INSTITUT DE RECHERCHE SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES

UNIVERSITÉ DE FRANCHE-COMTÉ

Les vecteurs

en classe de Seconde

Groupe "LYCÉE"
IREM de BESANÇON

GROUPE DE TRAVAIL : " MATHEMATIQUE AU LYCEE "

I.R.E.M DE BESANCON

Responsable : Christine MACCHIONI 1994/1995

Les activités du groupe, durant l'année scolaire 1994/1995, ont concerné les points suivants :

- production d'une brochure :
  L'enseignement des mathématiques en première E/S.
- travail sur l'articulation terminales scientifiques et classes post-baccalauréat.
- élaboration d'un document sur les vecteurs en classe de seconde.

Le travail a été réalisé avec le concours de :

- la Mission Académique de Formation des Personnels de l'Education Nationale.
- la Direction des Lycées et des Collèges.
- la Direction Régionale Agriculture et Forêt.
- la Direction Générale de l'Enseignement Supérieur.

Composition du groupe Lycée :

Gérald ANSELME	Agrégé	Lycée Belin	VESOUL
Pierre GSELL	Certifié	Lycée Courbet	BELFORT
Christine MACCHIONI	Certifiée	Lycée Marmier	PONTARLIER
Michel MAGNENET	Agrégé	Lycée V.Hugo	BESANCON
Michel MARTIN	Certifié	Lycée Duhamel	DOLE
Paul PECHOUX	Agrégé	Lycée Courbet	BELFORT
Odile RAVAUX	Certifiée	Lycée Agricole	DANNEMARIE
Colette VUILLEMIN	Certifiée	Lycée Marmier	PONTARLIER

Présentation du document :

La notion de vecteurs est un concept difficile à faire passer chez nos élèves de seconde, c'est pourquoi le groupe lycée de l'IREM de Besançon a travaillé sur ce thème, depuis les rappels des notions rencontrées au collège jusqu'à la caractérisation vectorielle du centre de gravité.

La traduction vectorielle du théorème de Thalès est volontairement exclue de ce document, car il nous semble plus intéressant de la placer dans le chapitre homothétie.

Ce document propose des fiches d'activités élèves avec une présentation des objectifs, des fiches d'exercices et des fiches d'institutionnalisation.

Toutes ces fiches ont été expérimentées dans des classes de seconde.

Le temps de travail avec les élèves est compris entre 12 et 15 heures.

Plan du document:

RAPPELS DES PROGRAMMES

Classe de 4ème:

Translation et vecteur. Pour l'ensemble de cette rubrique, il s'agit d'un travail d'initiation ; l'étude de ces notions sera poursuivie en Troisième. a) La translation sera reliée au parallélogramme b) Les vecteurs sont introduits « naïvement » par direction, sens, longueur. A toute translation, on associe son vecteur. Si, dans une translation, A' est l'image de A et B' l'image de B, on écrit : $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$.	Construire l'image, par une translation, d'un point, d'une droite, d'une demi-droite, d'un cercle.

Classe de Troisième:

Translation et vecteur. Egalité vectorielle. Dans le plan rapporté à un repère, effet d'un déplacement par translation sur les coordonnées d'un point ; coordonnées d'un vecteur. Addition vectorielle.	
Les travaux partiront de l'expérience acquise en Quatrième. Il s'agit essentiellement, sur des situations simples, de familiariser les élèves au maniement des vecteurs.	Savoir relier l'égalité vectorielle au parallélogramme. Savoir construire l'image d'un point par translation connaissant le vecteur de la translation.
L'addition vectorielle, qui ne fera l'objet que d'un travail d'initiation, sera reliée à la composition de deux translations.	Savoir que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$. Relier la construction de $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ à celle du parallélogramme.
On évitera de donner une place excessive au calcul des coordonnées de l'image d'un point par une translation, à celui des coordonnées d'un vecteur ou de la somme de deux vecteurs. Aucune compétence sur le calcul vectoriel n'est exigible des élèves. Le produit d'un vecteur par un réel n'est pas au programme.	Savoir calculer, lire sur un graphique, les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ connaissant les coordonnées des points A et B.

Objectifs des programmes de 4°, 3° et seconde

<u>Classe de Seconde:</u>

- ¤ Les vecteurs ont été introduits au collège (par direction, sens, et longueur) ; on n'y reviendra pas et on conservera le même point de vue pour étudier les opérations sur les vecteurs (le programme de troisième ne comporte qu'une initiation à la somme).
- ¤ La mise en oeuvre des vecteurs sur les configurations et les transformations joue un rôle essentiel, aussi bien pour la compréhension de la notion de vecteur que pour la résolution des problèmes de géométrie ; le calcul vectoriel ne doit donc pas constituer un terrain d'activités purement algébriques.
- ¤ Le programme comporte la notion de repère (quelconque) du plan. Pour la résolution de problèmes de géométrie on se limitera à l'emploi de repères orthonormaux ; le recours à un tel repère n'est qu'un outil parmi d'autres, il relève de seules considérations de commodité et d'efficacité.

Opérations sur les vecteurs • Représentation géométrique d'un vecteur $\vec{u}$; interprétation géométrique de l'égalité $\vec{u} = \vec{v}$. • Norme d'un vecteur. • Addition de vecteurs, opposé d'un vecteur ; relation de Chasles ; représentation géométrique des vecteurs $\vec{u} + \vec{v}$ et $\vec{u} - \vec{v}$.	La notation $\vec{u}$ et le vecteur nul n'ont pas été introduits au collège. Les élèves doivent connaître et savoir utiliser les relations entre le parallélogramme, la translation, l'égalité et l'addition des vecteurs.
• Multiplication d'un vecteur par un nombre réel, représentation du vecteur $a\vec{u}$. • Vecteurs colinéaires. ❖ Caractérisation vectorielle du milieu d'un segment, du centre de gravité d'un triangle.	Les élèves doivent savoir utiliser la colinéarité pour caractériser le parallélisme de deux droites, l'alignement de trois points, l'appartenance à une droite définie par deux points ou par un point et un vecteur directeur.

MISE EN SITUATION
Fiche professeur

Objectifs et attentes :

C'est une première activité sur les vecteurs dans l'année de seconde qui doit permettre de mettre en oeuvre les connaissances de premier cycle et de montrer l'efficacité de l'outil vectoriel, en particulier de la somme, dans une démonstration.
Plusieurs types de démonstrations devraient être proposées.
Un débat en classe permettra de déterminer la démonstration la plus performante.

Enoncé :
Soit un rectangle ABCD. On considère un point M quelconque situé à l'intérieur du rectangle, côtés inclus . On trace, passant par M, les droites (Δ) et (Δ') respectivement parallèles à (AB) et (AD). (Δ) coupe [AD] en E et [BC] et F ; (Δ') coupe [AB] en G et [DC] en H.

Déterminer, en justifiant, l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{EH}$ suivie de la translation de vecteur $\overrightarrow{GF}$.

Consignes données aux élèves :

- travail individuel de 10 à 15 minutes.
- travail d'une heure en groupes pour rédiger sur une affiche une démonstration.

Fonctionnement :

- Le travail est prévu pour une durée de deux heures.
  (une heure de travail élève, une heure de débat et synthèse en demi classe).
- les élèves se mettent en groupes de 3 à 4 par affinité.
- à l'intérieur du groupe, ils disposent, soit de rectangles isométriques avec des dispositions différentes du point M (fiche 1), soit de rectangles de dimensions différentes (fiche 2).
- laisser l'activité se dérouler en ayant distribué des grandes feuilles et des feutres.
- faire un choix dans les affiches proposées pour organiser un débat, classer les démonstrations afin d'arriver à celle utilisant la somme vectorielle.

Bilan :

Au cours de l'expérimentation les élèves ont adopté les démarches suivantes :

- utilisation de la conclusion comme donnée, en appelant, d'emblée, C le point cherché.
- utilisation exclusive des parallélogrammes.
- utilisation de la somme vectorielle (peu fréquente).
- utilisation conjointe de parallélogrammes et de translations.

MISE EN SITUATION
Fiche-élève

Enoncé du problème

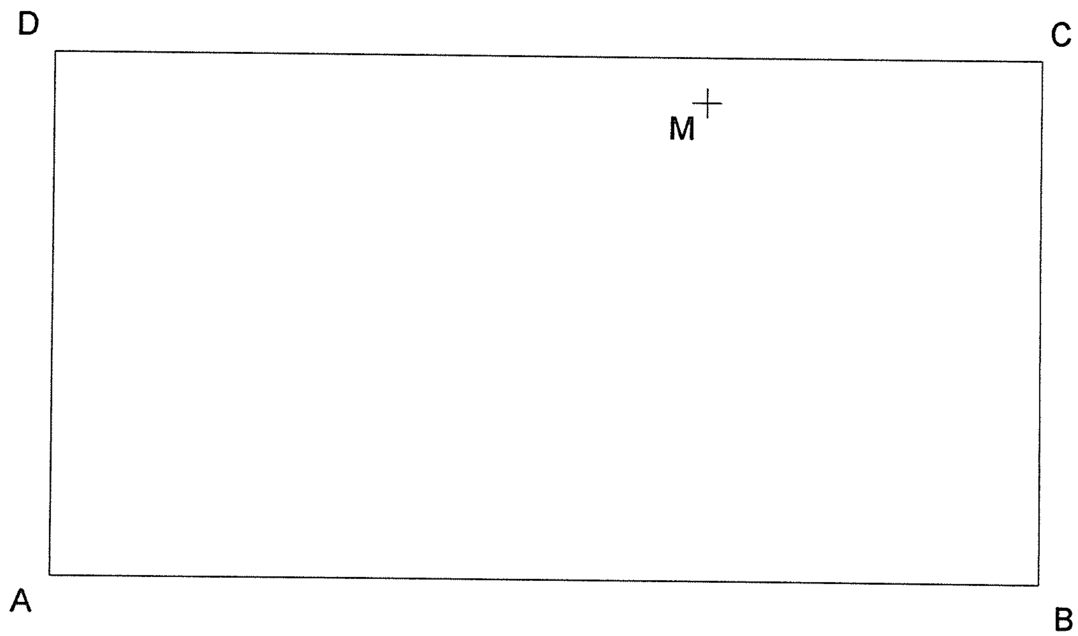
Soit un rectangle ABCD. On considère un point M quelconque situé à l'intérieur du rectangle, bords compris.
On trace, passant par M, les droites (Δ) et (Δ') respectivement parallèles à (AB) et (AD).
(Δ) coupe [AD] en E et [BC] en F.
(Δ') coupe [AB] en G et [DC] en H.

Déterminer, en justifiant, l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{EH}$ suivie de la translation de vecteur $\overrightarrow{GF}$.
Le résultat est-il changé si l'on considère ABCD parallélogramme non rectangle ?

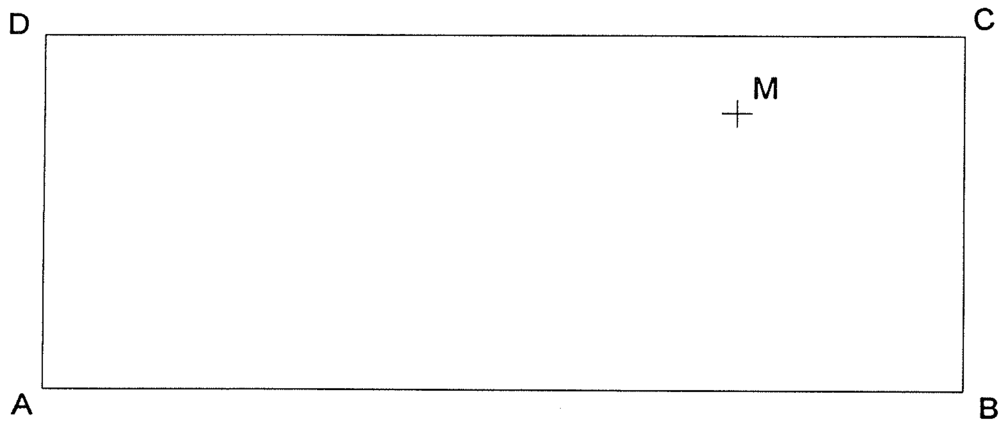
Consignes

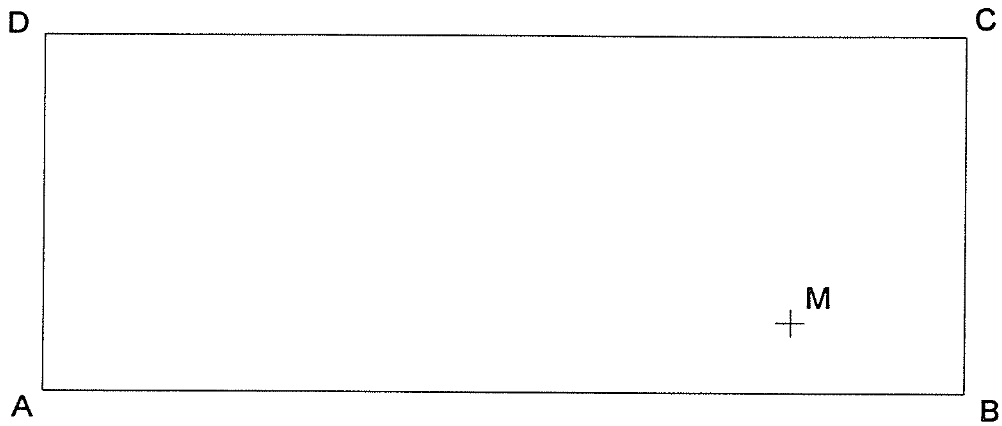
- Pendant 10 à 15 minutes, travail individuel de recherche.
- Pendant une heure, travail en groupes pour rédiger une démonstration sur une affiche.

