Doc
BES
P

7931

INSTITUT DE RECHERCHE SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES

IBC96009.PDF

Probabilité conditionnelle et indépendance

IREM de LYON
BIBLIOTHEQUE
Université Claude Bernard -LYON I
69622 VILLEURBANNE
EXCLU DU PRET

Jean-Pierre GRANGÉ
IREM de BESANÇON

DocBES/P
n° 7931

PROBABILITÉ CONDITIONNELLE ET INDÉPENDANCE

IREM de LYON
BIBLIOTHEQUE
Université Claude Bernard -LYO
43, Bd du 11 Novembre 19
69622 VILLEURBANNE Cr

Jean-Pierre GRANGÉ
IREM de BESANÇON

Ce travail a été réalisé grâce au soutien de la Direction des Lycées et Collèges (D.L.C.) et de la Mission Académique pour la Formation des Personnels de l'Education Nationale (M.A.F.P.E.N.), avec le support logistique de la Direction Générale de l'Enseignement Supérieur (D.G.E.S.), qu'ils en soient remerciés.

Je remercie également pour leurs relectures approfondies et efficaces la Champenoise Brigitte CHAPUT de la Commission Inter-IREM Statistique et Probabilités ainsi que les membres du Groupe "Probabilités"de l'IREM de Besançon : Michel VENDRELY, le directeur de l'IREM Yves DUCEL et Michel HENRY dont les conseils furent très précieux.

Il existe des conceptions réductrices relatives au concept de probabilité conditionnelle (cf A. TOTOHASINA [1] et [2]). On peut distinguer la **conception causaliste**, lorsque l'événement conditionnant est toujours considéré comme une cause de l'événement conditionné, la **conception chronologiste**, où l'événement conditionnant est toujours considéré comme antérieur à l'événement conditionné et la **conception cardinaliste** où le calcul de la probabilité se ramène toujours au quotient de deux cardinaux.

Cette contribution à la réflexion sur la présentation des probabilités conditionnelles et des événements indépendants en classe de terminale propose d'abord deux introductions que l'on pourrait qualifier d'opposées selon que l'on veut écarter l'une ou l'autre de ces conceptions lors des activités introductives.

Dans la première, afin d'écarter les conceptions causalistes et chronologistes très prégnantes et sur lesquelles peuvent se fonder de véritables obstacles épistémologiques (cf G. BROUSSEAU [3]), on part d'une enquête statistique à deux caractères définis sur une même population pour, peu à peu, faire sentir les diverses fréquences qu'on peut rencontrer et les probabilités associées lors d'un tirage aléatoire dans cette même population.

Dans la seconde au contraire, les deux premières expériences aléatoires dépendent du temps, ce sont des modélisations par tirages de boules dans une urne, ces tirages étant sans remise puis avec remise. L'écoulement du temps étant inéluctable, une telle présentation peut paraître plus naturelle.

Ensuite la notion d'événements indépendants est traitée dans le détail et se termine par un exercice inspiré par R. FALK, cité par A. TOTOHASINA dans [2] p 94 pour surmonter la résistance à la conception chronologique. Enfin, comme applications, les lois binomiale, géométrique et hypergéométrique sont dégagées.

Table des Matières

PREMIÈRE INTRODUCTION 7
ÉNONCÉ ET PREMIERS DIAGRAMMES ... 8
QUESTIONS ET MODÉLISATION DES EXPÉRIENCES ALÉATOIRES 10
VERS LES ARBRES PROBABILISTES ... 11
EXEMPLES D'UTILISATION DES ARBRES ... 12
VERS L'INDÉPENDANCE (STOCHASTIQUE) ... 14
EXERCICES D'APPLICATION
Inégalité sociale ... 16
Défauts de fabrication ... 18
Diagnostic d'une maladie ... 19

SECONDE INTRODUCTION 21
EXPÉRIENCE ALÉATOIRE À DEUX ÉPREUVES SUCCESSIVES LIÉES .. 22
EXPÉRIENCE ALÉATOIRE À DEUX ÉPREUVES RÉPÉTÉES ... 24
EXPÉRIENCE ALÉATOIRE DONT LES ÉVÉNEMENTS SONT DES PAIRES 26
EXERCICES D'APPLICATION
Défauts de fabrication ... 28
Les jetons ... 28
Les déréglements ... 30

INDÉPENDANCE 32
VERS LA DÉFINITION ... 32
POUR UNE DÉFINITION PLUS SPÉCIFIQUE ... 34
UN EXEMPLE CURIEUX ... 36
UN EXERCICE VÉCU ... 38

QUELQUES LOIS DISCRÈTES 41
ÉPREUVES DE BERNOULLI, LOI BINOMIALE ... 41
LOI GÉOMÉTRIQUE ... 43
LOI HYPERGÉOMÉTRIQUE ... 44

CONCLUSION ... 46

BIBLIOGRAPHIE ... 47

PREMIÈRE INTRODUCTION

Cet extrait du stage MAFPEN 94-95 organisé par l'IREM de BESANCON intitulé « Enseignement des probabilités au lycée » utilise divers registres de représentations : tableaux de contingence, tableaux marginaux, diagrammes de Carroll et arbres probabilistes. L'accent est mis sur les **descriptions des expériences aléatoires modélisées** par des tirages de boules dans une urne ainsi que sur les deux conceptions fondamentales des probabilités : **a priori** ou **fréquentiste**, qui sont contradictoires et complémentaires.

On part d'une enquête statistique à deux caractères définis sur une même population pour, peu à peu, faire sentir les diverses fréquences qu'on peut rencontrer et les probabilités associées lors d'un tirage aléatoire dans cette même population. Ce choix peut générer la conception fausse dite cardinaliste (cf A. TOTOHASINA [2] p. 94) mais le rapide passage aux fréquences d'une part et la donnée de pourcentages dans l'exercice qui suivra d'autre part, devraient permettre d'éviter cet écueil didactique (cf Michel HENRY [4] p 56 à 60). Puis l'indépendance de deux événements apparaît comme un cas particulier rencontré lors de calculs de probabilités conditionnelles. Enfin trois exercices d'applications commentés, illustrés, avec solutions détaillées concluent cette première partie, on y trouve les situations correspondant aux trois conceptions réductrices ainsi que les deux registres de représentations les plus pertinents : **les arbres probabilistes** et **le diagramme de Carroll**.

ÉNONCÉ ET PREMIERS DIAGRAMMES

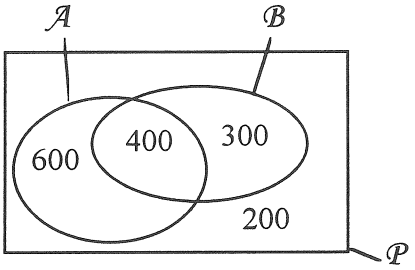
Une enquête effectuée auprès des employés d'une entreprise, concernant le sexe et le salaire a donné les résultats suivants présentés dans un tableau de contingence.

	salaire < 8 000 F	salaire ≥ 8 000 F	
femmes	400	300	} $\mathcal{B}$
hommes	600	200	
	$\underbrace{\quad\quad}_{\mathcal{A}}$		

Notons $\mathcal{A}$ l'ensemble des employés dont le salaire est strictement inférieur à 8000 F,
$\mathcal{B}$ l'ensemble des employées de sexe féminin et
$\mathcal{P}$ l'ensemble des employés de l'entreprise.

Autres schémas possibles pour traduire ces renseignements :

1°) **diagramme de Venn :**



2°) On peut compléter l'énoncé par un calcul des effectifs marginaux, on obtient un **diagramme de Carroll des effectifs :**

salaire / sexe	< 8000 F $\mathcal{A}$	≥ 8000 F ${}^{c}\mathcal{A}$	total par sexe
femmes $\mathcal{B}$	400	300	700
hommes ${}^{c}\mathcal{B}$	600	200	800
total par tranche de salaire	1 000	500	1 500

où ${}^{c}\mathcal{A}$ désigne le complémentaire de $\mathcal{A}$ dans la population $\mathcal{P}$ et on notera dans la suite $\overline{A}$ l'événement contraire de A dans le modèle probabiliste.

3°) De ce dernier diagramme, on déduit le **diagramme de Carroll des fréquences** absolues ou proportion de chaque partie dans la population :

salaire / sexe	< 8000 F $\mathcal{A}$	≥ 8000 F ${}^{c}\mathcal{A}$	fréquence par sexe
femmes $\mathcal{B}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{7}{15}$
hommes ${}^{c}\mathcal{B}$	$\frac{6}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{8}{15}$
fréquence par salaire	$\frac{10}{15}$	$\frac{5}{15}$	1

duquel on peut extraire quatre sous-diagrammes donnant les fréquences relatives :

diagramme de la répartition des sexes parmi les employés qui gagnent moins de 8000 F :

salaire / sexe	$\mathcal{A}$
$\mathcal{B}$	$\frac{4}{10}$
${}^{c}\mathcal{B}$	$\frac{6}{10}$
	1

diagramme de la répartition des sexes parmi les employés gagnant plus de 8000 F :

salaire / sexe	${}^{c}\mathcal{A}$
$\mathcal{B}$	$\frac{3}{5}$
${}^{c}\mathcal{B}$	$\frac{2}{5}$
	1

diagramme de la répartition des salaires parmi les femmes :

salaire / sexe	$\mathcal{A}$	${}^{c}\mathcal{A}$	
$\mathcal{B}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{7}$	1

diagramme de la répartition des salaires parmi les hommes :

salaire / sexe	$\mathcal{A}$	${}^{c}\mathcal{A}$	
${}^{c}\mathcal{B}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{2}{8}$	1

QUESTIONS ET MODÉLISATION DES EXPÉRIENCES ALÉATOIRES

1°) Parmi les employés on en choisit un au hasard . . .

Cette expérience aléatoire revient à choisir une boule dans une urne [Ω] modélisant la population $\mathcal{P}$ et contenant 1 500 boules, chacune représentant un employé. En effet, ce choix, s'effectuant ***"au hasard"*** *est représenté par le tirage fictif d'une boule dans l'urne théorique [Ω] dont la fonction essentielle est de signifier qu'il y a* ***équiprobabilité*** *pour les boules*[(1)].

a). . . quelle est la probabilité qu'il gagne moins de 8 000 F ?

Notons A l'événement « il gagne moins de 8 000 F », $P(A) = \frac{1000}{1500} = \mathbf{\frac{10}{15}}$ car l'hypothèse d'équiprobabilité conduit à assimiler P(A) à la proportion des éléments de caractère $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{P}$.

b). . . quelle est la probabilité que ce soit une femme ?

Notons B l'événement « il est de sexe féminin », on a de même $P(B) = \frac{700}{1500} = \mathbf{\frac{7}{15}}$.

c). . .quelle est la probabilité que ce soit une femme qui gagne moins de 8 000 F ?

L'événement considéré est associé à la partie $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ de $\mathcal{P}$, il est réalisé par chaque issue appartenant à la fois à A et à B. Notons A∩B cet événement, on a $P(A \cap B) = \frac{400}{1500} = \mathbf{\frac{4}{15}}$.

2°) Parmi les femmes on en choisit une au hasard . . .

Cette expérience aléatoire revient à choisir une boule dans l'urne [B] contenant 700 boules, chacune représentant une femme. Il y a encore équiprobabilité pour ces boules.

. . .la probabilité qu'elle gagne moins de 8 000 F est $\frac{400}{700} = \mathbf{\frac{4}{7}}$.

Associée à cette nouvelle expérience aléatoire, c'est la probabilité de A quand on tire dans l'urne [B], on dit que c'est "la probabilité conditionnelle de A sachant B". On devrait dire "la probabilité conditionnelle sachant B, de A". On la note $P_B(A)$ ou P(A/B) [(2)], et on a :

$P_B(A) = \frac{4}{7} = \frac{\frac{4}{15}}{\frac{7}{15}}$, on constate dans cet exemple que $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ ①,

c'est le quotient des probabilités de A∩B et de B quand on tire dans l'urne [Ω].

3°) Parmi ceux qui gagnent moins de 8 000 F, on en choisit un au hasard . . .

Cette expérience aléatoire revient à choisir une boule dans l'urne [A] contenant 1 000 boules, chacune représentant un employé gagnant moins de 8 000 F.

. . . la probabilité que ce soit une femme est $\frac{400}{1000} = \mathbf{\frac{4}{10}}$, c'est encore une autre probabilité : "la probabilité conditionnelle sachant A, de B " notée $P_A(B)$ ou P(B/A).

Tous ces résultats étaient déjà inscrits dans les diagrammes des fréquences précédents *car on a choisi l'hypothèse d'équiprobabilité pour modéliser la situation.*

---

(1) Ainsi en probabilités, se met en place un premier contrat implicite : l'expression "au hasard" implique le modèle d'équiprobabilité pour les éléments considérés.

(2) Pour une justification de ces deux notations, voir p 26.

VERS LES ARBRES PROBABILISTES

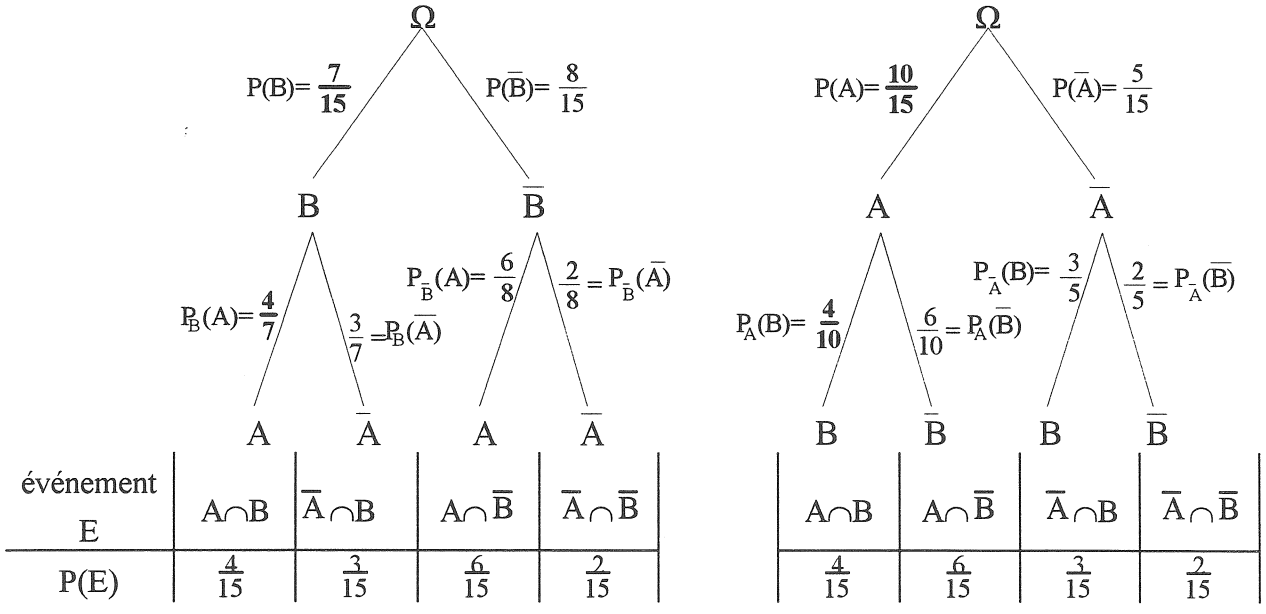
La relation constatée ① $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ ne provient pas d'une situation numérique particulière ; elle est encore vraie lorsqu'il n'y a pas équiprobabilité (voir la démonstration de Michel HENRY dans [4] p 80 et 81). D'où la **définition** :

> Dans un espace probabilisé (Ω, P), étant donnés deux événements A et B tel que $P(B) \neq 0$, on appelle "probabilité conditionnelle sachant B, de A " le quotient $\dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ noté $P_B(A)$.

