]

Quel est le point M du cercle pour lequel l'angle $\widehat{AMB}$ est le plus grand possible ?

Observations :

- Quelle que soit la place du point M, l'angle est toujours le même.
- Quelques élèves placent M au centre du cercle (confusion « centre du cercle = point du cercle ») ou encore en A...
- Il s'agit ici de motiver la démonstration de « si M est un point du cercle de diamètre [AB], alors AMB est un triangle rectangle en M »
- On peut induire ici une démonstration utilisant un calcul algébrique sur les angles (ça change un peu !)

AOM triangle isocèle en O donc $\widehat{OAM} = \widehat{AMO} = x$

OBM triangle isocèle en O donc $\widehat{OBM} = \widehat{OMB} = y$

La somme des angles dans un triangle étant égale à 180° :

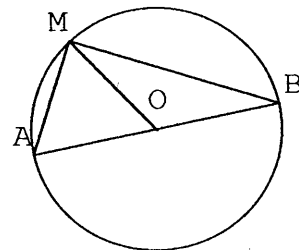
$$x + (x + y) + y = 180^\circ$$

$$\text{donc } (x + y) + (x + y) = 180^\circ$$

$$\text{donc } x + y = 90^\circ$$

Comme $\widehat{AMB} = x + y$, on a $\widehat{AMB} = 90^\circ$. AMB est par conséquent, un triangle rectangle.

Nous demandons aux élèves de formuler le théorème obtenu. La difficulté de la formulation est importante : nous donnons ici 6 formulations différentes: (et il y en a d'autres) .



A Retenir : 1- Lorsqu'on joint un point du cercle aux extrémités d'un diamètre, on obtient un triangle rectangle.

2- Lorsque trois points appartiennent à un cercle et si deux de ces points sont les extrémités d'un diamètre, ces trois points sont les sommets d'un triangle rectangle.

3- Lorsqu'un triangle est inscrit dans un demi-cercle de diamètre l'un de ses côtés, on est sûr que c'est un triangle rectangle.

4- Lorsque le diamètre du cercle circonscrit à un triangle est l'un de ses côtés, alors le triangle est rectangle.

5- Lorsque le milieu d'un côté d'un triangle est à égale distance des trois sommets, on est sûr qu'il est rectangle.

6- Lorsque le point C appartient au cercle de diamètre [AB] alors le triangle ABC est rectangle en C.

Remarques :

- La première formulation a été donnée par des élèves de 4^{ème} en difficulté.
- La dernière est intéressante et « légère » mais, certains élèves ont du mal à changer les « variables » dans une autre situation.
- Il est sans doute profitable de donner aux élèves au moins deux de ces formulations.
- On peut réutiliser cette introduction pour l'angle inscrit en 3^{ème}.

Situation 5 : Triangle rectangle sans équerre

ABC est un triangle rectangle en A avec $BC = 8$ cm et $AB = 3$ cm.
Construire le triangle ABC sans utiliser l'équerre.

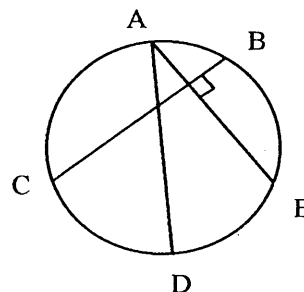
Observation :

Même si les élèves sont capables de tracer un tel triangle en utilisant l'équerre, il nous paraît important qu'ils connaissent aussi cette construction (application du résultat précédent)

Prolongement : Construire un triangle rectangle isocèle dont l'hypoténuse mesure 6 cm, sans utiliser l'équerre.

Exercices

1-Tracer un cercle de diamètre [AD]
[AE] et [BC] sont deux cordes perpendiculaires.
Peut-on affirmer que les droites (BC) et (ED) sont parallèles ?



Remarque : Si cet exercice était posé en devoir, nous considérons que les deux rédactions suivantes (a et b) sont correctes et méritent le maximum de points. Qu'en pensez-vous ?

a) « Lorsque le point C appartient au cercle de diamètre [AB] alors le triangle ABC est rectangle en C ».

« E appartient au cercle de diamètre [AD] donc AED est un triangle rectangle en E.

Les droites (BC) et (ED) sont parallèles car elles sont toutes les deux perpendiculaires à (AE) . »

b) « Comme on joint le point E aux extrémités du diamètre [AD], AED est un triangle rectangle en E.

Je sais que $(AE) \perp (BC)$ et $(AE) \perp (ED)$

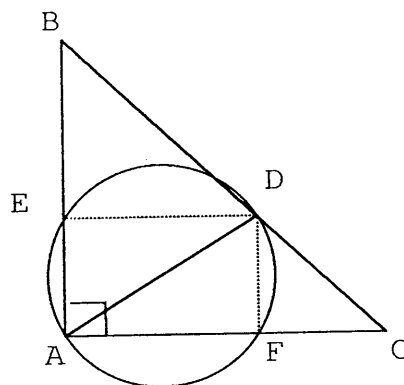
Donc $(BC) \parallel (ED)$ »

2-ABC est un triangle rectangle en A.

D est un point quelconque de [BC].

Le cercle de diamètre [AD] recoupe [AB] en E et [AC] en F.

Démontrer que AEDF est un rectangle.

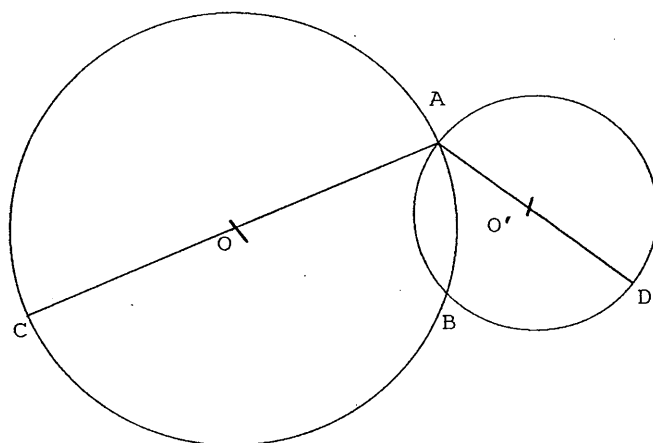


3-Deux cercles de centres O et O' se coupent en A et B.

[AC] est un diamètre du cercle de centre O.

[AD] est un diamètre du cercle de centre O'.

Quelles conjectures peut-on faire ?



Observations : Les conjectures diffèrent selon que les élèves aient tracé des cercles de même rayon ou non.

Les conjectures attendues :

- ABC, ABD, ACD triangles rectangles (ce qui est faux pour ACD).
- OAB, OBC, O'AB, O'BD triangles isocèles (équilatéraux).
- $(OO') \parallel (CD)$.
- C,B,D sont alignés. Cet alignement n'est pas toujours conjecturé par les élèves qui trouvent cela naturel ! (on peut leur poser la question) .
- (OO') est la médiatrice de [AB].
- Cette configuration riche prépare la démonstration que nous avons adoptée pour le chapitre suivant situation 1 .

3- MILIEUX DES COTES D'UN TRIANGLE

Savoirs visés :

- Les trois théorèmes cités dans les programmes :
« Dans un triangle, lorsqu'une droite passe par les milieux de deux côtés, elle est parallèle au troisième »
« Dans un triangle, la longueur du segment joignant les milieux de deux côtés est égale à la moitié de celle du troisième côté »
« Dans un triangle, lorsqu'une droite passe par le milieu d'un côté et est parallèle à un second côté, elle coupe le troisième en son milieu »
- Connaître une définition des médianes et savoir qu'elles sont concourantes.

Conceptions erronées repérées chez les élèves :

- Pas de distinction entre le théorème direct et la « réciproque ».
- Confusion entre médianes, médiatrices, hauteurs et bissectrices.
- Certains élèves appellent la médiane « la diagonale du triangle ».
- D'autres disent que les médianes d'un triangle se coupent en leur milieu.

Objectifs :

- Rendre les élèves capables d'utiliser l'un ou l'autre des trois théorèmes pour démontrer un résultat.
- Poursuivre le travail « données-conjectures-preuves-démonstrations »

Situation 1 : la droite des milieux

Tracer un triangle ABC et placer les milieux respectifs M et N des côtés [AB] et [AC].
Quelles conjectures peut-on faire ?

Observations : les conjectures faites par les élèves sont le plus souvent :

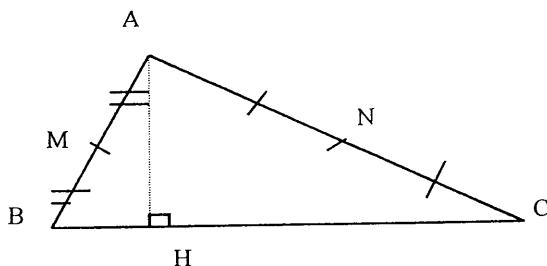
- $(MN) \parallel (BC)$.
- « Le triangle AMN est le même que le triangle ABC mais en plus petit »
- $\widehat{AMN} = \widehat{ABC}$
- Plus rarement apparaît la conjecture: $MN = \frac{BC}{2}$ ou $BC = 2 \times MN$
(si cette conjecture n'apparaît pas, nous la réservons pour la situation 2.)
- Nous voyons aussi apparaître les confusions entre médiane et bissectrice car

quelques élèves conjecturent que (BN) est la bissectrice de $\widehat{ABC}$ et que (CM) est celle de $\widehat{BCA}$.

Démonstration : Il s'agit de démontrer que (MN) est parallèle à (BC).

On peut demander à la classe de quels outils ils disposent pour démontrer que deux droites sont parallèles. La réponse la plus habituelle est « quand elles sont perpendiculaires à une même droite.. ».

Vient alors l'idée de tracer la hauteur issue de A.



A partir de cette figure codée, nous demandons aux élèves de faire de nouvelles conjectures et de les mettre en ordre pour prouver que (MN) est parallèle à (BC) .

Cette activité se trouvera facilitée si l'on a traité avant l'exercice 3 de la fin du chapitre 2.

Les élèves proposent :

- $(MN) \perp (AH)$
- M est à égale distance de A, B, H
- N est à égale distance de A, C, H
- (MN) est la médiatrice de $[AH]$
- $\widehat{AMN} = \widehat{ABC}$

La démonstration peut ensuite être rédigée :

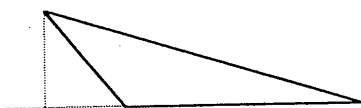
ABH est un triangle rectangle et M est le milieu de l'hypoténuse donc $AM = MH$
de même, dans ACH $NA = NH$

Les points M et N étant deux points situés à égale distance de A et H , la droite (MN) est la médiatrice du segment $[AH]$.

Par conséquent : $(MN) \perp (AH)$

Et comme $(BC) \perp (AH)$, on peut en déduire que les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

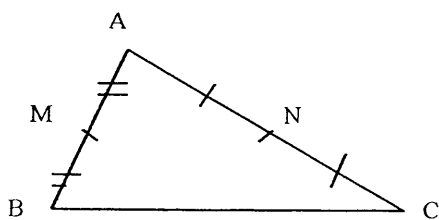
On peut faire remarquer que la démonstration est la même dans le cas de figure suivant :



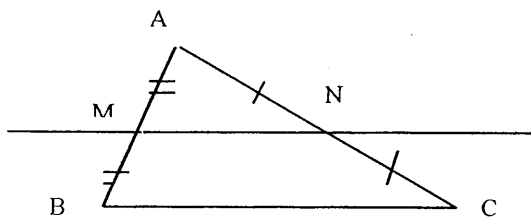
et qu'elle est même plus facile si le triangle ABC est rectangle.

A Retenir :

Dans un triangle, lorsqu'on sait qu'une droite passe par les milieux de deux côtés, on est sûr qu'elle est parallèle au troisième.

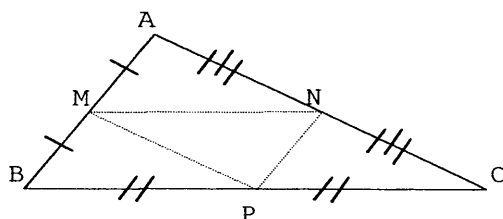


$\left. \begin{array}{l} \text{M milieu de } [AB] \\ \text{N milieu de } [AC] \end{array} \right\} \text{ alors } (MN) \parallel (BC)$



Situation 2 : Triangle des milieux

Tracer un triangle ABC. Placer les points M,N,P milieux respectifs des côtés [AB], [CA], [BC].
Quelles conjectures peut-on faire ?



Observations : Les conjectures proposées par les élèves concernent :

- des droites parallèles
- des parallélogrammes
- des égalités de longueurs
- $BC = 2 \times MN$ (plutôt que $MN = \frac{BC}{2}$)
- des angles égaux
- le partage de ABC en « 4 triangles égaux »

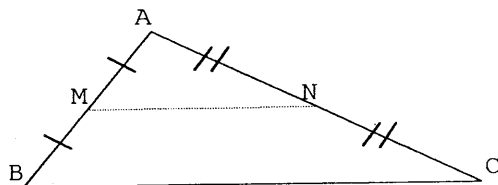
Souvent, un débat s'engage pour décider si le triangle ABC est « deux fois plus grand » ou « quatre fois plus grand » que le triangle MNP ...

Quelques élèves font la conjecture que AMNP est un carré ou un losange . Ces conjectures sont rejetées par l'ensemble de la classe mais permettent de demander à quelles conditions on obtient un losange , un rectangle ou un carré .

Il est alors intéressant de prouver que le triangle MNP est une réduction du triangle ABC à l'échelle $\frac{1}{2}$ et que l'aire de MNP est égale au quart de l'aire de ABC (cela prépare l'effet sur l'aire d'un agrandissement ou d'une réduction qui sera vue en 3^{ème}).

A Retenir :

Dans un triangle, lorsqu'on sait qu'un segment a pour extrémités les milieux de deux côtés, on est sûr qu'il mesure la moitié du troisième côté.



$$\left. \begin{array}{l} \text{M milieu de [AB]} \\ \text{N milieu de [AC]} \end{array} \right\} \text{ alors } MN = \frac{BC}{2} \quad (\text{ou } BC = 2 \times MN)$$

Situation 3 : Le quadrilatère des milieux :

Tracer un quadrilatère ABCD (quelconque) et placer les points M,N,P,Q milieux respectifs des côtés [AB] , [BC],[CD],[DA].
Que peut-on dire du quadrilatère MNPQ ?

Buts :

- Utiliser quatre fois le théorème 1 et « un quadrilatère qui a ses côtés parallèles deux à deux est un parallélogramme »
- On utilise deux fois le théorème 1, deux fois le théorème 2 et « un quadrilatère non croisé qui a deux côtés opposés parallèles et de même longueur est un parallélogramme. (Il peut-être bon de rappeler ici ce théorème car nous en avons besoin dans la situation 5)
- Si des élèves ont tracé un rectangle, un losange ou un carré pour ABCD, la classe sera amenée à débattre du caractère de vérité des conjectures « pour tout quadrilatère ABCD »
- On peut ensuite demander de trouver un lien entre le périmètre de MNPQ et le quadrilatère ABCD et démontrer que :
 $P_{MNPQ} = \text{somme des diagonales de ABCD}$

La situation peut-être poursuivie avec :

« Comment tracer ABCD pour que MNPQ soit un losange ? ». La première idée des élèves est de prendre ABCD rectangle mais on peut les inciter à chercher d'autres types de quadrilatères pour que ABCD soit un losange (La démonstration n'utilise que les diagonales de même longueur) .

On peut encore continuer ... Les élèves posent souvent eux même les problèmes :

« Comment tracer ABCD pour que MNPQ soit un rectangle ? un carré ? ... ».

Situation 4 : L'hexagone obtenu à partir du triangle :

ABC est un triangle

- I et J sont les symétriques respectifs de B et C par rapport à A
- K et L sont les symétriques respectifs de C et A par rapport à B
- M et N sont les symétriques respectifs de A et B par rapport à C

Comparer le périmètre de ABC et celui de IJKLMN. Même question avec l'aire.

Observation : Les élèves trouvent des résultats intéressants et les prouvent assez facilement car ils sont liés à la mesure.

Situation 5 : « Réciproque » du théorème 1

Tracer un triangle ABC. Placer M le milieu de [AB].

Tracer la droite d qui passe par M et qui est parallèle à (BC).

Quelles conjectures peut-on faire ?

Observation : Les élèves conjecturent que d coupe [AC] en son milieu et pensent qu'il s'agit ici du même théorème que le théorème 1.

Bien distinguer les données est alors indispensable.

Démonstration :

- Une possibilité consisterait à placer le milieu N de [AC] et de montrer que ce point est confondu avec le point d'intersection de d et de (AC) grâce à l'axiome d'Euclide. Mais cet axiome n'est pas explicitement au programme du collège et cette démonstration ne nous paraît pas accessible aux élèves

- Autre possibilité :

On trace la parallèle à (AB) passant par C. Elle coupe la droite d en D.

$(MD) \parallel (BC)$

$(MB) \parallel (DC)$

Donc MBCD est un parallélogramme

Donc $MB = DC$

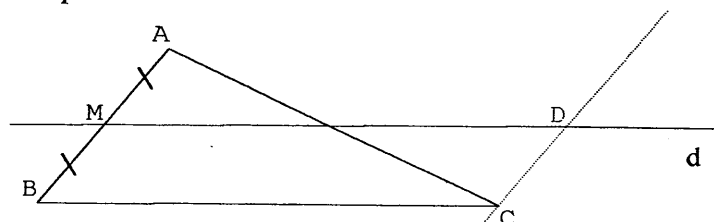
Comme M est le milieu de [AB] on a aussi $MB = AM$.

Par conséquent $AM = DC$.

Le quadrilatère AMCD ayant deux côtés parallèles et de même longueur est un parallélogramme.

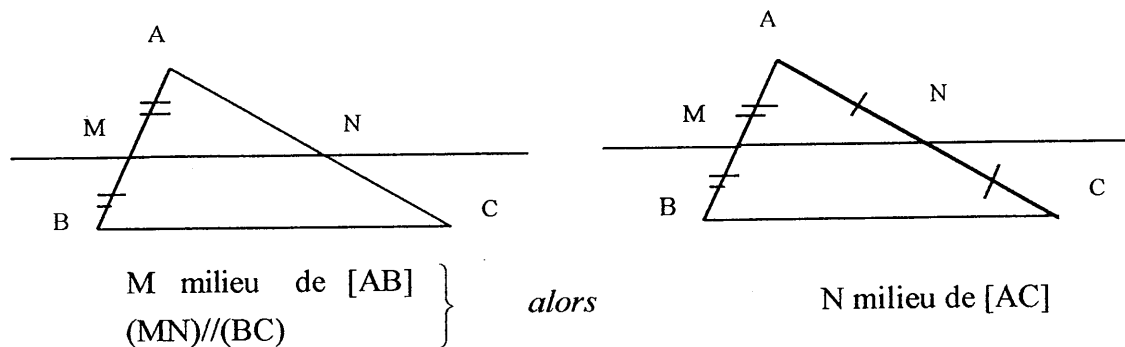
Donc les diagonales de AMCD se coupent en leur milieu et on peut conclure que d coupe [AC] en son milieu.

- Une dernière possibilité serait d'admettre ce théorème !



A Retenir :

Dans un triangle, quand on sait qu'une droite passe par le milieu d'un côté et quand on sait qu'elle est parallèle à un autre côté, on peut affirmer qu'elle coupe le troisième côté en son milieu.



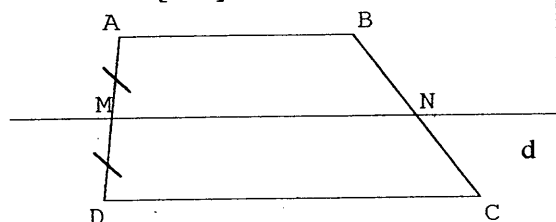
Situation 6 : Le trapèze

ABCD est un trapèze de bases [AB] et [DC]. M est le milieu de [AD]

La droite d passe par M et elle est parallèle à (DC)
d coupe [BC] en N.

Démontrer que N est le milieu de [BC]

et que $MN = \frac{AB + DC}{2}$



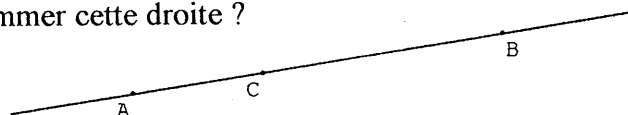
Situation 7 : « Le quart des côtés »

ABC est un triangle tel que $AB = 6 \text{ cm}$; $BC = 8 \text{ cm}$ et $AC = 4 \text{ cm}$.