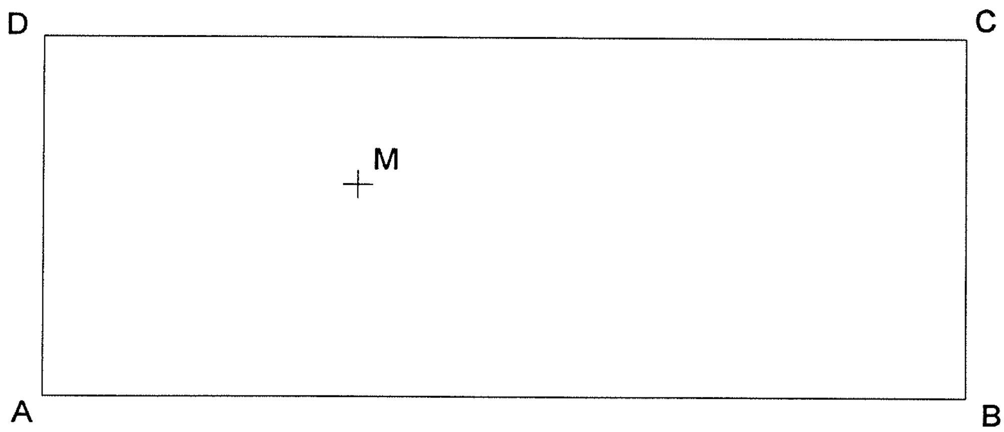
Figure

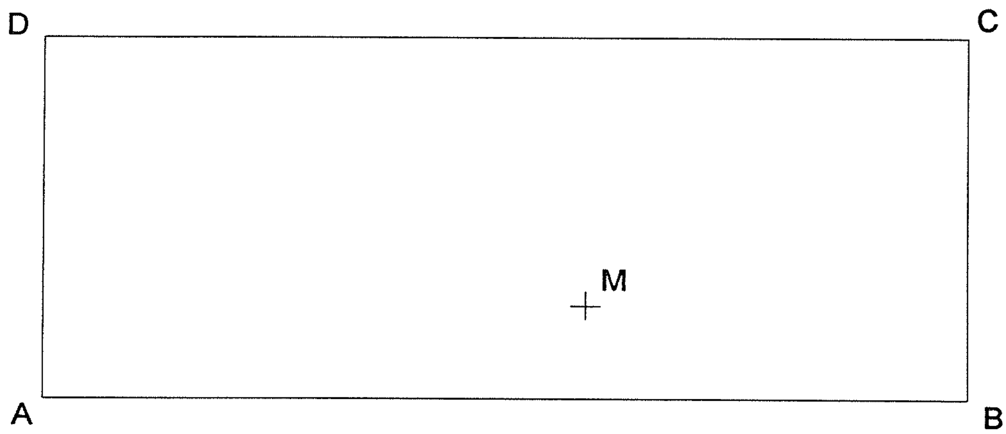


Fiche 1

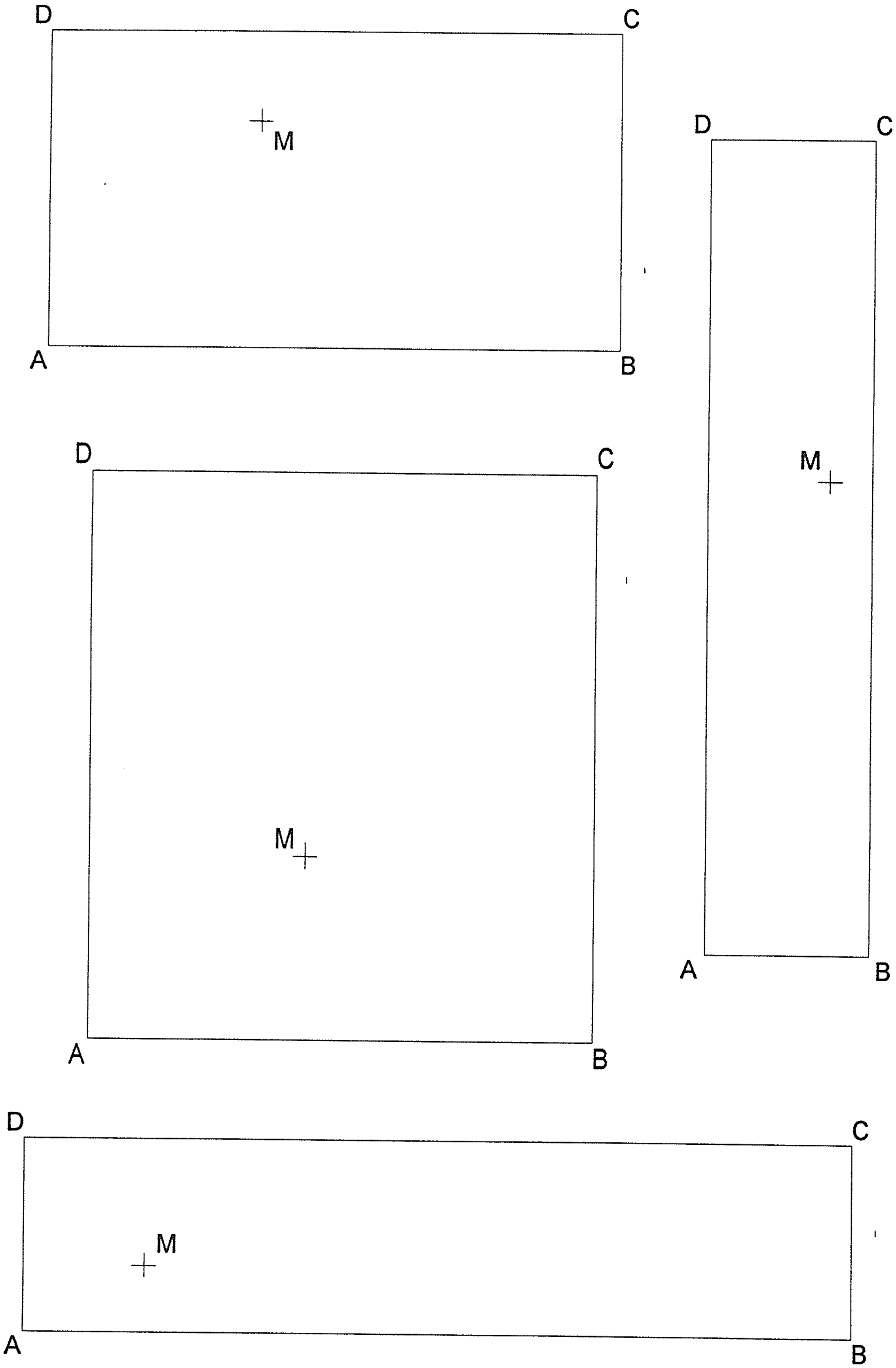








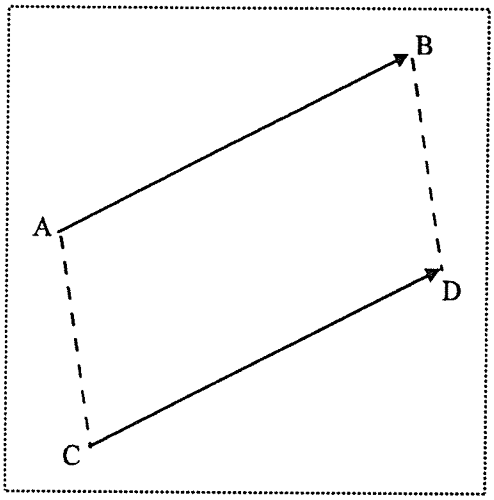
Fiche 2



VECTEURS : PRESENTATION ET PREMIERES PROPRIETES

I. Rappels

1. Etant donnés quatre points A, B, C et D avec A différent de B et C différent de D, on admet que les quatre propriétés suivantes sont, soit toutes vérifiées, soit toutes non vérifiées.



a) les droites (AB) et (CD) sont parallèles, les demi-droites [AB) et [CD) sont de même sens et les longueurs AB et CD sont égales.

b) les segments [AD] et [BC] ont le même milieu.

c) ABDC est un parallélogramme (éventuellement aplati).

d) la translation qui amène A en B amène aussi C en D.

Lorsque l'une au moins des propriétés précédentes est vérifiée, on dit que les couples de points (A, B) et (C, D) représentent le même vecteur et on écrit : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Un vecteur peut être noté par une lettre ($\overrightarrow{u}$ par exemple). Il peut aussi être noté $\overrightarrow{AB}$ ou $\overrightarrow{CD}$, à l'aide des points d'un quelconque de ses représentants.

2. On appelle vecteur nul et on note $\overrightarrow{0}$ (pour des raisons calculatoires), le vecteur dont les représentants sont (A, A), (B, B)... On a donc $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{0}$.

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$ entraîne A = B.

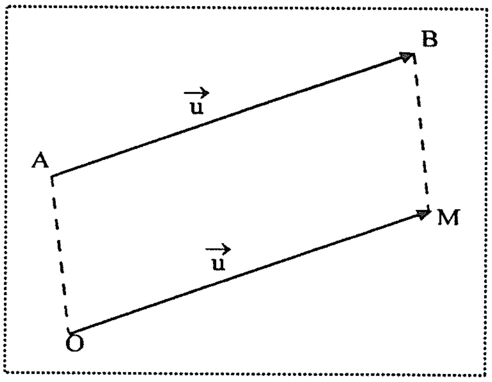
A = B entraîne $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$.

3. Norme d'un vecteur

Soit $\vec{u}$ un vecteur et (A, B) un de ses représentants. La distance AB s'appelle la norme de $\vec{u}$ et se note $\|\vec{u}\|$.

4. Remarques

a) Soit O un point fixé du plan. Pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe un unique point M tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$.
Dans le cas où $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, le point M tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$ est le quatrième sommet du parallélogramme OABM.



b) Pour quatre points A, B, C et D deux à deux distincts :

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{DC}$.

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{CA}$.

5. Milieu d'un segment

Etant donnés un segment [AB] et son milieu I :

a) on a l'égalité $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$.

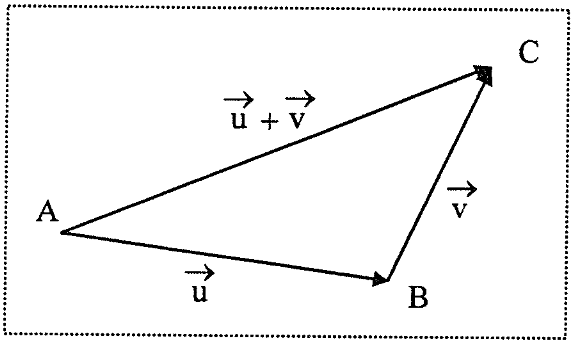
b) si un point M est tel que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$, alors $M = I$.

Voir, à ce propos, la partie consacrée à d'autres caractérisations vectorielles du milieu d'un segment.