De ①, on déduit : $P(A \cap B) = P(B) \times P_B(A)$ et $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$

Ainsi, lors d'un tirage dans une urne [Ω], pour calculer la probabilité de la réalisation conjointe de deux événements on peut faire les produits des probabilités des réalisations successives de l'un d'eux issu de [Ω] suivi de l'autre issu de l'urne associée au premier.

Ces relations **se lisent naturellement lorsqu'on dessine l'un ou l'autre des deux arbres probabilistes** correspondant à cette situation.



événement E	$A \cap B$	$\bar{A} \cap B$	$A \cap \bar{B}$	$\bar{A} \cap \bar{B}$
P(E)	$\frac{4}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{6}{15}$	$\frac{2}{15}$

$A \cap B$	$A \cap \bar{B}$	$\bar{A} \cap B$	$\bar{A} \cap \bar{B}$
$\frac{4}{15}$	$\frac{6}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{2}{15}$

Pour davantage de détails sur la **justification** et l'**utilisation** des arbres probabilistes ou arbres probabilisés on peut consulter [7] de B. PARZYSZ et [9] de G. ALDON et J. REYNAUD.

EXEMPLES D'UTILISATION DES ARBRES

Exercice : "BAC" D - Besançon 1992 - extrait

Pour prévenir deux défectuosités α et β des piéces fabriquées par une usine, on décide de soumettre un échantillon assez grand de pièces à des tests. Les études statistiques menées sur cet échantillon ont montré que :

a) 8 % des pièces présentent le défaut α.

b) Parmi les pièces atteintes du défaut α, 15 % ont le défaut β.

c) Parmi les pièces non-atteintes du défaut α, 5 % ont le défaut β.

On prend au hasard une pièce produite par l'usine et on considère les événements suivants :

A : « La pièce présente le défaut α »;

B : « La pièce présente le défaut β ».

1°) Quelle est la probabilité que la pièce prise au hasard présente les deux défauts ?

2°) Quelle est la probabilité que la pièce prise au hasard présente le défaut β ?

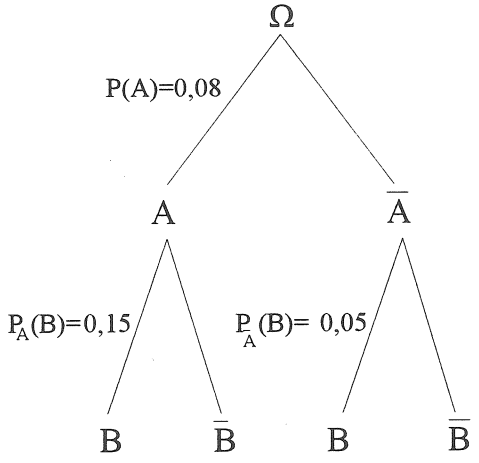
Remarques préalables :

Cet exercice est fondamentalement différent de l'exemple précédent car les ***fréquences*** *données sont issues d'un* ***échantillon*** *alors que la question concerne l'ensemble Ω de toutes les pièces fabriquées par l'usine et pour lequel on n'a pas d'autres renseignements. D'après l'énoncé, 0,08 est la fréquence observée du défaut α après réalisation des tests sur l'échantillon. On démontre, dans la théorie statistique que c'est la valeur la moins mauvaise que l'on puisse choisir pour* ***estimer*** *la probabilité de A qui reste inconnue lorsque la pièce est prélevée dans la population totale (cf* Michel HENRY [4] *p. 68 à 72). On est de même conduit à estimer* $P_A(B) = 0,15$ *et* $P_{\overline{A}}(B) = 0,05$.

Ainsi cet exercice de "bac" comporte un implicite majeur, seul un effet de contrat (attente d'un comportement systématique déduit par la pratique d'exercices analogues) autorise les élèves à estimer cette probabilité à partir de la fréquence observée sur l'échantillon [(3)].

Ici, l'arbre à dessiner est imposé par l'énoncé qui induit une relation chronologique implicite entre les deux défauts.

Réponses : Le choix d'une pièce au hasard est une expérience aléatoire et **les données de l'énoncé peuvent être schématisées par l'arbre probabiliste** suivant :



(3) Voilà un second contrat, encore bien souvent implicite et qui ne devrait plus l'être d'après les programmes dits "fréquentistes" des classes de premières de 1991.

1°) La question posée revient à calculer $P(A \cap B)$ et d'après la définition adoptée des probabilités conditionnelles on a :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = 0,08 \times 0,15 = 0,012.$$

2°) L'événement B est composé de deux événements incompatibles :

$B = (B \cap A) \cup (B \cap \overline{A})$ d'où :

$$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \overline{A}) = 0,012 + P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(B)$$

$$P(B) = 0,012 + 0,92 \times 0,05 = 0,058.$$

Question supplémentaire : 3°) On sait que la pièce choisie au hasard possède le défaut β, quelle est la probabilité qu'elle possède le défaut α ?

La formulation de cette question suggère un changement d'expérience aléatoire car on a une donnée supplémentaire. Ceci revient à choisir une pièce au hasard dans une urne fictive ne possédant que des pièces ayant le défaut β.

La question posée revient à calculer $P_B(A)$:

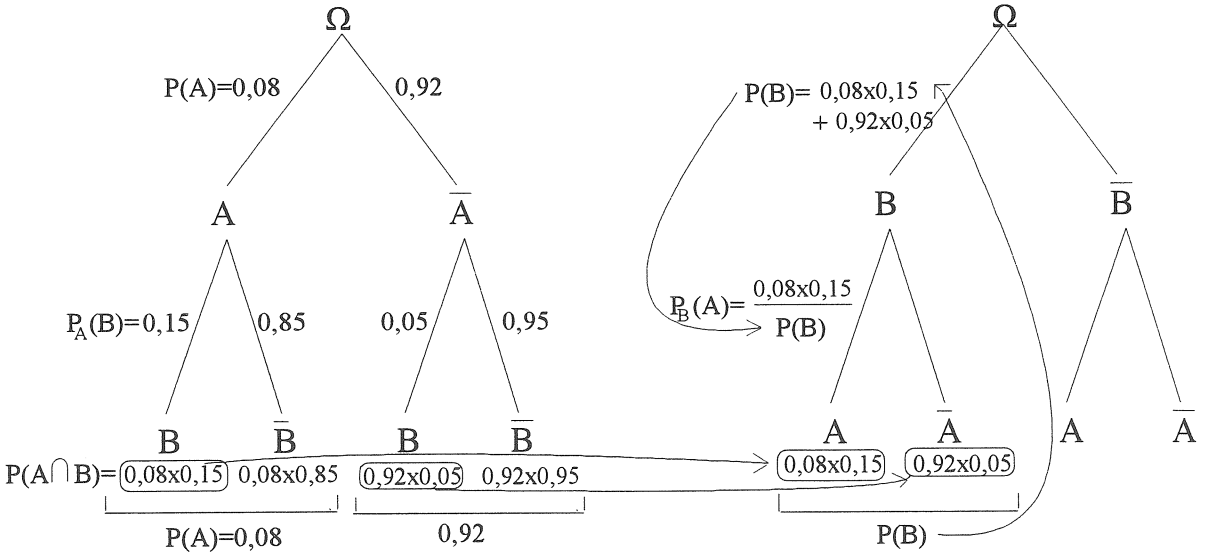
$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,012}{0,058} \approx 0,21.$$

D'une manière générale, lorsque $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$ on a :

$$P_B(A) = \frac{P(A) \times P_A(B)}{P(A) \times P_A(B) + P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(B)}$$ appelée formule de Bayes.

L'étude générale de cette formule est hors programme des lycées car dans certains cas elle pose des problèmes épistémologiques ardus : déterminer les probabilités de causes ayant observé des conséquences (cf. Michel HENRY [5] p 97). Cependant, appliquée à des situations simples, dans le cadre du programme de Terminale, elle permet de montrer l'intérêt du calcul des probabilités, par exemple pour mesurer la fiabilité du dépistage des maladies par test (cf exercice d'application III p 19).

En ce qui concerne les arbres probabilistes, la formule de Bayes revient à déterminer l'un deux à partir de l'autre, ce que G. ALDON et J. FEURLY-REYNAUD dans [9] appellent **inversion de l'arbre**, pour cette question cela donne :



VERS L'INDÉPENDANCE (STOCHASTIQUE) [4]

Une même enquête sur les salaires dans une autre entreprise a donné les résultats suivants :

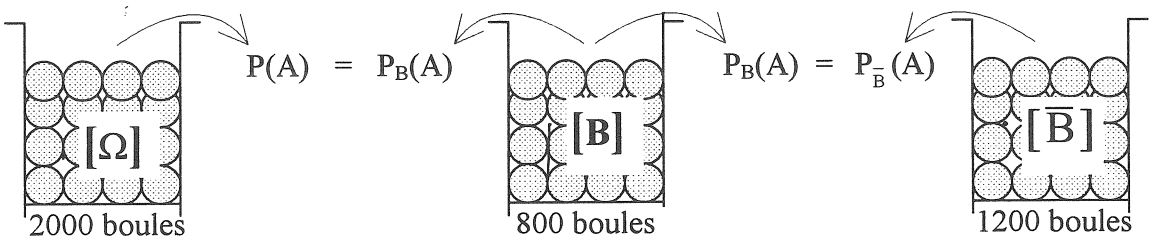
	salaire < 8000 F $\mathcal{A}$	salaire ≥ 8000 F ${}^{c}\mathcal{A}$	total par sexe
femmes $\mathcal{B}$	600	200	800
hommes ${}^{c}\mathcal{B}$	900	300	1200
total par salaire	1500	500	2000

On peut déjà constater que, dans cette entreprise, la répartition des salaires des employés ne dépend pas de leur sexe. En effet, la proportion des individus qui gagnent moins de 8 000 F ($\mathcal{A}$) parmi les employés ($\mathcal{P}$) est égale à la proportion de ceux qui gagnent moins de 8000 F ($\mathcal{A}$) parmi les femmes ($\mathcal{B}$), elle est encore égale à la proportion de ceux qui gagnent moins de 8 000 F ($\mathcal{A}$) parmi les hommes (${}^{c}\mathcal{B}$).

Parmi les employés de cette entreprise, on en choisit un au hasard.
On note A l'événement « il gagne moins de 8 000 F » et
B l'événement « il est de sexe féminin ».

On a : $P(A) = \frac{1500}{2000} = \frac{3}{4}$ $P_B(A) = \frac{600}{800} = \frac{3}{4}$ $P_{\overline{B}}(A) = \frac{900}{1200} = \frac{3}{4}$.

Ce que l'on peut schématiser par les tirages suivants :



Les données numériques, proportionnalité des colonnes et proportionalité des lignes, sont telles que dans cette situation on a la conservation de la valeur de la probabilité de A quelle que soit l'urne où l'on a prélevé la boule :

$P(A) = P_B(A) = P_{\overline{B}}(A)$ c'est-à-dire : la réalisation de A ne dépend pas de celle de B.

---

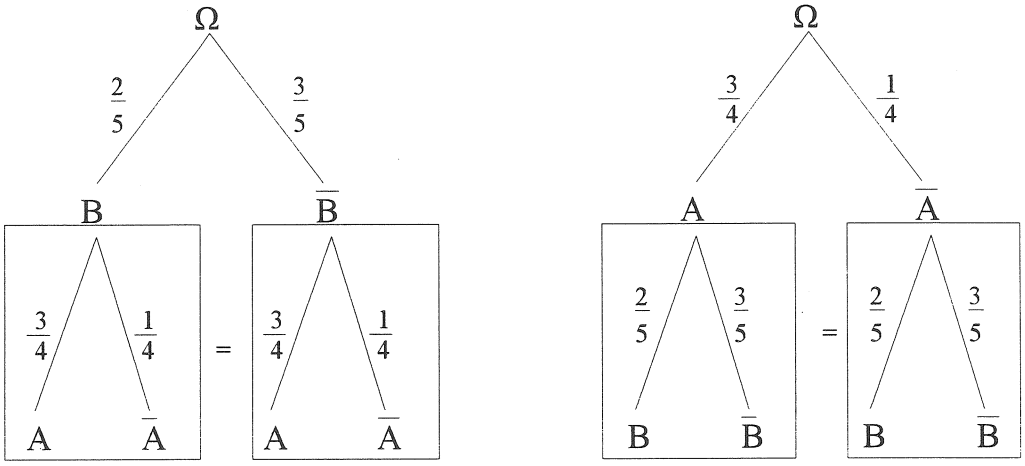
[4] Pour la justification de l'adjectif voir p 35.

De la relation $P(A) = P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ on tire :

$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ qui est choisie pour définition de l'indépendance de deux événements A et B.

On calcule de même : $P(B) = \dfrac{800}{2000} = \dfrac{2}{5}$; $P_A(B) = \dfrac{600}{1500} = \dfrac{2}{5}$; $P_{\overline{A}}(B) = \dfrac{200}{500} = \dfrac{2}{5}$.