R est le point de [BC] tel que $BR = 2 \text{ cm}$. La parallèle à (AC) passant par R coupe [AB] en S .
Calculer le périmètre du triangle BRS .

Situation 8 : les médianes .

Etape 1 : Trois points A , B , C sont situés sur une droite. Combien y a-t-il de façons différentes de nommer cette droite ?



Observation : cette situation peut paraître banale mais elle permet de préparer la démonstration qui va suivre. En effet les élèves ont parfois du mal à concevoir que (AB) et (BC) désignent la même droite.

Etape 2 : Tracer un triangle ABC . Placer le point M milieu de [AB] et le point N milieu de [AC] .

Tracer les segments [MC] et [NB] qui se coupent en G .

Quelles conjectures peut-on faire ?

Remarque : il ne nous paraît pas opportun de donner dès le début la définition d'une médiane. Ce mot sera peut-être introduit par certains élèves sinon la définition sera donnée à la fin de la situation .

Observation : les conjectures faites par les élèves sont :

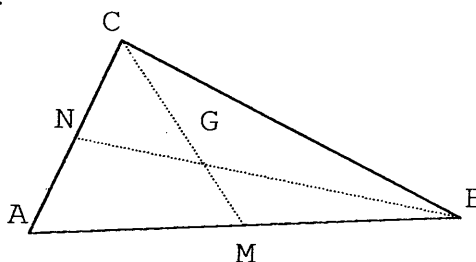
- (MN) // (BC) .

- $MN = \frac{BC}{2}$

- (AG) coupe [BC] en son milieu .

Cette dernière conjecture n'est pas très fréquente.

On peut inciter les élèves à tracer la droite (AG) .



Démonstration : celle-ci étant difficile , nous avons décidé de la détailler.

Etape 3 : Pour démontrer que (AG) coupe [BC] en son milieu , placer le point K symétrique de A par rapport à G .

a) Démontrer que (MG) // (BK) . Que peut-on démontrer de la même façon ?

b) Que peut-on en déduire pour le quadrilatère GCKB ?

c) Conclure .

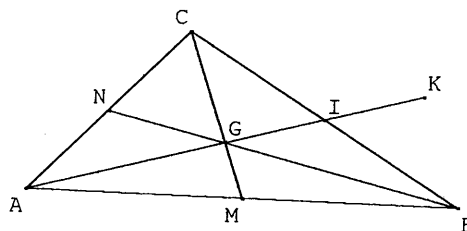
Remarque : On peut demander ensuite : « où est situé le point G sur le segment [AI] ? ».

$$AG = GK$$

$$AG = 2GI$$

$$AI = AG + GI = 2GI + GI$$

$$AI = 3GI$$



Observation : les élèves trouvent que AG est le double de GI ou que GI est trois fois dans AI.

A retenir :

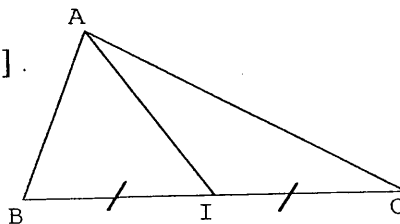
1- On appelle médiane d'un triangle un segment qui joint un sommet au milieu du côté opposé.

2- Dans un triangle, les médianes sont concourantes. Leur point d'intersection s'appelle le centre de gravité.

3- Facultatif : le centre de gravité est situé au deux tiers de chaque médiane en partant du sommet.

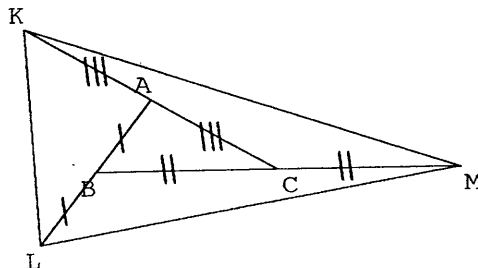
Quelques exercices :

- 1) ABC est un triangle. I est le milieu de [BC].
Comparer les aires de ABI et de ACI.

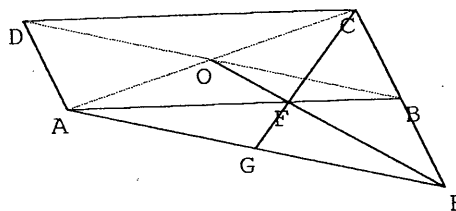


Bilan : Une médiane partage le triangle en deux triangles de même aire.

- 2) (épreuve du kangourou des mathématiques 98)
On a prolongé d'une égale longueur chaque côté du triangle ABC pour obtenir le triangle KLM.
L'aire du triangle ABC est 1.
Quelle est l'aire du triangle KLM ?



- 3) ABCD est un parallélogramme de centre O.
E est le symétrique de C par rapport à B.
(EO) coupe (AB) en F.
(CF) coupe (AE) en G.
Démontrer que G est le milieu de [AE].



La figure est à la charge des élèves.

4- DISTANCE D'UN POINT A UNE DROITE

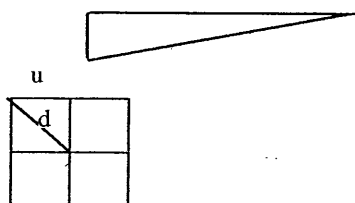
Savoirs visés :

- Théorème de la distance minimum entre un point donné et chaque point de la droite.
- Définition de la tangente en un point donné d'un cercle.
- Construire les hauteurs d'un triangle et plus particulièrement quand il a un angle obtus.
- Connaître une définition des hauteurs et savoir qu'elles sont concourantes.

Conceptions erronées :

- Les élèves pensent parfois que la longueur de l'oblique peut être égale à celle de la perpendiculaire ;

Par exemple :



Pour certains ce triangle est « isocèle »

S'il y a un quadrillage, cela devient parfois $d = u$.

- Pour ce qui est des hauteurs les conceptions erronées sont nombreuses : (voir *annexe 1* : réponses à la question « qu'est ce que pour vous une hauteur d'un triangle ? » posée en début de 4^{ème} avant tout travail sur les hauteurs .) :

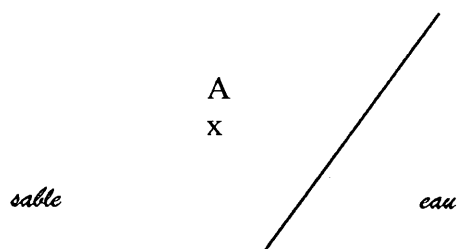
- Une hauteur est forcément verticale .
- Un triangle n'a qu'une hauteur.
- Seuls les triangles isocèles ont une hauteur .
- Les hauteurs extérieures au triangle sont difficiles à imaginer pour beaucoup d'élèves .
- Confusion entre hauteurs, médianes, médiatrices et bissectrices.
- La hauteur est confondue avec le sommet ou avec un côté : problème lié au langage courant.

Objectifs :

- Etudier les positions relatives d'une droite et d'un cercle.
- Continuer notre travail « données, conjectures, preuves, démonstrations ».
- Faire évoluer le statut de la hauteur : la hauteur est considérée comme une longueur qui sert à calculer l'aire d'un triangle. La hauteur devient une droite .
- Réutiliser les propriétés vues en 5^{ème} : propriétés des médiatrices, des parallélogrammes.
- Utiliser ces résultats dans des problèmes.

Situation 1 : Plus courte distance d'un point à une droite :

Demander aux élèves d'imaginer qu'ils sont sur une plage en A et qu'ils veulent aller se baigner ;
Quel est le plus court chemin qu'ils doivent suivre pour aller à l'eau ?



Observations :

Quelques élèves (peu nombreux) pensent qu'il faut suivre un chemin « vertical » ou « horizontal »

Pour convaincre les quelques réticents, on propose une démonstration :

On place le point A' symétrique de A par rapport à la droite d .

d est alors la médiatrice du segment $[AA']$ et $MA = MA'$

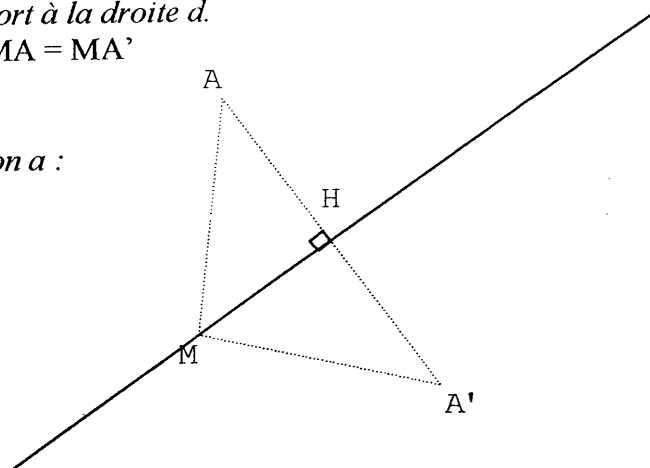
D'après l'inégalité triangulaire (vue en 5^{ème}), on a :

$$AA' < AM + MA'$$

$$2 AH < 2 AM$$

$$AH < AM$$

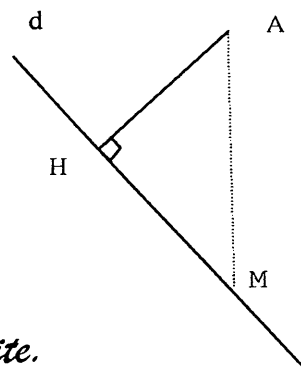
(même si un travail sur l'inégalité n'a pas été fait auparavant, les élèves trouvent facilement cette dernière ligne)



A Retenir : Soit d une droite

Soit A un point n'appartenant pas à d .

La perpendiculaire à d passant par A coupe d en H .



1- La distance AH est la plus petite distance entre le point A et un point quelconque de la droite.

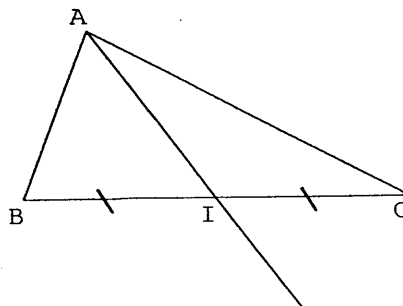
2- Pour tout point M de d ($M \neq H$), on a $AM > AH$.

3- Définition : La longueur AH s'appelle distance du point A à la droite d .

Exercice :

ABC est un triangle. I est le milieu de $[BC]$.

- 1) Comparer les aires des triangles ABI et ACI .
- 2) Comparer la distance de B à la droite (AI) avec celle de C à la droite (AI) .

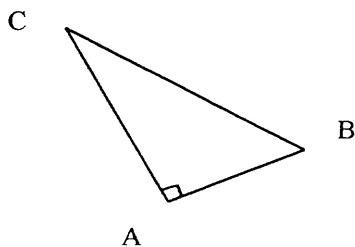


Situation 2 : l'hypoténuse :

Chaque élève trace un triangle ABC rectangle en A .

Peut-on faire une conjecture valable pour toutes les figures de la classe ?

Le démontrer.



Observations : Il s'agit de faire émerger $BC > BA$

$BC > AC$

et de le démontrer en utilisant la propriété précédente.

Il n'est pas si facile pour les élèves d'adapter la propriété en trouvant le « bon point » et la « bonne droite ».

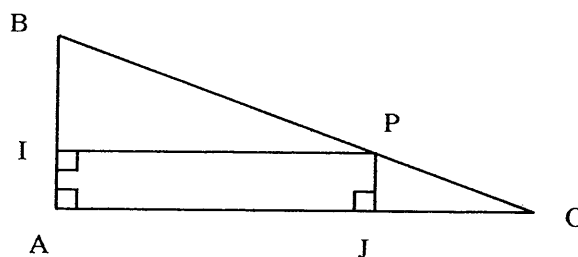
A Retenir :

Dans un triangle rectangle, l'hypoténuse est le plus grand côté.

Situation 3 : « la distance minimum »

Chaque élève reproduit cette figure dessinée au tableau ;

Où doit-on placer le point P sur le segment [BC] pour que la longueur IJ soit la plus petite possible ?



Observations :

Certains élèves pensent qu'il faut placer le point P au milieu de [BC]. On peut les inciter à faire d'autres essais.

D'autres élèves, en plaçant plusieurs points P et en mesurant, découvrent que P doit être, à peu près, le pied de la hauteur issue de A.

La démonstration est alors intéressante à rédiger et on peut faire remarquer aux élèves qu'on est parfois amené à remplacer un problème par un problème équivalent: « IJ minimum » revient en fait à « AP minimum ».

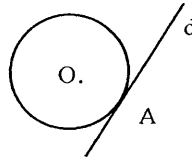
Situation 4 : Positions relatives d'un cercle et d'une droite.

Trouver toutes les positions qu'une droite et un cercle peuvent occuper l'un par rapport à l'autre.

Observations :

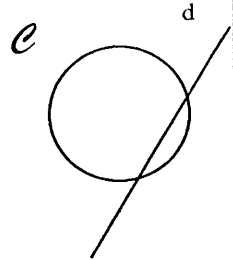
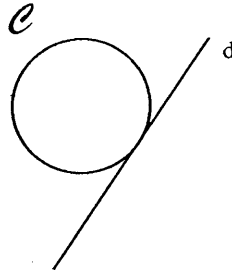
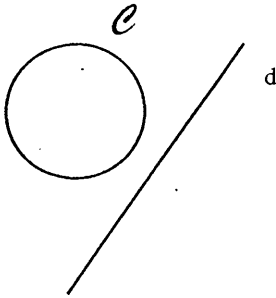
Il est possible que les élèves trouvent quatre cas : zéro, un, deux ou trois points communs. Ils trouvent trois points communs si la droite passe par le centre du cercle, ce qui dénote qu'ils considèrent le centre du cercle comme un point du cercle.

Dans le cas de figure ci-contre, certains ne sont pas persuadés qu'il n'y a vraiment qu'un point d'intersection.



S'il y en avait un autre A' , d'après la propriété vue plus haut, on aurait $OA' > OA$ donc le point A' serait extérieur au cercle.

A Retenir : Il y a trois cas de figure pour les positions relatives d'un cercle C et d'une droite d .



On peut traduire ces trois cas en terme de distance du centre O à la droite d qui est supérieure, égale ou inférieure au rayon du cercle.

A Retenir :

Soit un cercle de centre O et un point M de ce cercle .

On appelle tangente au cercle en M la droite perpendiculaire en M à (OM).

Elle n'a qu'un point commun avec le cercle.

Situation 5 : Les tangentes à un cercle passant par un point

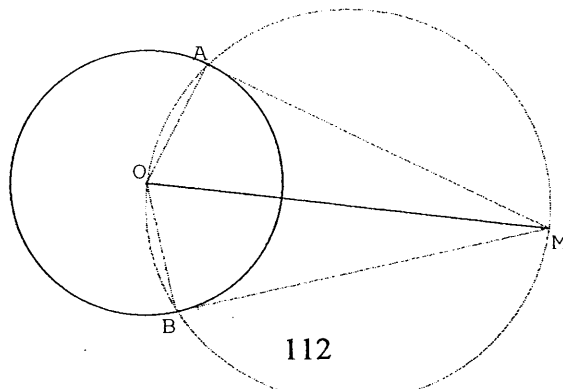
Soit C un cercle de centre O.

Soit M un point extérieur au cercle C.

Le cercle de diamètre [OM] coupe le cercle C en deux points A et B

Quelles conjectures peut-on faire ?

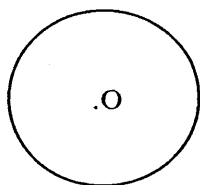
Les élèves ont à leur charge le tracé des segments [OA] , [OB] , [AM] , [MB]



Conjectures :

- OAB triangle isocèle, ABM triangle isocèle..
- OAM, OBM triangles rectangles...
- (OM) axe de symétrie de la figure
- des égalités d'angles
- (AM) tangente au cercle en A (peu conjecturé)
- (BM) tangente au cercle en B (peu conjecturé)
- BOAM est un losange (discussion : rejet par certain, « cela dépend de la figure... »)

Prolongement : Vous savez approximativement comment tracer les deux tangentes à un cercle passant par un point extérieur. Trouver ici une construction plus précise pour déterminer les points de contact du cercle avec ses deux tangentes passant par le point K.

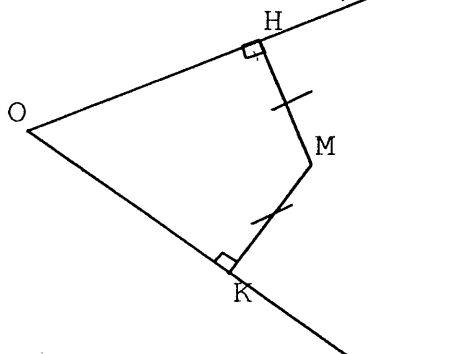


Observations :

- Si on demande aux élèves de trouver cette construction sans avoir fait la situation précédente auparavant, ils ne pensent pas par eux même à tracer le cercle de diamètre [OK] ; nous l'avons expérimenté !
- Les élèves font facilement un tracé approximatif mais il peut être intéressant de réinvestir ici la situation 5 du chapitre 2 qui donnera une construction de la tangente justifiée (même si elle n'est pas beaucoup plus précise que l'autre).

Situation 6 : Points situés à égale distance des côtés d'un angle :

A partir de cette figure codée , quelles conjectures peut-on faire ?



Remarque : La propriété n'est pas explicitement au programme mais permet de démontrer que les bissectrices sont concourantes.

Observation :

Les élèves font de nombreuses conjectures :

- MHK est isocèle.
- OKM et OMH sont « identiques ».
- angles égaux.
- (OM) est un axe de symétrie de la figure.
- (OM) est la bissectrice de l'angle $\widehat{KOH}$
- $OK = OH$
- OKH isocèle....

S'ils ne pensent pas à tracer $[KH]$, on peut donner un petit « coup de pouce ».

On peut alors organiser la démonstration qui permet de prouver que M appartient à la bissectrice de l'angle $\widehat{HOK}$:

$MH = MK$ donc MKH est isocèle en M

Par conséquent $\widehat{HKM} = \widehat{KHM}$

D'où $\widehat{OKH} = \widehat{OHK}$ (complémentaires du même angle)

On en déduit que OKH est isocèle en O .

et M étant situés à égale distance de K et H , (OM) est la médiatrice de $[KH]$.

Or dans un triangle isocèle, la médiatrice de la base est aussi la bissectrice de l'angle du sommet principal.

Donc M est sur la bissectrice de $\widehat{HOK}$.

A Retenir :

Quand un point est situé à égale distance des côtés d'un angle, on peut dire qu'il appartient à la bissectrice de cet angle.

On peut ensuite admettre la réciproque (ou la démontrer avec le même type de démonstration)

A Retenir :

Quand un point appartient à la bissectrice d'un angle, on peut dire qu'il est situé à égale distance des côtés de l'angle.

Situation 7 : Point de concours des bissectrices d'un triangle.

Tracer les bissectrices des angles d'un triangle.

Quelles conjectures peut-on faire ?

observations : Les élèves conjecturent facilement qu'elles sont concourantes .

On peut le démontrer (comme on l'a fait en 5^{ème} pour les médiatrices) en traçant deux bissectrices et en prouvant que leur point d'intersection appartient à la troisième.

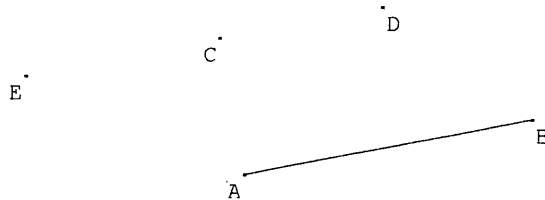
A Retenir :

Dans un triangle, les trois bissectrices sont concourantes.

Situation 8 : les hauteurs d'un triangle

1-

- a) Tracer la perpendiculaire à la droite (AB) passant par C .
- b) Tracer la perpendiculaire à la droite (AB) passant par D .
- c) Tracer la perpendiculaire à la droite (AB) passant par E .



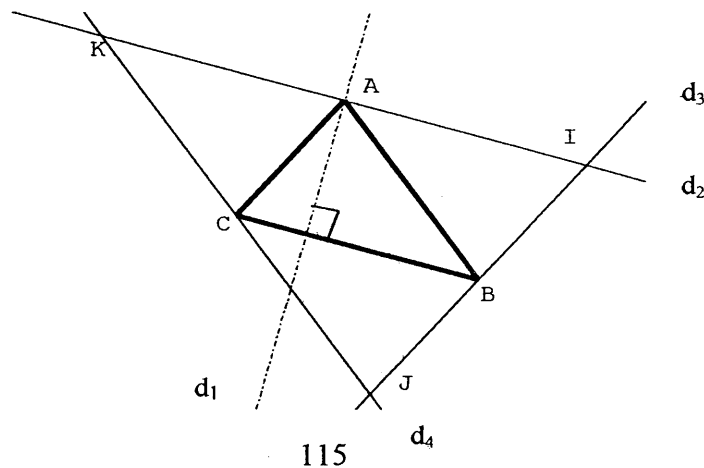
- 2- Tracer un triangle ABC . Tracer la droite passant par le point A et perpendiculaire à la droite (BC) .