II. Somme de vecteurs

1. Relation de Chasles

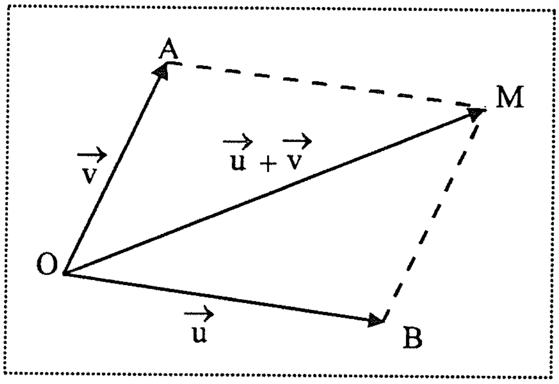
Quels que soient les points A, B et C, on a : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.



Cela permet de construire $\vec{u} + \vec{v}$ à l'aide de représentants (A, B) de $\vec{u}$ et (B, C) de $\vec{v}$ disposés « bout à bout ».

2. Règle du parallélogramme

Quels que soient les points O, A et B, on a $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OM}$, où M est le point tel que AOBM est un parallélogramme.



Cela permet de construire $\vec{u} + \vec{v}$ à l'aide de représentants (O,A) de $\vec{u}$ et (O,B) de $\vec{v}$ « de même origine ».

3. Propriétés.

Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a : $\vec{u} + \vec{u} = \vec{v} + \vec{u}$.

Quel que soit le vecteur $\vec{u}$, on a : $\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$.

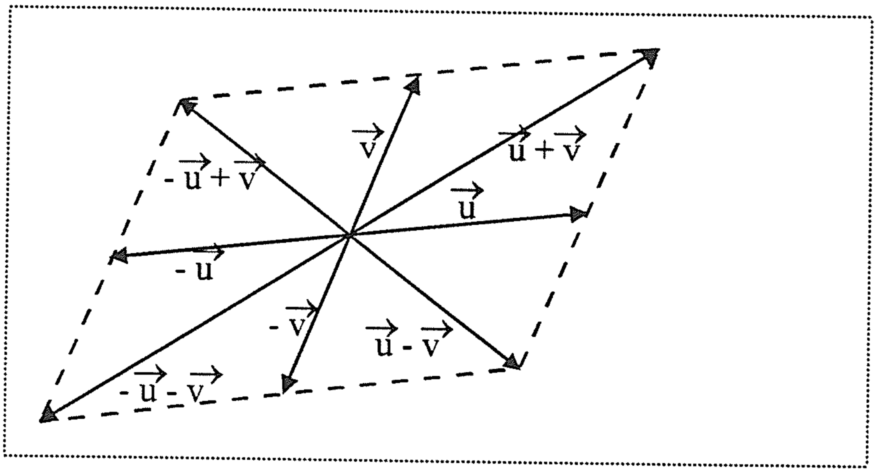
4. Opposé d'un vecteur. Différence de deux vecteurs.

a) On dit que deux vecteurs sont opposés lorsque leur somme est égale au vecteur nul.

* Tout vecteur $\vec{u}$ admet un opposé, noté $-\vec{u}$.

* Quels que soient les points A et B, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont opposés, donc $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

b) La différence $\vec{u} - \vec{v}$ de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est égale par définition à $\vec{u} + \left(-\vec{v}\right)$.



FICHE PROFESSEUR

Exercices d'application :

Exercice 1 : Destiné à faire découvrir une propriété par le dessin et à utiliser la relation de Chasles pour la démontrer.

Exercice 2 : L'objectif est de faire construire des sommes de vecteurs dans toutes les situations :

- Le point « inconnu » est à l'extrémité du représentant cherché ou à son origine.
- Le point « inconnu » figure plusieurs fois dans l'écriture de la somme.
- Les vecteurs sont écrits à l'aide de deux points ou à l'aide d'une lettre unique.

Module :

Exercice 1 : Pour montrer qu'ajouter des vecteurs, ce n'est pas ajouter des normes.

Exercice 2 : Peut être utilisé à plusieurs niveaux, ce qui justifie sa place dans une séquence de module.

- Premier objectif : faire la distinction entre égalités vectorielles et égalités concernant des distances. Pour la recherche des ensembles de points, on peut soit se contenter de la partie directe, soit envisager parties directe et réciproque.
- Deuxième objectif : Travailler sur la notion de propriété caractéristique d'un ensemble de points (cercle (d), segment (j), médiatrice (b)). Ceci présente d'autant plus d'intérêt que, dans la suite, seront étudiées des propriétés caractéristiques du milieu d'un segment et du centre de gravité d'un triangle.

EXERCICES D'APPLICATION

EXERCICE 1

A, B, C et D étant deux points distincts du plan,

a) construire le point M tel que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$.

b) construire le point N tel que $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$.

c) que peut-on dire des vecteurs $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$? Justifier.

EXERCICE 2

Soit ABCDEF un hexagone régulier de centre O.

1. Construire :

a) le point P tel que $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$.

b) le point S tel que $\overrightarrow{OF} + \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OS}$.

c) le point R tel que $\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{BR}$.

d) le point T tel que $\overrightarrow{TC} + \overrightarrow{TE} = \overrightarrow{TF}$.

e) le point U tel que $\overrightarrow{ER} + \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{EB} = \overrightarrow{EU}$.

2. Soit $\vec{u} = \overrightarrow{EF}$, $\vec{v} = \overrightarrow{FA}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{CD}$. Le vecteur $\vec{t}$ est tel que $\vec{t} + \vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$. Construire le point J tel que $\overrightarrow{JB} = \vec{t}$.

MODULE

EXERCICE 1

Soit le rectangle ABCD tel que $BA = 2\sqrt{3}$ et $AC = 4$. Soient $\vec{u} = \overrightarrow{BD}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{DC}$

Donner $\|\vec{u}\|$, $\|\vec{v}\|$, puis calculer $\|\vec{u} + \vec{v}\|$.

EXERCICE 2

A et B sont deux points distincts du plan.

Déterminer les ensembles des points du plan vérifiant les égalités suivantes :

a	$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$	b	$AM = MB$
c	$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB}$	d	$AM = AB$
e	$\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$	f	$AM + MB = 0$
g	$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$	h	$MA + MB = 0$
i	$\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB}$	j	$MB + AM = AB$

PRODUIT D'UN VECTEUR PAR UN REEL

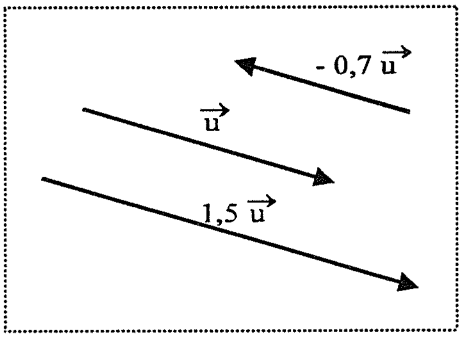
I. Définition

Considérons un vecteur $\vec{u}$ et un nombre réel k.

Le produit du vecteur $\vec{u}$ par le réel k est le vecteur noté $k\vec{u}$ défini par :

a) lorsque $k = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$, alors $k\vec{u} = \vec{0}$.

b) lorsque $k \neq 0$ et $\vec{u} \neq \vec{0}$, alors $k\vec{u}$ est le vecteur :



① de même direction que $\vec{u}$

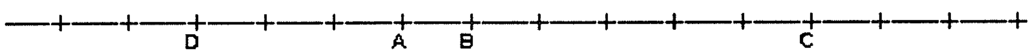
② de norme $|k| \times \|\vec{u}\|$

③ de même sens que $\vec{u}$ lorsque $k > 0$ et de sens contraire à celui de $\vec{u}$ lorsque $k < 0$

Remarque :

Il résulte de la définition que, pour tout vecteur $\vec{u}$, *on a* $1\vec{u} = \vec{u}$ et $(-1)\vec{u} = -\vec{u}$.

EXERCICE



La droite ci-dessus est munie d'une graduation régulière.

On note $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{CB}$.

1) Parmi les égalités ci-dessous, entourer celles qui sont vraies et barrer celles qui sont fausses.

$\vec{w} = 5\vec{u}$	$\vec{w} = (-5)\vec{u}$	$\overrightarrow{AD} = (-3)\vec{u}$	$\overrightarrow{AD} = \frac{3}{5}\vec{w}$
$\overrightarrow{DC} = 9\vec{u}$	$\vec{w} = \frac{5}{9}\overrightarrow{DC}$	$\vec{w} = \left(-\frac{5}{9}\right)\overrightarrow{DC}$	

2) Construire le point E tel que $\overrightarrow{BE} = (-\sqrt{2})\overrightarrow{AD}$.

II. Vecteurs colinéaires

On dit que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires lorsque :

-soit l'un des deux au moins est nul.

-soit ces deux vecteurs sont non nuls et ont la même direction.

Propriété : Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires lorsque l'un des deux au moins est égal au produit de l'autre par un nombre réel.

EXERCICE

A, B, C, D, M, N et P sont des points qui vérifient les conditions suivantes :

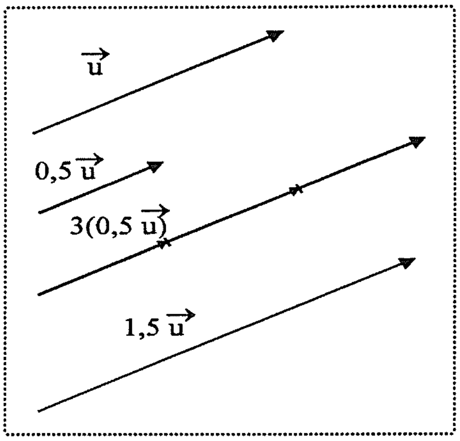
<table>
<tr><td colspan="2">$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}$</td><td colspan="2">$\overrightarrow{CP} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CN}$</td></tr>
<tr><td colspan="3">$\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont colinéaires, de même que $\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{CA}$</td><td>$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{MB}$</td></tr>
</table>

Parmi les 7 informations ci-dessous, 4 exactement permettent de décrire cette figure.
Entourer ces 4 informations.

<table>
<tr><td>B est le milieu de [DC]</td><td>la parallèle à (AC) passant par B coupe (AD) en M</td></tr>
<tr><td>ACBM est un trapèze</td><td>les droites (DN) et (CA) sont parallèles</td></tr>
<tr><td colspan="2">le point C appartient au segment [PN] et la distance CN est le double de la distance CP</td></tr>
<tr><td>MBND est un parallélogramme</td><td>la droite (CB) coupe la droite (AM) en D</td></tr>
</table>

III. Propriétés de la multiplication d'un vecteur par un réel

Propriété 1



Pour tout vecteur $\vec{u}$ et tous réels k et k', on a :

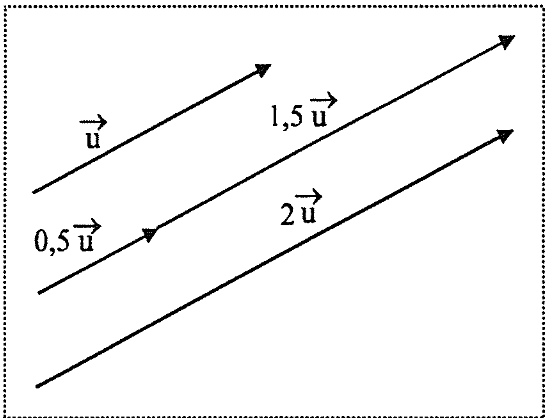
$$k\left(k'\vec{u}\right) = (k \times k')\vec{u}\ .$$

Remarque : Par conséquent , pour tout vecteur $\vec{u}$ et pour tout réel k, on a :

$$(-k)\vec{u} = -\left(k\vec{u}\right).$$

Par exemple, le vecteur $(-3)\vec{u}$ est l'opposé du vecteur $3\vec{u}$.

Propriété 2



Pour tout vecteur $\vec{u}$ et tous réels k et k',

on a :

$$k\vec{u} + k'\vec{u} = (k + k')\vec{u}\ .$$

Propriété 3

Activités préparatoires : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs donnés non colinéaires.

---

1. Choisir deux points I et J.

a) Construire les points A, B et C tels que : $\overrightarrow{IA} = (-2)\vec{u}$, $\overrightarrow{IB} = (-2)\vec{v}$ et $\overrightarrow{IC} = (-2)\vec{u} + (-2)\vec{v}$.

b) Construire les points E et F tels que : $\overrightarrow{JE} = \vec{u} + \vec{v}$ et $\overrightarrow{JF} = (-2)\left(\vec{u} + \vec{v}\right)$.

c) Que peut-on conjecturer à propos des vecteurs $(-2)\vec{u} + (-2)\vec{v}$ et $(-2)\left(\vec{u} + \vec{v}\right)$?

