...STITUT DE RECHERCHE SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES

UNIVERSITÉ DE FRANCHE-CO

Quelques éléments de logique en classe de première

Groupe Lycée de l'IREM
de BESANCON

INSTITUT DE RECHERCHE SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATI[illegible]S

Quelques éléments de logique en classe de première

Groupe Lycée de l'IREM
de BESANCON

GROUPE DE TRAVAIL : " MATHEMATIQUE AU LYCEE "

I.R.E.M DE BESANCON

Les activités du groupe, durant l'année scolaire 1995/1996, ont concerné les points suivants :

- production d'une brochure :
  Quelques éléments de logique en classe de première.
- travail sur l'articulation terminales scientifiques et classes post-baccalauréat.

Le travail a été réalisé avec le concours de :

- la Mission Académique de Formation des Personnels de l'Education Nationale de l'Académie de Besançon.
- la Direction des Lycées et des Collèges
- la Direction Générale de l'Enseignement Supérieur du Ministère de l'Education Nationale.
- la Direction Régionale Agriculture et Forêt de Franche-Comté.

Composition du groupe Lycée :

Gérald ANSELME	Agrégé	Lycée Belin VESOUL
Line CAUCHETEUX	Certifiée	Lycée C.N.Ledoux BESANCON
François PETIARD	Agrégé	Université BESANCON
Pierre GSELL	Agrégé	Lycée Courbet BELFORT
Michel MAGNENET	Agrégé	Lycée V.Hugo BESANCON
Michel MARTIN	Certifié	Lycée Duhamel DOLE
Odile RAVAUX	Certifiée	Lycée Agricole DANNEMARIE

INTRODUCTION

Nous avons constaté, à travers les productions de nos élèves, que ceux-ci font peu la distinction entre une condition nécessaire et une condition suffisante, un symbole d'implication ou d'équivalence, la présence ou l'absence d'un quantificateur .....

Nous vous proposons quelques activités permettant une approche de la logique en classe de première.

Ces fiches sont à exploiter de préférence en modules (instant privilégié où l'on peut observer les élèves travailler seuls ou en groupes). Elles sont conçues pour être utilisées dès le début de l'année, toutes les connaissances requises étant du niveau de fin de seconde. Ensuite, dans le courant de l'année, il conviendrait de saisir la moindre occasion de réactiver cette sensibilisation, soit à partir de productions d'élèves mal rédigées, soit à partir d'un point précis du programme.

Nous proposons également une fiche de travail sur les différents types de raisonnement qu'un élève de première peut avoir à utiliser.

Il n'est pas dans notre intention de faire un cours de logique, mais plutôt de donner à l'élève la possibilité de disposer de fiches de référence consultables à chaque fois qu'il en sent le besoin.

FICHE PROFESSEUR 1

OBJECTIFS :

Sensibiliser les élèves sur les notions d'implication et d'équivalence et les familiariser avec les différentes formulations possibles, y compris symboliques, dans le cadre général, puis dans le cadre géométrique.

CHRONOLOGIE :

En début d'année de première S, toutes les connaissances nécessaires ici étant celles de fin de seconde.

DUREE : 1 heure.

PROPOSITIONS DE FONCTIONNEMENT :

Les élèves travaillent par groupes de deux ou plus.
Après 10 minutes, correction du 1 (cadre général), et mise au point par le professeur (voir une proposition ci-dessous).
Après une demi-heure, correction des activités a et b du 2 (cadre géométrique).
L'activité c du 2 peut être donnée comme exercice à traiter individuellement pour la séance suivante.

PROPOSITION DE MISE AU POINT A DISTRIBUER AUX ELEVES :

Etant données deux propositions P et Q :

① On dit que la proposition P implique la proposition Q lorsque Q est une conséquence de P.
On le note $P \Rightarrow Q$.
Lorsque P implique Q, on dit que Q est une condition nécessaire de P, et que P est une condition suffisante de Q. D'autres formulations sont possibles, par exemple « si P alors Q », « P donc Q », « P entraîne Q », « P d'où Q », « Q car P », « P par conséquent Q » ......
$P \Rightarrow Q$ est une proposition fausse dans le seul cas où P est vraie et Q fausse.

② On dit que la proposition P est équivalente à la proposition Q lorsque $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$. On le note $P \Leftrightarrow Q$.

Lorsque P et Q sont équivalentes, on dit que Q est une condition nécessaire et suffisante de P, et aussi que P est une condition nécessaire et suffisante de Q.

D'autres formulations sont possibles, par exemple « P équivaut à Q », « P signifie Q », « P c'est-à-dire Q », « P si et seulement si Q », « Pour que P il faut et il suffit que Q », « P se traduit par Q », ...

FICHE ELEVE 1

1. Cadre général.

Voici deux propositions P et Q :