Observation : les trois cas de figure doivent apparaître sinon le professeur propose le cas qui n'est pas apparu.

A Retenir : On appelle hauteur d'un triangle une droite qui passe par un des sommets et qui est perpendiculaire au côté opposé.

3-

- Tracer un triangle ABC non rectangle .
Tracer la droite d_1 passant par A et qui est perpendiculaire à (BC) .
Tracer la droite d_2 passant par A et parallèle à (BC) .
Tracer la droite d_3 passant par B et parallèle à (AC) .
Tracer la droite d_4 passant par C et parallèle à (AB) .
 d_2 et d_3 se coupent en I , d_2 et d_4 se coupent en K , d_3 et d_4 se coupent en J .
Quelles conjectures peut-on faire ?



Observations : les conjectures faites par les élèves sont :

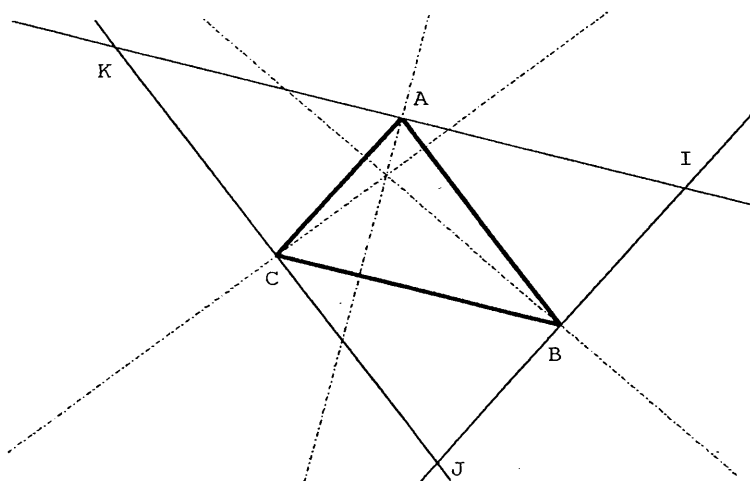
- d_1 est une hauteur.
- A est le milieu de $[IK]$; B est le milieu de $[IJ]$ et C est celui de $[JK]$.
- Des droites parallèles .
- Des parallélogrammes.
- d_1 est la médiatrice de $[IK]$.
- On retrouve le même triangle quatre fois .
- Le triangle IJK est deux fois plus grand que ABC . On trouve également qu'il est quatre fois plus grand .

Les justifications sont données oralement et peuvent être rédigées selon le temps que le professeur désire y consacrer.

Bilan : La hauteur issue de A est aussi la médiatrice de $[IK]$.

4-

Tracer la hauteur issue de B et celle issue de C dans le triangle ABC . Quelles conjectures peut-on faire ?



Observations : conjectures :

- Les hauteurs du triangle ABC sont aussi les médiatrices des côtés du triangle IJK .
- Les hauteurs sont concourantes .

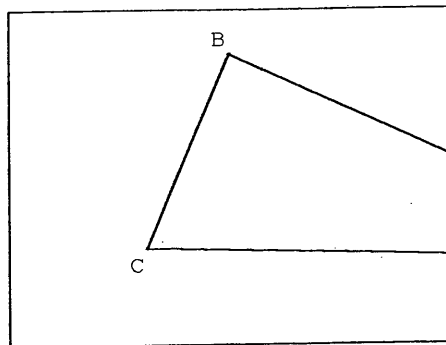
A Retenir : 1- Dans un triangle les trois hauteurs sont concourantes .
2- Leur point d'intersection s'appelle l'orthocentre du triangle .

Exercices :

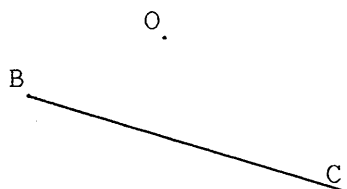
Remarque : On arrive à d'autres points de vue de la hauteur :

- comme droite passant par l'orthocentre et perpendiculaire à un côté .
- comme droite passant par l'orthocentre et un sommet.

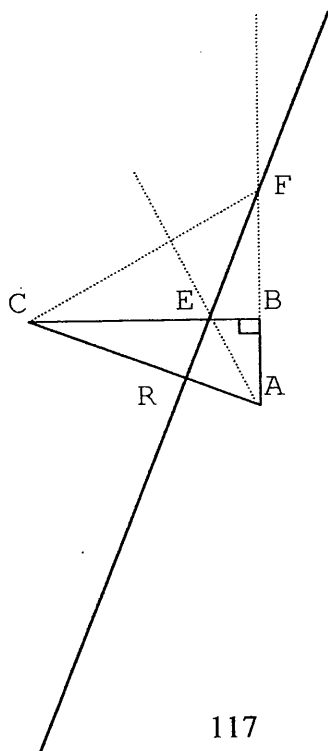
- 1) ABC est un triangle .
 Construire la hauteur issue du sommet A sans
 sortir du cadre .



- 2) O est l'orthocentre du triangle ABC .
 Construire le sommet A .

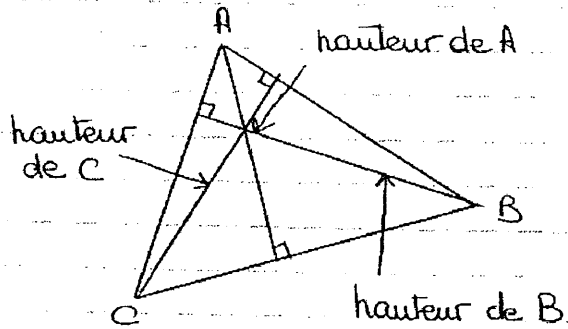


- 3) ABC est un triangle rectangle en B . R est un point du segment $[AC]$.
 Tracer la droite qui passe par R et qui est perpendiculaire à la droite (AC) . Cette droite coupe
 la droite (AB) en F et la droite (BC) en E .
 Démontrer que les droites (CF) et (AE) sont perpendiculaires.



Qu'est ce que pour vous la hauteur d'un triangle ?

la hauteur d'un triangle c'est

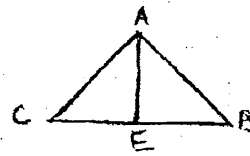


la plus grande hauteur de chaque hauteur.

Mathilde.

Audrey

une hauteur :



la hauteur est AE.

Siid

un sommet d'un triangle
Sommet = hauteur



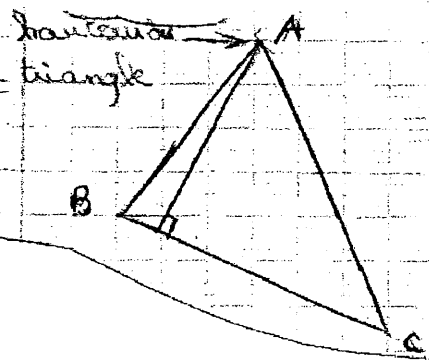
Sami

La hauteur est le segment qui part du milieu de la base d'un triangle au sommet.

etna. Charlotte :

qu'est ce que pour vous la hauteur d'un triangle ?

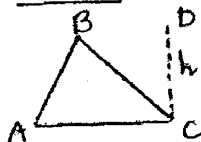
la hauteur d'un triangle, c'est son sommet.



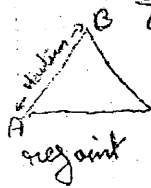
Emmanuelle Qu'est-ce que pour une hauteur d'un triangle?

Elle fait un angle droit avec le plus petit côté. 

Résumé:



La hauteur d'un triangle est une droite qui part d'un point de la base, C, en formant un angle droit, ACD.

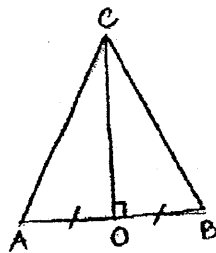


Giovanni

et un bout de segment ^[AB] situé à l'angle du point [AC] largeur, la plupart du temps il y a 2 hauteurs qui sont rejoint par un côté appelé largeur.

Eve

Une hauteur d'un triangle est une médiatrice d'un des côtés du triangle.



$$CD \perp AB$$

$$AD = DB$$

$$CA = CB$$

5- THEOREME DE PYTHAGORE

Savoirs visés :

- Connaître la propriété de Pythagore et sa réciproque.
- Savoir calculer la longueur d'un côté d'un triangle rectangle à partir de celles des deux autres.
- En donner, s'il y a lieu, une valeur approchée en faisant éventuellement usage de la touche d'une calculatrice.



Objectifs

- Il semble très difficile de faire conjecturer la propriété de Pythagore. Aussi nous proposons une situation qui mène à sa découverte par des calculs algébriques sur les aires.
- Distinguer la propriété de Pythagore, sa contraposée et sa réciproque.

Prérequis : Savoir développer $(a+b) \times (c+d)$.

Conceptions erronées :

- confusion entre propriété, contraposée et réciproque.
- $\sqrt{a^2+b^2} = a+b$
- confusion : carré/ double
racine carrée/ moitié
- Utilisation de la propriété de Pythagore dans des triangles non rectangles.
- Le « carré » du côté que l'on cherche est la somme des « carrés » des côtés que l'on connaît. (théorème élève)
- Dans certains exercices, les élèves préfèrent utiliser des calculs longs et approchés avec le cosinus plutôt que la propriété de Pythagore (ce qui est normal si on a vu le cosinus avant).

Remarque : On n'écrit pas le titre du chapitre pour ne pas orienter les élèves, le théorème de Pythagore étant « socialement » connu.

Situation 0 :

Avec deux carrés de côté 1 dm coupés en deux selon une diagonale, construire un carré « sans trou ».

Remarques :

- On démontre de cette façon que l'on obtient un carré qui a pour aire 2 dm^2 et donc pour côté $\sqrt{2} \text{ dm}$. On est alors amené à discuter de la nature de ce nombre et en particulier à expliquer pourquoi il n'est pas décimal.
- Cette situation est inspirée d'une situation beaucoup plus détaillée dans l'ouvrage d'Annie Berté : « Mathématiques dynamiques ».

Situation 1 : Les quatre triangles rectangles identiques

Cette situation se déroule en 3 temps :

1- Découper quatre triangles rectangles identiques et les disposer de façon à obtenir un carré. (Il peut y avoir un « trou »).

Observations : On peut proposer cette manipulation en travail préalable à la maison.

Voici les deux carrés obtenus par les élèves :

Figure 1 :

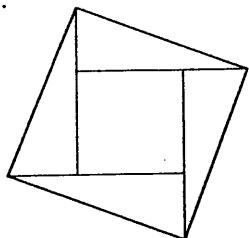
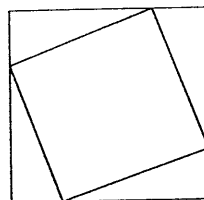
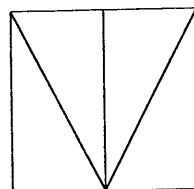


Figure 2 :

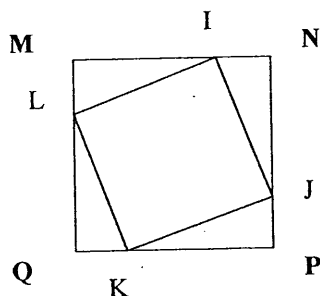


Pour ne pas avoir de « trou », des élèves tracent des triangles rectangles dont un côté de l'angle droit mesure la moitié de l'autre et obtiennent :



Le professeur doit donc bien préciser que l'on veut un carré valable pour n'importe quels triangles rectangles choisis au départ.

2- Nous allons étudier la figure 2 après avoir nommé les sommets des quadrilatères.
Prouver que $MNPQ$ et $IJKL$ sont des carrés.



Observations :

Les élèves prouvent facilement que $MNPQ$ est un carré (quatre angles droits et quatre côtés égaux). On peut revenir ici sur les conditions suffisantes pour qu'un quadrilatère soit un carré.

Ils ont parfois plus de mal à prouver que $IJKL$ est un carré. On peut alors leur donner un « coup de pouce » : prouver que $\widehat{LIJ} = 90^\circ$, ce qui peut se démontrer en utilisant les angles complémentaires dans un triangle rectangle.

3- On nomme a, b, c les longueurs des côtés de chaque triangle rectangle.
Ecrire en fonction de a, b, c et de plusieurs façons différentes, l'aire du carré $MNPQ$.

Observations : Les écritures sont nombreuses et intéressantes

- $\frac{a \times b}{2} \times 4 + c \times c$
- $2 \times (a + b) + c^2$ (si on groupe les triangles par deux pour obtenir un rectangle)
- $\frac{(a + a) \times b}{2} + c^2$ (si on groupe les triangles rectangles par deux pour obtenir un triangle isocèle)
- $(a + b)^2$
- $(a + b) \times (a + b)$
- $a^2 + ab + ba + b^2$
-

Cette richesse d'écriture mérite d'être exploitée, discutée et validée en classe.

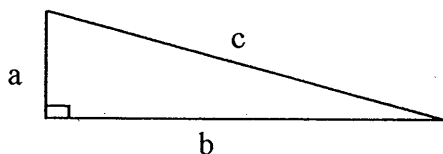
En retenant les deux écritures $a^2 + 2ab + b^2$ et $2ab + c^2$, on arrive vite à la propriété de Pythagore (on n'a pas encore mis le titre du chapitre).

En ne considérant maintenant qu'un des triangles rectangles, on peut faire formuler en français l'égalité obtenue par les élèves. Ils ont souvent du mal mais reconnaissent le « fameux théorème de Pythagore » dont certains ont déjà entendu l'énoncé.

A Retenir : Théorème de Pythagore

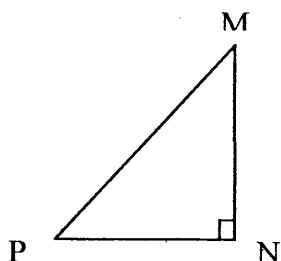
1- Lorsqu'un triangle est un triangle rectangle, on peut écrire que le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés.

2-



$$c^2 = a^2 + b^2$$

3-



$$MP^2 = MN^2 + NP^2$$

Remarques :

- Il nous semble important de donner le théorème sous ces trois formes. L'élève mémorisera la forme qui lui convient.
- On peut demander aux élèves de retrouver la preuve de ce théorème en utilisant la figure 1 (Ici, c'est le produit $(b - a)(b + a)$ qui intervient; ce prolongement peut être donné en travail à la maison.).
- Il existe de nombreuses applications directes utilisant le théorème et sa contraposée.
- On peut interdire dans un premier temps l'utilisation de la machine à calculer pour que les élèves comprennent le sens du carré et de « l'opération inverse ».
- On peut aussi varier les triplets « Pythagoriciens » et « sortir » du triplet 3-4-5 et de ses multiples.... Tous les triplets obtenus à partir de $(a^2 + b^2 ; a^2 - b^2 ; 2ab)$ sont une source de données pour des exemples numériques plus variés.
- Un petit problème intéressant :
Question parfois posée par les élèves : « 3-4-5 » est un triangle rectangle, en est-il de même pour « 4-5-6 » ?
La contraposée de Pythagore permet de répondre négativement ; (Certains élèves arrivent à répondre avec un raisonnement par l'absurde : « Si le triangle était rectangle, on aurait : $6^2 = 4^2 + 5^2$ donc $36 = 41$ ce qui n'est pas possible ».)
- Il est arrivé qu'un élève demande si trois autres nombres qui se suivent peuvent être les côtés d'un triangle rectangle. En nommant les longueurs des côtés $n-1$, n , $n+1$, on peut démontrer que le seul cas possible est $n = 4$ (ou $n = 0$).

Situation 2 : Réciproque du théorème de Pythagore

Tracer un triangle ABC avec : $AB = 50 \text{ mm}$ $BC = 62 \text{ mm}$ $AC = 36 \text{ mm}$
Tracer un triangle DEF avec $DE = 20 \text{ mm}$ $EF = 52 \text{ mm}$ $FD = 48 \text{ mm}$
Quelles conjectures peut-on faire ?

Observations :

Un débat intervient souvent entre les élèves : certains pensent que ABC est un triangle rectangle et d'autres non (la même chose avec DEF) .

L'utilisation de l'équerre ne les départage pas et n'est pas une preuve donc certains pensent à calculer les carrés des côtés.

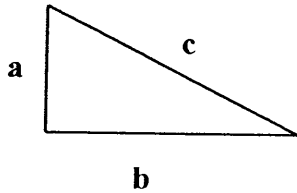
Pour le triangle ABC la contraposée de Pythagore permet de conclure.

Pour le triangle DEF les élèves sont convaincus que c'est un triangle rectangle car $52^2 = 20^2 + 48^2$.

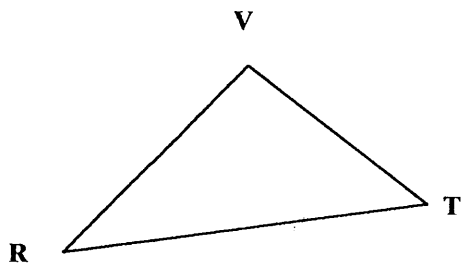
La démonstration de la réciproque de la propriété de Pythagore ne nous semble pas plus convaincante et nous pensons que nous pouvons admettre cette propriété. (on peut aussi demander aux élèves de tracer un triangle rectangle avec 20 et 48 comme côtés de l'angle droit et de calculer l'hypoténuse. Les élèves trouvent 52 et sont assez facilement convaincus par le fait que deux triangles qui ont les mêmes côtés sont superposables (propriété admise en 5^{ème}) .

A Retenir :

Quand on sait que le carré d'un côté d'un triangle est égal à la somme des carrés des deux autres côtés, on peut en déduire que le triangle est rectangle.



Si $c^2 = a^2 + b^2$ alors le triangle est rectangle.



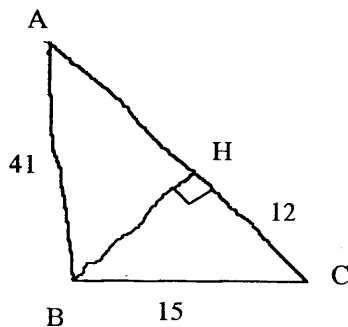
Si $RT^2 = RV^2 + VT^2$ alors le triangle RTV est rectangle (en V).

Remarque :

Pour la réciproque, on passe toujours sous silence la « constructibilité » du triangle ; a, b, c positifs et $c^2 = a^2 + b^2$ implique $c^2 < (a + b)^2$ donc $c < a + b$ donc le triangle existe.

Quelques exercices :

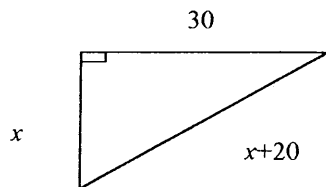
1- On donne la figure suivante à main levée :



Calculer l'aire du triangle ABC

(quelques élèves calculent $\frac{41 \times 15}{2}$ )

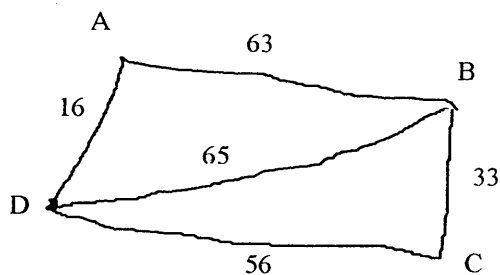
2-



Calculer la valeur de x .

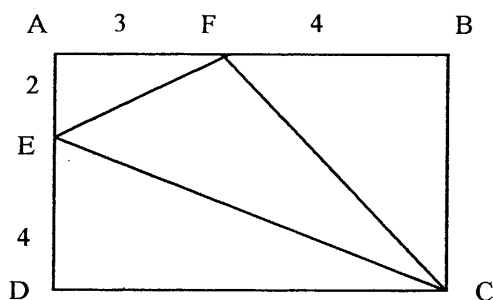
(Même si les égalités remarquables ne sont pas au programme de 4^{ème}, il nous semble possible d'exiger le développement $(x + 20)(x + 20)$ et surtout d'habituer les élèves à voir que $(x + 20)^2 \neq x^2 + 400$)

3- On donne la figure suivante dessinée à main levée.