Pour les arbres probabilistes, cela donne :



les branches probabilisées de seconde génération sont identiques.

Pour le diagramme de Carroll, on a :

	A	$\overline{A}$	
B	$\frac{6}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{2}{5}$
$\overline{B}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{3}{5}$
	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

où il est visible que :

$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

On ne peut pas représenter par un diagramme de Venn la notion d'indépendance car celle-ci rend nécessaire la comparaison en grandeur des aires des "patates", ce qui n'est pas leur usage habituel.

On trouvera des exemples d'application, même curieux, dans la deuxième partie p.36.

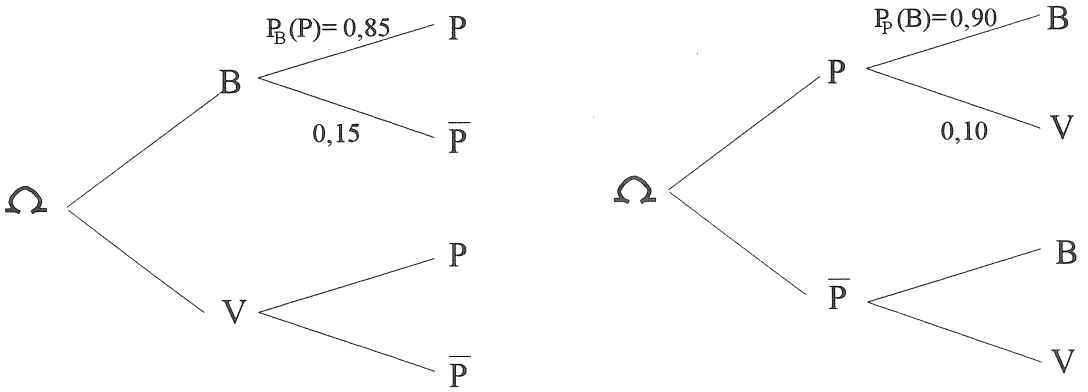
EXERCICES D'APPLICATION

Exercice I : Inégalité sociale
Enoncé inspiré par [9]

Dans une lointaine planète, vivent des Verts et des Bleus : 85% des Bleus sont pauvres, et 90% des pauvres sont Bleus.
On choisit un individu au hasard. Les événements "obtenir un individu Bleu" et "obtenir un individu pauvre" sont-ils indépendants ? Y a-t-il sur cette planète une inégalité sociale due à la couleur ?

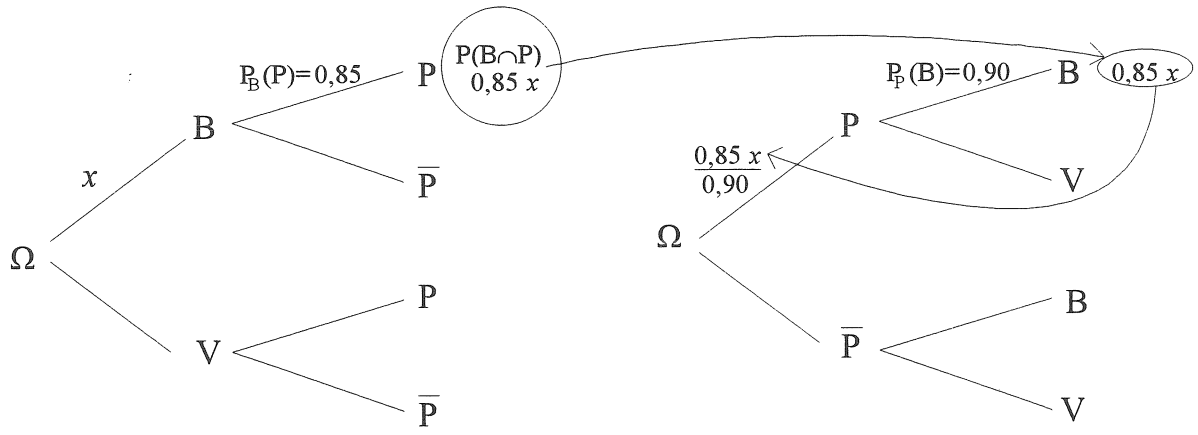
L'expérience aléatoire est décrite dans l'énoncé par la phrase : "On choisit un individu au hasard" et l'expression "au hasard" indique, par contrat, qu'il y a équiprobabilité sur l'univers Ω des habitants de cette planète.
Après ce choix d'introduction, il est très important que le premier exercice d'application comporte des pourcentages car, d'après Michel HENRY *dans [6], l'utilisation de pourcentage met en acte la notion de probabilité.*

Notons B l'événement « il est Bleu » et
P l'événement « il est pauvre ».
L'énoncé conduit à estimer $P_B(P) = 0,85$ et $P_P(B) = 0,90$.
Pour aider la compréhension de l'énoncé et le raisonnement, on dessine les deux arbres probabilistes :



On s'aperçoit alors que les données sont insuffisantes pour calculer quelque autre probabilité donc pour répondre aux questions posées.

Notons alors x la proportion des individus Bleus sur cette planète et cherchons x pour que les événements B et P soient indépendants. Compte tenu de l'équiprobabilité a priori, on a $P(B)= x$ et les 2 arbres deviennent :



On a donc :

$$P(B\cap P) = P(B)\times P_B(P) = x\times 0{,}85 = 0{,}85x$$

et $P(B\cap P) = P(P)\times P_P(B)$

donne $0{,}85x = P(P)\times 0{,}90$ donc $P(P) = \dfrac{0{,}85x}{0{,}90}$.

B et P sont indépendants si et seulement si $P(B\cap P) = P(B)\times P(P)$

$$\Leftrightarrow \quad 0{,}85x = x\times\frac{0{,}85x}{0{,}90}$$

$$\Leftrightarrow 0{,}85x\,(0{,}90 - x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ x = 0{,}90 \end{cases}$$

x = 90 % est une solution que l'on pouvait peut-être attendre car elle signifie exactement ce qui vient d'être vu précédemment lorsqu'il y a indépendance :
la proportion x des individus Bleus par rapport à la population totale est égale à la proportion des individus Bleus parmi les pauvres.

x = 0 % est une autre solution, elle correspond au cas où il n'y a pas de Bleus. On a alors P(B) = 0. D'après l'énoncé, 90% des pauvres sont Bleus donc il n'y a pas de pauvres non plus sur cette planète.

Et si $x > 90\%$ on démontre alors que $P_V(P) > P_B(P)$, c'est-à-dire qu'il y a inégalité sociale et ce sont les Verts qui ont la plus grande probabilité d'être pauvres dans ce cas.

Exercice II : Défauts de fabrication

Un appareil fabriqué en très grande série peut-être défectueux à cause de deux défauts seulement, désignés par α et β.
Dans un lot de 10 000 appareils prélevés on a constaté que :

- 1 000 appareils présentaient le défaut α
- 800 appareils présentaient le défaut β
- 400 appareils présentaient à la fois les défauts α et β.

Un client achète l'un des appareils.
Quelle est la probabilité qu'il présente le défaut α seulement ? qu'il ne présente aucun défaut ?
Les événements « présenter le défaut α » et « présenter le défaut β » sont-ils indépendants ?

Il faut noter que pour le vendeur ou le fabricant tout se passe comme si l'acheteur choisit l'appareil au hasard (i. e. tous les appareils sont équiprobables), mais du point de vue de l'acheteur le choix de l'appareil se fait sur un nombre restreind et selon des critères qui lui sont personnels ; il n'est pas ressenti comme étant fait "au hasard". Ainsi, selon que l'on se considère comme vendeur ou comme acheteur on va interprêter cet énoncé de deux façons différentes. Ceci peut être évité si l'énoncé précise que l'appareil acheté par le client a été ***"choisi au hasard"****, par effet de contrat, cette expression indique qu'il y a une expérience aléatoire avec équiprobabilité sur l'univers Ω des appareils fabriqués.*

Dans la dernière question les événements sont définis mais à l'aide d'un infinitif qui fait davantage penser à deux caractères statistiques plutôt qu'à deux événements qui sont : « l'appareil présente le défaut α » et « l'appareil présente le défaut β ».

Notons A l'événement « l'appareil présente le défaut α » et
B l'événement « l'appareil présente le défaut β ».
Les données de l'énoncé observées sur un échantillon de 10 000 appareils conduisent à estimer les probabilités par :

$$P(A) = \frac{1000}{10000} = 0,1 \qquad P(B) = \frac{800}{10000} = 0,08 \qquad \text{et} \qquad P(A\cap B) = \frac{400}{10000} = 0,04$$

Ayant ces renseignements sur les probabilités directes des parties de Ω, il est ici plus judicieux de construire un diagramme de Carroll pour guider le raisonnement.

	A	$\overline{A}$	
B	0,04		0,08
$\overline{B}$			
	0,1		1

On ***voit*** *alors que ce tableau peut être complété facilement, on peut donc répondre à toutes les questions posées.*

« L'appareil présente le défaut α seulement » correspond à l'événement $A\cap\overline{B}$.
D'après la formule des probabilités totales, $P(A) = P(A\cap B) + P(A\cap\overline{B})$
on déduit $P(A\cap\overline{B}) = P(A) - P(A\cap B) = 0,1 - 0,04 = 0,06$.

« L'appareil ne présente aucun défaut » correspond à l'événement $\overline{A}\cap\overline{B}$.
D'après la même formule précédente on déduit $P(\overline{A}\cap\overline{B}) = P(\overline{B}) - P(A\cap\overline{B})$
où $P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0,08 = 0,92$ ainsi, $P(\overline{A}\cap\overline{B}) = 0,92 - 0,06 = 0,86$.

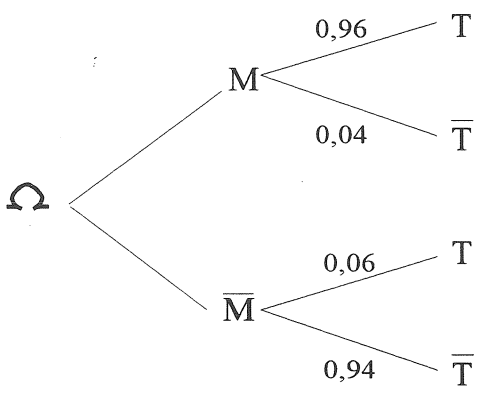
L'indépendance de ces deux événements n'est pas réalisée car
$P(A)\times P(B) = 0,008 \neq P(A\cap B) = 0,04$.

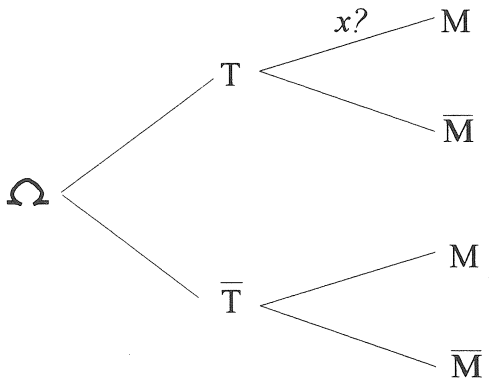
Exercice III : Diagnostic d'une maladie
Enoncé inspiré par A. ENGEL [10] p.268

Une personne choisie au hasard parmi la population de la région passe un test pour dépister une maladie.
Dans cette région, on a établi par sondage dans les hôpitaux que :
si une personne a la maladie alors le test est positif dans 96 % des cas et
si une personne n'a pas la maladie alors le test est négatif dans 94 % des cas.
Le résultat du test est positif, quelle est la probabilité que cette personne soit atteinte de cette maladie ?

Question ridicule pourraient penser certains élèves après une première lecture rapide de l'énoncé. Non, c'est seulement une question sans réponse car, dans cet exercice aussi il ***manque une donnée comme l'explique la construction des arbres*** *ci-dessous.*

En notant M l'événement : « la personne est atteinte de cette maladie »,
T l'événement : « le test de la personne est positif »





La personne ayant été choisie au hasard, les quatre probabilités conditionnelles indiquées sur le premier arbre sont les estimations les plus naturelles à notre disposition d'après l'énoncé, et la question posée revient à calculer $P_T(M)$ noté x. Pour cela il faut utiliser la formule de Bayes c'est-à-dire inverser le premier arbre, il nous faut donc P(M) (ou $P(\overline{M})$), c'est-à-dire, il nous faut connaitre la probabilité qu'une personne choisie au hasard dans la région soit atteinte de cette maladie.
Il est évident que ce renseignement indispensable ne peut être obtenu que par **sondage** dans une population où chacun ne connait pas nécessairement la réponse le concernant ?
Supposons néanmoins que des spécialistes nous précisent qu'une personne sur 65 a cette maladie, on est alors conduit à estimer P(M) = 1/65 et la formule de Bayes, à décomposer en étapes intermédiaires pour élèves de Terminale, donne :

$$P_T(M) = \frac{P(M) \times P_M(T)}{P(M) \times P_M(T) + P(\overline{M}) \times P_{\overline{M}}(T)} = \frac{\frac{1}{65} \times 0{,}96}{\frac{1}{65} \times 0{,}96 + \frac{64}{65} \times 0{,}06} = 0{,}2$$

Ce résultat peut sembler surprenant car il établit que, dans ces conditions, un test positif ne prouve rien. Il convient alors de subir de nouveaux tests. Le résultat aurait été plus surprenant encore pour une maladie moins répandue, par exemple pour P(M) = 1/145 on trouve :

$$P_T(M) = \frac{\frac{1}{145} \times 0{,}96}{\frac{1}{145} \times 0{,}96 + \frac{144}{145} \times 0{,}06} = 0{,}1$$

Par contre lorsque le résultat du test est négatif, la probabilité que cette personne ne soit pas atteinte de cette maladie dans le cas où P(M) = 1/65 est :

$$P_{\overline{T}}(\overline{M}) = \frac{P(\overline{M}) \times P_{\overline{M}}(\overline{T})}{P(\overline{M}) \times P_{\overline{M}}(\overline{T}) + P(M) \times P_{M}(\overline{T})} = \frac{\frac{64}{65} \times 0{,}94}{\frac{64}{65} \times 0{,}94 + \frac{1}{65} \times 0{,}04} \approx 0{,}9993$$

C'est la certitude avec une erreur inférieure à 7 pour 10 000, mais ce n'est pas la certitude absolue et l'événement contraire peut arriver, (cf I. EKELAND dans [11] p 162 et 163).