---

2. Choisir un point O et construire les points M, N, P, M', N' et P' tels que : $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$, $\overrightarrow{ON} = \vec{v}$, $\overrightarrow{OP} = \vec{u} + \vec{v}$, $\overrightarrow{OM'} = 1{,}5\vec{u}$, $\overrightarrow{ON'} = 1{,}5\vec{v}$, $\overrightarrow{OP'} = 1{,}5\left(\vec{u} + \vec{v}\right)$.

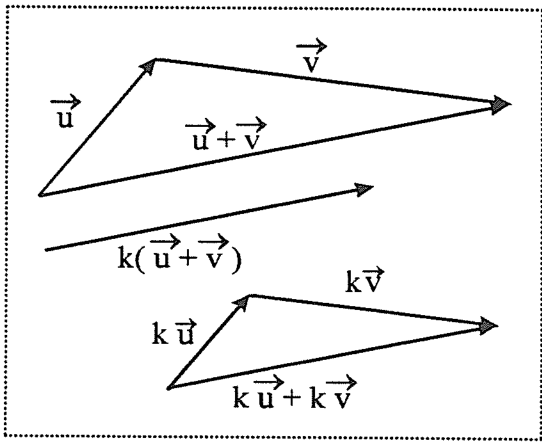
a) Quelle est la nature du quadrilatère OMNP ? (Justifier).

b) Montrer que les droites (M'P') et (MP) sont parallèles, ainsi que les droites (N'P') et (NP). En déduire la nature du quadrilatère OM'P'N'.

c) En déduire que $1{,}5\left(\vec{u} + \vec{v}\right) = 1{,}5\vec{u} + 1{,}5\vec{v}$.

Les études faites en 1. et 2. permettent de conjecturer la propriété suivante, dont on admet qu'elle est vraie :

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et tout réel k, on a : $k\left(\vec{u} + \vec{v}\right) = k\vec{u} + k\vec{v}$



EXERCICES

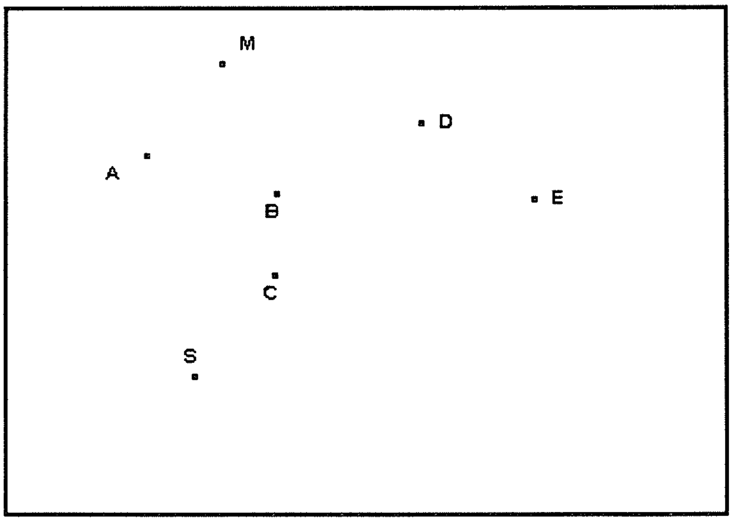
1. Utiliser les instruments de dessin pour placer les points N, P, R et T vérifiant les conditions suivantes :

$\overrightarrow{MN} = 3\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{MP} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{SR} = 0{,}5\overrightarrow{AE} + 2\overrightarrow{CD}$

$\overrightarrow{TS} = \overrightarrow{DE} - 2\overrightarrow{BC}$



2. Calcul vectoriel

a) $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ désignent trois vecteurs donnés.

Ecrire plus simplement l'expression $3\vec{u} - 4(\vec{u} - \vec{v}) + 5(\vec{w} - \vec{v})$

b) $\vec{i}$ et $\vec{j}$ étant deux vecteurs donnés, soient les vecteurs :

$\vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$ $\qquad$ $\vec{v} = \vec{i} + 5\vec{j}$ $\qquad$ $\vec{w} = -2\vec{i} + \vec{j}$

Exprimer à l'aide des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ le vecteur $\vec{u} - 3\vec{v} + \vec{w}$.

c) Soient A, B et C des points vérifiant $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AC}$.

Exprimer $\overrightarrow{AC}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ en fonction de $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BA}$ en fonction de $\overrightarrow{BC}$.

d) Simplifier les vecteurs suivants (donner un vecteur égal à chacun d'eux) :

$3\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{CA}$ $\qquad$ $3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - 3\overrightarrow{AC}$ $\qquad$ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} - 4\overrightarrow{AD} - 2\overrightarrow{DB}$

3. Démonstrations avec les vecteurs :

1.***Colinéarité et alignement*** :

Etant donnés trois points A, B et C du plan,

* si A, B et C sont alignés, alors $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.
* si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires, alors A, B et C sont alignés.

2. ***Colinéarité et parallélisme :***

Etant donnés quatre points A, B, C et D du plan, avec A ≠ B et C ≠ D,

* si (AB) et (CD) sont parallèles, alors $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.
* si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires, alors (AB) et (CD) sont parallèles.

a) Exemple de mise en oeuvre de ces énoncés.

Etant donnés trois points A, B et C non alignés, on considère les points M, N, D et O tels que :

$\overrightarrow{MB} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BD} = -\overrightarrow{BA}$, O est le milieu de [AC].

1°) Comparer les directions des droites (MN) et (BO). Expliquer.

2°) Les points O, N et D sont-ils alignés ? Pourquoi ?

b) Remettre dans l'ordre une démonstration.

Soit un parallélogramme ABCD, I le milieu de [AB] et E le point du segment [ID] tel que $IE = \frac{1}{3}ID$.

Etablir que les points A, E et C sont alignés et préciser la position de E sur (AC). Toutes les étapes de la démonstration sont données ci-dessous. Les réécrire dans l'ordre en ajoutant les mots de liaison.

A, C et E sont alignés.	$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IE}$
$\overrightarrow{IE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{ID}$	$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{ID}$
$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.	$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$
$\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AI}$	$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AI} + \frac{1}{3}\overrightarrow{ID}$
E est le point situé sur [AC] tel que $\frac{1}{3}AC = AE$	
$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\left(3\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{ID}\right)$	$\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{ID}$.

c) Justifier les étapes d'une démonstration.

Soient quatre points ABCD non alignés tels que ABCD soit un parallélogramme. On appelle E le point tel que B soit le milieu de [AE] et F le point tel que D soit le milieu de [AF].

Montrer que C est le milieu de [EF].

1. Voici la première partie de la démonstration. Justifier chaque étape.

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DF}$

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{FC}$

2. Démontrer que $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{CE}$ et donner les étapes pour conclure.

(Une autre démonstration de cet exercice pourra être proposée quand la formule $\overrightarrow{MI} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right)$, I étant le milieu de [AB], aura été vue).

MILIEU-CENTRE DE GRAVITE-VECTEURS
Commentaires

Cette séquence est structurée classiquement en trois phases :
activités, institutionnalisation et exercices d'application.
Les activités et institutionnalisation sont présentées sous forme de fiches-élèves.

Les objectifs retenus :
- Réinvestissement des connaissances antérieures (milieu, centre de gravité).
- Réinvestissement des connaissances nouvelles sur les vecteurs.
- Acquisition d'outils vectoriels de manipulation du milieu et du centre de gravité.
- Préparation à la notion de barycentre.
- Approche de la notion de caractérisation.

Il ne nous a pas semblé excessif de proposer des énoncés du style « Le milieu du segment [AB] est <u>caractérisé</u> par... ». Il ne s'agit évidemment pas d'aborder la notion de CNS mais plus simplement de faire passer une caractérisation d'un objet mathématique comme une propriété qui lui <u>appartient en propre</u> (n'ayons pas peur des pléonasmes !) une propriété qui le <u>distingue</u> des autres objets.

Les activités prennent comme point de départ les connaissances et représentations du milieu et du centre de gravité qui devraient être celles d'élèves sortant de 3ème. Leur esprit est de faire fonctionner ces connaissances avec évidemment pour but de mettre en place la « vectorialisation » de ces notions.
Elles fonctionnent par couple (condition nécessaire puis suffisante). Le deuxième couple (activités 3 et 4) est, bien entendu, l'occasion d'un réinvestissement des résultats obtenus dans le premier.

Quelques remarques de détail sur ce qui peut être attendu dans les activités :
1-a) Il n'est pas question d'obtenir une liste exhaustive, mais une liste suffisamment riche (sommes, opposés, produits).
1-b) Il s'agit de forcer la relation $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$.
2-a) On demande la position sur chaque médiane. Le but est de faire utiliser les résultats de collège sur le centre de gravité. L'exercice 1 propose une démonstration complète de toutes les propriétés, fondée uniquement sur l'existence d'un point d'intersection pour deux médianes.

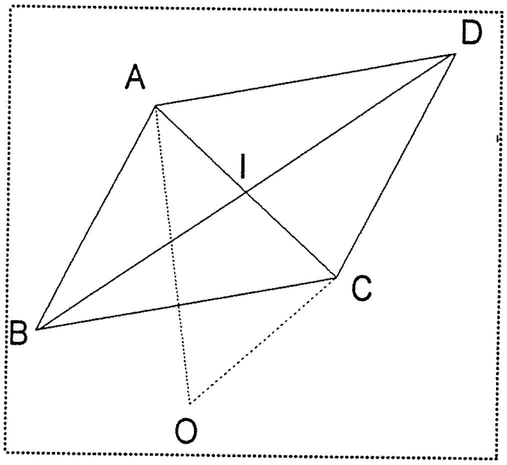
Bien qu'elle ne soit pas très utile au niveau de seconde, nous avons tenu à faire apparaître la relation de « contraction » $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$, d'une part parce qu'elle est le pendant de la relation sur le milieu, d'autre part parce qu'elle présente une percée vers le calcul barycentrique.

Les exercices d'application ne sont pas tous des exercices faciles. Mais il s'agit en quelque sorte d'une fin de parcours sur les méthodes vectorielles. Notre choix s'est plutôt orienté vers des questions où les notions abordées étaient d'une efficacité non négligeable. Ils devront éventuellement être reformulés en fonction du niveau de la classe.

MILIEU-CENTRE DE GRAVITE-VECTEURS ACTIVITES

ACTIVITE 1

ABCD est un parallélogramme de centre I.
a) Quelles relations peut-on écrire entre les vecteurs $\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{IC}$?



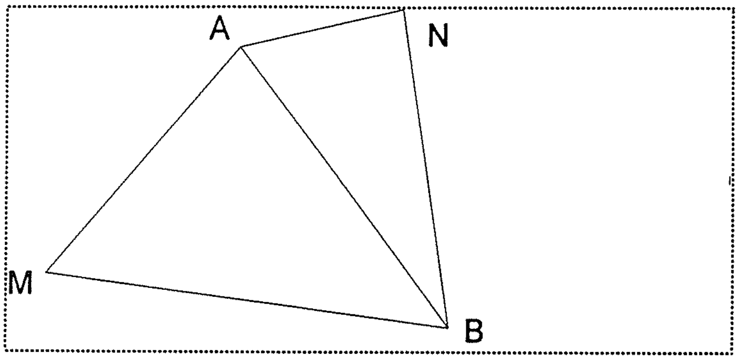
b) Ecrire la somme $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$ en fonction d'un seul vecteur de deux façons différentes.

c) Justifier les résultats précédents.

d) Sans ajouter de point à la figure, exprimer la somme $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$ en fonction d'un seul vecteur et justifier ce résultat.

ACTIVITE 2

Construire les points P et Q qui vérifient
$2\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$ et
$2\overrightarrow{NQ} = \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB}$
Quelles remarques peut-on faire ?



ACTIVITE 3

a) Rappeler la définition du centre de gravité d'un triangle ABC et sa position. Traduire vectoriellement cette position.

NB : *Il est possible de démontrer toutes ces propriétés vectoriellement. C'est le but de l'exercice 1.*

b) Calculer la somme $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}$.

ACTIVITE 4

A, B et C sont trois points du plan non alignés.
M est un point du plan qui vérifie $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{0}$.
B', C' et A' sont les milieux respectifs de [CA], [AB] et [BC].
a) Trouver une relation entre $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MA'}$.
b) Montrer que M est le point d'intersection des médianes du triangle ABC.