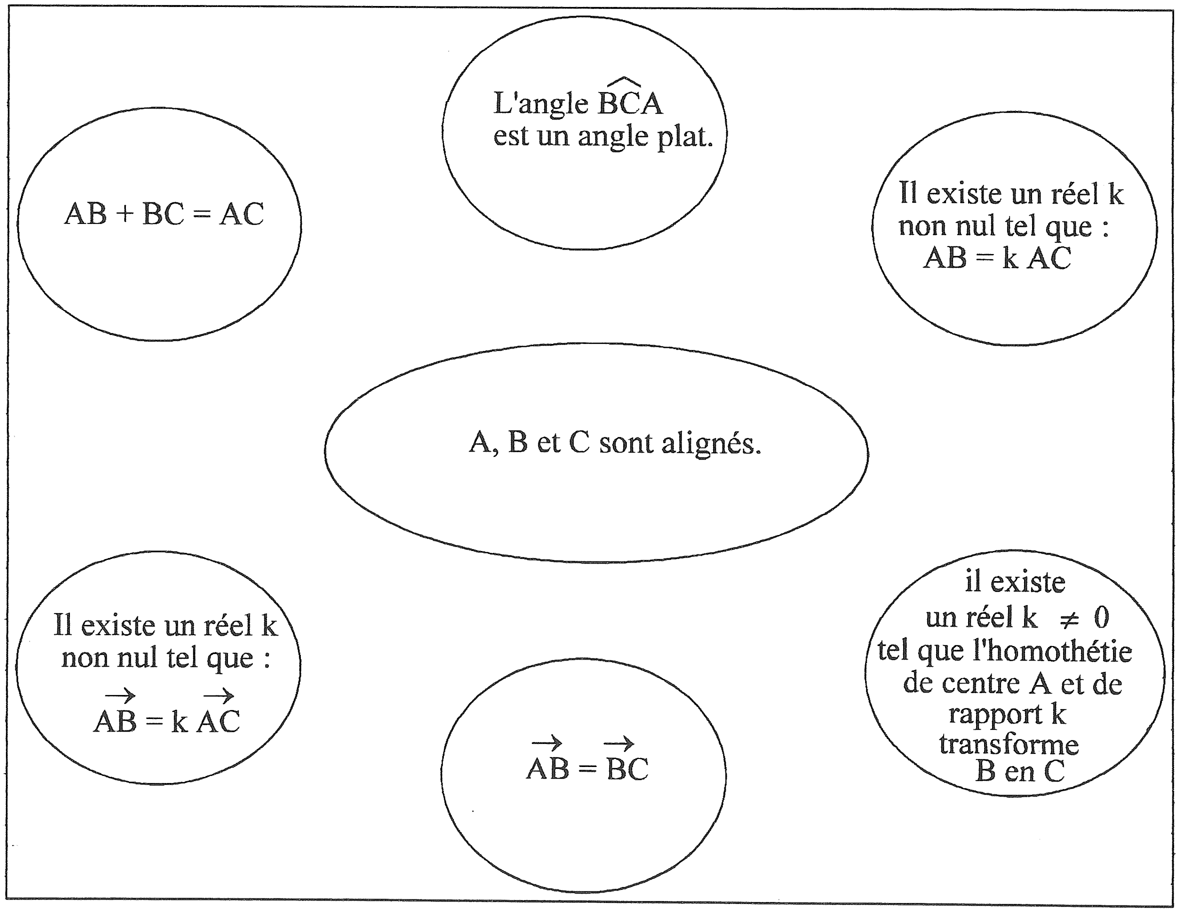
Proposition P :	Elle est française
Proposition Q :	Elle est européenne

Relier ces deux propositions par toutes les formulations logiques possibles (si ...... alors, donc, implique, car, puisque, parce que, il faut que, il suffit que, il est nécessaire que, est une condition nécessaire pour que, est une condition suffisante pour que, ...).

2. Cadre géométrique :

a) On considère la proposition P : « le quadrilatère ABCD est un rectangle ».
Donner une condition nécessaire non suffisante pour que P soit vraie, une condition suffisante non nécessaire pour que P soit vraie et une condition nécessaire et suffisante pour que P soit vraie. Faire une phrase utilisant la formulation « il faut que » et une phrase utilisant la formulation « il suffit que ».

b) On considère trois points **deux à deux distincts** A, B et C. Relier la proposition « A, B et C sont alignés » à chacune des 6 autres propositions données par l'un des symboles $\Longrightarrow$ ou $\Longleftrightarrow$.



c) Ecrire sous forme de phrases, en utilisant à chaque fois une formulation différente, les six liaisons logiques trouvées ci-dessus.

FICHE PROFESSEUR 2

OBJECTIFS :

Sensibiliser les élèves sur les notions d'implication et d'équivalence et les familiariser avec les différentes formulations possibles, y compris symboliques, dans le cadre algébrique.

CHRONOLOGIE :

En début d'année de première S, immédiatement après la fiche 1, toutes les connaissances nécessaires ici étant celles de fin de seconde.

DUREE : 1 heure pour a) et b) et 1/2 heure pour c) et d).

PROPOSITIONS DE FONCTIONNEMENT :

➔ Première séance d'une heure : Prévoir de commencer par la correction de l'activité 2 c de la fiche 1. Ensuite, les élèves traitent a et b en travaillant par groupes de deux ou plus. Correction en commun à la fin de l'heure.
L'activité c peut être donnée comme exercice à traiter individuellement pour la séance suivante.

➔ Deuxième séance : Après correction de c, les élèves passent à l'activité d en travaillant par groupes de deux ou plus (environ un quart d'heure). L'enseignant collecte les différentes réponses proposées par les élèves, afin d'en dresser un inventaire qu'il distribuera au début de la séance suivante. Cet inventaire sera alors corrigé, d'abord individuellement, puis avec le professeur (environ un quart d'heure).