On constate que les arbres sont une aide très efficace à la compréhension des concepts et des formules de probabilités conditionnelles ainsi qu'un support très pertinent pour s'approprier certains énoncés et pour élaborer les raisonnements à mettre en oeuvre. Il ne faudrait cependant pas en abuser car des élèves pourraient croire que l'objet de l'apprentissage est le mode d'emploi des arbres et le concept de probabilité conditionnelle ne serait pas acquis. Il apparaît alors souhaitable que les élèves sachent utiliser d'autres supports visuels comme les diagrammes de Carroll et de Venn mais aussi qu'ils voient l'utilisation des arbres dans d'autres situations comme par exemple les dénombrements.

SECONDE INTRODUCTION

Pour introduire la notion de probabilité conditionnelle, cette partie propose d'abord trois exemples où dans chacun apparaît une des trois conceptions réductrices : chronologiste, causaliste et cardinaliste (voir leur description succincte dans le préambule p.3 ou cf [1] ou cf [2]). Ces conceptions, parfois génératrices d'obstacles doivent peu à peu être comprises puis dépassées afin que le concept de probabilité conditionnelle soit maîtrisé.

Une synthèse de ces trois exemples débouche ensuite sur une formalisation de ce concept, elle est suivie de quelques exercices d'application où l'on rencontre les situations correspondant à ces trois conceptions réductrices ainsi que les deux types de schémas les plus pertinents : arbre probabiliste et diagramme de Carroll.

Dans cette brochure, **l'événement au sens familier** est repéré exclusivement par les guillemets suivants « ... », alors que **l'événement au sens mathématique** est repéré par les lettres traditionnelles A, B, etc...Le passage de l'un à l'autre se fait au moyen de conventions telles que :

"l'événement **A :** « ..... » ",

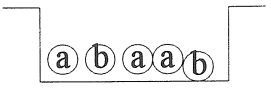
"**notons A** l'événement « ..... » ",

"**soit A** l'événement « ..... » ".

Ce passage indispensable permet d'écrire P(A) où P est l'application telle qu'elle est définie en mathématiques. Il ne sera jamais utilisé ici, l'expression "**A** = « ..... » ".

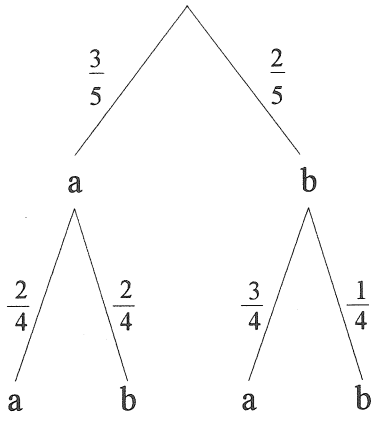
EXPÉRIENCE ALÉATOIRE À DEUX ÉPREUVES SUCCESSIVES LIÉES

"On tire au hasard" [5] une lettre de l'urne ci-contre, on ne la remet pas puis on fait un second tirage.



On peut s'intéresser à divers événements, choisissons par exemple A : [6]« on obtient la lettre a au dernier tirage » et B : « on obtient la lettre b au dernier tirage ». Ces événements peuvent être considérés comme événements élémentaires relatifs à l'univers {A,B}, mais pour déterminer leurs probabilités d'une part et pour mettre en acte la notion de probabilité composée d'autre part, on va choisir l'univers pour retracer l'historique de l'obtention finale des lettres a et b.
Pour rédiger on peut écrire :

Le déroulement des événements de cette expérience peut se représenter par l'arbre suivant :



cet arbre nous conduit à $\Omega = \{ (a,a) ; (a,b) ; (b,a) ; (b, b) \}$

Pour nos élèves on peut justifier l'attribution de probabilités aux événements élémentaires de cette expérience de la manière suivante :
D'après la conception fréquentiste de la probabilité, si on répète N fois cette expérience à deux épreuves liées, on peut **espérer** [7] que $\frac{3}{5}$ des N expériences donneront l'issue a au premier tirage puis $\frac{2}{4}$ ou $\frac{1}{2}$ de ces $\frac{3}{5} \times N$ expériences donneront b au second tirage donc $\frac{1}{2} \times \frac{3}{5}$ des N expériences donneront (a,b). Ce qui conduit à **estimer** [8] $P\{(a,b)\} = \frac{3}{10}$.

---

[5] Expression qui signifie, par contrat, qu'il y a équiprobabilité pour les éléments considérés (cf p 10).
[6] Voir la distinction entre événement au sens familier et événement mathématique page précédente.
[7] $\frac{3}{5} \times N$ est l'**espérance mathématique** de la variable aléatoire du nombre de réalisation de {a} lorsqu'on répète N fois la première épreuve.
[8] C'est le meilleur **estimateur** d'après la théorie statistique de l'Estimation.

Ce raisonnement conduit à cet énoncé : « Sur l'arbre, la probabilité du couple (a,b) s'obtient en multipliant les probabilités successives de a et de b » [9].

D'où la loi de probabilité associée à cette expérience à deux épreuves liées :

ω	(a,a)	(a,b)	(b,a)	(b,b)
$P(\{\omega\})$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$

Ce raisonnement précédent se généralise à une expérience comportant n épreuves aléatoires successives et conduit à cette sorte de "théorème d'arbres" :
« Sur un arbre probabiliste, la probabilité d'un n-uplet s'obtient en multipliant les probabilités successivement rencontrées ».

D'autre part, on peut remarquer que l'événement A : « on obtient la lettre a au dernier tirage » est représenté par {(a,a); (b,a)}
d'où $P(A) = P(\{a,a\}) + P(\{b,a\}) = \frac{3}{10}+\frac{3}{10}=\frac{3}{5}$,
P(A) est aussi égal à la probabilité d'obtenir a au premier tirage ?

D'une manière générale on peut voir dans cet exemple que :
si on note A_i l'événement « on obtient a au $i^{ème}$ tirage », $i \leq 5$ et
B_i l'événement « on obtient b au $i^{ème}$ tirage »,
alors $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = P(A_4) = P(A_5) = \frac{3}{5}$, de même
$P(B_1) = P(B_2) = P(B_3) = P(B_4) = P(B_5) = \frac{2}{5}$.
Ces probabilités ne dépendent donc pas du rang i pour lequel on s'intéresse aux événements « on obtient a » et « on obtient b ». Cette curiosité est connue sous le nom de "paradoxe de la courte paille"[10], elle est vraie pour toute expérience aléatoire modélisée par des tirages sans remise d'une boule dans une urne.

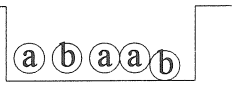
---

[9] En réalité cet énoncé représente la propriété selon laquelle la probabilité conjointe $P(A_1 \cap B_2)$ est égale au produit des probabilités $P(A_1) \times P_{A1}(B_2)$.

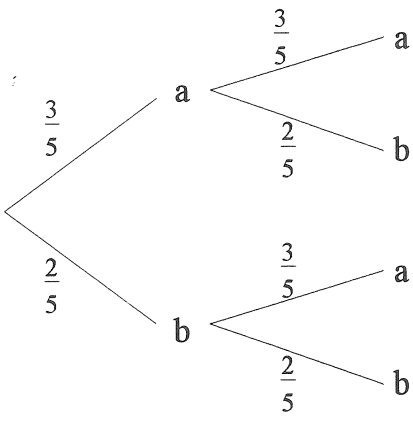
[10] Lorsque n individus tirent chacun une paille parmi n pailles dont une est plus courte que les autres, la probabilité de tirer la plus courte ne dépend pas de l'ordre dans lequel les individus font le tirage. Cependant celui qui tire la dernière paille a l'impression qu'il n'a pas (eu) "les mêmes chances" que les autres, surtout dans le cas où il peut voir les pailles tirées par les autres.

EXPÉRIENCE ALÉATOIRE À DEUX ÉPREUVES RÉPÉTÉES

On tire au hasard une lettre de l'urne ci-contre, on la note, on la remet dans l'urne puis on fait un second tirage.



Le déroulement des événements de cette expérience peut se représenter par l'arbre ci-dessous et, comme on peut faire le même raisonnement que précédemment en répétant N de ces expériences, le même "théorème d'arbre"[11] précédent s'applique et on obtient la loi de probabilité associée à cette expérience à deux épreuves répétées :



ω	P({ω})
(a,a)	$\frac{9}{25}$
(a,b)	$\frac{6}{25}$
(b,a)	$\frac{6}{25}$
(b,b)	$\frac{4}{25}$

Comme dans l'exemple précédent, on peut remarquer que :

$P(A) = P(\{a,a\}) + P(\{b,a\}) = \frac{9}{25} + \frac{6}{25} = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}$,

ainsi P(A) est encore égal à la probabilité d'obtenir a au premier tirage.

Dans ce cas aussi, on a la même généralisation que précédemment, mais sans limite pour le rang i, c'est-à-dire :

les événements A_i sont équiprobables avec $P(A_i) = \frac{3}{5}$ et les événements B_i sont aussi équiprobables avec $P(B_i) = \frac{2}{5}$.

[11] En réalité,ici, ce "théorème d'arbres" représente la propriété d'indépendance stochastique qui se traduit par un produit de probabilités.

Contrairement à la première introduction, ces deux exemples qu'on vient d'étudier sont liés au temps par des épreuves successives. Ce choix risque de présenter des obstacles à la réversibilité de la probabilité conditionnelle lorsqu'il s'agira de déterminer les probabilités de causes ayant observé des conséquences (cf Michel HENRY dans [5] p 97 et 98). Cette réversibilité est illustrée dans la première partie p 13 par le retournement de l'arbre probabiliste.

Ces deux premiers exemples peuvent être abordés dès la classe de première, pour être rappelés brièvement en classe terminale au moment d'introduire les probabilités conditionnelles. Il faudrait alors les faire suivre par la situation ensembliste de la première partie, où il n'y a aucun lien chronologique induit par l'énoncé, comme dans les pages suivantes :

EXPÉRIENCE ALÉATOIRE DONT LES ÉVÉNEMENTS SONT DES PAIRES

Une enquête effectuée auprès des employés d'une entreprise concernant le sexe et le salaire a donné les résultats suivants présentés dans un tableau d'effectifs.

	salaire < 8 000 F	salaire ≥ 8 000 F	
femmes	400	300	700
hommes	600	200	800
	1 000	500	1 500

A - Parmi les personnes employées on en choisit une au hasard.

Cet énoncé indique qu'un événement élémentaire de l'expérience aléatoire est une paire de renseignements sur les deux caractères {salaire;sexe}. Contrairement aux deux expériences précédentes où les événements présentant deux caractères étaient fabriqués chronologiquement, ici ils sont déterminés simultanément, on va alors s'intéresser à d'autres événements comme « la personne gagne moins de 8 000 F» noté A et « la personne est de sexe féminin » noté B.

1°) Quelle est la probabilité qu'elle soit une femme ?

C'est $P(B) = \frac{700}{1500} = \frac{7}{15}$ (cf 1ère partie p 10).

2°) Quelle est la probabilité qu'elle gagne moins de 8 000 F ?

C'est $P(A) = \frac{1000}{1500} = \frac{10}{15}$.

3°) Quelle est la probabilité qu'elle soit une femme gagnant moins de 8 000 F ?

L'événement « elle est une femme gagnant moins de 8 000 F » est représenté par $A \cap B$.

Sa probabilité est $P(A \cap B) = \frac{400}{1500} = \frac{4}{15}$.

B -Parmi les femmes on en choisit une au hasard quelle est la probabilité qu'elle gagne moins de 8 000 F ?

*On est dans la situation où **il y a un changement d'expérience aléatoire**, l'énoncé suggère que l'on a mis dans une urne fictive les boules $\mathcal{B}$ des employées de sexe féminin. La fonction probabilité associée à cette nouvelle expérience aléatoire est naturellement notée P_B et on a :*

$$P_B(A) = \frac{400}{700} = \frac{4}{7}$$

on constate que $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ (12)

ou encore : $P(A \cap B) = P(B) \times P_B(A)$

4°) Sachant que c'est une femme, quelle est la probabilité qu'elle gagne moins de 8 000 F ?

*On est dans la situation où **il n'y a pas changement d'expérience aléatoire** (même Ω) mais un renseignement sur les deux est connu et on s'intéresse à l'autre supposé ignoré ou perdu ou effacé! Il est alors traditionnel de changer l'écriture de l'événement A et on obtient :*

$$P(A/B) = \frac{400}{700} = \frac{4}{7}$$

on constate que $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ (12)

ou encore : $P(A \cap B) = P(B) \times P(A/B)$

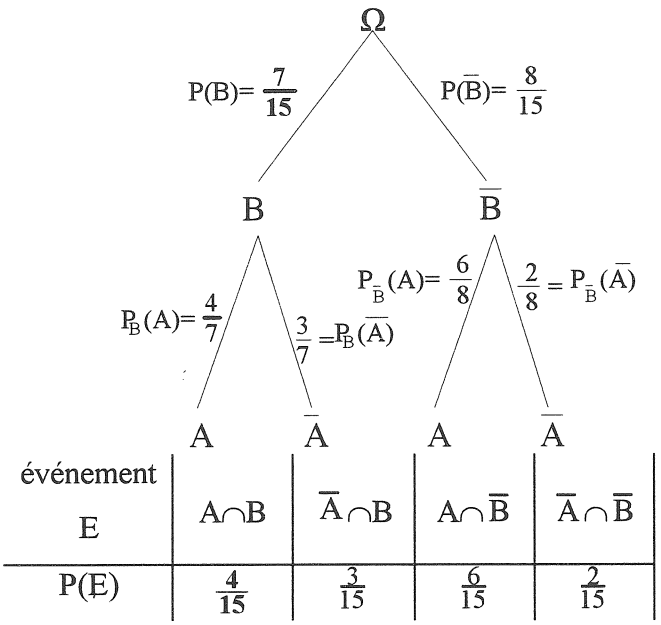
On retrouve la même règle que le "théorème d'arbres" précédent, c'est-à dire :

la probabilité conjointe $P(A \cap B)$ s'obtient par le produit $P(B) \times P_B(A)$.

