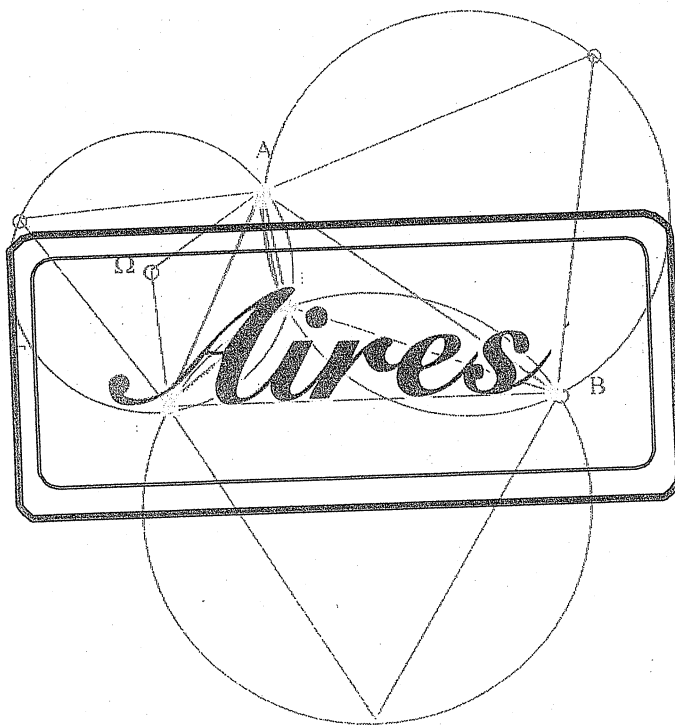
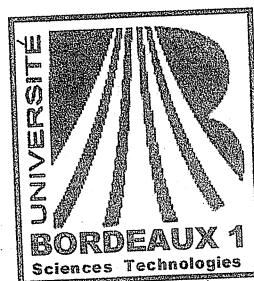


Université Bordeaux 1
*Institut de Recherche
pour l'Enseignement des Mathématiques*
40, rue Lamartine 33400 Talence



Groupe Géométrie & Arithmétique

IREM d'Aquitaine - 2000

Ont participé à l'élaboration de ce fascicule:

BOUSCASSE Jean-Marie Lycée Bernard Palissy 47 AGEN

CHAUMET Marie-Claude Lycée Camille Julian 33 BORDEAUX

DAMEY Pierre Université de Bordeaux I 33 TALENCE

GOUTEYRON Antoine: Professeur Honoraire

GOUTEYRON Claire Lycée René Cassin 64 BAYONNE

PINET Bernard Lycée Jean-Baptiste de Baudre 47 AGEN

POMES Roland Lycée René Cassin 64 BAYONNE

PUYOU Jacques Lycée Bernard Palissy 47 AGEN

ROBERT Yves Lycée René Cassin 64 BAYONNE

BORDEAUX 2000

TABLE DES MATIÈRES

Preliminaire	1
Propriétés fondamentales	2
Résumé	10
Exercices	12
Le parallélogramme	12
Le théorème des milieux	13
Le théorème de Pythagore	14
Le théorème de Clairaut	17
Les trois parallélogrammes	18
Théorème de Thalès Collège	19
Le trapèze complet	22
Centre de gravité d'un triangle	23
Le théorème de Ceva	24
Les deux triangles rectangles isocèles	26
Les trois triangles équilatéraux	27
Caractérisation analytique de l'alignement	28
Trapèze complet et parallélogramme	29
Le pied de la bissectrice	31
Quadrilatère contre triangle	32
Le triangle " double "	33
Le partage du Gâteau	35
Carrés et hauteurs	36
Les deux triangles rectangles isocèles	37
La symétrie oblique conserve les aires	38
Moyenne harmonique	39
La formule de Héron	42
Les deux " cordes "	44
Inégalité d'Antoine	46
Théorème de Brune	50
Bibliographie	51

PRÉLIMINAIRE

Les aires ne jouissent pas dans l'enseignement actuel des mathématiques du statut d'outil, en ce sens qu'elles sont peu utilisées pour démontrer des propriétés géométriques.

Notre but est de réhabiliter les aires et de montrer que cet outil très simple peut s'avérer très performant pour résoudre des problèmes de géométrie.

Nous proposons des démonstrations des principaux théorèmes de la géométrie du collège : théorème des milieux, théorème de Thalès, théorème de Pythagore, alignement de trois points dans un repère... Ces démonstrations s'appuient sur les propriétés fondamentales des aires, elles respectent les contraintes définies par les nouveaux programmes du collège et en suivent la progression.

Nous avons volontairement pris le parti d'utiliser les aires pour démontrer tous les résultats présentés même si, dans certains cas, d'autres outils sont plus performants.

D'un point de vue pratique, dans le cadre de l'enseignement, il est exclu de faire un chapitre correspondant au premier paragraphe de ce document présentant toutes les propriétés des aires telles que nous les avons énoncées. Ainsi, pour introduire une leçon concernant l'un des théorèmes fondamentaux le professeur pourra établir uniquement les propriétés nécessaires à la démonstration de celui-ci. Les activités préparatoires constituent un cadre privilégié pour la mise en place de ces propriétés et des prérequis. C'est dans ce souci que nous rappelons, à l'aide de logos numérotés, les propriétés sur les aires mises en jeu pour chacun des résultats que nous proposons.

Nous donnons des exemples de résolutions de problèmes à l'aide des aires, résolutions classiques ou moins classiques dans lesquelles le niveau des connaissances requises sera celui du premier cycle des collèges, même si certains des problèmes traités sont d'un niveau supérieur.

Dans toute l'étude qui suit, nous nous plaçons dans le plan euclidien et les problèmes de convexité seront abordés naïvement.

Nous supposons connue la formule donnant l'aire du triangle, à savoir, la moitié du produit de la base par la hauteur correspondante.

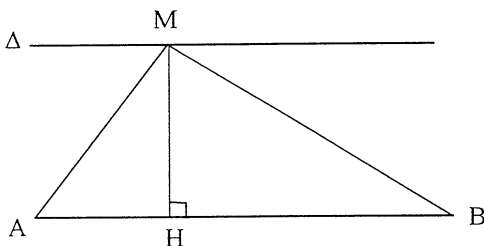
La notation *aire*(ABC) désigne un nombre égal à l'aire du triangle ABC si ABC est un triangle et à 0 si A , B et C sont alignés.

I- PROPRIÉTÉS FONDAMENTALES

Théorème 0

Soit deux points distincts A et B , une droite Δ parallèle à (AB) .

L'aire du triangle AMB est indépendante du choix de M sur Δ .

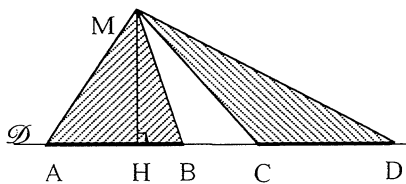


$$\text{aire}(MAB) = \frac{1}{2} AB \times MH$$

Théorème 1

Soit des points A, B, C et D d'une droite $\mathcal{D}$, un point M n'appartenant pas à $\mathcal{D}$.

$$AB = CD \Leftrightarrow \text{aire}(MAB) = \text{aire}(MCD)$$



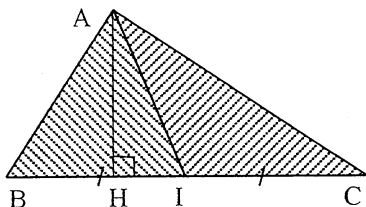
$$AB = CD \Leftrightarrow AB \times MH = CD \times MH$$

$$AB = CD \Leftrightarrow \text{aire}(MAB) = \text{aire}(MCD)$$

Théorème 2 : première caractérisation du milieu.

Soit un triangle ABC et un point I de la droite (BC) .

I est le milieu de $[B,C] \Leftrightarrow \text{aire}(ABI) = \text{aire}(ACI)$



I milieu de $[B,C] \Leftrightarrow BI = CI$

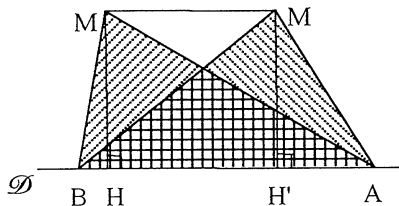
I milieu de $[B,C] \Leftrightarrow BI \times AH = CI \times AH$

I milieu de $[B,C] \Leftrightarrow \text{aire}(ABI) = \text{aire}(ACI)$

Théorème 3 : première caractérisation du parallélisme.

Soit des points A et B d'une droite $\mathcal{D}$, deux points distincts M et M' appartenant au même demi-plan de bord $\mathcal{D}$.

$(MM') \parallel (AB) \Leftrightarrow \text{aire}(MAB) = \text{aire}(M'AB)$.



$(MM') \parallel (AB) \Leftrightarrow MH = M'H'$

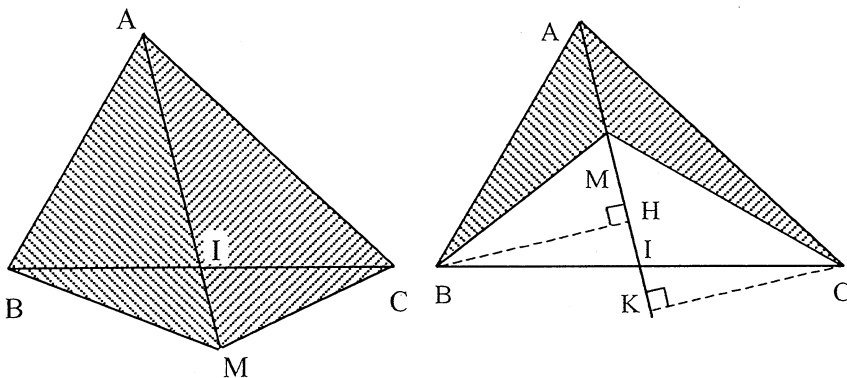
$(MM') \parallel (AB) \Leftrightarrow MH \times AB = M'H' \times AB$

$(MM') \parallel (AB) \Leftrightarrow \text{aire}(MAB) = \text{aire}(M'AB)$.

Théorème 4 : deuxième caractérisation du milieu.

Soit un triangle ABC , un point I de (BC) distinct de B et C , un point M de (AI) distinct de A .

$$I \text{ milieu de } [B,C] \Leftrightarrow \text{aire}(ABM) = \text{aire}(ACM)$$



$$\diamond I \text{ milieu de } [B,C] \Rightarrow \text{aire}(BMI) = \text{aire}(CMI) \text{ et } \text{aire}(ABI) = \text{aire}(ACI)$$

Par addition ou soustraction,

$$I \text{ milieu de } [B,C] \Rightarrow \text{aire}(ABM) = \text{aire}(ACM)$$

$$\diamond \text{aire}(ABM) = \text{aire}(ACM) \Rightarrow AM \times BH = AM \times CK$$

$$\Rightarrow BH = CK$$

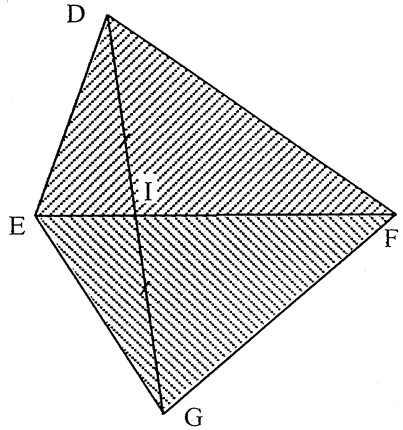
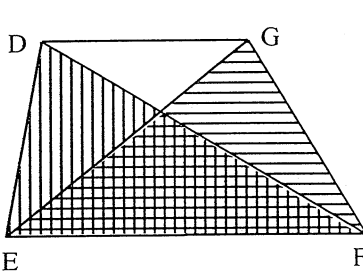
$$\Rightarrow \text{aire}(BMI) = \text{aire}(CMI)$$

$$\Rightarrow I \text{ milieu de } [B,C] \text{ d'après le théorème 3.}$$

Remarque : le théorème suivant rassemble les résultats des théorèmes 3 et 4.

Soit quatre points A, B, C et D . On appelle I le milieu de $[D, G]$.

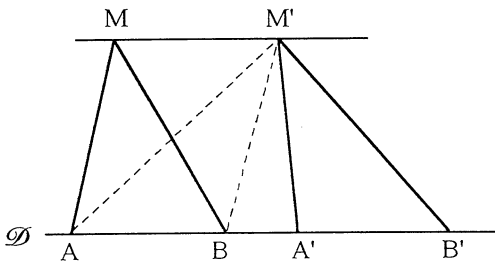
$$\text{aire}(DEF) = \text{aire}(GEF) \Leftrightarrow \begin{cases} (DG) \parallel (EF) \\ \text{ou} \\ I \in (EF) \end{cases}$$



Théorème 5 : deuxième caractérisation du parallélisme.

