INSTITUT DE RECHERCHE SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES

UNIVERSITÉ DE FRANCHE-COMTÉ

L'enseignement des mathématiques en première ES

Groupe "LYCÉE"

Faul

GROUPE DE TRAVAIL : " MATHEMATIQUE AU LYCEE "

I.R.E.M DE BESANCON

Responsable : Christine MACCHIONI 1993-1994 et 1994-1995

Les objectifs de travail du groupe Lycée de l'I.R.E.M :

L'une des missions essentielles que s'est assigné ce groupe de travail a été de conduire des travaux contribuant à alimenter un stage de formation sur l'enseignement des mathématiques en 1ère ES, proposé par l'I.R.E.M en direction des professeurs de mathématiques des Lycées de l'académie de Besançon.

Les activités du groupe ont concerné les points suivants :

- *Les nouveaux programmes de 1ère ES, en particulier :*

. Les progressions possibles.
. L'articulation enseignement commun et enseignement optionnel.
. La construction de séquences d'enseignement dans les domaines de l'information chiffrée, des statistiques à deux variables, des approximations affines et de l'introduction à la dérivation.
. L'utilisation de l'informatique.
. L'enseignement des probabilités en 1ère ES.

- *La liaison terminales scientifiques et classes post-baccalauréat :*

. Prise de connaisance des travaux et démarches exigés en début d'année en classe préparatoire.
. Comparaison des compétences exigibles en fin d'année de terminale scientifique et celles exigées en début de DEUG, en particulier en analyse.
. Contruction de tests destinés à évaluer les acquis des élèves arrivant en DEUG.

Cette brochure est le fruit du travail réalisé pour et pendant le stage " L'enseignement des MATHEMATIQUES EN 1ère ES 93 TCA 30 307 N " organisé par l'I.R.E.M de Besançon, complétée et aménagée de séquences d'enseignement expérimentées en 93-94 et en 94-95.

Ce travail a été réalisé grâce au soutien financier de la MAFPEN de Besançon, la D.L.C du Ministère de l'Education Nationale ainsi que de la Direction Régionale de l'Agriculture et des Forêts de Franche-Comté.

Composition du groupe Lycée :

Gérald ANSELME	Agrégé	Lycée Belin	Vesoul
François COUTURIER	Certifié	Lycée Ledoux	Besançon
Jean-Pierre FORNALLAZ	Agrégé	Lycée Cournot	Gray
Jean-Paul GOVIN	Agrégé	Lycée Marmier	Pontarlier
Jean-Pierre GRANGE	Certifié	Lycée Pergaud	Besançon
Pierre GSELL	Certifié	Lycée Courbet	Belfort
Michel HENRY	Agrégé	Université	Besançon
Christine MACCHIONI	Certifiée	Lycée Marmier	Pontarlier
Michel MAGNENET	Agrégé	Lycée V-Hugo	Besançon
Odile RAVAUX	Certifiée	Lycée Agricole	Dannemarie
Colette VUILLEMIN	Certifiée	Lycée Marmier	Pontarlier

Participants au stage :

AUBERT Bernadette
BERGOUGNOUX Françoise
CUISENIER Ghislaine
DUFLOT Eliane
FRAPPIN Dominique
GAVOILLE Marie-Hélène
GILLOT Agnès
GRILLOT Colombe
GSELL Catherine
MAILLOT Jeanine
MALASSINE Michèle
MERCIER Line
MOORE Claude
MULLER Aline
PARCOLLET FERMAUX Marie
RICHARD Geneviève
TAMI Jean-Pierre
VENDRELY Michel

Aide à la réalisation technique : François COUTURIER

PLAN DU DOCUMENT

<table>
<tr><th><u>Thème</u> :
ALGEBRE</th><th>Première ES</th><th>Terminale ES</th></tr>
<tr><td>partie

obligatoire</td><td><u>ENTRETIEN DES CONNAISSANCES ANTERIEURES</u>

Systèmes d'équations linéaires à 2 ou 3 inconnues :
sur des exemples, mise en oeuvre de méthodes de résolution.

Etude graphique de systèmes d'équations ou inéquations à 2 inconnues :
programmation linéaire non exigible

<u>EQUATION DU SECOND DEGRE</u>

Formules générales admises
Factorisation d'un trinôme
Parabole associée : position par rapport à l'axe des abscisses

Inéquations du second degré :

- uniquement en liaison avec la représentation graphique

- règle du signe du trinôme hors programme</td><td>Mobiliser et compléter les capacités acquises en première.

Résolution de problèmes en étudiant les différentes phases du traitement.</td></tr>
<tr><td>option

ou

spécialité</td><td>Interprétation géométrique d'un système de 3 équations à 3 inconnues :
à chaque équation est associé un plan
(cf thème : géométrie)

Résolution et interprétation géométrique simultanées de quelques systèmes 3×3 :

problèmes de l'existence et du nombre des solutions.

Forme canonique d'un trinôme et factorisation d'un polynôme par $(x - a)$:
dans le cadre des compléments sur les fonctions en analyse
(cf thème : fonctions)</td><td>Mise en oeuvre de méthodes pour résoudre des systèmes linéaires : méthodes de Gauss, combinaisons linéaires.

Exemples d'études numérique et graphique de problèmes de programmation linéaire :

- variable d'origine économique et sociale.

- optimisation d'une fonction linéaire : $(x, y) \longmapsto ax + by$ avec contraintes du 1er degré.</td></tr>
</table>

Thème : FONCTION	**Première ES**	**Terminale ES**
partie obligatoire	des représentations graphiques pour : - illustrer - apprendre de l'analyse <u>Comportement global d'une fonction.</u> - programmer f (x) - expliquer : f(x + h); f(x) + h; hf (x); $\lvert f\rvert$ f + g, f g, f ≤ g , f ≥ O - comparaison de graphiques de fonctions simples - exemples : $f(x) = ax^2 + bx + c$ forme canonique, graphique - équations, inéquations du 2° degré <u>Comportement local d'une fonction</u> - ensemble de définition, restriction - limite en 0, en ∞ de fonctions usuelles notion de droites asymptotes - sens de variation, nombre dérivé, tangente, approximation affine - fonctions dérivées, règles,x^n, $\sqrt{x}$ - sens de variation et dérivées - Théorème des valeurs intermédiaires (admis) , extremum d'une fonction	Notation : g o f - dérivée et sens de variation - $\forall$ d ∈ [f (a) ; f(b)], f(x) = d a une solution - lecture graphique : f(x) = d, f(x) < d - énoncés usuels sur les limites opérations algébriques, comparaison - limite d'une fonction composée - dérivation et composition u^n, ln u, exp u - primitives - ln, exp, $x \longmapsto x^n$, $x \longmapsto x^{1/n}$ croissance comparée de ces fonctions - dérivée logarithmique - calcul intégral, propriétés inégalité de la moyenne, aire
option ou spécialité	<u>Compléter et approfondir</u> - fonctions périodiques sinus, cosinus dérivée de sinus, cosinus. - polynôme : factorisation par (x - a) - polynôme 2° degré : forme canonique factorisation (cf thème : algèbre) équation inéquation - parité - g o f - fonction dérivée de $x \longmapsto f(ax + b)$	

Thème : SUITES	**Première ES**	**Terminale ES**
partie obligatoire	- suites arithmétiques - suites géométriques de raison positive - expression de Un , lim k^n (k>0) - somme des n premiers termes - sens de variation d'une suite - représentation graphique	
option ou spécialité	- divers modes de définition d'une suite $u_n = f(n)$, $u_{n+1} = f(u_n)$ - suites croissantes, décroissantes - langage des limites - énoncés usuels sur les limites : comparaison, opérations algébriques exemples d'utilisation de suites approximation : aire, volume, solution d'une équation introduction du raisonnement par récurrence	- comportement global d'une suite suites monotones, bornées, périodiques - énoncés usuels sur les limites somme, produit, quotient, comparaison - image d'une suite par une fonction $v_n = f(u_n)$ Exemples d'emploi de suites

Thème : Statistique Probabilité	**Première ES**	**Terminale ES**
partie obligatoire	STATISTIQUES DESCRIPTIVES Etude par les élèves d'au moins une série statistique simple menée jusqu'à son terme : l'élaboration d'une réponse à une question posée au départ **Séries à une variable :** * Vocabulaire : population, individus, types de caractères, effectifs, fréquences, mode * Regroupement en classes * Représentations graphiques * Paramètres : médiane, moyenne, variance, écart-type **Séries à deux variables :** * Vocabulaire spécifique des tableaux : cases, lignes, colonnes. Notation n_{ij} * Tableau d'effectifs. Répartition marginale. Tableaux des fréquences. Fréquence marginale. Tableaux des fréquences par rapport aux effectifs partiels * Sous et sur-représentation : Tableau théorique, lien avec la proportionnalité Observation par comparaison ou par construction d'un tableau des écarts. PROBABILITES Lien avec les statistiques par les fréquences * Introduction : événements, événements élémentaires. Probabilités d'un événement. Evénement incompatibles, contraires, "A et B", "A ou B" * Prolongement : questions de probabilités issues d'un tableau à deux caractères d'une même population. Cas où une partie de l'information est connue	Entraînement à : lecture de données, choix des résumés, exécution des calculs, présentation des résultats, contrôle et analyse critique de ces résultats. * Croisement de deux caractères d'une population nuages de points, point moyen Ajustement affine par moindres carrés, droites de régression * Coefficient de corrélation linéaire * Variable aléatoire prenant un nombre fini de valeurs : loi de probabilités associée, fonctions de répartition, espérance mathématique, variance, écart-type * Probabilité conditionnelle notation : p (A/B) ou $p_B(A)$ relation $p(A \cap B) = p(A/B)p(B)$ indépendance de deux événements
option ou spécialité		* combinatoire, dénombrements : arrangements, permutations, parties d'un ensemble fini, combinaisons, triangle de Pascal * Schéma de Bernoulli, loi binômiale : variable de Bernoulli : loi, espérance, schéma. loi binômiale, espérance * Loi des grands nombres : mise en évidence expérimentale dans le cas du schéma de Bernoulli.

<table>
<tr><th><u>Thème</u> :
GEOMETRIE
plane
espace</th><th>Première ES</th><th>Terminale ES</th></tr>
<tr><td>partie

obligatoire</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>option

ou

spécialité</td><td><u>Pourquoi ?</u>

- donner un support de référence à certaines notions d'algèbre linéaire
- perception de l'espace : représentation de fonctions de 2 variables

<u>Géométrie plane</u>

- barycentre de 2 points pondérés, de 3 ou 4 ; associativité
- produit scalaire de 2 vecteurs propriétés

<u>Géométrie de l'espace</u>

- étude de configurations simples
- calcul vectoriel,
- repérage dans l'espace
- produit scalaire
- équation d'un plan
- résolution de systèmes 3×3 interprétation géométrique (cf thème : algèbre)
- lecture de graphique à 3 dimensions</td><td></td></tr>
</table>

UN CADRE POUR UNE PROGRESSION

CHRONOLOGIE	LE PROGRAMME	DUREE
	1 - L'information chiffrée	
	A - Les pourcentages	
	B - Les suites	
	C - Les moyennes	
	D - Statistiques descriptives	
	E - Probabilités	
	2 - Algèbre - Analyse	
	A - Comportement global d'une fonction	
	B - Algèbre : second degré systèmes	
	C - Comportement local d'une fonction	
	D - Sens de variation	
	E - Les approximations	
	option	
	1/ Géométrie plane	
	2/ Géométrie espace	
	3/ Analyse	
	A - Compléments sur les fonctions	
	B - Suites numériques	

Une première progression

Chapitres et ordre chronologique	Durée envisagée
1. Pourcentages	≈ 3 semaines
2. Moyennes	≈ 2 semaines
3. Suites	≈ 3 semaines
4. Comportement global d'une fonction : généralités, composées de fonctions usuelles, applications graphiques	≈4 semaines
5. Algèbre : second degré	≈ 2 semaines
6. Fonctions : sens de variation, sens de variation et opérations.	≈ 2 semaines
7. Fonctions : approximations, dérivation, dérivation et sens de variation.	≈ 6 semaines
8. Fonctions: limites, asymptotes à une représentation graphique.	≈ 3 semaines
9. Statistiques à une variable	≈ 1 semaine
10. Probabilités	≈ 2 semaines 1/2
11. Algèbre : systèmes	≈ 2 semaines
12. Statistiques à deux variables	≈ 1 semaine

COMMENTAIRES.

Remarque : Ces commentaires sont le fruit d'une expérience personnelle. Ils n'engagent donc que leur auteur. Il est possible que les autres professeurs ayant travaillé en première E.S. ne partagent pas les impressions ci-dessous.

1) Cette progression est celle qui a été suivie pour traiter la partie obligatoire du programme. Chaque élève disposait de 3 heures de maths par semaine en classe entière, et d'une heure de module par quinzaine.
Si l'on compare ce programme de la partie obligatoire avec l'ancien programme de première B pour lequel chaque élève bénéficiait de 5 heures hebdomadaires, on s'aperçoit immédiatement qu'il est difficile de le traiter in-extenso de manière satisfaisante.
Dans mon cas personnel, de nombreuses heures de mathématique furent en outre perdues aux cours de l'année, à cause notamment de journées de grève lycéennes. Il en résulta une nécessité de « presser » un peu le rythme à partir d'avril, ce qui n'est jamais sans conséquence pour les élèves, en particulier pour ceux d'une première E.S. Cette impression de devoir passer trop vite, de manquer de temps pour asseoir les connaissances, est assez désagréable pour tout le monde. J'aurais souhaité disposer de plus de temps pour traiter la partie « fonctions ». Cela aurait été nécessaire pour une bonne partie de ma classe. Comme avec le recul je ne vois pas dans quelle partie du programme j'aurais pu dégager du temps, il me semble que l'horaire imparti est vraiment trop juste. Que dire dans ces conditions des collègues dont les élèves ne bénéficiaient pas de l'heure quinzaine de module et qui dûrent se contenter de trois heures hebdomadaires par élève pour tout traiter ?

2) Quelques remarques sur la chronologie suivie.
Compte tenu de la spécificité de la série E.S., dans le but aussi de motiver les élèves grâce à leur côté attractif, j'avais décidé de commencer par certains chapitres de la partie « information chiffrée » du programme.
La plupart des résultats nécessaires à l'étude du chapitre « second degré » sont obtenus au cours du chapitre précédent, qui permet de tracer n'importe quelle parabole à partir de la forme canonique du trinôme. Cela m'a permis de gagner du temps sur cette partie.
De la même manière, le fait de traiter les approximations classiques avant la dérivation, puis de profiter des activités faites sur les approximations pour introduire le nombre dérivé d'une fonction n'est pas une perte de temps, bien au contraire.
Avec du recul, il me semble que je conserverais dans ses grandes lignes cette progression si l'expérience devait se renouveler. Le seul changement éventuel concernerait la place du chapitre sur les suites. Il est peut-être préférable de le repousser vers la fin de l'année, afin d'aborder un peu plus rapidement le travail sur les fonctions.

UNE DEUXIÈME PROGRESSION

Jusqu'aux vacances de **Toussaint**

partie obligatoire	partie optionnelle
- Les pourcentages (2s) - Comportement global d'une fonction (2,5s) - Les moyennes (2s)	- Géométrie plane: Barycentre (3s) - Parité, composition des fonctions, translation de courbes, symétrie (2,5s)

De **Toussaint** aux vacances de **Noël**

partie obligatoire	partie optionnelle
- Algèbre: second degré (1,25s) - Comportement local d'une fonction (2s) - Sens de variation (sans la notion de dérivée) (1,75h)	- Fonction polynôme (2s) - Géométrie plane: Produit scalaire (3s) - Fonctions périodiques et circulaires (1s)

De **Noël** aux vacances de **février**

partie obligatoire	partie optionnelle
- Sens de variation (dérivée) (5s) - Les suites (1s)	- Somme d'une fonction affine et d'une fonction circulaire; étude comparée des représentations graphiques de fonctions telles que $x \rightarrow \sin(2x)$ et $x \rightarrow 2\sin(x)$ (1s) - Equation de la tangente à une courbe (1s) - Dérivée de $x \rightarrow f(ax+b)$ (1s) - Géométrie dans l'espace (jusqu'à l'extension du produit scalaire) (3,5s)

Des vacances de **février** aux vacances de **printemps**

partie obligatoire	partie optionnelle
- Les suites (fin)(1s) - Statistiques descriptives (1,5s) - Probabilités (3s)	- Suites numériques (3,5s) - Géométrie dans l'espace: extension du produit scalaire (1,5s)

Après les vacances de **printemps**

partie obligatoire	partie optionnelle
- Algèbre: Systèmes et programmation linéaire (1,5s) - Les approximations (2s)	- Recherche de l'équation d'une parabole passant par trois points (0,5s) - Géométrie dans l'espace: vecteur normal à un plan et ce qui suit (3s)

Il convient de rajouter à ce planning, les devoirs en classe et leur correction.
Le lycée étant centre d'examen, les cours s'arrêtent généralement vers le 10 juin. Le planning ci-dessus tient compte de ce fait.
Lorsque des notions de même nature sont étudiées dans la partie obligatoire et dans la partie optionnelle, nous avons essayé de les traiter en parallèle.

POURCENTAGES EN PREMIERE ES.

a) Présentation.

Cette séquence a été la première de l'année scolaire. Elle permet en effet aux élèves d'être immédiatement en contact avec des données chiffrées et les plonge d'emblée dans la spécificité de la voie qu'ils ont choisie. Cet aspect concret et utile des notions abordées, lié à l'attrait de la nouveauté (relative), semble capable de générer un surcroît de motivation dans la classe. La séquence a duré environ 11 heures.

Elle a été précédée d'un test préliminaire pour repérer les préacquis des élèves sur les notions à enseigner. En outre, la correction en commun et immédiate de ce test a permis de leur préciser les objectifs des travaux à venir.
A titre indicatif, dans la classe de 29 élèves observée :

* Seuls 5 élèves avaient au moins une erreur dans la partie I,
* 15 n'avaient pas su répondre à IV (coefficient multiplicateur),
* 16 n'avaient pas su répondre à VI.

Quant à la question V, qui était relativement bien réussie, la suite de la séquence montra que cette réussite était davantage due à une mémorisation « réflexe » de mises en garde passées qu'à une réelle compréhension de la notion !

Le corps de la séquence est constitué d'exercices permettant de balayer progressivement l'ensemble des contenus à aborder. La plupart de ces exercices sont issus des différents manuels scolaires. Par un choix délibéré, on a privilégié des énoncés provenant d'extraits d'articles de presse, de recueils de données statistiques, pour entraîner l'élève à la maîtrise de ce type d'information et pour tenter aussi de développer son esprit critique face à certains articles dont les données sont incomplètes, voire parfois contradictoires. Les deux exercices traités en module, en particulier celui tiré d'un article du Monde, sont très intéressants de ce point de vue. Ce choix pose un problème concernant l'enseignement des contenus. On rencontre en effet les notions mathématiques à travers un « filtre » qui impose un effort préalable de compréhension à l'élève, avant même que puisse débuter le traitement strictement mathématique des données. Chaque article a été systématiquement expliqué en commun et schématisé pour faciliter sa compréhension : diagrammes de Venn pour les pourcentages instantanés, schémas fléchés pour traduire les pourcentages d'évolution.

Les exercices ont été suivis de petits résumés au caractère très (trop ?) formel. On peut y voir un clin d'oeil aux commentaires qui figuraient dans le libellé du programme. Plus sérieusement, il faut y voir un refus de renoncer totalement à passer à l'abstraction pour énoncer une propriété...

b) Quelques commentaires.

Les différentes activités proposées ont été particulièrement motivantes pour les élèves et c'est un point très positif.

Les principales difficultés rencontrées tiennent à la difficulté de compréhension des énoncés, avant celles dues au concept lui-même. Une fois le décryptage effectué, une fois les données schématisées, le traitement demandé est souvent bien réussi. Mais certains élèves laissés seuls face à l'énoncé, lorsque celui-ci est complexe, (voir par exemple l'article de la page 1 « Renault fait mieux que Peugeot, ou l'article extrait du Monde sur l'évolution du chômage traité en module) éprouvent les pires difficultés à identifier l'ensemble de référence attaché à un pourcentage. Ces difficultés se retrouvent également au moment de la rédaction des réponses. C'est ainsi que dans de nombreuses copies du devoir en temps libre, la réponse exacte « 27 % du stock est constitué d'appareils provenant de B et n'ayant pas de défaut » fut rédigée sous la forme « 27 % des appareils provenant de B n'ont pas de défaut ».

De nombreux élèves éprouvent le besoin de se raccrocher à des variations absolues pour traiter un énoncé dans lequel ne figurent que des renseignements sur les variations relatives. Par exemple, certains abordent l'article sur la crise du cinéma en supposant qu'il y avait 100 spectateurs en 1 988. D'autres, souvent les mêmes, traitent l'exercice sur la dévaluation du peso en supposant qu'un dollar valait un peso avant cette dévaluation. Certains aspects de la proportionnalité, et en particulier celui de fonction linéaire sous-jacente, semblent donc encore mal dominés.

On retrouve ce problème dès lors qu'on s'intéresse aux coefficients multiplicateurs. Au cours des épreuves EVAPM1 de 1 993 était posée la question suivante : « Après une augmentation de 40 %, un objet vaut 84 F. Quel était son prix avant cette augmentation ? » Selon les séries de première, le pourcentage des élèves introduisant directement le coefficient 1,4 varia de 17 % à 21 %. Au cours de la séquence, les élèves manifestèrent encore beaucoup de réticence à utiliser systématiquement ces coefficients multiplicateurs. La répétition des exercices et l'insistance de l'enseignant sur les avantages de leur emploi semblent tout de même provoquer un déclic chez certains. Il ne fait pas de doute qu'un exercice analogue au IV du test préliminaire aurait en fin de séquence connu un taux de réussite très élevé. Mais quelques semaines plus tard, lorsqu'on rencontra en étudiant les suites géométriques quelques problèmes d'intérêts composés, ou d'évolution démographique, presque tous repassèrent par l'étape $u_{n+1} = u_n + \frac{6}{100} u_n$, plutôt que d'écrire directement $u_{n+1} = 1{,}06\ u_n$!!!

Le parti pris du devoir surveillé était de faire travailler les élèves, dans la continuité de la séquence, à partir d'informations trouvées dans la presse. Deux des exercices étaient adaptés d'articles d'actualité parus dans la semaine précédent le devoir. Ce parti pris se révéla très discutable, malgré un commentaire en commun des articles avant le début de l'épreuve. Pour certains élèves, les énoncés choisis étaient trop dénués de signification concrète pour qu'ils puissent les comprendre et tester leurs acquis dans un tel contexte fut impossible. Les notes s'échelonnèrent de 1 à 19, avec une moyenne de 9 et surtout un écart-type dépassant 5 !! S'il peut sembler souhaitable de choisir des exercices entraînant l'élève à la maîtrise des informations chiffrées dont la presse use (et abuse ?) souvent, il est sans doute préférable de s'en tenir dans le cadre de l'évaluation à un contexte plus strictement mathématique.

POURCENTAGES : TEST PRELIMINAIRE

I)a) 20 % des élèves d'une classe de 30 élèves sont internes. Calculer le nombre d'internes dans cette classe

b) Dans un magazine de 180 pages, il y a 50 pages de publicité. Quelle est, en pourcentage, la part de publicité dans ce magazine ?

c) Le lendemain d'une élection, on peut lire dans un quotidien régional : « 1 695 personnes ont pris part au vote, c'est à dire 75 % des inscrits sur les listes électorales. » Combien y-avait-il d'inscrits ?

II) Répondre par vrai ou faux en expliquant: Il est possible que la population d'une ville :

1) augmente de 105 % en 30 ans

2) diminue de 120 % en 50 ans.

III) 44 % du territoire de la Grèce est boisé. En France, environ 148 500 km^2 sont boisés pour une superficie totale de 550 000 km^2 . Ces données permettent elles de conclure que la superficie boisée est plus importante en Grèce qu'en France ? Expliquer.

IV) Compléter : On veut augmenter le prix d'un objet de 8 %. Pour calculer le nouveau prix de cet objet, il suffit de multiplier le prix initial par ....

V) Répondre par vrai ou faux en expliquant :

a) Durant les six premiers mois de 1 992, le nombre de lecteurs d'un quotidien a diminué de 8 %. Durant les six derniers mois de 1 992, ce nombre a encore diminué de 5 %. On peut donc en conclure que le nombre de lecteurs a diminué de 13 % durant l'année 1 992.

b) Le prix d'un produit augmente de 10 %, puis diminue de 10 %. Cette hausse et cette baisse se compensent.