Voici par exemple une liste des réponses proposées dans une classe de 1.S

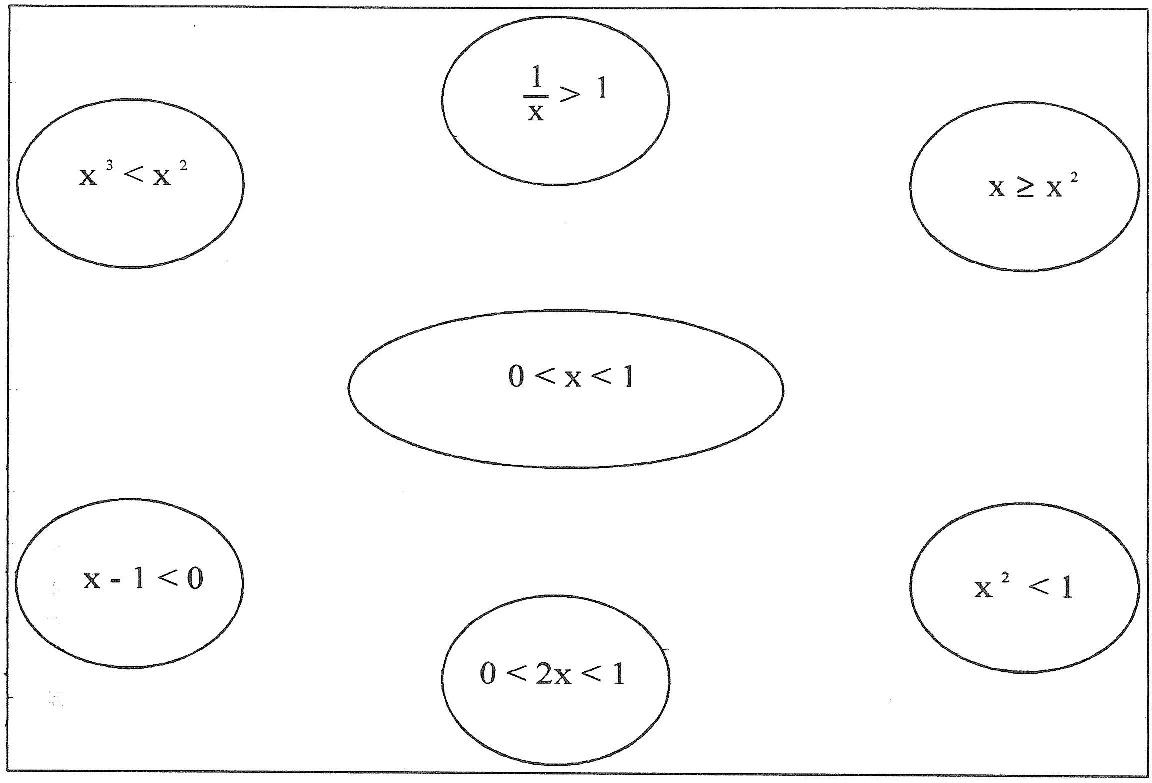
$\|x - 1\| \geq 5 \Leftrightarrow$	$\|x - 1\| \geq 5 \Rightarrow$	.... $\Rightarrow \|x - 1\| \geq 5$
❶ $d(x , 1) \geq 5$	❶ $\|x - 1\| \geq 4$	❶ $\|x - 1\| \geq 4$
❷ $x \in]- \infty ; - 4[\cup] 6 ; + \infty[$	❷ $\|x - 1\| > 2$	❷ $\|x - 1\| > 5$
❸ $x \in]- \infty ; - 4] \cup [6 ; + \infty[$	❸ $\|x - 1\| \geq 6$	❸ $x - 1 > 5$
❹ $(x - 1)^2 \geq 25$	❹ $x \neq 0$	❹ $x - 1 \leq - 5$
❺ $\|x\| \geq 6$	❺ $x \geq 6$	❺ $x - 1 \leq 5$
❻ $x - 1 \geq 5$ et $x - 1 \leq - 5$	❻ $x \leq -4$	❻ $x \leq -4$
❼ $5 \geq x - 1 \geq - 5$	❼ $x \in]- \infty ; - 8[\cup] 7 ; + \infty[$	❼ $x = 8$

COMMENTAIRES :
Ne pas laisser passer l'occasion de faire appel aux représentations graphiques des fonctions de référence étudiées en seconde.

<u>**FICHE ELEVE 2**</u>

a) On considère la proposition P : « le produit ab est strictement négatif ».
Donner une condition nécessaire non suffisante pour que P soit vraie, une condition suffisante non nécessaire pour que P soit vraie et une condition nécessaire et suffisante pour que P soit vraie. Faire une phrase utilisant la formulation « il faut que » et une phrase utilisant la formulation « il suffit que ».

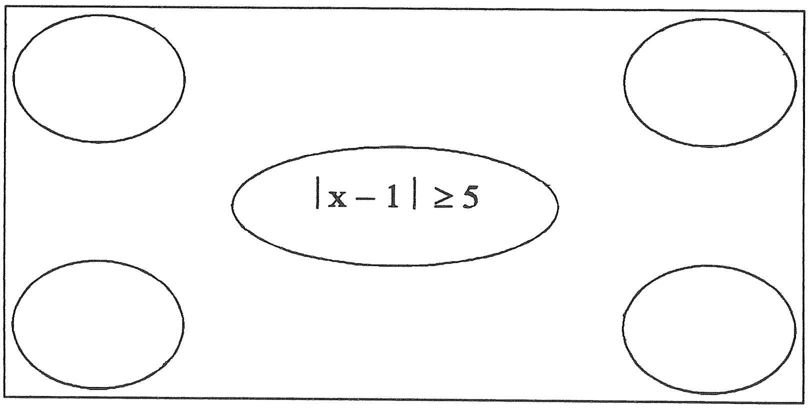
b) x désigne un nombre réel. Relier la proposition « $0 < x < 1$ » à chacune des 6 autres propositions données par l'un des symboles : $\Rightarrow$ ou $\Leftrightarrow$.



c) Ecrire sous forme de phrases, en utilisant à chaque fois une formulation différente, les six liaisons logiques trouvées ci-dessus.

d) x désigne un nombre réel.

P est la proposition : « $|x - 1| \geq 5$ ».



Trouver 4 propositions à placer dans les emplacements prévus que l'on puisse relier à P de manière logique, soit par un symbole $\Rightarrow$, soit par un symbole $\Leftrightarrow$.

FICHE PROFESSEUR 3

OBJECTIFS :

Amener les élèves à analyser ou à produire des raisonnements faisant intervenir des implications ou des équivalences, dans divers cadres.

CHRONOLOGIE :

Après les fiches 1 et 2, toujours en début d'année de première S.

DUREE : 1/2 heure pour 1, 1/2 heure pour 2 a et une 1/2 heure pour 2 b.

PROPOSITIONS DE FONCTIONNEMENT :

Pour les exercices 1 et 2 a, les élèves travaillent par groupes de deux ou plus. Il serait souhaitable que ces groupes soient hétérogènes.
En ce qui concerne l'exercice 2 b, chaque élève recherche et rédige une solution puis, après échange, analyse celle de son voisin.

COMMENTAIRES :

➔ Dans l'exercice 1, il s'agit de faire prendre conscience aux élèves que le raisonnement rédigé est un raisonnement par implication, ce qui entraîne une inclusion, alors que la conclusion utilise une équivalence non démontrée. On peut espérer que la position du point A à l'intérieur ou à l'extérieur du cercle variera selon les groupes, cela faciliterait cette prise de conscience.