Soit des points A, B, A' et B' d'une droite $\mathcal{D}$ tels que $AB = A'B'$ et deux points distincts M et M' appartenant au même demi-plan de bord $\mathcal{D}$.

$$(MM') \parallel (AB) \Leftrightarrow \text{aire}(MAB) = \text{aire}(M'A'B').$$



Ce résultat est une conséquence immédiate du théorème 1 et du théorème 3..

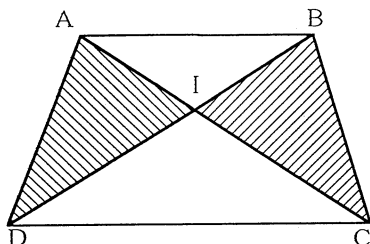
Théorème 6 : troisième caractérisation du parallélisme.

Soit un quadrilatère convexe ou croisé $ABCD$ tel que les points A et B appartiennent au même demi-plan de bord (CD) et tel que les droites (AC) et (BD) se coupent en I .

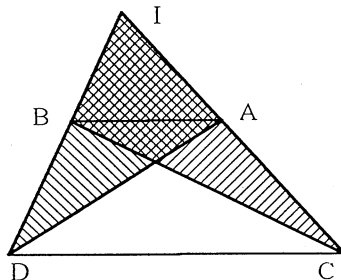
$$(AB) \parallel (CD) \Leftrightarrow \text{aire}(ADI) = \text{aire}(BCI)$$

Il n'y a que deux cas de figure à étudier :

1^{er} cas :



2^{ème} cas :



Dans les cas de figure ci-dessus on a d'après le théorème 4 :

$$(AB) \parallel (CD) \Leftrightarrow \text{aire}(ABD) = \text{aire}(ABC)$$

Comme

$$\begin{cases} \text{aire}(ABD) - \text{aire}(ABI) = \text{aire}(AID) \\ \text{et} \\ \text{aire}(ABC) - \text{aire}(ABI) = \text{aire}(BIC) \end{cases}$$

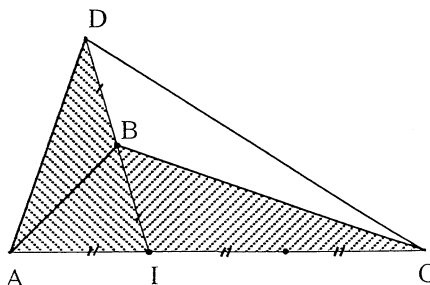
Comme

$$\begin{cases} \text{aire}(ABD) + \text{aire}(ABI) = \text{aire}(AID) \\ \text{et} \\ \text{aire}(ABC) + \text{aire}(ABI) = \text{aire}(BIC) \end{cases}$$

$$(AB) \parallel (CD) \Leftrightarrow \text{aire}(AID) = \text{aire}(BIC)$$

Remarque :

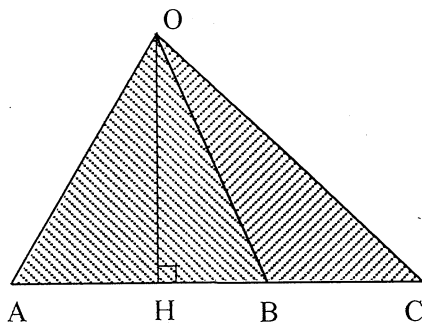
On peut trouver un quadrilatère qui n'est ni convexe ni croisé : c'est à dire " en fer de lance ", avec A et B appartenant au même demi-plan de bord (CD) et avoir $\text{aire}(AID) = \text{aire}(BIC)$ sans avoir $(AB) \parallel (CD)$



Théorème 7

Soit trois points deux à deux distincts A , B et C alignés et un point O non aligné avec A , B et C .

$$\frac{BA}{BC} = \frac{\text{aire}(OBA)}{\text{aire}(OBC)}.$$



Soit H le projeté orthogonal de O sur la droite (AB) .

$$\text{aire}(OBA) = \frac{1}{2} BA \times OH \quad \text{et}$$

$$\text{aire}(OBC) = \frac{1}{2} BC \times OH,$$

$$\text{ainsi } \frac{BA}{BC} = \frac{\text{aire}(OBA)}{\text{aire}(OBC)}.$$

Théorème 8

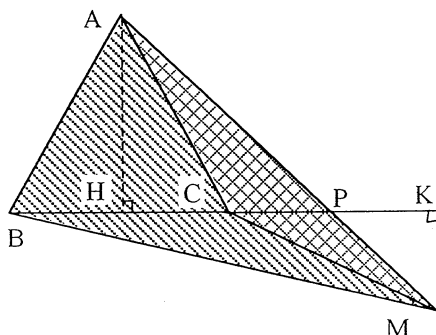
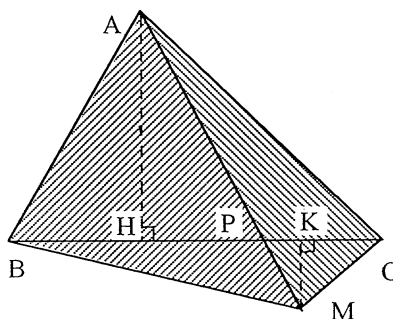
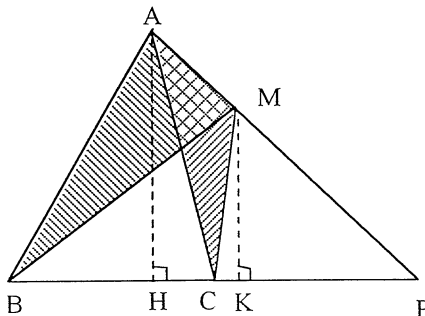
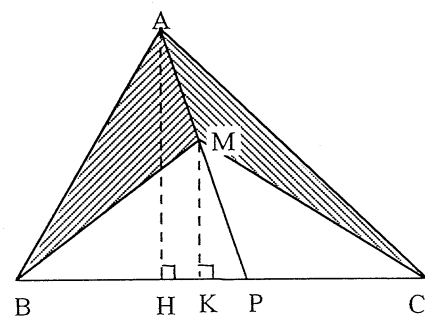
Soit un triangle ABC , un point P de (BC) distinct de B et C , un point M de (AP) distinct de A .

$$\frac{PB}{PC} = \frac{\text{aire}(AMB)}{\text{aire}(AMC)}.$$

Dans tous les cas de figure on a :

$$\text{aire}(ABP) = \frac{1}{2} \times BP \times AH \quad \text{et} \quad \text{aire}(ACP) = \frac{1}{2} \times CP \times AH.$$

$$\text{aire}(BMP) = \frac{1}{2} \times BP \times MK \quad \text{et} \quad \text{aire}(CMP) = \frac{1}{2} \times CP \times MK.$$



Dans les cas de figure ci-dessus on a :

$$\text{aire}(AMB) = \text{aire}(ABP) - \text{aire}(BMP)$$

$$\text{aire}(AMC) = \text{aire}(ACP) - \text{aire}(CMP)$$

$$\text{aire}(AMB) = \text{aire}(ABP) + \text{aire}(BMP)$$

$$\text{aire}(AMC) = \text{aire}(ACP) + \text{aire}(CMP)$$

Ainsi, par addition ou soustraction membre à membre, selon le cas, on obtient le résultat recherché.

Remarque : les huit autres cas de figure se traitent d'une manière analogue

Théorème 9

Soit un trapèze $ABCD$ de bases $[A, B]$ et $[C, D]$

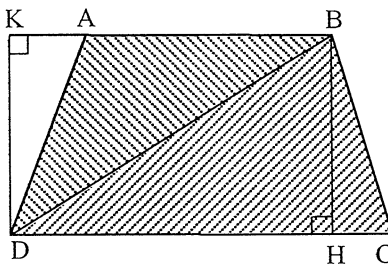
$$\frac{\text{aire}(ABD)}{\text{aire}(CBD)} = \frac{AB}{CD}$$

Soit H le projeté orthogonal du point B sur la droite (CD) et K le projeté du point D sur la droite (AB) .

$$\text{aire}(ABD) = \frac{1}{2} AB \times DK$$

et

$$\text{aire}(CBD) = \frac{1}{2} CD \times BH.$$



Comme $DK = BH$ car les droites (AB) et (CD) sont parallèles,

$$\text{donc } \frac{\text{aire}(ABD)}{\text{aire}(CBD)} = \frac{AB}{CD}.$$

Dans les pages qui suivent nous donnons des exemples de résolutions d'exercices à l'aide des théorèmes que nous venons d'établir.

Dans les solutions proposées nous avons inclus les logos représentant les théorèmes tels qu'ils figurent dans le résumé, ceci dans le but :

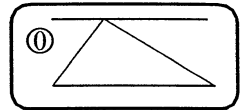
- de faciliter la lecture des démonstrations ;
- de permettre l'utilisation pédagogique de ces exercices au fur et à mesure de l'acquisition des propriétés concernant les aires.

Résumé

Théorème 0

Soit deux points distincts A et B , une droite Δ parallèle à (AB) .

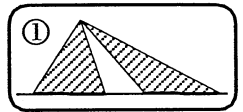
L'aire du triangle AMB est indépendante du choix de M sur Δ



Théorème 1

Soit des points A, B, C et D d'une droite $\mathcal{D}$, un point M n'appartenant pas à $\mathcal{D}$.

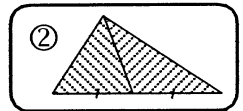
$$AB = CD \Leftrightarrow \text{aire}(MAB) = \text{aire}(MCD)$$



Théorème 2 : première caractérisation du milieu.

Soit un triangle ABC et un point I de la droite (BC) .

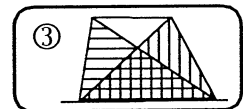
$$I \text{ est le milieu de } [B,C] \Leftrightarrow \text{aire}(ABI) = \text{aire}(ACI)$$



Théorème 3 : première caractérisation du parallélisme.

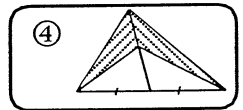
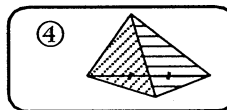
Soit des points A et B d'une droite $\mathcal{D}$, deux points distincts M et M' appartenant au même demi-plan de bord $\mathcal{D}$.

$$(MM') \parallel (AB) \Leftrightarrow \text{aire}(MAB) = \text{aire}(M'AB).$$



Théorème 4 : deuxième caractérisation du milieu.

Soit un triangle ABC , un point I de (BC) distinct de B et C , un point M de (AI) distinct de A .

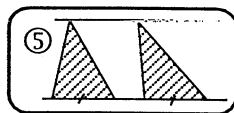


$$I \text{ milieu de } [B,C] \Leftrightarrow \text{aire}(ABM) = \text{aire}(ACM)$$

Théorème 5 : deuxième caractérisation du parallélisme.

Soit des points A, B, A' et B' d'une droite $\mathcal{D}$ tels que $AB = A'B'$, deux points distincts M et M' appartenant au même demi-plan de bord $\mathcal{D}$.

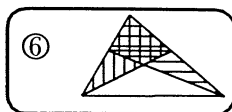
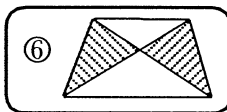
$$(MM') \parallel (AB) \Leftrightarrow \text{aire}(MAB) = \text{aire}(M'A'B').$$



Théorème 6 : troisième caractérisation du parallélisme.

Soit un quadrilatère convexe ou croisé $ABCD$ tel que A et B appartiennent au même demi-plan de bord (CD) et tel que les droites (AC) et (BD) se coupent en I .

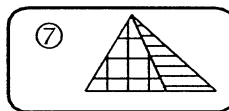
$$(AB) \parallel (CD) \Leftrightarrow \text{aire}(ADI) = \text{aire}(BCI)$$



Théorème 7

Soit trois points deux à deux distincts A, B et C alignés et un point O non aligné avec A, B et C .

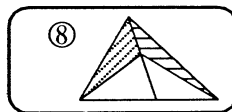
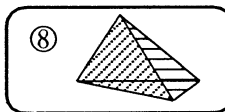
$$\frac{BA}{BC} = \frac{\text{aire}(OBA)}{\text{aire}(OBC)}.$$



Théorème 8

Soit un triangle ABC , un point P de (BC) distinct de B et C , un point M de (AP) distinct de A .

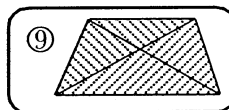
$$\frac{PB}{PC} = \frac{\text{aire}(AMB)}{\text{aire}(AMC)}.$$



Théorème 9

Soit un trapèze $ABCD$ de bases $[A, B]$ et $[C, D]$

$$\frac{\text{aire}(ABD)}{\text{aire}(CBD)} = \frac{AB}{CD}$$



II - EXERCICES

Le parallélogramme

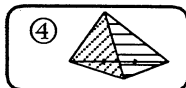
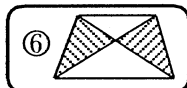
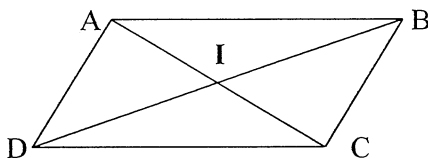
Un parallélogramme est un quadrilatère dans lequel les côtés opposés sont parallèles.