MILIEU-CENTRE DE GRAVITE-VECTEURS
SYNTHESE

I. Caractérisations vectorielles du milieu d'un segment

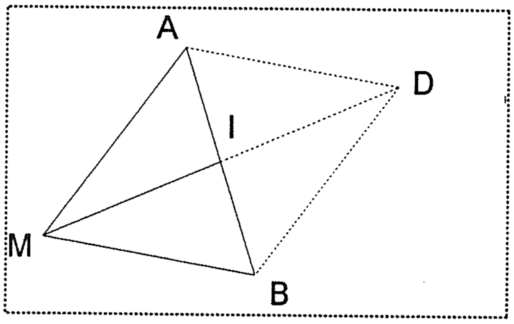
Le milieu I d'un segment [AB] est caractérisé par chacune des propriétés suivantes :

a) $2\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB}$

b) $2\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{AB}$

c) $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{0}$

d) Pour tout point M on a $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$.



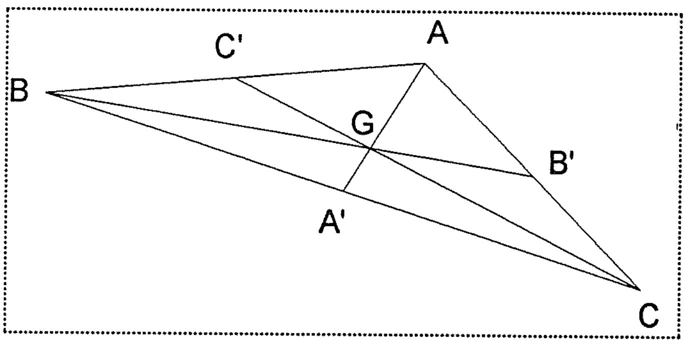
II. Caractérisations vectorielles du centre de gravité d'un triangle

Le centre de gravité G d'un triangle ABC est caractérisé par chacune des propriétés suivantes :

a) $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$.

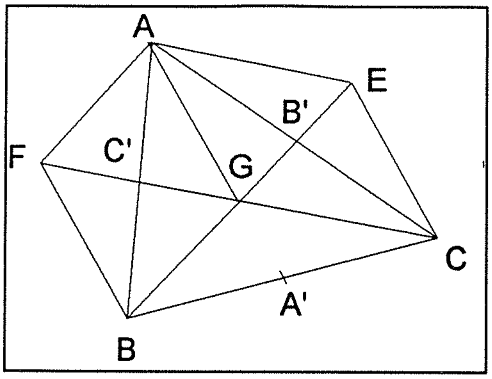
b) A' étant le milieu de [BC], $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$ (on peut remplacer, dans cette égalité, les points A et A', respectivement par B et B' ou encore par C et C').

c) Pour tout point M on a $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$.



EXERCICES D'APPLICATION

1. *Le but de cet exercice est de démontrer les propriétés admises dans l'activité 3.*
B', C' et A' sont les milieux respectifs de [CA], [AB] et [BC].
Les médianes (BB') et (CC') se coupent en G.
E est le symétrique de G par rapport à B' et F le symétrique de G par rapport à C'.



a) Prouver que les quadrilatères AGCE, AGBF, AEGF sont des parallélogrammes.
b) Préciser la position du point G sur le segment [BE] et justifier ce résultat.
c) En déduire que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.
d) Démontrer que $\overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BB'}$.
e) Montrer que A, A' et G sont alignés.
f) M étant un point quelconque du plan, montrer que $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$.

---

2. Soit un quadrilatère ABCD dont trois sommets quelconques ne sont pas alignés.
a) Soient I et J les milieux respectifs de [AB] et [CD]. Montrer que pour tout point T du plan on a l'égalité $\overrightarrow{TA} + \overrightarrow{TB} + \overrightarrow{TC} + \overrightarrow{TD} = 2\overrightarrow{TI} + 2\overrightarrow{TJ}$.
b) Montrer qu'il existe un unique point H tel que $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} + \overrightarrow{HD} = \vec{0}$. Construire le point H.
c) Soient K, L, M, N les milieux respectifs de [AD], [BC], [AC], [BD]. Que peut-on dire des segments [IJ], [KL] et [MN] ?
d) G est le centre de gravité du triangle ABC. Montrer que $\overrightarrow{HD} + 3\overrightarrow{HG} = \vec{0}$.

---

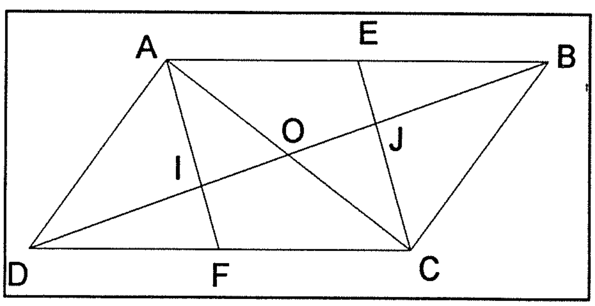
3. A, B et C sont trois points non alignés. B', C' et A' sont les milieux respectifs de [CA], [AB] et [BC].
Montrer que le centre de gravité du triangle ABC est aussi celui du triangle A'B'C'.

---

4. A, B et C sont trois points non alignés. I est le milieu de [AB] et J, le point du segment [BC] tel que $3CJ = BC$ et K le symétrique de A par rapport à C.
Montrer que les points I, J et K sont alignés.

---

5. ABCD est un parallélogramme. E et F sont les milieux respectifs de [AB] et [CD].
Montrer que $DI = IJ = JB$.



Un devoir en temps libre

Exercice 1 (D'un triangle l'autre)

Pour une fois le triangle donné s'appelle IJK...
On note A le symétrique de K par rapport à J, B le symétrique de I par rapport à K et C le symétrique de J par rapport à I.

1. Exprimer $\overrightarrow{AK}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AI}$, puis $\overrightarrow{AI}$ en fonction de $\overrightarrow{AJ}$ et $\overrightarrow{AC}$ et enfin $\overrightarrow{AJ}$ en fonction de $\overrightarrow{AK}$.
   En déduire que $\overrightarrow{AK} = \frac{2}{7}\left(2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$. Etablir deux relations analogues pour $\overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{CJ}$.
2. Soit P le point défini par $\overrightarrow{BP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$. Exprimer $\overrightarrow{AP}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
3. Déduire des questions 1 et 2 que A, K, J et P sont alignés.
   Montrer que l'on a aussi B, I, K et Q alignés ainsi que C, J, I et R, les points Q et R étant définis par $\overrightarrow{CQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{AR} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.
4. Le triangle ABC est donné. Construire le triangle IJK tel que I soit le milieu de $[CJ]$, J le milieu de $[AK]$ et K le milieu de $[BI]$.

Exercice 2

On considère un quadrilatère ABCD ainsi que les milieux I et J des segments $[AB]$ et $[CD]$.

1. M étant un point quelconque du plan, exprimer $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$ en fonction de $\overrightarrow{MI}$ et $\overrightarrow{MJ}$.
2. Montrer qu'il existe un unique point O tel que $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{0}$.
   Construire le point O.
3. Soit G le centre de gravité du triangle ABC. Montrer que les points D, G, et O sont alignés.

Remarques sur l'exercice 1:

C'est un remaniement d'un exercice du <u>*Terracher*</u> *de Seconde. Il nous a semblé intéressant de proposer un exercice où le raisonnement vectoriel permet de simplifier une construction (sur le plan du tracé).*
La dernière question pose problème car la réciproque est éludée. Il n'était pas possible de faire traiter cette question sans alourdir considérablement l'énoncé.
Une « complétion » de cet exercice peut être proposée après l'étude de la géométrie analytique.
Cet exercice peut être une occasion de poser la problématique de la construction. On peut, par exemple, consacrer un module à ce sujet.
Après étude du centre de gravité, on peut proposer de montrer que ABC et IJK ont même centre de gravité. Un autre prolongement possible est la détermination du rapport des aires de IJK et ABC (vu dans <u>*Tangente*</u> *n°37, mai-juin 95).*

Remarque sur l'exercice 2:

Cet exercice est une reprise de l'exercice 2 sur les milieux et centres de gravité. Il est formulé de façon plus ouverte.

Un devoir d'évaluation

Exercice 1

ABCD est un parallélogramme de centre O. Soit $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$.

1. Placer le point M tel que $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v})$.
   Placer le point K tel que $\overrightarrow{KD} = \vec{u}$.
   Placer le point N tel que $\overrightarrow{NB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.
   Placer le point P tel que $\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{OB}$.
   Placer le point R tel que $\overrightarrow{CR} = \overrightarrow{BO} - \overrightarrow{CO}$.
2. Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{OA}$ en fonction des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
3. Justifier l'égalité $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{RD}$. Que peut-on en conclure ?

Exercice 2

Soient deux points distincts A et B. On note $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$

1. Placer :
   a) le point I tel que $\overrightarrow{AI} = -\frac{8}{3}\vec{u}$.
   b) le point J tel que $\overrightarrow{BJ} = \frac{2}{3}\vec{u}$.
2. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{BJ}$ en fonction de $\overrightarrow{AI}$ et le vecteur $\overrightarrow{IJ}$ en fonction de $\vec{u}$.

Exercice 3

Soit un triangle ABC, A' le milieu de $[BC]$ et O le centre du cercle circonscrit à ABC. Soit H le point défini par $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$. (on ne cherchera pas à placer le point H sur la figure)

1. a) Exprimer $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ en fonction de $\overrightarrow{OA'}$.
   b) Montrer que $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OA'}$. Conclure pour les droites (AH) et (OA').
   c) En déduire que (AH) est une hauteur du triangle ABC. On montrerait de même que (BH) est une hauteur du triangle ABC. Que représente le point H pour le triangle ABC ?
2. Soit G le centre de gravité du triangle ABC. En utilisant la somme $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}$, montrer que $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG}$.
3. Exprimer $\overrightarrow{OH}$ en fonction de $\overrightarrow{OG}$. En déduire la position des points O, G et H.

ANNEXE

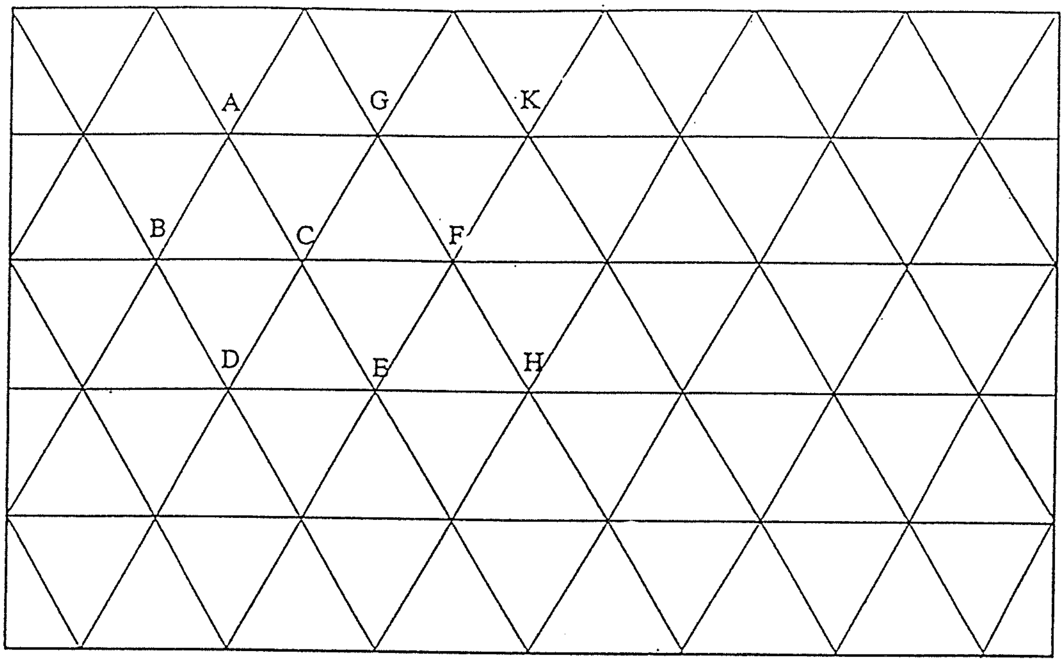
Documents publiés avec l'autorisation de la DEP

Évaluation à l'entrée en Seconde générale et technologique :

exercices concernant les vecteurs.