VI) 30 % des élèves d'un lycée sont en terminale. 10 % des élèves de terminale sont internes. Quel pourcentage des élèves du lycée les internes de terminale représentent-ils ?

DIFFERENTS TYPES DE POURCENTAGES

Dans un marché qui a stagné en août

RENAULT FAIT MIEUX QUE PEUGEOT

Avec une croissance limitée à 1 % au mois d'août, la stagnation du marché automobile français se confirme. Depuis le début de l'année, la progression des ventes reste cantonnée à un modeste 0,17 %. Sur les 152 364 véhicules commercialisés le mois dernier , Renault s'est taillé la part du lion. En hausse de 20 % par rapport au mois d'août 91, les ventes de la Régie, grâce à la Clio et à la R19 notamment, ont représenté 31,4 % du marché. Par contraste, celles du groupe PSA, en baisse sensible, ne dépassent pas 28,1 % du marché en dépit des résultats honorables de Citroën. (Le Monde du 4/9/92)

1° a) Quel est le nombre de voitures vendues par Renault en août 92 ?
b) En déduire le nombre de voitures vendues par Renault en août 91.

2° Quel est le nombre de voitures vendues par le groupe PSA en août 92 ?

3° a) Combien de voitures ont été vendues en France en août 91 ?
b) En déduire la part, en pourcentage, de Renault en août 91.

Les deux types de pourcentages les plus souvent rencontrés sont d'une part les « pourcentages instantanés » et d'autre part les « pourcentages d'évolution ».

A) Pourcentages instantanés

Etant donnés un ensemble de référence E contenant N éléments et une partie F de cet ensemble contenant n éléments , on peut exprimer sous forme de pourcentage la proportion d'éléments de F parmi les éléments de E. On calcule pour ceci le quotient $x = n/N$. On obtient ainsi la valeur décimale x du pourcentage d'éléments de F parmi ceux de E. Le taux t de ce pourcentage est égal à 100x. Un pourcentage de ce type est dit pourcentage instantané.

Remarque : un pourcentage instantané est nécessairement compris entre ....

B) Pourcentages d'évolution

Ce type de pourcentage mesure les variations d'une grandeur.
Considérons une variable numérique positive X passant de la valeur x_0 à la date d_0 à la valeur x_1 à la date d_1. Le taux t du pourcentage d'évolution de la variable X entre la date d_0 et la date d_1 vérifie : $t = 100 \times \dfrac{x_1 - x_0}{x_0}$

Remarque : le taux t d'un pourcentage d'évolution est un nombre de l'intervalle ....

<u>Exercice</u> : identifier le type de chacun des pourcentages apparaissant dans l'article précédent, préciser l'ensemble de référence dans le cas de pourcentages instantanés, préciser la variable numérique et ses variations dans le cas de pourcentages d'évolution. Faire des schémas.

POURCENTAGES D'EVOLUTION

1°) Exercices

a) Durant la dernière décennie, la dette publique a beaucoup augmenté en France. Cette dette est en effet passée de 418 milliards de francs en 1 980 à 1 750 milliards de francs en 1 990. Calculer le pourcentage d'augmentation durant cette décennie.

b) La production nationale d'électricité par des centrales thermiques a diminué de 61,9 % entre 1 980 et 1 990. Cette production n'était plus que de 45,3 milliards de kWh en 1 990. De combien était cette production en 1 980 ?

2°) Les coefficients multiplicateurs.

exemple : La tour Eiffel a une hauteur de 320 m, qui peut diminuer de 0,05 % par grand froid. Par quel nombre faut-il multiplier la hauteur "normale" de la tour pour obtenir sa hauteur par grand froid ?

Cas général : on considère un grandeur positive qui subit une variation de t % (t positif dans le cas d'une hausse, t négatif dans le cas d'une baisse). On désigne par x_0 la valeur initiale de cette grandeur et par x_1 sa valeur finale. Démontrer que $x_1 = (1 + \frac{t}{100})\, x_0$ Ce résultat essentiel permet la résolution de nombreux exercices.

A) exercice 1 : La crise du cinéma

Le cinéma français connaît depuis de nombreuses années un marasme persistant. Le nombre de spectateurs, qui a chuté à partir de 1 985, a diminué encore de 2,9 % en 1 989 par rapport à 1 988. Mais l'espoir revient dans la profession, puisque le nombre de spectateurs augmente de 2,5 % en 1 990 par rapport à 1 989.

a) Par quel nombre faut-il multiplier le nombre de spectateurs en 1 988 :
- -- pour obtenir le nombre de spectateurs en 1 989 ?
- -- pour obtenir le nombre de spectateurs en 1 990 ?

b) Exprimer par un pourcentage la variation du nombre de spectateurs entre 1 988 et 1 990.

B) Exercice 2 : un paradoxe en agriculture

Imaginons une année exceptionnelle de récolte. Un agriculteur a augmenté sa récolte d'une certaine denrée de 40 % par rapport à une année normale. Mais l'abondance de cette denrée récoltée sur le marché provoque un effondrement des prix : ceux-ci baissent de 30 %. La recette de l'agriculteur va-t-elle augmenter ou diminuer ?

C) Exercice 3 :

Si l'inflation dans un pays a été de 4 % en 1 990, de 3,5 % en 1 991 et de 3 % en 1 992, de quel pourcentage les prix ont-ils augmenté en moyenne entre le début de 1 990 et la fin de 1 992 ?

COMPARAISON DE POURCENTAGES SUR DES ENSEMBLES DE REFERENCE DISTINCTS

Le tableau ci-dessous donne, en milliers d'individus, le nombre d'actifs parmi les hommes et les femmes, par tranche d'âge en 1 990.

ACTIFS	FEMMES	HOMMES
moins de 25 ans	1 467	1 792
de 25 à 55 ans	8 612	11 081
plus de 55 ans	981	1 328
total	11 060	14 201

1° Les 25 à 55 ans.

Comparez les pourcentages de femmes de 25 à 55 ans parmi les femmes actives et d'hommes de 25 à 55 ans parmi les hommes actifs. Sont-ils dans le même ordre que les données absolues ?

2° les moins de 25 ans et les plus de 55 ans

Faites le même travail qu'en 1° pour les « moins de 25 ans », puis pour les « plus de 55 ans »

Conclusion :

Lorsque les pourcentages sont pris sur deux ensembles de référence distincts, l'ordre des pourcentages n'est pas nécessairement le même que celui des données absolues.

ADDITION DE POURCENTAGES

Un sondage réalisé auprès de 150 clients d'un supermarché afin de connaître les goûts de ceux-ci concernant deux produits A et B a donné les résultats suivants. Parmi les 150 personnes interrogées (toutes ont répondu), 90 apprécient le produit A, 70 apprécient le produit B, 30 apprécient les deux produits.

1°) Illustrez la situation par un graphique.

2°) Quel pourcentage des personnes interrogées représentent les personnes :

a) appréciant le produit A ?
b) appréciant le produit B ?
c) appréciant au moins l'un des deux produits ?
d) n'appréciant aucun des deux produits ?
e) appréciant le produit A ou n'appréciant ni A ni B ?

3°) Le pourcentage obtenu en c) est-il la somme de ceux obtenus en a) et b) ?
Le pourcentage obtenu en e) est-il la somme de ceux obtenus en a) et d) ?

4°) Comment expliquez-vous les résultats de 3°) ? Etant données deux parties E et F d'un même ensemble de référence G, dans quel cas le pourcentage de la réunion de E et F relatif à G est il égal à la somme des pourcentages de E et de F relatifs à G ? Dans quel cas n'est-il pas égal à cette somme ?

POURCENTAGES DE POURCENTAGES

I. Exercice préliminaire.

Dans une classe de Première, 62,5 % des élèves étudient l'anglais et parmi ceux-ci, 20 % étudient aussi l'espagnol.
Soit y_0 le nombre d'élèves de la classe, y_1 le nombre d'élèves étudiant l'anglais, y_2 le nombre d'élèves étudiant à la fois l'anglais et l'espagnol.
Exprimez y_1 en fonction de y_0 , puis y_2 en fonction de y_1. En déduire y_2 en fonction de y_0.
Quel est le pourcentage des élèves de la classe étudiant à la fois l'anglais et l'espagnol et quelle relation existe-t-il entre les expressions décimales des trois pourcentages ?

A RETENIR :

Soit E un ensemble de référence et soit A et B deux parties de E telles que A soit incluse dans B : $A \subset B$.
Soit x_1 l'expression décimale du pourcentage de A relativement à B.
Soit x_2 l'expression décimale du pourcentage de B relativement à E.
Soit x_3 l'expression décimale du pourcentage de A relativement à E
Ces trois nombres vérifient : $x_3 = x_1 x_2$

II Exemple

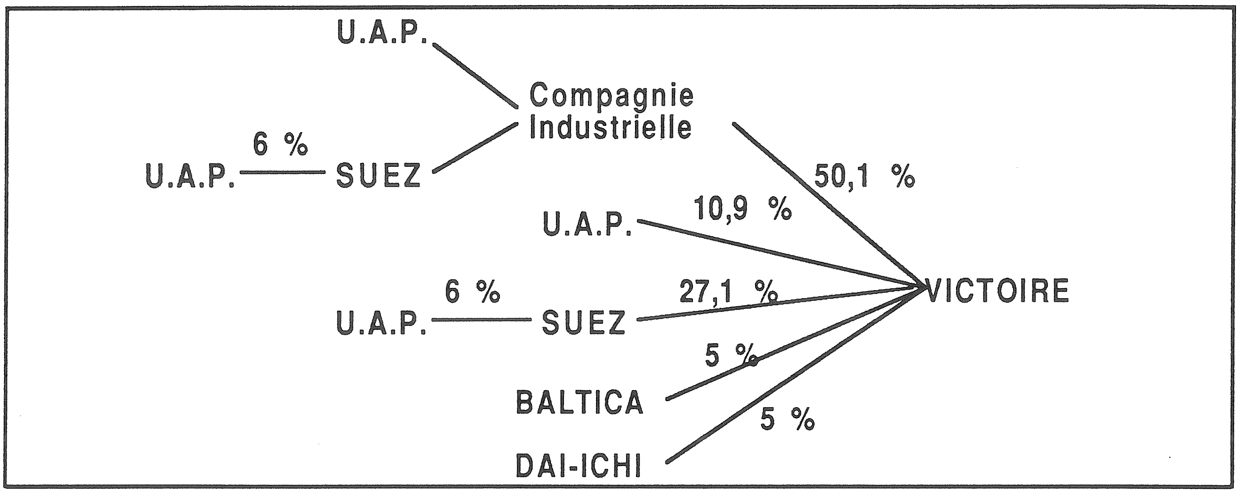
Lors du référendum du 20 septembre 1 992, les résultats pour la ville de Paris ont été les suivants :
Inscrits : 1 105 076. Abstentions : 31,86 % des inscrits. Blancs ou nuls : 1,97 % des votants.
Oui : 62,51 % des exprimés Non : 37,49 % des exprimés

1°) Quel était le nombre de votants ? Combien de bulletins blancs ou nuls ont été décomptés? Quel était le pourcentage des suffrages exprimés par rapport aux inscrits ?

2°) Déterminez les pourcentages de « oui » et de « non » par rapport aux inscrits, puis par rapport aux votants.

III Organigrammes de Sociétés.

L'organigramme simplifié suivant est celui du groupe Victoire (société d'assurances) au 1er septembre 1 992.



Faites le bilan de la participation en pourcentage de l'U.A.P. dans le capital de Victoire.

Faites de même pour la compagnie de SUEZ.

D'autre part, Victoire possède 78,8 % de Vinci qui possède 75 % de Colonia Konzern. Quelle est la part en pourcentage de l'U.A.P. dans le capital de Colonia Konzern ?

INDICES

Le tableau ci-dessous donne la production de colza en France de 1 981 à 1 990, en milliers de tonnes.

Années	1 981	1 982	1 983	1 984	1 985	1 986	1 987	1 988	1 989	1 990
Production	990	1 147	953	1 353	1 400	1 046	2 655	2 340	1 803	2 015

Ce tableau permet facilement de voir les variations en données absolues de la production, mais ne permet pas de connaître rapidement les variations relatives, c'est à dire les pourcentages d'évolution de cette production.

D'où l'idée de dresser un autre tableau qui aidera à se faire rapidement une idée nette de ces variations relatives.

Pour cela, on choisit une année de référence, par exemple 1 981, et on ramène la production de cette année-là à 100.

On dit qu'on affecte l'indice 100 à la production de 1 981. Les indices correspondants aux autres années sont ensuite calculés de telle sorte que les proportions soient respectées.

Par exemple, l'indice correspondant à l'année 1 982 sera le nombre I tel que la suite de nombres 100, I, soit proportionnelle à la suite 990, 1 147.

Un indice étant un nombre entier, on obtient I = 116.

On dit qu'on affecte l'indice 116 à l'année 1 982 avec base 100 en 1 981.

Exercice :

1°) En prenant l'année 1 981 comme année de référence (base 100) dresser le tableau des indices correspondant à la production de colza entre 1 981 et 1 990.

L'intérêt de ce tableau est que le calcul du pourcentage d'évolution entre une année donnée et l'année de référence est immédiat. Pourquoi ?

2°)Indiquez les pourcentages d'évolution de la production entre les années:
a) 1 981 et 1 983 b) 1 981 et 1 987

3°) Quel devrait être l'indice de la production en 1 992 pour pouvoir affirmer que la production a triplé entre 1 981 et 1 992 ? Dans un tel cas, quel serait le pourcentage de hausse entre 1 981 et 1 992 ?

4°) Calculez le pourcentage d'évolution de la production de 1 983 à 1 990.

Exercice : La fréquentation des salles de cinéma dans quelques pays.

Nombre de spectateurs en millions	1 960	1 970	1 980	1 990
Allemagne (RFA)	610	167	144	102
France	355	184	175	122
Italie	745	525	242	90
Royaume-Uni	501	193	102	89
Etats-Unis	1 305	921	1 022	1 060
Japon	1 014	255	164	146

1°) En choisissant pour base 100 l'année 1 970, calculez pour chaque pays les indices de fréquentation pour les années 1 960, 1 980 et 1 990.

2°)Pour la France, indiquez, en pourcentage, le taux d'évolution de 1 960 à 1 970, de 1 970 à 1 980 et de 1 980 à 1 990.

EXERCICES TRAITES EN MODULE

A) FRANCE-SOIR DU 31 MAI 1 990 titre :

« 50 000 clandestins chinois en Ile de France » et écrit que « sur les 217 000 immigrés clandestins que compte l'Ile de France, 10,82 % sont asiatiques ».
a) Que pensez-vous de la précision des statistiques sur les immigrés clandestins ? Que dire de la précision du pourcentage indiqué ?
b) Vérifiez la cohérence entre les données absolues et les données relatives fournies dans cet article.
c) Refaire les calculs
1°) en supposant que les deux données exactes sont 50 000 et 217 000.
2°) en supposant que les deux données exactes sont 50 000 et 10,82 %
3°) en supposant que les deux données exactes sont 10,82 % et 217 000.

(Travail collectif pour a) et individuel ensuite.)

B) Extrait d'un article du Monde du 20 août 1982.

Certes, si on observe les chiffres de l'emploi de mai 1982, on constate que le gouvernement n'a pas totalement échoué puisque la progression du chômage, en données corrigées, est passée de 23,9% de mai 1980 à mai 1981 à 15,4%.
Encore faut-il reconnaître que la base de départ fausse quelque peu la comparaison en pourcentage. Ainsi, en mai 1981, on recensait 322 000 chômeurs de plus en un an, en mai 1982, 310 000. Voilà qui remet à sa juste place la décélération en pourcentage, même si cette décélération s'est poursuivie cet été.

a) Traduire cet article à l'aide de schémas.

b) Que signifie selon vous « décélération en pourcentage »?

c) Que veut dire le journaliste lorsqu'il écrit : « Encore faut-il reconnaître que la base de départ fausse quelque peu la comparaison en pourcentage » ?

d) Les variations en données absolues et celles en données relatives (pourcentages) que fournit cet article sont-elles cohérentes les unes avec les autres ?
(travail individuel sauf c)).

C) A aussi été traité en module un exercice sur les valeurs extrêmes d'un pourcentage (40 p. 30 du Transmath).

DEVOIR SURVEILLE NUMERO 1

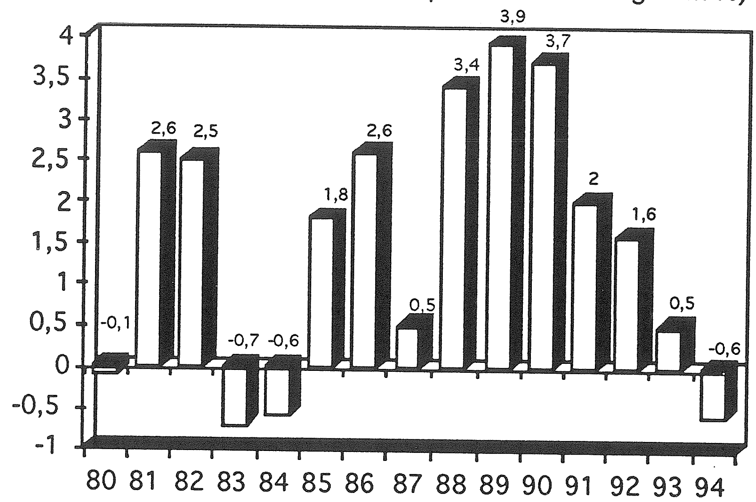
Exercice 1

Le graphique ci-contre concerne l'évolution du pouvoir d'achat moyen des ménages en France depuis 1980. On y lit par exemple que ce pouvoir d'achat a augmenté de 2,6% au cours dc l'année 1981, qu'il a baissé de 0,7% au cours de l'année 1983,etc ...

1°) Par combien faut-il multiplier le pouvoir d'achat moyen du début de l'année 1983 pour obtenir celui de la fin de l'année 1983

2°) Calculer le pourcentage d'augmentation du pouvoir d'achat moyen des ménages entre le début de l'année 1988 et la fin de l'année 1990.

EVOLUTION DU POUVOIR D'ACHAT
(pouvoir d'achat de revenu disponible des ménages en %)



3°) Si l'on prend comme base de référence (indice 100) le pouvoir d'achat moyen des ménages au début de l'année1989, quel est l'indice correspondant au pouvoir d'achat moyen des ménages à la fin de l'année 1989? 1990?

4°) Quel est le taux annuel moyen de croissance du pouvoir d'achat moyen des ménages au cours des deux années 1986 et 1987.(désigner ce taux par t, schématiser le problème.)

Exercice 2

Retrouver la donnée effacée de la première ligne et la donnée effacée de l'avant dernière ligne dans le tableau ci-dessous, après avoir vérifié que les évolutions en données brutes et en données relatives de la première colonne sont cohérentes. (Indiquer les calculs).

	Salaire mensuel perçu en F		
	8140		40000
Impôt sur le revenu 1994	0	16635	69105
TOTAL CSG POUR 1994	2736	6722	13444
Total CSG supplémentaire sur 18 mois	2730	5461	
Dont CSG supplémentaire sur 6 mois sur 1993	910	1820	
Dont CSG supplémentaire pour 1994	1820	3641	
Gain en impôt sur l'IR	0	808	
Soit un prélèvement supplémentaire de	2730	4653	
Soit un supplément de prélèvement en % sur le revenu annuel	+2,8%	+1,9%	+0,9%

Exercice 3

Dans un établissement scolaire, il y a 30% de garçons , 30% de filles sont internes. (Faire un diagramme).

1°) Quel pourcentage du nombre total d'élèves les filles internes représentent-elles?

2°) Sachant que le poucentage d'internes dans l'établissement est 27%, quel pourcentage du nombre total de garçons les garçons internes représentent-ils?

SOUS ET SUR-REPRESENTATION

L'objet de cette activité est l'apprentissage d'une technique, nouvelle dans le programme de 1ère ES.

- A partir d'un tableau d'effectifs réels portant sur deux variables, construction d'un tableau "théorique", dans l'hypothèse où les deux variables seraient indépendantes.
- Notion de sous et sur-représentation par comparaison entre le tableau réel et le tableau "théorique".

Ce point du programme appelle plusieurs remarques :

- Le tableau théorique pourrait être construit à partir de données plus larges et non à partir du tableau réel.
- Le choix des variables utilisées pour cette séquence s'est fait en raison de l'intérêt manifesté par les élèves pour des données qui les concernent directement et non pour leur pertinence dans une éventuelle interprétation.
- Les conditions d'emploi de la technique et l'interprétation des résultats dépassent largement le cadre mathématique du programme de 1ère ES.
- Cette séquence ne semble pas devoir occuper une grande place dans la progression, d'autant plus que cette notion n'apparaît pas dans le programme de terminale.

Scénario

- Les élèves disposent des tableaux de données absolues et des autres tableaux vides, qu'ils auront à remplir après exposé de la méthode.
- On leur expose sur des exemples (éventuellement au rétroprojecteur) comment remplir le tableau des fréquences et fréquences marginales et le tableau "théorique".
- On compare le tableau "théorique" et le tableau réel pour parler de sous et sur-représentation.

Répartition en données absolues des élèves de terminale d'un lycée en 1993.

	TA	TB	TC	TD	TE	TF	total
Elèves ayant plus d'un an de retard	21	18	8	21	8	73	149
Elèves ayant un an de retard	18	24	5	19	7	49	122
Elèves n'ayant pas de retard	28	24	39	22	23	26	162
total	67	66	52	62	38	148	433

Répartition en pourcentages et fréquences marginales

	TA	TB	TC	TD	TE	TF	fréquences marginales
Elèves ayant plus d'un an de retard	4,8%	4,2%	1,8%	4,8%	1,8%	16,9%	34,4%
Elèves ayant un an de retard	4,2%	5,5%	1,2%	4,4%	1,6%	11,3%	28,2%
Elèves n'ayant pas de retard	6,5%	5,5%	9,0%	5,1%	5,3%	6,0%	37,4%
Fréquences marginales	15,5%	15,2%	12,0%	14,3%	8,8%	34,2%	100,0%

Tableau théorique : Par exemple, puisque 34,2% des élèves du lycée sont en TF et 37,4% des élèves du lycée n'ont pas d'année de retard, on pourrait s'attendre, si l'orientation et le retard scolaire n'étaient pas liés, à ce que les élèves de TF n'ayant pas d'année de retard représente environ $0,342 \times 0,374 \times 100$, soit 12,8 % des élèves du lycée (pourcentage de pourcentages).

	TA	TB	TC	TD	TE	TF	fréquences marginales
Elèves ayant plus d'un an de retard	5,3%	5,2%	4,1%	4,9%	3,0%	11,8%	34,4%
Elèves ayant un an de retard	4,4%	4,3%	3,4%	4,0%	2,5%	9,6%	28,2%
Elèves n'ayant pas de retard	5,8%	5,7%	4,5%	5,4%	3,3%	12,8%	37,4%
Fréquences marginales	15,5%	15,2%	12,0%	14,3%	8,8%	34,2%	100,0%

Comparaison entre les tableaux théoriques et réels :

sous et sur-représentation.

	TA	TB	TC	TD	TE	TF
Elèves ayant plus d'un an de retard	-0,5	-1,0	-2,3	-0,1	-1,2	5,1
Elèves ayant un an de retard	-0,2	1,2	-2,2	0,4	-0,9	1,7
Elèves n'ayant pas de retard	0,7	-0,2	4,5	-0,3	2,0	-6,8

LES APPROXIMATIONS AFFINES

Les questions d'enseignement

Problèmes posés par le programme :

1) Rupture entre information chiffrée et approximations

En général l'information chiffrée est traitée tôt dans l'année et on s'attache, dans cette partie du programme, à se démarquer de pratiques quotidiennes inexactes : *"une baisse de t% n'est pas compensée par une augmentation de t%. Les augmentations ou baisses successives ne s'ajoutent pas."*

Or que propose le programme sur les approximations ?: "*une augmentation de t% est presque compensée par une baisse de t% quand t est petit. Augmenter de t% deux années de suite, c'est presque augmenter de 2t% quand t est petit. Même étude pour trois années consécutives."*

On revient sur ce qu'on s'était attaché à ancrer en début d'année.