Soit un quadrilatère $ABCD$.

$ABCD$ est un parallélogramme $\Leftrightarrow [A,C]$ et $[B,D]$ ont même milieu.

- $ABCD$ est un parallélogramme

Soit I le point commun à $[A,C]$ et $[B,D]$.



D'après le théorème 6 :

$\text{aire}(ADI) = \text{aire}(BCI)$ car $(AB) \parallel (DC)$

$\text{aire}(ABI) = \text{aire}(DCI)$ car $(AD) \parallel (BC)$

donc $\text{aire}(ABD) = \text{aire}(CBD)$

donc d'après le théorème 4 :

I est le milieu de $[A,C]$

On démontre d'une manière analogue que I est le milieu de $[B,D]$.

- $[A,C]$ et $[B,D]$ ont même milieu

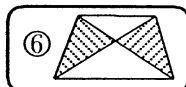
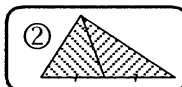
D'après le théorème 2 :

$\text{aire}(ADI) = \text{aire}(ABI)$ et

$\text{aire}(ABI) = \text{aire}(BCI)$.

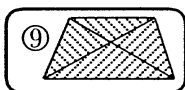
D'après le théorème 6 : $\text{aire}(ADI) = \text{aire}(BCI)$, donc $(AB) \parallel (DC)$.

On démontre d'une manière analogue que $(AD) \parallel (BC)$



Complément

$ABCD$ parallélogramme $\Rightarrow AB = DC$ et $AD = BC$.



En reprenant la démonstration ci-dessus on obtient

$\text{aire}(DAB) = \text{aire}(BDC)$, donc $AB = CD$, d'après le

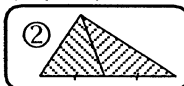
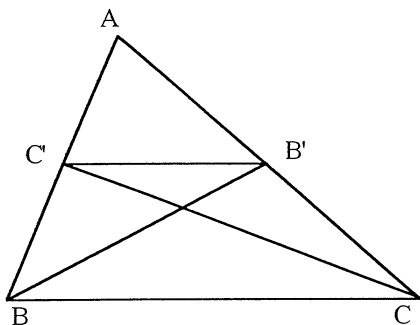
théorème 9.

On démontre d'une manière analogue que $AD = BC$.

Le théorème des milieux

Soit un triangle ABC , le milieu B' de $[A,C]$, un point C' de (AB) .

C' est le milieu de $[A,B] \Leftrightarrow (BC) \parallel (B'C')$



Comme B' est le milieu de $[A,C]$ on a :

$$\text{aire}(AC'B') = \text{aire}(CC'B')$$

• C' est le milieu de $[A,B]$

On a : $\text{aire}(AB'C') = \text{aire}(BB'C')$

donc $\text{aire}(BB'C') = \text{aire}(CC'B')$

D'après le théorème 3 : $(BC) \parallel (B'C')$.

• $(BC) \parallel (B'C')$

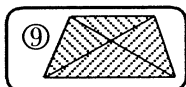
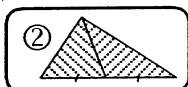
$$\text{aire}(CC'B') = \text{aire}(BB'C') \text{ car } (BC) \parallel (B'C')$$

donc $\text{aire}(AC'B') = \text{aire}(BB'C')$, donc C' est le milieu de $[A,B]$.

Complément

Soit un triangle ABC , B' milieu de $[A,C]$ et le milieu C' de $[A,B]$.

$$B'C' = \frac{1}{2} BC.$$



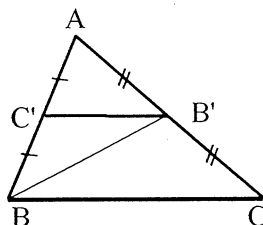
D'après le théorème 2

$$\text{aire}(BB'C') = \frac{1}{2} \text{aire}(BB'A) = \frac{1}{2} \text{aire}(BB'C)$$

Comme $(B'C') \parallel (BC)$ et

$$\text{aire}(BB'C') = \frac{1}{2} \text{aire}(BB'C),$$

d'après le théorème 9 $B'C' = \frac{1}{2} BC$.



Le théorème de Pythagore avec un trapèze

Soit un triangle ABC .

Si ABC est rectangle en A alors $BC^2 = AB^2 + AC^2$

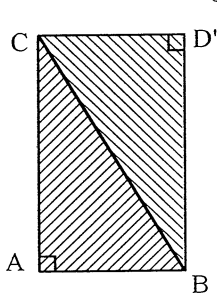


Figure 1

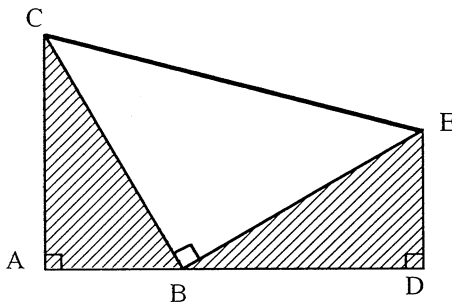


Figure 2

Dans la figure 1 $ABD'C$ est un rectangle de sens direct.

On pose $AB = c$, $BC = a$ et $CA = b$.

On considère la rotation de centre B et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ qui transforme le triangle BCD' en le triangle BED .

Le triangle CBE est rectangle en B .

Les points A , B et D sont alignés (calcul d'angles) et le quadrilatère $ADEC$ est un trapèze.

$$\text{aire}(ADEC) = \text{aire}(ABC) + \text{aire}(CBE) + \text{aire}(BED)$$

$$\frac{(b+c)^2}{2} = \frac{bc}{2} + \frac{a^2}{2} + \frac{bc}{2}, \text{ et après calcul on obtient } b^2 + c^2 = a^2$$

Le théorème de Pythagore avec un carré

Soit un triangle ABC .

Si ABC est rectangle en A alors $BC^2 = AB^2 + AC^2$

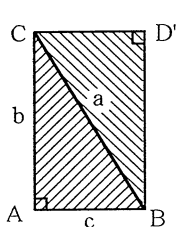


Figure 1

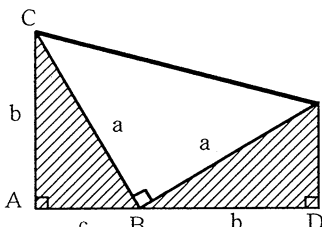


Figure 2

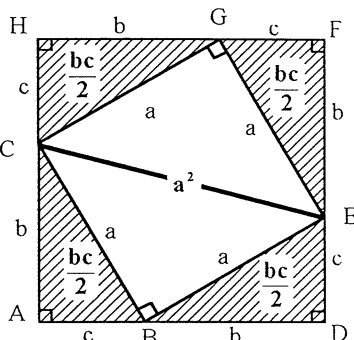


Figure 3

La figure 3 est obtenue en "doublant" la figure 2.

$$(b+c)^2 = a^2 + 2bc$$

$$b^2 + 2bc + c^2 = a^2 + 2bc$$

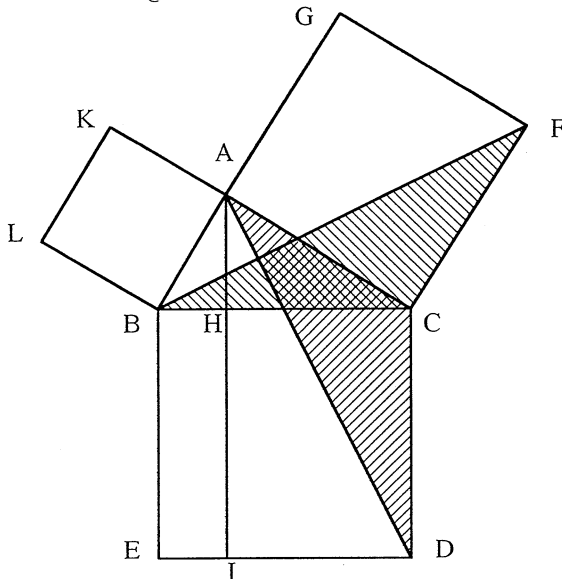
$$b^2 + c^2 = a^2$$

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

Le pont aux ânes

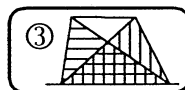
Soit un triangle ABC .

Si ABC est rectangle en A alors $BC^2 = AB^2 + AC^2$



Dans la figure ci-dessus $ABLK$, $ACFG$ et $BCDE$ sont des carrés extérieurs au triangle ABC , H est le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC .

La droite (AH) coupe $[E, D]$ en I .



Nous allons démontrer que : $\text{aire}(BCDE) = \text{aire}(ACFG) + \text{aire}(ABLK)$.

$$\text{aire}(CDIH) = 2 \times \text{aire}(HCD)$$

$$\text{aire}(CDIH) = 2 \times \text{aire}(ACD) \text{ car } (AH) \perp (CD) \text{ (Théorème 3)}$$

La rotation de centre C qui envoie A sur F transforme le triangle ACD en le triangle FCB , ainsi : $\text{aire}(CDIH) = 2 \times \text{aire}(FCB) = \text{aire}(ACFG)$.

Pour des raisons analogues : $\text{aire}(BHIE) = \text{aire}(ABLK)$.

Par conséquent : $\text{aire}(CHID) + \text{aire}(BHIE) = \text{aire}(ACFG) + \text{aire}(ABLK)$

$$\text{aire}(BCDE) = \text{aire}(ACFG) + \text{aire}(ABLK)$$

$$\text{Ainsi : } BC^2 = AB^2 + AC^2$$

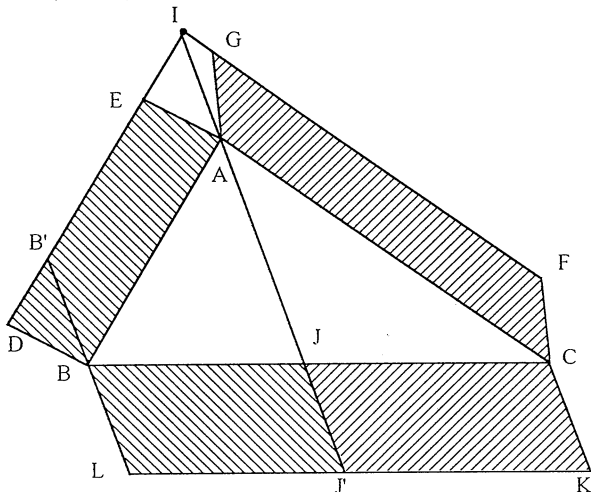
Le théorème de Clairaut^(*)

Soit un triangle ABC , un parallélogramme $ABDE$ extérieur au triangle ABC , un parallélogramme $ACFG$ extérieur au triangle ABC , I l'intersection des droites (DE) et (FG) .

La droite (IA) coupe (BC) en J et on note K et L les points tels que :

$$\overrightarrow{CK} = \overrightarrow{BL} = \overrightarrow{IA}.$$

Alors $\text{aire}(BCKL) = \text{aire}(ABDE) + \text{aire}(ACFG)$



Appelons B' l'intersection des droites (BL) et (DE) et J' l'intersection des droites (LA) et (LK) .

Nous avons $\overrightarrow{J'J} = \overrightarrow{LB} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{AI}$

Donc, $\text{aire}(BLJ'J) = \text{aire}(BB'JJ') = \text{aire}(BB'IA) = \text{aire}(BDEA)$.

On démontre d'une manière analogue : $\text{aire}(CKJ'J) = \text{aire}(CFGA)$.

Par conséquent : $\text{aire}(BLJ'J) + \text{aire}(CKJ'J) = \text{aire}(BDEA) + \text{aire}(CFAG)$

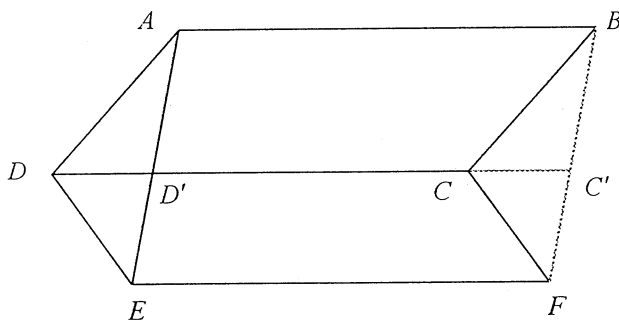
Donc $\text{aire}(BCKL) = \text{aire}(ABDE) + \text{aire}(ACFG)$.

(*) Citons à ce sujet F. G.-M. "EXERCICES DE GEOMETRIE", « Ce théorème est souvent attribué au frère de CLAIRAUT, et nous le laissons sous ce nom afin de rappeler un mathématicien distingué, mais il est dû à Pappus. D'après *récréations mathématiques* d'OZANAM, rééditées par Montucla en 1778 »

Remarque : les points I et J existent toujours et de plus $J \in [B, C]$.