Prouver que A, B, C, D sont situées sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

4-

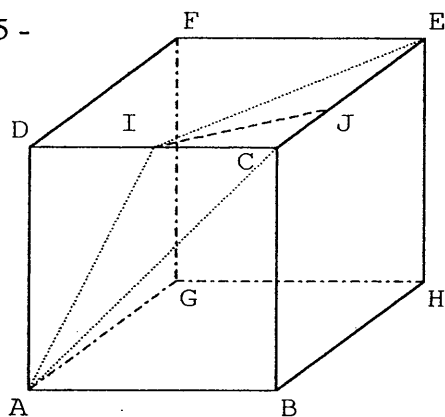


ABCD est un rectangle

CEF est-il un triangle rectangle ?

(Importance de garder les carrés de EF , FC , EC : Si on prend des valeurs approchées, on n'aboutit pas !)

5 -



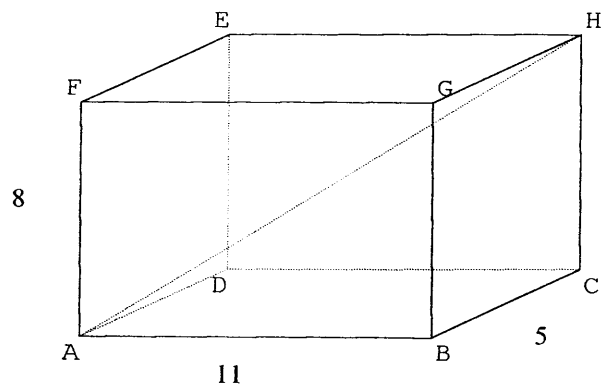
Ce solide est un cube. I est le milieu de $[DC]$.

1- Quel est le plus court chemin A-I-E ou A-C-E ?

2- Quel est le plus court chemin A-I-J ou A-C-J ?

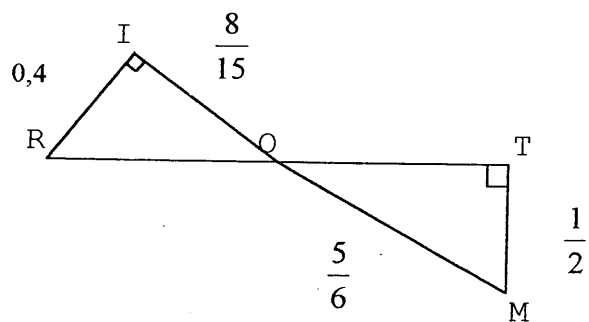
(on peut faire aussi un patron)

6-



ABCEFGH est un pavé droit .
Calculer la longueur AH dans le
triangle rectangle AHC.

7-



R, O, T sont des points alignés

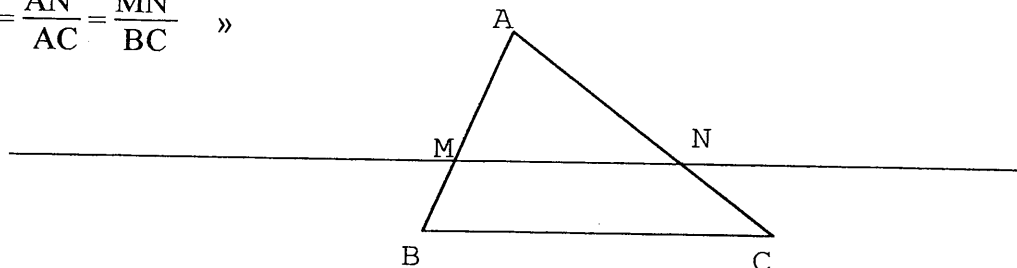
Que peut-on dire du point O ?

(Suivi scientifique 4^{ème})

6 - TRIANGLES DETERMINES PAR DEUX PARALLELES COUPANT DEUX SECANTES.

Savoirs visés :

- Connaître et utiliser la proportionnalité des longueurs des côtés des deux triangles déterminés par deux droites parallèles coupant deux sécantes.
- « Dans un triangle ABC, si M est un point du côté [AB], N un point du côté [AC] et si (MN) est parallèle à (BC), alors : $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$ »



Conceptions erronées :

- $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} = \frac{MN}{BC}$

Si la première égalité est juste, la deuxième peut être réfutée en revenant à la droite des milieux où l'on obtiendrait $1 = \frac{1}{2}$!

- $\frac{AM}{AN} = \frac{AB}{AC} = \frac{MN}{BC}$

- $AM = AN$ et $MB = NC$

- « Dans un agrandissement (ou une réduction), l'effet sur les aires est le même que celui sur les longueurs. »

Objectifs :

- Lier cette notion à la proportionnalité (dont les propriétés auront été revues dans un chapitre au préalable : traduction par des égalités de rapports, égalité des produits en croix...)
- Formuler ce théorème de deux façons différentes .
- Poursuivre l'initiation à la reproduction d'un triangle à une échelle simple.
- Préparer les élèves à l'homothétie (à plus long terme).

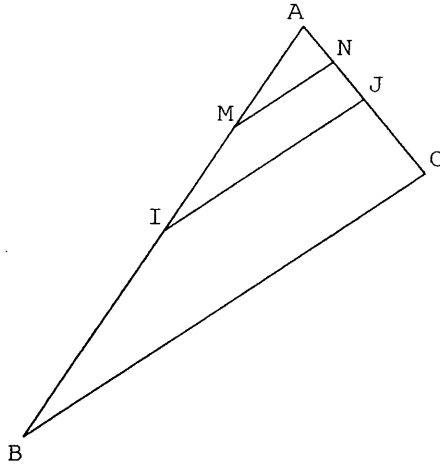
Situation 1 : le triangle du quart

Tracer un triangle ABC

Placer le point M du segment [AB] tel que $AM = \frac{1}{4} AB$

La parallèle à (BC) passant par M coupe (AC) en N.

Quelles conjectures peut-on faire ?



Conjectures :

- Le triangle AMN est 4 fois plus «petit» que ABC.
- $AN = \frac{1}{4} AC$; $MN = \frac{1}{4} BC$.
- Les angles sont les mêmes pour les deux triangles AMN et ABC.
- AMN est une réduction de ABC .
- Des conjectures sur les aires (justes ou fausses) des deux triangles...
- Il arrive que certains élèves introduisent les milieux I et J de [AB] et [AC] (ne serait-ce que pour placer le point M).

Démonstration :

Soient I et J les milieux respectifs des côtés [AB] et [AC] ;

On sait que $(IJ) \parallel (BC)$ et que $BC = 2 IJ$ (droite des milieux)

Dans le triangle AIJ, M est le milieu de [AI] et (MN) est parallèle à (IJ) donc N est le milieu de [AJ].

Donc $AJ = 2 AN$

Or $AC = 2 AJ$ donc $AC = 2 \times 2 AN = 4 AN$

De même $BC = 4 MN$

On peut entraîner les élèves à évaluer les rapports :

$\frac{AB}{AM}$, $\frac{AC}{AN}$, $\frac{BC}{MN}$ et leurs inverses...

Pour les aires, on sait que $\mathcal{A}_{AIJ} = 4 \times \mathcal{A}_{AMN}$ et que $\mathcal{A}_{ABC} = 4 \times \mathcal{A}_{AIJ}$

donc $\mathcal{A}_{ABC} = 16 \times \mathcal{A}_{AMN}$

Remarque : on peut prolonger cette activité avec la valeur $\frac{3}{4}$ ou la valeur $\frac{1}{3}$.

Situation 2 : Triangles formés par deux parallèles coupant deux sécantes

Tracer un triangle ABC.

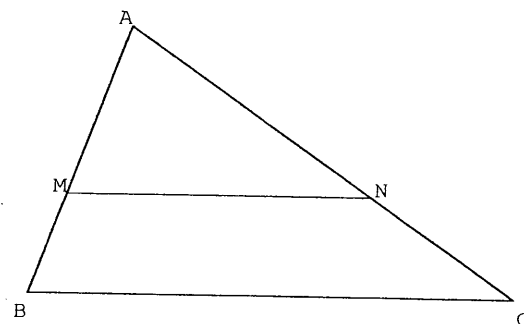
Une parallèle à (BC) coupe [AB] en M et [AC] en N

Quelles conjectures peut-on faire ?

Observations :

Les élèves font les conjectures suivantes:

- les deux triangles sont les mêmes mais en « plus grand » ou en plus « petit »
- Ce sont les mêmes mais à une certaine échelle...
- Les angles sont les mêmes...
- Le mot proportionnalité apparaît rarement. En approfondissant avec eux le terme échelle, cette notion finit par arriver.



Nous serons obligés d'admettre que les deux triangles ont des côtés proportionnels et dans un premier temps nous accepterons l'écriture :

AM	AN	MN
AB	AC	BC

est un tableau de proportionnalité

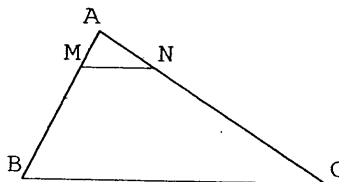
(présentation utilisée en 5^{ème} pour traduire une situation de proportionnalité)

On peut ici « montrer » qu'il s'agit d'une généralisation de ce que l'on a déjà vu pour les quotients $\frac{1}{2}$ (droite des milieux), $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$ dans les situations qui ont précédé.

A Retenir :

Quand une droite coupe deux côtés d'un triangle en étant parallèle au 3^{ème} côté, on peut dire que l'on obtient deux triangles dont les côtés sont proportionnels.

Ce qui peut se traduire par $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$.



Remarque :

- Si $(MN) \parallel (BC)$ alors :

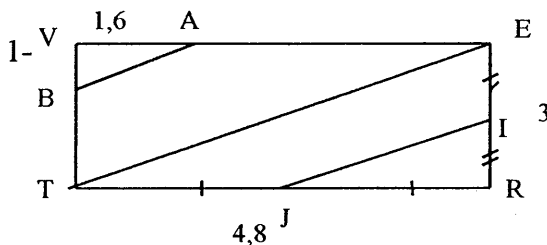
AM	AN	MN
AB	AC	BC

est un tableau de proportionnalité

ce qui se traduit par : $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$ et $\frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN} = \frac{BC}{MN}$

- Dans le cas de figure précédent, le triangle AMN est une réduction du triangle ABC à l'échelle $\frac{AM}{AB}$ et le triangle ABC est un agrandissement de AMN à l'échelle $\frac{AB}{AM}$.
- Comme semblent l'indiquer les programmes nous n'appelons pas ce théorème « théorème de Thalès » ; Nous réservons cette appellation à la classe de 3^{ème}.

Quelques exercices d'application :

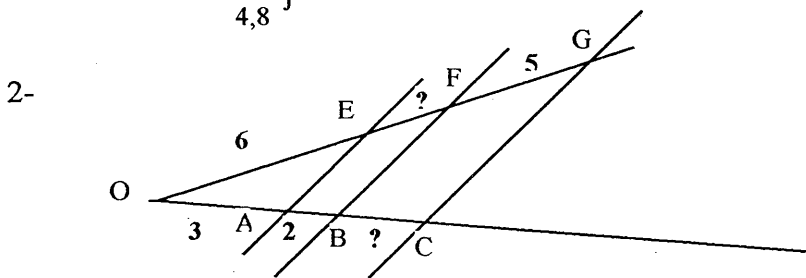


VERT est un rectangle.

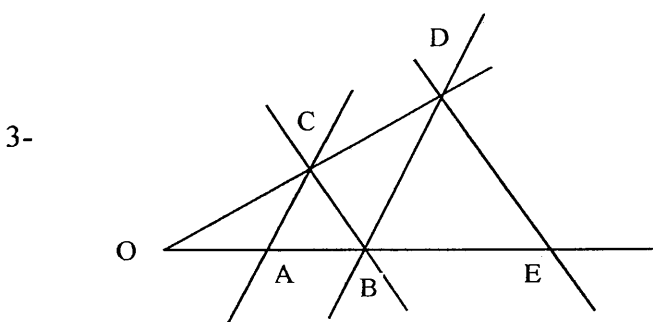
VA = 1,6 ; ER = 3 et RT = 4,8

(AB) et (ET) sont parallèles.

Calculer l'aire et le périmètre de l'hexagone AEIJTB.



Les droites (AE), (BF), (CG) sont parallèles.
Calculer EF et BC.

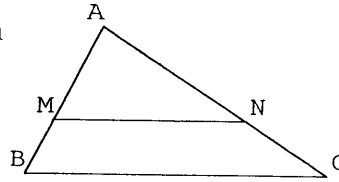


(BC) // (DE)

(AC) // (BD)

Démontrer que $OA \times OE = OB^2$

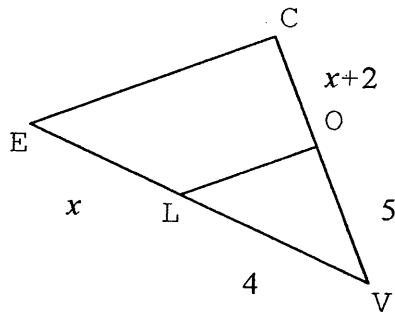
- 4- On sait que le périmètre de ABC est de 21 cm
On sait que $AM = \frac{3}{5} AB$.
Quel est le périmètre de AMN ?



- 5- sans faire de calcul, construire un segment [MR] tel que $\frac{MR}{9} = \frac{7}{13}$

(Même si la construction de la quatrième proportionnelle n'est pas au programme, cette situation nous paraît intéressante, les élèves pouvant trouver des solutions différentes)

6-



Les droites (EC) et (OL) sont parallèles.
Calculer la valeur exacte de x .

- 7- ABC est un triangle tel que $AB = 4$ et $BC = 6$
E est le point de [AB] tel que $BE = 2,4$
Placer F sur [AC] tel que les droites (EF) et (BC) soient parallèles.
La parallèle à (AB) passant par F coupe [BC] en G
Démontrer que EFG est un losange.

7- COSINUS D'UN ANGLE AIGU

Savoirs visés :

- Définir le cosinus comme un rapport de longueurs.
- Pour un triangle rectangle, établir et utiliser la relation entre le cosinus d'un angle aigu et les longueurs des deux côtés adjacents.
- Utiliser la calculatrice pour déterminer une valeur approchée
 - du cosinus d'un angle aigu donné
 - de l'angle dont on donne le cosinus.

Objectifs :

- Faire prendre conscience aux élèves qu'il est possible de connaître les mesures d'un angle quand on connaît les longueurs des deux côtés adjacents dans un triangle rectangle . C'est une nouveauté, car jusqu'en quatrième pour trouver la mesure d'un angle on utilisait le rapporteur. Désormais, on peut utiliser la règle graduée et la calculatrice .
- Etablir des liens entre cosinus, proportionnalité et théorème de Thalès.
- Aider les élèves à passer des situations d'introduction (où interviennent des « familles » de triangles rectangles) aux situations d'application (où n'intervient qu'un seul triangle rectangle) .
- Travailler sur deux aspects du problème :
 - Deux angles égaux ont le même cosinus
 - Deux angles ayant le même cosinus sont égaux .

Conceptions erronées :

- Confusion entre cosinus et angle : par exemple : $\cos \hat{A} = 65^\circ$ ou $\hat{A} = \frac{4}{10}$
ou $\cos \hat{B} = \frac{4}{10} = 66^\circ$.
- Difficultés pour résoudre une équation du type : $\cos 35^\circ = \frac{3}{AB}$.
- Problèmes liés à l'utilisation de la calculatrice, en particulier écritures du type 65 cos ou $\hat{A}$ cos ...
- Problèmes liés aux valeurs approchées :

Outre la définition d'une valeur arrondie au 1/10 par exemple, les élèves relèvent une valeur arrondie de $\cos 37^\circ$ en prenant 0,7 ce qui entraîne souvent des imprécisions importantes sur les calculs suivants .

On incitera donc les élèves à garder la valeur exacte jusqu'au bout du calcul, quand cela est possible .

Situation 1 : demi-triangles équilatéraux :

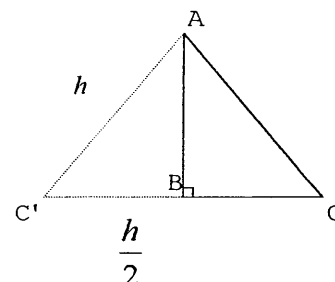
Construire trois triangles rectangles différents , chacun d'eux ayant un côté de l'angle droit qui mesure la moitié de l'hypoténuse .

Quelles conjectures pouvez-vous faire ?

Observations :

Les élèves ont l'impression que :

- « Ce sont les mêmes triangles mais à une échelle différente. »
- « Un des angles mesure la moitié de l'autre. »
- « Il y a un angle de 60° et un autre de 30° . »
- « C'est le même triangle que l'on agrandit ou que l'on rétrécit. »



Démonstration :

On appelle C' le symétrique de C par rapport à la droite (AB) .

On a alors $AC = AC' = CC'$ et ACC' est un triangle équilatéral.

Par suite $\widehat{ACB} = 60^\circ$ et $\widehat{BAC} = 30^\circ$.

Bilan: Dans un triangle ABC rectangle en B , lorsque un côté mesure la moitié de l'hypoténuse, on est sûr qu'il a un angle de 60° et un angle de 30° .

Situation 2 : rapport $3/4$

Tracer trois triangles rectangles différents, chacun d'eux ayant un côté de l'angle droit qui mesure les $3/4$ de l'hypoténuse.

Remarques :

- Les tracés sont moins faciles que dans la situation 1 mais les conjectures sont identiques à celles formulées dans la situation 1 (sauf la mesure des angles 60° et 30°).
- Les élèves ont l'impression que ces triangles font partie « d'une même famille » et que cette fois-ci les angles sont à peu près 41° et 49° .
- Ici une démonstration est impossible mais en généralisant, on admettra le résultat suivant :

Bilan : Les triangles rectangles dont un côté de l'angle droit mesure une même fraction de l'hypoténuse ont les mêmes angles.

Situation 3 : Des triangles rectangles qui ont le même angle

On distribue au premier tiers de la classe la première consigne, au deuxième tiers la deuxième et au troisième la dernière consigne.

Etape 1 : 1- Tracer trois triangles rectangles de dimensions différentes qui ont un angle de 20°
2- Tracer trois triangles rectangles de dimensions différentes qui ont un angle de 35°
3- Tracer trois triangles rectangles de dimensions différentes qui ont un angle de 75°

On définit le côté adjacent à un angle et on leur demande de remplir le tableau suivant :

triangle				
hypoténuse				
côté adjacent				
Etape 2 : Quelles conjectures peut-on faire sur ce tableau ?				

Remarques :

- L'idée de la proportionnalité pourra venir , surtout si l'on a travaillé sur Thalès auparavant . Sinon , on pourra donner un coup de pouce en demandant aux élèves de calculer pour chaque triangle le quotient : $\frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}}$.
- Des résultats « à peu près égaux » pourront permettre de conjecturer l'égalité et motiveront la démonstration . A cet effet , on récapitulera au tableau toutes les mesures trouvées dans la classe de façon à renforcer l'idée de cette égalité.

Démonstration : On empile deux triangles de manière à obtenir un dessin similaire à celui-ci .

On veut démontrer que

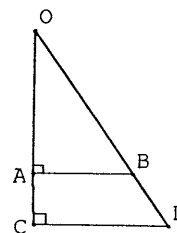
OB	OD
OA	OC

est un tableau de proportionnalité ; autrement dit on veut démontrer que $OA \times OD = OB \times OC$

D'après Thalès , on peut affirmer que

OA	OB	AB
OC	OD	CD

est un tableau de proportionnalité ; en utilisant les quatre premières cases , on peut en déduire $OA \times OD = OB \times OC$. C'est ce que l'on voulait démontrer .



A Retenir : Pour des triangles rectangles qui ont un même angle aigu , les hypoténuses et les côtés adjacents sont proportionnels .

Le coefficient de proportionnalité s'appelle le cosinus de l'angle .

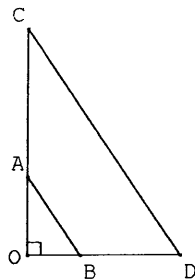
On a les égalités suivantes :

$$\text{Hypoténuse} \times \text{cosinus} = \text{côté adjacent}$$

$$\text{Cosinus} = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}}$$

Remarques :

- On peut demander aux élèves si l'on peut démontrer le résultat avec un empilement de cette sorte :



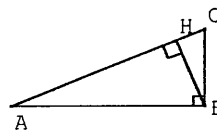
- Nous donnons la formule sous la forme de deux égalités. Elles permettent suivant les cas de trouver plus facilement un des éléments si on connaît les deux autres sans avoir à résoudre des équations compliquées.