2) Problème de formulation de certaines lignes de programme :

- "*augmentation et baisse réciproques* " : les fonctions $x \longmapsto \frac{1}{1+x}$ et $x \longmapsto 1-x$ ne sont pas réciproques l'une de l'autre.
- "Une augmentation de t% sur deux ans correspond presque à une augmentation annuelle de $\frac{t}{2}$ % quand t est petit."
  Quel sens donne-t-on à *"t est petit "* ?

Les souhaits à travers cette séquence :

1) Faire le lien avec les fonctions de référence pour offrir la possibilité de prolonger les approximations par l'introduction du nombre dérivé : les approximations affines au programme sont des développements limités d'ordre 1 des fonctions de référence au voisinage de 1

2) Faire accepter qu'une approximation proposée est la meilleure des approximations.

Les caractéristiques des activités

Utilisation de la séquence :

- Soit avant celle sur la dérivation; la stratégie d'introduction du nombre dérivé est libre.
- Soit après celle sur la dérivation; c'est un nouvel aspect ou une application du nombre dérivé

Aucun aspect des fonctions n'est négligé :

- Tableaux de nombres : pour faire conjecturer des approximations.
- Graphique : pour valider des conjectures.
- Algébrique : pour examiner le domaine de validité.

Pour faire sentir le sens de "t est petit".

A l'issue des activités, institutionnalisation des résultats et interprétation dans le contexte de l'information chiffrée.

L'utilisation des activités :

Activité 1 :

- Etude numérique des fonctions de référence au voisinage de 1.
- Les nombres choisis doivent permettre de faire conjecturer des approximations affines, et de donner un sens à la phrase du programme *"pour t petit"*.

Scénario :

- Le remplissage des tableaux peut être fait individuellement (à la maison : programmation de la calculatrice)
- La recherche de conjectures : en groupes (en classe).
- Les conjectures sont écrites au tableau sans commentaire : l'activité 2 apporte une validation par une interprétation graphique.

Activité 2 :

Grossissements successifs des courbes des 4 fonctions de référence au voisinage du point (1,1) : les courbes sont "aplaties" jusqu'à devenir des "droites" dont on peut déterminer les équations.

Scénario :

- Des grossissements successifs sont présentés: soit sur transparent, soit à l'ordinateur jusqu'à aplatissement de la courbe.

- Les élèves disposent d'un document papier présentant le plus fort grossissement sur un fond quadrillé. Leur tâche consiste à déterminer la pente des "droites", puis l'équation réduite.

- Un lien doit être fait entre les équations des droites obtenues et les approximations affines conjecturées dans l'activité 1.

Exemple : La droite d'équation $y=2x-1$ est la représentation graphique de g qui vérifie : $g(1+h) = 1+2h$.

Activité 3 : (Parties 1,2 et 3)

- $(1+h)^2$ et $1+2h$ sont voisins, on remplace même l'un par l'autre, mais ils ne sont pas égaux pour h non nul.

- La différence représente l'erreur commise en remplaçant $(1+h)^2$ par $1+2h$; c'est la différence d'ordonnées entre le point de C et le point de D de même abscisse $1+h$.

- On s'intéresse ensuite à la précision.

Même démarche pour les fonctions $x \longmapsto x^3$ et $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$

Scénario :

Recherche individuelle.

Activité 3 : (Partie 4)

Cette activité est proposée en réponse au paragraphe du programme :

"Généralisation : comparaison de $(1+x)^n$ et $1+nx$ quand x est petit".

Elle opère un retour au domaine de l'économie, au travers d'un exemple réel, pour montrer les effets sur l'approximation de $(1+x)^n$ par $1 + nx$, des grandes valeurs de n, même si x est petit. La richesse, mais aussi la lourdeur de toutes les notions auxquelles il est fait appel en expliquent la difficulté.

- On travaille sur la vitesse à laquelle croît la différence entre prix réel et approximation, alors que la notion de vitesse de croissance est peu pratiquée sur les fonctions.

- Les suites géométriques sont sous-jacentes et, si elles n'ont pas été traitées auparavant, l'écriture $p_n=p(1{,}03)^n$ n'a rien d'immédiat.0

- Il n'est peut-être pas nécessaire de traiter toutes les questions c), d), e) , suivant le niveau de la classe.

Scénario :

- Ce travail pourrait s'intégrer à l'enseignement optionnel, peut-être à l'occasion des compléments sur les suites.
- Il peut être souhaitable de dissocier cette activité du reste de la séquence "APPROXIMATIONS".
- Plusieurs places dans la progression sont envisageables :
  par exemple, après les suites pour illustrer les suites géométriques ou en fin d'année pour mettre en oeuvre plusieurs points du programme.

ACTIVITE 1

On considère les quatre fonctions de référence :

$f : x \longmapsto x^2$; $g : x \longmapsto x^3$; $u : x \longmapsto \dfrac{1}{x}$; $v : x \longmapsto \sqrt{x}$

Le but de l'étude est de préciser le comportement de ces quatre fonctions au voisinage de 1.
Lorsque x est voisin de 1, on peut l'écrire $1 + h$, où h est voisin de 0.

$f(1+h) = (1+h)^2$; $g(1+h) = (1+h)^3$; $u(1+h) = \dfrac{1}{1+h}$; $v(1+h) = \sqrt{1+h}$

1) A l'aide de la calculatrice, compléter le tableau suivant :

h	0,000 001	0,000 03	0,000 4	0,007	0,01
$(1 + h)^2$					

h	0,06	0,1	0,8	1	1,2
$(1 + h)^2$					

Proposer un moyen de calculer <u>mentalement</u> une valeur approchée de $(1 + h)^2$ lorsque h est voisin de 0 et <u>positif</u>.
En complétant le tableau suivant, vérifier que ce moyen reste valable pour h voisin de 0 et <u>négatif</u>.

h	– 1,5	– 1	– 0,9	– 0,1	– 0,05
$(1 + h)^2$					

h	– 0,01	– 0,006	– 0,000 1	– 0,000 07	– 0,000 000 4
$(1 + h)^2$					

2) A l'aide de la calculatrice, compléter le tableau suivant :

h	– 1	– 0,9	– 0,5	– 0,06	– 0,05
$(1 + h)^3$					

h	– 0,01	– 0,003	– 0,000 2	– 0,000 07	– 0,000 01
$(1 + h)^3$					

h	0,000 005	0,000 02	0,000 3	0,001	0,01
$(1 + h)^3$					

h	0,05	0,06	0,6	0,8	1
$(1 + h)^3$					

Proposer un moyen de calculer <u>mentalement</u> une valeur approchée de $(1 + h)^3$ lorsque h est voisin de 0.

3) A l'aide de la calculatrice, compléter le tableau suivant :

h	$-0{,}95$	$-0{,}9$	$-0{,}11$	$-0{,}1$	$-0{,}09$
$\dfrac{1}{1+h}$					

h	$-0{,}02$	$-0{,}003$	$-0{,}000\,4$	$-0{,}000\,05$	$-0{,}000\,001$
$\dfrac{1}{1+h}$					

h	$0{,}000\,006$	$0{,}000\,03$	$0{,}000\,4$	$0{,}008$	$0{,}07$
$\dfrac{1}{1+h}$					

h	$0{,}1$	$0{,}2$	1	$1{,}5$	2
$\dfrac{1}{1+h}$					

Proposer un moyen de calculer <u>mentalement</u> une valeur approchée de $\dfrac{1}{1+h}$ lorsque h est voisin de 0 .

4) A l'aide de la calculatrice, compléter le tableau suivant :

h	-1	$-0{,}9$	$-0{,}3$	$-0{,}2$	$-0{,}06$
$\sqrt{1+h}$					

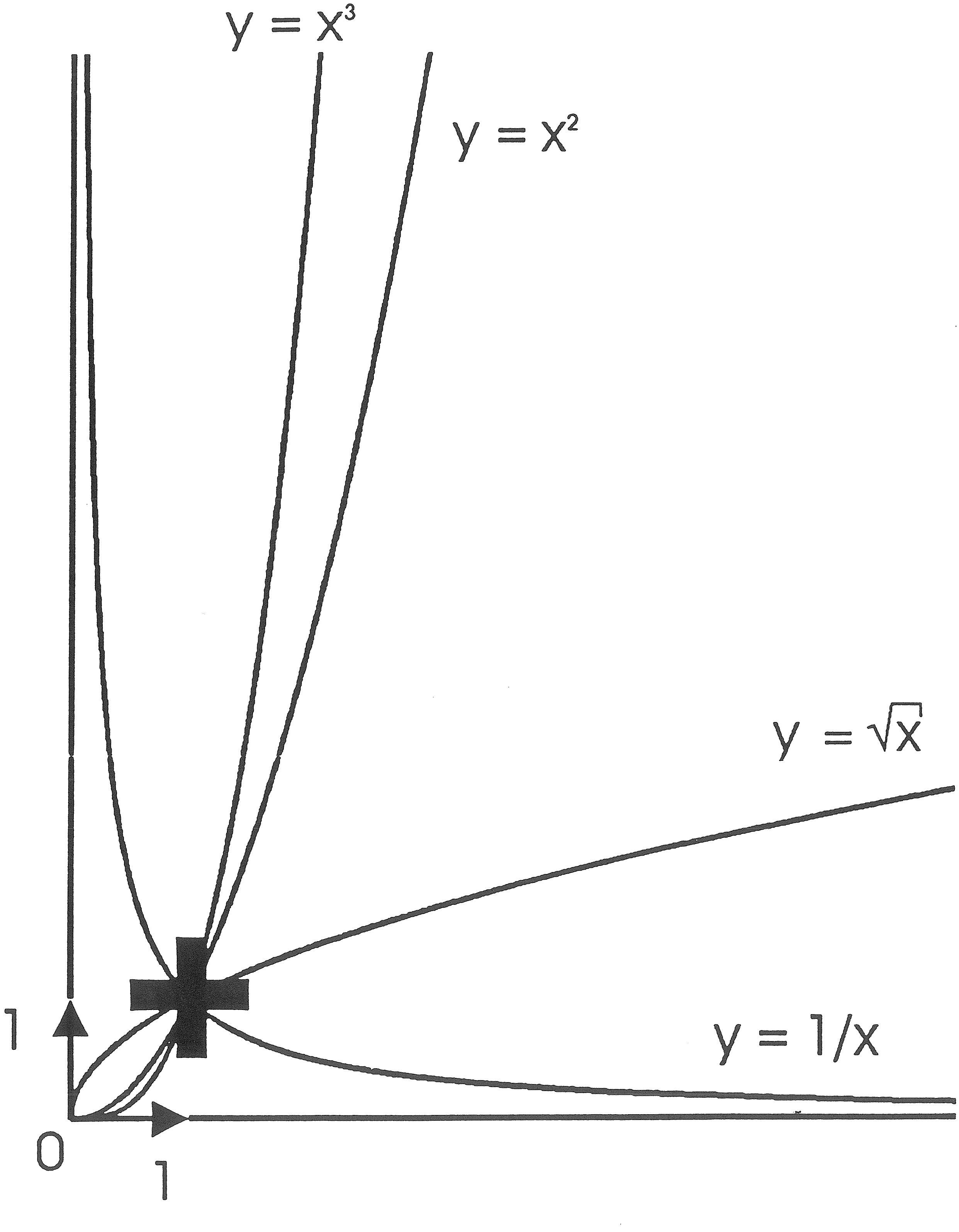
h	$-0{,}01$	$-0{,}004$	$-0{,}000\,8$	$-0{,}000\,2$	$-0{,}000\,06$
$\sqrt{1+h}$					

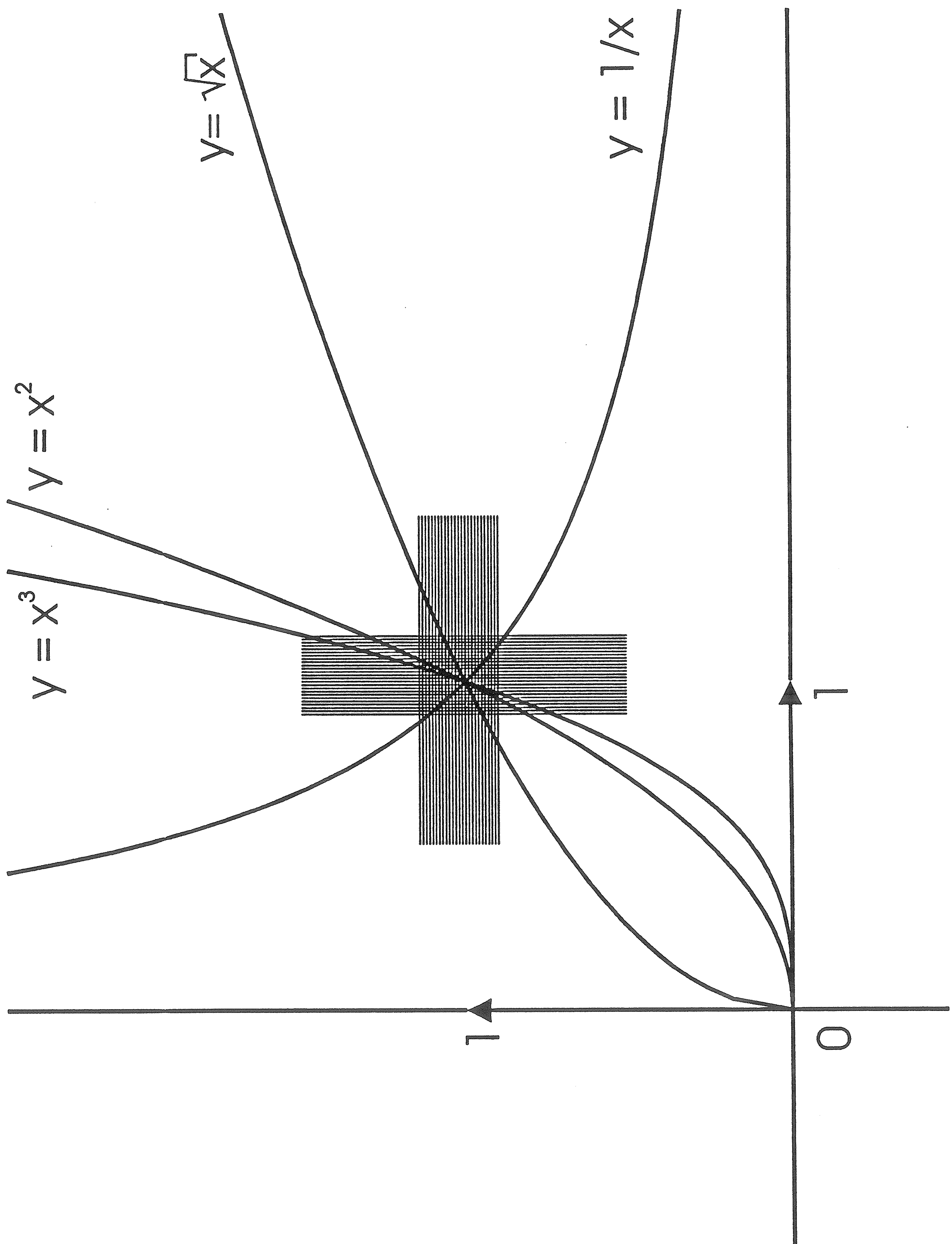
h	$0{,}000\,02$	$0{,}000\,1$	$0{,}000\,8$	$0{,}006$	$0{,}04$
$\sqrt{1+h}$					

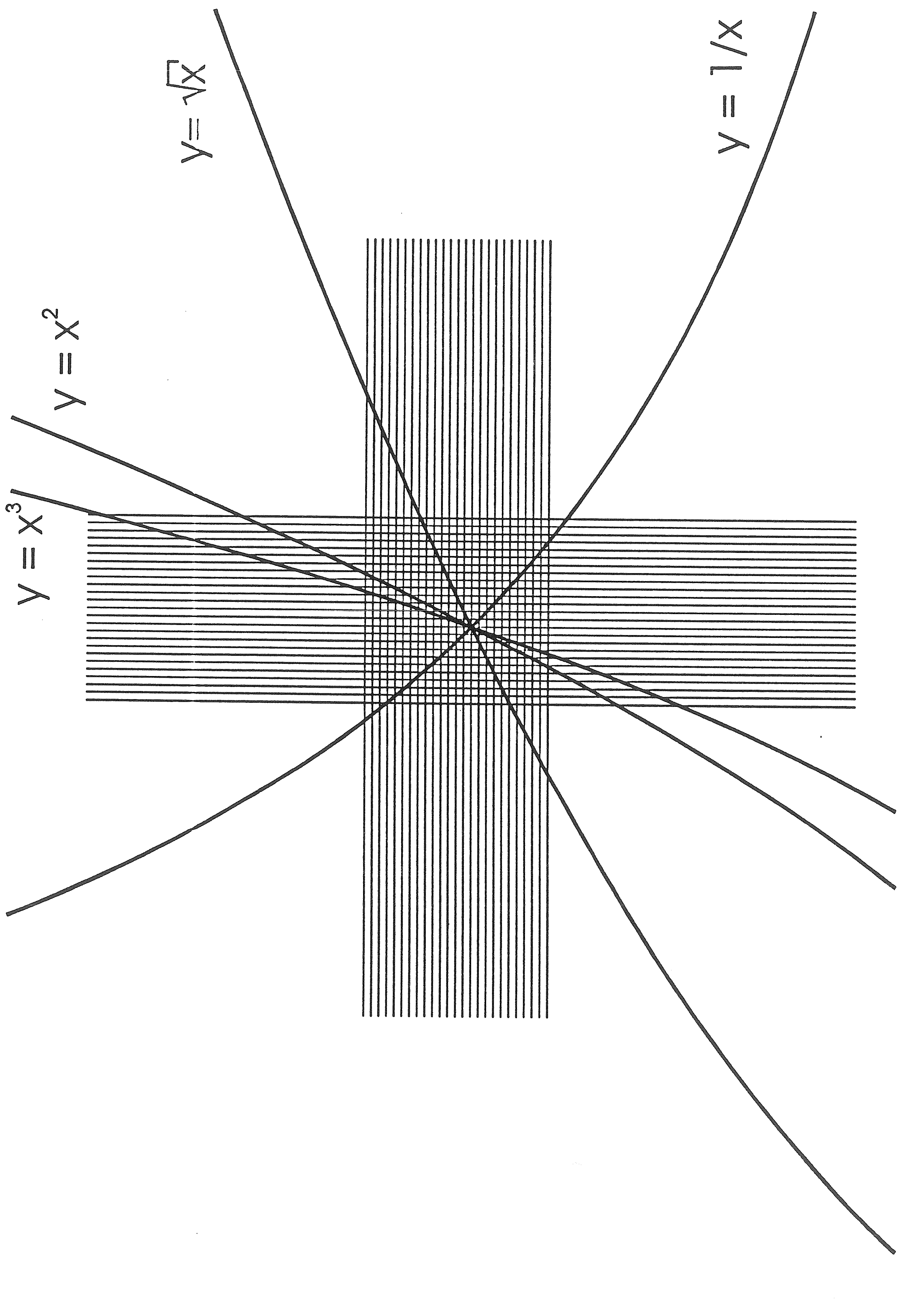
h	$0{,}1$	$0{,}3$	$0{,}4$	$1{,}5$	2
$\sqrt{1+h}$					

Proposer un moyen de calculer <u>mentalement</u> une valeur approchée de $\sqrt{1+h}$ lorsque h est voisin de 0.