Les trois parallélogrammes

Tout le monde connaît la configuration des trois parallélogrammes



Propriété :

L'aire du " plus grand " est égale à la somme des aires des deux autres

La droite (DC) coupe les segments $[A,E]$ et $[B,F]$ en D' et C' .

Le quadrilatère $ABC'D'$ est un parallélogramme qui a même aire que $ABCD^{(*)}$.

Le quadrilatère $D'C'FE$ est un parallélogramme qui a même aire que $DCFE$.

Ainsi $\text{aire}(ABFE) = \text{aire}(ABCD) + \text{aire}(CDEF)$.

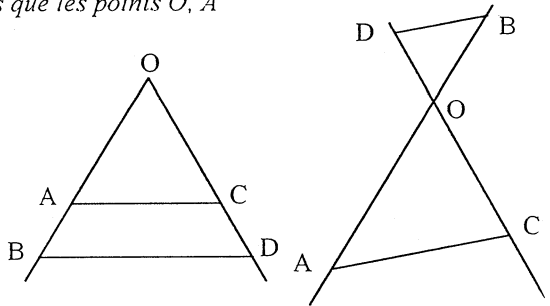
^(*) Théorème de même aire (mémère !).

Théorème de Thalès Collège

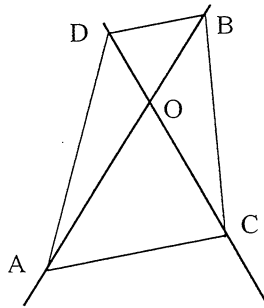
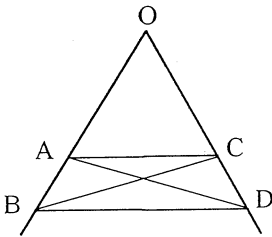
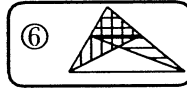
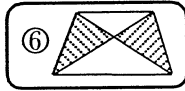
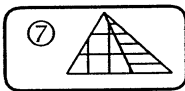
Soit deux triangles OAC et OBD tels que les points O, A et B d'une part, et O, C et D d'autre part soient alignés et rangés dans le même ordre.

Si $(AC) \parallel (BD)$ alors $\frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD}$.

Si $\frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD}$ alors $(AC) \parallel (BD)$.



Démonstration



Dans les deux cas de figure on a d'après le théorème 7,

$$\frac{OA}{OB} = \frac{\text{aire}(OAD)}{\text{aire}(OBD)} \quad \text{et} \quad \frac{OC}{OD} = \frac{\text{aire}(OCB)}{\text{aire}(ODB)}.$$

$$\text{Ainsi } \frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD} \Leftrightarrow \text{aire}(OAD) = \text{aire}(OCB)$$

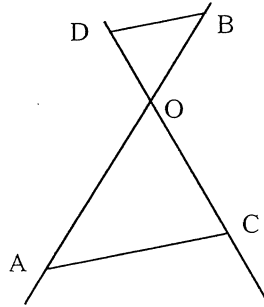
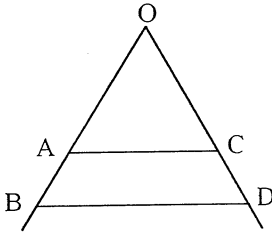
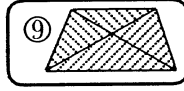
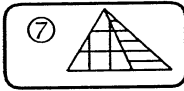
Or d'après le théorème 6,

$$\text{aire}(OAD) = \text{aire}(OCB) \Leftrightarrow (AC) \parallel (BD) \quad \text{et donc} \quad \frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD} \Leftrightarrow (AC) \parallel (BD).$$

Complément

Soit un triangle OAC , un point B situé sur (OA) et un point D situé sur (OC) tels que les droites (AC) et (BD) soient parallèles, on a

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD} = \frac{AC}{BD}.$$



Démonstration

Il reste à démontrer la deuxième égalité, nous allons le faire uniquement dans le cas de figure ci-dessous.

$$\begin{aligned} \frac{\text{aire}(OCA)}{\text{aire}(OCB)} &= \frac{\text{aire}(OBC)}{\text{aire}(OBD)} \quad \text{D'après le théorème 7} \\ \frac{\text{aire}(OCB) - \text{aire}(ACB)}{\text{aire}(OCB)} &= \frac{\text{aire}(OBD) - \text{aire}(BCD)}{\text{aire}(OBD)} \end{aligned}$$

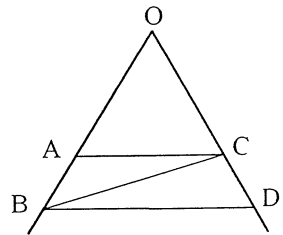
$$1 - \frac{\text{aire}(ACB)}{\text{aire}(OCB)} = 1 - \frac{\text{aire}(BCD)}{\text{aire}(OBD)}$$

$$\frac{\text{aire}(ACB)}{\text{aire}(OCB)} = \frac{\text{aire}(BCD)}{\text{aire}(OBD)}$$

$$\frac{\text{aire}(ACB)}{\text{aire}(BCD)} = \frac{\text{aire}(OCB)}{\text{aire}(OBD)}$$

$$\text{Or } \frac{\text{aire}(ACB)}{\text{aire}(BCD)} = \frac{AC}{BD} \quad (\text{théorème 9}) \quad \text{et} \quad \frac{\text{aire}(OBC)}{\text{aire}(OBD)} = \frac{OC}{OD} \quad (\text{théorème 7})$$

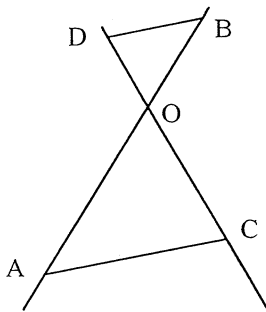
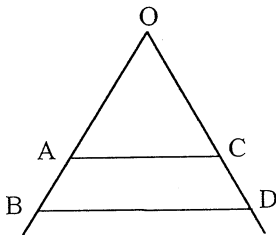
$$\text{Donc } \frac{AC}{BD} = \frac{OC}{OD}.$$



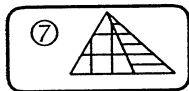
Remarque

Soit un triangle OAC , un point B situé sur (OA) et un point D situé sur (OC) tel que les droites (AC) et (BD) soient parallèles, on a

$$\frac{\text{aire}(OAC)}{\text{aire}(OBD)} = \left(\frac{OC}{OD}\right)^2.$$

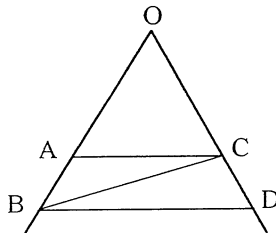


Démonstration



$$\frac{\text{aire}(OCA)}{\text{aire}(OCB)} = \frac{OA}{OB} \quad (\text{théorème 7}) \text{ et}$$

$$\frac{\text{aire}(OBC)}{\text{aire}(OBD)} = \frac{OC}{OD} \quad (\text{théorème 7}).$$



En multipliant membre à membre ces égalités on obtient,

$$\frac{\text{aire}(OCA)}{\text{aire}(OBD)} = \frac{OA}{OB} \times \frac{OC}{OD} = \left(\frac{OC}{OD}\right)^2, \text{ car on a vu que } \frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD}.$$

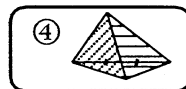
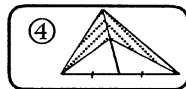
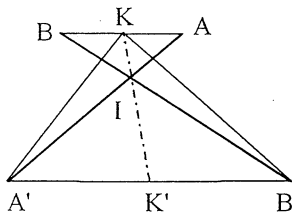
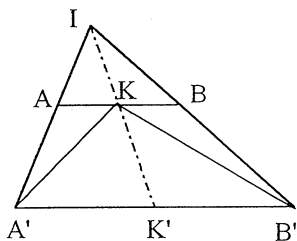
Le trapèze complet

Soit un quadrilatère $AA'B'B$ tel que (AB) et $(A'B')$ sont parallèles.

On suppose que (AA') et (BB') sont sécantes en I .

On note K le milieu de $[A, B]$ et K' le milieu de $[A', B']$.

Alors : les points I, K et K' sont alignés.



$\text{aire}(IKA) = \text{aire}(IKB)$ car K est le milieu de $[A, B]$

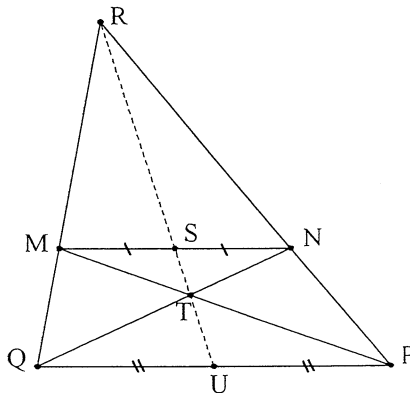
$\text{aire}(A'AK) = \text{aire}(B'BK)$ car K est le milieu de $[A, B]$ et $(AB) \parallel (A'B')$

Par addition ou soustraction membre à membre on : $\text{aire}(IKA') = \text{aire}(IKB')$.

D'après le théorème 4. la droite (IK) passe le milieu K' de $[A', B']$.

Remarque : Lorsque $ABB'A'$ est un parallélogramme, la droite (KK') est parallèle à (AA')

Conséquence : dans la configuration ci-contre où les droites (MN) et (PQ) sont parallèles, les points R, S, T et U sont alignés.



Centre de gravité d'un triangle

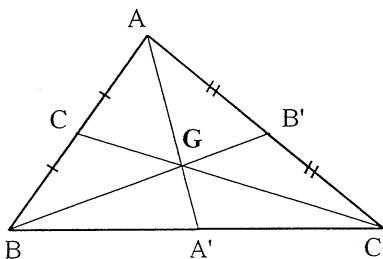
Soit un triangle ABC .

On désigne par B' le milieu de $[A,C]$, C' le milieu de $[A,B]$.

On appelle G l'intersection des droites (BB') et (CC') , A' l'intersection des droites de (AG) et (BC) .

Alors : • Le point A' est le milieu de $[B,C]$;

• le point G est situé au tiers de chaque médiane en partant de son pied.



• Démontrons que A' est le milieu de $[B,C]$.

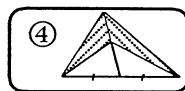
$$\text{aire}(GAB) = \text{aire}(GBC)$$

car B' est le milieu de $[A,C]$

(théorème 4)

$$\text{aire}(GAC) = \text{aire}(GBC)$$

car C' est le milieu de $[A,B]$.



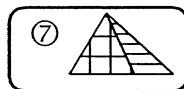
$$\text{Ainsi } \text{aire}(GAB) = \text{aire}(GAC)$$

D'après le théorème 4, (AG) coupe $[B,C]$ en son milieu A' .

Donc, les trois médianes du triangle ABC sont concourantes

• Démontrons que G est au tiers de $[A,A']$ à partir de A' .

$$\text{aire}(GBA') = \frac{1}{2} \times \text{aire}(GBC) = \frac{1}{2} \times \text{aire}(GBA).$$



$$\text{D'après le théorème 7, } A'G = \frac{1}{2} AG.$$

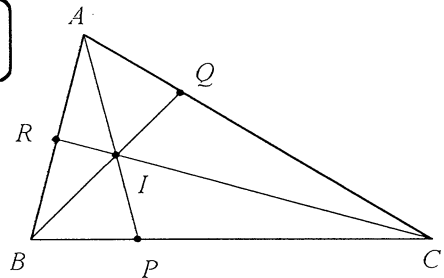
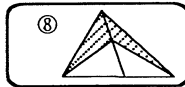
Ainsi G est au tiers de $[A,A']$ à partir de A' .

Le théorème de Ceva (partie directe)

Soit un triangle ABC et des points P , Q et R appartenant aux segments $]B, C[$, $]C, A[$ et $]A, B[$ tels que les droites (AP) , (BQ) et (CR) soient concourantes en I .

On a :
$$\frac{PB}{PC} \times \frac{QC}{QA} \times \frac{RA}{RC} = 1.$$

D'après le théorème 8 :



$$\begin{aligned} \frac{\text{aire}(IAB)}{\text{aire}(IAC)} &= \frac{PB}{PC} \\ \frac{\text{aire}(IBC)}{\text{aire}(IBA)} &= \frac{QC}{QA} \\ \frac{\text{aire}(ICA)}{\text{aire}(ICB)} &= \frac{RA}{RB} \end{aligned}$$

En multipliant membre à membre ces égalités on obtient :

$$\frac{PB}{PC} \times \frac{QC}{QA} \times \frac{RA}{RC} = 1$$

Remarque : cette démonstration reste valable lorsque les points P , Q et R appartiennent aux droites (BC) , (CA) et (AB) .

Le théorème de Ceva (partie réciproque)

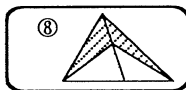
Soit un triangle ABC et des points P , Q et R appartenant aux segments $]B,C[$,

$]C,A[$ et $]A,B[$ tels que $\frac{PB}{PC} \times \frac{QC}{QA} \times \frac{RA}{RB} = 1$.