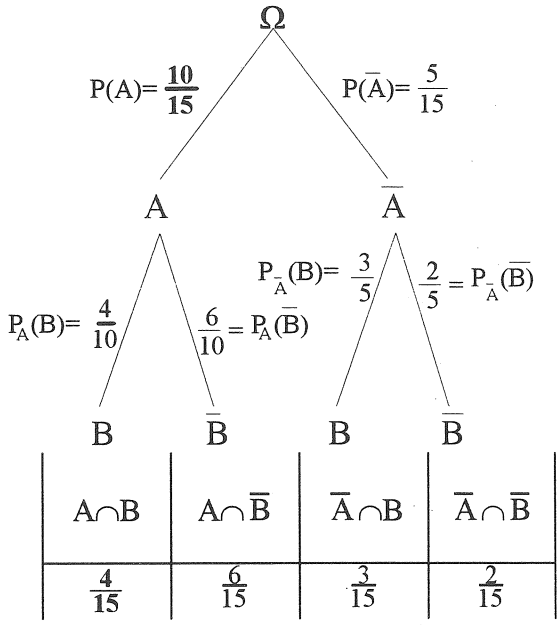
---

(12) Cette relation ne provient pas d'une situation numérique particulière, voir première partie p. 11.

On peut illustrer ces probabilités, et celles de même type relatives à cet énoncé par **l'un ou l'autre des deux arbres probabilistes suivants.**



événement E	A∩B	Ā∩B	A∩B̄	Ā∩B̄
P(E)	4/15	3/15	6/15	2/15



	A∩B	A∩B̄	Ā∩B	Ā∩B̄
	4/15	6/15	3/15	2/15

Ici, on peut naturellement dessiner deux arbres car il n'y a pas de chronologie induite par l'énoncé entre les événements comme dans les deux exemples précédents. Il n'y a donc pas d'ordre préférentiel pour la construction de l'arbre.

On fabrique alors **un seul modèle mathématique** qui regroupe les diverses situations rencontrées dans les trois types d'expériences précédents en donnant la **définition** suivante :

Dans un espace probabilisé (Ω, P), étant donnés deux événements A et B tels que $P(B) \neq 0$, on appelle "probabilité sachant B, de A" le quotient : $\frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ noté $P_B(A)$ ou encore $P(A/B)$.

$A \cap B$ est l'événement égal à la conjonction des événements A et B, on le lit aussi A et B.

EXERCICES D'APPLICATIONS

Exercice I : Défauts de fabrication :

On se reportera à l'application **II** de la première partie. C'est une situation ensembliste comme la précédente mais c'est surtout une situation où le diagramme de Carroll est un outil de résolution plus pertinent que l'arbre probabiliste.

Exercice II : Les jetons
(cf Michel HENRY [4] p. 82 et 83)

Dans un sac, il y a 3 jetons : un avec deux faces noires, un avec deux faces blanches, un avec une face noire et une face blanche. On tire un jeton au hasard, sa face apparente est blanche, quelle est la probabilité que l'autre face soit blanche ?

Voici 3 réponses rencontrées dans des copies d'élèves :

1) Il y a un seul jeton sur les 3 qui répond à la question, c'est le jeton tout blanc et, puisque les jetons sont équiprobables la probabilité cherchée vaut 1/3.
2) Il n'y a que 2 jetons qui peuvent réaliser la première condition et parmi ces 2 jetons un seul remplit la seconde condition donc la probabilité cherchée vaut 1/2.
3) Notons B_1 l'événement « la face apparente est blanche »,
   B_2 l'événement « l'autre face est blanche »,
   la question posée revient à calculer $P_{B1}(B_2)$.
   Or $P(B_1 \cap B_2) = 1/3$ car il n'y a qu'un seul jeton sur les 3 qui a les 2 faces blanches.
   Et $P(B_1) = 1/2$ car c'est la proportion des faces blanches qui sont équiprobables.
   D'où $P_{B1}(B_2) = \dfrac{P(B_1 \cap B_2)}{P(B_1)} = \dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{2}{3}$.

Y a-t-il un paradoxe ou bien ,au moins deux des réponses sont-elles fausses ?

Résoudre un problème de probabilité est principalement un problème de choix :

* *pour le probabiliste, c'est le choix du modèle (l'univers et la loi de probabilité associée) le mieux adapté à la situation;*
* *pour le professeur de lycée, c'est le choix du meilleur univers Ω, celui qui donnera les réponses avec un minimum de coût ou celui qui permettra de mieux s'approprier l'énoncé et de concevoir une solution accessible à la majorité des élèves;*
* *pour l'élève, c'est trop souvent le choix de la solution que le "prof" a adoptée en classe lorsqu'il a résolu un problème semblable. C'est un effet du contrat didactique.*

Explication choisie par l'enseignant pour convaincre l'élève ayant une conception cardinaliste :

Une (re)lecture approfondie de l'énoncé montre que la question posée porte sur les faces (sa face apparente est ..., l'autre face soit ...) et non sur les jetons. Il est donc préférable de consisérer qu'un événement élémentaire est constitué par un couple de faces. Si on numérote les faces, faisant apparaître en première position du couple celle qui est apparente on obtient :

$\Omega = \{(b_1, b_2); (b_2, b_1); (n_1, n_2); (n_2, n_1); (b_3, n_3); (n_3, b_3)\}$

On peut ensuite dresser un tableau de tous les cas possibles, on obtient :

face apparente	l'autre face	face apparente blanche	l'autre face blanche
b_1	b_2	oui	oui
b_2	b_1	oui	oui
n_1	n_2		
n_2	n_1		
b_3	n_3	oui	
n_3	b_3		

On constate alors, par dénombrement que l'événement attendu se produit 2 fois sur 3. Compte tenu de l'équiprobabilité supposée des faces des jetons, la bonne réponse est donc 2/3 comme la solution 3), qui est celle du probabiliste ayant choisi, sans l'écrire explicitement, le même univers Ω que ci-dessus avec **une loi de probabilité conditionnelle**.

Supposons que le sac contienne 65 jetons dont 15 avec les deux faces noires, 21 avec deux faces blanches, 29 avec une face noire et une face blanche. On tire un jeton au hasard, sa face apparente est blanche, quelle est la probabilité que l'autre soit blanche ?

Quel type de solution va-t-on choisir, celle du probabiliste ou celle qui consiste à dénombrer les cas ?

On peut encore compliquer davantage cet exercice en proposant 10 jetons présentant chacune des 10 possibilités de une ou deux couleurs à choisir parmi 4 couleurs différentes : blanc, noir, vert, rouge. On obtient alors :
$\Omega = \{(b_1, b_2); (b_2, b_1); (n_1, n_2); (n_2, n_1); (v_1, v_2); (v_2, v_1); (r_1, r_2); (r_2, r_1); (b_3, n_3); (n_3, b_3); (b_4, r_3); (r_3, b_4); (b_5, v_3); (v_3, b_5); (n_4, r_4); (r_4, n_4); (n_5, v_4); (v_4, n_5); (r_5, v_5); (v_5, r_5)\}$.
A la même question, en notant B_1 l'événement « la face apparente est blanche » et B_2 l'événement « l'autre face est blanche », on répond alors : $P_{B1}(B_2) = \dfrac{P(B_1 \cap B_2)}{P(B_1)} = \dfrac{\frac{1}{10}}{\frac{5}{20}} = \dfrac{2}{5}$

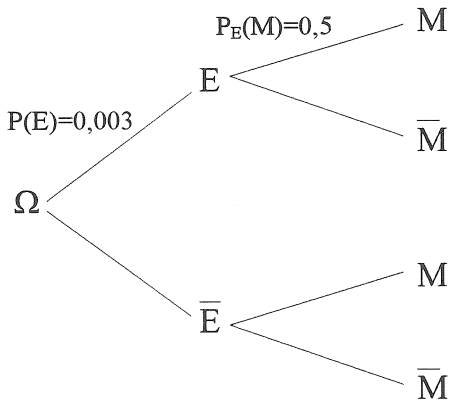
Tout ceci montre que, aussi efficaces que soient les supports visuels il faut peu à peu apprendre à s'en passer car **seuls le concept assimilé et sa formalisation mathématique garantissent la validité mathématique du résultat en toute circonstance.**

Exercice III : Les déréglements

Sur une machine on considère que les probabilités de déréglements électronique et mécanique pour un jour donné sont respectivement 3×10^{-3} et 7×10^{-3}. Il n'y a pas d'autres possibilités de déréglement et on sait que la probabilité de déréglement mécanique sachant qu'il y a un déréglement électronique est 0,5.

1°) Calculer la probabilité que cette machine ait les deux déréglements un jour donné.
2°) Calculer la probabilité que cette machine n'ait aucun déréglement un jour donné.
3°) Aujourd'hui la machine est déréglée, quelle est la probabilité que les causes de ce déréglement soient à la fois électronique et mécanique ?

Implicite dans l'énoncé, la relation de cause à effet permet de représenter le déroulement des événements par **l'arbre** probabiliste suivant où :
E est l'événement « la machine est déréglée électroniquement » et
M « la machine est déréglée mécaniquement ».



1) La question posée revient à calculer $P(E\cap M)$
$P(E\cap M) = P(E)\times P_E(M) = 0,003\times0,5 = 0,0015$.

Le seul arbre précédent ne permet pas d'emblée d'indiquer toutes les données, notamment celle de P(M). Bien qu'il soit un outil efficace pour la compréhension du 1) il n'est pas directement exploitable pour le 2) pour lequel, avec les données et la réponse précédente un **diagramme de Carroll** donne :

	E	$\overline{E}$	
M	0,0015		0,007
$\overline{M}$			
	0,003		1

On **voit** alors que ce tableau peut être complété facilement, on peut donc répondre à toutes les questions.

2) La question posée revient à calculer $P(\overline{E} \cap \overline{M})$.
D'après la formule des probabilités totales $P(M) = P(M \cap E) + P(M \cap \overline{E})$, on déduit :
$P(M \cap \overline{E}) = P(M) - P(M \cap E) = 0,007 - 0,0015 = 0,0055$.
De même $P(\overline{E}) = P(\overline{E} \cap M) + P(\overline{E} \cap \overline{M})$ implique :
$P(\overline{E} \cap \overline{M}) = P(\overline{E}) - P(\overline{E} \cap M)$ où $P(\overline{E}) = 1 - P(E) = 1 - 0,003 = 0,997$.
Ainsi, $P(\overline{E} \cap \overline{M}) = 0,997 - 0,0055 = 0,9915$.
(Si les élèves de lycée connaissaient les lois logiques et ensemblistes de De Morgan on pourrait écrire directement :
$P(\overline{E} \cap \overline{M}) = 1 - P(E \cup M) = 1 - [P(E) + P(M) - P(E \cap M)] = 1 - (0,003 + 0,007 - 0,0015)$.)

3) L'événement « la machine est déréglée » correspond à la réunion ensembliste $E \cup M$ et la question posée revient à calculer $P_{E \cup M}(E \cap M)$.
Or, $P(E \cup M) = P(E) + P(M) - P(E \cap M) = 0,003 + 0,007 - 0,0015 = 0,0085$ et comme, $E \cap M \subset E \cup M$ alors $(E \cap M) \cap (E \cup M) = E \cap M$.
D'où $P_{E \cup M}(E \cap M) = \dfrac{P((E \cap M) \cap (E \cup M))}{P(E \cup M)} = \dfrac{P(E \cap M)}{P(E \cup M)} = \dfrac{0,0015}{0,0085} = \dfrac{15}{85} = \dfrac{3}{17} \approx 0,1765$.

Ce résultat peut sembler surprenant puisque dans une conception fréquentiste de la probabilité, en moyenne une fois sur deux lorsque le déréglement est électronique, il y a aussi déréglement mécanique. Ce résultat faible s'explique par le fait que le déréglement mécanique est plus fréquent que le déréglement électronique car $P(M) = \dfrac{7}{3} P(E)$.

Cet exercice offre une variété d'outils de résolution :

pour le 1) l'arbre probabiliste est pertinent mais non indispensable ;

pour le 2) le diagramme de Carroll est pertinent mais on peut se passer de tout support visuel si on est capable de faire deux "détours" à l'aide de la formule des probabilités totales , ou si on peut se représenter clairement les opérations ensemblistes ;

pour le 3) **seule la formalisation paraît pertinente** et tout schéma paraît non rentable, sauf peut-être un diagramme de Venn, pour que nos élèves actuels, qui ont très peu de formation ensembliste "voient" que $E \cup M$ correspond bien à l'événement « la machine est déréglée » et pour contrôler que $E \cap M \subset E \cup M$ donne $(E \cap M) \cap (E \cup M) = E \cap M$.

INDÉPENDANCE

VERS LA DÉFINITION

Cette activité ressemble à celle de la première partie mais ici l'expérience est déjà modélisée par une urne et des jetons.

On considère une urne contenant 12 jetons dont certaines faces sont marquées d'une lettre de la manière suivante :
il y a 6 jetons dont une face est marquée a et l'autre face est marquée b ,
2 jetons dont une seule face est marquée a ,
3 jetons dont une seule face est marquée b ,
1 jeton dont les deux faces ne sont pas marquées.
On tire un jeton au hasard et on note A l'événement « il a une face marquée a » et B « il a une face marquée b ».
On peut schématiser l'énoncé par le tableau des effectifs suivant :

faces	marquées a	non marquées a	total des jetons
marquées b	6	3	9
non marquées b	2	1	3
total des jetons	8	4	12

Dans cette expérience aléatoire l'équiprobabilité est annoncée par la phrase "on tire un jeton au hasard", d'où :

1) la probabilité qu'il ait ses deux faces marquées a et b est $P(A\cap B) = 6/12 = 1/2$;
2) la probabilité qu'il ait une face marquée a est $P(A) = 8/12 = 2/3$;
3) la probabilité qu'il ait une face marquée b est $P(B) = 9/12 = 3/4$;
4) sachant qu'il a une face marquée b la probabilité que l'autre soit marquée a est :

$$P_B(A) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3}, \text{ on constate que } P_B(A) = P(A).$$

Que l'on sache si le jeton a une face marquée b ou qu'on ne sache rien, la valeur de la probabilité de A reste inchangée. On peut aussi vérifier que, savoir que le jeton tiré a une face non marquée b ne modifie pas la probabilité de A, en effet : $P_{\overline{B}}(A) = \frac{P(A\cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{\frac{2}{12}}{\frac{3}{12}} = \frac{2}{3}$.