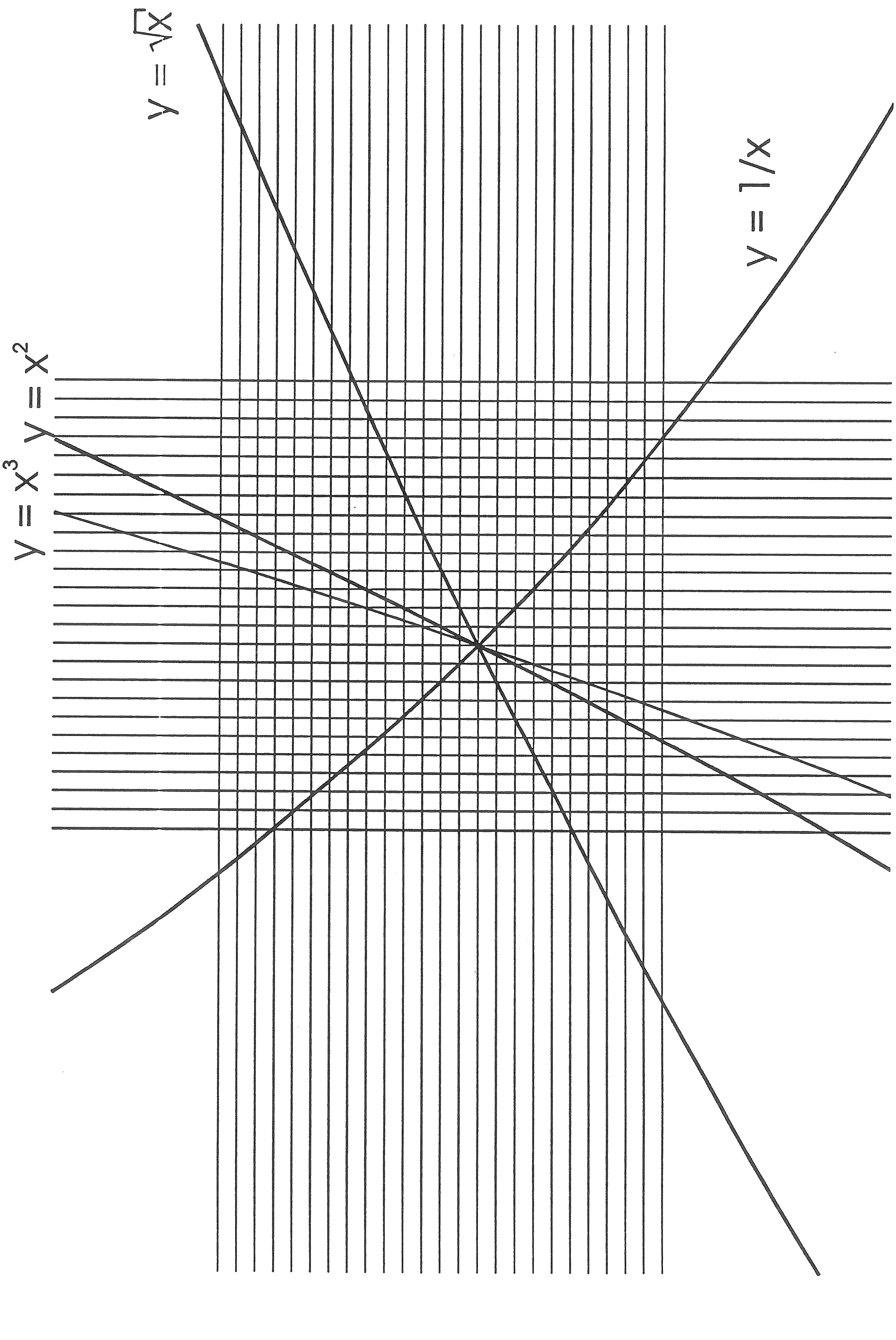
ACTIVITE 2

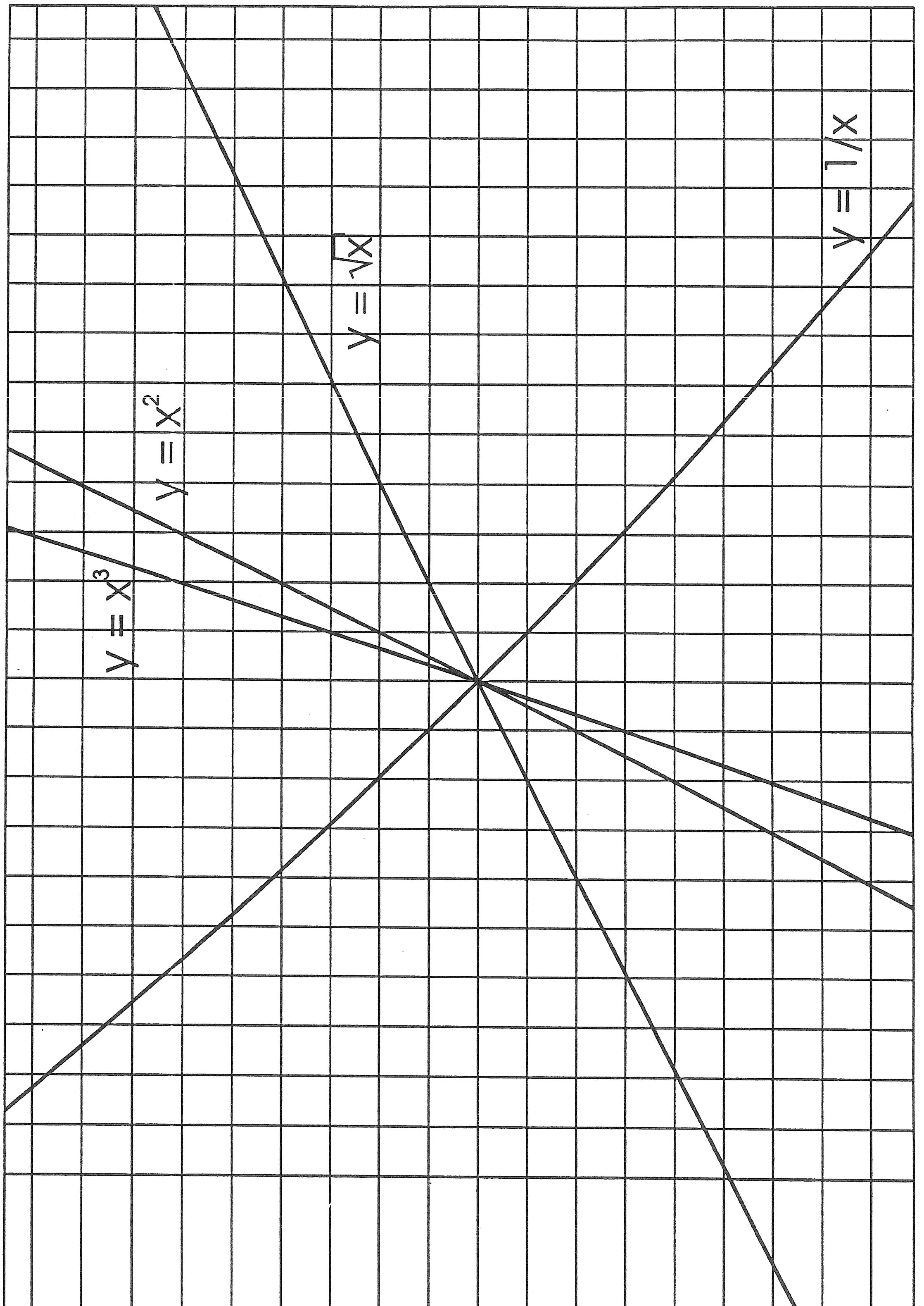


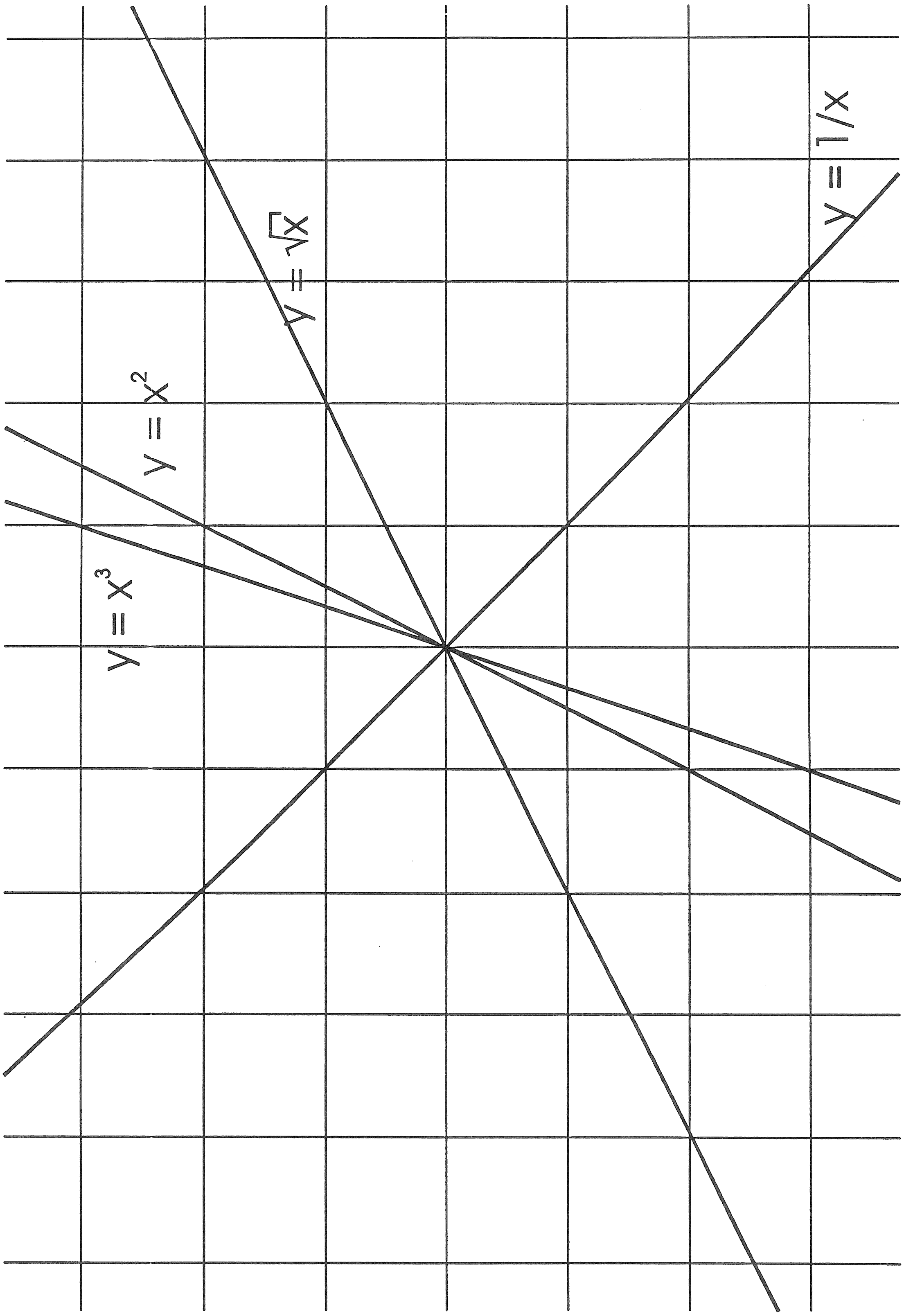

y = x³
y = x²
y= √x
y = 1/x
1
1
0



y = x^3
y = x^2
y = √x
y = 1/x


$y = \sqrt{x}$
$y = 1/x$
$y = x^2$
$y = x^3$


$y = x^3$
$y = x^2$
$y = \sqrt{x}$
$y = 1/x$


y = x³
y = x²
y = √x
y = 1/x

ACTIVITE 3-1

Considérons la fonction numérique f définie par $f(x) = x^2$

Soient $\mathfrak{C}$ la représentation graphique, dans un repère orthonormal, de la fonction f et $\mathfrak{D}$ la droite d'équation $y = 2x - 1$.

Supposons x voisin de 1 et posons : $x = 1 + h$.

1) Donner une interprétation numérique de la différence $\varepsilon(h) = (1 + h)^2 - (1 + 2h)$.
2) Donner une interprétation graphique de cette différence $\varepsilon(h)$.
3) Pour quelles valeurs de h, a-t-on :
a) $\varepsilon(h) \leq 0{,}25$? b) $\varepsilon(h) \leq 0{,}01$? c) $\varepsilon(h) \leq 0{,}000\,1$?

ACTIVITE 3-2

Considérons la fonction numérique f définie par $f(x) = x^3$

Soient $\mathfrak{C}$ la représentation graphique, dans un repère orthonormal, de la fonction f et $\mathfrak{D}$ la droite d'équation $y = 3x - 2$.

Supposons x voisin de 1 et posons : $x = 1 + h$.

1) Donner une interprétation numérique de la différence $\varepsilon(h) = (1 + h)^3 - (1 + 3h)$.
2) Donner une interprétation graphique de cette différence $\varepsilon(h)$.
3) Montrer que : si $-1 \leq h \leq 1$, alors $\varepsilon(h) \leq 4h^2$
4) Déduire du résultat précédent les valeurs de h pour lesquelles, $\varepsilon(h)$ vérifie :
a) $\varepsilon(h) \leq 1$ b) $\varepsilon(h) \leq 0{,}25$ c) $\varepsilon(h) \leq 0{,}01$

ACTIVITE 3-3

Considérons la fonction numérique f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{1}{x}$

Soient $\mathfrak{C}$ la représentation graphique, dans un repère orthonormal, de la fonction f et $\mathfrak{D}$ la droite d'équation $y = -x + 2$.

Supposons x voisin de 1 et posons : $x = 1 + h$ avec $-1 < h$.

1) Donner une interprétation numérique de la différence $\varepsilon(h) = \dfrac{1}{1 + h} - (1 - h)$.
2) Donner une interprétation graphique de cette différence $\varepsilon(h)$.
3) Montrer que $\varepsilon(h)$ vérifie :
a) $\varepsilon(h) = \dfrac{h^2}{1 + h}$
b) si $\dfrac{-1}{2} \leq h \leq 0$, alors $\varepsilon(h) \leq 2h^2$
c) si $0 \leq h$, alors $\varepsilon(h) \leq h^2$
4) Déduire des résultats précédents les valeurs de h pour lesquelles, $\varepsilon(h)$ vérifie :
a) $\varepsilon(h) \leq 0{,}5$? b) $\varepsilon(h) \leq 0{,}01$? c) $\varepsilon(h) \leq 0{,}005$?

ACTIVITE 3-4

Voici des extraits d'un article publié le 30 décembre 1993 dans le journal "Le Monde".

Serbie : les ravages de la planche à billets

Une inflation colossale désorganise l'économie et pénalise lourdement la population

"Des milliers de milliards, des billions, des trillions, des quadrillions ...
Au rythme de l'hyperinflation, les Serbes plongent le nez dans leur dictionnaire, enrichissent leur vocabulaire et essaient tant bien que mal de donner un nom au cortège de zéros qui se bousculent sur les billets et les étiquettes. Ils sont tous multimilliardaires mais n'ont pas de raison de s'en réjouir : l'argent leur fond dans les mains. Ce n'est pas tant que les Serbes soient follement dépensiers mais la monnaie nationale se dévalue désormais de 3 % par heure ...
Les prix changent désormais plusieurs fois par jour au fur et à mesure que le dinar se déprécie par rapport au deutschemark, la seule véritable monnaie de référence dans le pays ...
Les commerçants, eux, n'ont pas vraiment le goût de la dérision et, pour se protéger, ils ont introduit le "point", une manière détournée de fixer les prix en deutschemarks et de ne plus avoir à changer constamment les étiquettes. Le "point" équivaut en effet à 1 deutschemark. Les magasins d'Etat, qui ne peuvent pas recourir à cette pratique théoriquement illégale, continuent cependant d'afficher les tarifs en dinar, ce qui les oblige à fermer régulièrement leurs portes pour modifier les prix ..."

Considérons un article $\mathcal{A}$ dont le prix à un instant donné est p .

Supposons que la monnaie se dévalue régulièrement de 3 % par heure et que les prix augmentent régulièrement de 3 % par heure.

Au bout de n heures : le coût de l'article $\mathcal{A}$ est $p_n = p.(1{,}03)^n$
et une approximation de p_n est $a_n = p.\left(1 + \frac{3\,n}{100}\right)$

Déterminer, éventuellement à l'aide de la calculatrice, n de sorte que :

a) $p_n \geq 1\,000\,p$
b) $a_n \geq 1\,000\,p$
c) $p_n - a_n \leq 0{,}1\,p_n$
d) $p_n \geq 10\,a_n$.
e) $p_n \geq 1\,000\,a_n$.

A RETENIR

Augmentation et baisse réciproques

Une augmentation de t % n'est pas compensée par une baisse de t % .

Néanmoins :

une augmentation de t % est presque compensée par une baisse de t %

ce qui signifie :

les nombres $1 - t$ et $\frac{1}{1 + t}$ sont "voisins" et d'autant plus "voisins" que t est "voisin" de 0 .

ce qui peut se traduire

<u>graphiquement</u> : la représentation graphique de la fonction "inverse" $x \longmapsto \frac{1}{x}$ et la droite de coefficient directeur -1 passant par le point de coordonnées (1,1) sont au voisinage de ce point presque confondues.

<u>numériquement</u> : la fonction $h \longmapsto 1 - h$ est une approximation affine au voisinage de 0 de la fonction : $h \longmapsto \frac{1}{1 + h}$ c'est-à-dire une approximation affine au voisinage 1 de la fonction "inverse" : $x \longmapsto \frac{1}{x}$.

Augmentations ou baisses successives

Les augmentations ou baisses successives ne s'ajoutent pas.

Néanmoins :

augmenter de t % deux années de suite, c'est presque augmenter de $2t$ % quand t est petit

ce qui signifie :

les nombres $(1 + t)^2$ et $1 + 2t$ sont "voisins" et d'autant plus "voisins" que t est "voisin" de 0 .

ce qui peut se traduire

<u>graphiquement</u> : la représentation graphique de la fonction "carré" $x \longmapsto x^2$ et la droite de coefficient directeur 2 passant par le point de coordonnées (1,1) sont au voisinage de ce point presque confondues

<u>numériquement</u> : la fonction $h \longmapsto 1 + 2h$ est une approximation affine au voisinage de 0 de la fonction : $h \longmapsto (1 + h)^2$ c'est-à-dire une approximation affine au voisinage 1 de la fonction "carré" : $x \longmapsto x^2$.

de même

augmenter de t % trois années de suite, c'est presque augmenter de $3t$ % quand t est petit

ce qui signifie :

les nombres $(1 + t)^3$ et $1 + 3t$ sont "voisins" et d'autant plus "voisins" que t est "voisin" de 0 .

ce qui peut se traduire

<u>graphiquement</u> : la représentation graphique de la fonction "cube" $x \longmapsto x^3$ et la droite de coefficient directeur 3 passant par le point de coordonnées (1,1) sont au voisinage de ce point presque confondues.

<u>numériquement</u> : la fonction $h \longmapsto 1 + 3h$ est une approximation affine au voisinage de 0 de la fonction : $h \longmapsto (1 + h)^3$ c'est-à-dire une approximation affine au voisinage 1 de la fonction "cube" : $x \longmapsto x^3$.

Généralisation

augmenter de t % n années de suite, c'est presque augmenter de $n\,t$ % quand t est petit

ce qui signifie :

les nombres $(1 + t)^n$ et $1 + n\,t$ sont "voisins" et d'autant plus "voisins" que t est "voisin" de 0.

ce qui peut se traduire

<u>graphiquement</u> : la représentation graphique de la fonction "puissance n " $x \longmapsto x^n$ et la droite de coefficient directeur n passant par le point de coordonnées (1,1) sont au voisinage de ce point presque confondues

<u>numériquement</u> : la fonction $h \longmapsto 1 + n\,h$ est une approximation affine au voisinage de 0 de la fonction : $h \longmapsto (1 + h)^n$ c'est-à-dire une approximation affine au voisinage 1 de la fonction "puissancen " : $x \longmapsto x^n$.

Augmentation ou baisse annuelle

augmenter de t % sur 2 ans, correspond presque à une augmentation annuelle de $\frac{t}{2}$ % quand t est petit

ce qui signifie :

les nombres $\sqrt{1 + t}$ et $1 + \frac{1}{2}t$ sont "voisins" et d'autant plus "voisins" que t est "voisin" de 0.

ce qui peut se traduire

<u>graphiquement</u> : la représentation graphique de la fonction "racine" $x \longmapsto \sqrt{x}$ et la droite de coefficient directeur $\frac{1}{2}$ passant par le point de coordonnées (1,1) sont au voisinage de ce point presque confondues.

<u>numériquement</u> : la fonction $h \longmapsto 1 + \frac{1}{2}h$ est une approximation affine au voisinage de 0 de la fonction : $h \longmapsto \sqrt{1 + h}$ c'est-à-dire une approximation affine au voisinage 1 de la fonction "racine" : $x \longmapsto \sqrt{x}$.

Généralisation

augmenter de t % sur n ans, correspond presque à une augmentation annuelle de $\frac{t}{n}$ % quand t est petit.

INTRODUCTION DU NOMBRE DERIVE EN PREMIERE ES.

La séquence intervient après celle sur les approximations affines classiques : par des activités graphiques (zooms successifs au voisinage du point de coordonnées (1, 1) sur les représentations graphiques des fonctions de références) et numériques, les élèves ont découvert par exemple :

1) que $(1 + h)^2$ est voisin de $1 + 2h$ lorsque h est proche de 0, l'erreur commise étant « négligeable devant h ».
2) que la courbe d'équation $y = x^2$ coïncide presque avec la droite d'équation $y = 2x - 1$ lorsque on est très près du point A de coordonnées (1, 1) de cette courbe.
3) La cohérence entre les deux résultats précédents.

Le début de la séquence (paragraphe I. et paragraphe II. 1, 2, 3 et 4 ne figurant pas dans cette brochure) vise à introduire, à partir des exemples déjà rencontrés, la définition de la dérivabilité d'une fonction en un point par l'aspect « existence d'un développement limité d'ordre 1 au voisinage de ce point ».

Dans ce but le paragraphe I. a consisté en un travail préliminaire numérique sur le comportement de certaines fonctions en 0, afin de dégager la notion de limite finie en 0. Les élèves ont observé également le comportement lorsque x tend vers 0 de la fonction

$x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, ce qui permettra ultérieurement d'établir la non dérivabilité en 0 de la fonction

$x \longmapsto \sqrt{x}$.

Les feuilles A et B ont ensuite été distribuées aux élèves.

Les obstacles rencontrés par les élèves sont nombreux : les principaux me paraissent être les suivants:

a) Chez certains persistent des difficultés à lire graphiquement, malgré le quadrillage, le coefficient directeur d'une droite. Même en première, on rencontre encore souvent la confusion entre une droite de coefficient directeur m et une droite de coefficient directeur $\frac{1}{m}$.

b) Le lien entre l'aspect numérique : approximation de <u>f(a + h) pour h voisin de 0</u> et l'aspect graphique : tangente à la courbe (et donc approximation de <u>f(x) pour x voisin de a</u>) est loin d'être immédiat à faire passer.

c) Le fait que h^2 tende vers 0 « plus vite » que h, et plus généralement qu'une quantité pouvant s'écrire sous la forme e (h) avec e de limite 0 en 0 soit négligeable devant h est presque dénué de sens pour un élève moyen, malgré les activités numériques qui ont précédé.

d) Enfin et surtout, l'écriture $f(a + h) = f(a) + kh + e(h)$ avec ses différents paramètres présente un niveau d'abstraction auquel il faut bien reconnaître que nos élèves n'ont pas du tout été préparés dans les mois et les années précédents.
En revanche, il est indéniable que l'approche graphique , grâce à l'ordinateur, une tablette à rétro-projeter, et des logiciels comme par exemple graph'x, permet de rendre l'approche plus claire et plus vivante. Cette approche a en outre l'avantage d'être beaucoup plus persuasive que pourrait l'être n'importe quel exposé théorique en première ES sur le fait que $f(a) + f'(a)h$ est la <u>meilleure approximation affine de f(a + h)</u> , pour h voisin de 0, lorsque f est dérivable en a.

II.5 a consisté à travailler sur un autre exemple : la fonction f définie par

$f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2.$

a) Travail graphique : Zooms (grâce au logiciel graph'x et à la tablette à rétro-projeter) aux points de C_f d'abscisses -4, -1, 2 et 6 et lecture graphique des nombres dérivés correspondants.
b) Conjecture, à partir des observations précédentes, de l'expression de f'(a).
c) Démonstration du résultat de b), d'abord pour a = 2, puis pour a quelconque.
d) Distribution du graphique de la feuille numéro 5.

II.6 a consisté en des travaux graphiques (zooms) permettant de conjecturer la non dérivabilité de la fonction valeur absolue en 0 et de la fonction racine carrée en 0. Les élèves ont pu en outre constater à cette occasion, par analogie avec ce qui avait précédé, l'existence d'une tangente verticale à la représentation graphique de la fonction racine carrée à l'origine du repère. Ce point n'a pas été développé davantage, puisqu'il ne figure pas au programme.

II.7 est consacré à l'introduction du nombre dérivé en a comme limite en 0 du taux d'accroissement $\frac{f(a + h) - f(a)}{h}$.

a) Travail graphique : « position limite » de la sécante et tangente. (logiciel Graph'x, en mode normal et en mode animation pour permettre à l'élève de bien suivre l'évolution de la sécante).
Distribution en conclusion des feuilles 6 et 7.
b) Enoncé du théorème (deuxième définition du nombre dérivé), et démonstration.
c) Exercices de calcul de nombres dérivés à l'aide de cette nouvelle définition, et emploi de cette nouvelle définition pour démontrer la non dérivabilité en 0 de la fonction racine carrée (cf. I. et II.6).

FEUILLE A

Nombre dérivé d'une fonction f en un nombre a. Tangente à C_f en A (a, f(a)).

1. L'exemple de la fonction $x \longmapsto x^2$ en 1.

* le point de vue numérique.

Au voisinage de 0, $(1 + h)^2$ a pour approximation affine $1 + 2h$. L'erreur que l'on commet lorsque l'on remplace $(1 + h)^2$ par $1 + 2h$ est égale à h^2 . Cette erreur peut s'écrire sous la forme $h \times \varepsilon(h)$ où ε est une fonction de limite 0 en 0. (Dans ce cas précis, $\varepsilon(h) = h$) . Cette erreur commise tend donc vers 0 « beaucoup plus vite que h ».
(On dit qu'elle est négligeable devant h).

* le point de vue graphique.

Soit $x = 1 + h$, et donc $h = x - 1$.
Quand h s'approche de 0, x s'approche de 1.
Dire que $(1 + h)^2$ est très proche de $1 + 2h$ quand h est proche de 0 équivaut à dire que x^2 est très proche de $1 + 2(x - 1)$, donc de $2x - 1$, quand x est proche de 1.
Localement au voisinage du point A de coordonnées (1, 1), la courbe d'équation $y = x^2$ coïncide donc presque avec la droite T d'équation $y = 2x - 1$.

2. L'exemple de la fonction $x \longmapsto x^3$ en 1.

* le point de vue numérique.

Au voisinage de 0, $(1 + h)^3$ à pour approximation affine $1 + 3h$.
L'erreur que l'on commet lorsque l'on remplace $(1 + h)^3$ par $1 + 3h$ est égale à $3h^2 + h^3$.
Cette erreur peut s'écrire sous la forme $h \times \varepsilon(h)$ où ε est une fonction de limite 0 en 0.
(Dans ce cas précis, $\varepsilon(h) = 3h + h^2$).

* le point de vue graphique.

Soit $x = 1 + h$, et donc $h = x - 1$.
Quand h s'approche de 0, x s'approche de 1.
Dire que $(1 + h)^3$ est très proche de $1 + 3h$ quand h est proche de 0 équivaut à dire que x^3 est très proche de $1 + 3(x - 1)$, donc de $3x - 2$, quand x est proche de 1. Localement au voisinage du point A de coordonnées (1, 1), la courbe d'équation $y = x^3$ coïncide donc presque avec la droite T d'équation $y = 3x - 2$.

3. Les définitions.

a) Soit f une fonction définie sur un intervalle contenant le nombre a.

S'il existe un nombre k et une fonction ε de limite 0 en0 tels que,
pour a + h dans D_f , f(a + h) puisse s'écrire sous la forme :

$$f(a + h) = f(a) + k\,h + h \times \varepsilon(h),$$

*on dit que f(a + h) admet f(a) + k h comme approximation affine au voisinage de 0.

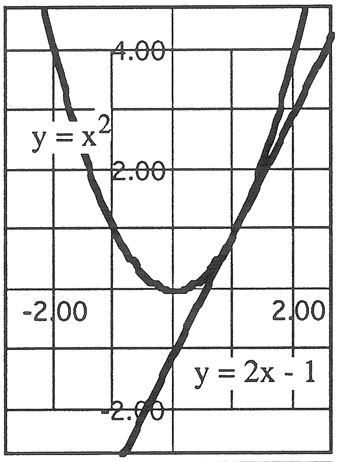
* on dit que f est dérivable en a de nombre dérivé k. (k se note alors f'(a))

b) Lorsque f est dérivable en a de nombre dérivé f'(a),
f(a + h) étant très proche de f(a) + f'(a) h quand h est très proche de 0 on obtient en remplaçant a + h par x que f(x) est très proche de f(a) + f'(a) (x - a) quand x est très proche de a. Au voisinage du point A (a, f(a)), la courbe C_f coïncide donc presque avec la droite T d'équation $y = f(a) + f'(a)(x - a)$.
Cette droite T, qui est donc la droite qui passe par A (a, f(a)) et qui a pour coefficient directeur f'(a), est appelée tangente à C_f au point A (a, f(a)).