- Les exercices d'application sont classiques et nombreux.

On pourra ensuite distribuer aux élèves les exemples récapitulatifs donnés en annexe 1.

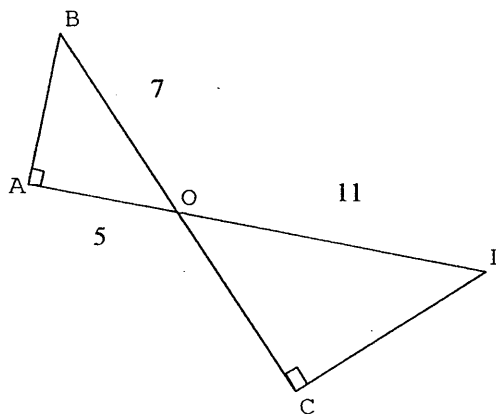
Exercices de réinvestissement un peu plus difficiles :

- 1) $AC = 10$; $AB = 7$. Calculer AH .



Remarque : on peut demander de généraliser et de démontrer que , dans ce cas de figure on obtient : $AB^2 = AH \times AC$

- 2) Calculer la valeur exacte de OC .



Situation 4 : Des triangles qui ont les même angles

Sur la feuille que l'on vous distribue (*annexe 2*) trouver des triangles qui ont les mêmes angles sans rapporteur , sans règle graduée et sans calculatrice .

Observation : Les élèves calculent des quotients et trouvent que certains d'entre eux sont égaux . Ils en déduisent les angles égaux .

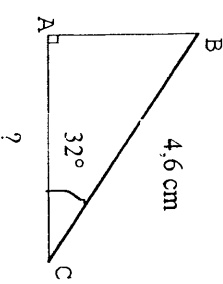
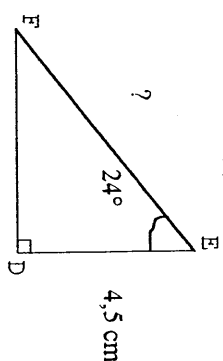
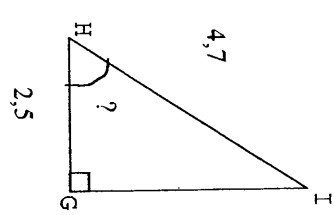
Bilan: *On admet que des angles qui ont le même cosinus sont égaux .*

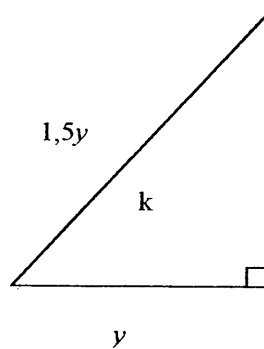
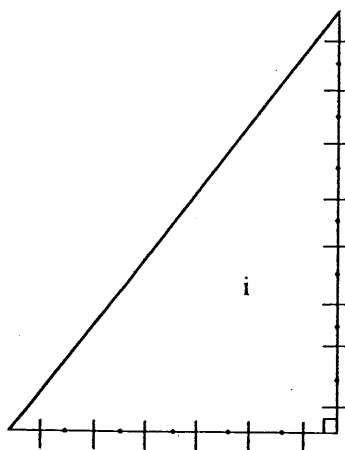
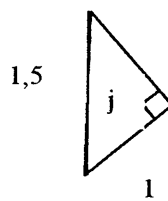
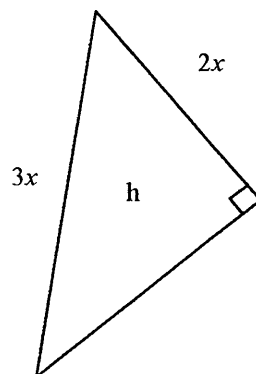
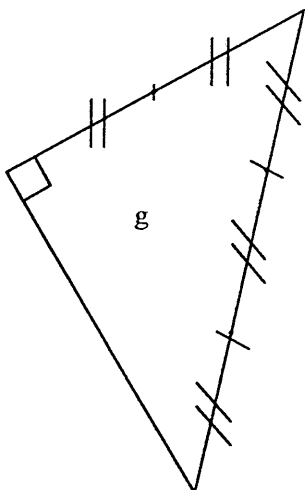
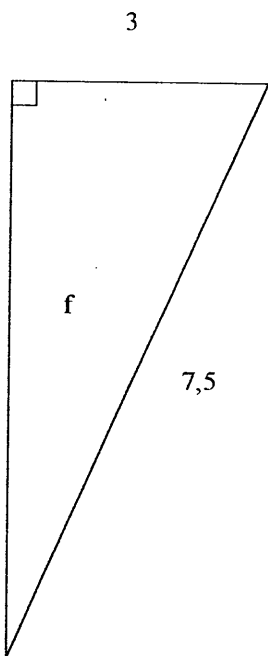
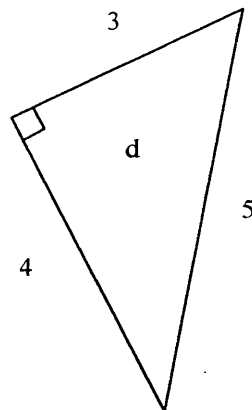
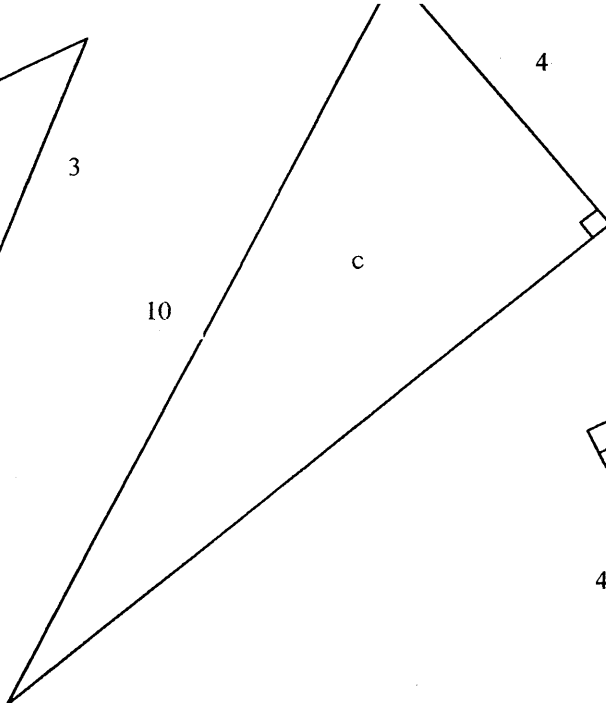
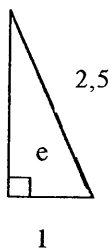
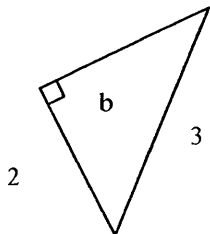
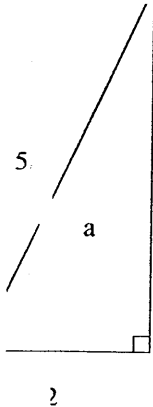
Situation 5 : Construire un angle de cosinus donné

Sans rapporteur et sans utiliser la calculatrice, construire un angle dont le cosinus est égal à 0,25 .

Remarque : Les élèves pourront utiliser $0,25 = \frac{1}{4} = \frac{2}{8} = \frac{2,5}{10} = \dots$ et le bilan de la situation précédente permet d'affirmer que les angles obtenus sont les mêmes .

HYPOTENUSE X COSINUS = COTE ADJACENT

1- On connaît l'hypoténuse et on connaît un angle, on peut calculer le côté adjacent à l'angle. $BC \times \cos \hat{C} = AC$ $4,6 \times \cos 32^\circ = AC$ (valeur exacte) 	2- On connaît un angle et on connaît un côté adjacent à cet angle, on peut calculer l'hypoténuse. $EF \times \cos \hat{E} = ED$ $EF \times \cos 24^\circ = 4,5$ $EF = \frac{4,5}{\cos 24^\circ}$ (valeur exacte) 	3- On connaît l'hypoténuse et le côté adjacent à un angle, on peut calculer cet angle. $IH \times \cos \hat{H} = HG$ $4,7 \times \cos \hat{H} = 2,5$ $\cos \hat{H} = \frac{2,5}{4,7}$ 
Exemple de programme machine : 3 2 cos x 4 . 6 = 3.9010213 donc AC $\approx$ 3,9 cm (valeur arrondie au mm près).	Exemple de programme machine : 4 . 5 ÷ 2 4 cos = 4.9258632 donc EF $\approx$ 4,9 cm (valeur arrondie au mm près).	Exemple de programme machine : 2 . 5 ÷ 4 7 cos shift = 57.86507 donc $\hat{H} \approx 58^\circ$ (valeur arrondie au degré près).



8- TRANSLATION

Savoirs visés :

Construire l'image d'un point, d'un segment, d'une droite, d'une demi-droite, d'un cercle par la translation qui transforme A en B .

Objectifs :

- Revoir la symétrie axiale et la symétrie centrale et les comparer à la translation.
- Par des approches expérimentales, constituer un inventaire de figures et aider à la création d'images mentales .
- Mettre en évidence les propriétés de conservation et justifier certaines d'entre elles .

Situation 1 :

(annexe 1)

1- Dans chacun des cas , comment passe-t-on de la figure $\mathcal{A}$ à la figure $\mathcal{B}$?

Vous pouvez utiliser des mots mathématiques et des mots du langage courant . Vous pouvez utiliser le matériel que vous voulez et tracer ce que vous voulez .

2- Regroupez les images qui font intervenir le même type de transformation .

3- Dans chaque cas , reliez des points qui correspondent . Faire des remarques.

Remarque : Nous avons volontairement introduit des rotations pour élargir l'éventail des transformations approchées en 4^{ème} mais l'étude de la rotation est reportée en 3^{ème} , conformément au programme .

Observation :

Pour les nouvelles transformations , les élèves utilisent :

- « glissement » , « déplacement parallèle » , « symétrie parallèle »... mais très rarement « translation » .
- On fait « tourner » , « pivoter » , on fait une « symétrie circulaire » ... un peu plus souvent « rotation » (qui fait davantage partie du langage courant) .

La symétrie centrale apparaît facilement comme un cas particulier de rotation .

Les élèves découvrent ou redécouvrent les propriétés suivantes :

- Symétrie axiale : l'axe est la médiatrice du segment $[MM']$. Tous les segments sont parallèles entre eux et perpendiculaires à l'axe .
- Symétrie centrale : le centre est le milieu de $[MM']$.
- Translation (dont on donne le nom) : tous les segments sont parallèles de même longueur . On obtient des parallélogrammes .

- Rotation : $OM = OM'$; $\widehat{MOM'} = \widehat{NON'}$ quels que soient les point M et N .

On obtient des triangles isocèles .

Dans le cas 10 , quelques élèves remarquent que des segments correspondants sont perpendiculaires .

Situation 2 :

(annexe 2) 1- En utilisant du papier calque , tracer la figure $\mathcal{B}$ correspondant à la figure $\mathcal{A}$ par la symétrie axiale qui amène A sur B .

2- En utilisant du papier calque, tracer, sur le même dessin, la figure $\mathcal{C}$ correspondant à la figure $\mathcal{A}$ par la symétrie centrale qui amène A sur B .

Remarque : Cette séance permet de

- revoir l'utilisation du papier calque.
- d'entretenir des compétences sur les symétries.
- de préparer les élèves au fait que dans les situations suivantes les translations seront définies par un point et son image

Situation 3 :

(annexe 3)

En utilisant du papier calque , dessiner la figure $\mathcal{B}$ correspondant à la figure $\mathcal{A}$ par la translation qui amène

- E sur E' (fig.1)
- F sur F' (fig.2)
- D sur D' (fig.3)
- C sur C' (fig.4)

Observation : certains élèves se rendent compte que pour ne pas trop « bouger » , il faut qu'ils construisent l'image d'un autre point (par exemple le sommet du chapeau) . Pour cela, ils utilisent soit l'équerre pour tracer des parallèles soit, plus rarement, le compas pour tracer le 4^{ème} sommet d'un parallélogramme .

La difficulté est plus grande pour le dessin 3 ; on peut donner un coup de pouce : « où va le chinois quand D va sur D' ? »

L'utilisation du rétroprojecteur avec deux transparents permet une bonne visualisation du déplacement.

Situation 4 :

(annexe 4)

On considère la translation qui transforme la figure $\mathcal{A}$ en la figure $\mathcal{B}$.

Placer les points A', B' transformés des points A, B par cette translation .

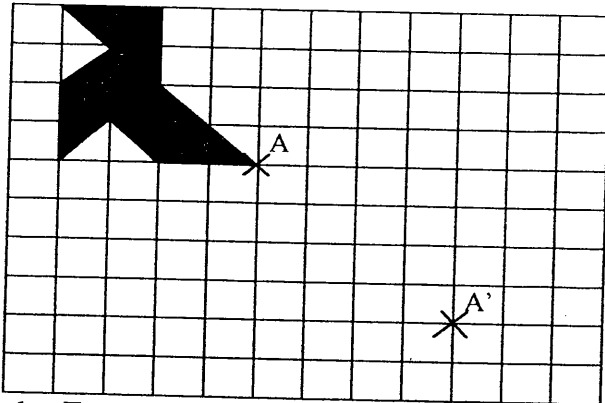
Quelles conjectures peut-on faire ?

Remarque : cette situation n'est à faire que si les conjectures ne sont pas apparues précédemment .

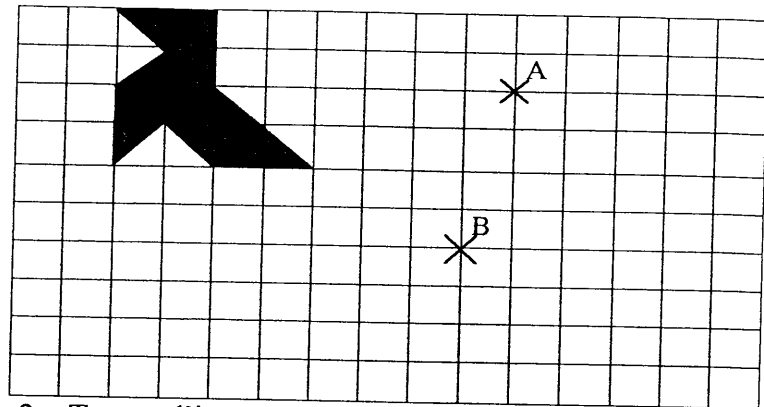
on admet que :

- les droites (AA'), (BB') ... sont parallèles .
- les longueurs AA', BB' ...sont égales .
- les demi-droites [AA'), [BB') ...sont dans le même sens .

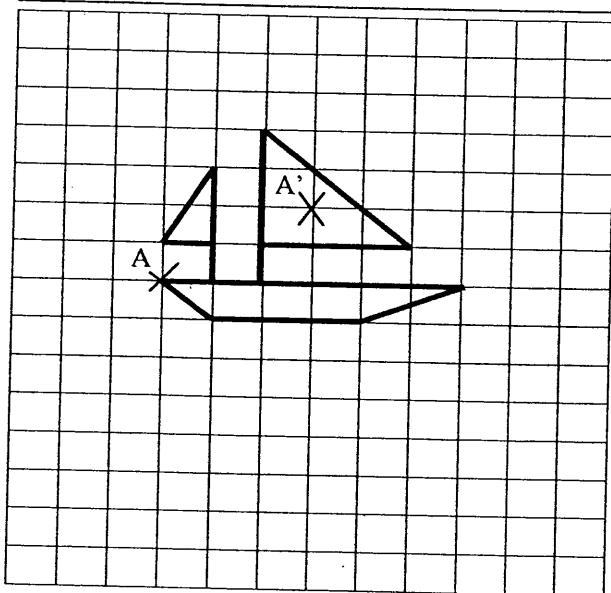
Situation 5 : sur quadrillage



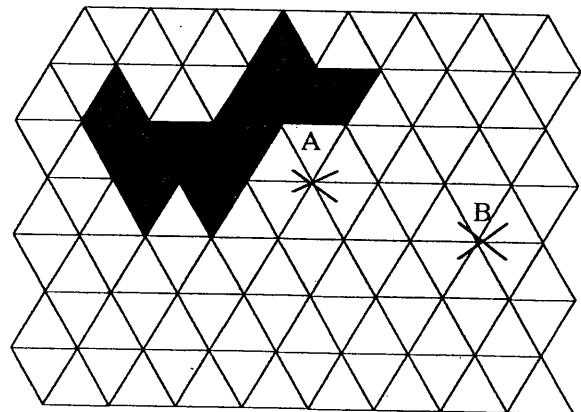
- 1- En comptant les carreaux , tracer l'image de la cocotte par la translation qui transforme A en A' .



- 2- Tracer l'image de la cocotte par la translation qui transforme A en B .



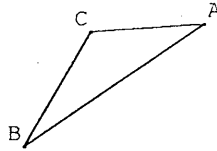
- 3- Tracer le transformé du bateau par la translation qui transforme A en A' .



- 4- Tracer le transformé de la figure noire par la translation qui amène A sur B .

Situation 6: Image d'un triangle

Construire le triangle $A'B'C'$ qui correspond au triangle ABC par la translation qui amène A sur A' .



Observations : Les constructions à l'équerre et au compas sont utilisées , d'autres plus complexes apparaissent aussi .

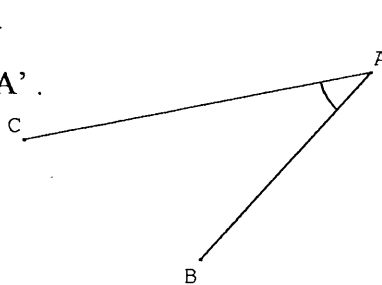
A retenir :

- Par une translation , un segment et son image sont parallèles et de même longueur .
- Par une translation , une droite et son image sont parallèles .

Remarque : cela peut être prouvé avec la propriété d'un quadrilatère non croisé qui a deux côtés parallèles et de même longueur vue en 5^{ème} .

Situation 7 :

Construire l'image de l'angle $\widehat{BAC}$ par la translation qui amène A sur A' .



A retenir : Par une translation, un angle et son image ont la même mesure .

Situation 8 : différencier des translations :

(annexe 5)

1- Voici 7 couples de figures : pour chacun d'eux on fait correspondre le dessin $\mathcal{A}_n$ au dessin $\mathcal{B}_n$ par une translation. Regrouper les couples pour lesquels il s'agit de la même translation.

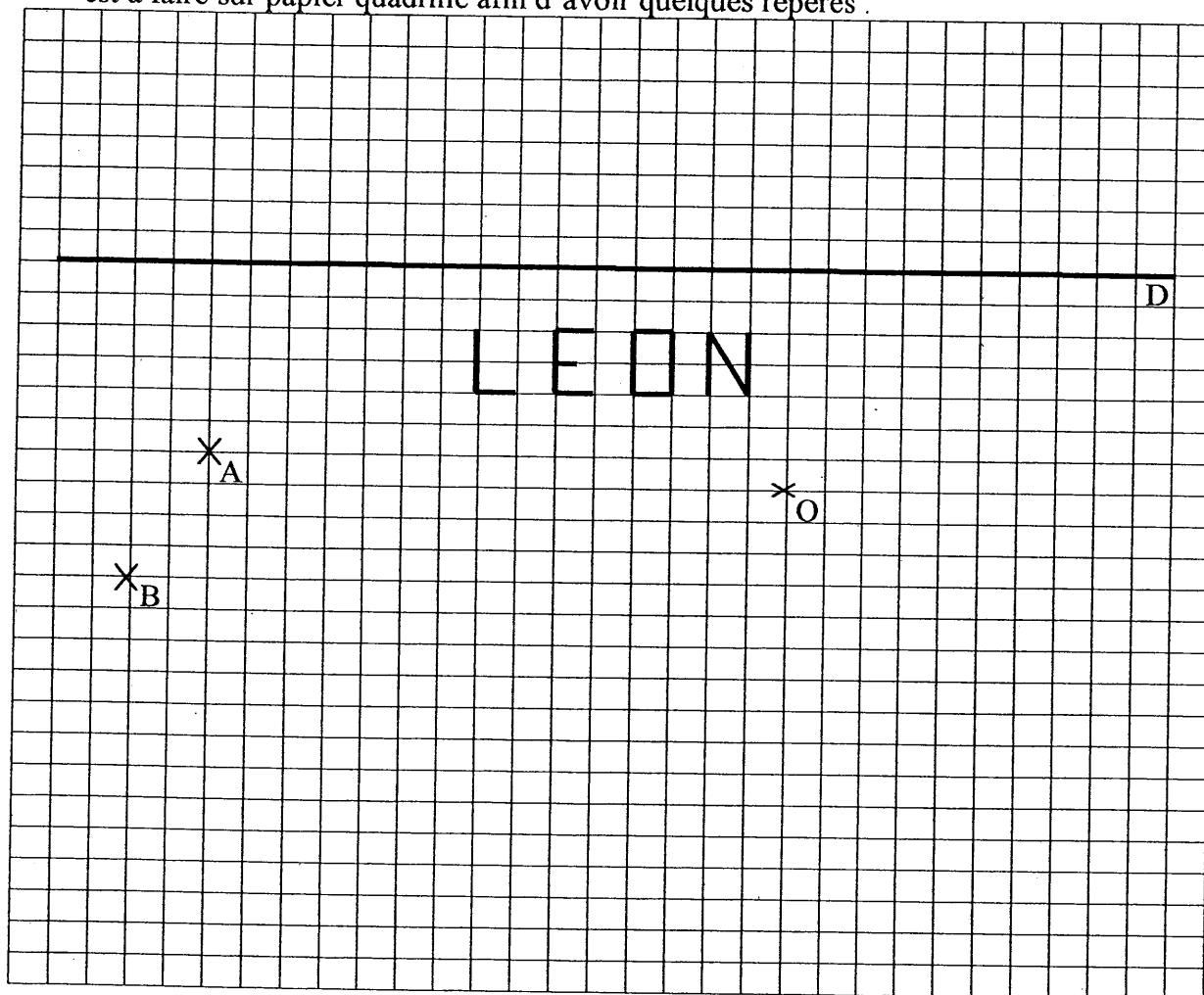
Observations :

- Certains élèves mettent ensemble 4 et 7 mais les autres réfutent cette proposition car les segments n'ont pas la même longueur.
- Même chose pour 1 et 5. (le sens n'est pas le même)
- On regroupe seulement 2, 3 et 6 : on appelle t cette translation.