Ministre de l'éducation nationale
Direction de l'évaluation et de la prospective
évaluation à l'entrée en seconde

Exercice 9 A.



A l'aide du pavage régulier ci-dessus :

1° Compléter les égalités suivantes :

a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{F.}$

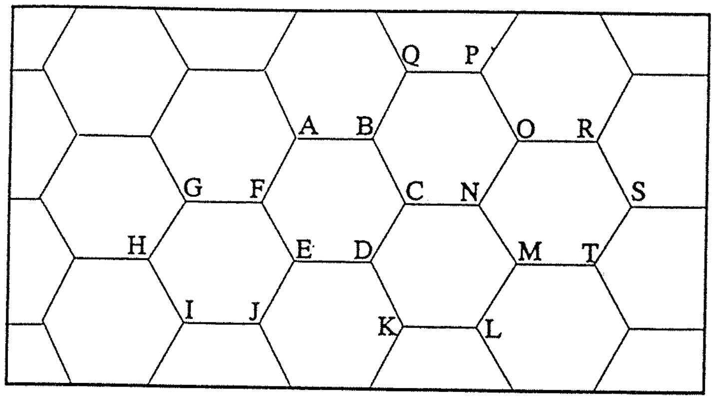
b) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{.D}$

c) $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{..}$

d) $\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{DG} = \overrightarrow{..}$

2° Colorier l'image du triangle ABC par la translation de vecteur $\overrightarrow{AH}$.

Exercice 9 B.



A l'aide du pavage régulier ci-dessus :

1° Compléter les égalités suivantes :

a) $\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{D\,.}$

b) $\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{.\,M}$

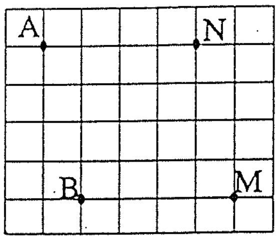
c) $\overrightarrow{GF} + \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{..}$

d) $\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{MT} = \overrightarrow{..}$

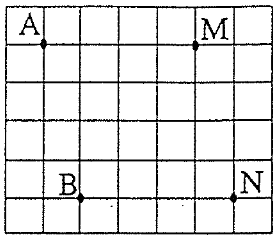
2° Colorier l'image de CDKLMN par la translation de vecteur $\overrightarrow{KG}$.

Exercice 8A Dans chacun des cas ci-dessous, entourer la bonne réponse.

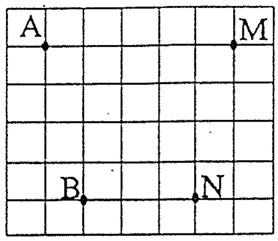
1° Pour chacune des figures ci-dessous, l'égalité $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MN}$ est-elle vraie ?



OUI NON

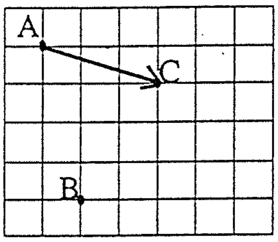


OUI NON

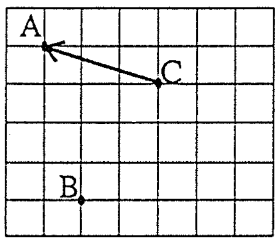


OUI NON

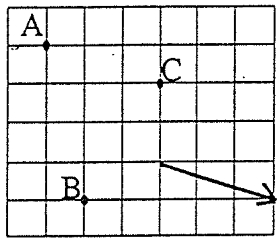
2° Le vecteur tracé représente-t-il $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$?



OUI NON

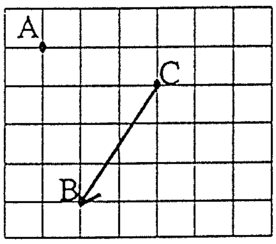


OUI NON

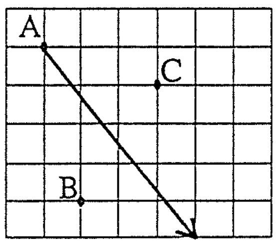


OUI NON

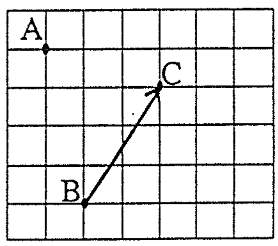
3° Le vecteur tracé représente-t-il $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$?



OUI NON

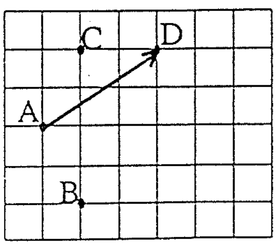


OUI NON

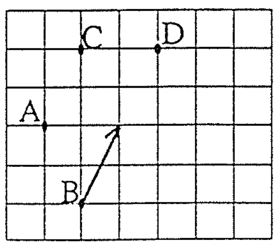


OUI NON

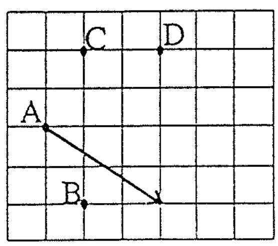
4° Le vecteur tracé représente-t-il $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$?



OUI NON



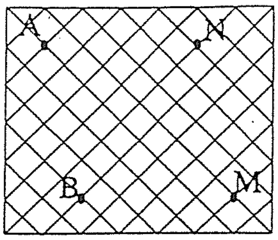
OUI NON



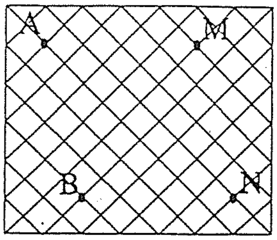
OUI NON

Exercice 8B Dans chacun des cas ci-dessous, entourer la bonne réponse.

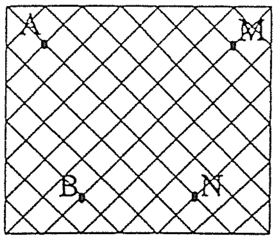
1° Pour chacune des figures ci-dessous, l'égalité $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MN}$ est-elle vraie ?



OUI NON

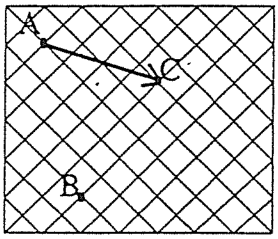


OUI NON

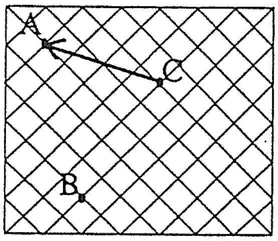


OUI NON

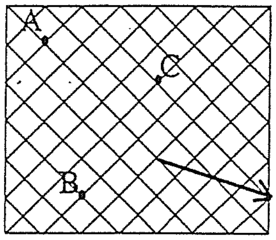
2° Le vecteur tracé représente-t-il $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$?



OUI NON

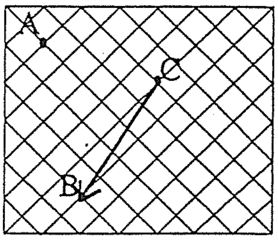


OUI NON

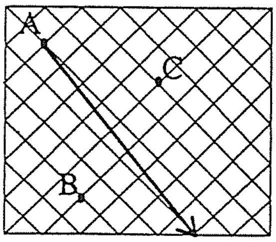


OUI NON

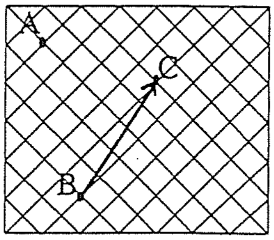
3° Le vecteur tracé représente-t-il $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$?



OUI NON

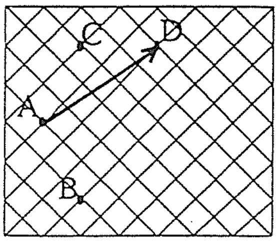


OUI NON

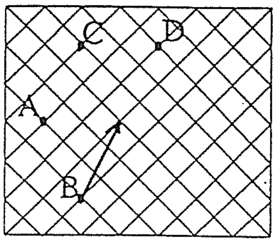


OUI NON

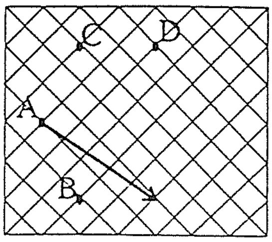
4° Le vecteur tracé représente-t-il $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$?



OUI NON



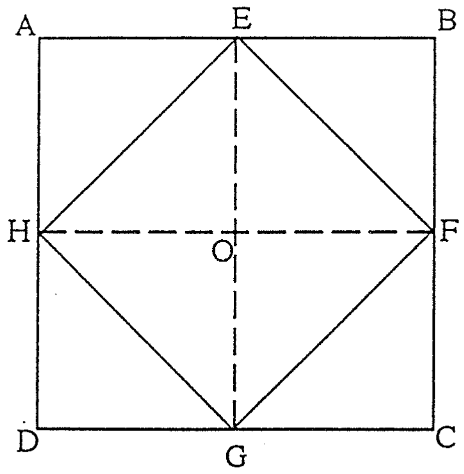
OUI NON



OUI NON

Exercice 6A

Sur la figure ci-dessous, le quadrilatère ABCD est un carré ; les points E, F, G et H sont les milieux des côtés de ce carré et le point O désigne son centre.



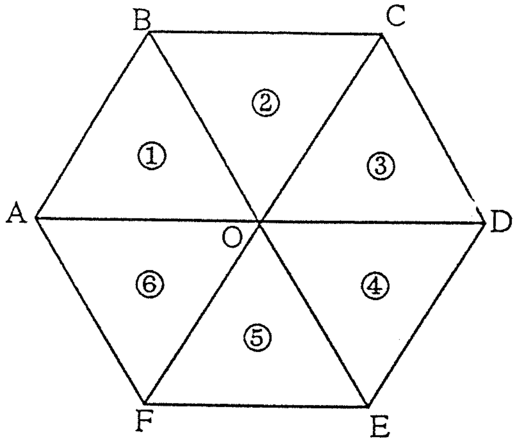
1° Dans le tableau ci-dessous entourer **la ou les** bonnes réponses.

Le vecteur $\overrightarrow{HE}$ est égal au vecteur	$\overrightarrow{EF}$	$\overrightarrow{GF}$	$\overrightarrow{OB}$	$\overrightarrow{OG}$
La longueur HE est égale à la longueur	EF	GF	OB	OG
$\overrightarrow{DH} + \overrightarrow{DG} =$	$\overrightarrow{HE}$	$\overrightarrow{HG}$	$\overrightarrow{DO}$	$\overrightarrow{HF}$
DH +DG =	HE	HG	DO	HF
Le triangle HAE a pour image le triangle GOF par la translation de vecteur	$\overrightarrow{EF}$	$\overrightarrow{OA}$	$\overrightarrow{GH}$	$\overrightarrow{HF}$

2° Construire, sur la figure donnée, le symétrique du carré EFGH par rapport à la droite (EF).

Exercice 6B

Sur la figure ci-dessous, le polygone ABCDEF est un hexagone régulier de centre O.



1° Dans le tableau ci-dessous entourer **la ou les** bonnes réponses.

Le vecteur $\overrightarrow{AF}$ est égal au vecteur	$\overrightarrow{BE}$	$\overrightarrow{OB}$	$\overrightarrow{OC}$	$\overrightarrow{OE}$
Le longueur AF est égale à la longueur	BE	OB	OC	OE
$\overrightarrow{FA} + \overrightarrow{FE} =$	$\overrightarrow{AE}$	$\overrightarrow{FC}$	$\overrightarrow{ED}$	$\overrightarrow{FO}$
FA + FE =	AE	FC	ED	FO
Le triangle ① a pour image le triangle ③ par la translation de vecteur	$\overrightarrow{FE}$	$\overrightarrow{OA}$	$\overrightarrow{OD}$	$\overrightarrow{AD}$

2° Construire, sur la figure donnée, le symétrique du losange OFED par rapport à la droite (DE).

LES VECTEURS EN CLASSE DE SECONDE ... QUELQUES PROPOSITIONS.

Le groupe Lycée de l'IREM a publié en juin 1995 une brochure concernant l'enseignement de la notion de vecteurs en classe de seconde.

Ce document était composé d'activités, de brèves synthèses de ce qu'il faut savoir et d'exercices d'application et d'entraînement.