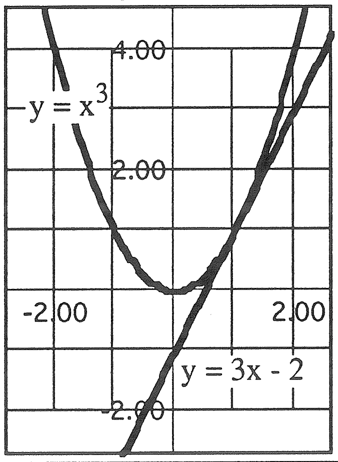
FEUILLE B

En utilisant ce nouveau vocabulaire, on obtient :

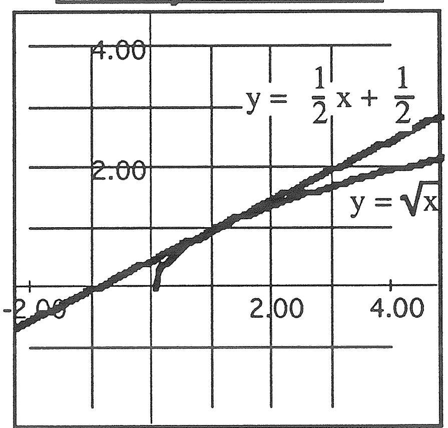
$x \longmapsto x^2$ est dérivable en 1 de nombre dérivé 2. La courbe d'équation $y = x^2$ admet au point A (1, 1) une tangente de coefficient directeur 2.



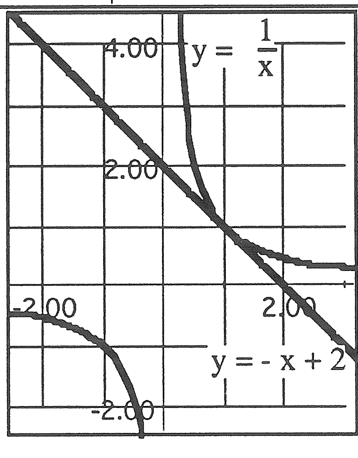
$x \longmapsto x^3$ est dérivable en 1 de nombre dérivé 3. La courbe d'équation $y = x^3$ admet au point A (1, 1) une tangente de coefficient directeur 3.



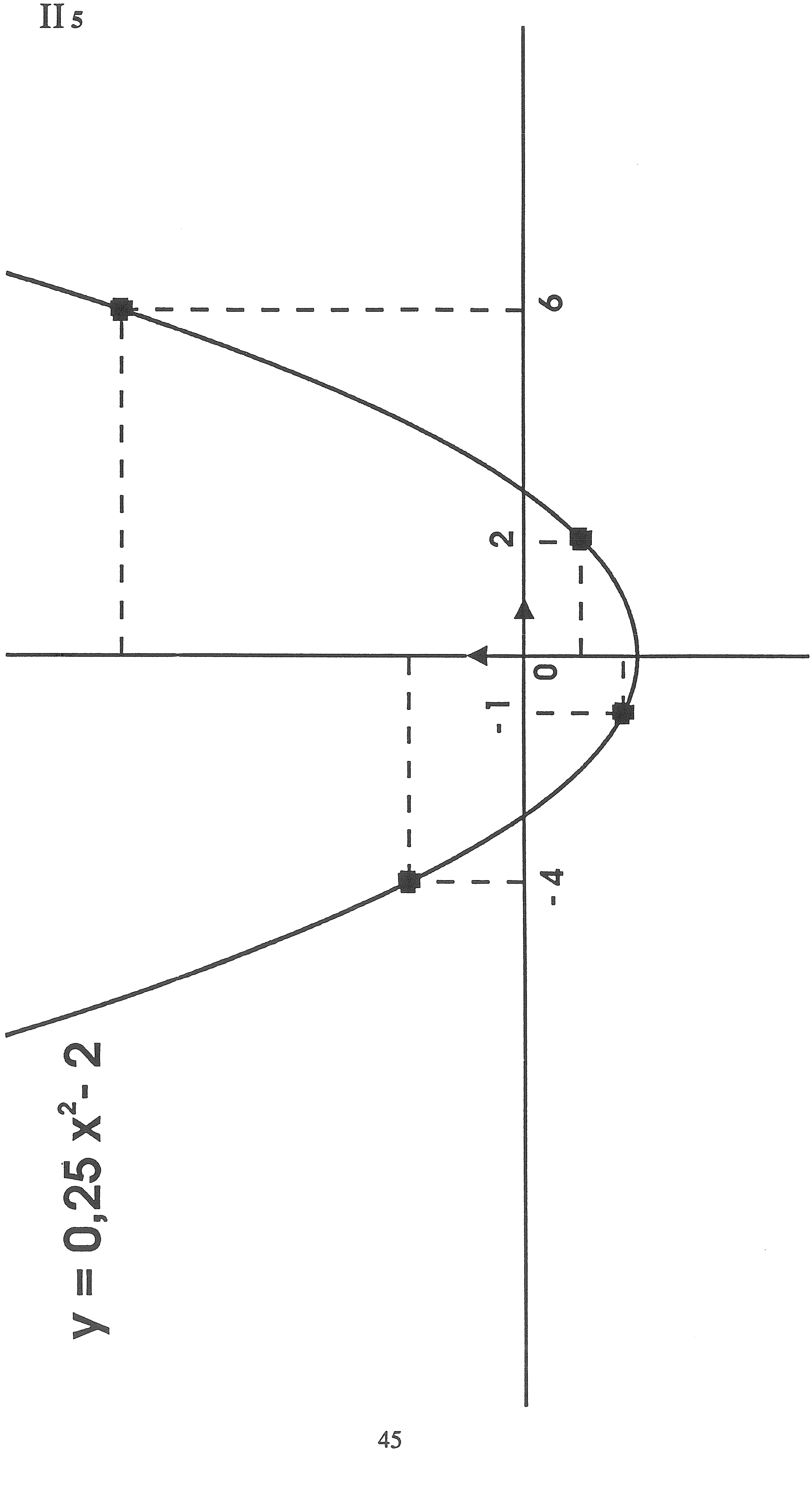
$x \longmapsto \sqrt{x}$ est dérivable en 1 de nombre dérivé $\frac{1}{2}$. La courbe d'équation $y = \sqrt{x}$ admet au point A (1, 1) une tangente de coefficient directeur $\frac{1}{2}$.



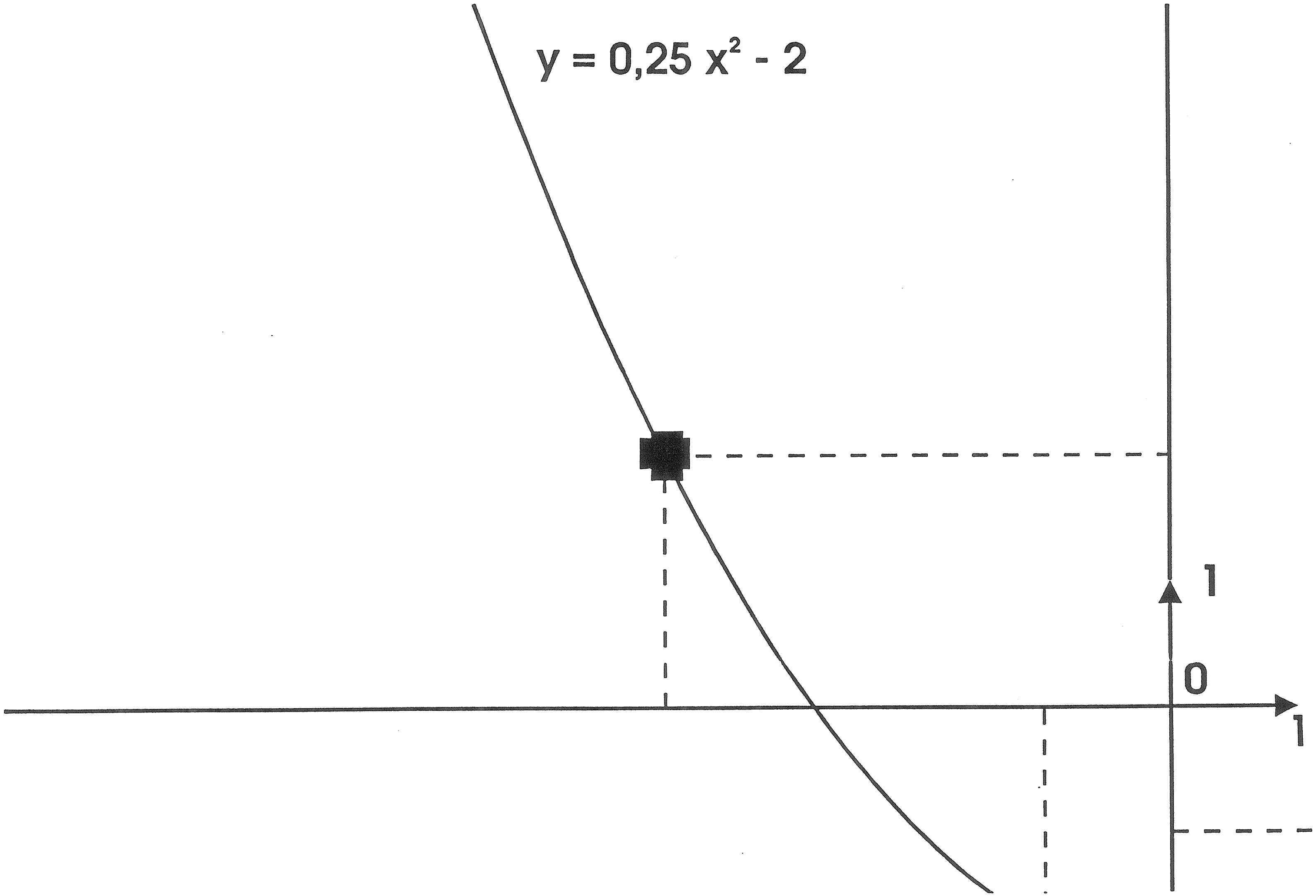
$x \longmapsto \frac{1}{x}$ est dérivable en 1 de nombre dérivé - 1. La courbe d'équation $y = \frac{1}{x}$ admet au point A (1, 1) une tangente de coefficient directeur - 1.



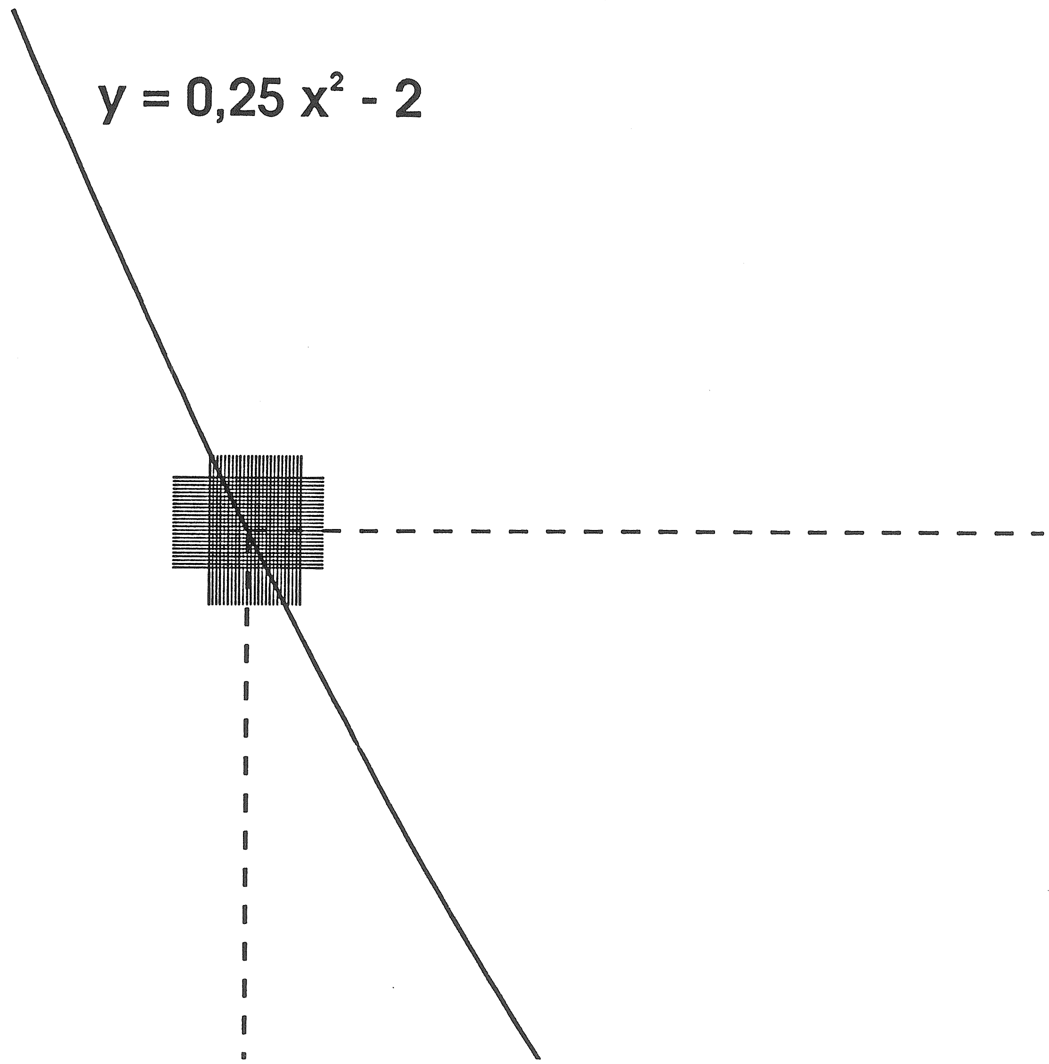
II 5



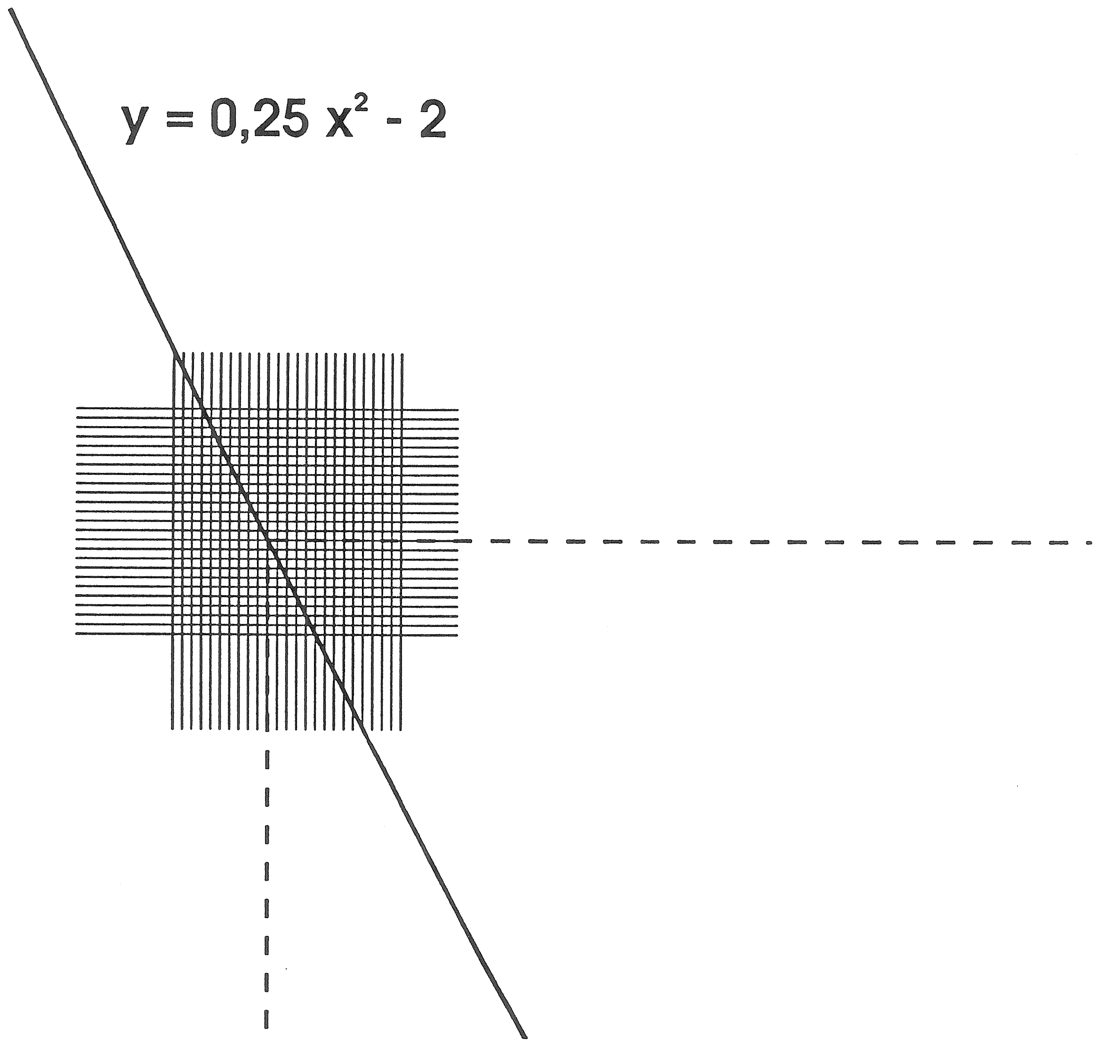
Premier zoom au point d'abscisse - 4



Deuxième zoom au point d'abscisse - 4.

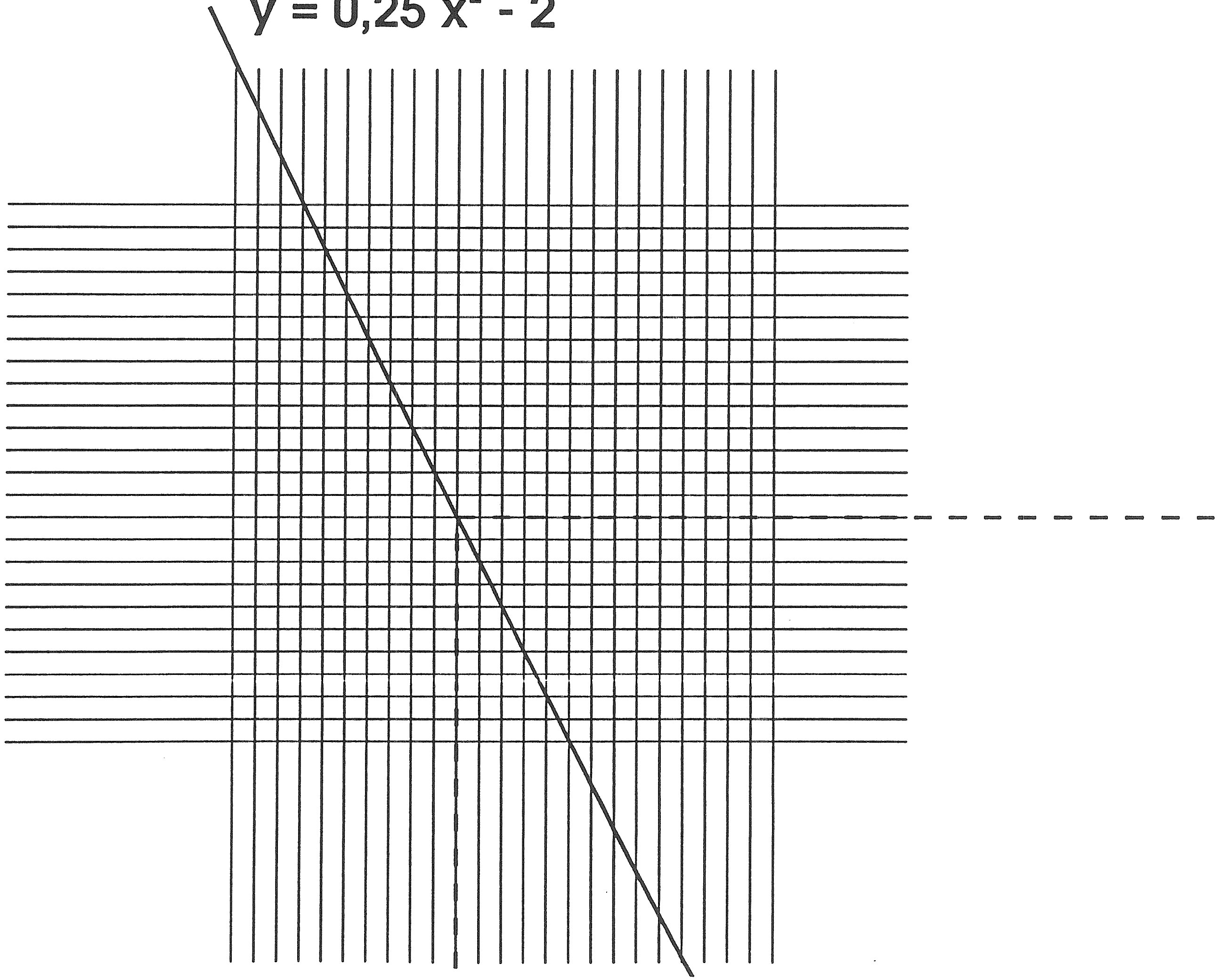


Troisième zoom au point d'abscisse - 4.

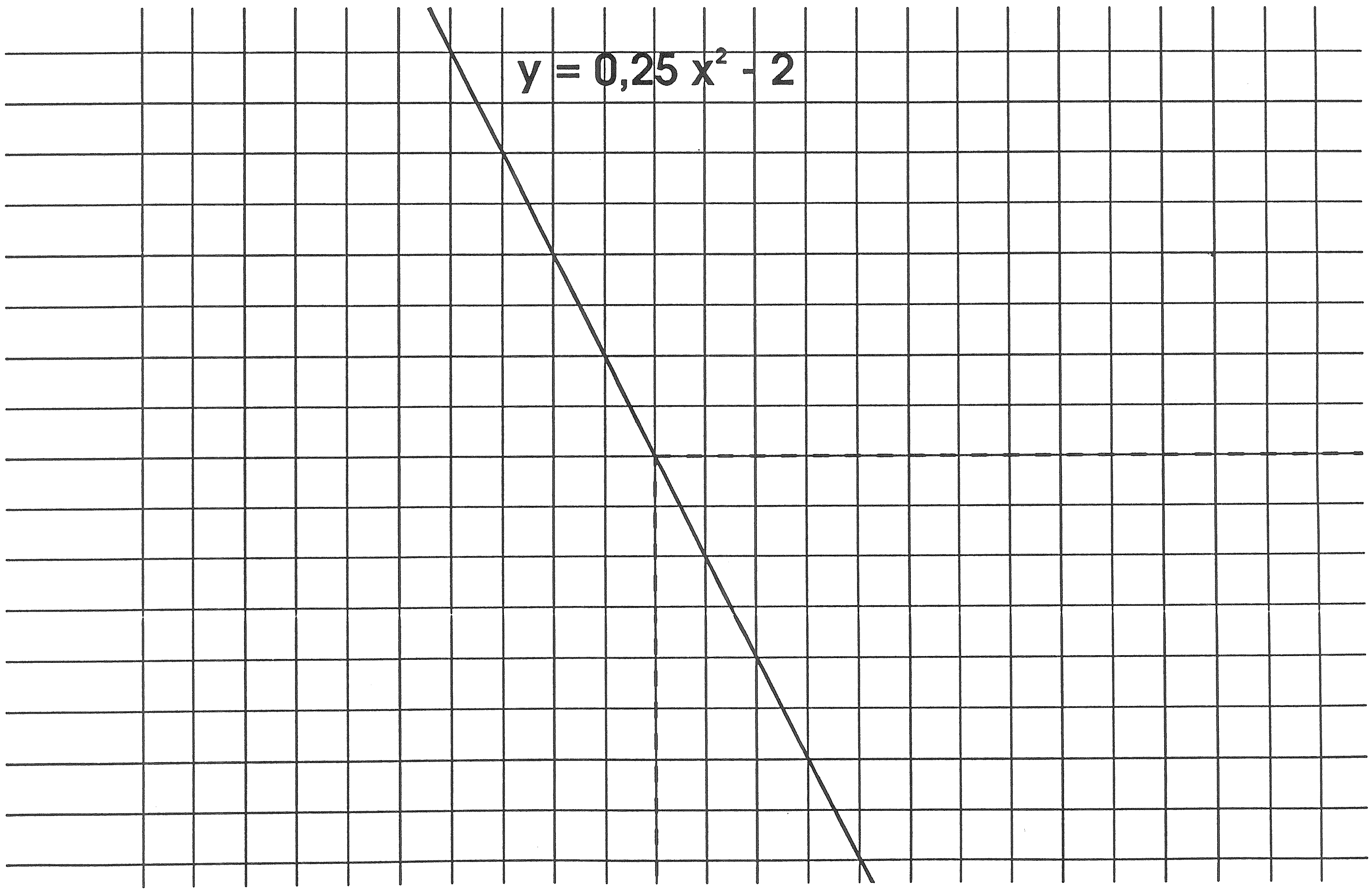


Quatrième zoom au point d'abscisse - 4.