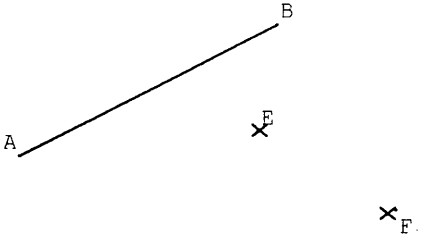
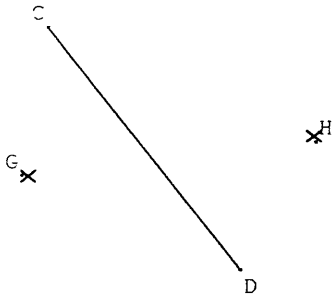
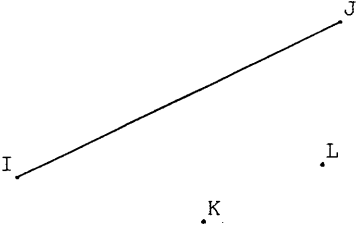
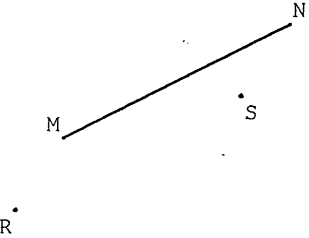
2- Construire la figure $\mathcal{B}_8$ qui correspond à la figure $\mathcal{A}_8$ par la translation t .

Exercices :

1- A main levée, transformer votre prénom écrit en lettres bâton par la symétrie centrale de centre O, la symétrie axiale d'axe D et la translation qui transforme A en B. Cet exercice est à faire sur papier quadrillé afin d'avoir quelques repères.



2- image d'un segment par une translation

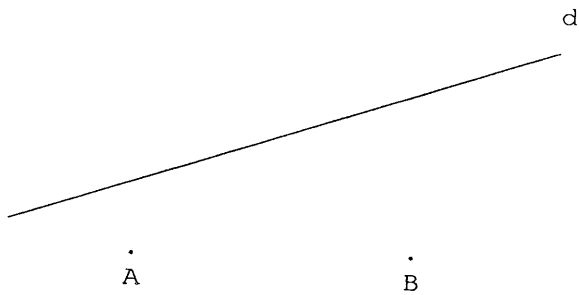
Construire l'image de $[AB]$ dans la translation qui transforme E en F. 	Construire l'image de $[CD]$ dans la translation qui transforme G en H. 
Construire l'image de $[IJ]$ dans la translation qui transforme K en L.  $(KL) // (IJ)$	Construire l'image de $[MN]$ dans la translation qui transforme R en S.  $(RS) // (MN)$ et $RS = MN$
Quelles conjectures peut-on faire ?	

Remarques :

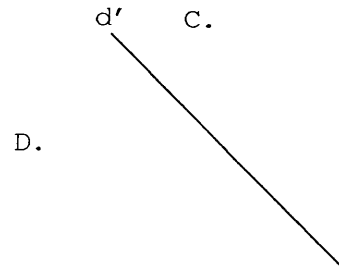
- Pour ne pas alourdir la formulation, nous parlons aux élèves de « segments parallèles ».
- En utilisant les propriétés du parallélogramme on peut démontrer qu'un segment et son image sont parallèles et de même longueur.

3- image d'une droite par une translation

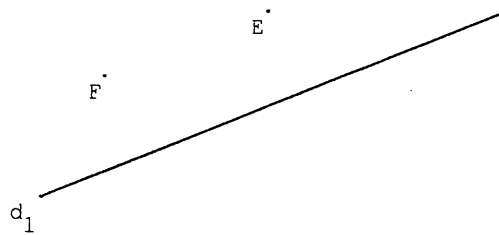
Construire l'image de la droite d dans la translation qui transforme A en B .



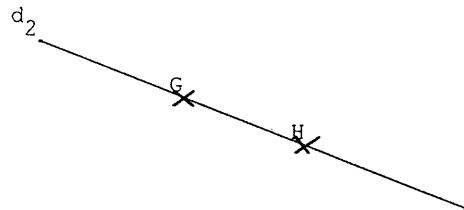
Construire l'image de la droite d' dans la translation qui transforme C en D .



Construire l'image de la droite d_1 dans la translation qui transforme E en F .

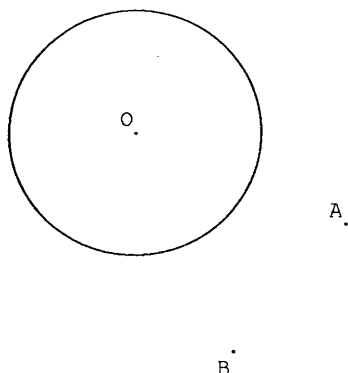


Construire l'image de la droite d_2 dans la translation qui transforme G en H .

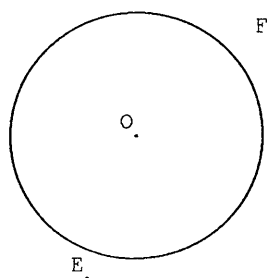


4- image d'un cercle par une translation :

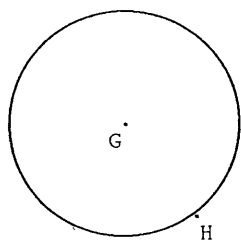
Construire l'image du cercle par la translation qui amène A sur B .



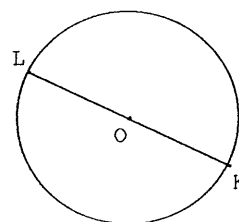
Construire l'image du cercle par la translation qui transforme E en F .

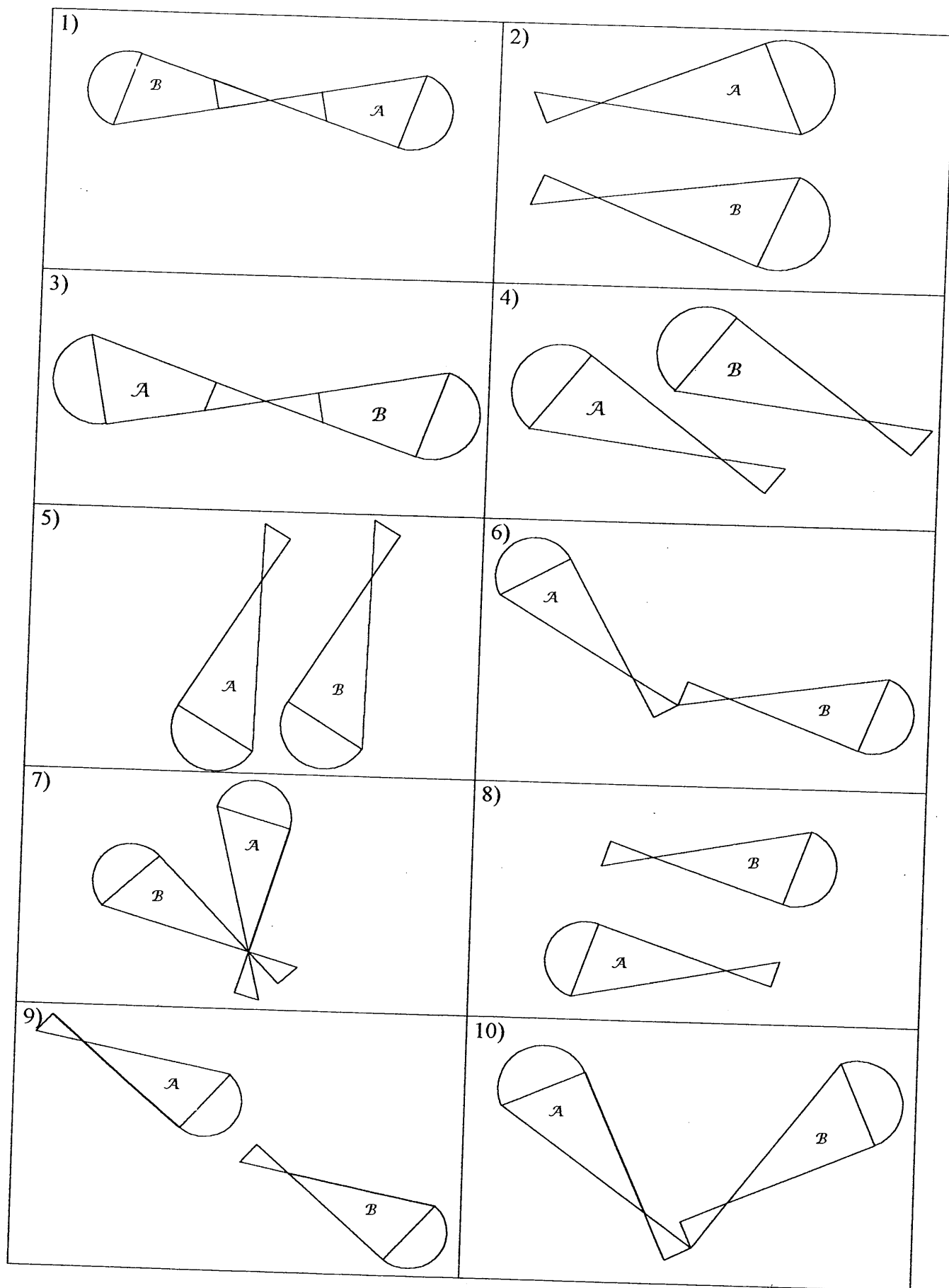


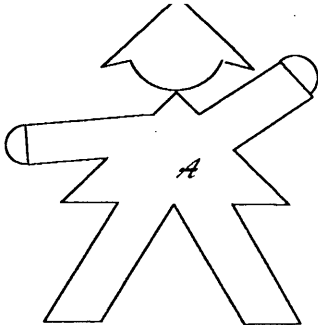
Construire l'image du cercle par la translation qui transforme G en H .



Construire l'image du cercle par la translation qui transforme K en L .



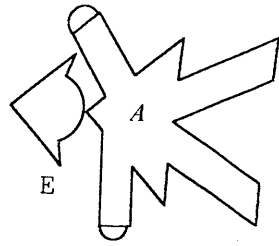




X A

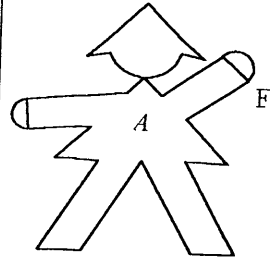
B X

1-



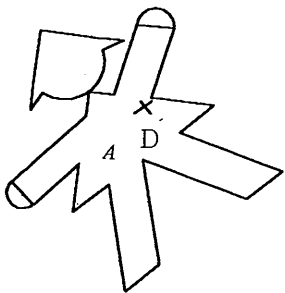
E'X

2-



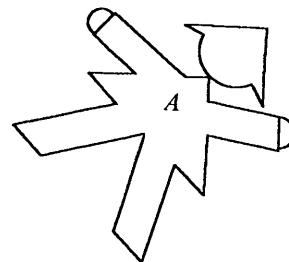
F'X

3-



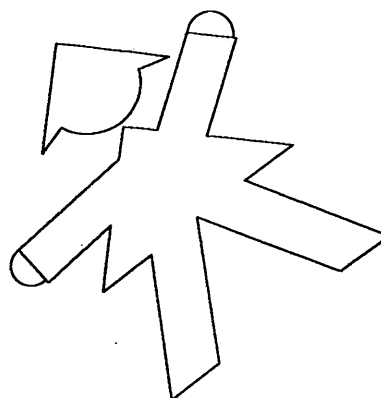
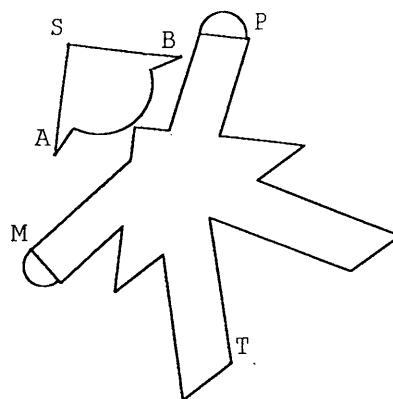
D'X

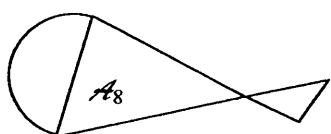
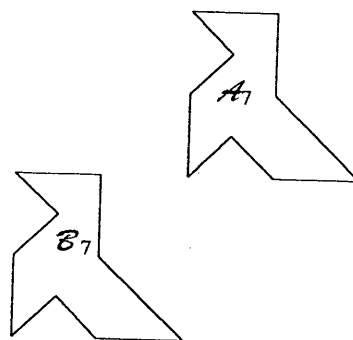
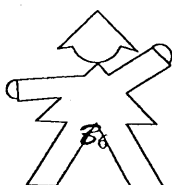
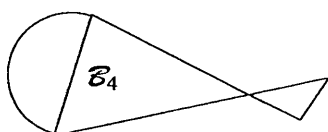
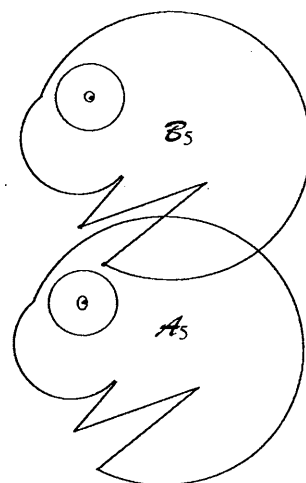
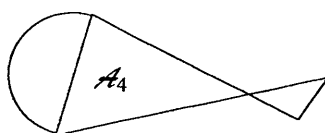
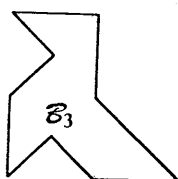
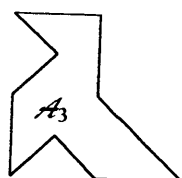
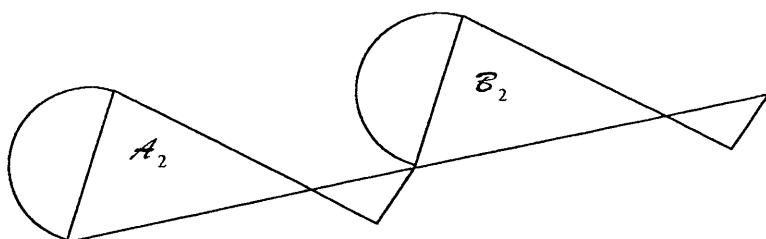
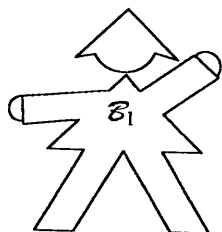
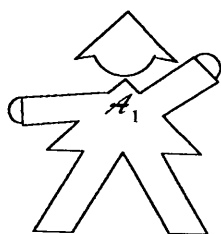
4-



C'X

CX





9- PYRAMIDES

Savoirs visés :

- Décrire et représenter une pyramide.
- Tirer des informations d'une représentation en perspective.
- Fabriquer un patron de pyramide.
- Savoir calculer le volume d'une pyramide.

Remarque : Fabriquer le patron d'un cône nous paraît difficile. De plus, les activités concernant le cône nous paraissent davantage de nature numérique, c'est pourquoi nous n'en parlerons pas ici.

Conceptions erronées :

- Conceptions erronées sur le patron d'une pyramide.
- Mauvaise lecture d'un dessin en perspective (angles droits, triangles isocèles....).
- Confusions des formules : $\frac{1}{3}Bh$ et $\frac{1}{2}Bh$.
- « Toutes les pyramides sont des pyramides régulières à base carrée ».
- $\frac{Bh}{3}$ n'est pas reconnu égal à $\frac{1}{3}Bh$.

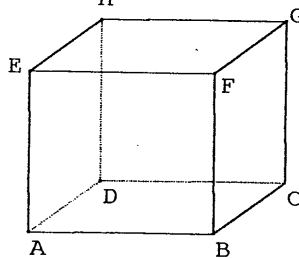
Objectifs :

- Consolider les images mentales relatives à des situations de parallélisme et d'orthogonalité.
- Réinvestir le théorème de Pythagore.

Situation 1 : Une pyramide « coin de cube »

Le dessin d'un cube ABCDEFGH est distribué aux élèves. On leur demande de décrire le solide EABCD :

Nombre de sommets.
Nombre d'arêtes.
Nombre de faces.
Nature de chaque face.



Observations : les élèves voient assez facilement que les triangles AEB et AED sont rectangles-isocèles et peuvent le justifier.

Mais ils ne sont pas d'accord quant à la nature des triangles EBC et EDC (certains pensent qu'ils sont isocèles, d'autres qu'ils sont rectangles.....)

Il est alors intéressant de leur demander de :

Fabriquer un patron du solide AEBCD sachant que le cube a une arête de 5cm ;

La validation de la nature des triangles EBC et EDC est inhérente au patron.

Certains élèves ont besoin de calculer des longueurs avec le théorème de Pythagore, d'autres procèdent par report avec le compas ;

Pour justifier que $(BC) \perp (BE)$ et que $(DC) \perp (DE)$, les élèves pourront retenir la propriété :

« Une perpendiculaire à un plan en un point est perpendiculaire à toutes les droites du plan passant par ce point. »

Il est intéressant de montrer des patrons différents qui « marchent » et de faire dire pourquoi les patrons faux « ne marchent pas ».

Situation 2 : Le volume de la Pyramide

Chaque élève dispose maintenant d'un patron de pyramide « coin de cube »

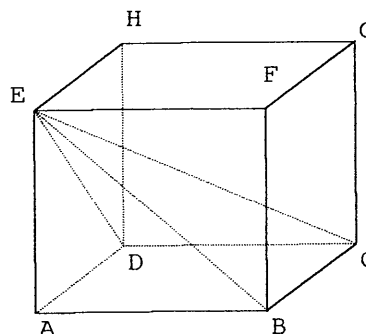
1- Peut-on reconstituer le cube avec plusieurs pyramides identiques à celle que vous avez ?

Les élèves pensent souvent qu'il en faut 2 ou 4 mais rarement 3.

Après quelques manipulations, ils arrivent à se mettre d'accord.

On peut leur demander de faire apparaître ces trois pyramides sur un dessin fait au tableau

Comment le faire avec un minimum de traits ?



(Il suffit de tracer le segment $[EG]$;

bien que ce soit difficile, quelques élèves trouvent cette solution.)

2- Calculer maintenant le volume de la pyramide EABCD

Remarque : Il s'agit ici de « faire mémoriser » le coefficient $1/3$

On admet et on généralise ensuite la formule donnant le volume d'une pyramide.