Alors les droites (AP) , (BQ) et (CR) soient concourantes.

On a : $\frac{PB}{PC} \times \frac{QC}{QA} \times \frac{RA}{RB} = 1$.

D'après le théorème 8 :



Soit I le point d'intersection des droites (BQ) et (CR) , P' l'intersection de la droite (AI) et du segment $]B,C[$.

$$\frac{\text{aire}(IBC)}{\text{aire}(IBA)} = \frac{QC}{QA}$$

$$\frac{\text{aire}(ICA)}{\text{aire}(ICB)} = \frac{RA}{RB}$$

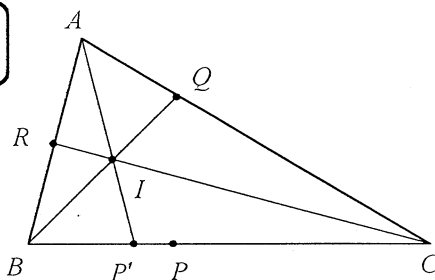
$$\frac{\text{aire}(ICA)}{\text{aire}(ICB)} = \frac{RA}{RB}$$

d'où $\frac{\text{aire}(ICA)}{\text{aire}(IBA)} = \frac{QC}{QA} \times \frac{RA}{RB}$ or $\frac{QC}{QA} \times \frac{RA}{RB} = \frac{PC}{PB}$, donc $\frac{\text{aire}(IAB)}{\text{aire}(IAC)} = \frac{PB}{PC}$

Or d'après le théorème 8, $\frac{\text{aire}(IAB)}{\text{aire}(IAC)} = \frac{P'B}{P'C}$.

On en déduit :

$\frac{PB}{PC} = \frac{P'B}{P'C}$ et $P = P'$ car P et P' appartiennent au segment $[B,C]$.



Les deux triangles rectangles isocèles

Soit un triangle ABC et des triangles ABB' et ACC' rectangles isocèles en A et tous les deux " extérieurs " ou tous les deux " intérieurs " au triangle ABC .
On appelle H le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC .

La droite (AH) coupe le segment $[B', C']$ en son milieu I .

Par des considérations
élémentaires sur les angles
on a :

$$\widehat{IAC'} = \widehat{ABC} = \beta$$

$$\widehat{IAB'} = \widehat{ACB} = \gamma$$

Ainsi :

$$\text{aire}(IAC') = \frac{1}{2} AI \times AC' \sin \gamma$$

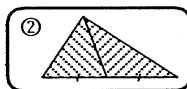
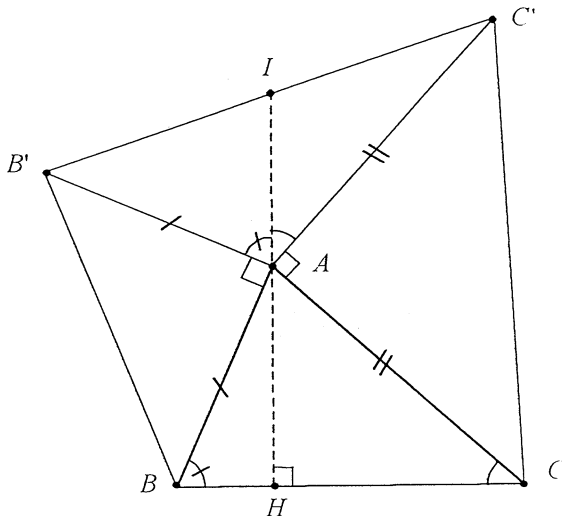
$$\text{aire}(IAB') = \frac{1}{2} AI \times AB' \sin \beta$$

Or $AC' \sin \gamma = AC \sin \gamma = AH$
et $AB' \sin \beta = AB \sin \beta = AH$

Donc $\text{aire}(IAC') = \text{aire}(IAB')$

D'après le théorème 2

I est le milieu de $[B', C']$.



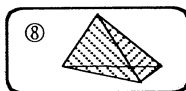
Les trois triangles équilatéraux

Soit un triangle ABC dont aucun des angles n'est supérieur à 120° et des triangles équilatéraux ABC' , BCA' et CAB' tous à l'extérieur du triangle ABC .

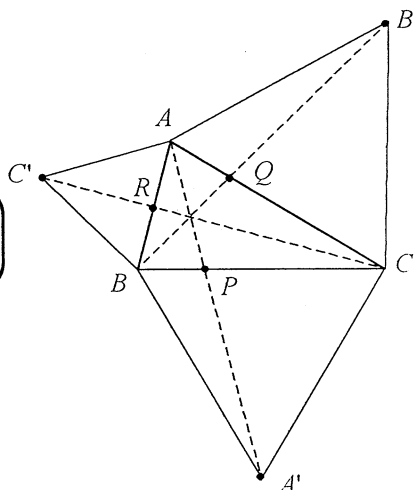
Les droites (AA') , (BB') et (CC') sont concourantes.

On appelle P (respectivement Q , R) l'intersection de la droite (AA') et du segment $[B, C]$ (respectivement (BB') et $[C, A]$, (CC') et $[A, B]$).

D'après le théorème 8



$$\begin{aligned} \frac{PB}{PC} &= \frac{\text{aire}(ABA')}{\text{aire}(ACA')} \\ \frac{RC}{RA} &= \frac{\text{aire}(BCB')}{\text{aire}(BAB')} \\ \frac{QA}{QB} &= \frac{\text{aire}(CAC')}{\text{aire}(CBC')} \end{aligned}$$



Les triangles ABA' et CBC' sont isométriques soit en considérant la rotation de centre B qui envoie A sur C' , soit en considérant les "cas d'égalités des triangles" (qui sont maintenant au programme de la classe de seconde...) donc ils ont même aire.

Pour des raisons analogues il en est de même des triangles ACA' et $B'CB$ et des triangles BAB' et $C'AC$.

Ainsi en multipliant membre à membre les trois égalités précédentes on obtient :

$$\frac{PB}{PC} \times \frac{RC}{RA} \times \frac{QA}{QB} = 1 \text{ ce qui nous assure d'après la réciproque du théorème de}$$

Céva que les droites (AA') , (BB') et (CC') sont concourantes.

Caractérisation analytique de l'alignement

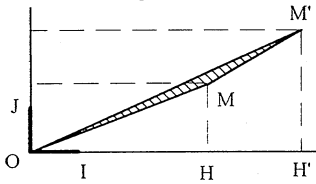
Le plan P est muni d'un repère orthonormal.

Soit (O, I, J) et $M(x, y)$ et $M'(x', y')$ deux points de coordonnées positives.

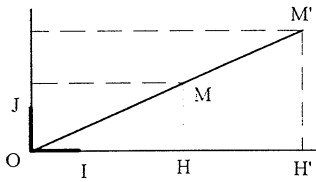
O, M et M' sont alignés $\Leftrightarrow xy' - x'y = 0$.

Au niveau du collège, par souci de commodité, le repère choisi est orthonormal.

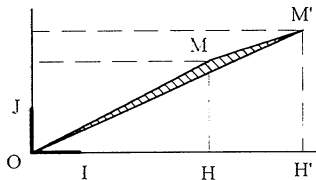
Quitte à échanger M et M' on suppose que $x \leq x'$.



$$2\text{aire}(OM'H') > 2\text{aire}(OMH) + 2\text{aire}(MHH'M').$$



$$2\text{aire}(OM'H') = 2\text{aire}(OMH) + 2\text{aire}(MHH'M').$$



$$2\text{aire}(OM'H') < 2\text{aire}(OMH) + 2\text{aire}(MHH'M').$$

O, M et M' sont alignés $\Leftrightarrow 2\text{aire}(OM'H') = 2\text{aire}(OMH) + 2\text{aire}(MHH'M')$.

O, M et M' sont alignés $\Leftrightarrow x'y' = xy + (x' - x)(y' + y)$.

O, M et M' sont alignés $\Leftrightarrow xy' - x'y = 0$.

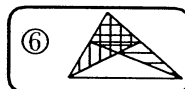
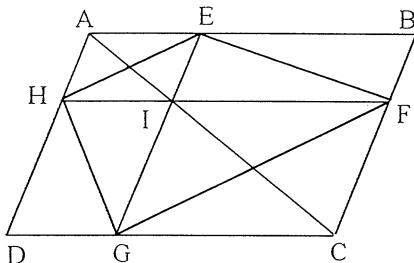
Trapèze complet et parallélogramme

Soit un parallélogramme $ABCD$, un point I situé sur le segment $[A,C]$ et distinct de A et C , la parallèle à (AD) passant par I coupe (AB) en E et (CD) en G , la parallèle à (AB) passant par I coupe (BC) en F et (AD) en H

1° $\text{aire}(HIGD) = \text{aire}(EIFB)$.

2° Les droites (EH) et (FG) sont parallèles.

3° Les droites (EF) , (AC) et (HG) sont concourantes ou parallèles.



1° $\text{aire}(HIGD) = \text{aire}(ADC) - \text{aire}(AHI) - \text{aire}(IGC)$.

$\text{aire}(EIFB) = \text{aire}(ABC) - \text{aire}(AEI) - \text{aire}(IFC)$.

donc $\text{aire}(HIGD) = \text{aire}(EIFB)$.

donc $\text{aire}(HIG) = \text{aire}(EFI)$.

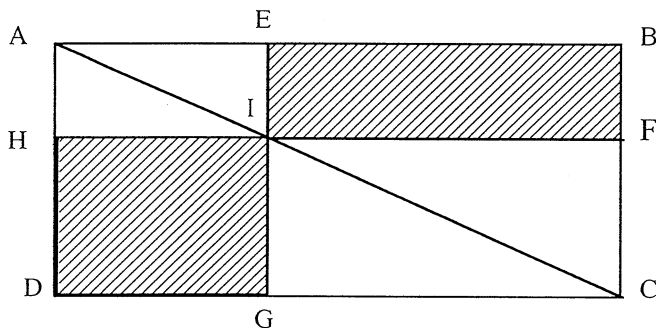
2° D'après le théorème 6, $(EH) \parallel (FG)$.

3° La droite (AC) passe par les milieux de $[E,H]$ et $[F,G]$ donc les droites (HG) , (AC) et (EF) sont concourantes ou parallèles. (Exercice « Trapèze complet »)

Remarque : ce résultat est encore vrai lorsque I est sur la droite (AC) .

Application : quatrième proportionnelle

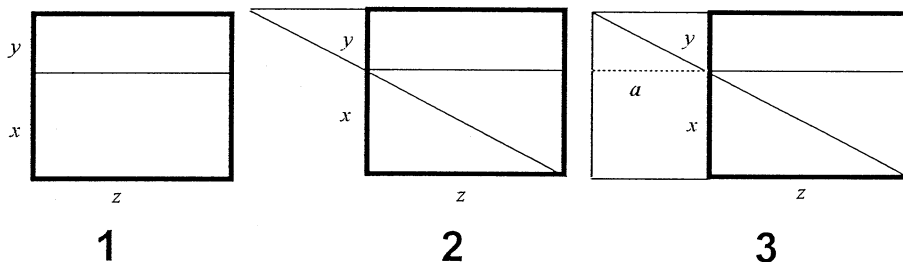
Dans le cas où $ABCD$ est un rectangle, on a : $IE \times IF = IH \times IG$.



Application :

Soit trois longueurs x , y et z , construire, à la règle et au compas une longueur a , telle que les couples (x, y) et (z, a) soient proportionnels.

Voici les différentes étapes de la construction :

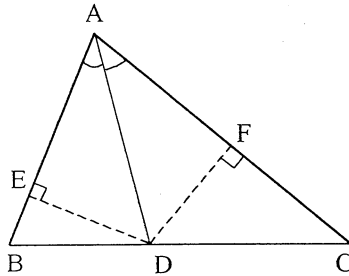


Remarque : la condition d'orthogonalité n'est pas indispensable.

Le pied de la bissectrice

Soit un triangle ABC et le pied D de la bissectrice intérieure issue de A .
On désigne par E et F les projetés orthogonaux de D sur (AB) et (AC) .