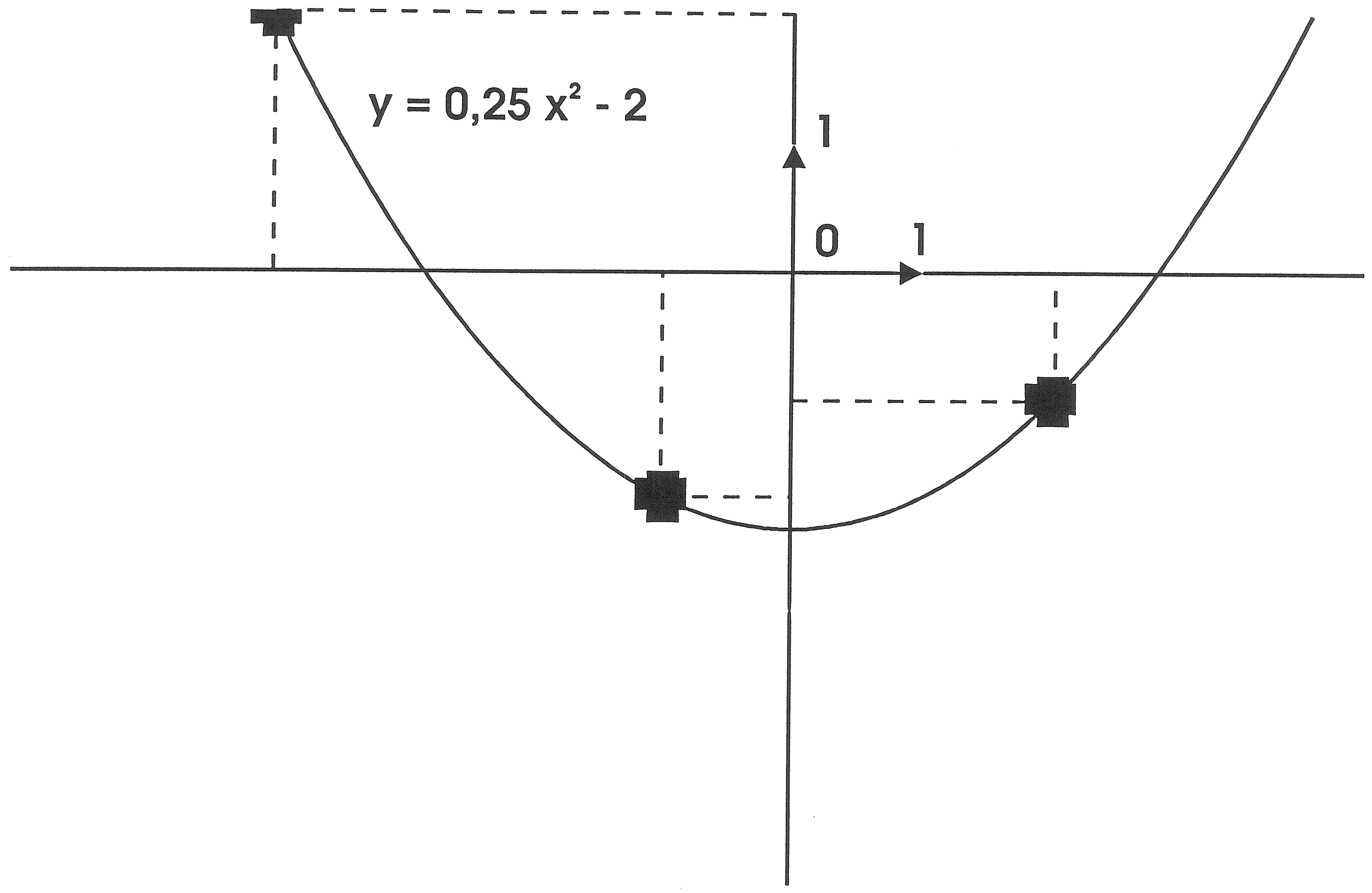
$y = 0{,}25\ x^2 - 2$



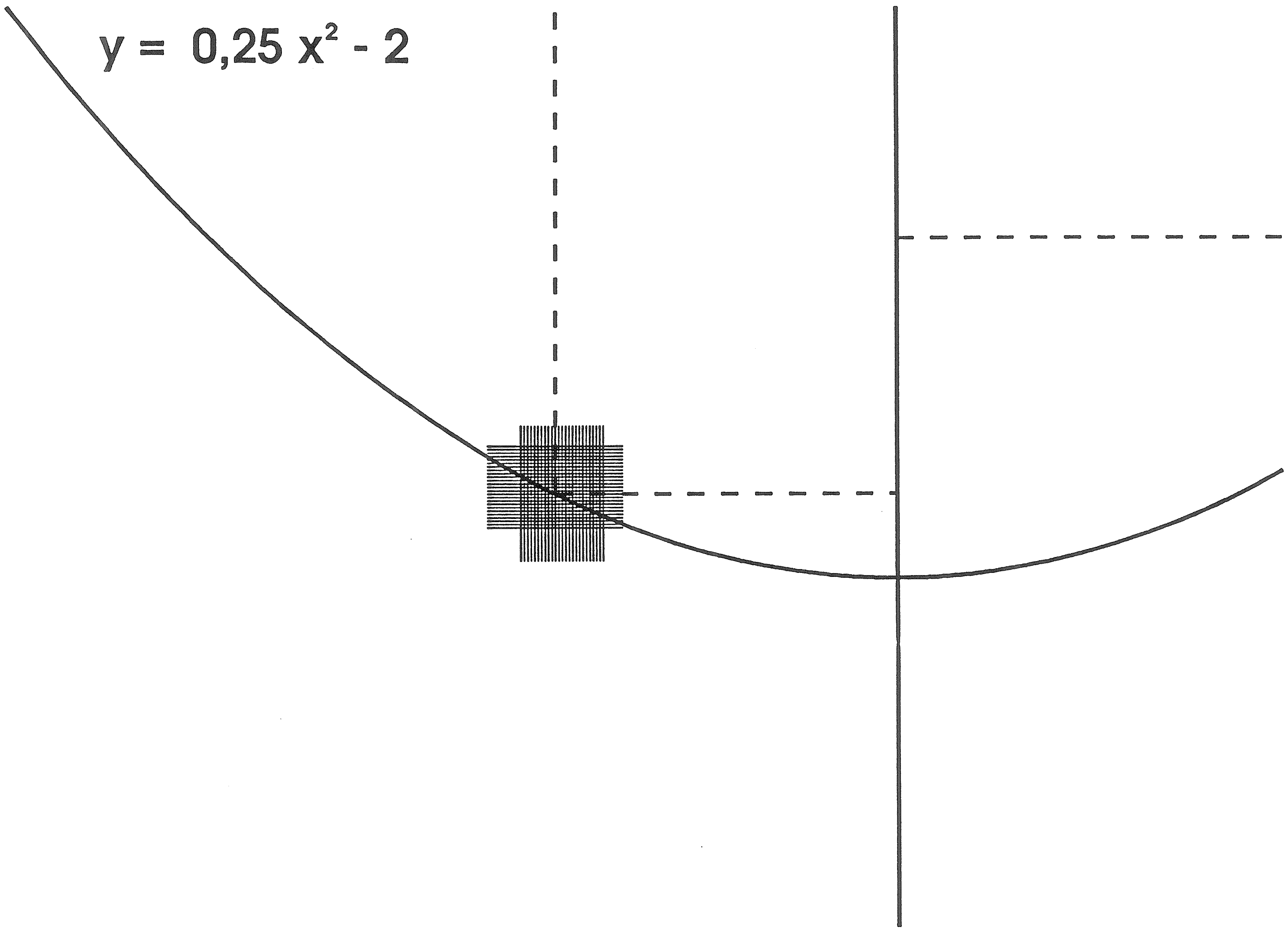
Cinquième zoom au point d'abscisse - 4.