➔ Le but de l'exercice n'est pas d'exiger des élèves l'étude et la rédaction de la réciproque.

➔ Dans l'exercice 2, il s'agit de montrer aux élèves que l'expression « c'est-à-dire » est à prendre avec précautions.

FICHE ELEVE 3

1. Cadre géométrique.

Enoncé de l'exercice : On considère un cercle Γ de centre O et un point A fixé n'appartenant pas à ce cercle. Une droite Δ variable passant par A rencontre Γ en B et C. On demande le lieu des points I, milieux de [BC], lorsque Δ varie.

Voici la solution proposée par un élève. Que pensez-vous de la conclusion ?

1er cas : la droite Δ ne passe pas par O.

On a OB = OC donc O est un point de la médiatrice de [BC]. De plus, I est le milieu de [BC] et I est différent de O. Donc la droite (OI) est la médiatrice de [BC] et donc l'angle $\widehat{OIA}$ est un angle droit. Par conséquent, I appartient au cercle de diamètre [OA].

2eme cas : la droite Δ passe par O.

O est alors le milieu de [BC]. On a cette fois I = O. Or O appartient au cercle de diamètre [OA]. Par conséquent, dans ce cas aussi, I appartient au cercle de diamètre [OA].

Conclusion.

Dans tous les cas, I appartient au cercle de diamètre [OA], donc l'ensemble des points I que l'on obtient lorsque Δ varie est le cercle de diamètre [OA].

2. Cadre algébrique.

a) *Enoncé de l'exercice : Déterminer les coordonnées des points communs à la courbe (C) d'équation $y = \sqrt{20x + 21}$ et à la droite D d'équation $y = x$.*

Voici un extrait de la solution proposée par un élève. Qu'en pensez-vous ?

Si un point M de coordonnées (x ; y) est commun à (C) et à D, alors ses coordonnées vérifient l'équation de (C) et l'équation de D, donc elles sont solutions du système :

$$\begin{cases} y = x \\ y = \sqrt{20x+21} \end{cases} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \begin{cases} y = x \\ x^2 = 20x + 21 \end{cases}$$

Donc M est commun à (C) et à D si et seulement si son abscisse x est solution de l'équation :

$$x^2 - 20x - 21 = 0.$$

Sachant que les solutions de cette équation sont - 1 et 21, on peut conclure que les points communs à (C) et à D sont le point de coordonnées (- 1 ; - 1) et celui de coordonnées (21 ; 21).

b) Rédiger la résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation $\frac{3x - 4}{x + 1} = \frac{-7}{x} + \frac{7 - x}{x^2 + x}$ en utilisant correctement les symboles d'implication ou d'équivalence.

FICHE PROFESSEUR 4

OBJECTIFS :

Amener les élèves : ① à prendre conscience de l'importance des quantificateurs dans une phrase mathématique.
② à se familiariser avec le symbolisme correspondant.
③ à formuler la négation de phrases quantifiées.

CHRONOLOGIE :

Il est souhaitable de traiter cette fiche avant les premiers travaux sur les barycentres et sur les fonctions.

DUREE : 1 heure.

PROPOSITIONS DE FONCTIONNEMENT :

Travail individuel ou par groupes de deux au plus, une lecture personnelle méticuleuse étant indispensable. L'élève doit être amené à justifier ses réponses, à l'aide de contre-exemples, ou de schémas, ou à l'aide des représentations graphiques des fonctions de référence.

COMMENTAIRES :

➔ Une correction collective nous paraît nécessaire, afin que les élèves explicitent clairement les démarches mises en oeuvre.

➔ On pourra faire remarquer aux élèves que le quantificateur universel est parfois sous-entendu dans des énoncés de théorèmes classiques (par exemple dans l'énoncé du théorème de Pythagore)

FICHE ELEVE 4

1. « En janvier , il a plu ». A-t-il plu « tous les jours de janvier » ou « certains jours de janvier »?
De même, x désignant ici un nombre réel, la proposition $x = x^2$ est incomplète. Elle peut signifier :
« il existe au moins un réel x tel que $x = x^2$ », ce qui est vrai, ou « quel que soit le réel x, nous avons $x = x^2$ », ce qui est faux.
Les expressions « il existe au moins un .... tel que .... » et « quel que soit .... » s'appellent des **quantificateurs**. « Il existe au moins un réel x » se note $\exists\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}$,. « Quel que soit le réel x » se note $\forall\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}$. C'est la présence d'un quantificateur qui permet de décider si la proposition est vraie ou fausse.

2. Les propositions suivantes sont incomplètes. Dans certaines, il manque l'ensemble de référence. Complétez-les avec l'ensemble le « plus grand » possible pour qu'elles soient vraies ! Dans les autres, il manque un symbole $\forall$ ou $\exists$. Placez celui des deux symboles qui convient le mieux !

Cadre algébrique

① $\forall$ x ∈ ...... $\sqrt{x^2+1} > 1$.
② $\forall$ x ∈ ...... $\sqrt{x^2} = x$.
③ $\forall$ x ∈ .... $x^2 < x$.
④ $\forall$ a ∈....... et $\forall$ b ∈....... $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\ \sqrt{b}$.
⑤ .... x ∈ $\mathbb{R}$ $(x + 1)^2 = x^2 + 1$.
⑥ .... a ∈ $\mathbb{R}$ et .... b ∈ $\mathbb{R}$ $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.
⑦ .... x ∈ $\mathbb{R}$ $\sqrt{x} \geq 0$.

Cadre géométrique
(On se place dans un plan (P) dont A et B sont deux points donnés, I désigne le milieu de [AB]).

❶ $\forall$ M ∈ .... AM + MB = AB.
❷ $\forall$ M ∈ .... $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB}$.
❸ ...... M ∈ (P) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\ \overrightarrow{MI}$.
❹ ...... M ∈ (P) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$.