Alors : $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$

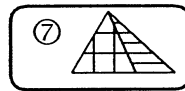


D'après le théorème 7,

$$\frac{DB}{DC} = \frac{\text{aire}(ABD)}{\text{aire}(ACD)}.$$

$$\frac{DB}{DC} = \frac{\frac{1}{2} DE \times AB}{\frac{1}{2} DF \times AC}.$$

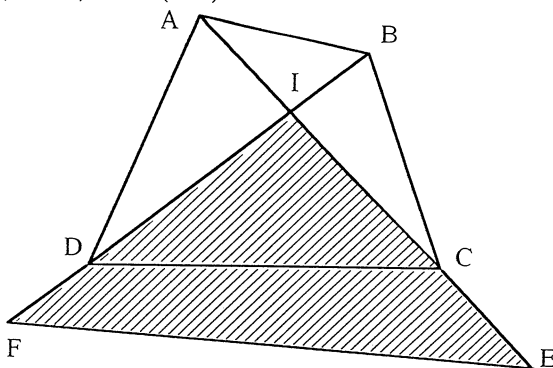
Or $DE = DF$, donc $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$



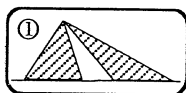
Quadrilatère contre triangle

Soit un quadrilatère non croisé $ABCD$, l'intersection I des diagonales (AC) et (BD) , le point E tel que $\overrightarrow{IE} = \overrightarrow{AC}$, le point F tel que $\overrightarrow{IF} = \overrightarrow{BD}$.

$$\text{aire}(ABCD) = \text{aire}(IEF)$$



D'après le théorème 1



$$\text{aire}(DIE) = \text{aire}(DCA) \text{ car } IE = CA$$

$$\text{aire}(EDF) = \text{aire}(EBI) \text{ car } DF = BI$$

$$\text{aire}(EBI) = \text{aire}(CBA) \text{ car } EI = CA$$

Par conséquent :

$$\text{aire}(IFE) = \text{aire}(DIE) + \text{aire}(EDF) = \text{aire}(DCA) + \text{aire}(ABC) = \text{aire}(ABCD).$$

Remarque :

On pourra ultérieurement en déduire l'expression suivante de l'aire du parallélogramme :

$$\text{aire}(ABCD) = \frac{1}{2} AC \times BD \times \sin \hat{I}$$

où $\hat{I}$ désigne l'un des angles géométriques $\widehat{AIB}$ ou $\widehat{BIC}$.

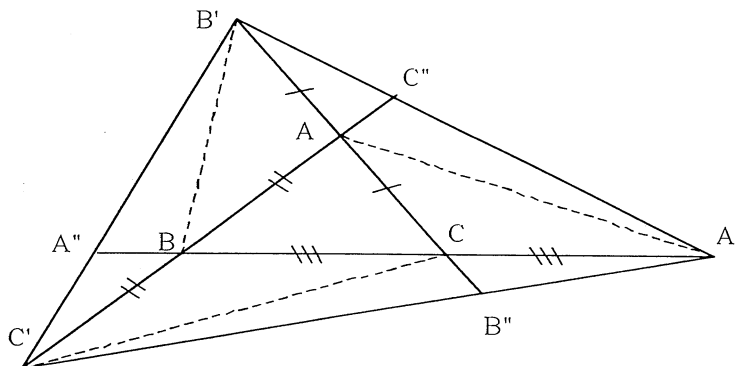
Le triangle “ double ”

Soit un triangle ABC , le point C' symétrique de A par rapport à B , le point A' symétrique de B par rapport à C et le point B' symétrique de C par rapport à A .

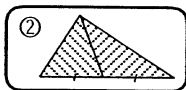
1° $\text{aire}(A'B'C') = 7\text{aire}(ABC)$

2° a) (AC) coupe $[A',C']$ en un point B'' situé au tiers de $[A',C']$ en partant de A' , de même, (BC) coupe $[B',C']$ en un point A'' situé au tiers de $[C',B']$ en partant de C' et (AB) coupe $[A',B']$ en un point C'' situé au tiers de $[B',A']$ en partant de B' .

b) En déduire une construction du triangle ABC connaissant le triangle $A'B'C'$



1° D'après le théorème 2



$\text{aire}(B'AB) = \text{aire}(ABC)$ car A est le milieu de $[B',C']$.

$\text{aire}(B'AB) = \text{aire}(B'CB)$ car B est le milieu de $[A,C']$.

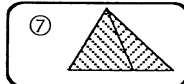
donc $\text{aire}(B'AC') = 2\text{aire}(ABC)$

Par analogie, $\text{aire}(C'BA') = 2\text{aire}(ABC)$ et $\text{aire}(A'CB') = 2\text{aire}(ABC)$

Ainsi $\text{aire}(A'B'C') = 6\text{aire}(ABC) + \text{aire}(ABC) = 7\text{aire}(ABC)$.

2° a) $\text{aire}(B'AC') = 2\text{aire}(B'AA')$, donc d'après le théorème 7,

$$B''C' = 2B''A',$$

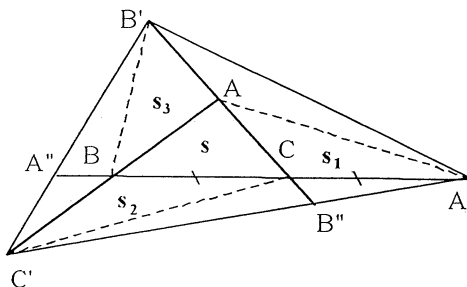


Comme A' et C' sont de part et d'autre de la droite (AC) ,

le point B'' est un point situé au tiers du segment $[A',C']$ en partant de A' .

De même (BC) coupe $(B'C')$ en A'' situé au tiers de $[B',C']$ en partant de C' .

b) Voici cette construction pas à pas ainsi que sa justification.



- B'' est situé au tiers de $[A', C']$ en partant de A' .
- A'' est situé au tiers de $[C', B']$ en partant de C' .
- C est l'intersection des droites $(A'A'')$ et $(B'B'')$.
- B est le symétrique de A' par rapport à C .
- A est l'intersection des droites (BC'') et $(B'B'')$.

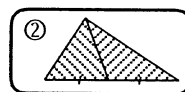
On pose $s = \text{aire}(ABC)$

$$s_1 = \text{aire}(CAA')$$

$$s_2 = \text{aire}(BCC')$$

$$s_3 = \text{aire}(ABB')$$

$s = s_1$ car C est le milieu de $[A', B]$, d'après le théorème 2



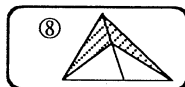
$s + s_2 = 2s_1$ car $B''C' = 2B''A'$, d'après le théorème 8

$$\underline{s = s_2},$$

donc d'après le théorème 2, B est le milieu de $[A, C']$.

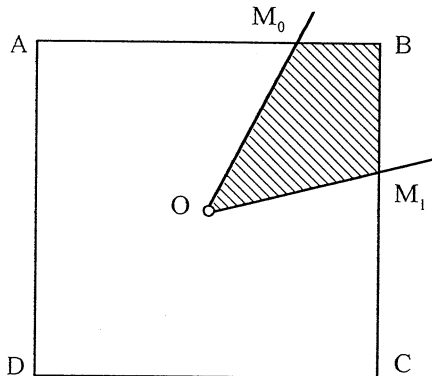
$s + s_3 = 2s_2$ car $A''B' = 2A''C'$, d'après le théorème 8,

donc $\underline{s = s_3}$, d'après le théorème 2, A est le milieu de $[C, B']$.



Le partage du Gâteau

Il s'agit de placer sur les côtés d'un carré ABCD de centre O les points M_0 , M_1 , M_2 , M_3 et M_4 de façon que les aires des triangles OM_0M_1 , OM_1M_2 , OM_2M_3 , OM_3M_4 et OM_4M_0 soient égales.



1° Comment choisir M_1 sur le bord du carré afin que l'aire hachurée soit égale à $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, ... de l'aire du carré.

En déduire un partage du carré en 3, 4, 5, ... parts égales.

2° Rechercher d'autres quadrilatères (polygones) pour lesquels le partage se ferait de manière analogue.

Indications :

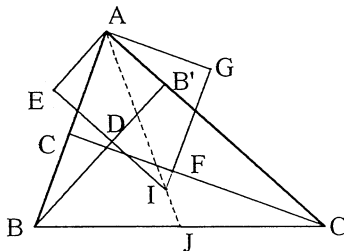
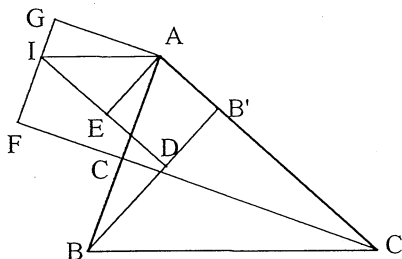
1° l'aire hachurée est égale à $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times AB \times (M_0B + BM_1)$;

2° penser aux polygones circonscrits à un cercle.

Carrés et hauteurs

Soit un triangle ABC , les pieds B' et C' des hauteurs issues de B et C , des carrés $AC'FG$ et $AB'DE$ et I l'intersection des droites (FG) et (DE) .

La droite (AI) est parallèle à (BC) ou passe par le milieu J de $[B, C]$.



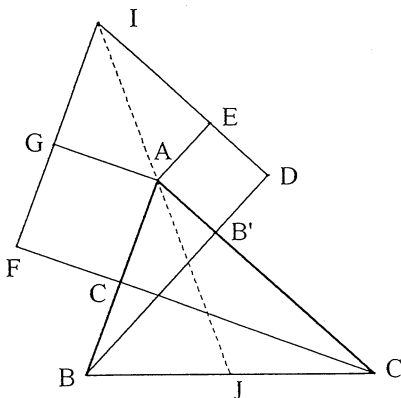
$$\frac{AC}{AC} = \frac{AB}{AB} = \cos \hat{A}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } AB \times AC' &= AB' \times AC \\ AB \times AG &= AE \times AC \\ \text{aire}(AGB) &= \text{aire}(AEC) \end{aligned}$$

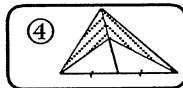
d'après le théorème 3

$$\text{aire}(AIB) = \text{aire}(AIC).$$

puisque $(DE) \parallel (AB)$ et $(FG) \parallel (AC)$



Si la droite (AI) coupe la droite (BC) en un point J alors J est le milieu du segment $[B, C]$ d'après le théorème 4.



Les deux triangles rectangles isocèles

Soit un triangle ABC et des triangles ABB' et ACC' rectangles isocèles en A et tous les deux " extérieurs " au triangle ABC .

On appelle H le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC .

La droite (AH) coupe le segment $[B', C']$ en son milieu I .

$$\text{aire}(IAC') = \frac{1}{2} IA \times C'I$$

Or les triangles rectangles

$C'I_1A$ et AHC sont

isométriques (en effet

$$\widehat{IAC'} = \widehat{HCA} \text{ et } AC' = AC)$$

Donc $C'I_1 = AH$, donc

$$\text{aire}(IAC') = \frac{1}{2} AI \times AH,$$

de même

$$\text{aire}(IAB') = \frac{1}{2} AI \times B'I,$$

Or les triangles rectangles

$B'I_1A$ et AHB sont

isométriques,

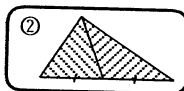
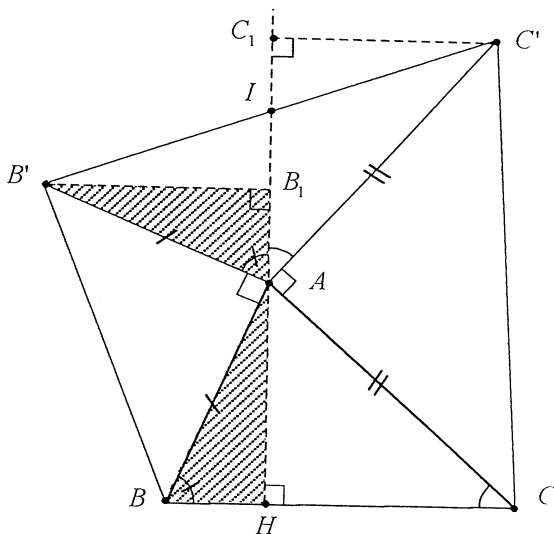
donc $B'I_1 = AH$, et

$$\text{aire}(IAB') = \frac{1}{2} AI \times AH,$$

Donc $\text{aire}(IAC') = \text{aire}(IAB')$

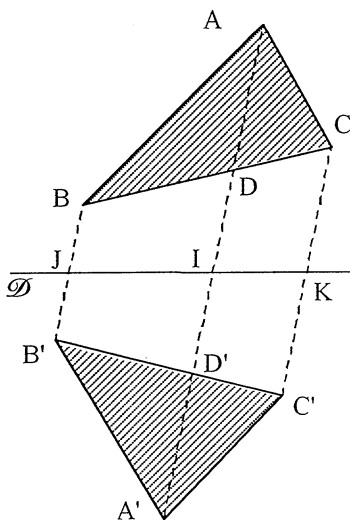
D'après le théorème 2

I est le milieu de $[B', C']$.



La symétrie oblique conserve les aires

La symétrie oblique conserve les aires



Soit une direction δ et une droite $\mathcal{D}$ de direction différente de δ .

On appelle **symétrie oblique** de direction δ et d'axe $\mathcal{D}$ l'application s qui a tout point M associe le point M' tel que, la droite de direction δ , passant par M , coupe $\mathcal{D}$ en un point H milieu de $[M, M']$

Nous admettrons que, pour démontrer ce résultat, il suffit de prouver que l'aire d'un triangle est conservée par une symétrie oblique

Soit un triangle ABC , on note $A'B'C'$ son image par la symétrie oblique s de direction δ et d'axe $\mathcal{D}$.