Nous avons poursuivi ce travail au premier trimestre de l'année scolaire 1996-1997 en analysant des productions d'élèves à partir de trois exercices extraits de devoirs surveillés.

Le groupe vous propose donc quelques exercices de remédiation possibles face à certains types d'erreurs.

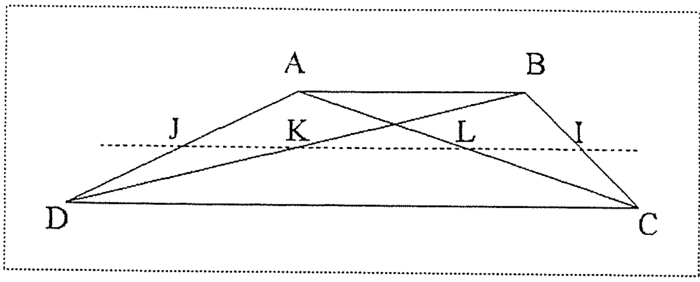
Le groupe Lycée de l'IREM de Besançon.

<u>Plan du document</u> :

Les trois exercices proposés à nos élèves.

Énoncé 1 :
Dans le trapèze ABCD, I, J, K et L désignent les milieux respectifs de [BC], [AD], [BD] et [AC].

Démontrer vectoriellement que les points J, K, L, par exemple, sont alignés.

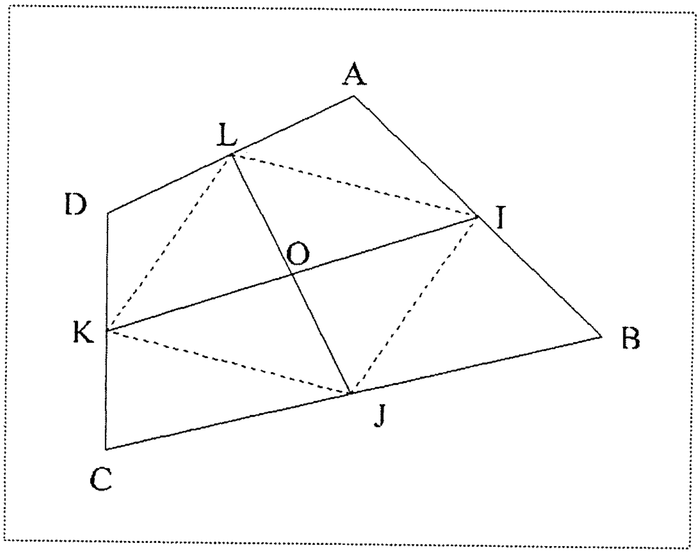


Énoncé 2 :

ABCD est un quadrilatère quelconque.
I, J, K, L sont les milieux de ses côtés.
Vous admettrez, sans le démontrer, que IJKL est un parallélogramme. On appelle O son centre.

1). Calculer le vecteur : $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$.

2) Vérifiez votre réponse en construisant ce vecteur.



Énoncé 3 :
ABC est un triangle et O un point quelconque.
G et P sont les points tels que : $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{OP} = 3\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} - 2\overrightarrow{OC}$.

1. Faire une figure.
2. Montrer que $3\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$.
3. Montrer que $3\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OG}$.
4. En déduire que (OP) et (GC) sont parallèles.

Obstacles et principales erreurs rencontrés.

L'analyse des copies de nos élèves permet de regrouper les difficultés qu'ils ont rencontrées dans les catégories suivantes :

1. Difficultés à changer de cadre :

   Certains élèves ne parviennent pas à traduire vectoriellement de manière correcte l'énoncé décrivant une configuration élémentaire.

   (Voir page IX pour un exemple concernant l'énoncé 1).

2. Difficultés de calcul vectoriel :

   On rencontre les erreurs « classiques » de calcul vectoriel, par exemple la confusion du type $k\,\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG} = k\,\overrightarrow{EG}$ pour k différent de 1

3. Erreurs de construction :

   La plus fréquente est celle qui consiste, lorsque l'élève doit construire un représentant d'origine imposée d'une somme vectorielle donnée, à ne pas « accrocher la construction au bon point ». Par exemple, certains élèves cherchant à construire le point E tel que $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AB}$,

   construiront en réalité le point T tel que $\overrightarrow{AT} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AB}$.

   (Voir par exemple page X).

4. Problèmes de choix d'une stratégie dans les calculs qui nécessitent de mettre en œuvre la relation de Chasles :

   Ceci est particulièrement évident dans des exercices du type suivant :

   Déterminer et construire le point F tel que $2\,\overrightarrow{FA} + 3\,\overrightarrow{FB} - \overrightarrow{FC} = \overrightarrow{AB}$.

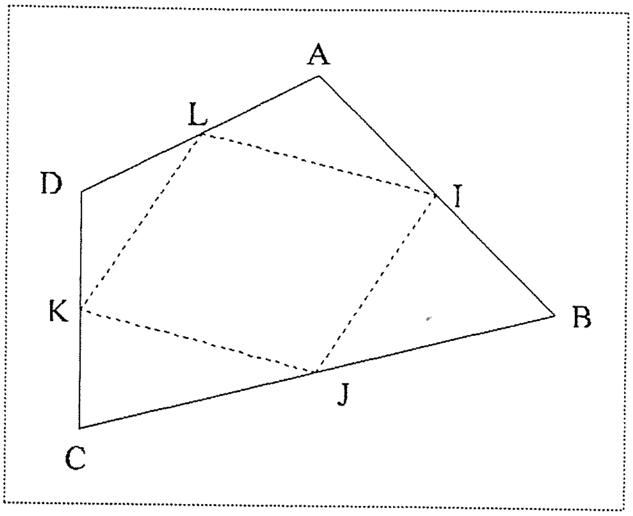
   Trop d'élèves « tournent en rond » faute d'un fil directeur leur permettant de choisir judicieusement les vecteurs à décomposer.

   (Voir les pages X et XI pour des exemples de ce type relatifs aux énoncés 1 et 2).

Quelques exercices de remédiation.

1. Exercices pour entraîner les élèves à traduire vectoriellement des configurations.

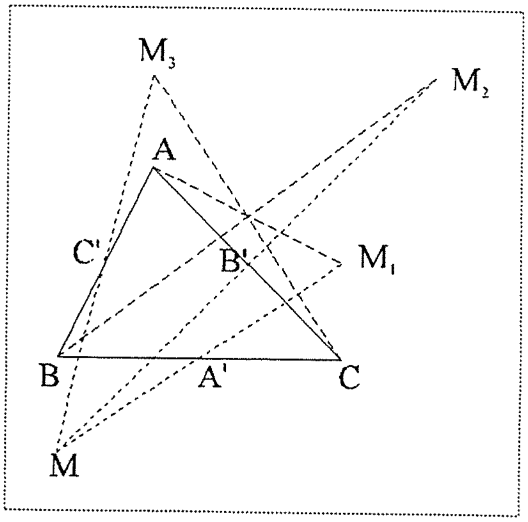
Exercice 1 :



ABCD est un quadrilatère quelconque.
I, J, K et L sont les milieux des côtés.

a) Montrer (vectoriellement) que IJKL est un parallélogramme.
b) A quelle condition est-ce un losange ? un rectangle ? un carré ?

Exercice 2 :



ABC est un triangle quelconque.
A', B' et C' sont les milieux des côtés.
M est un point distinct de A, B et C.
M_1 , M_2 et M_3 sont les symétriques respectifs de M par rapport à A', B' et C'.

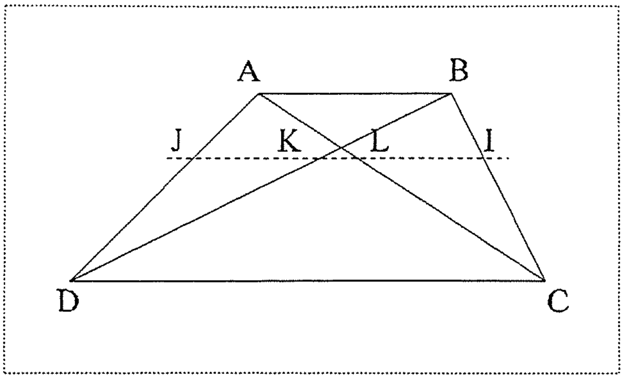
a) Démontrer que la droite (AB) et la droite (M_1M_2) sont parallèles.
b) Démontrer que les segments [AM_1], [BM_2] et [CM_3] ont le même milieu.

Exercice 3 :

Dans le trapèze ABCD, I, J, K et L appartiennent respectivement aux segments [BC], [AD], [BD] et [AC] et vérifient :

$BI = \frac{BC}{3}$, $AJ = \frac{AD}{3}$, $BK = \frac{BD}{3}$ et $AL = \frac{AC}{3}$

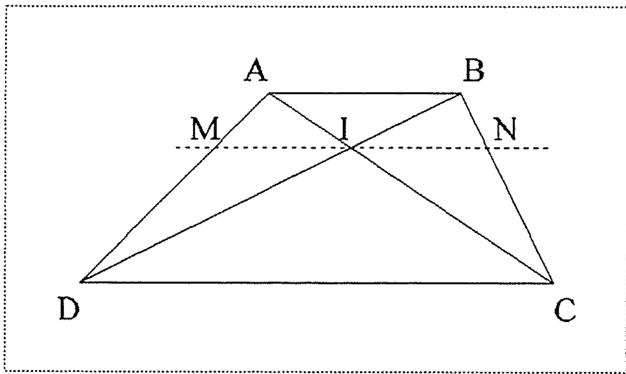
Démontrer vectoriellement que les points J, K, L, par exemple, sont alignés



Exercice 4 :

Les diagonales du trapèze ABCD se coupent en I.
La parallèle à (CD) menée par I coupe le segment [AD] en M et le segment [BC] en N.

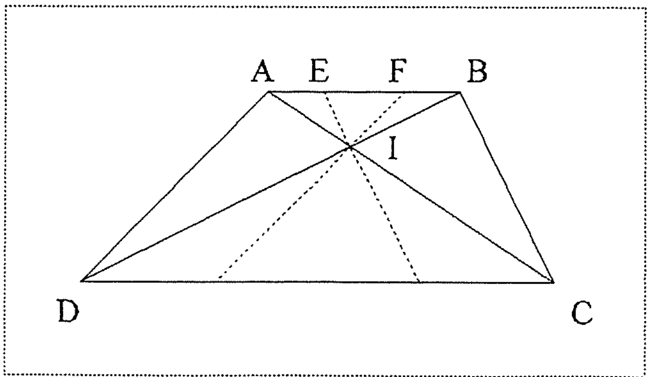
Démontrer que I est le milieu du segment [MN].



Exercice 5 :

Les diagonales du trapèze ABCD se coupent en I.
Les parallèles à (BC) et (AD) menées par I coupent (AB) respectivement en E et F .

Démontrer que les segments [AB] et [EF] ont le même milieu.



2. Exercices pour apprendre aux élèves à choisir une stratégie dans les calculs vectoriels

Exercice 1 :

1. ABC est un triangle. I est le milieu de [BC] et J est celui de [AI].
   M désigne un point quelconque du plan.

   a) Écrire différemment $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ comme somme de trois vecteurs.
   b) Trouver une somme de deux vecteurs. égale à $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$.
   c) Exprimer la somme à $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ à l'aide d'un seul vecteur.

2. ABCD est un parallélogramme de centre O. Reprendre les questions précédentes dans le cas du vecteur $-\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$.

Exercice 2 :

ABC est un triangle. D est le point tel que $\overrightarrow{BD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ et E est le point tel que $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AB}$.
Montrer que les points A, E et D sont alignés.

Exercice 3 :

ABC est un triangle. P est le milieu de [AB]. Q est le point tel que $\overrightarrow{BQ} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ et R est le point tel que $\overrightarrow{CR} = \frac{4}{5}\overrightarrow{CA}$.
Montrer que les points P, Q et R sont alignés.

Exercice 4 :

ABC est un triangle. D est le milieu de [AC]. E est le symétrique de B par rapport à C et F est le point tel que $\overrightarrow{BF} = 2\overrightarrow{AB}$.
Montrer que les droites (BD) et (EF) sont parallèles.