3. Négation d'une proposition.
a) Cadre général.
Donnez la négation de chacune des propositions suivantes !
Proposition 1 : « Tous les jours de décembre, il a plu .»
Proposition 2 : « Tous les jours de décembre et tous les jours de janvier, il a plu .»

b) Ecrivez la négation des propositions suivantes, et dites, de la proposition ou de sa négation, laquelle des deux est vraie !

Cadre algébrique

① $\forall x \in \mathbb{R}^+$ $x^2 - 1 \geq 0$.
② $\exists x \in \mathbb{R}$, $x^2 + x = 0$.
③ $\exists x \in \mathbb{R}$, $x^2 < 0$.
④ $\forall x \in]0\ ;\ 1]$ $\dfrac{1}{x} > x$.
⑤ Toute fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui n'est pas paire est impaire.
⑥ Il existe au moins un diviseur de 12 qui n'est pas un diviseur de 18.
⑦ $\forall x \in \mathbb{R}$ $x < 1$ ou $x > 3$.

Cadre géométrique
(On se place dans le plan (P). A et B sont deux points donnés distincts de (P)).

❶ Quel que soit le point C de (P), il existe au moins un réel k tel que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$.

❷ Quel que soit le point M du cercle de diamètre [AB] privé de A et B, l'angle $\widehat{AMB}$ est droit.
❸ $\exists$ M ∈ (P) : MA + MB < AB.
❹ Deux droites quelconques de l'espace sont soit sécantes soit parallèles.

FICHE 1 : QUELQUES ELEMENTS DE CORRECTION.

I) 1 Cadre général

P : « Elle est française »
Q : « Elle est européenne ».

Si P alors Q.
P donc Q.
P implique Q.
Q car P.
Q puisque P.

Q est une condition nécessaire de P.
P est une condition suffisante de Q.

Pour être européenne il suffit qu'elle soit française.
Etre française est une condition suffisante pour être européenne.

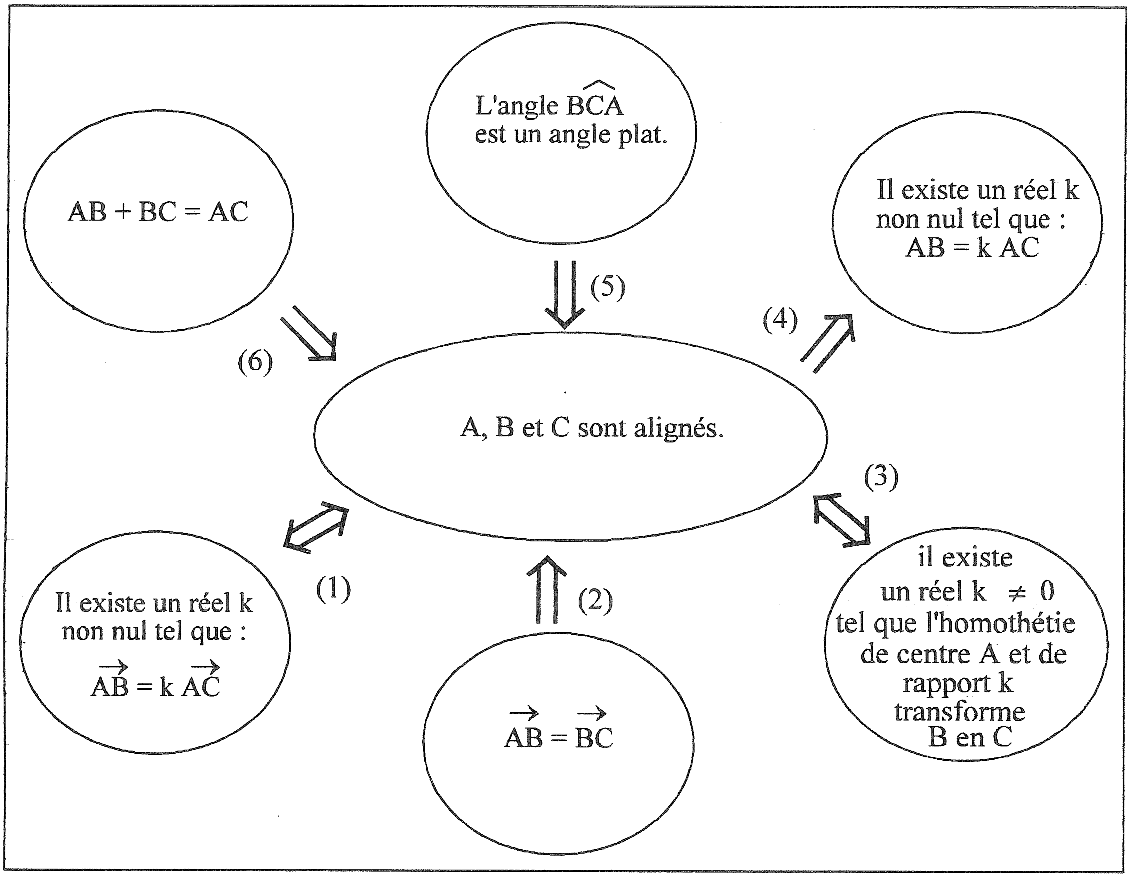
2) Cadre géométrique

a) P : « ABCD est un rectangle »

- ABCD a un angle droit est une condition nécessaire (non suffisante) de P.
- ABCD est un carré est une condition suffisante (non nécessaire) de P.
- ABCD est un parallélogramme et possède un angle droit est une C.N.S.

Pour que ABCD soit un rectangle il faut qu'il ait un angle droit.
Pour que ABCD soit un rectangle il suffit que ABCD soit un carré.

b) Rappelons que **A, B et C sont** par hypothèse **deux à deux distincts.**



c) (1) A, B et C sont alignés si et seulement si il existe un réel non nul k tel que $\overrightarrow{AB} = k\,\overrightarrow{AC}$.

(2) Il suffit que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$ pour que A, B et C soient alignés.

(3) $\exists\, k \in \mathbb{R}^*$, $h_{(A,\,k)}(B) = C$ est une C.N.S. pour que A, B et C soient alignés.

(4) A, B et C alignés est une C.S. pour qu'il existe k de $\mathbb{R}^*$ tel que AB = k AC.