Nous allons démontrer que :

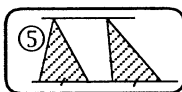
$$\text{aire}(ABC) = \text{aire}(A'B'C')$$

$$A'D' = AD$$

$$(BB') \parallel (AA')$$

$$\text{donc } \text{aire}(BAD) = \text{aire}(B'A'D')$$

d'après le théorème 5.

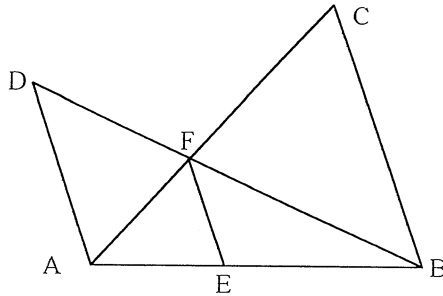


De même, $\text{aire}(CAD) = \text{aire}(C'A'D')$.

Puis par somme ou différence on trouve $\text{aire}(ABC) = \text{aire}(A'B'C')$

Moyenne harmonique

I-Préliminaire.



Dans la figure ci-contre les droites (AD) , (BC) et (EF) sont parallèles.

On a :
$$\frac{1}{AD} + \frac{1}{BC} = \frac{1}{EF}$$

Démonstration.

On considère le triangle ABD :
$$\frac{EF}{AD} = \frac{BE}{BA}$$

On considère le triangle ABC :
$$\frac{EF}{BC} = \frac{AE}{AB}$$

En ajoutant membre à membre ces deux égalités on obtient :
$$\frac{EF}{AD} + \frac{EF}{BC} = 1,$$

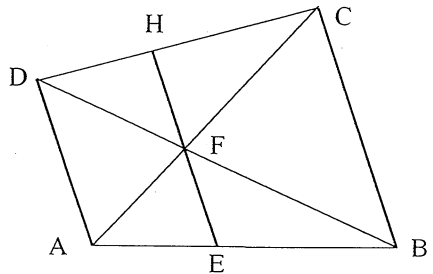
donc
$$\frac{1}{AD} + \frac{1}{BC} = \frac{1}{EF}$$

Remarque 1 : en physique lorsqu'on a deux résistances R_1 et R_2 en parallèle on sait qu'on peut les remplacer par une seule résistance R telle que :

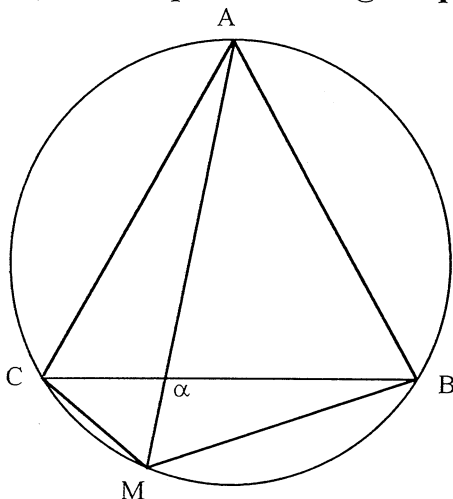
$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

Remarque 2 : la moyenne harmonique de deux réels strictement positifs a et b est le nombre h défini par
$$\frac{2}{h} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}.$$

Dans la figure ci-contre EH est la moyenne harmonique de AD et BC .



II- Moyenne Harmonique et Triangle équilatéral.



Dans la figure ci-dessus :

- ☞ le triangle ABC est équilatéral
- ☞ le point M est sur le petit arc $\widehat{BC}$
- ☞ le point α est l'intersection des segments $[B,C]$ et $[A,M]$

On a :
$$\frac{1}{MB} + \frac{1}{MC} = \frac{1}{M\alpha}$$

1^{ère} démonstration.

$$\text{aire}(MC\alpha) = \frac{1}{2} MC \times M\alpha \sin \widehat{CM\alpha}, \quad \text{aire}(MB\alpha) = \frac{1}{2} MB \times M\alpha \sin \widehat{BM\alpha} \text{ et}$$

$$\text{aire}(MBC) = \frac{1}{2} MC \times MB \sin \widehat{BMC}.$$

comme : $\widehat{CM\alpha} = \widehat{BM\alpha} = \frac{\pi}{3}$, $\widehat{BMC} = \frac{2\pi}{3}$

et que $\text{aire}(MC\alpha) + \text{aire}(MB\alpha) = \text{aire}(MBC)$,

on obtient $MC \times M\alpha + MB \times M\alpha = MB \times MC$

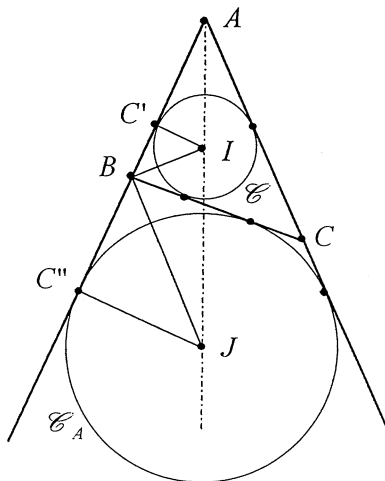
Ainsi :
$$\frac{1}{MB} + \frac{1}{MC} = \frac{1}{M\alpha}$$

La formule de Héron

Soit un triangle ABC , les longueurs des côtés sont notées $BC = a$, $CA = b$ et $AB = c$; on pose $2p = a + b + c$.

On se propose de démontrer que : $\text{aire}(ABC) = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

Dans la figure ci-contre, le cercle $\mathcal{C}$ de rayon r est inscrit dans le triangle ABC , le cercle $\mathcal{C}_A$ de rayon r_A est exinscrit dans l'angle de sommet A du triangle ABC . Les cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}_A$ sont tangents en C' et C'' à la droite (AB) .



$$\text{aire}(ABC) = \text{aire}(IAB) + \text{aire}(IBC) + \text{aire}(ICA) = \frac{1}{2}(c + a + b)r = pr$$

$$\text{aire}(ABC) = \text{aire}(JAB) - \text{aire}(JBC) + \text{aire}(JCA) = \frac{1}{2}(c - a + b)r = (p - a)r_A$$

Faisons le produit membre à membre de ces égalités :

$$(\text{aire}(ABC))^2 = p(p-a)rr_A.$$

Considérons les triangles rectangles $IC'B$ et $BC''J$.

$$\widehat{C''BJ} = \widehat{JBC} = \frac{\pi}{2} - \widehat{CBI} = \frac{\pi}{2} - \widehat{C'BI} = \widehat{C'IB}.$$

Par conséquent, les triangles $IC'B$ et $BC''J$ sont semblables⁽¹⁾, donc :

$$\frac{IC'}{BC''} = \frac{BC'}{JC''}, \text{ donc } \frac{r}{p-c} = \frac{p-b}{r_A}, \text{ donc } rr_A = (p-b)(p-c).$$

$$\text{Ainsi } (\text{aire}(ABC))^2 = p(p-a)(p-b)(p-c).$$

⁽¹⁾ En d'autre temps on aurait dit : « Ils sont semblables car leurs côtés sont perpendiculaires »

Remarque

Soit Ω le centre de la similitude S qui envoie (I, C', B) sur (B, C'', J)

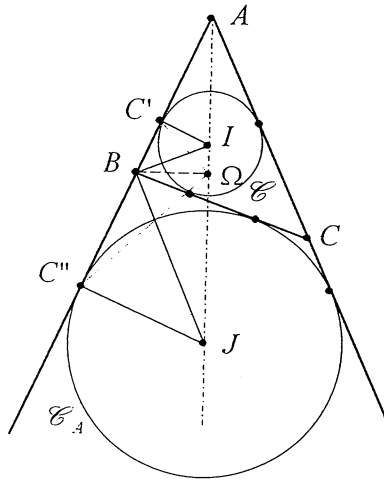
Cette similitude est d'angle $\frac{\pi}{2}$, donc S^2 est une homothétie de centre Ω telle

que : $I \xrightarrow{S} B \xrightarrow{S} J$, donc $S^2(I) = J$, donc $\Omega \in (IJ)$,

de plus $\widehat{(\overrightarrow{\Omega I}, \overrightarrow{\Omega B})} = \widehat{(\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega J})} = \frac{\pi}{2}$, donc le centre Ω est le pied de la

hauteur issue de B dans le triangle BIJ .

De plus, le triangle $\Omega C' C''$ est rectangle en Ω et est semblable au triangle IBJ ...



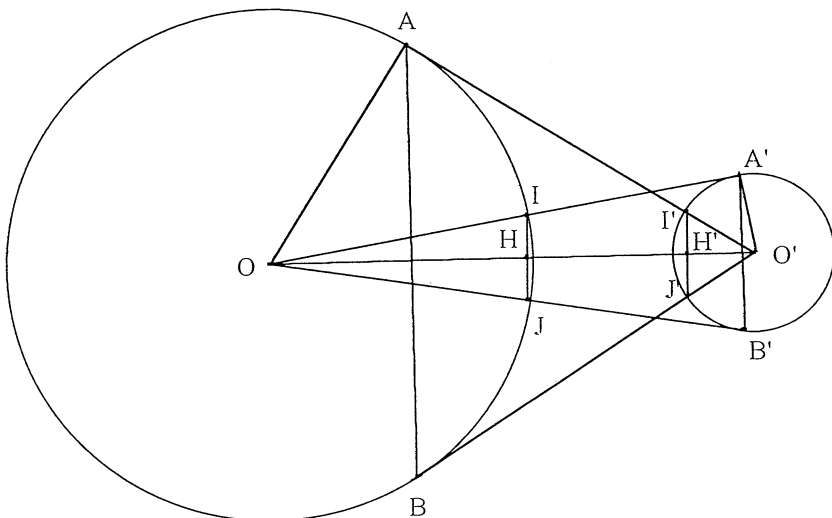
Les deux “ cordes ”

Données :

- deux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ de centres O et O' tels que O soit extérieur à $\mathcal{C}'$ et O' soit extérieur à $\mathcal{C}$;
- les tangentes $(O'A)$ et $(O'B)$ issues de O' à $\mathcal{C}$ coupent $\mathcal{C}'$ en I' et J' ;
- les tangentes (OA) et (OB) issues de O à $\mathcal{C}'$ coupent $\mathcal{C}$ en I et J avec I et I' dans le même demi-plan de bord (OO') .

Conséquence :

$$IJ = I'J'$$



$$\text{aire}(OIO') = \frac{1}{2}OI \times OA' = \frac{1}{2}rr' \quad \text{et} \quad \text{aire}(OIO') = \frac{1}{2}IH \times OO'$$

$$\text{aire}(OI'O') = \frac{1}{2}OI' \times OA = \frac{1}{2}rr' \quad \text{et} \quad \text{aire}(OI'O') = \frac{1}{2}I'H' \times OO'.$$

Donc $IH = I'H'$, donc $IJ = I'J'$.

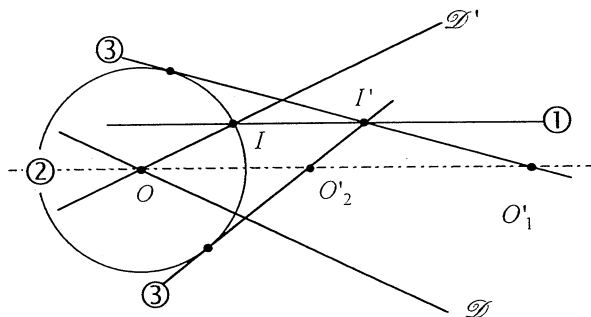
Remarquons de plus que les droites (II') , (JJ') et (OO') sont parallèles et que (OO') est un axe de symétrie du rectangle $IJJ'I'$.

Application : utilisation de la configuration des deux “ cordes ”.

Données :

- deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sécantes en O ;
- I' un point du plan n'appartenant à aucun axe de symétrie de $(\mathcal{D}, \mathcal{D}')$.

Construire les centres des cercles passant par I' et tangents à $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.



Les éléments de la figure ci-dessus sont numérotés dans l'ordre des constructions afin de reconstituer la configuration de l'exercice précédent (cercles de rayons $[O, I]$ et $[O_1, I']$).

L'inégalité d'Antoine

On appelle α , β et γ les mesures des angles d'un triangle ABC .