A Retenir :

1-
$$V = \frac{1}{3} \times B \times h$$

B désigne l'aire de la base

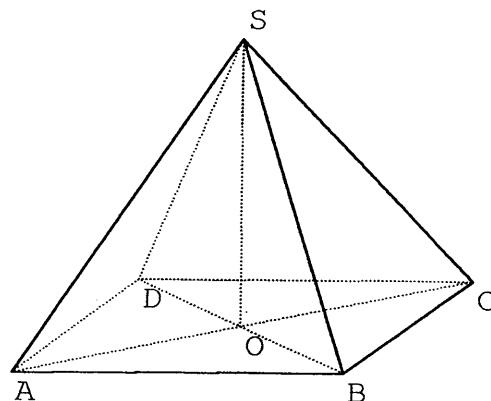
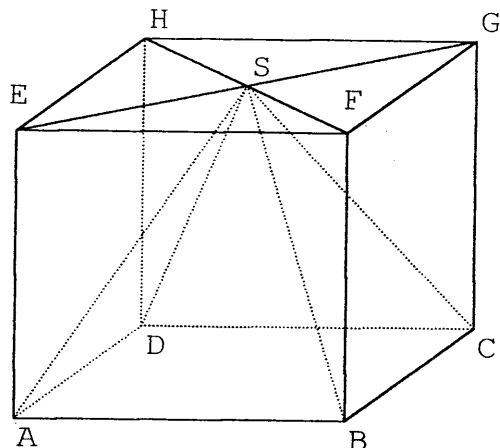
h désigne la hauteur de la pyramide.

2- Pour calculer le volume d'une pyramide on multiplie l'aire de la base par la hauteur et on divise par 3 .

Situation 3 : Pyramide régulière à base carrée

1- On montre aux élèves une pyramide régulière à base carrée, en bois ou en Plexiglas et on demande aux élèves de la décrire.
On leur demande ensuite de la dessiner en perspective cavalière.

Remarque : Les élèves ont du mal à faire le dessin ; (Ils peuvent cependant penser à « l'inscrire » dans un cube et à effacer les traits inutiles en se rappelant de la situation 1)



2- Sachant que $AC = 6$ cm et que $AS = 5$ cm, calculer le volume de la pyramide ;

Remarques :

- On obtient un nombre entier et on n'a pas besoin d'utiliser de nombres irrationnels.
- On demande ensuite de réaliser un patron de cette pyramide.

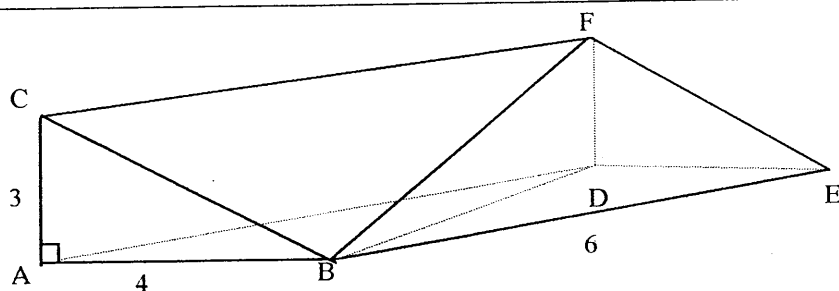
Situation 4 : Dans un cadre

(annexe 1)

Sans sortir du cadre , construire un patron d'une pyramide régulière de base carrée de côté 4 cm et d'arête latérale 6cm . On a déjà tracé un côté du carré .

*Il s'agit ici d'éviter que les élèves privilégient le patron classique en forme de « croix »
Cet exercice peut aussi préparer au patron du cône (annexe 2).*

Situation 5 : Le prisme sectionné.



ABCDEF est un prisme droit dont la base est un triangle rectangle.

Les élèves sont par groupe de deux ; Ils réalisent un patron de chacune des deux pyramides :

- un patron de ACFDB
- un patron de BEDF

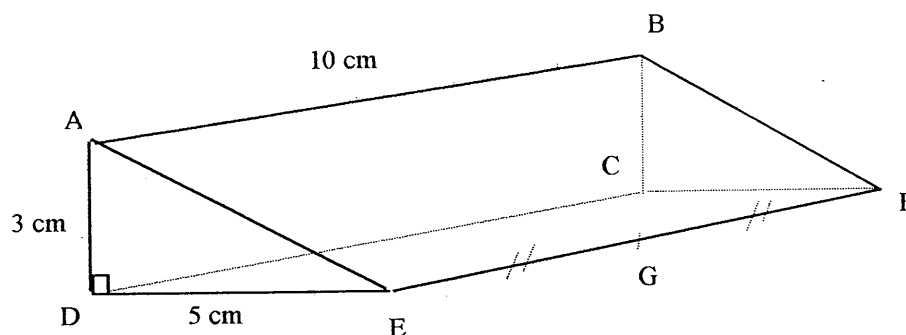
On demande également de calculer le volume du prisme V , le volume de la pyramide ABCF : V_1 et le volume de la pyramide ABEDF : V_2

validation :

- En accolant les deux pyramides on obtient un prisme.
- $V = V_1 + V_2$.

Situation 6 : Autre prisme tronqué

ABCDEF est un prisme dont la base est un triangle rectangle ; Le point G est le milieu du segment [EF].



1) On considère les solides ADEG, ABCDG et BCGF.

Décrire chaque solide : sa nature, la nature de chacune de ses faces, en justifiant les affirmations.

2) Calculer les volumes des solides ABCDEF, ADEG, ABCDG, BCGF .

Comment peut-on vérifier la cohérence de ces résultats ?

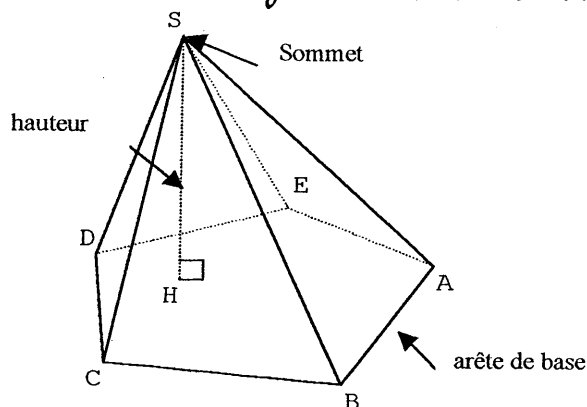
Situations 7 : D'autres patrons

Réaliser un patron d'une pyramide régulière à base hexagonale.
Réaliser un patron d'un tétraèdre régulier.

A chercher : « Comment obtenir 4 triangles équilatéraux avec 6 allumettes ? »

A la fin de l'enchaînement de ces situations, nous faisons le bilan suivant :

A Retenir : 1- On appelle « pyramide » un solide dont une face est un polygone, « la base », et dont les autres faces sont des triangles, « les faces latérales ».

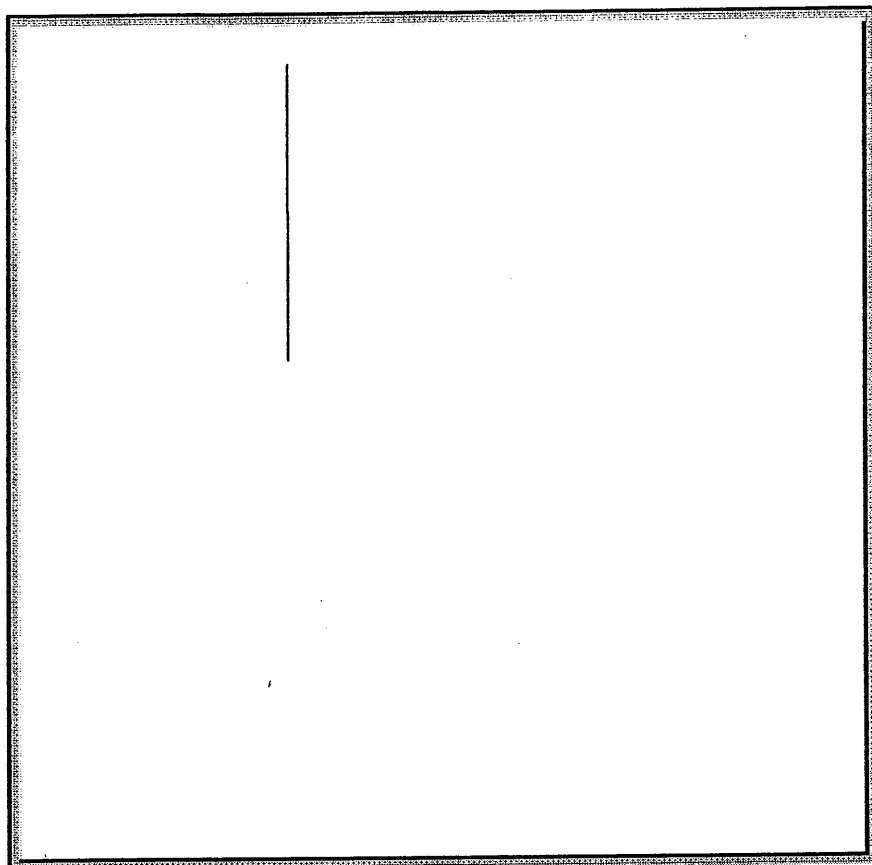


2- On appelle pyramide régulière une pyramide qui a pour base un polygone régulier ;

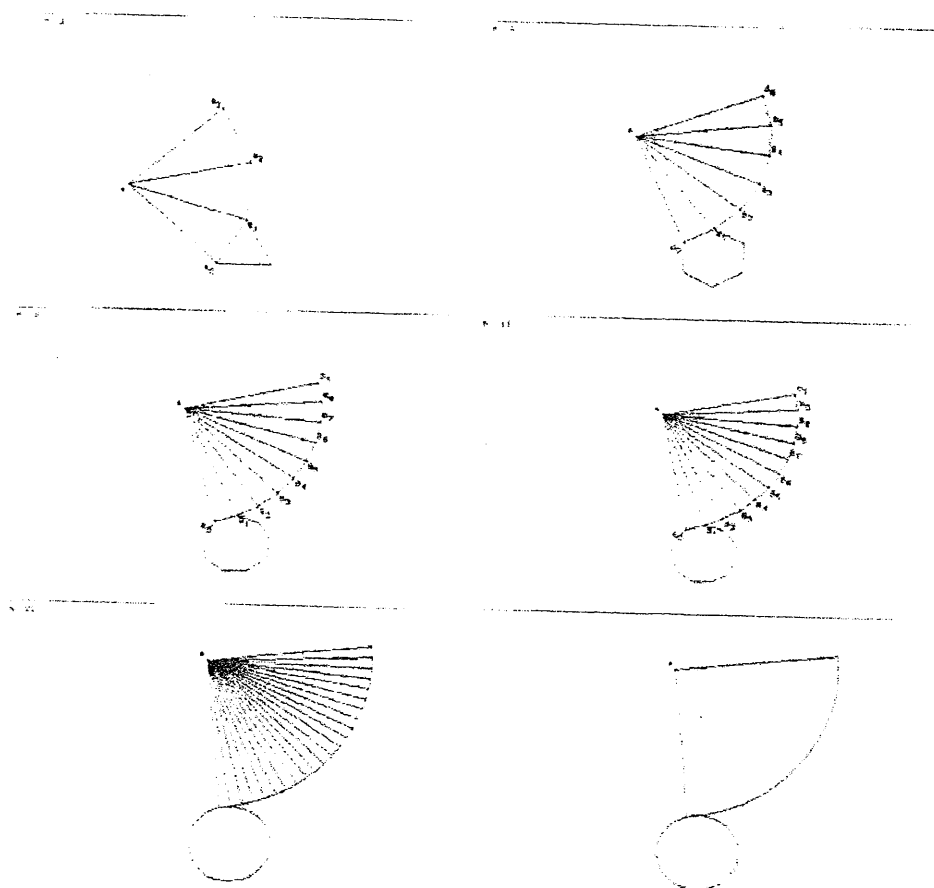
Sa hauteur coupe la base en son centre, ses arêtes latérales ont la même longueur, ses faces latérales sont des triangles isocèles.

3- On appelle tétraèdre une pyramide dont la base est un triangle. On appelle tétraèdre régulier un tétraèdre dont les faces sont des triangles équilatéraux.

Annexe 1



DE PATRONS DE PYRAMIDES RÉGULIÈRES VERS CELUI DU CÔNE



QUELQUES NOTIONS THEORIQUES POUR CONCLURE

Ce document sur la géométrie en 5^e et 4^e est avant tout destiné à aider des enseignants dans la préparation de leur classe. Nous n'avons pas voulu en alourdir la lecture par des références théoriques. Cependant, même si cela ne transparaît pas toujours dans notre travail, nous nous sommes appuyés sur des connaissances théoriques en didactique des mathématiques et en pédagogie générale pour rédiger ce document.

Nous pensons que quelques références théoriques peuvent permettre d'améliorer notre pratique en apportant un autre éclairage sur les apprentissages des élèves.

Il est évident qu'un enseignant isolé n'a ni le temps, ni les moyens matériels de lire de nombreux ouvrages, d'en extraire des théories applicables, de les assimiler suffisamment pour pouvoir les appliquer dans sa classe.

C'est grâce à la structure d'un groupe IREM, composé d'enseignants de terrain, que ce travail a pu être réalisé. Le travail au sein de ce groupe consiste à préparer des situations d'enseignement, à les expérimenter en classe en observant les élèves au travail, leurs réactions, leurs productions. Ensuite la confrontation des expériences permet de modifier les situations. Certains des enseignants qui appartiennent à ce groupe animent des actions de formation initiale ou continue, participent à des formations ou des recherches en didactique des mathématiques, assistent à des conférences à des colloques. Tout cela nous permet d'avoir à notre disposition un support théorique et de nous tenir au courant des expériences menées par d'autres groupes.

Nous présentons dans ce qui suit quelques unes des références qui sous tendent nos situations mais qui n'apparaissent pas toujours dans leur exposé.

Au cours du temps, plusieurs types de pédagogies se sont développées. Un professeur peut les utiliser selon sa classe, le niveau où il enseigne, ou successivement dans une même classe selon ce qu'il juge le plus adapté au moment. Ces différentes pédagogies résultent de conceptions différentes de l'apprentissage.

- L'exposé est **magistral**, l'élève doit apprendre et réciter. Dans cette **pédagogie dogmatique**, l'apprentissage est basé sur la mémoire.
- Des échanges ont lieu entre le maître d'une part et tel ou tel élève. Le maître pose une question, met les élèves sur la voie de la réponse et ils interviennent tour à tour. Le maître reformule certaines réponses bien choisies et conduit ainsi son exposé en faisant participer la classe. Le professeur utilise la **maïeutique** socratique. La conception de l'apprentissage qui la sous tendait du temps de Platon était la théorie de la réminiscence, l'élève a su dans un temps antérieur et le professeur lui permet de se ressouvenir. Sans aller jusque là, on peut imaginer que l'élève sait des choses implicitement et le professeur l'aide à les exprimer.
- Ce n'est pas le maître qui transmet un savoir écrit par avance, mais l'élève qui le **construit à partir de ses expériences dans le monde**. Le travail du maître consiste donc à amener l'élève hors de l'école ou au contraire à amener le monde extérieur dans l'école et à laisser

faire les choses naturellement, en surveillant et en conseillant. Depuis l'Emile de Rousseau, puis les "pédagogies nouvelles" de Freinet et Decroly de nombreuses expériences ont été faites.

- Le professeur organise une **situation d'enseignement** de sorte que les élèves soient confrontés à un problème qui provoque un **déséquilibre** dans leurs connaissances. Ils devront alors construire un savoir nouveau pour retrouver l'équilibre. La théorie d'un apprentissage par rééquilibration est due au psychologue Jean Piaget. La didactique des mathématiques s'en inspire, mais ne prend pas en compte les stades de développement selon l'âge. Il ne s'agit pas d'attendre que le développement se fasse seul l'âge venu. La pédagogie de Vigotsky nous semble mieux adaptée à ce que disent les didacticiens. L'apprentissage se fait par étapes, en proposant des situations pas trop proches de ce que l'élève sait déjà faire pour garder un intérêt, mais pas trop éloignées quand même pour ne pas décourager. Le rôle du professeur consiste à guider, apporter les connaissances nécessaires pour accomplir la tâche.

DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES :

CONCEPTION ET OBSTACLE :

D'après les travaux que les élèves produisent, on peut inférer des **conceptions**, des **modèles implicites** qui fonctionnent dans leur tête relativement au savoir visé. Cette notion est théorique, on ne peut pas ouvrir les têtes des élèves pour connaître de façon explicite leurs conceptions!

Ces modèles qui proviennent de connaissances antérieures, font obstacle au savoir nouveau qui se construit par restructuration du savoir ancien qui lui résiste. Sans modèles implicites dans la tête de l'élève, le professeur ne peut rien enseigner : ce sont des **points d'appui** desquels nous partons pour prévoir des explicitations, des restructurations.

Un **obstacle** n'est pas une absence de connaissance, au contraire c'est un savoir qui a fait ses preuves pour l'élève à un moment mais qui se révèle insuffisant ou mal adapté pour résoudre le problème posé. L'élève peut faire des erreurs car il cherche à utiliser ce savoir hors de son domaine de validité qu'il connaît mal.

Le rôle du professeur consiste à aménager des situations pour que les élèves puissent affronter les obstacles dans les meilleures conditions :

1. La tâche doit être suffisamment accessible pour ne pas décourager et motivante.
2. Le franchissement de l'obstacle doit être indispensable à la réalisation de la tâche proposée.

Dans chaque chapitre, nous avons donné les conceptions que nous avons pu repérer chez les élèves et les objectifs du chapitre qui s'appuient sur ces conceptions.

Exemple : Aire et périmètre.

La confusion aire et périmètre est le signe d'un obstacle bien connu.

La conception des élèves qui consiste à penser que l'aire et le périmètre varient toujours ensemble dans le même sens est issue de la vie courante : c'est un obstacle culturel. Quand on veut délimiter un espace autour de soi on essaie d'obtenir un plus grand périmètre : la surface espérée étant plus ou moins circulaire. En effet, pour le cercle, le carré, les

polygones réguliers, plus l'aire est grande, plus le périmètre est grand. Du moment que l'on impose la contrainte d'un agrandissement par homothétie, c'est vrai.

De plus l'apprentissage de ces deux notions est souvent trop réduit à des formules. Des élèves pensent qu'on ne peut pas calculer le périmètre d'un triangle de côtés connus parce qu'on n'a pas la formule pour le périmètre d'un triangle.

De ce fait les élèves confondent les formules et les grandeurs elles mêmes, ils n'ont pas assez expérimenté pour percevoir les différences entre les deux concepts : c'est un obstacle didactique, créé par l'enseignement.

Notre stratégie est donc de présenter des situations destinées à faire la distinction entre périmètre et aire. Nous avons déjà traité cet obstacle en sixième, nous proposons à nouveau une situation de rappel en cinquième : voir la situation du Tangram..

En effet ces obstacles sont souvent résistants car ils remettent en cause des conceptions anciennes et fortement ancrées dans les esprits. Revenir plusieurs fois à des moments et des niveaux différents avec des situations différentes n'est pas inutile.

CONNAISSANCE ET SAVOIR :

Les didacticiens font une différence entre connaissance et savoir. Les **connaissances** sont du domaine privé, par exemple, un élève de 6^e a des connaissances sur l'espace qu'il a acquises depuis son plus jeune âge grâce à l'exploration qu'il a pu en faire dans ses déplacements. Les **savoirs** sont institutionnels, ils sont issus d'un apprentissage scolaire. Quand un savoir est naturalisé, il est tellement familier qu'on ne se souvient plus de la façon dont on l'a appris, on a l'impression d'avoir toujours su, il devient à son tour une connaissance. Ce qui a été par le passé un **objet de savoir** est devenu un **outil** pour résoudre des problèmes.

Exemple : Parallélogrammes particuliers

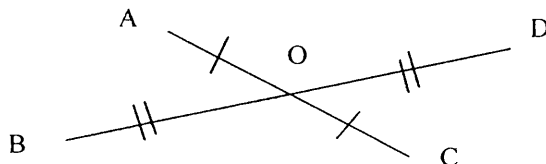
Les élèves ont des connaissances sur les quadrilatères car ils les rencontrent dans la vie courante et ils les ont étudiés dans les classes précédentes depuis leur plus jeune âge.

-Un parallélogramme est un quadrilatère qui a ses côtés opposés parallèles, d'ailleurs on entend le mot parallèle dans le nom parallélogramme.

En partant de cette définition que les élèves connaissent en arrivant en cinquième, nous allons démontrer qu'un quadrilatère qui a un centre de symétrie est bien un parallélogramme.