(5) A, B et C alignés est une condition nécessaire pour que l'angle $\widehat{BCA}$ soit un angle plat.

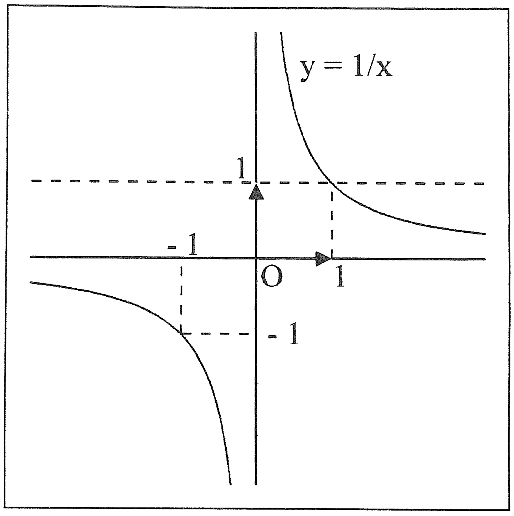
(6) Si AB + BC = AC alors A, B et C sont alignés.

FICHE 2 : QUELQUES REPONSES EXACTES D'ELEVES.

a) P est la proposition « Le produit ab est strictement négatif ».

- $ab \neq 0$ est une condition nécessaire mais pas suffisante de P : $P \Rightarrow ab \neq 0$.
- $a > 0$ et $b < 0$ est une condition suffisante mais pas nécessaire de P : $a > 0$ et $b < 0 \Rightarrow P$.
- ($a > 0$ et $b < 0$) ou ($a < 0$ et $b > 0$) est une condition nécessaire et suffisante de P.

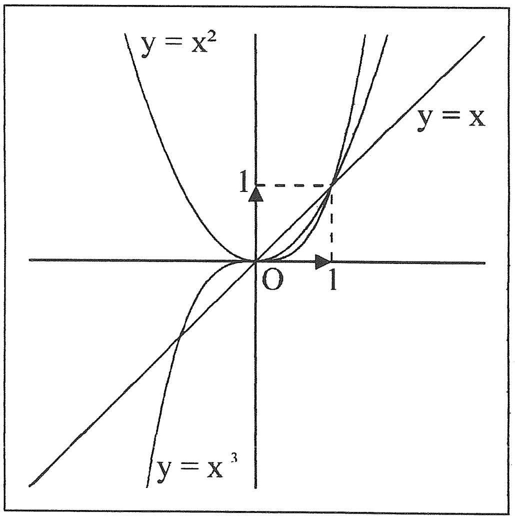
b) Le support graphique est une aide à la décision.



- $0 < x < 1 \Rightarrow \frac{1}{x} > 1$.

$\frac{1}{x} > 1 \Rightarrow 0 < x < 1$.

- $0 < x < 1 \Rightarrow x^2 \leq x$, mais la réciproque est fausse ; il suffit de prendre $x = 1$ pour que $x^2 \leq x$ soit vraie et $0 < x < 1$ fausse.



- $0 < x < 1 \Rightarrow x^2 \leq 1$, mais la réciproque est fausse : $x = -0,5$ fournit un contre exemple.

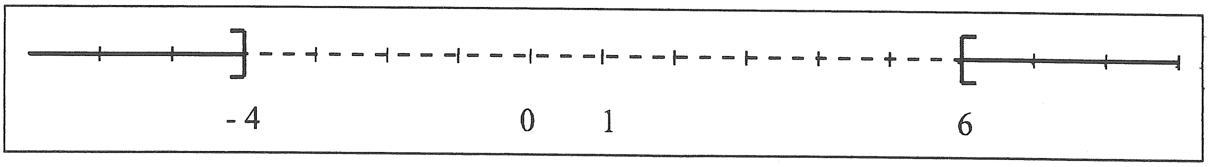
- $0 < 2x < 1 \Rightarrow 0 < x < 1$, mais la réciproque est fausse : $x = \frac{3}{4}$; $0 < \frac{3}{4} < 1$ est vrai et $0 < 2 \times \frac{3}{4} < 1$ est faux.

Faire le lien avec l'inclusion $]0 ; \frac{1}{2}[\subset]0 ; 1[$.

- $0 < x < 1 \Rightarrow x - 1 < 0$. Réciproque fausse : $x = -4$ fournit un contre exemple.
- $0 < x < 1 \Rightarrow x^3 < x^2$. Réciproque fausse : $x = -1$ fournit un contre exemple.

d) P est la proposition « $|x - 1| \geq 5$ ». Il convient de faire le lien avec l'inclusion.

$|x - 1| \geq 5 \Leftrightarrow x \in]-\infty ; -4] \cup [6 ; +\infty[$.



$x \geq 7 \Rightarrow |x - 1| \geq 5$ (car $[7 ; +\infty[\subset]-\infty ; -4] \cup [6 ; +\infty[$).

$|x - 1| \geq 5 \Rightarrow |x - 1| \geq 1$

FICHE 4 : QUELQUES ELEMENTS DE CORRECTION.

2.

Cadre algébrique	**Cadre géométrique**
① $\forall x \in \mathbb{R}^* \quad \sqrt{x^2+1} > 1$. ② $\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad \sqrt{x^2} = x$. ③ $\forall x \in]0\,;1[\quad x^2 < x$. ④ $\forall a \in \mathbb{R}^+$ et $\forall b \in \mathbb{R}^+ \quad \sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$. ⑤ $\exists x \in \mathbb{R},\ (x+1)^2 = x^2 + 1$. ⑥ $\forall a \in \mathbb{R}$ et $\forall b \in \mathbb{R} \quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$. ⑦ $\exists x \in \mathbb{R},\ \sqrt{x} \geq 0$.	*(On se place dans un plan (P) dont A et B sont deux points donnés, I désigne le milieu de [AB]).* ❶ $\forall M \in [AB] \quad AM + MB = AB$. ❷ $\forall M \in (P) \quad \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB}$. ❸ $\forall M \in (P) \quad \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\,\overrightarrow{MI}$. ❹ $\exists M \in (P),\ \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$.