Démontrer que :

$$\frac{1}{\tan \alpha} + \frac{1}{\tan \beta} + \frac{1}{\tan \gamma} \geq \sqrt{3}$$

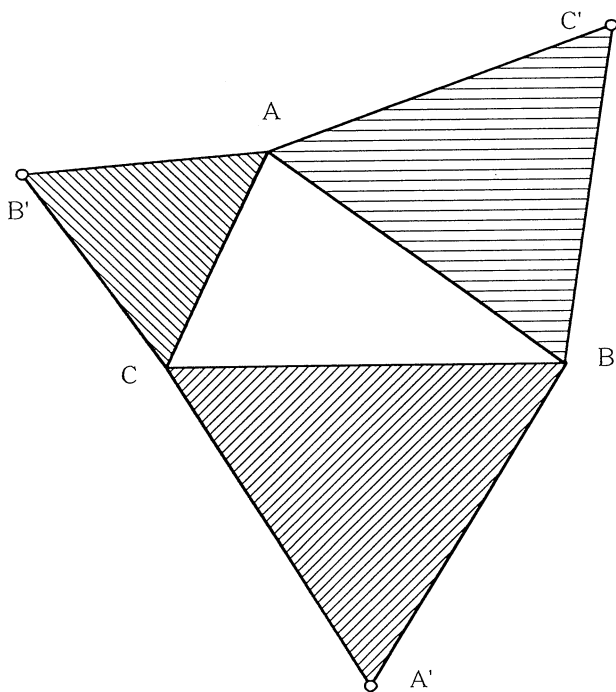
Voici un problème préalable :

Données :

- un triangle ABC ;
- $A'BC$, $B'CA$ et $C'BA$ des triangles équilatéraux.

Conséquence :

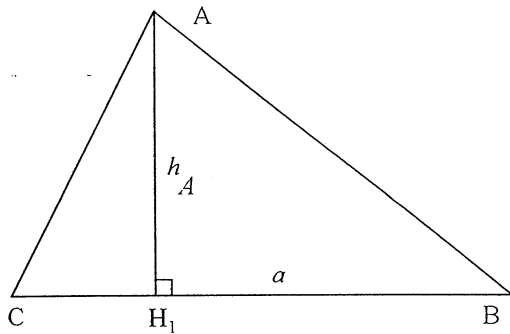
$$\text{aire}(A'BC) + \text{aire}(B'CA) + \text{aire}(C'BA) \geq 3 \text{aire}(ABC)$$



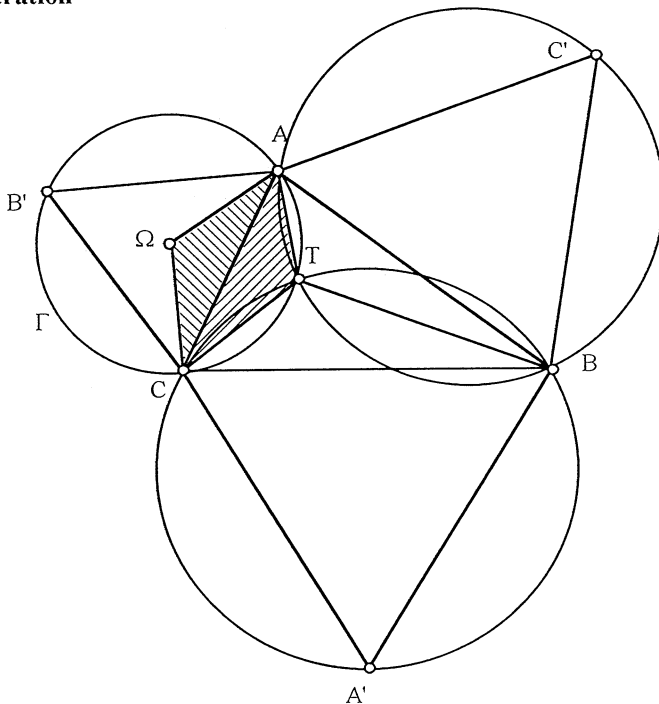
Remarque : le lien entre ces deux problèmes est assuré par la relation :

$$\frac{1}{\tan \beta} + \frac{1}{\tan \gamma} = \frac{a}{h_a}$$

avec $a = BC$ et $h_A = AH_A$.

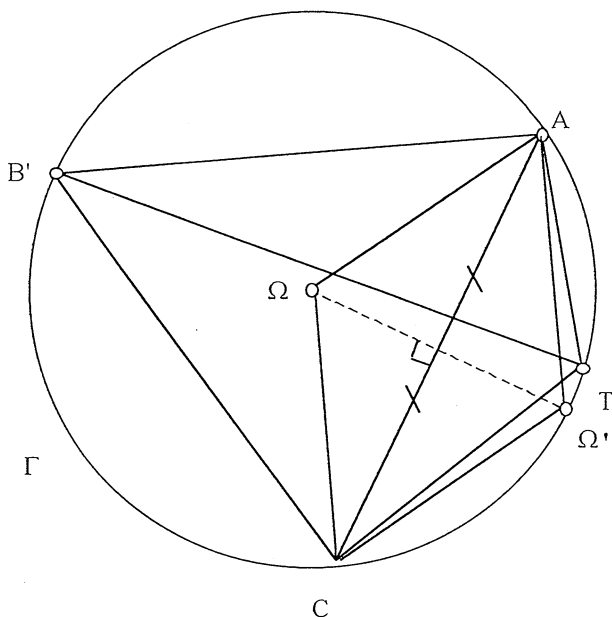


Démonstration



Nous savons tous, enfin presque, que les cercles (BCA') , (CAB') et (ABC') se coupent en un point T qui s'appelle le point de Fermat ou de Toricelli du triangle ABC .

Considérons le cercle (CAB') , nous avons : $\text{aire}(AB'C) = 3\text{aire}(\Omega AC)$
 or $\text{aire}(\Omega AC) \geq \text{aire}(TAC)$.



En effet si l'on considère le point Ω' symétrique de Ω par rapport à (AC) on a :

$$\text{aire}(\Omega AC) = \text{aire}(\Omega' AC)$$

$$\text{aire}(\Omega' AC) \geq \text{aire}(TAC) \text{ puisque } \Omega' \text{ est le milieu de } \widehat{AC}.$$

La fin de la démonstration est évidente puisque

$$\text{aire}(ABC) = \text{aire}(TAB) + \text{aire}(TBC) + \text{aire}(TCA).$$

$$\text{aire}(ABC) \leq \frac{1}{3}\text{aire}(TAB) + \frac{1}{3}\text{aire}(TBC) + \frac{1}{3}\text{aire}(TCA)$$

$$3\text{aire}(ABC) \leq \text{aire}(TAB) + \text{aire}(TBC) + \text{aire}(TCA)$$

Bien évidemment, quelques esprits chagrins et obtus peuvent rétorquer que ceci n'est exact que si les angles du triangle ABC sont tous inférieurs à 120° , alors dans ce cas chers petits camarades l'inégalité est évidente car *un seul* des triangles équilatéraux a son aire qui est supérieure au triple de l'aire du triangle ABC . J'espère que vous voyez lequel.

Retour au problème posé.

On pose : $\mathcal{A} = \text{aire}(ABC)$

$$\frac{1}{\tan \beta} + \frac{1}{\tan \gamma} = \frac{a}{h_a} = \frac{a^2}{ah_a} = \frac{a^2}{2\mathcal{A}}$$

$$\text{De même : } \frac{1}{\tan \gamma} + \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{a}{h_a} = \frac{b^2}{2\mathcal{A}} \text{ et } \frac{1}{\tan \alpha} + \frac{1}{\tan \beta} = \frac{c^2}{2\mathcal{A}}$$

En ajoutant membre à membre ces trois égalités on obtient :

$$\frac{1}{\tan \alpha} + \frac{1}{\tan \beta} + \frac{1}{\tan \gamma} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4\mathcal{A}}$$

$$\text{Or } \text{aire}(AB'C) = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}, \text{ aire}(CA'B) = \frac{b^2\sqrt{3}}{4} \text{ et } \text{aire}(BC'A) = \frac{c^2\sqrt{3}}{4}.$$

Par conséquent :

$$\frac{1}{\tan \alpha} + \frac{1}{\tan \beta} + \frac{1}{\tan \gamma} = \frac{\text{aire}(AB'C) + \text{aire}(CA'B) + \text{aire}(BC'A)}{\mathcal{A}\sqrt{3}}$$

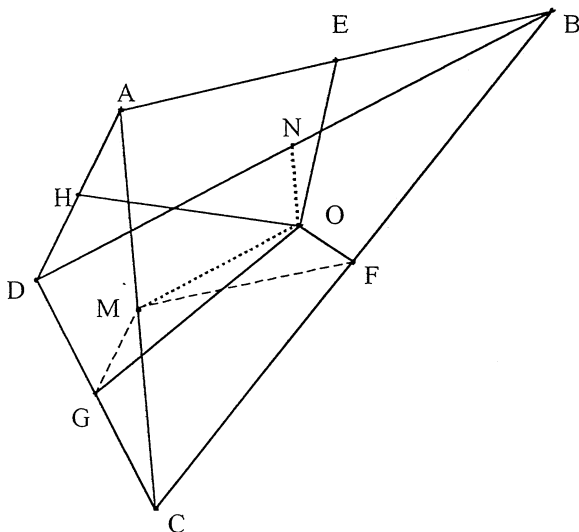
$$\frac{1}{\tan \alpha} + \frac{1}{\tan \beta} + \frac{1}{\tan \gamma} \geq \frac{3\mathcal{A}}{\mathcal{A}\sqrt{3}}$$

$$\text{Finalement : } \frac{1}{\tan \alpha} + \frac{1}{\tan \beta} + \frac{1}{\tan \gamma} \geq \sqrt{3}.$$

Théorème de Brune

Soit un quadrilatère convexe $ABCD$, les milieux E, F, G et H des côtés $[A, B]$, $[B, C]$, $[C, D]$ et $[D, A]$, les milieux M et N des diagonales $[A, C]$ et $[B, D]$, l'intersection O des parallèles à (BD) et (AC) passant par M et N .

Les quadrilatères $OEBF$, $OFCG$, $OGDH$ et $OHAE$ ont la même aire.



L'homothétie de centre C et de rapport $\frac{1}{2}$ transforme le quadrilatère convexe

$ABCD$ en le quadrilatère convexe $MF CG$, donc $\text{aire}(MF CG) = \frac{1}{4} \text{aire}(ABCD)$.

Puisque le quadrilatère $MF CG$ est convexe on a :

$$\text{aire}(CGF) + \text{aire}(GMF) = \frac{1}{4} \text{aire}(ABCD).$$

Or $\text{aire}(GMF) = \text{aire}(GOF)$ car $(MO) \parallel (BD) \parallel (GF)$.

Comme les points M et C sont de part et d'autre de la droite (GF) , que les droites (MO) et (GF) sont parallèles, les points O et C sont de part et d'autre de la droite (GF) .

Donc $\text{aire}(OFCG) = \text{aire}(GOF) + \text{aire}(CGF) = \frac{1}{4} \text{aire}(ABCD)$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] **FRESNEL Jean** : "Géométrie", *Hermann (1995)*
- [2] **F. G.-M.** " Exercices de Géométrie ", *Éditions Jacques Gabay*
- [3] **GROUPE DE GÉOMÉTRIE** : " Points de départ en Géométrie dans l'espace ", *IREM de Bordeaux (1991)*.
- [4] **GROUPE DE GÉOMÉTRIE** : " Angles de couples de vecteurs non nuls et Rotations ", *IREM de Bordeaux (A paraître)*.
- [5] **GROUPE DE GÉOMÉTRIE** : " Cinq problèmes de Géométrie ", *IREM de Bordeaux (1989)*.
- [6] **GROUPE DE GÉOMÉTRIE** : " Activité géométriques en classe de Seconde ", *IREM de Bordeaux (1981)*.
- [7] **GROUPE DE GÉOMÉTRIE** : " L'enseignement des vecteurs ", *IREM de Bordeaux (1992)*.
- [8] **LESPINARD V. - PERNET R.** : " Géométrie (Cours Complet) ", Classes de Mathématiques Élémentaires, Programme 1962, *André Desvigne (1962)*
- [9] **KAIEWSKI J.** : " Utilisation des aires pour la résolution de quelques problèmes de géométrie " *IREM de Lille, Groupe de Géométrie III (1984)*.
- [10] **PAPELIER G.** : "Exercices de géométrie moderne", *Vuibert, (1926)*.

IREM d'Aquitaine
GROUPE DE GÉOMÉTRIE ET D'ARITHMÉTIQUE

Titre : Aires

Auteurs :

Bouscasse Jean-Marie, Chaumet Marie-Claude, Damey Pierre,
Gouteyron Antoine, Gouteyron Claire, Pomes Roland,
Pinet Bernard, Puyou Jacques, Robert Yves.

Public concerné :

- ☞ enseignants des collèges et lycées ;
- ☞ formateurs IUFM ;
- ☞ préparataires aux Capes interne et externe de mathématiques.

Résumé :

Ce fascicule est consacré à l'utilisation des aires en tant qu'outil de démonstration en géométrie. Il présente les propriétés fondamentales des aires puis propose des démonstrations des principaux théorèmes du collège en s'appuyant sur ces propriétés. Il développe enfin des exemples variés de résolutions de problèmes à l'aide des aires.

Mots clefs :

Aires - Théorème de Thalès - Théorème de Pythagore - Théorème des milieux - Théorème de Céva - Trapèze complet - Moyenne harmonique - Formule de Héron - Problèmes d'alignements et de concours.

Publication :

IREM d'Aquitaine
40, rue Lamartine
33400 Talence

ISBN : 978-2-85633-025-8
EAN : 9782856330258