Dans ce cas particulier on dit que les événements A et B sont indépendants et de la relation $\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A)$ on déduit **$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ qui est choisie pour définition de l'indépendance de deux événements A et B.**

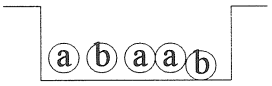
La généralisation à l'indépendance de 3 événements A,B,C n'est pas simple, on a la définition suivante :
On dit que trois événements A, B et C sont indépendants lorsque les quatre égalités suivantes sont vérifiées :

$P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P(B) \times P(C)$ et
$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$, et
$P(A \cap C) = P(A) \times P(C)$, et
$P(B \cap C) = P(B) \times P(C)$.

POUR UNE DÉFINITION PLUS SPÉCIFIQUE

Reprenons l'exemple des deux épreuves répétées :

On tire au hasard une lettre de l'urne ci-contre, on la note, on la remet dans l'urne puis on fait un second tirage.

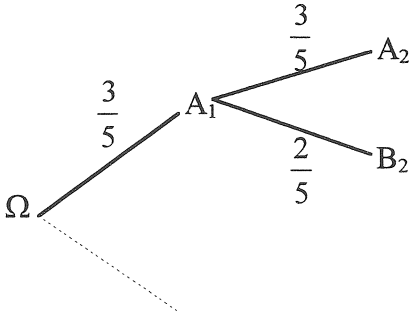


La répétition d'une même épreuve, dans les mêmes conditions fait penser à l'**indépendance au sens familier** et regardons dans le détail, sur cet exemple ce qu'il est nécessaire de préciser pour qu'il y ait **indépendance au sens probabiliste.**
En notant A_i l'événement « on obtient a au $i^{ième}$ tirage », on a vu précédemment (cf p 24) que

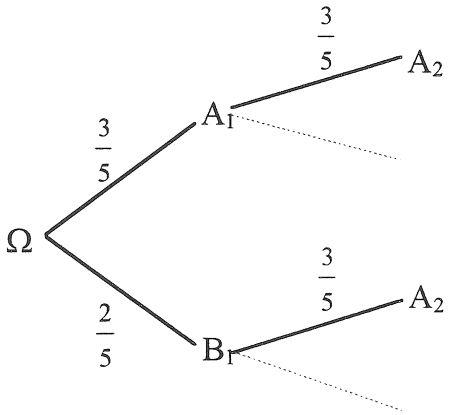
$P(A_1) = P(A_2) = \frac{3}{5}$, or $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \times P_{A1}(A_2) = \left(\frac{3}{5}\right)^2$ d'où $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \times P(A_2)$,

c'est à dire que **A_1 et A_2 sont indépendants dans (Ω, P)**.

Il est préférable de visualiser $A_1 \subset \Omega$ par les deux chemins ci-contre,



car $A_2 \subset \Omega$ est représenté par ces deux chemins.



Ainsi la structure de Ω paraît plus homogène et cela donne du sens aux opérations ensemblistes comme $A_1 \cap A_2$ qui s'interprète comme l'événement « on obtient a aux deux tirages ».

En généralisant à plus de deux tirages, la démonstration précédente reste valable en remplaçant 1 par i et 2 par i+1. De même, on a :

$P(A_1 \cap A_3) = P[A_1 \cap (A_2 \cap A_3)] + P[A_1 \cap (B_2 \cap A_3)] = P(A_1)P_{A1}(A_2 \cap A_3) + P(A_1)P_{A1}(B_2 \cap A_3)$

$P(A_1 \cap A_3) = P(A_1)P_{A1}(A_2)P_{A1 \cap A2}(A_3) + P(A_1)P_{A1}(B_2)P_{A1 \cap B2}(A_3) = \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} + \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{5}$

D'où $P(A_1 \cap A_3) = \left(\frac{3}{5}\right)^2 = P(A_1) \times P(A_3)$.

Cette démonstration reste valable pour i et i+2. En utilisant les mêmes propriétés on généralise cette indépendance stochastique à toutes les paires d'événements A_i et A_j, ainsi qu'à toutes les paires d'événements A_i et B_j $(i \neq j)$ comme ci-dessous :

$P(A_1 \cap B_2) = P(A_1) \times P_{A1}(B_2) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} = P(A_1) \times P(B_1) = P(A_1) \times P(B_2)$[13].

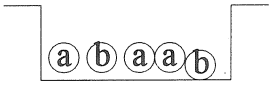
---

[13] Il est hors de question de présenter ces calculs fastidieux aux élèves de lycée.

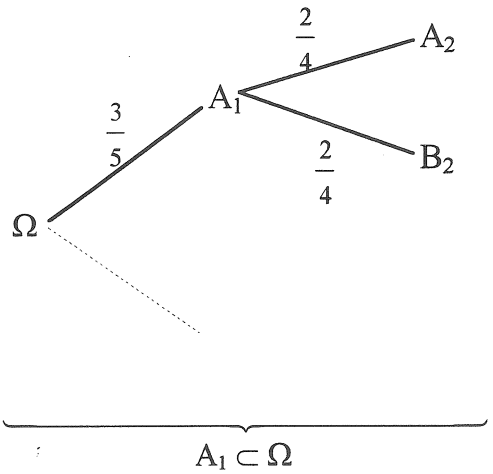
Dans le cas d'épreuves répétées, on considère généralement que deux événements quelconques A_i ou B_j ($i \neq j$) ne dépendent pas l'un de l'autre, cette idée est traduite dans le cadre probabiliste par l'indépendance (stochastique) de ces événements.

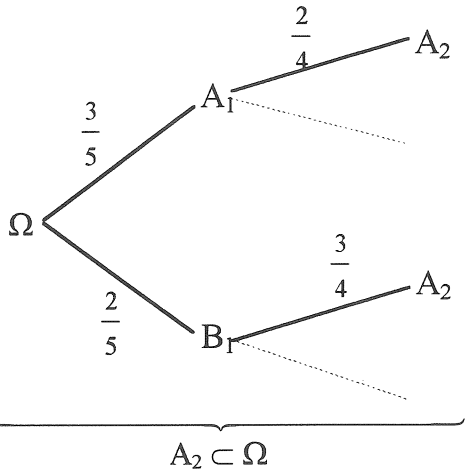
Reprenons l'exemple des deux tirages successifs et sans remise.

On tire au hasard une lettre de l'urne ci-contre, on ne la remet pas puis on fait un second tirage.



Dans ce cas aussi, on a vu que $P(A_1) = P(A_2)$ et même $P(A_i) = P(A_j)$ pour tous i et j entiers inférieurs à 5 lorqu'on effectue n tirages ,$n \leq 5$ (cf p 23, le paradoxe de la courte paille). On constate que la probabilité d'un événement A_i est indépendante **(au sens fonctionnel)** du rang n où on s'intéresse à l'obtention de a. Cependant les calculs $P(A_1 \cap A_2) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$ et $P(A_1) \times P(A_2) = \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$ montrent que **A_1 et A_2 ne sont pas indépendants dans (Ω, P).**





On voit à travers ces exemples que le sens de l'attribut "indépendant" donné à deux événements coïncide parfois avec un sens familier et ne coïncide pas d'autres fois avec un sens fonctionnel. Pour éviter des confusions nuisibles il paraît nécessaire de préciser le sens de cette **indépendance en probabilité** par l'adjonction d'un adverbe comme **stochastiquement**.

UN EXEMPLE CURIEUX

Voici un exercice classique :
Dans l'ensemble des familles de 3 enfants, on en choisit une au hasard. Les événements A : « elle a des enfants des deux sexes » et B : « elle a au plus une fille » sont-ils indépendants ?

Les naissances successives peuvent être représentées par des tirages aléatoires avec remise dans une urne à deux couleurs (bleu et rose, bien sûr !), on suppose donc que le sexe d'un enfant **ne dépend pas** *du sexe de l'enfant né précédemment.*

Une solution :
En France, après de nombreuses observations sur les naissances, les historiens et les biologistes ont obtenu les fréquences suivantes :

garçons : 0,514 filles : 0,486

Penons ces valeurs observées comme valeurs des probabilités élémentaires et anticipons un peu la loi binomiale qui va suivre (cf p 41), car pour traiter cette question cette loi est bien adaptée. Notons X la variable aléatoire prenant comme valeurs le nombre des filles nées dans une famille de 3 enfants choisie au hasard. Avec un peu d'expérience en probabilités, on reconnait une épreuve de Bernoulli répétée 3 fois, c'est-à-dire que X suit une loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = 0,486$ ($q = 0,514$). Cette loi est donnée par le tableau des probabilités des événements élémentaires suivant :

k	0	1	2	3
$P(\{X = k\})$	q^3	$3q^2p$	$3qp^2$	p^3

où $\{X=k\}$ désigne l'événement « dans la famille choisie, il y a k filles »

Aux événements A et B correspondent respectivement les parties $\{X = 1\}\cup\{X = 2\}$ et $\{X = 0\}\cup\{X = 1\}$, d'où :
$P(A) = P(\{X = 1\}) + P(\{X = 2\}) = 3q^2p + 3qp^2 = 3qp(p+q) = 3qp = 0,749412$
$P(B) = P(\{X = 0\}) + P(\{X = 1\}) = q^3 + 3q^2p = q^2(q+3p) = q^2(1 + 2p) = 0,520994512$

$P(A)\times P(B) = 3q^3p(1+2p) \approx 0,3904$
$P(A\cap B) = P(\{X = 1\}) = 3q^2p \approx 0,3852$

} les événements **A et B ne seraient pas indépendants** curieux non !

Une autre solution :

On peut ne pas se conformer aux probabilités établies par les observations statistiques (tollé général chez les "fréquentistes" !). On peut même insister, car il n'y a aucune raison particulière a priori pour justifier le fait que la probabilité d'obtenir un garçon soit supérieure à celle d'obtenir une fille lors d'une naissance. Si on choisit, comme on le fait traditionnellement, la même valeur 0,5 pour chacune d'elle, on obtient alors :

$P(A) = 0,75$ et $P(B) = 0,5$ $\Rightarrow$ $P(A)\times P(B) = 0,375$ et $P(A\cap B) = 0,375$ $\Rightarrow$ **A et B seraient stochastiquement indépendants** encore curieux non !

Dès la première solution on aurait pu prévoir que les événements A et B pouvaient être stochastiquement indépendants quand p et q vérifient $3q^3p(1+2p) = 3q^2p$, c'est-à-dire lorsque :

$3q^2p[q(1+2p)-1] = 0$ soit, en écartant les solutions triviales p=0 et q=0

$[q(1+2p)-1] = 0 \Leftrightarrow (1-p)(1+2p)-1 = 0 \Leftrightarrow p(1-2p) = 0$ d'où $p = ½$.

De plus, avec ce choix de probabilités $p = q = ½$ on démontre que A et B ne sont indépendants que pour n = 3 enfants. L'indépendance stochastique a ses raisons . . .

Ces deux réponses, dont la contradiction peut paraître curieuse nous rappellent d'une part que l'indépendance de deux événements **dépend du choix des probabilités** qu'on affecte aux événements élémentaires les concernant. D'autre part, ces deux réponses contradictoires montrent qu'une légère modification de la répartition des probabilités entraîne un changement radical de la conclusion quant aux événements A et B[(14)].

Alors quelle réponse concrète peut-on apporter à cet exercice ?

Compte tenu d'une même propriété mathématique vérifiée rigoureusement d'une part et "vérifiée à 0,005 près" d'autre part, on peut dire que dans une famille de trois enfants, le fait d'avoir des enfants des deux sexes **ne dépend pas ou très peu** du fait d'avoir au plus une fille, c'est-à-dire que la première information ne donne pas d'indications utiles pour décider si la seconde a plus ou moins de "chances" d'être vraie.

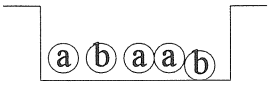
---

(14) cf l'article de Michel HENRY dans le bulletin 59 de l'IREM de BESANÇON

UN EXERCICE VÉCU

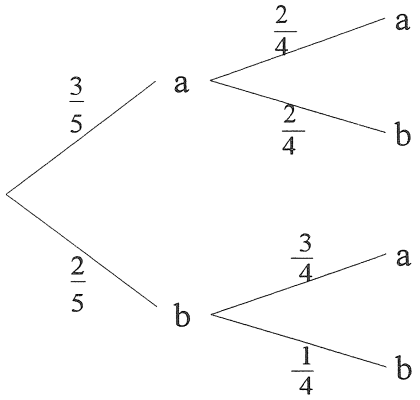
D'après B. FALK cité par A. TOTOHASINA dans [2].

On tire au hasard une lettre de l'urne ci-contre, on la cache (dans sa poche) sans la regarder, puis on fait un second tirage.



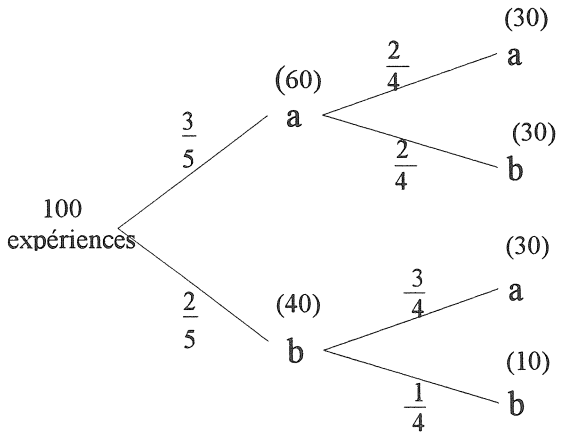
Sachant qu'on a obtenu b au second tirage, quelle est la probabilité d'avoir tiré a au premier ?