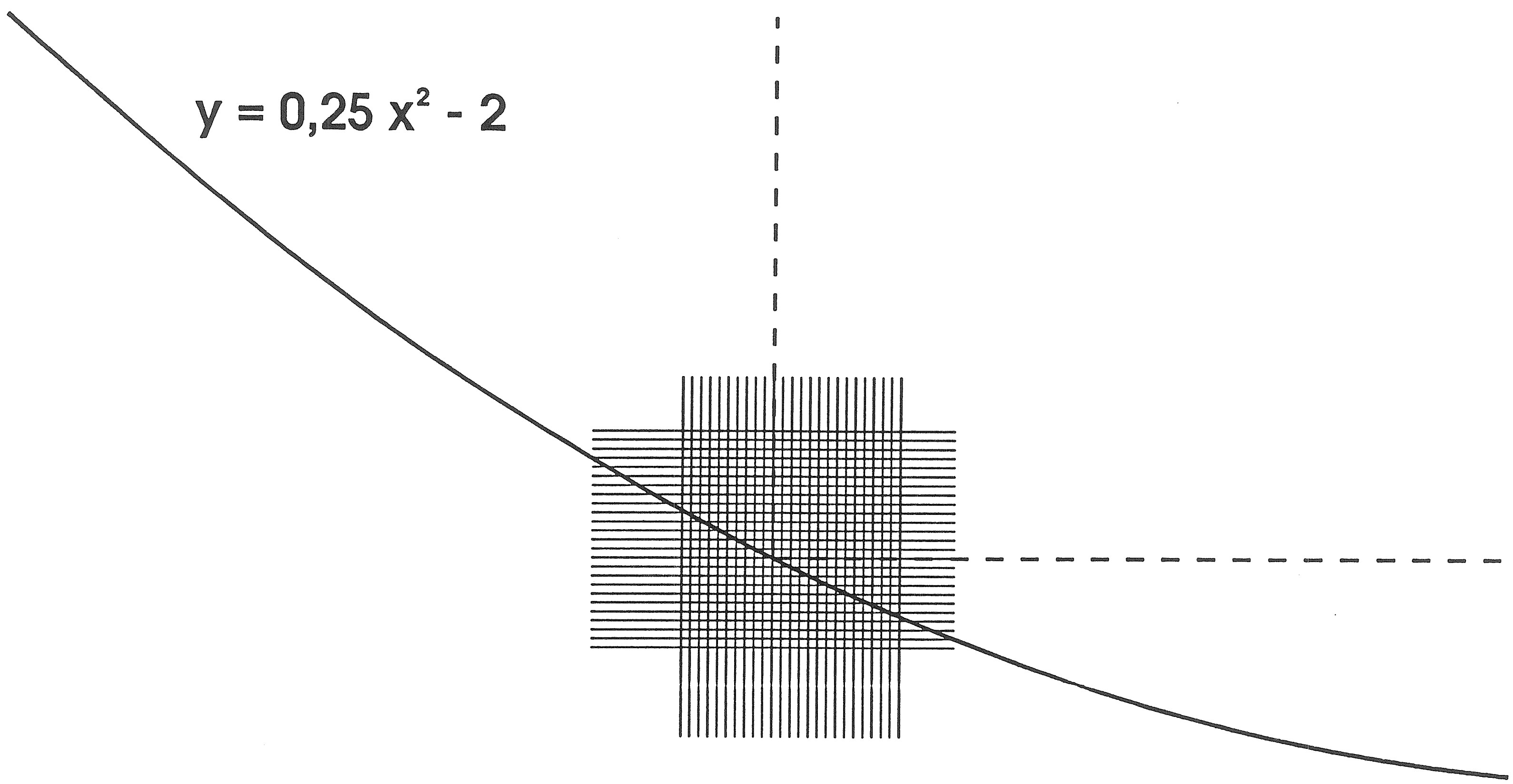
Premier zoom au point d'abscisse - 1



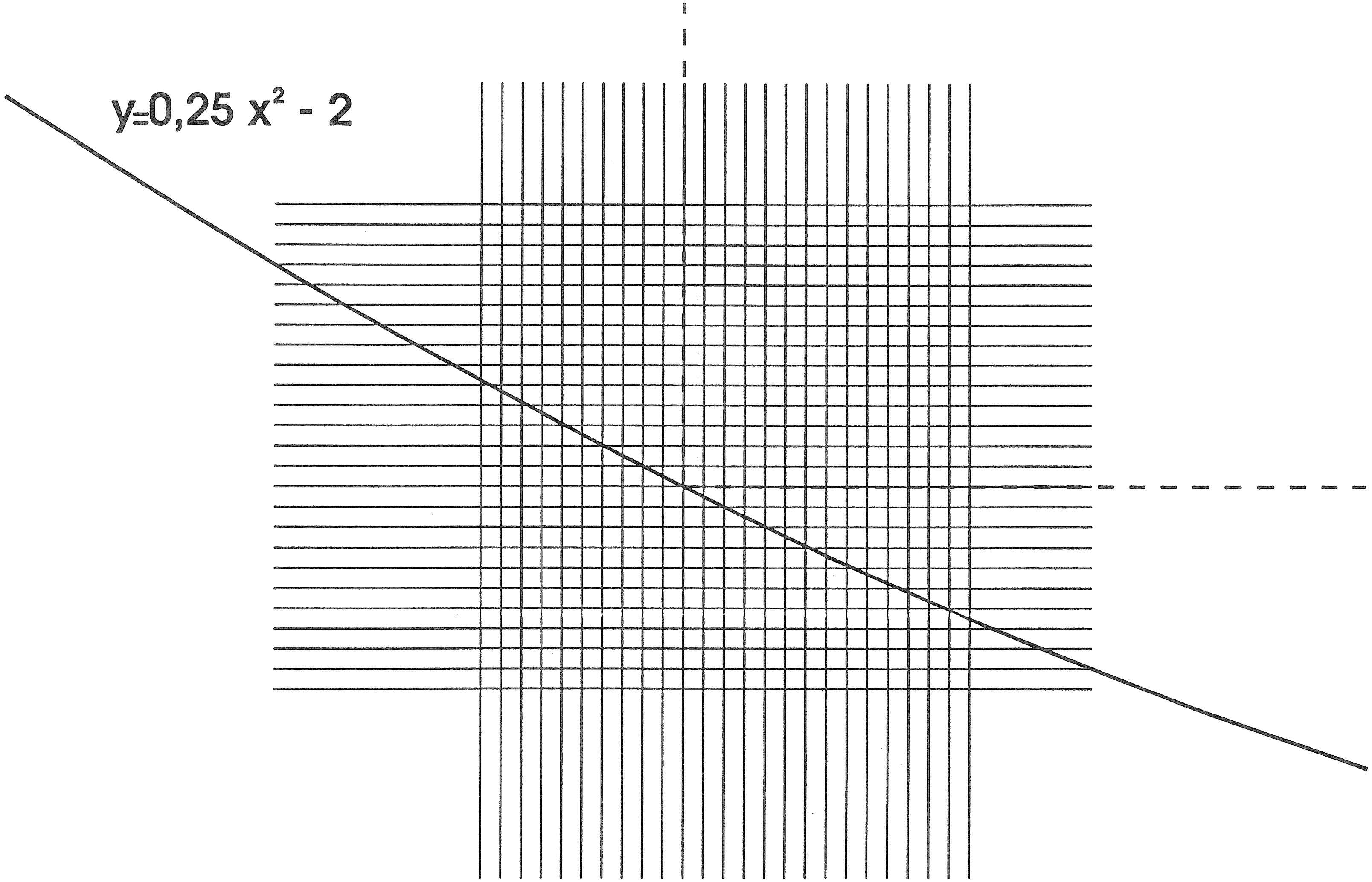
Deuxième zoom au point d'abscisse - 1



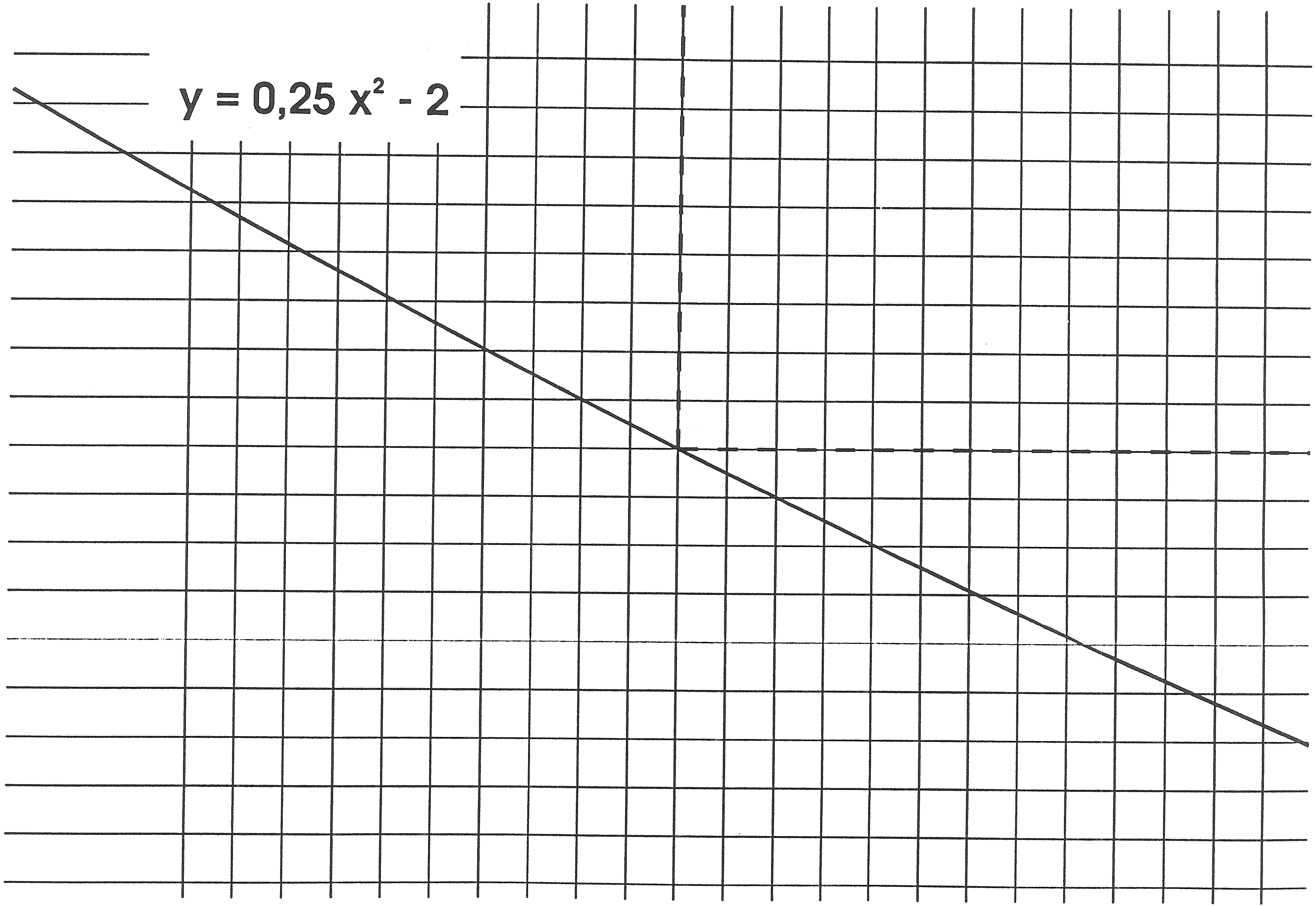
Troisième zoom au point d'abscisse - 1



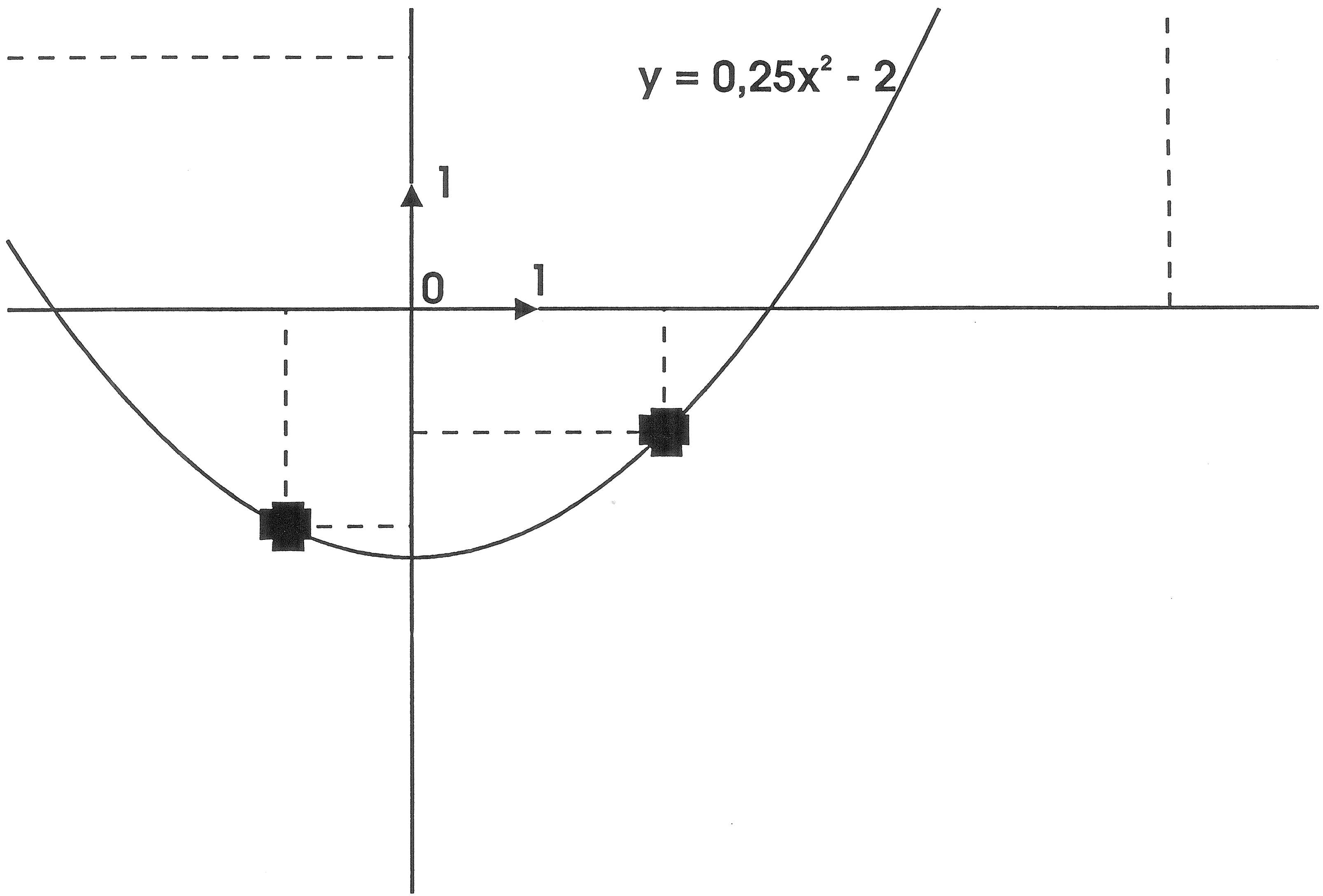
Quatrième zoom au point d'abscisse - 1



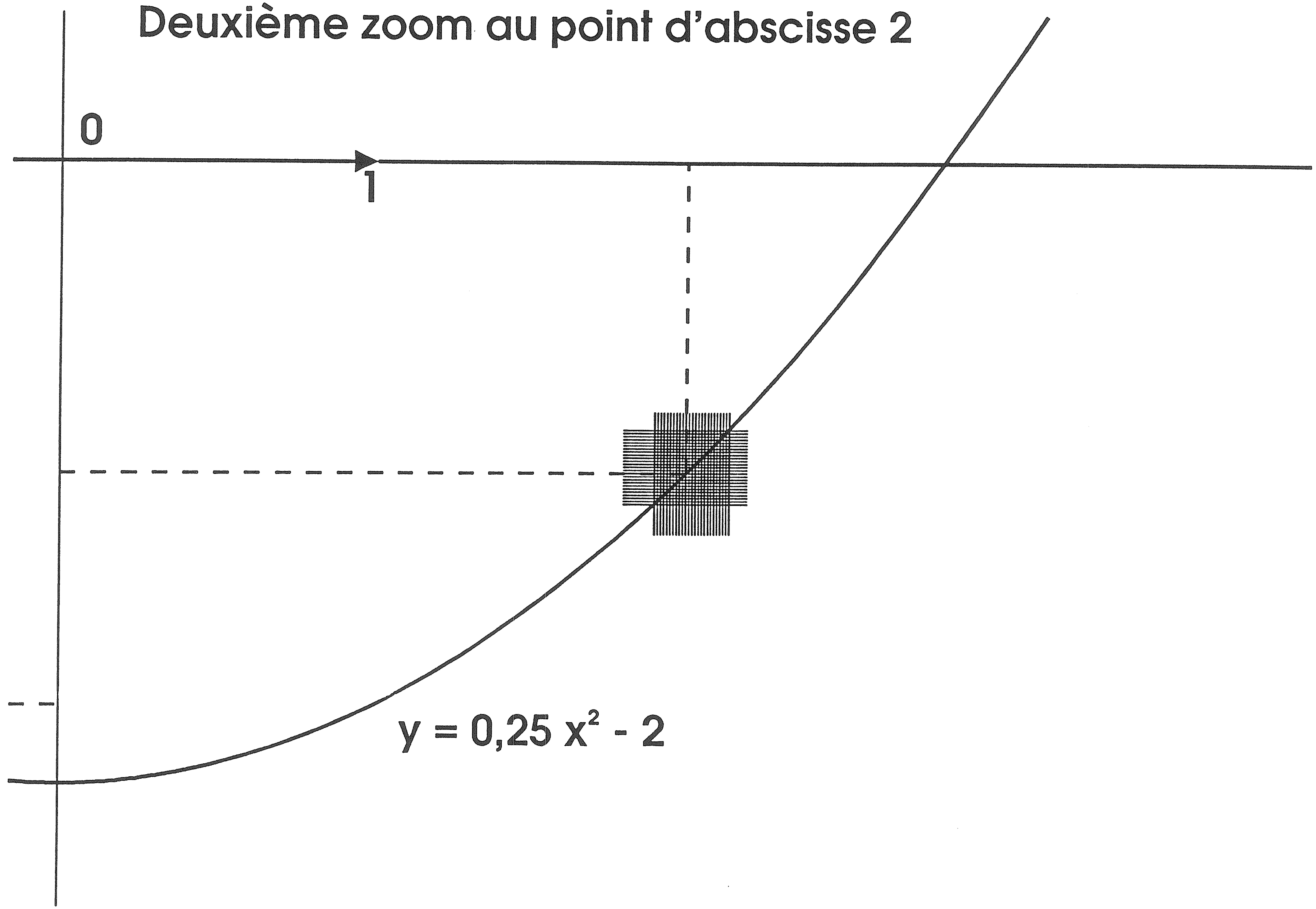
Cinauième zoom au point d'abscisse - 1

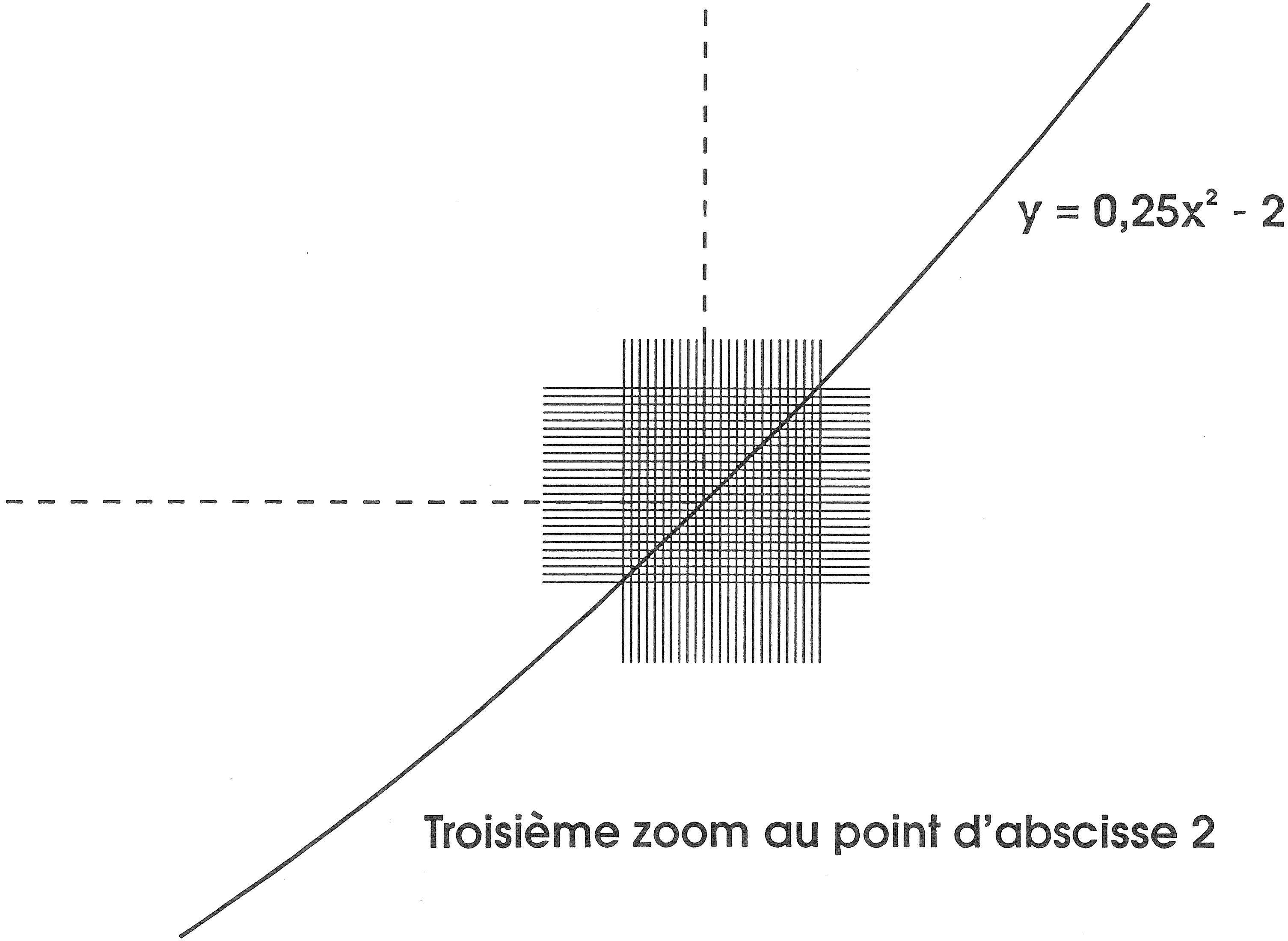


Premier zoom au point d'abscisse 2

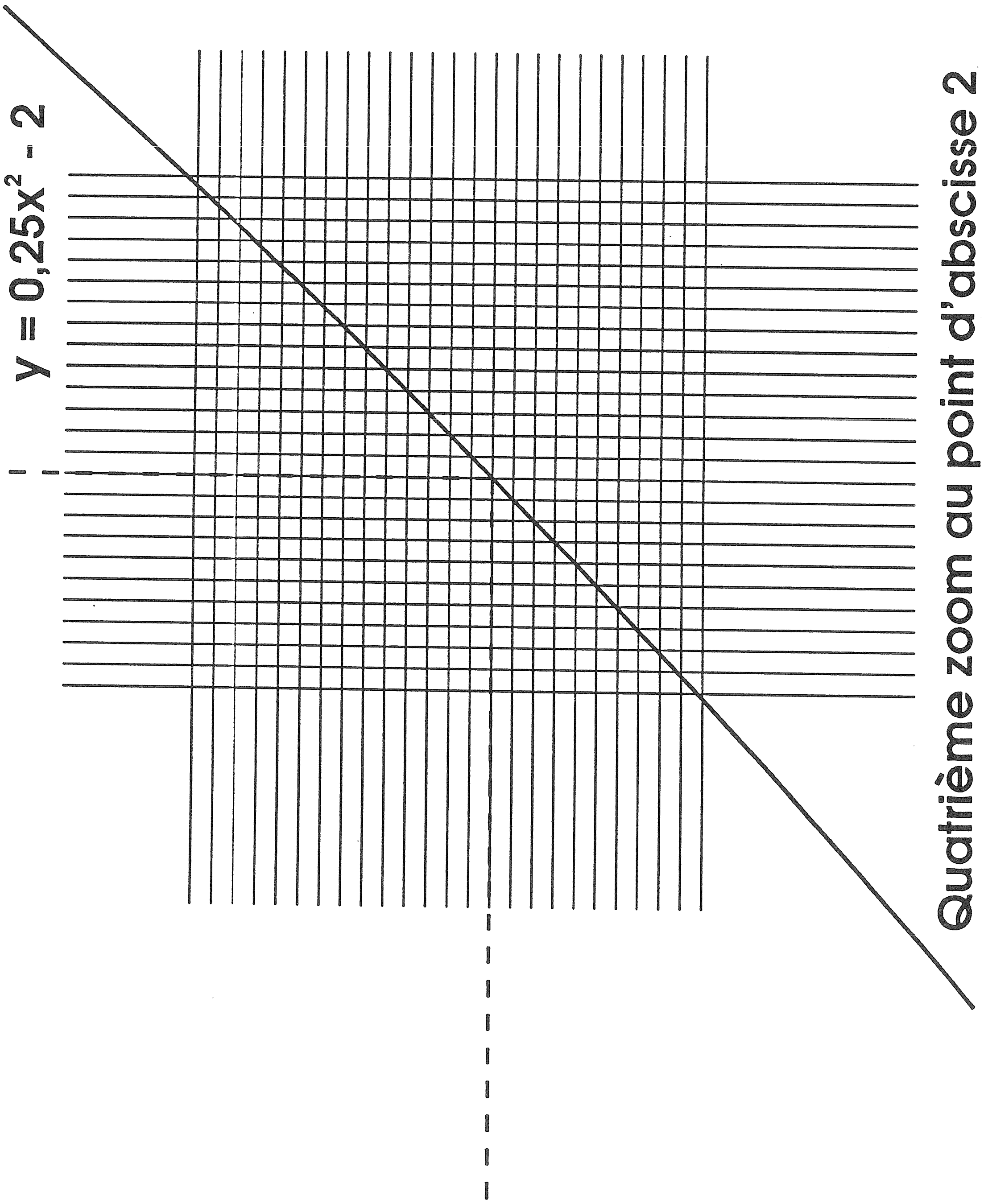


Deuxième zoom au point d'abscisse 2



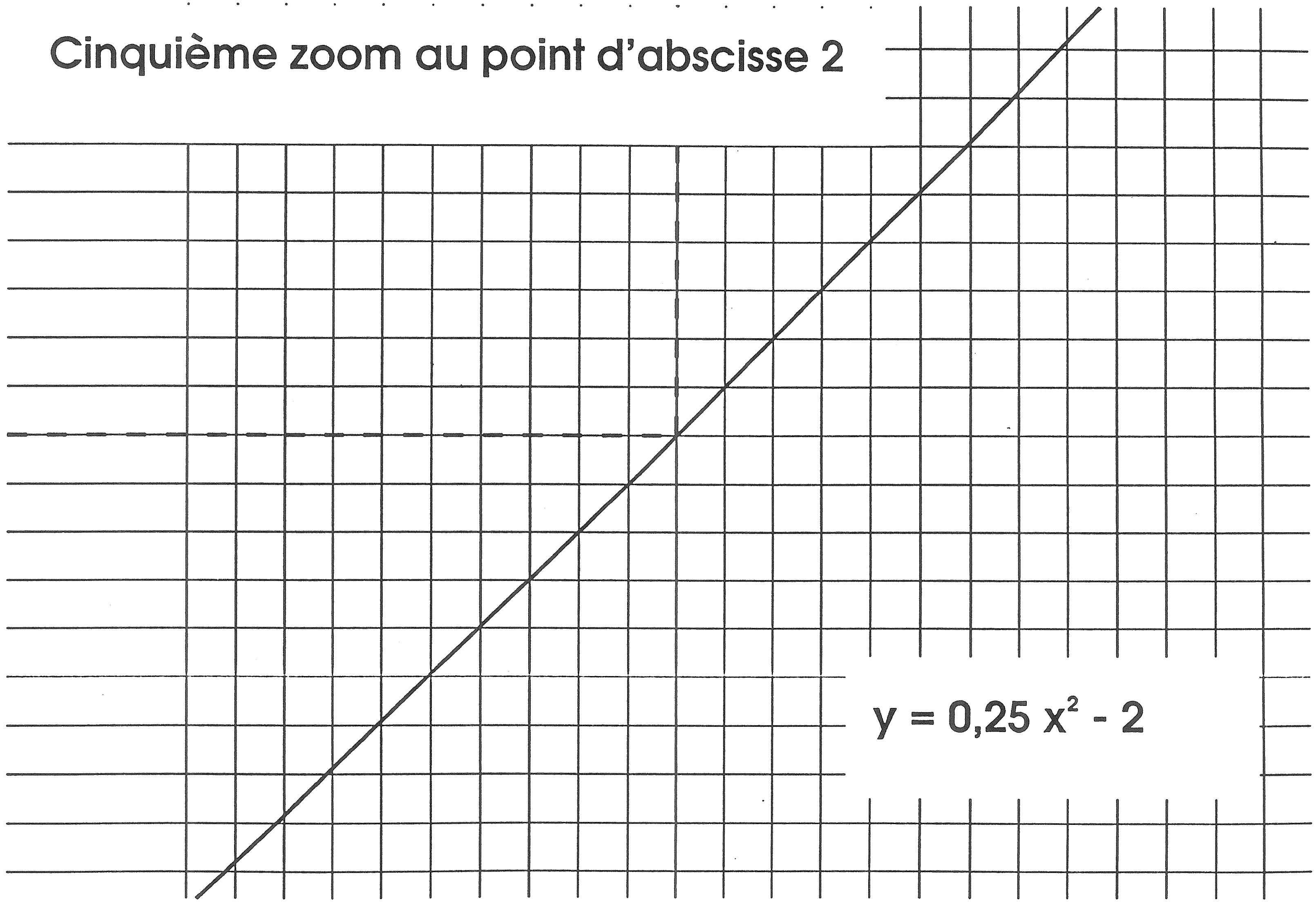


Troisième zoom au point d'abscisse 2

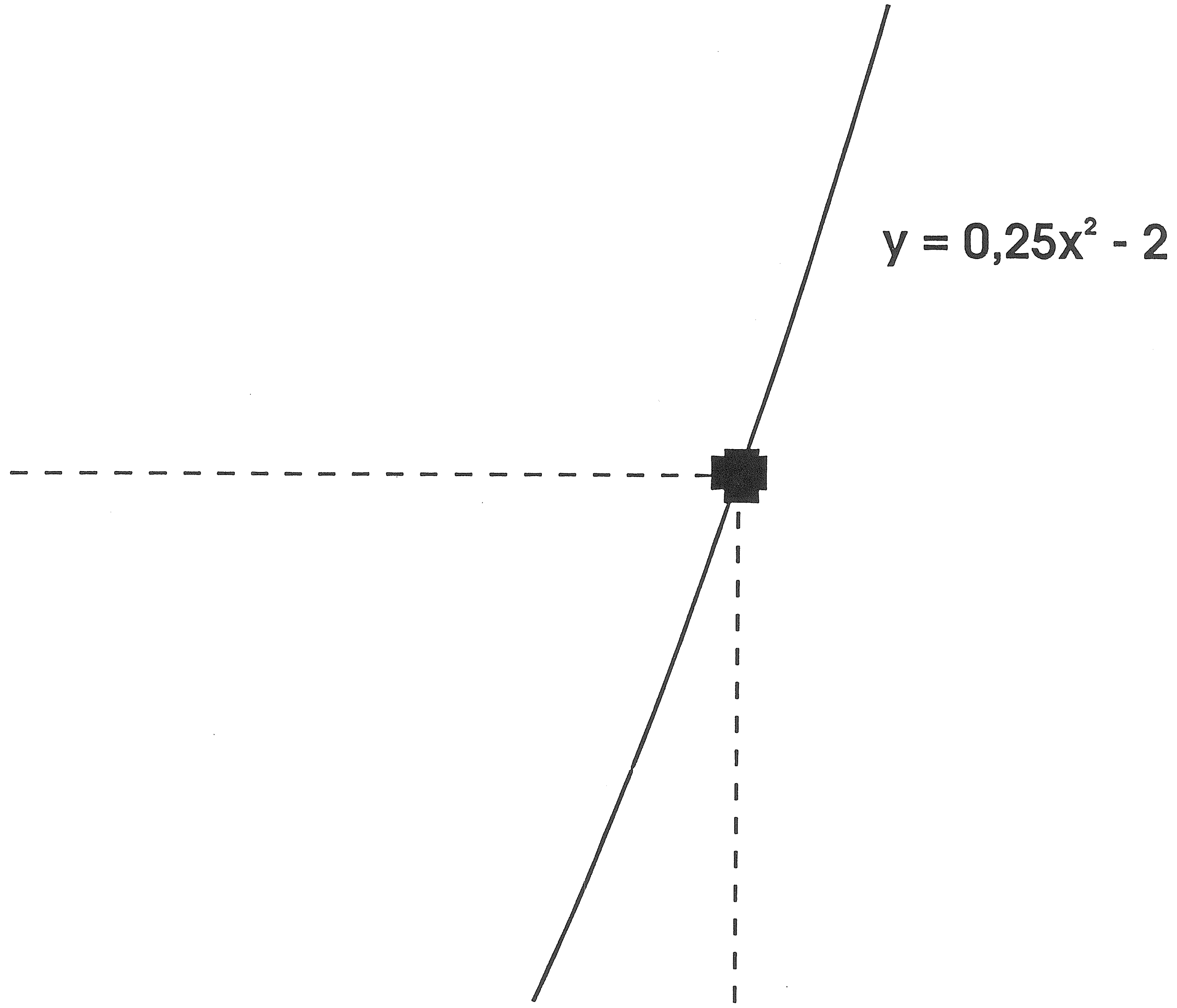


y = 0,25x² - 2
Quatrième zoom au point d'abscisse 2

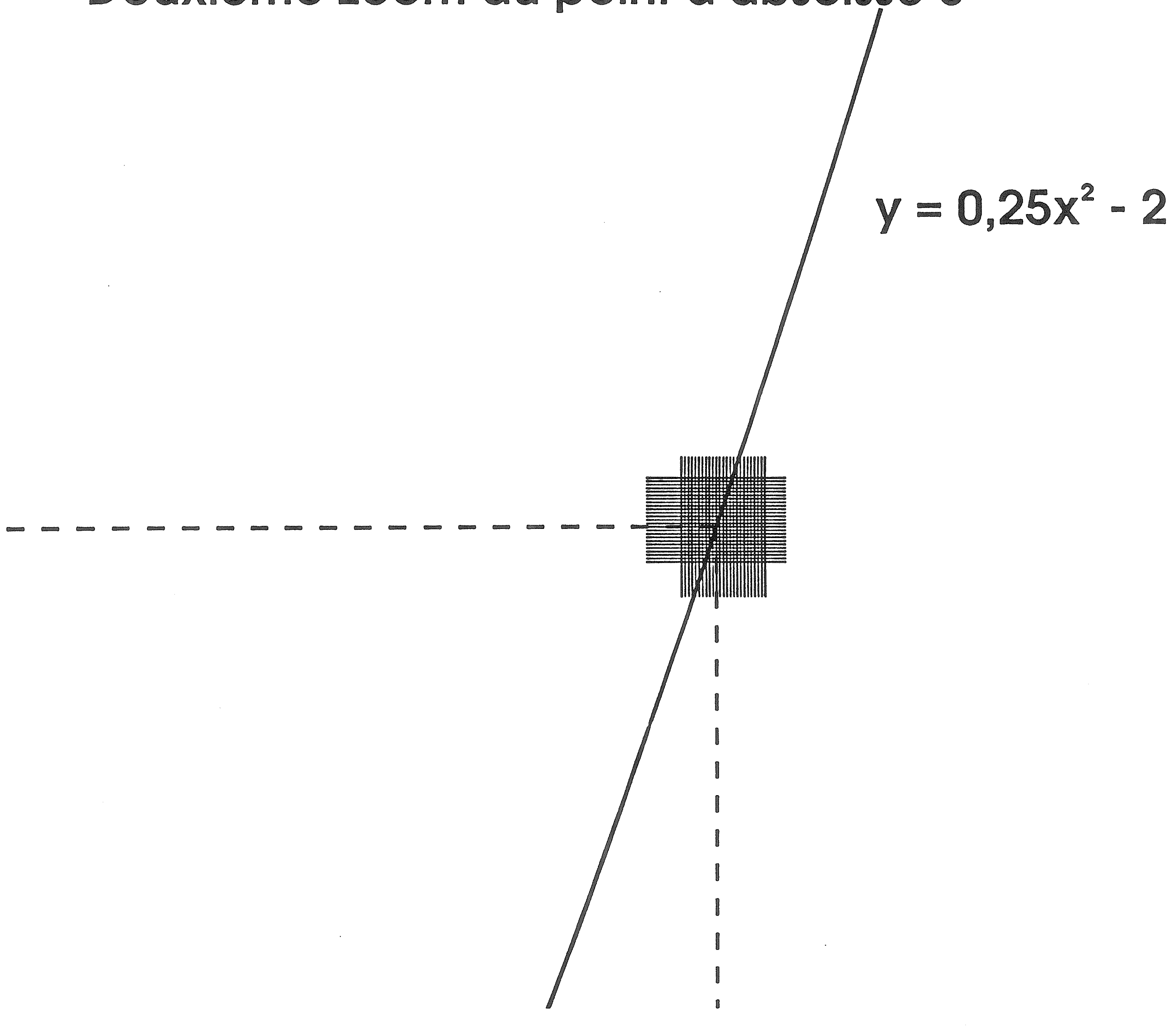
Cinquième zoom au point d'abscisse 2



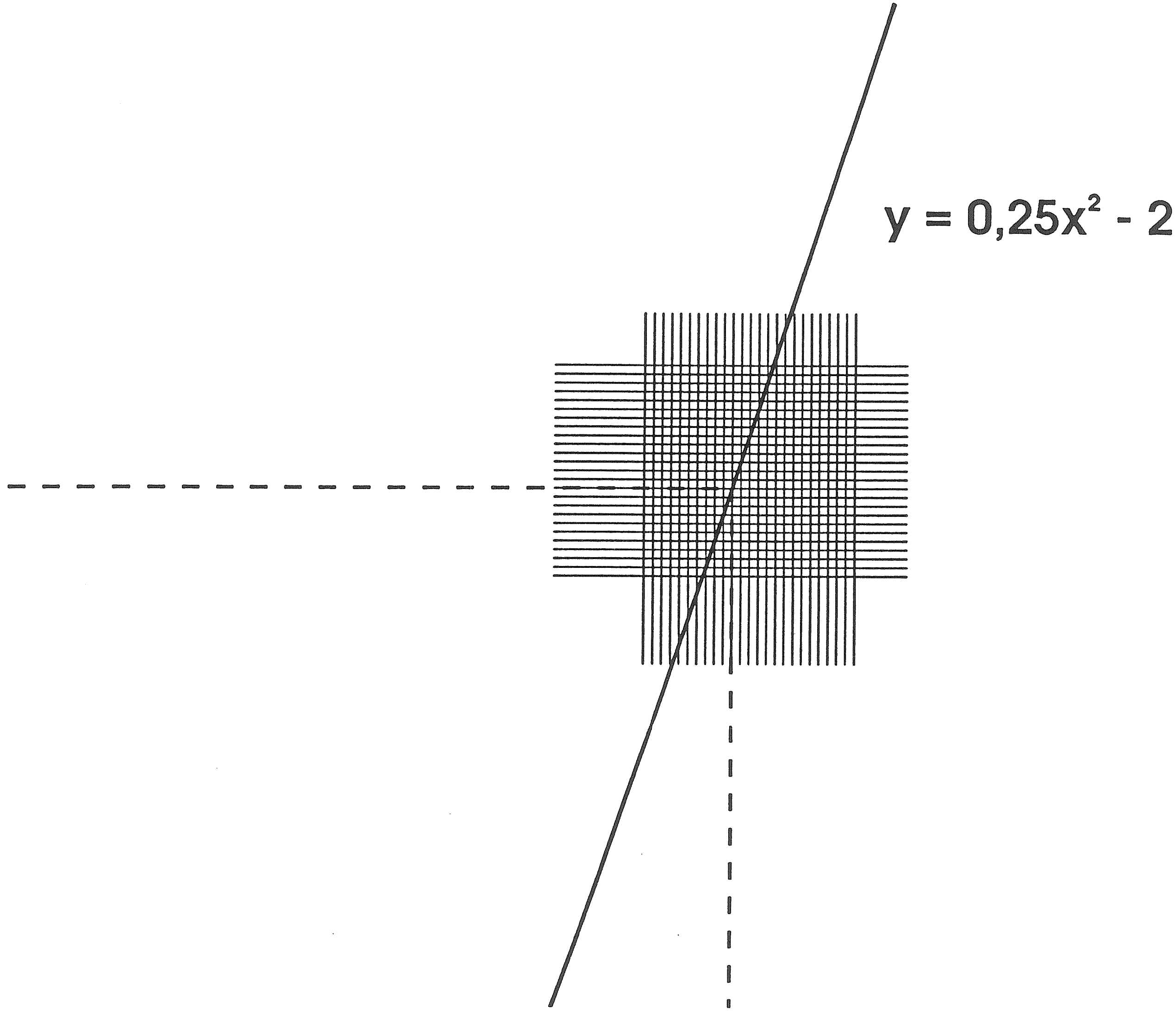
Premier zoom au point d'abscisse 6



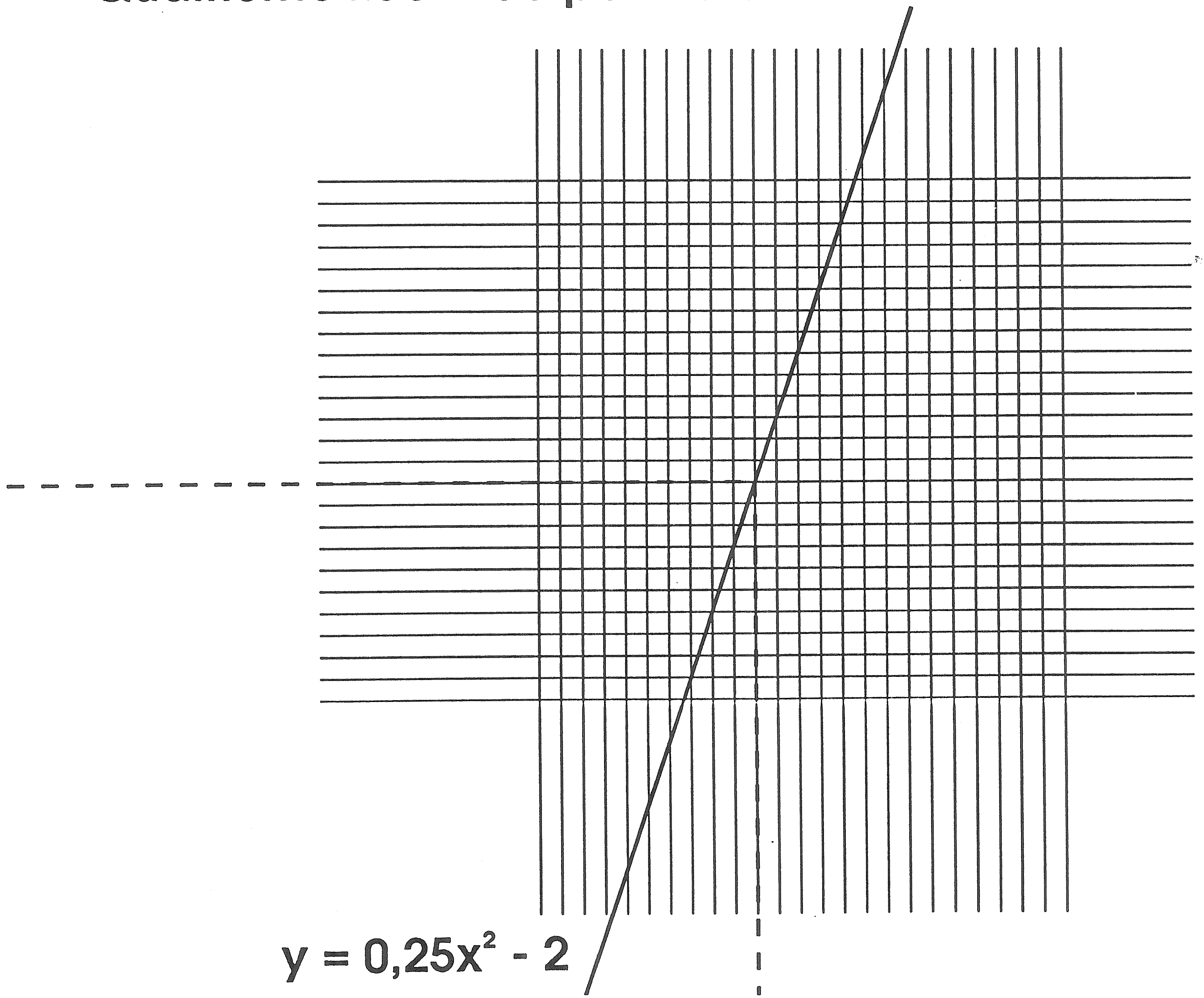
Deuxième zoom au point d'abscisse 6



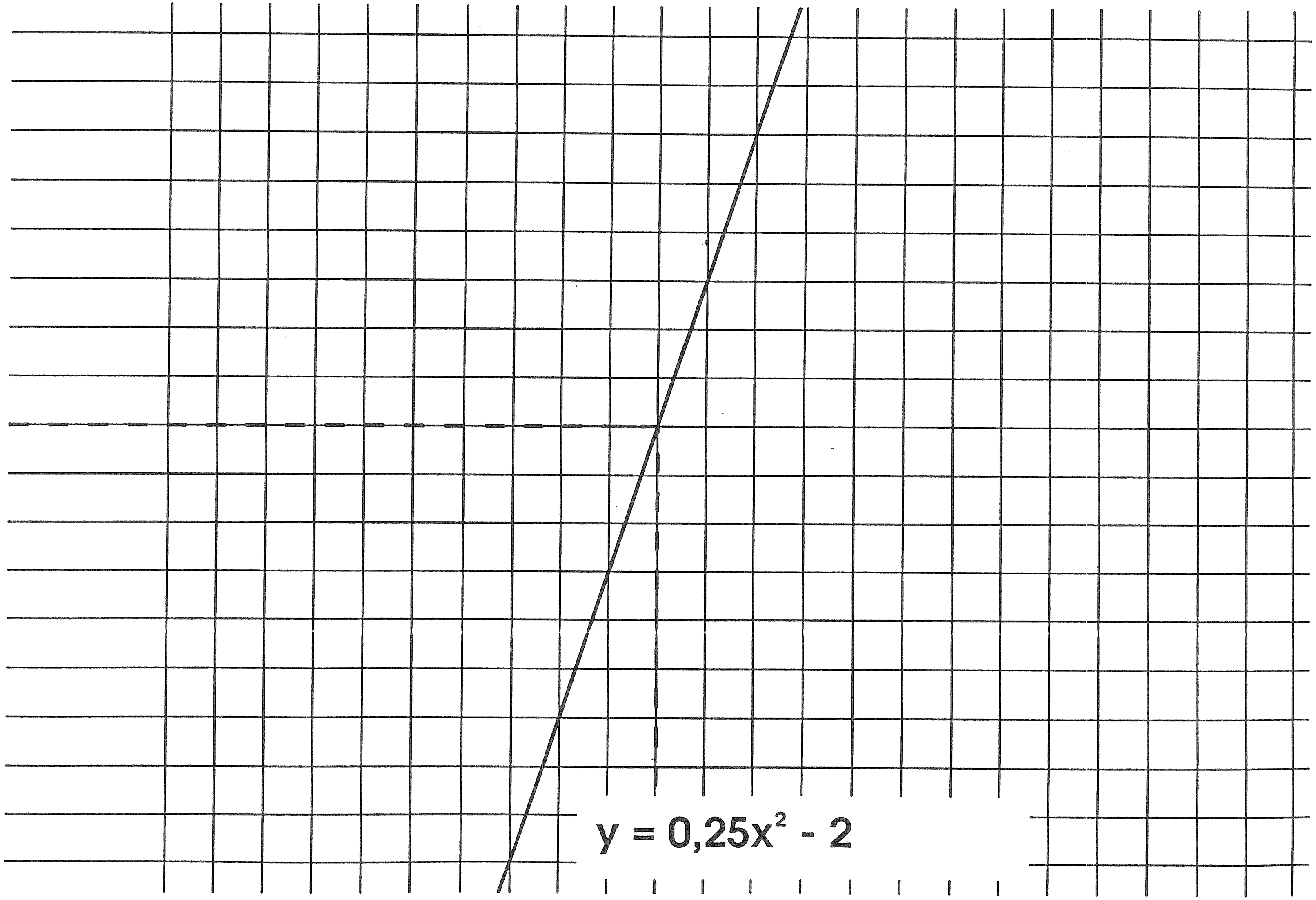
Troisième zoom au point d'abscisse 6



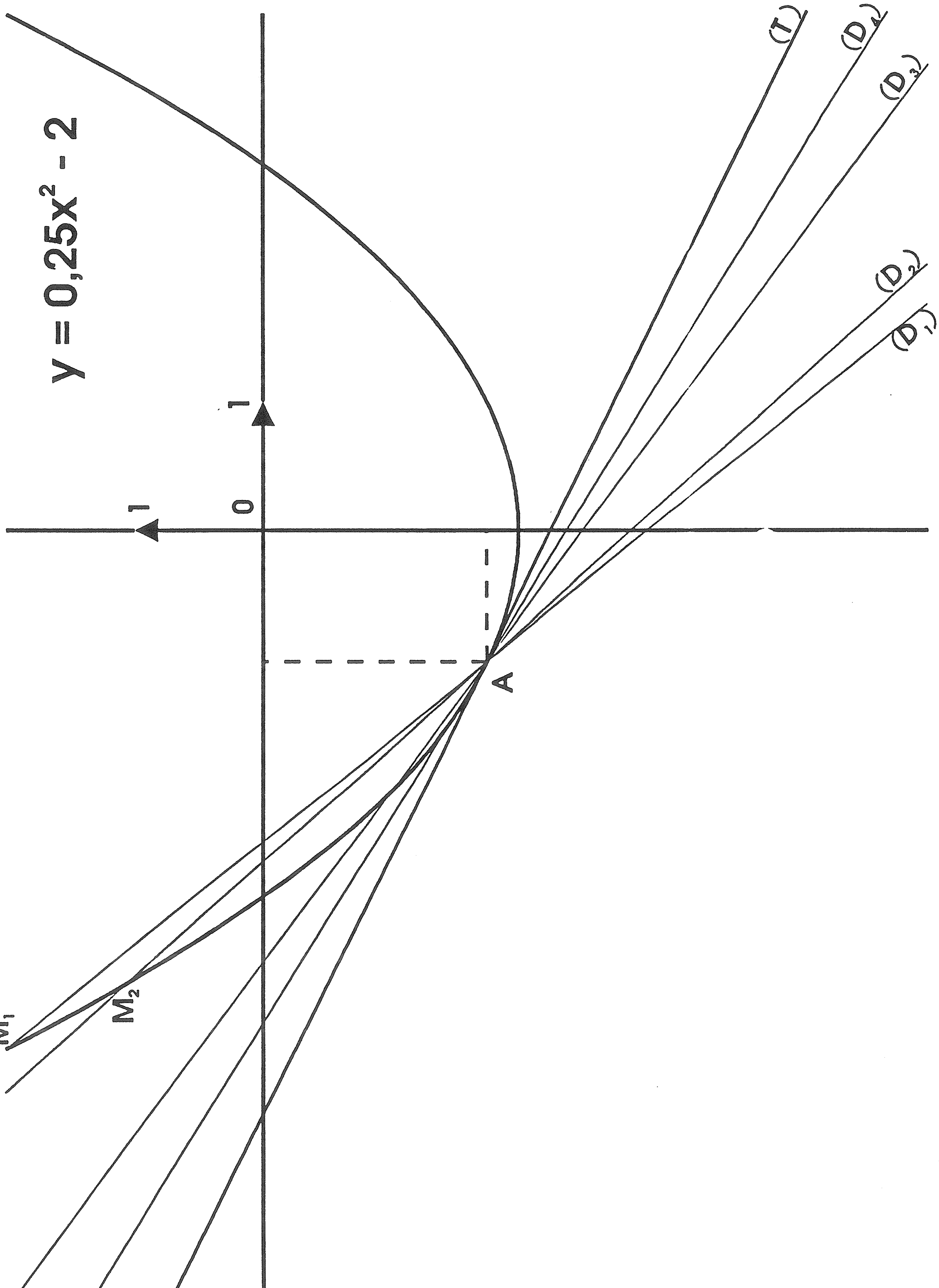
Quatrième zoom au point d'abscisse 6

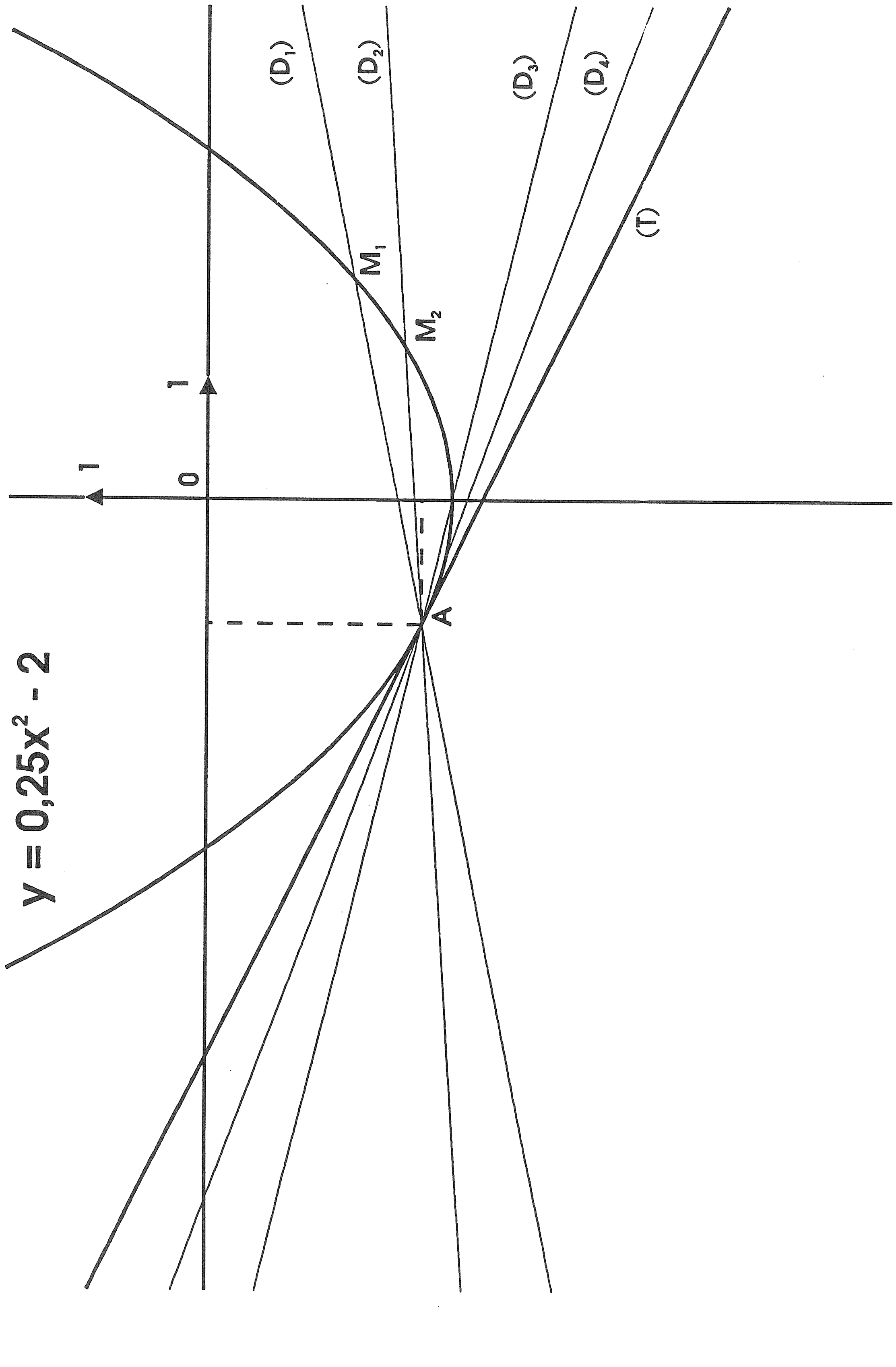


Cinquième zoom au point d'abscisse 6



II 7





y = 0,25x² - 2
(D₁)
(D₂)
(D₃)
(D₄)
(T)
M₁
M₂
A
0
1
1

ENSEIGNEMENT DES PROBABILITÉS EN ES : QUELQUES RÉFLEXIONS .

Exposé de Michel HENRY.

LE PROGRAMME :

Après avoir reposé sur des calculs très formels (tribu sur un univers...), l'enseignement des probabilités s'est appuyé sur la combinatoire, avec, sous-jacente, la notion d'équiprobabilité. La nécessité d'un autre point de vue sur les probabilités s'est faite jour pour au moins deux raisons essentielles :

- Le concept : $\dfrac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$ est notoirement insuffisant dans de nombreuses situations étudiées dans l'enseignement supérieur (BTS, IUT...).
- Les obstacles rencontrés par les élèves pour décrire clairement les situations et manier la combinatoire rendaient toute modélisation difficile.

LA NOTION DE PROBABILITÉ ET SON ÉVOLUTION :

Les points de vue sur la nature d'une probabilité :

Les deux conceptions (historiques) d'une probabilité induisent deux approches différentes :

Probabilité a priori (subjective)	Probabilité a posteriori (objective)
Pascal ↓	↓ *Bernoulli*
Hypothèse d'équiprobabilité	Approche fréquentiste

L'histoire de la notion de probabilité : quelques repères d'après l'article de **M. HENRY**, "REPERES N°14".

- PASCAL (1654) : "GÉOMÉTRIE DU HASARD".

Conduit à $\dfrac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$.
Réduit le calcul des probabilités à des situations simples, mais exclut toute étude plus complexe (météo, épidémies...).

- BERNOULLI (1713) : "ARS CONJECTANDI". Met en cause l'idée d'une probabilité a priori, calculée à partir de données d'une expérience aléatoire (probabilité subjective) et propose la détermination d'une probabilité a posteriori, après un grand nombre d'expériences semblables. Il y a alors assimilation entre probabilité et fréquence observée : la probabilité devient objective (attachée seulement à l'événement observé). Bernoulli propose donc le fondement de l'approche fréquentiste des probabilités. Difficulté alors : estimation (et non calcul) des probabilités, principal objet de la statistique inférentielle développée au XXème siècle.

- La notion a ensuite longtemps oscillé entre les deux conceptions avec Bayes, d'Alembert, Laplace (voir "REPERES" n°14 p 79 à 81), pour être finalement clarifiée par Poincaré et Kolmogorov, qui lui ont donné ses fondements mathématiques.

L'enjeu du programme actuel de 1ère ES :

- Assurer la transition entre la conception pascalienne (subjective) de la probabilité, et la conception objective (de nature fréquentiste).

- D'un point de vue didactique, placer les élèves en situation de concevoir cette nature fréquentiste de la probabilité.

LES PROBLÈMES DE L'ENSEIGNEMENT DES PROBABILITÉS :

Les obstacles liés aux idées préconstruites des élèves :

- Les élèves ont déjà une idée de type pascalien de la probabilité. Nécessité de proposer des situations pour "déstabiliser" cette conception (exemple des punaises etc...).