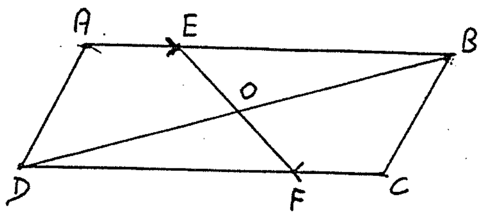
Exercice 5 :

Voici l'énoncé d'un exercice :

ABCD est un parallélogramme, O est le milieu de [BD], E et F sont les points tels que $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CF} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CD}$. Démontrer que les points E, O et F sont alignés.

Que pensez-vous des deux rédactions suivantes, extraites de copies d'élèves ?

Rédaction ①



- Démontrer que O, E et F sont alignés revient à démontrer que $\overrightarrow{OE} = k\,\overrightarrow{OF}$.

- ABCD parallélogramme et O milieu de [BD] } donc O milieu de [AC]
  donc $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC}$

- $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OE}$ $\quad$ $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OF}$
- $\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OE}$ $\quad$ $\frac{1}{4}\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OF}$

- ABCD parallélogramme donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$
  donc $\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{AB}$

donc $\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OE}$ et $-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OF}$

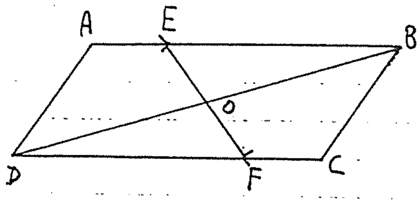
donc $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OE} = -(\overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OF})$

$\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OE} = -\overrightarrow{CO} - \overrightarrow{OF}$

$\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OF}$ or $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC}$ (voir plus haut)

donc $\boxed{\overrightarrow{OE} = -\overrightarrow{OF} \quad \text{cqfd.}}$

Rédaction ②



Démontrer que les points O, E, F sont alignés revient à démontrer que les vecteurs $\vec{EO}$ et $\vec{OF}$ sont colinéaires : c'est à dire qu'il existe un réel k tel que $\vec{EO} = k.\vec{OF}$

$\vec{EO} = \vec{AE} + \vec{AO}$

$$\vec{EO} = \frac{1}{4}\vec{AB} + \vec{AE} + \vec{EO}$$
$$= \frac{1}{4}\vec{AB} + \frac{1}{4}\vec{AB} + \vec{EO}$$
$$= \frac{2}{4}\vec{AB} + \vec{EO}$$
$$= \frac{1}{2}\vec{AB} + \vec{OF}$$
$$= 2\vec{AE} + \vec{OF}$$
$$= 2\vec{OF} + \vec{OF}$$
$$= 3\vec{OF}$$

c.q.f.d

Commentaires :

Voici ce qui se dégage principalement des réactions des élèves face à ces deux rédactions :

1) *l'apparence confuse, par absence de fil conducteur, de la rédaction ① ;*
2) *une disposition facilitant la compréhension de la solution proposée dans la rédaction ②, mais des erreurs et un manque de justification.*

Cette analyse comparée et critique de productions d'élèves s'avère souvent riche d'enseignements. Elle peut être renouvelée lors des corrections de devoirs.

Exemple de difficulté à traduire vectoriellement l'énoncé 1.

I

7 Démontrer que J, K, L (par exemple) sont alignés revient à démontrer que $\vec{JL}$ et $\vec{JK}$ sont colinéaires c'est à dire qu'il existe un réel k, tel que $\vec{JL} = k\,\vec{JK}$

$\vec{JL} = \vec{JA} + \vec{AL}$ relation de chasles

$= \frac{1}{2}\vec{AD} + \frac{1}{2}\vec{AC}$ J milieu de [AD] et L celui de [AC]

$= \frac{1}{2}\vec{AD} + \frac{1}{2}(\vec{AD} + \vec{DC})$ relation de chasles

$= \vec{AD} + \frac{1}{2}\vec{DC}$ développement

$= \vec{AD} + \frac{1}{2}(\vec{DA} + \vec{AC})$ relation de chasles

$= \vec{AD} - \frac{1}{2}\vec{AD} + \frac{1}{2}\vec{AC}$ $\frac{1}{2}\vec{AD} = -\frac{1}{2}\vec{DA}$

$= \frac{1}{2}\vec{DA} + \frac{1}{2}\vec{AC}$ développement

$= \frac{1}{2}\vec{DC}$ relation de chasles

obtenu directement avec le théo. des milieux !

$\vec{JK} = \vec{JA} + \vec{AK}$ relation de chasles

$= -\frac{1}{2}\vec{AD} + \vec{AK}$ J milieu de [AD]

$= -\frac{1}{2}\vec{AD} + (\vec{AD} + \vec{DK})$ relation de chasles

$= \frac{1}{2}\vec{AD} + \frac{1}{2}\vec{DB}$ développement et K milieu de [DB]

$= \frac{1}{2}\vec{AD} + \frac{1}{2}(\vec{DA} + \vec{AB})$ chasles

$= \frac{1}{2}\vec{AD} - \frac{1}{2}\vec{AD} + \frac{1}{2}\vec{AB}$ développement

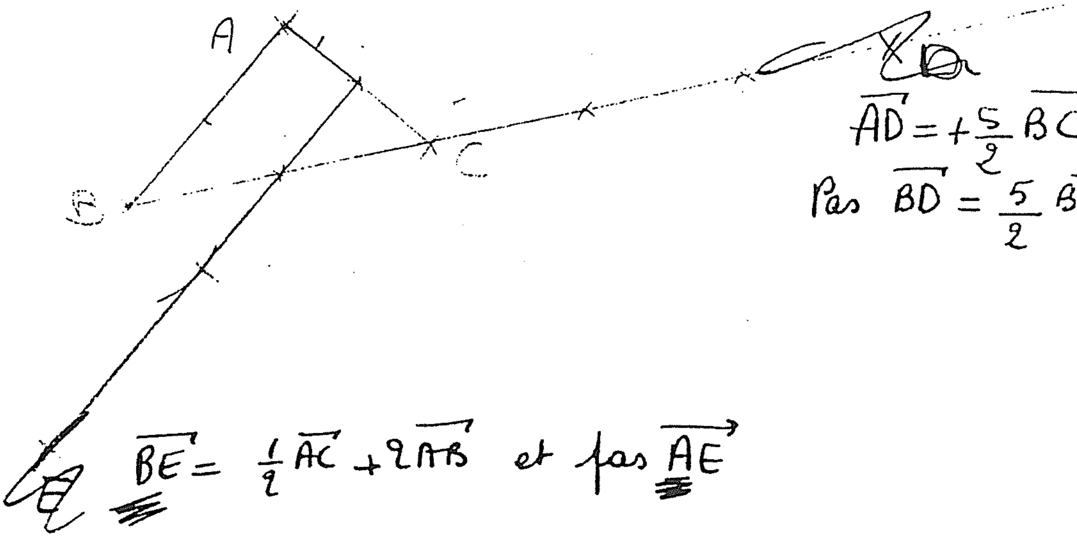
$= \frac{1}{2}\vec{AB}$ "

on remarque !

$\vec{DC} = 2\,\vec{AB}$ donc

ah bon ? c'est mis dans l'énoncé ?

Exemples d'erreurs de construction vectorielle.



$\vec{AD} = +\frac{5}{2}\vec{BC}$

Pas $\vec{BD} = \frac{5}{2}\vec{BC}$

$\vec{BE} = \frac{1}{2}\vec{AC} + 2\vec{AB}$ et pas $\vec{AE}$

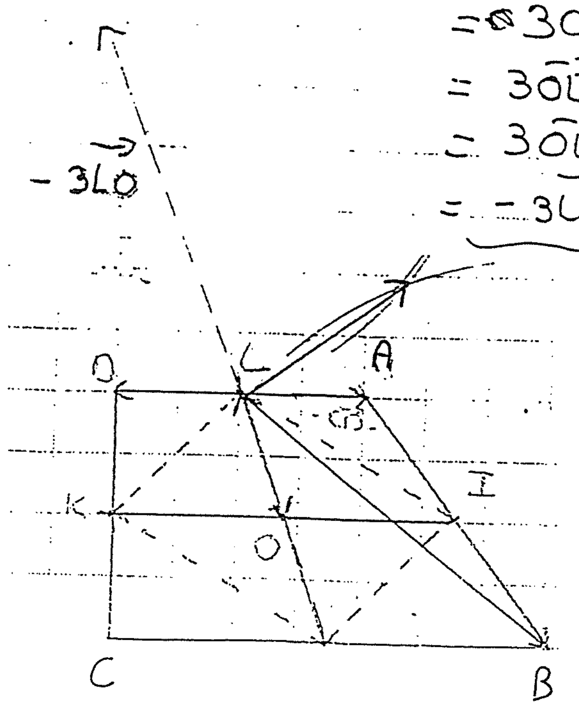
Exemples de mauvais choix de stratégie dans les exercices 1 et 2.

II

il est où ?

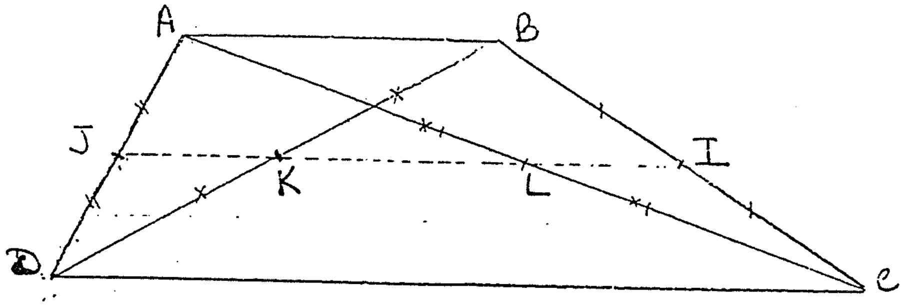
$$\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} = \vec{OL} + \vec{LA} + \vec{CL} + \vec{LB} + \vec{CL} + \vec{LD}$$
$$= 3\vec{CL} + \vec{LA} + \vec{LB} + \vec{LD}$$
$$= 3\vec{OL} + \vec{DL} + \vec{LB} + \vec{LD}$$
$$= 3\vec{OL} + \vec{LB}$$
$$= -3\vec{LO} + \vec{LB}$$

introduire le m pt L trois fois de suite n'est pas intéressant



tu aurais dû commencer par construire le vecteur $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD}$, pour constater qu'il était nul ! ensuite, tu pouvais essayer de le démontrer.

Exercice 1.



Démontrer que les points J, K, L sont alignés revient à démontrer que les vecteurs $\vec{JK}$ et $\vec{JL}$, par exemple, sont colinéaires, c'est-à-dire qu'il existe un réel k tel que $\vec{JK} = k.\vec{JL}$

$$\vec{JK} = \vec{JD} + \vec{DK}$$ pas intéressant

$$= (\vec{JA} + \vec{AC} + \vec{LD}) + \vec{DK}$$ Chasles

$$= \frac{1}{2}\vec{DA} + \frac{1}{2}\vec{AC} + \vec{LD} + \vec{DK}$$

$$= \frac{1}{2}\vec{DC} + \vec{LK}$$

$$= \frac{1}{2}\vec{DC} + (\vec{LA} + \vec{AK})$$

$$= \frac{1}{2}\vec{DC} + \frac{1}{2}\vec{CL} + \vec{AK} = \frac{1}{2}\vec{DL} + \vec{AK}$$

tu n'as pas assez exploité le fait que K et L sont des milieux.

I.R.E.M. de Franche-Comté
UFR des Sciences et Techniques
16, route de Gray, La Bouloie
F-25030 BESANÇON cedex
Tél. : 03.81.66.61.92 - Fax : 03.81.66.61.99
Courrier électronique : iremfc@math.univ-fcomte.fr
http://pegase.univ-fcomte.fr/CTU/IREM/lieux.htm#Besançon

TITRE : LES VECTEURS EN CLASSE DE SECONDE

AUTEURS : GROUPE LYCEE DE L'IREM

PUBLIC CONCERNE : PROFESSEURS DE MATHEMATIQUES ENSEIGNANT EN LYCEE OU FORMATEURS INTERVENANT EN FORMATION INITIALE

DATE : JUIN 1995 - Revue et corrigée JUIN 1998

MOTS CLES : Séquences, enseignement, vecteur, propriété, outil vectoriel.

RESUME : Présentation d'une séquence d'enseignement sur les vecteurs en classe de seconde générale et technologique
De la mise en situation à l'évaluation.

Format A4 - Nombre de pages : 41 - Poids : 130 g

IREM DE BESANÇON

Dépot Légal: 92/95

Numéro ISBN : 2.909963.01.2