La première fois que j'ai lu cet énoncé, j'ai réagi ainsi :



« Que puis-je obtenir de cet arbre ? *Ce sont* ***mes conceptions chronologiste et causaliste*** *induites par la succession des épreuves de l'énoncé qui m'ont guidé vers lui mais* je ne vois pas comment calculer avec certitude la probabilité de la conjonction a et b pour appliquer la formule des probabilités conditionnelles. Dois-je considérer un des chemins (a,b) ou (b,a) ou les deux ? »

Mon second réflexe a été de le compléter par une interprétation fréquentiste et j'ai dessiné :



Et j'ai raisonné :
« Sur les 40 fois qu'on obtient b au second tirage, 30 viennent après a et 10 après b donc la probabilité cherchée est 30/40 soit 3/4. *C'est* ***ma conception cardinaliste*** *qui vient de s'exprimer et* je suis un peu méfiant à l'égard de ce résultat car, en probabilités conditionnelles j'ai appris à être prudent vis à vis de tels dénombrements (cf l'exemple des jetons). »

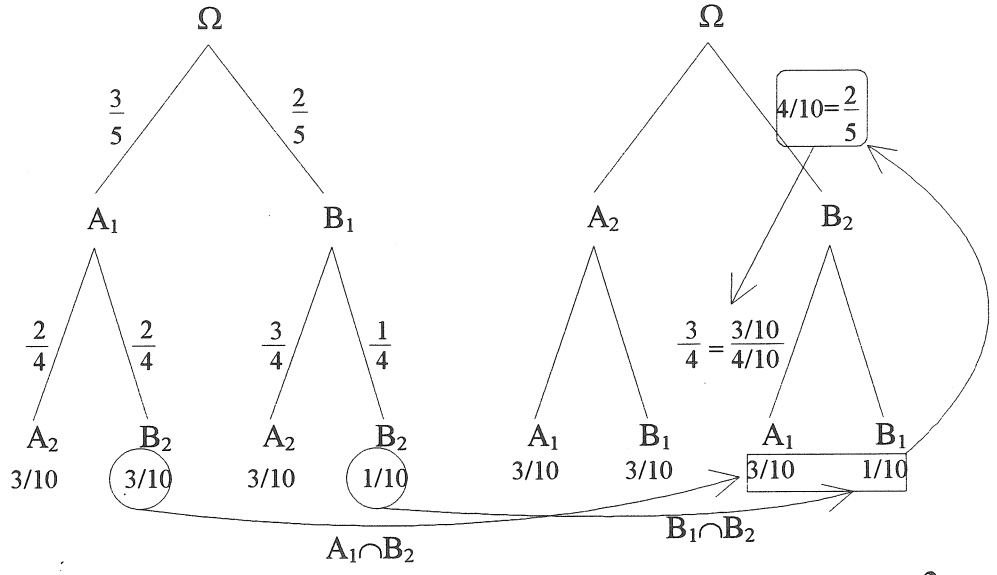
Puis j'ai mis de l'ordre pour distinger les deux tirages :
« Soit A_i l'événement « on obtient a au $i^{ème}$ tirage » et B_i l'événement « on obtient b au $i^{ème}$ tirage ». *Dans ma recherche de la solution, c'est seulement après les deux essais précédents que j'introduis formellement des événements. A_i et B_i sont des événements d'un univers Ω qui décrit les issues possibles de l'expérience aléatoire constituée par les deux tirages et que l'on peut écrire sous forme d'un ensemble de couples formés des lettres a et b.* ***Ma connaissance formelle*** *des probabilités commence à prendre le dessus. »*

Je connais $P_{A1}(B_2)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ et je cherche $P_{B2}(A_1)$, je peux utiliser la formule de Bayes (cf la première partie avec inversion de l'arbre p 13) et trouver ainsi la réponse, cela m'obligera à une décomposition en deux questions pour l'expliquer aux élèves :

1) calculer la probabilité conjointe : $P(A_1\cap B_2) = P(A_1)\times P_{A1}(B_2) = \frac{3}{5}\times\frac{1}{2}=3/10$,

2) calculer la probabilité totale $P(B_2) = P[(A_1\cap B_2)\cup(B_1\cap B_2)] = P(A_1)\times P_{A1}(B_2)+P(B_1)\times P_{B1}(B_2)$
d'où $P(B_2) = 3/10 + \frac{2}{5}\times\frac{1}{4} = 4/10$, pour obtenir : $\mathbf{P_{B2}(A_1)} = \frac{3}{4}$.

Raisonnement que l'on peut suivre sur les arbres probabilistes suivants et dont l'imagination est d'autant moins facile que la conception causaliste est prégnante.



J'ai donc une solution probabiliste au problème et je suis sûr de ce résultat $\frac{3}{4}$ que je trouve curieusement égal à $\mathbf{P_{B1}(A_2)}$ qui figure sur le premier arbre ci-dessus, comme si les rangs de l'obtention de a et de b n'avaient aucune influence dans le calcul de ces probabilités conditionnelles. Ceci n'est pas une particularité due aux valeurs numériques de l'énoncé comme on va le voir lors de la généralisation qui va suivre.

Quant à l'arbre de ma première démarche pour répondre à cet exercice, j'aurais dû le dessiner avec les événements A_i et B_j de Ω comme ci-dessus et non pas avec les lettres a et b qui d'ailleurs ne sont pas affectées de probabilités. **C'est leur occurrence lors d'un tirage aléatoire qui est probabilisée**. D'autre part, le registre de représentation choisi, c'est-à-dire l'arbre, fixe dans le temps la succession A_1 puis B_2 et empêche de concevoir logiquement une réponse à la probabilité d'une cause A_1 ayant observé une conséquence B_2, alors que la question elle-même ne surprend pas. Un autre registre de représentation peut être choisi tel le diagramme de Carroll qui n'a pas cet inconvénient de fixer une succession et dont l'aide à la résolution de cet exercice est une autre histoire qui ne demande qu'à être vécue . . .

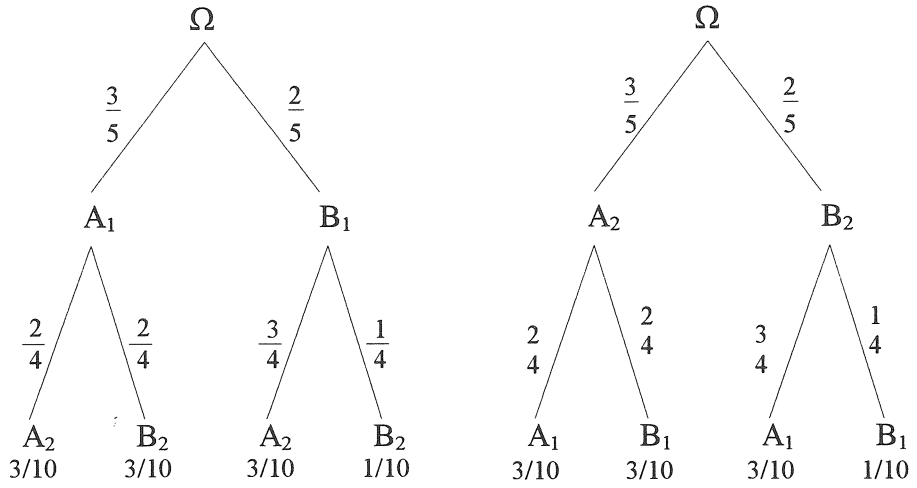
Dans ces exercices de tirages sans remise, on a vu (cf p 23) que les valeurs $P(A_i)$ sont égales entre elles, et les valeurs $P(B_i)$ aussi, on peut alors démontrer dans le cas où il y a par exemple n_a boules a et n_b boules b avec $n_a+n_b = n$:

$$P(A_1 \cap B_2) = P(A_1)\times P_{A1}(B_2) = \frac{n_a}{n}\times\frac{n_b}{n-1} = \frac{n_b}{n}\times\frac{n_a}{n-1} = P(B_1)\times P_{B1}(A_2) = P(B_1\cap A_2)\ .$$

On a donc généralement : $P_{B2}(A_1) = \dfrac{P(A_1 \cap B_2)}{P(B_2)} = \dfrac{P(B_1 \cap A_2)}{P(B_1)} = P_{B1}(A_2)$.

Les deux arbres permettent aussi de comprendre que, si les relations (1) $P(A_1) = P(A_2)$ et $P(B_1) = P(B_2)$ sont vraies alors nécessairement $P_{A2}(A_1) = P_{A1}(A_2)$ et $P_{B2}(B_1) = P_{B1}(B_2)$ et on a pour les événements contraires des précédents : $P_{A2}(B_1) = P_{A1}(B_2)$ et $P_{B2}(A_1) = P_{B1}(A_2)$.

Ainsi, lors de tirages sans remise, les probabilités inscrites sur les branches d'un arbre et de son inverse sont identiques, les deux arbres sont isomorphes.



On peut remarquer, lors de tirages avec remise que ces relations (1) sont évidemment vraies : $p = P(A_1) = P(A_2)$ et $q = P(B_1) = P(B_2)$, donc les deux arbres construits avec inversion des rangs des tirages sont aussi isomorphes. Ce qui conduit à cet autre "théorème d'arbres" :

« Lors de tirages avec ou sans remise, les probabilités inscrites sur les branches d'un arbre et de son inverse sont identiques, les deux arbres sont isomorphes ». D'où la réponse au paradoxe de la courte paille p 23.

Ainsi, qu'il s'agisse de tirages avec remise ou sans remise on peut calculer et dessiner l'arbre sans indiquer le rang des événements considérés, ce que l'on fera lors de l'étude des quelques lois de probabilités qui suit :

QUELQUES LOIS DISCRÈTES

Après avoir défini les variables aléatoires, actuellement au programme des classes de terminales, et dans la suite logique de ce qui vient d'être vu, il serait possible de présenter aux élèves de lycée quelques lois discrètes de probabilités telles que la loi binomiale, la loi géométrique et la loi hypergéométrique.

ÉPREUVE DE BERNOULLI, LOI BINOMIALE

Une épreuve aléatoire comportant deux issues possibles est une **épreuve de Bernoulli**. On note généralement S comme succès et E comme échec les événements élémentaires attachés à ces issues et ayant pour probabilités respectives p et q = 1-p

On considère l'expérience qui consiste à répéter n fois cette épreuve et on s'intéresse à la variable aléatoire X du nombre de sorties de l'événement S. On obtient alors pour X la loi binomiale ou distribution binomiale qui est au programme de Terminale E.S.

La loi binomiale n'est pas au programme de T.S. ou T.L. stricto sensu, mais il y est écrit schéma de Bernoulli. Ceci explique que, malgré sa disparition des programmes de TA_1 et TD depuis 1991, on ait encore trouvé des questions s'y rapportant en 1993 et1994 :

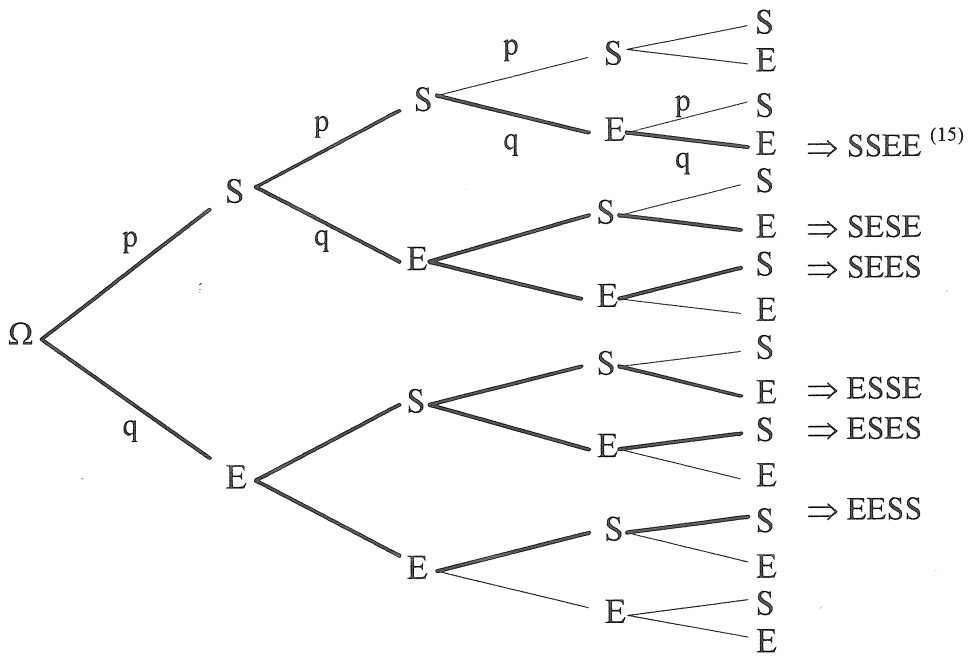
1993 D - groupe II (Bordeaux etc...) avec $n = 3$ et les événements $X = k$ avec $k = 0,1,2,3$.
D - groupe III (Besançon etc...) avec $n = 3$ et $k = 0,1,2,3$.
A_1 - groupe II avec $n = 5$ et $k = 0,1,2,3,4,5$; puis calcul de Var(X).
A_1 - Nouvelle Calédonie avec $n = 10$ et $k = 2$.

1994 D - groupe III (Besançon etc...) avec $n \geq 2$ et $k \geq 1$.

On la trouve aussi dans la plupart des manuels de T.S. ou T.L., soit en T.P. d'application, soit en complément de cours généralisant un exercice.

IREM de LYON
BIBLIOTHEQUE
Université Claude Bernard -LYON I
43, Bd du 11 Novembre 1918
69622 VILLEURBANNE Cedex

Exemple pour n = 4 , on peut représenter le déroulement des événements de cette expérience aléatoire par l'arbre suivant :



{X=2} correspond à l'événement : {(SSEE),(SESE),(SEES),(ESSE),(ESES),(EESS)}.
{X=2} comprend 6 quadruplets, événements élémentaires, car c'est le nombre de choix de 2 places pour les S parmi les 4 places possibles, c'est à dire C_4^2.
Ces quadruplets-événements élémentaires sont équiprobables car, d'après le "théorème d'arbres" pour les épreuves successives p 23 on a par exemple :
$P(SSEE) = p\times p\times q\times q = p^2q^2$.

d'où : $P(\{X=2\}) = C_4^2 p^2 q^2$,

de manière générale : $\boxed{P(\{X=k\}) = C_n^k p^k q^{n-k}}$ qui fournit les probabilités élémentaires de **la loi binomiale** pour les valeurs {0, 1, ...,n} de X.

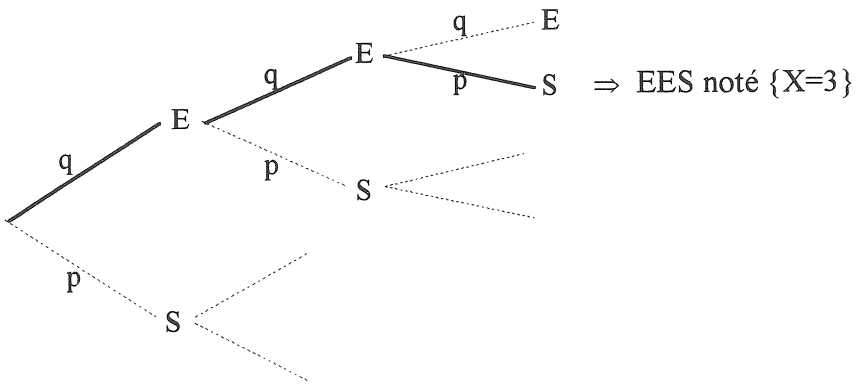
Grâce à la définition mathématique de la variable aléatoire, dans cette écriture, P est la même application probabilité que dans l'écriture précédente P(SSEE), c'est-à-dire qu'elle est définie sur $\mathcal{P}(\Omega)$.