- Obstacle de type "déterministe": Qu'est ce qu'une expérience qui se répète rigoureusement identique à elle-même ? (les résultats devraient être les mêmes...).

- Concept de hasard : Qu'est ce que le hasard ? Des tentatives de définition données par les philosophes, par exemple dans "Jacques le fataliste" de Diderot.

- Difficulté dans la description d'une expérience qui n'est pas menée à son terme (Cf. le "problème des partis" de Pascal).

Les obstacles liés à l'approche fréquentiste de la probabilité :

Observer la stabilité relative de la fréquence peut conduire à assimiler la probabilité à une fréquence limite, avec deux difficultés majeures:

- On introduit une notion difficile grâce à une notion encore plus difficile.

- La "convergence " est relative et n'a rien de la convergence d'une suite de réels.

Des éléments de réponse :

On ne peut pas ignorer les idées préconstruites des élèves et on pourrait être amené à proposer le schéma suivant :

- Utiliser la notion d'équiprobabilité dans des situations simples.

- Observer une stabilisation de la fréquence dans la répétition d'épreuves simples.

- Admettre que, dans les cas les plus complexes, on peut estimer une probabilité.

En tout cas, bien différencier ce qui est du domaine sensible (fréquence, stabilisation de la fréquence...), de ce qui est abstrait et, finalement, montrer qu'il y a deux manières de déterminer une probabilité dans le modèle mathématique :

- Soit on fait l'hypothèse d'équiprobabilité.
- Soit cette hypothèse n'est pas possible et on observe les fréquences qui donnent une <u>estimation</u> de la probabilité (REPERES n°14 pages 88-89).

CE QUE L'ON DEMANDE AUX ELEVES :

En 1ère :

- Des aptitudes à décrire une expérience aléatoire pour pouvoir mettre en place le modèle mathématique. En l'absence de combinatoire, quels exercices proposer ? Des expériences de modélisation.

- Imaginer des événements dont la réalisation physique est pratiquement impossible.

- Manipuler la logique des ensembles : a plus de sens à partir des statistiques (proportions, pourcentages).

En terminale :

- La notion de "variable aléatoire" prend de l'intérêt si elle est accompagnée de la notion de "loi de probabilité" : malheureusement, aucune étude de loi de probabilité n'est au programme.

- Les probabilités conditionnelles : semblent aller à l'encontre de la nature objective de la probabilité. Le retour au modèle permet de lever cette contradiction apparente. (voir développement dans REPERES n°14 pages 95 à 98).

PRÉSENTATION DE QUELQUES PARADOXES

- Problème des bancs : REPERES N°14 p.74.

- Paradoxe de la "corde" : REPERES N°13 p.11.

- Jetons bicolores : REPERES N°14 p.98 (montre l'intérêt des probabilités conditionnelles).

- Jeu télévisé (les chèvres et la voiture) : REPERES N°14 p 98-99. Soulève le problème de la description d'une expérience aléatoire.

Bibliographie :

C.R.D.P de Grenoble
11 Avenue Général Champon 38031 GRENOBLE CEDEX

Les mathématiques dans l'information chiffrée
R.Chuzeville, S. Gasquet
Les chiffres et l'élève... mathématiques en 1ES
S. Gasquet
Fenêtre sur courbes
R.Chuzeville, S. Gasquet

REPERES-IREM

Topiques éditions
24 rue du 26° B.C.P 54700 PONT à MOUSSON

IREM de BESANCON
Facultés des sciences La Bouloie- Route de Gray
25030 BESANÇON CÉDEX

L'enseignement des probabilités
Michel Henry

I.R.E.M. - FACULTÉ DES SCIENCES -
LA BOULOIE - ROUTE DE GRAY
25030 BESANÇON CEDEX
tél : 81 66 61 92
fax : 81 66 61 99

Titre	**L'enseignement des mathématiques en première ES**
Auteur	Groupe Lycée de l'IREM
Public	Professeurs de mathématiques enseignant en lycée ou formateurs intervenant en formation initiale ou continue
Date	Février 1995
Mots clés	Séquences, enseignement, pourcentage,information chiffrée, nombre dérivé, graphique.
Résumé	Présentation de quelques séquences d'enseignement en classe de première ES, dans des domaines spécifiques de cette série. Utilisation des cadres numérique, graphique et algébrique.

IREM de Besançon
Dépôt légal 91-95
1er trimestre 95
ISBN 2-909963-90-X