3. a) Cadre général.

La négation de la proposition 1 : « Tous les jours de décembre, il a plu .» est la proposition : « Il y a au moins un jour de décembre pendant lequel il n'a pas plu ».

La négation de la proposition 2 : « Tous les jours de décembre et tous les jours de janvier, il a plu .» est la proposition : « Il y a au moins un jour de décembre ou un jour de janvier pendant lequel il n'a pas plu ».

b) Cadre algébrique.

Proposition (P)	**Négation de (P)**
① $\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad x^2 - 1 \geq 0$.	① $\exists x \in \mathbb{R}^+,\ x^2 - 1 < 0$.
② $\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 + x = 0$.	② $\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 + x \neq 0$.
③ $\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 < 0$.	③ $\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 \geq 0$.
④ $\forall x \in]0\,;1] \quad \dfrac{1}{x} > x$.	④ $\exists x \in]0\,;1],\ \dfrac{1}{x} \leq x$.
⑤ Toute fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui n'est pas paire est impaire.	⑤ Il existe une fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui n'est ni paire ni impaire.
⑥ Il existe au moins un diviseur de 12 qui n'est pas un diviseur de 18.	⑥ Tous les diviseurs de 12 sont des diviseurs de 18.
⑦ $\forall x \in \mathbb{R} \quad x < 1$ ou $x > 3$.	⑦ $\exists x \in \mathbb{R},\ x \geq 1$ et $x \leq 3$.

Cadre géométrique.

Proposition (P)	**Négation de (P)**
❶ Quel que soit le point C de (P), il existe au moins un réel k tel que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$.	❶ Il existe un point C de (P) tel que, quel que soit le réel k, $\overrightarrow{AB} \neq k\overrightarrow{AC}$.
❷ Quel que soit le point M du cercle de diamètre [AB] privé de A et B, l'angle $\widehat{AMB}$ est droit.	❷ Il existe un point M du cercle de diamètre [AB] privé de A et B tel que l'angle $\widehat{AMB}$ n'est pas droit.
❸ $\exists M \in (P),\ MA + MB < AB$.	❸ $\forall M \in (P) \quad MA + MB \geq AB$.
❹ Deux droites quelconques de l'espace sont soit sécantes soit parallèles.	❹ Dans l'espace, on peut trouver deux droites ni sécantes ni parallèles.

RAISONNEMENT EN MATHEMATIQUE : INTRODUCTION

Dès les classes de collège, et davantage encore en classe de seconde, l'élève rencontre de nombreux types de raisonnements à l'occasion d'exercices simples.

Il nous a semblé intéressant qu'en classe de première scientifique, l'élève ait à sa disposition une liste, non exhaustive, des différents types de raisonnements pratiqués dans l'enseignement secondaire.

C'est pourquoi nous proposons une synthèse de ces différents modes de raisonnement, réactivés par des exemples choisis dans différents cadres.

Ce travail peut être commencé à la fin du premier trimestre de première, de préférence en séance d'enseignement modulaire permettant de travailler en groupes restreints.

La fiche qui suit n'est pas destinée aux élèves, et ceux-ci n'ont pas à traiter complètement tous les exemples proposés.

Il appartient à l'enseignant d'expliciter la solution en mettant en évidence le type de raisonnement utilisé.

LES DIFFERENTES METHODES DE RAISONNEMENT.

I. Raisonnement par équivalences successives.

Deux propositions P et Q sont équivalentes lorsqu'elles sont simultanément vraies ou bien simultanément fausses.

Pour démontrer qu'une proposition P est vraie, on peut utiliser des propositions intermédiaires P_1, P_2, P_3 ..., reliées entre elles par une équivalence.

Exemple 1 : Résoudre dans l'ensemble des couples de réels le système $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - 3y = 6 \end{cases}$

Exemple 2 : Démontrer que l'application qui à tout point M du plan (P) associe l'unique point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$ est une symétrie centrale.

II. Raisonnement par implication puis réciproque.

Pour démontrer que $P \Leftrightarrow Q$, on peut démontrer que $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$.
$Q \Rightarrow P$ est l'implication réciproque de $P \Rightarrow Q$.
$P \Rightarrow Q$ est fausse dans le seul cas où P est vraie et Q fausse.

Exemple 1 : Résoudre dans l'ensemble des réels : $\sqrt{x(4x + 15)} = 15 - 2x$.

Exemple 2 : Démontrer qu'un triangle (ABC) est isocèle de sommet A si et seulement si le centre de gravité de ce triangle, le centre du cercle circonscrit à ce triangle et le sommet A sont alignés.

Exemple 3 : Soit (C) un demi cercle, A un point de (C). Une droite (Δ) variable passant par A recoupe (C) en M.
Quel est le lieu des milieux I des segments [AM] lorsque M décrit (C) ?

III. Raisonnement par implication.

Exemple 1 : Soit l'application f définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x + 3}$. Démontrer que f est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.

Exemple 2 : Démontrer que les images de trois points alignés, par une homothétie, sont trois points alignés.

IV. Raisonnement par contraposée.

Pour démontrer que $(P \Rightarrow Q)$ est vraie, il suffit de démontrer que $(non(Q) \Rightarrow non(P))$ est vraie. En effet :

$(P \Rightarrow Q)$ est fausse dans le seul cas où P est vraie et Q fausse, c'est à dire dans le seul cas où non(P) est fausse et non(Q) est vraie, c'est à dire encore dans le seul cas où non(Q) est vraie et non(P) est fausse.

Or dire que la proposition $(P \Rightarrow Q)$ est fausse dans le seul cas où non(Q) est vraie et non(P) est fausse revient à dire qu'elle est fausse dans le seul cas où $(non(Q) \Rightarrow non(P))$ est fausse.

Exemple 1 : Démontrer que si le carré d'un entier est pair, alors cet entier est pair.

Exemple 2 : Etant donnés un plan (P) de l'espace, une droite (d) de ce plan, un point A de (P) n'appartenant pas à (d) et un point M n'appartenant pas à (P), démontrer que les droites (MA) et (d) ne sont pas coplanaires.