(15) Comme il est écrit précédemment p 40, on peut calculer et dessiner l'arbre sans indiquer le rang des événements considérés.

LOI GÉOMÉTRIQUE.

On répète une épreuve de Bernoulli et on s'intéresse à la variable aléatoire X du rang de la première réalisation de l'événement S.

Le déroulement de l'événement {X=3} peut se représenter par le chemin suivant :



D'après le même "théorème d'arbres" précédent, on a: $P(\{X=3\}) = q\times q\times p = q^2p$.

De manière générale, $\mathbf{P(\{X=k\}) = q^{k-1}p}$ qui donne les probabilités élémentaires de **la loi géométrique** pour les valeurs entières non nulles de X.

Comme application, regardons l'exemple proposé par Michel HENRY dans [5] p 83.

Lors de la production d'une suite de chiffres au hasard (i.e. équiprobables) par un ordinateur, on s'intéresse au rang N de la sortie du premier 9 et on cherche la probabilité qu'elle ait lieu avant le quatrième chiffre :
L'événement $\{N \leq 3\}$ est la disjonction des événements {N=1}, {N=2} ,{N=3} de probabilités respectives p, qp, q^2p avec p = 1/10 et q = 9/10, soit 1/10, 9/100, 81/1000. D'où :

$$P(\{N \leq 3\}) = \frac{1}{10} + \frac{9}{100} + \frac{81}{1000} = \frac{271}{1000} = 0{,}271.$$

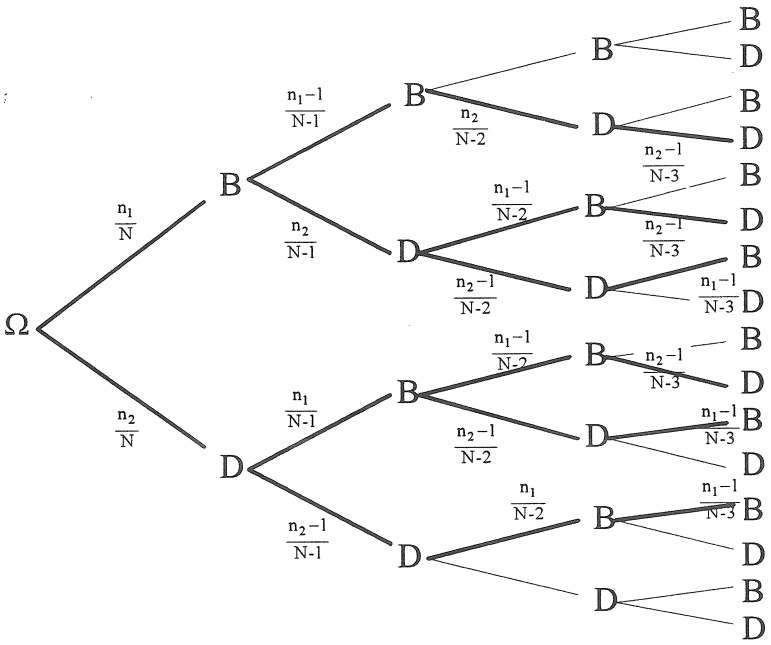
C'est aussi l'événement contraire de $\{N > 3\}$ dont la probabilité est :
$P(\{N > 3\}) = q\times q\times q = q^3 = 0{,}9^3 = 0{,}729$.
D'où $P(\{N \leq 3\}) = 1 - 0{,}729 = 0{,}271$.

LOI HYPERGÉOMÉTRIQUE

Les deux lois précédentes sont issues d'épreuves (de Bernoulli) répétées. Si on considère une **succession d'épreuves formées de tirages sans remise** et si on s'intéresse à la variable aléatoire X du nombre de réalisations d'un événement précis, on obtient le cadre d'application de la loi hypergéométrique. Cette situation décrit ce qui se passe habituellement lorsqu'on fait un prélèvement dans une population dont certains éléments possèdent une qualité à laquelle on s'intéresse.

Exemple : Un lot de N pièces contient n_1 bonnes pièces et n_2 défectueuses. On extrait sans remise 4 pièces au hasard de ce lot, quelle est la probabilité d'obtenir 2 pièces bonnes ? (on suppose que $n_1 \geq 2$ et $N \geq 4$)

Si on ne s'intéresse qu'au nombre de bonnes pièces obtenues, l'extraction simultanée de 4 pièces au hasard est équivalente aux tirages successifs, sans remise et au hasard de 4 pièces de ce lot. Notons B l'événement « la pièce est bonne » et D l'événement contraire « la pièce est défectueuse », le déroulement des événements possibles de cette expérience aléatoire peut se représenter par l'arbre suivant :



{X=2} est l'événement noté {BBDD, BDBD, BDDB, DBBD, DBDB, DDBB}.
Dans le cas de tirages sans remise également, on a vu qu'il était inutile de préciser le rang de chaque B ou D, et comme dans l'exemple de la loi binomiale p 42, {X=2} comprend 6 événements élémentaires car c'est le nombre de choix de 2 places pour les événements B parmi les 4 places possibles des tirages successifs, c'est à dire C_4^2.
D'où :
P({X=2}) = P(BBDD) + P(BDBD) + P(BDDB) + P(DBBD) + P(DBDB) + P(DDBB).

Dans ce cas de 4 tirages sans remise, on démontrerait, comme dans l'exercice vécu p 40, que $P(B_1 \cap D_2) = P(D_1 \cap B_2)$ de même que $P(B_1 \cap D_2 \cap B_3 \cap D_4) = P(D_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap D_4) = P(B_1 \cap B_2 \cap D_3 \cap D_4)$ = etc.... Sur l'arbre précédent, on peut contrôler que chacun des 6 chemins concernés par {X=2} a la même "probabilité", cette propriété est due aux règles de calcul sur les produits et les quotients. C'est à dire que **les événements élémentaires formant {X=2} sont équiprobables.**

D'où : $P(\{X=2\}) = C_4^2 P(BBDD) = C_4^2 \times \frac{n_1}{N} \times \frac{n_1 - 1}{N-1} \times \frac{n_2}{N-2} \times \frac{n_2 - 1}{N-3}$.

Pour N = 60, n_1 = 40, n_2 = 20, on obtient $P(\{X=2\}) = 6 \times \frac{40}{60} \times \frac{39}{59} \times \frac{20}{58} \times \frac{19}{57} \approx 0{,}3039$. (16)

En généralisant à n tirages ($n \leq N$) et à l'événement {X=k} avec $k \leq n_1$ et $n - k \leq n_2$ et, en supposant que les événements élémentaires formant {X=k} sont équiprobables, on obtient :

$$P(\{X=k\}) = C_n^k \times \underbrace{\frac{n_1}{N} \times \frac{n_1 - 1}{N-1} \times \ldots \times \frac{n_1 - k + 1}{N-k+1}}_{\text{k bonnes pièces}} \times \underbrace{\frac{n_2}{N-k} \times \frac{n_2 - 1}{N-k-1} \times \ldots \times \frac{n_2 - n + k + 1}{N-n+1}}_{\text{(n-k) pièces defectueuses}}$$

qui permet les calculs des probabilités élémentaires de **la loi hypergéométrique**.

On peut l'écrire aussi sous la forme :

$P(\{X=k\}) = \frac{n!}{k!(n-k)!} \times \frac{n_1!}{(n_1-k)!} \times \frac{n_2!}{(n_2-n+k)!} \times \frac{(N-n)!}{N!}$ pour tout k, n_1, n_2 vérifiant :

$n - n_2 \leq k \leq n_1$, et $n \leq N = n_1 + n_2$.

Ou encore :

$$P(\{X=k\}) = \frac{n!(N-n)!}{N!} \times \frac{n_1!}{k!(n_1-k)!} \times \frac{n_2!}{(n-k)![n_2-(n-k)]!} = \frac{1}{C_N^n} \times C_{n_1}^k \times C_{n_2}^{n-k}.$$

Expression plus classique de la loi hypergéométrique qui s'obtient en considérant les dénombrements des cas favorables et des cas possibles (voir Y. DUCEL dans [12]) :
Soit Ω l'ensemble des parties à n éléments choisis parmi N. Réaliser {X=k} revient à tirer un ensemble de n lettres contenant k lettres B et n-k lettres D. Il y a $C_{n_1}^k$ manières de prendre la lettre B parmi n_1 et $C_{n_2}^{n-k}$ manières de prendre n-k lettres D parmi n_2. Il y a donc $C_{n_1}^k \times C_{n_2}^{n-k}$ ensembles possibles de n lettres qui réalisent {X=k} et C_N^n ensembles à n éléments pris parmi N. D'où le résultat par la formule de Laplace, en remarquant que les événements composés des k lettres B et n-k lettres D sont équiprobables dans Ω.

---

(16) Résultat que l'on peut comparer à celui obtenu dans le cas où il y a remise, c'est à dire où la loi binomiale s'applique avec n = 4, $p = \frac{n_1}{N} = \frac{40}{60} = \frac{2}{3}$: $P(\{X=2\}) = C_4^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \approx 0{,}2936$.

Les **arbres probabilistes** sont une aide très efficace à la compréhension des concepts et à l'assimilation des formules de probabilités ainsi qu'un support très pertinent pour comprendre certains énoncés et pour élaborer les raisonnements à mettre en oeuvre. B. PARZYSZ valide l'arbre en tant qu'outil de résolution de problème, en explicite les règles d'utilisation et en indique la portée et les limites dans [7] et [8]. Il ne faudrait certes pas en abuser car des élèves pourraient croire que l'objet de l'apprentissage est le mode d'emploi des arbres et le concept de probabilité conditionnelle ne serait pas acquis. Il y aurait évitement de l'obstacle qui ne serait donc pas franchi (cf Michel HENRY dans [4] p 67).

Il apparaît alors souhaitable que les élèves sachent utiliser d'autres supports visuels comme les **diagrammes de Carroll**, qui ont l'avantage de ne pas être séquentiels ainsi que les diagrammes de Venn. Il semble également souhaitable qu'ils voient l'utilisation des arbres dans d'autres situations comme par exemple les dénombrements et il faut garder présent à l'esprit que tous ces supports visuels, aussi pertinents soient-ils, doivent être passagers pour **peu à peu laisser place à l'écriture formelle des probabilités**, gage de l'efficacité de l'outil probabiliste dans les conditions les plus générales.

Et pour conclure sur une tout autre ouverture :

Entre les deux premières parties, avez-vous fait votre choix pour introduire les probabilités conditionnelles ?

Ce choix est-il le fruit du hasard ?

Un choix est-il toujours ou souvent ou jamais le fruit du hasard ?

Mais qu'est-ce que le hasard ?

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. TOTOHASINA (1992) : Méthode implicative de données et application à l'analyse des conceptions d'étudiants sur la notion de probabilité conditionnelle. Thèse de doctorat - UNIVERSITE DE RENNES.

[2] A. TOTOHASINA (1994) : Introduction du concept de probabilité conditionnelle : avantages et inconvénients de l'arborescence.-dans REPERES-IREM n° 15.

[3] G. BROUSSEAU (1983) : Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques - R.D.M. vol 4.2 p. 165-198

[4] Michel HENRY (Oct 1994) : L'enseignement des probabilités.-IREM DE BESANÇON

[5] Michel HENRY (1994) : L'enseignement du calcul des probabilités dans le second degré : perspectives historiques, épistémologiques et didactiques.- dans REPERES-IREM n° 14

[6] Michel HENRY (1993) : Introduction à la théorie des probabilités et à son enseignement. - dans REPERES-IREM n° 6

[7] B. PARZYSZ (1993) : Des statistiques aux probabilités : exploitons les arbres.-dans REPERES-IREM n° 10.

[8] B. PARZYSZ (fév 90) : Un outil probabiliste sous estimé : l'arbre probabiliste.-dans Bulletin A.P.M.E.P. n° 372.

[9] G. ALDON et J. FEURLY-REYNAUD (1994) : Modélisation en probabilités au lycée.- IREM DE LYON.

[10] A. ENGEL (1975) : L'enseignement des probabilités et de la statisque. (adapté de l'allemand) - CEDIC (épuisé), réédité chez ALEAS.

[11] I. EKELAND (1991) : Au hasard. - SEUIL.

[12] Y. DUCEL (1996) Lois de probabilités discrètes classiques et modèle d'urnes.(à paraître)-IREM de BESANCON.

I.R.E.M. de Franche-Comté
UFR des Sciences et Techniques
16, route de Gray, La Bouloie
F-25030 BESANÇON cedex
Téléphone : 81 66 61 92 - Télécopie : 81 66 61 99
Cour. électr. : iremfc@math.univ-fcomté.fr

TITRE : PROBABILITÉ CONDITIONNELLE ET INDÉPENDANCE

AUTEUR : Jean-Pierre GRANGÉ

DATE : Mai 1996

MOTS CLÉS : probabilité conditionnelle, événements indépendants, lois discrètes, arbres probabilistes, diagramme de Carroll, modélisations.

RÉSUMÉ : Cette brochure propose au lecteur deux introductions différentes de la notion de probabilité conditionnelle. Dans la première, on part d'un tableau d'effectifs duquel on déduit des fréquences statistiques pour leur associer des probabilités lors de tirages aléatoires dans la population concernée. Ensuite des situations de cause à effet et chronologique sont envisagées. Dans la seconde introduction au contraire, les deux premiers exemples sont séquentiels et ils sont modélisés par des tirages de boules dans une urne. Le troisième exemple est une situation ensembliste.
Dans les deux parties les mêmes outils de résolution sont exploités, en particulier les diagrammes de Carroll et les arbres probabilistes. La notion d'indépendance est abordée à travers des exemples utilisant des probabilités conditionnelles. Comme applications enfin, les lois binomiale, géométrique et hypergéométrique sont dégagées.

Format A4 - Nombre de pages : 47 - Poids : 140 g

IREM DE BESANCON

Dépot Légal : 100/96

Numéro ISBN : 2-909963-09-8