Comment construire un quadrilatère ayant un centre de symétrie ?
Un quadrilatère a un centre de symétrie, quelles sont ses propriétés ?

Observation : Plaçons d'abord le centre de symétrie O . Si on place un premier sommet A , le sommet C est son symétrique par rapport à O , donc O est le milieu de $[AC]$. De même avec les sommets B et D . O est donc le milieu des segments $[AC]$ et $[BD]$. Le symétrique du segment $[AB]$ est le segment $[CD]$ donc ils ont la même longueur et sont parallèles. Même chose pour les segments $[AD]$ et $[BC]$. Le quadrilatère $ABCD$ a ses côtés opposés parallèles deux à deux, donc c'est un parallélogramme.



Les propriétés caractéristiques qui constituent le bilan des situations mises en place dans ce chapitre, sont des savoirs pour les élèves de cinquième. Nous avons signalé les phases d'institutionnalisation en rédigeant soigneusement les savoirs "A Retenir".

A Retenir :

Quand un quadrilatère a un centre de symétrie, alors on est sûr que c'est un parallélogramme.

Une **connaissance** n'est pas forcément du domaine des mathématiques, ce n'est pas forcément une notion ayant fait l'objet d'un apprentissage scolaire. Ce sera cependant un **outil** qui permet à l'élève de résoudre un problème inconnu jusqu'alors.

Les élèves utilisent, pour dessiner des symétriques de figures par symétrie axiale, l'expérience personnelle qu'ils ont de reflets dans l'eau ou dans un miroir. Cette connaissance culturelle est un point d'appui qui permet aux élèves d'imaginer des symétriques par pliage sans en avoir jamais fait auparavant.

Nous avons précisé dans chaque chapitre, les **savoirs visés**, mais le savoir que transmet le professeur n'est pas le savoir savant qu'il possède en tant qu'expert de sa discipline. Pour enseigner, le professeur doit choisir des objectifs de savoir, concevoir un langage adapté aux élèves, préparer un enchaînement de situations d'enseignement, prévoir une trajectoire d'apprentissage pour les élèves. Il peut aussi utiliser des présentations particulières (tableaux, dessins graphiques,...) ou des objets servant à l'enseignement (calque, ficelle, ...). Il fait alors ce qu'Yves CHEVALLARD appelle une **transposition didactique**, il transforme le savoir savant en savoir enseignable.

Exemple : Symétrie centrale

Le savoir savant pourrait être formulé ainsi : une symétrie centrale est une application du plan dans lui même qui à tout point M associe le point M' tel que le centre de symétrie soit le milieu du segment $[MM']$.

Nous avons choisi de présenter la symétrie centrale en utilisant un calque. Nous pensons que cet outil peut aider les élèves à se fabriquer des images mentales qui vont favoriser le tracé de figures symétriques par rapport à un point. Ce choix impose un point de vue sur la symétrie qui lui associe la notion de mouvement. En utilisant le calque, on s'intéresse au chemin suivi par un point quand le calque fait demi tour. Ce n'est pas exactement la symétrie mathématique où seuls comptent le point de départ et le point d'arrivée. Ce dispositif induit chez les élèves une certaine conception des transformations qui pourra, plus tard, lors de l'apprentissage de la composée de deux translations par exemple constituer un obstacle. Des élèves ont du mal à comprendre, considérant le chemin parcouru qu'aller de A à B puis de B à C , cela revient au même que d'aller de A en C , à l'évidence le chemin parcouru n'est pas le même.

Il faut faire attention à ce que les élèves n'assimilent pas la symétrie au calque. Ils doivent être capables de tracer des symétriques, à utiliser les propriétés de la symétrie sans cet outil. Il arrive souvent que des élèves confondent une notion avec la situation dans laquelle ils ont rencontré celle ci pour la première fois.

Pour favoriser l'apprentissage, nous avons fait une transposition didactique, on propose ensuite à l'élève des situations où il apprend à se passer du calque. Petit à petit, on dégager ce qui est essentiel pour la notion de symétrie centrale, qu'il faut retenir, de ce qui a servi à l'enseigner.

Un savoir se crée progressivement dans un contexte culturel et social, à partir des expériences vécues en interaction avec d'autres.

Les connaissances déjà en place sont des facteurs très importants pour la compréhension de savoirs nouveaux.

Les situations proposées aux élèves les engagent dans la **négociation d'un sens commun à la classe et communicable**. Elles permettent de comprendre comment les savoirs sont reliés entre eux, de voir comment différentes situations sont reliées à un même savoir.

L'argumentation et la clarification sont au centre de ce processus progressif de négociation de sens : on apprend à écouter les questions et les arguments de l'autre. **L'erreur n'est pas considérée par le professeur comme une faute**, mais comme le témoin d'un étape dans le processus d'apprentissage, qui révèle au professeur quelle conception ou quelle procédure l'élève a mise en œuvre. **L'erreur est considérée comme un outil d'analyse de la manière d'apprendre d'un élève**

SITUATION D'ENSEIGNEMENT :

Nous avons utilisé le mot **situation** plutôt que le mot **activité** qui est aujourd'hui complètement galvaudé. On appelle activité tout ce qui fait bouger les élèves, un découpage, un coloriage, sans vérifier s'il y a ou non un enjeu de savoir mathématique.

A part les parents souvent ou les maîtres sans cesse, le milieu extérieur n'a aucune intention d'enseigner à l'élève. Rien ne l'empêche de retirer un enseignement de ce qui lui échoit mais c'est aléatoire car il n'y a pas eu d'intention didactique au départ.

Le milieu ordinaire produit des situations non didactiques. En revanche, le maître organise le milieu de la classe par des **situations didactiques**.

Dans toute classe, l'élève sait que le maître veut lui enseigner quelque chose et le maître attend de l'élève qu'il joue le jeu de l'apprentissage. Les attentes réciproques sont réglées par ce que Guy BROUSSEAU appelle le **contrat didactique**.

Dans certaines activités, les élèves sont constamment guidés, ils n'ont aucune décision à prendre, il leur suffit d'imiter. Quelquefois ils peuvent trouver les réponses dans les habitudes de la classe, dans les gestes du maître ou en essayant d'imaginer ses attentes : ce qui fait qu'ils n'apprennent pas. Un contrat didactique implicite est nécessaire pour réguler la classe mais l'enseignant qui fait fonctionner sa classe en utilisant trop souvent les effets du contrat didactique ne favorise pas les apprentissages. Pour permettre aux élèves d'apprendre, le professeur doit organiser suffisamment souvent des situations, dans lesquelles l'élève cherche la solution du problème sans se préoccuper du maître et de ce qu'il attend de lui : ce sont des **moments a-didactiques**.

Dans une situation d'enseignement :

1. L'élève doit prendre la question à sa charge, le maître doit lui en faire la **dévolution**, lui permettre d'imaginer ce qu'on attend de lui.
2. Quand il peut démarrer, il a une stratégie de base facile à imaginer sans connaissance nouvelle, il y a alors une **phase d'action a-didactique**, l'élève agit seul, prend des

décisions, met en œuvre sa stratégie pour essayer de résoudre le problème sans l'intervention du maître.

La stratégie envisagée sera sans doute lourde ou inefficace, les élèves devront en changer, en imaginer d'autres. **La tâche ne peut s'accomplir sans mobiliser des savoirs mathématiques** implicites ou explicites.

3. La situation doit amener une rétroaction qui permette à l'élève de **valider** ou d'invalider ses réponses sans l'intervention du maître.
4. Les élèves vont communiquer leurs réponses et leurs stratégies à leurs camarades, en discuter, tenter de les convaincre : c'est une **phase de formulation** où le savoir devient explicite.
5. Le maître va intervenir pour **institutionnaliser** le savoir, préciser ce qui est à retenir, introduire du vocabulaire.

VARIABLE DIDACTIQUE :

En préparant une situation, le professeur doit faire certains choix, de matériel, de gestion de classe, de données, de consignes : ce sont les **variables didactiques**. Il s'agit de paramètres dont le maître a le libre choix, mais selon les valeurs qu'il leur donne, les stratégies ou les solutions proposées par les élèves changent, donc l'apprentissage est différent. Il peut même n'y avoir aucun apprentissage, si des changements sont faits sans précautions sur ces variables, parce que le problème deviendra résoluble avec les connaissances antérieures des élèves ou bien des connaissances non mathématiques. L'élève n'apprendra donc rien de nouveau fixé dans nos objectifs. S'il veut garder l'efficacité des situations proposées, le professeur doit donc conserver les valeurs que nous avons données aux variables didactiques et sur lesquelles nous avons attiré l'attention dans les observations.

Exemple : Somme des angles d'un triangle

La valeur de 110° choisie pour l'angle CBF dans la situation 3 favorise le raisonnement. Ce choix a été expliqué dans les commentaires qui suivent cette situation.

Les mesures des angles ont été choisies de façon à ce que l'angle AFE semble plat.

En fait on a :

$$BFC = 180^\circ - (110^\circ + 30^\circ) = 40^\circ$$

$$CFD = 60^\circ \text{ et } AFB = 45^\circ$$

$$EFD = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ \quad \text{donc } AFE = 45^\circ + 40^\circ + 60^\circ + 40^\circ = 185^\circ$$

Des élèves trompés par l'aspect de la figure à main levée, commencent leur dessin en supposant que A, F et E sont alignés. Ils dessinent le segment [AE] d'abord. D'autres commencent par le triangle ABF puis l'angle de 110° , etc. D'autres encore commencent par le triangle DEF. Ils sont amenés à calculer des angles pour pouvoir faire le dessin.

Certains élèves pensent donc que les points A, F et E sont alignés et d'autres pensent qu'ils ne le sont pas.

De ce doute installé dans la classe, par la confrontation des différents dessins, vient la nécessité de prouver que les points A, F et E sont ou non alignés par autre chose que la figure.

Les élèves calculent alors des mesures d'angles et arrivent à la démonstration ci dessus.

TECHNIQUE, TECHNOLOGIE, THEORIE :

Yves CHEVALLARD a fourni un outil d'analyse des organisations mathématiques et didactiques proposées aux élèves dans nos classes.

Toute action humaine et donc notamment les mathématiques, se compose de **tâches** à accomplir, pour cela on utilise des **techniques**. Ces techniques sont rendues compréhensibles par un discours qui sert à les expliquer, la **technologie**. Cette technologie s'appuie sur des concepts **théoriques**.

Exemple : Cercle circonscrit à un triangle

Tâche à accomplir retrouver le centre d'un cercle.

Plusieurs **techniques** sont possibles qui varient suivant les élèves, leur niveau, ce qui a été vu avant ...

1. Tracer les médiatrices de deux cordes et prendre leur point d'intersection.
2. Tracer un triangle rectangle ayant ces trois sommets sur le cercle et prendre le milieu de l'hypoténuse.
3. Tracer un rectangle ayant ces quatre sommets sur le cercle et prendre le point d'intersection de ses diagonales.
4. Tracer la médiatrice d'une corde et prendre le milieu du diamètre obtenu.
5. Tracer un triangle quelconque ayant ces trois sommets sur le cercle et prendre le point d'intersection de ses trois médiatrices.
6. Rechercher en tâtonnant la corde ayant la plus grande longueur.

Certaines de ces techniques peuvent fonctionner même si on ne connaît qu'un arc de cercle. (1, 5) D'autres nécessitent le cercle complet (2, 3, 4, 6).

La technique 6 qui ne sera pas considérée comme correcte bien qu'assez efficace sur le plan de la précision obtenue est employée par beaucoup d'élèves, surtout dans les petites classes. Ces élèves en restent à une problématique pratique. Quand on recherche un point par une construction en mathématique, il est sous entendu que ce point doit être défini par des propriétés mathématiques (intersection, milieu,...), c'est pourquoi on n'admet pas la méthode 6 dans laquelle le point est obtenu par tâtonnement. Ce contrat implicite n'est pas assimilé par les élèves les plus jeunes, il faut le leur expliquer.

Les techniques 1, 4 ou 5 se rencontrent souvent quand on pose ce problème à la fin de la leçon sur le cercle circonscrit à un triangle.

Quand on pose ce problème avec un cercle complet dans la leçon sur la médiatrice en 6è, la technique 4 est majoritaire.

Les techniques 2 et 3 se rencontrent plutôt en 4è quand on vient d'étudier le cercle circonscrit au triangle rectangle.

Les **technologies** qui accompagnent ces techniques peuvent être différentes, on évoquera des propriétés, des théorèmes, par exemple :

Pour la 2, le cercle circonscrit à un triangle rectangle.

Pour la 4, la médiatrice d'une corde passe par le centre du cercle.

Pour la 5, le centre du cercle circonscrit à un triangle quelconque.

La technologie n'est pas toujours accessible à un élève qui emploie une technique au niveau d'enseignement où il est. Il peut avoir trouvé sa technique grâce à des connaissances culturelles (par exemple les diagonales du rectangle).

Toutes ces technologies sont fédérées par une **théorie** : La médiatrice d'un segment est l'ensemble des points équidistants des extrémités du segment.

Pour la technique 6, la théorie est différente . Il s'agit de l'inégalité triangulaire qui dit que pour toute corde qui coupe le cercle en deux points A et B, on a $AB \leq AC + CB$ où C est le centre du cercle et il y a égalité quand les trois points sont alignés, c'est à dire quand [AB] est un diamètre.

PEDAGOGIE GENERALE :

Les didactiques sont disciplinaires, l'idée de base étant que la construction de chaque savoir est spécifique de ce savoir et donc de la discipline. Les didactiques des différentes disciplines ont cependant construit des concepts communs, particulièrement en sciences. La pédagogie générale, elle, se développe indépendamment de la discipline. Les deux approches sont complémentaires et se rejoignent sur certains points.

HETEROGENEITE :

Les élèves apprennent de manière différente et les classes sont toujours plus ou moins hétérogènes.

Les élèves sont différents à plusieurs titres :

- Ils ont des **connaissances** différentes, qui viennent de leurs expériences privées et scolaires qui sont différentes. Le professeur prend appui sur ces connaissances pour les restructurer, les faire évoluer.
- Ils ont des **représentations mentales** différentes qui viennent de leurs parcours, de leurs expériences, de leurs histoires personnelles qui sont différentes. Le professeur pourra faire émerger ces représentations le plus souvent inconscientes et dont certaines font obstacle, pour les faire évoluer.
- Ils ont des **motivations** différentes qui viennent de leur passé personnel, de leur environnement familial, social et culturel. Le professeur pourra varier la présentation et la nature des situations qu'il propose pour que tous les élèves trouvent une source de motivation. Par exemple, un habillage concret des problèmes peut motiver certains élèves et en rebuter d'autres.
- Ils ont des **manières d'apprendre et de retenir** différentes liées à leur personnalité.
 - Certains retiennent plutôt des images, d'autres des phrases qu'ils ont entendues, ils sont visuels ou auditifs : ceci est développé par la gestion mentale d'Antoine de La Garanderie.
 - Certains apprennent d'abord globalement, cherchant une vue d'ensemble, ou au contraire d'autres ne peuvent pas apprendre tant qu'ils n'ont pas analysé pas à pas, ils sont synthétiques ou analytiques.
 - Certains ne peuvent apprendre un savoir nouveau qu'en étant actifs lors du premier contact avec ce savoir, d'autres préfèrent enregistrer passivement et y revenir seuls après, ils sont actifs ou passifs.

Il existe de nombreuses autres classifications car les nuances entre chacun sont infinies et heureusement! Ces classifications ont le mérite d'attirer l'attention des enseignants sur le fait que chaque fois qu'un professeur propose une situation, il impose une manière d'apprendre, une approche de la notion et les représentations qui l'accompagnent, qui peuvent défavoriser certains élèves qui ne fonctionnent pas comme lui.

PEDAGOGIE DIFFERENCIEE :

La pédagogie différenciée ne consiste:

- **Ni à regrouper systématiquement ensemble tous les élèves ayant les mêmes difficultés, on dit parfois les mêmes besoins ou le même niveau.** Cela n'est pas exclu ponctuellement mais ne règle pas les problèmes de gestion de l'hétérogénéité. Un groupe homogène cela n'existe pas, sauf peut être dans une classe à un seul élève et encore pas tous les jours !
- **Ni à gérer plusieurs progressions simultanées, avec des objectifs différents, des exercices différents pour chaque élève ou même pour des groupes d'élèves.** Le savoir à acquérir est le projet commun à la classe, et le professeur le réalise à travers divers objectifs explicites et fixés qui sont les mêmes pour tous les élèves.

La pédagogie différenciée doit permettre à chaque élève d'exprimer sa différence. On est étonné de la richesse et de l'imagination que peuvent avoir les élèves quand **on leur donne la parole**. Mais il ne s'agit pas de donner la parole dans n'importe quelles conditions, laisser les élèves parler de tout et n'importe quoi, le professeur doit préparer et guider cette prise de parole.

La pédagogie différenciée consiste à :

- **Varié le plus possible les méthodes d'enseignement,** exposé oral du professeur ou d'un élève avec tableau, rétroprojecteur, ordinateur, travail en petits groupes, travail sur fiches individuelles ...
- **Travailler sur des situations problèmes** telles que nous en proposons pour que chacun puisse exprimer ses conceptions, ses méthodes, ses erreurs.
- **Arriver avec l'aide de tous au bilan prévu, objectif du professeur.** Ce bilan sera formulé par les élèves, le professeur s'adapte à leur formulation, la guide, introduit du vocabulaire pour construire le répertoire commun à la classe.
- **Proposer des exercices en classe et à la maison, variés** selon le niveau de difficulté et le point de vue qu'ils activent.
 - des exercices d'application directe pour l'acquisition du savoir
 - des exercices qui contrôlent la maîtrise de ce savoir
 - des exercices pour se débarrasser des conditions de l'apprentissage du savoir, décontextualiser pour que le savoir soit mobilisable dans n'importe quelle situation, que le transfert s'opère.

Une objection fréquente des professeurs n'ayant jamais ou très peu travaillé de cette façon est le manque de temps pour finir les programmes. Pour nous, travailler ainsi ne nous empêche pas de finir le programme. En effet les exercices répétitifs à la maison ou en séance de travail dirigé et leurs corrections, fastidieuses pour ceux qui ont réussi et malheureusement souvent inutiles pour les autres, disparaissent. **Les élèves font réellement des mathématiques en classe** au lieu de se contenter d'écouter et de copier au tableau. Le professeur qui a peur de manquer tout de même de temps, peut travailler ainsi pour certaines notions qu'il estime importantes et continuer un cours plus traditionnel pour le reste. De la sorte, quelques situations clés fourniront des repères dans le savoir et pour la mémoire de la classe.

Groupe "*Didactique des Mathématiques au Collège*"

Colette Baheux, Annie Berté, Joëlle Chagneau, Catherine Desnavres,
Pierre Faure, Jean Lafourcade, Francis Reynes, Claire Sageaux.

Géométrie au cycle central
5^{ème} et 4^{ème}

« *Un enchaînement d'activités* »

Cet ouvrage présente une suite de situations expérimentées dans des classes depuis plusieurs années pour enseigner la Géométrie en cinquième ou en quatrième.

La volonté des auteurs a été de construire une progression qui parte des problèmes que peuvent s'approprier les élèves en respectant au mieux le libellé du programme.

Public concerné :

- Professeurs de Collèges
- Etudiants préparant le CAPES interne ou externe de mathématiques
- Formateurs en formation initiale ou continue

Mots clés :

Géométrie, Activités, Situations d'apprentissage, Cycle central.

Edition :

1^{er} trimestre 2000.

IREM d'Aquitaine
40, rue Lamartine 33400 Talence

Groupe "Didactique des Mathématiques au Collège"

Colette Baheux, Annie Berté, Joëlle Chagneau, Catherine Desnavres,
Pierre Faure, Jean Lafourcade, Francis Reynes, Claire Sageaux.

Géométrie au cycle central

5^{ème} et 4^{ème}

« Un enchaînement d'activités »

Cet ouvrage présente une suite de situations expérimentées dans des classes depuis plusieurs années pour enseigner la Géométrie en cinquième ou en quatrième.

La volonté des auteurs a été de construire une progression qui parte des problèmes que peuvent s'approprier les élèves en respectant au mieux le libellé du programme.

Public concerné :

- Professeurs de Collèges
- Etudiants préparant le CAPES interne ou externe de mathématiques
- Formateurs en formation initiale ou continue

Mots clés :

Géométrie, Activités, Situations d'apprentissage, Cycle central.

Edition :

1^{er} trimestre 2000.

ISBN: 978-2-85633-008-1
EAN : 9782856330081