Exemple 3 : Démontrer que, par une rotation, les images de trois points non alignés sont trois points non alignés.

V. Raisonnement par l'absurde.

Le raisonnement par l'absurde consiste à prendre comme hypothèse la proposition contraire de celle que l'on veut démontrer et en déduire une contradiction.

Cela prouve que l'hypothèse faite est fausse, donc que son contraire est vrai.

Exemple 1 : Démontrer que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.

Exemple 2 : Soient (P) et (P') deux plans parallèles de l'espace. Démontrer que si un plan (Q) est sécant à (P), alors (Q) est sécant à (P').

Exemple 3 : Soient A et B deux points distincts du plan, et (Δ) la médiatrice de [AB]. Soit Ω un point du plan n'appartenant pas à (Δ). Démontrer que le triangle $A\Omega B$ n'est pas isocèle en Ω.

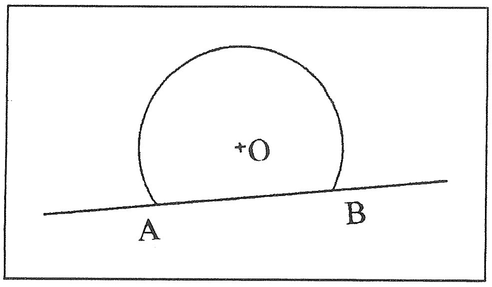
VI. Raisonnement par disjonction des cas.

Pour démontrer qu'une propriété est vraie pour tout élément d'un ensemble E, on peut démontrer qu'elle est vraie pour tout élément des sous ensembles E_1 , E_2 , E_3 ...., formant une partition de E.

Exemple 1 : Relativement au repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points A(1 ; 0), B(0 ; 1), C(-1 ; 0) et D(0 ; -1). Démontrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'un point M(x ; y) appartienne au carré ABCD est $|x| + |y| = 1$.

Exemple 2 : Soient A et B deux points distincts du plan (P) ; (Π) le demi plan ouvert de frontière (AB); O un point de (Π) et de la médiatrice de [AB].; (C) l'arc de cercle de centre O, de rayon OA, contenu dans (Π).

Démontrer que, pour tout M de (C), on a : $\widehat{AOB} = 2\widehat{AMB}$.



VII Raisonnement par récurrence.

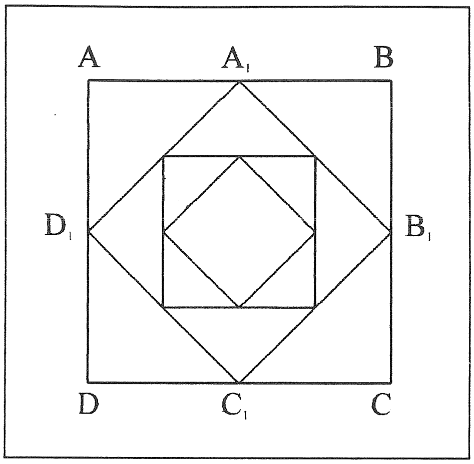
Principe :
Si on veut démontrer qu'une proposition (P_n) qui dépend d'un entier naturel n est vraie à partir du rang n_0 :
1° étape : On établit que cette proposition est vraie pour $n = n_0$ ((P_{n_0}) vraie).
2° étape : On établit que l'implication $(P_k) \Rightarrow (P_{k+1})$ est vraie pour tout entier naturel k supérieur ou égal à n_0.
Conclusion : Pour tout entier n supérieur ou égal à n_0, (P_n) est vraie.

Exemple 1 : Soit la suite (u_n) la suite numérique définie pour n appartenant à $\mathbb{N}^*$ par :

$$\begin{cases} u_1 = 10 \\ \text{pour} \quad n \geq 1, \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3 \end{cases}$$

a) Démontrer que cette suite est minorée par 6.
b) Démontrer que cette suite est une suite strictement décroissante.

Exemple 2 : Le carré (ABCD) noté (Q_0) a pour côté 4 centimètres. Soit (Q_1) le quadrilatère dont les sommets sont les milieux des côtés du quadrilatère (Q_0).
Soit (Q_{n+1}) le quadrilatère dont les sommets sont les milieux des côtés du quadrilatère (Q_n), pour tout entier naturel n non nul.



Démontrer que pour tout entier naturel n , (Q_n) est un carré.
On désigne par p_n le périmètre du quadrilatère (Q_n). Démontrer que :
$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ p_n = \dfrac{16}{\left(\sqrt{2}\right)^n}$.

VIII. Raisonnement par contre exemple

Lorsqu'on veut démontrer qu'une proposition (P) est vraie, il suffit de montrer que la proposition (non P) est fausse.

Exemple 1 : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1}$. Démontrer que f n'est ni paire ni impaire.
Démontrer que f n'est pas monotone sur $\mathbb{R}$.

Exemple 2 : Est-ce que toute transformation du plan conserve les distances ?

TABLE DES MATIERES

I.R.EM. DE FRANCHE-COMTE
UFR DES SCIENCES ET TECHNIQUES
LA BOULOIE -16 ROUTE DE GRAY
F-25030 BESANCON CEDEX
tél : 0381666192
fax : 0381666199

Titre : Quelques éléments de logique en classe de première.

Auteur : Groupe Lycée de l'IREM de Besançon

Public : Professeurs de Mathématiques enseignant en lycée ou formateurs intervenant en formation initiale.

Mots clés : Implication, équivalence, quantificateurs, raisonnement.

Résumé : Présentation de quelques fiches, à destination des élèves des classes de première, permettant une mise au point de l'utilisation du vocabulaire de la logique.
Mise en place de l'implication et de l'équivalence à partir d'exemples du niveau de fin de seconde.
Utilisation de propositions quantifiées.
Différents modes de raisonnement.

Date : Juin 1996
Format : A4
Nombre de pages : 18 **Poids :** 90 grammes

IREM DE BESANCON
Dépôt légal 100-96
3° trimestre 1996
ISBN 2-909963-11-X